Наймарк М.А.

Теория представлений групп

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 512
ББК 22.144
Н 20

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 09-01-07068

Наймарк М.А. **Теория представлений групп.** — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 576 с. — ISBN 978-5-9221-1260-4.

В книге в доступной форме, но без снижения математической строгости, излагаются основы теории конечномерных представлений групп, в частности, представлений конечных групп, компактных групп и классических групп, а также излагаются основные понятия и предложения теории групп Ли и их конечномерных представлений.

Для студентов старших курсов и аспирантов математических, физических и химических факультетов, научных работников: математиков и физиков-теоретиков.

ISBN 978-5-9221-1260-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Эта книга написана для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников — математиков, физиков и химиков, желающих изучить основы теории конечномерных представлений групп.

Предполагается, что читателю известны основные сведения из линейной алгебры, математического анализа и теории аналитических функций. Все остальные, нужные для чтения этой книги сведения излагаются в самой книге, в том месте, где они используются, или снабжаются библиографическими указаниями.

Первые две главы посвящены алгебраическим аспектам теории представлений и представлениям конечных групп. В следующих главах излагаются основные сведения из теории представлений топологических групп, теории групп и алгебр Ли и их представлений.

Такое расположение материала помогает читателю постепенно усваивать все более трудные вопросы теории. С другой стороны, по мнению автора, именно алгебра является основой для всей излагаемой теории.

В связи с ограничением в объеме в этой книге изложена теория только конечномерных представлений. Автор намерен изложить в другой книге более общую теорию, включающую бесконечномерные представления.

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Штерну, который оказал большую помощь в работе над рукописью не только как редактор, но фактически как соавтор. Им написаны главы VIII–XI, § 2, 3 главы IV, § 4, 5 главы II, п. 2.10 главы I.

Автор глубоко благодарен А. А. Кириллову, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний.

Май, 1975 г. *М. А. Наймарк*

Глава I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В этой главе изложены те понятия и предложения теории представлений, которые носят чисто алгебраический характер и, следовательно, не используют топологические и аналитические факты. Строго говоря, к каждому вводимому в гл. I понятию следовало бы добавить эпитет «алгебраический», например, алгебраическая группа, алгебраический изоморфизм, алгебраическая эквивалентность и т. д. Однако ради краткости мы будем в гл. I этот эпитет только подразумевать и использовать его в других главах лишь в тех местах, где может возникнуть недоразумение.

§ 1. Основные понятия теории групп

1.1. Определение группы. Множество G называется *группой*, если определено *произведение* g_1g_2 каждых двух элементов g_1, $g_2 \in G$, удовлетворяющее следующим условиям [1]):

а) $g_1g_2 \in G$ для любых g_1, $g_2 \in G$;

б) $(g_1g_2)\,g_3 = g_1(g_2g_3)$ для любых g_1, g_2, $g_3 \in G$;

в) в G существует единственный элемент e такой, что $eg = ge = g$ для каждого $g \in G$; e называется *единичным элементом* группы G;

г) для каждого элемента $g \in G$ существует один и только один элемент, обозначаемый g^{-1}, такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$; элемент g^{-1} называется *обратным* к g. Очевидно, g есть обратный к g^{-1}, так что $(g^{-1})^{-1} = g$.

Группа G называется *коммутативной* (или *абелевой*), если $g_1g_2 = g_2g_1$ для всех g_1, $g_2 \in G$, и *некоммутативной* в противном случае. В случае коммутативной группы вместо g_1g_2 пишут также $g_1 + g_2$, и тогда единичный элемент обозначают через 0. При таком обозначении произведения говорят, что группа задана в *аддитивной записи*.

[1]) В действительности, эти условия можно ослабить. Например, достаточно в условии в) потребовать только *существование* единичного элемента. Его единственность отсюда следует. Действительно, если e, e' — единичные элементы, то $e'e = e'$ и $e'e = e$ и потому $e' = e$ (подробнее см., например, Курош [1]). Однако минимальный список аксиом, определяющих группу, нам не понадобится.

Группа называется *конечной*, если число ее элементов конечно; в противном случае группа называется *бесконечной*. Число элементов конечной группы G называется ее *порядком* и обозначается $|G|$. Конечную группу G, состоящую из элементов $g_1, \ldots, g_m$, $m = |G|$, можно задать, записав ее таблицу умножения:

	g_1	g_2	$\ldots$	g_m
g_1	g_1g_1	g_1g_2	$\ldots$	g_1g_m
g_2	g_2g_1	g_2g_2	$\ldots$	g_2g_m
.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
g_m	g_mg_1	g_mg_2	$\ldots$	g_mg_m

,

в которой на пересечении j-й строки и k-го столбца написано произведение g_jg_k. Эта таблица называется *таблицей Кэли* группы G.

Примеры. 1. Совокупность $\mathbf{R}^1$ [1] всех действительных чисел есть группа, если определить в ней умножение как сложение действительных чисел, эта группа называется *аддитивной группой действительных чисел*. Единичным элементом этой группы является число нуль, а обратным элементом к числу x — число $-x$. Аналогично определяется *аддитивная группа* $\mathbf{C}^1$ *комплексных чисел*.

2. Совокупность $\mathbf{R}_0^1$ всех отличных от нуля действительных чисел образует группу, если определить в ней умножение как обычное умножение чисел. Эта группа называется *мультипликативной группой* действительных чисел. Единицей этой группы является число 1, а обратным к числу x — число $1/x$. Аналогично определяется *мультипликативная группа* $\mathbf{C}_0^1$ *комплексных чисел*.

3. Множество $G_0 = \{1, i, -1, -i\}$ с обычным умножением — группа.

Таблица Кэли этой группы имеет вид

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

.

[1] Как правило, буква $\mathbf{R}^1$ будет обозначать в дальнейшем *аддитивную группу* вещественных чисел, а буква $\mathbf{R}$ будет использоваться в случаях, когда множество вещественных чисел рассматривается как *поле*.

4. Пусть X — линейное пространство, G_X — совокупность всех линейных операторов в X, взаимно однозначно отображающих X на X. Определим в G_X умножение как умножение операторов. Тогда G_X — группа. Единичным элементом здесь является единичный оператор 1 (т. е. такой, что $1x = x$ для всех $x \in X$), а обратным элементом к оператору A — обратный оператор A^{-1}. Если X конечномерно ($\dim X = n < \infty$), то в фиксированном базисе в X операторы $A \in G_X$ задаются невырожденными (т. е. с определителем $\neq 0$) матрицами n-го порядка.

5. Совокупность всех комплексных матриц n-го порядка с не равным нулю определителем есть группа, если определить в ней умножение как умножение матриц; эта группа обычно обозначается $GL(n, \mathbf{C})$. Единицей в ней является единичная матрица, а обратным элементом к матрице a является обратная матрица a^{-1}. Аналогично определяется группа $GL(n, \mathbf{R})$ всех вещественных матриц n-го порядка с не равным нулю определителем. При $n \geqslant 2$ эти группы некоммутативны.

6. Пусть $SL(n, \mathbf{C})$ — совокупность всех комплексных матриц n-го порядка с определителем, равным единице. Определим в $SL(n, \mathbf{C})$ произведение как произведение матриц. Тогда $SL(n, \mathbf{C})$ — группа, ибо при умножении матриц определители перемножаются. Аналогично определяется группа $SL(n, \mathbf{R})$ всех вещественных матриц n-го порядка с определителем, равным единице.

7. Пусть G'_0 — совокупность всех поворотов квадрата $ABCD$ вокруг его центра O, совмещающих этот квадрат с ним самим. Всего таких различных [1] поворотов имеется четыре: поворот α_0 на угол 0, поворот α_1 на угол 90°, поворот α_2 на угол 180° и поворот α_3 на угол 270° (все против часовой стрелки), переводящие соответственно точку A в A, B, C, D.

Произведением $\alpha\beta$ двух поворотов α, β называется результат применения сначала поворота β, а затем — поворота α. Нетрудно проверить, что при таком определении произведения G'_0 — группа четвертого порядка.

8. Совокупность $\mathbf{N}$ всех целых чисел есть группа, если определить в $\mathbf{N}$ умножение как сложение целых чисел. Эта группа называется *группой целых чисел*.

9. Пусть $\mathbf{N}_p$ — совокупность всех целых чисел, кратных p, где p — фиксированное натуральное число; $\mathbf{N}_p = \{np,\, n \in N\}$. Определим в $\mathbf{N}_p$ умножение как сложение чисел из $\mathbf{N}_p$. Очевидно, $\mathbf{N}_p$ — группа.

10. Пусть Ω_p — совокупность всех корней p-й степени из единицы, где p — фиксированное натуральное число. Как известно, оно состоит из чисел $e^{i2\pi k/p}$, $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, p-1$. Произведением чисел из Ω_p будем

[1] Два поворота не считаются различными, если приведут к одному и тому же положению квадрата.

считать их обычное произведение. Очевидно, что тогда Ω_p — группа. Отметим, что $\Omega_4 = G_0$ (см. пример 3).

Группы в примерах 1–3, 7–10 коммутативны. Группы в примерах 3, 7 — конечные четвертого порядка, в примере 10 — конечная p-го порядка, группы в примерах 1, 2, 4–6, 8, 9 — бесконечные.

1.2. Подгруппы; смежные классы. Множество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы G (кратко, подгруппой в G), если из $g_1, g_2 \in H$ следует, что также $gg_2^{-1} \in H$. В частности, при $g_1 = g_2$ мы получаем, что $e \in H$, и потому из $g_1, g_2 \in H$ следует, что также $g_1^{-1} \in H$ и $g_1 g_2 \in H$. Следовательно, при том же определении умножения, что и в G, множество H также является группой.

Так, $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}_0^1$, $GL(n, \mathbf{R})$, $\mathbf{N}$ являются подгруппами в $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{C}_0^1$, $GL(n, \mathbf{C})$, $\mathbf{R}^1$ соответственно (см. примеры 1, 2, 5, 8 п. 1.1); $SL(n, \mathbf{C})$ и $SL(n, \mathbf{R})$ — подгруппы в $GL(n, \mathbf{C})$ и $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ — подгруппа в $SL(n, \mathbf{C})$ (см. примеры 5, 6 п. 1.1). Очевидно, исходная группа G, а также и подмножество $\{e\}$, состоящее из одного единичного элемента группы G, являются ее подгруппами; они называются *тривиальными подгруппами* группы G; все другие подгруппы в G (если они существуют) называются ее *нетривиальными подгруппами*.

Очевидно также, что пересечение любого множества подгрупп в G есть также подгруппа в G; в частности, пересечение всех подгрупп, содержащих данное множество $S \subset G$, есть подгруппа, и притом минимальная подгруппа, содержащая S; она обозначается $G(S)$.

I. *Пусть H — совокупность всевозможных конечных произведений элементов $g_i \in S$ и их обратных g_i^{-1}; тогда $G(S) = H$.*

Доказательство. Очевидно, H — подгруппа, содержащая S; с другой стороны, всякая подгруппа, содержащая S, содержит H; следовательно, $G(S) = H$ в силу минимальности $G(S)$.

В том случае, когда S состоит из одного элемента g_0, подгруппа $G(g_0)$ называется *циклической*; очевидно, $G(g_0)$ состоит из всевозможных степеней g_0^n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; некоторые из них могут совпадать. Если все эти степени различны, то g_0 называется *элементом бесконечного порядка*, а $G(g_0)$ — *циклической группой бесконечного порядка*. Если же среди этих степеней есть хотя бы две равные, например, $g_0^l = g_0^m$ при $m > l$, то $g_0^{m-l} = e$; в этом случае g_0 называется *элементом конечного порядка*. Наименьшее из целых положительных чисел p, для которых $g_j^0 = e$, называется *порядком элемента* g_0. Очевидно, в случае элемента g_0 конечного порядка p, группа $G(g_0)$ состоит из элементов e, g_0, g_0^2, $\ldots$, g_0^{p-1}, которые все различны; $G(g_0)$ называется тогда *циклической группой p-го порядка*. Группа G называется *циклической*, если существует такой элемент $g_0 \in G$, что $G = G(g_0)$.

Пусть H — подгруппа группы G; всякое множество Hg_0 (т. е. совокупность всех элементов hg_0, $h \in H$) называется *правым смежным классом группы G по подгруппе H*; аналогично определяются *левые* *смежные классы*. Каждый элемент смежного класса называется его *представителем*; класс с представителем g обозначим $\{g\}$, или $\widetilde{g}$. Если g — представитель класса Hg_0, то $Hg = Hg_0$. Действительно, $g = hg_0$ при некотором $h \in H$ и потому $Hg_0 = H(hg_0) = (Hh)\,g_0 = Hg_0$. Отсюда следует, что *различные правые* (*левые*) *смежные классы не имеют общих элементов*. Кроме того, каждый элемент $g \in G$ принадлежит какому-то правому смежному классу, именно классу Hg. Следовательно,

II. *Вся группа G распадается на попарно не пересекающиеся правые смежные классы.*

Очевидно, аналогичное предложение имеет место и для левых смежных классов.

Множество всех правых смежных классов группы G по подгруппе H, рассматриваемых каждый как один элемент, называется *фактор-пространством* или *пространством смежных классов группы G по подгруппе H и обозначается* G/H. Число элементов в G/H, если оно конечно, называется *индексом подгруппы H* в G и обычно обозначается $|G/H|$. Если группа G конечна, то и H конечна и число элементов каждого смежного класса Hg одно и то же и совпадает с $|H|$. Отсюда и из II заключаем, что $|G| = |H|\,|G/H|$. Следовательно,

III. *Порядок подгруппы конечной группы есть делитель порядка группы.*

Примеры. 1. Пусть $G = \mathbf{R}^1$, $H = \mathbf{N}$ (см. примеры 1 и 8 п. 1.1), а каждый класс $\widetilde{g} \in \mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ имеет вид $\widetilde{g}_\alpha = \{n + \alpha,\, \alpha \in \mathbf{N}\}$, где α — фиксированное для данного класса число из интервала $0 \leqslant \alpha < 1$; α называется *дробной частью* числа $n + \alpha$. Таким образом, класс в $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ однозначно определяется дробной частью любого своего представителя.

2. Пусть $G = \mathbf{N}$; $\mathrm{H} = \mathbf{N}_2$ (см. примеры 8, 9 п. 1.1), т. е. H — подгруппа в $\mathbf{N}$, состоящая из всех четных чисел; $\mathbf{N}/H$ состоит из двух элементов: $\widetilde{g}_0 = H$, $\widetilde{g}_1 = \{1 + h,\, h \in H\}$. Другими словами, $\widetilde{g}_0$ — совокупность всех четных чисел, $\widetilde{g}_1$ — совокупность всех нечетных чисел.

3. Пусть $G = \mathbf{N}$, $H = \mathbf{N}_p$, $\mathbf{N}/H$ состоит из p классов $\widetilde{g}_0$, $\widetilde{g}_1$, ..., $\widetilde{g}_{p-1}$, где $\widetilde{g}_k = \{k + h,\, h \in H\}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Эти классы называются *классами вычетов по модулю p*.

1.3. Нормальный делитель; фактор-группа. Подгруппа H группы G называется *нормальным делителем группы G* (кратко, — нормальным делителем в G), если для каждого элемента $g \in G$

$$gH = Hg, \tag{1.3.1}$$

т. е. для каждых $g \in G$, $h_1 \in H$ существует такой элемент $h_2 \in H$, что $gh_l = h_2 g$. Очевидно, соотношение (1.3.1) означает, что каждый левый смежный класс gH совпадает с правым смежным классом Hg. Если группа G коммутативна, то, очевидно, каждая подгруппа в G

является нормальным делителем группы G. В общем же случае могут существовать подгруппы, не являющиеся нормальными делителями. Очевидно также, что исходная группа G, а также множество $\{e\}$, состоящее из одного единичного элемента $e \in G$, является нормальным делителем в G. Они называются *тривиальными нормальными делителями* группы G, а все другие ее нормальные делители (если они существуют) называются *нетривиальными нормальными делителями в* G. Группа G называется *простой*, если она не имеет нетривиальных нормальных делителей. Если H — нормальный делитель в G, то в фактор-пространстве G/H можно определить умножение следующим образом: *произведением* $(Hg_1)(Hg_2)$ классов Hg_1, Hg_2 называется класс Hg_1g_2. Это определение не зависит от выбора представителей классов Hg_1, Hg_2. Действительно, если $g_1' \in Hg_1$, $g_2' \in Hg_2$, то $g_1' = h_1g_1$, $g_2' = h_2g_2$ и в силу (1.3.1) $g_l h_2 = h_2' g_1$ при некотором $h_2' \in H$. Отсюда $g_1'g_2' = (h_1g_1)(h_2g_2) = h_1(g_1h_2)\,g_2 = h_1h_2'g_1g_2$; следовательно, $Hg_1'g_2' = Hh_1h_2'g_1g_2 = Hg_1g_2$. Нетрудно также проверить, что определенное таким образом произведение удовлетворяет условиям а)–в) п. 1.1, причем единичным элементом $\widetilde{e}$ в G/H является $\widetilde{e} = H$; следовательно, при этом определении произведения G/H — группа. Она называется *фактор-группой группы G по нормальному делителю* H и обозначается по-прежнему G/H.

Примеры и упражнения. 1. Пусть $G = GL(n, \mathbf{C})$, $H = SL(n, \mathbf{C})$ (см. пример 5 п. 1.1); тогда H — нормальный делитель в G. Действительно, для любых $g \in G$, $h \in H$ имеем $\det(ghg^{-1}) = \det g \times \det h \cdot \det g^{-1} = \det h = 1$ и потому $ghg^{-1} \in H$.

Найдем фактор-группу G/H. Если g_1 и g_2 принадлежат одному классу $\widetilde{g} \in G/H$, то $g_2 = hg_1$ и потому $\det g_2 = \det h \cdot \det g_1 = \det g_1$. Обратно, если $\det g_2 = \det g_1$, то $\det(g_2g_1^{-1}) = 1$ и потому $g_2g_1^{-1} \in H$, т. е. g_2 и g_1 принадлежат одному и тому же классу $\widetilde{g} \in G/H$. Поэтому класс $\widetilde{g}$ однозначно задается числом $\lambda_{\widetilde{g}} = \det g$, где $g \in \widetilde{g}$. Из определения произведения в G/H следует, что $\lambda_{\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2} = \det(g_1g_2) = \det g_1 \times \det g_2$, где $g_1 \in \widetilde{g}_1$, $g_2 \in \widetilde{g}_2$, т. е. $\lambda_{\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2} = \lambda_{\widetilde{g}_1} \cdot \lambda_{\widetilde{g}_2}$. Очевидно, что соответствие $\widetilde{g} \to \lambda_{\widetilde{g}}$ есть взаимно однозначное отображение группы $G/H = GL(n, \mathbf{C})/SL(n, \mathbf{C})$ на группу $\mathbf{C}_0^1$ (см. пример 2 п. 1.1). Аналогично, соответствие $g \to \lambda_{\widetilde{g}} = \det g$ при $g \in \widetilde{g} \in GL(n, \mathbf{R})/SL(n, \mathbf{R})$ есть взаимно однозначное отображение группы $GL(n, \mathbf{R})/SL(n, \mathbf{R})$ на группу $\mathbf{R}_0^1$, удовлетворяющее условию $\lambda_{\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2} = \lambda_{\widetilde{g}_1}\lambda_{\widetilde{g}_2}$.

2. Пусть K_2 — совокупность всех матриц $k = \left\| \begin{matrix} \lambda^{-1} & 0 \\ \mu & \lambda \end{matrix} \right\|$, а Z_2 — совокупность всех матриц $z = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{matrix} \right\|$, где λ, μ — комплексные числа и $\lambda \neq 0$. Тогда K_2 — подгруппа в $SL(2, \mathbf{C})$ и Z_2 — нормальный делитель в K_2. Доказать, что 1) Z_2 — нормальный делитель в K_2; 2) каждый элемент $\widetilde{k} \in K_2/Z_2$ однозначно задается числом $\lambda_k = \lambda$, где

$k = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ \mu & \lambda \end{Vmatrix} \in \widetilde{k}$; 3) соответствие $\widetilde{k} \to \lambda_{\widetilde{k}}$ есть взаимно однозначное отображение группы K_2/Z_2 на группу $\mathbf{C}_0^1$ (см. пример 2 п. 1.1).

3. Пусть $G = \mathbf{R}^1$, $H = \mathbf{N}_p$ (см. примеры 1 и 8 п. 1.1). Так как $\mathbf{R}^1$ коммутативна, то $\mathbf{N}$ — нормальный делитель в $\mathbf{R}^1$; $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ состоит из классов $\widetilde{g} = \{n+\alpha, n \in \mathbf{N}\}$, $0 \leqslant \alpha < 1$ (см. пример 1 п. 1.2). По определению умножения в $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$

$$\widetilde{g}_\alpha \widetilde{g}_\beta = \{n+\alpha+\beta, n \in \mathbf{N}\} = \{n+\gamma, n \in \mathbf{N}\} = \widetilde{g}_\gamma,$$

где $\gamma = [\alpha+\beta]$.

4. Пусть $G = \mathbf{N}$, $H = \mathbf{N}_p$ (см. примеры 8, 9 п. 1.1); $\mathbf{N}$ коммутативна и потому $\mathbf{N}_p$ — нормальный делитель в $\mathbf{N}$, а $\mathbf{N}/\mathbf{N}_p = \{\widetilde{g}_0, \widetilde{g}_1, \ldots \ldots, \widetilde{g}_{p-1}\}$ (см. пример 3 п. 1.2). Из определения умножения в $\mathbf{N}/\mathbf{N}_p$ следует, что $\widetilde{g}_k \widetilde{g}_l = \{k+l+pn, n \in \mathbf{N}\} = \{m+pn, n \in \mathbf{N}\} = \widetilde{g}_m$, m — остаток от деления $k+l$ на p. Группа $\mathbf{N}/\mathbf{N}_p$ называется *группой вычетов* по модулю p.

1.4. Центр. Совокупность всех элементов группы G, перестановочных с каждым элементом из G, называется *центром* группы G и обозначается $Z(G)$. Таким образом, элемент g_0 из G тогда и только тогда принадлежит $Z(G)$, когда $gg_0 = g_0 g$ для всех $g \in G$. *$Z(G)$ — подгруппа группы G.*

Действительно, если g_1, $g_2 \in Z(G)$, то $g_1 g = g g_1$ и $g_2 g = g g_2$ для всех $g \in G$. Отсюда $g^{-1} g_2^{-1} = g_2^{-1} g^{-1}$, и так как g^{-1} пробегает всю группу G, то также $g_2^{-1} \in Z(G)$; отсюда для каждого $g \in G$ имеем $g_1 g_2^{-1} g = g_1 g g_2^{-1} = g g_1 g_2^{-1}$; следовательно, $g_1 g_2^{-1} \in Z(G)$.

Элементы из $Z(G)$ перестановочны с каждым элементом из G; в частности, они перестановочны между собой. Следовательно, *$Z(G)$ — коммутативная группа*. Если сама группа G коммутативна, то $Z(G) = G$. *$Z(G)$ — нормальный делитель* группы G. Действительно, для каждого $g \in G$ имеем $gZ(G) = Z(G)\,g$.

П р и м е р ы   и   у п р а ж н е н и я. 1. Пусть $G = GL(n, \mathbf{C})$ (см. пример 5 п. 1.1). Найдем $Z(G)$. Если $z \in Z(G)$, то

$$gz = zg \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{1.4.1}$$

Полагая в (1.4.1)

$$g = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

где $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$, λ_j все различны, а на недиагональных местах стоят нули, получим, что $\lambda_1 z_{jk} = \lambda_k z_{jk}$ и потому $z_{jk} = 0$ при $j \neq k$, т. е. z — диагональная матрица. Полагая далее в (1.4.1)

$$g = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \ddots \\ & & & 1 & \end{matrix} \right\|,$$

где на всех не указанных местах стоят нули, получим, что $z_{22} = z_{11}$. Аналогично доказывается, что $z_{jj} = z_{kk}$ при всех $j, k = 1, \ldots, n$, так что $z = \lambda 1$, где $\lambda = z_{jj}$, $j = 1, \ldots, n$. Другими словами, $Z(GL(n, \mathbf{C}))$ состоит из матриц $\lambda 1$, $\lambda \in \mathbf{C}_0^1$. Аналогично, $Z(GL(n, \mathbf{R}))$ состоит из матриц λl, $\lambda \in \mathbf{R}_0^1$.

2. Найти фактор-группы

$$GL(n, \mathbf{C})/Z(GL(n, \mathbf{C})) \quad \text{и} \quad GL(n, \mathbf{R})/Z(GL(n, \mathbf{R})).$$

1.5. Отображения. Пусть X и Y — два произвольных множества. Будем говорить, что задано *отображение* f множества X в множество Y (или функция f на X со значениями в Y), если каждой точке $x \in X$ поставлена в соответствие точка $y \in Y$. Эту точку у называют *образом* точки x при отображении f и пишут: $y = f(x)$. Вообще совокупность всех образов точек множества $M \subset X$ называют *образом* множества M при отображении f и обозначают $f(M)$. Совокупность же всех точек $x \in X$, для которых $f(x) \in N$, где $N \subset Y$, называют *прообразом* множества N при отображении f и обозначают $f^{-1}(X)$. Если образом $f(X)$ множества X является все пространство Y, то f называется отображением X *на* Y.

Отображение f множества X в Y называется *взаимно однозначным*, если прообраз каждой точки $y \in f(X)$ состоит из одной точки. Отображение X на X, при котором каждый образ совпадает со своим прообразом, называют *единичным* или *тождественным* отображением.

Пусть f — отображение X в Y, а φ — отображение Y в Z; *произведением* φf отображения φ на отображение f называют отображение, состоящее в последовательном применении сначала отображения f, а затем отображения φ [1]). Пусть f — отображение X в Y. Отображение φ множества $f(X)$ в X называют *обратным* к f и обозначают f^{-1}, если φf — единичное отображение X на X. В этом случае из равенств $(\varphi f)(x) = x$, $(f \varphi f)(x) = f(x)$ следует, что φ есть отображение на X и что $f\varphi$ — единичное отображение в $f(X)$; следовательно, f, рассматриваемое как отображение в $f(X)$, обратно к $\varphi = f^{-1}$.

[1]) Отображение φf иногда обозначается также через через $\varphi \circ f$.

I. *Обратное отображение* f^{-1} *существует тогда и только тогда, когда отображение* f *взаимно однозначно.*

Действительно, необходимость условия очевидна. Обратно, если отображение f взаимно однозначно, то, отнеся каждой точке $y \in f(X)$ ее прообраз при отображении f, получим обратное отображение f^{-1}.

Пусть f — отображение X в Y, а Z — подмножество X; отображение φ множества Z в Y, определенное формулой $\varphi(z) = f(z)$ для всех $z \in Z$, называется *сужением*, или *ограничением*, отображения f на Z и обозначается $f|_Z$.

1.6. Гомоморфизм и изоморфизм групп. Отображение f группы G в группу G' называется *гомоморфизмом* G в G', если

$$f(g_1 g_2) = f(g_1)\, f(g_2) \quad \text{для любых} \quad g_1, g_2 \in G. \tag{1.6.1}$$

Условие (1.6.1) означает, что если f отображает g_1 в g_1' и g_2 в g_2', то f отображает также $g_1 g_2$ в $g_1' g_2'$. Прообраз $f^{-1}(e')$ единичного элемента e' группы G' при гомоморфизме f группы G называется *ядром гомоморфизма* f и обозначается $\operatorname{Ker} f$. Если при гомоморфизме f группы G в G' образом G является вся группа G' (т. е. $f(G) = G'$), то f называется *гомоморфизмом группы* G *на группу* G'.

I. *Если* f *— гомоморфизм группы* G *в группу* G', *то*:
1) $f(e)$ *— единичный элемент в* G';
2) $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$;
3) f *отображает каждую подгруппу группы* G *на подгруппу группы* G';
4) f *отображает каждый нормальный делитель группы* G *на нормальный делитель группы* $f(G)$;
5) $\operatorname{Ker} f$ *есть нормальный делитель группы* G.

Доказательство. 1). Положим $\widehat{e} = f(e)$ и обозначим через e' единичный элемент в G'. Тогда в силу (1.4.1)

$$\widehat{e}\,\widehat{e} = f(e)\, f(e) = f(ee) = f(e) = \widehat{e} = \widehat{e} e';$$

умножив обе части этого равенства слева на $\widehat{e}^{\,-1}$, получим $\widehat{e} = e'$. Этим доказано утверждение 1). Утверждение 2) следует теперь из соотношения $f(g)\, f(g^{-1}) = f(g^{-1})\, f(g) = f(gg^{-1}) = f(e) = e'$, а тогда утверждение 3) — из соотношений

$$f(h_1)\, f(h_2)^{-1} = f(h_1 h_2^{-1}) \in f(H).$$

Пусть H — нормальный делитель группы G и $g' \in f(G)$; тогда $g' = f(g)$ при некотором $g \in G$, и потому

$$g' f(H) = f(g)\, f(H) = f(gH) = f(Hg) = f(H)\, f(g) = f(H) g',$$

что и доказывает утверждение 4).

Положим $\operatorname{Ker} f = H$; тогда $f(H) = e'$. Если $h_1, h_2 \in H$, то $f(h_1) = e'$, $f(h_2) = e'$, и потому $f(h_1 h_2^{-1}) = f(h_1)\, f(h_2)^{-1} = e'$, так что $h_1 h_2^{-1} \in H$; следовательно, H — подгруппа в G.

Для каждого $g \in G$

$$f(gHg^{-1}) = f(g)\,f(H)f(g^{-1}) = f(g)e'[f(g)]^{-1} = e'.$$

Отсюда $gHg^{-1} \subset H$ и $gH \subset Hg$. Подставив сюда g^{-1} вместо g и умножая затем обе части полученного соотношения слева и справа на g, получим $Hg \supset gH$; следовательно, $Hg = gH$, и утверждение 5) доказано.

Простой пример гомоморфизма можно построить следующим образом. Пусть H — нормальный делитель группы G. Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие класс $\widetilde{g} \in G/H$, содержащий g. Из самого определения умножения в фактор-группе G/H следует, что полученное отображение $g \to \widetilde{g}$ есть гомоморфизм группы G на группу G/H. Он называется *каноническим гомоморфизмом* (или, еще, *естественным отображением*) *группы G на фактор-группу G/H*. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Очевидно, утверждения предложения I справедливы, в частности, для изоморфизма.

II. *Гомоморфизм f есть изоморфизм тогда и только тогда*, *когда* $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Доказательство. Если f — изоморфизм, то $\operatorname{Ker} f = \{e\}$ в силу взаимной однозначности f. Обратно, если $\operatorname{Ker} f = \{e\}$ и $f(g_1) = f(g_2)$, то $f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1)\,f(g_2)^{-1} = e$ и потому $g_1 g_2^{-1} = e$, $g_1 = g_2$; следовательно, f взаимно однозначен.

Отображение f группы G в группу G' называется *антигомоморфизмом*, если

$$f(g_1 g_2) = f(g_2)\,f(g_1) \quad \text{для всех} \quad g_1, g_2 \in G,$$

и *антиизоморфизмом*, если кроме того, f взаимно однозначно. Если, в частности, $f(G) = G'$, то f называется *антигомоморфизмом* (соответственно *антиизоморфизмом*) *группы G на G'*. $f^{-1}(e)$ называется *ядром* антигомоморфизма f.

Нетрудно убедиться, что предложения I и II остаются верными также для антигомоморфизмов и антиизоморфизмов. Две группы G, G' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм группы G на G'. В ряде случаев оказывается безразличным, какие из двух изоморфных групп G, G' рассматривать, и тогда элементы группы G отождествляют с их образами при изоморфизме G на G'.

III. *Если f — гомоморфизм группы G на группу G' и H — ядро этого гомоморфизма*, *то*:

1) *группа G' изоморфна фактор-группе G/H*;
2) *$f = \psi\varphi$, где φ — канонический гомоморфизм группы G на группу G/H*, *а ψ — изоморфизм группы G/H на группу G'*.

Доказательство. Определим отображение ψ группы G/H на группу G', полагая для $\widetilde{g} \in G/H$ и $g \in \widetilde{g}$

$$\psi(\widetilde{g}) = f(g). \tag{1.6.2}$$

Это определение не зависит от выбора представителя $g \in \widetilde{g}$. Действительно, если также $g_1 \in \widetilde{g}$, то $g_1 = gh$ при некотором $h \in H$ и $f(g_1) = f(gh) = f(g)\,f(h) = f(g)e' = f(g)$.

Далее, в силу (1.6.2) при $\widetilde{g}_1,\ \widetilde{g}_2 \in G/H$ и $g_1 \in \widetilde{g}_1,\ g_2 \in \widetilde{g}_2$

$$\psi(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2) = f(g_1g_2) = f(g_1)\,f(g_2) = \psi(\widetilde{g}_1)\,\psi(\widetilde{g}_2)$$

и

$$\psi(G/H) = f(G) = G';$$

следовательно, ψ — гомоморфизм группы G/H на G'. Найдем $\operatorname{Ker}\psi$. Если $\widetilde{g} \in \operatorname{Ker}\psi$, то $\psi(\widetilde{g}) = e'$; отсюда в силу (1.6.2) $f(g) = e'$ для $g \in \widetilde{g}$. Но это означает, что $g \in H$; следовательно, $\widetilde{g} = H = \widetilde{e}$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\psi = \{\widetilde{e}\}$, так что в силу II ψ — изоморфизм G/H на G'. Тем самым доказано утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) заметим, что по определению канонического гомоморфизма $\varphi(g) = \widetilde{g}$, и потому (1.6.2) перепишется в виде

$$\psi(\varphi(g)) = f(g),$$

так что $\psi\varphi = f$.

Изоморфизм группы G на ту же группу G называется *автоморфизмом группы* G. Примером автоморфизма группы G является отображение

$$g \to f(g) = g_0^{-1}gg_0, \tag{1.6.3}$$

g_0 — фиксированный элемент группы G. Действительно,

$$f(g_1)\,f(g_2) = g_0^{-1}g_1g_0g_0^{-1}g_2g_0 = g_0^{-1}g_1g_2g_0 = f(g_1g_2),$$

и если $g_0^{-1}g_1g_0 = g_0^{-1}g_2g_0$, то $g_1 = g_2$.

Автоморфизм группы G, заданный формулой (1.5.3) при некотором $g_0 \in G$, называется *внутренним*, а все другие автоморфизмы — *внешними*.

Примеры и упражнения. 1. Отображение f: $g \to \det g$ есть гомоморфизм группы $GL(n,\mathbf{C})$ на группу $\mathbf{C}^1$ (см. примеры 2 и 5 п.1.1), ибо $\det(g_1g_2) = \det g_1 \det g_2$ и $\operatorname{Ker} f = SL(n,\mathbf{C})$. Фактор-группа $\widetilde{G} = GL(n,\mathbf{C})/SL(n,\mathbf{C})$ изоморфна группе $\mathbf{C}_0^1$ и изоморфизм ψ группы $\widetilde{G}$ на $\mathbf{C}_0'$ задается формулой ψ: $\widetilde{g} \to \lambda_g = \det g$ при $g \in \widetilde{g}$ (см. пример 1 п. 1.3). Аналогичное утверждение имеет место для $GL(n,\mathbf{R})$, $SL(n,\mathbf{R})$ и $\mathbf{R}_0^1$. Проверить, что в этих случаях $f = \psi\varphi$.

2. Группы G_0 и G_0' (см. примеры 3 и 7 п.1.1) изоморфны; их изоморфизм задается отображением

$$f\colon 1 \to \alpha_0, \quad i \to \alpha_1, \quad -1 \to \alpha_2, \quad -i \to \alpha_3.$$

3. Группы G_x при $\dim X = n$ и $GL(n,\mathbf{C})$(см. примеры 4 и 5 п. 1.1) изоморфны. Чтобы построить их изоморфизм, достаточно каждому

оператору $A \in G$ поставить в соответствие его матрицу в каком-нибудь фиксированном базисе в X.

4. Интервал $\mathscr{T}^1 = [0, 1)$ есть группа, если произведением в $\mathscr{T}^1$ чисел $\alpha, \beta \in \mathscr{T}^1$ считать $[\alpha + \beta]$. Эта группа называется *одномерным тором*; $\mathscr{T}^1$ можно также рассматривать как отрезок $[0, 1]$ с отождествленными концами 0 и 1. Соответствие $\widetilde{g}_\alpha = \{n + \alpha, n \in N\} \to \alpha$ есть изоморфизм группы $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ и $\mathscr{T}^1$ (см. пример 3 п. 1.3); следовательно, $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ и $\mathscr{T}^1$ изоморфны.

5. Группы Ω_p и $\mathbf{N}/\mathbf{N}_p$ (примеры 10 п. 1.1 и 4 п. 1.3) изоморфны. Их изоморфизмом является отображение

$$f\colon \widetilde{g}_k = \{k + np, n \in N\} \to e^{ik\pi/p}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

6. Пусть g — матрица n-го порядка. Обозначим через $\widetilde{g}$ матрицу, элементы которой комплексно сопряжены элементам матрицы g, а через g' — матрицу, транспонированную к g, так что $\widetilde{g} = (\widetilde{g}_{jk})$ и $g'_{jk} = g_{kj}$ Доказать, что отображения

$$g \to \widetilde{g} \quad \text{и} \quad g \to g'^{-1}$$

— внешние автоморфизмы групп $GL(n, \mathbf{C})$ и $SL(n, \mathbf{C})$.

1.7. Группы преобразований. Пусть X — произвольное множество. *Преобразованием множества* X называется всякое взаимно однозначное отображение множества X на X. Результат применения к элементу $x \in X$ преобразования g обозначается xg или gx, так что само преобразование g записывается в виде $x \to xg$ или, соответственно, $x \to gx$.

В первом случае g называется *правым преобразованием*, а во втором — *левым преобразованием*. В действительности правые и левые преобразования при одном и том же g совпадают и отличаются только способом записи. В дальнейшем оказывается удобным использовать оба способа записи.

Если X конечно и состоит из n элементов, то преобразование множества X называется *подстановкой n элементов*. В этом случае удобно занумеровать элементы множества X в каком-нибудь порядке числами $1, 2, \ldots, n$. Тогда подстановка задается символом $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots & k_n \end{pmatrix}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Этот символ указывает, что при данной подстановке $1, 2, \ldots, n$ переходят соответственно в $k_1, k_2, \ldots, k_n$. *Произведением $g_1 g_2$ правых преобразований* g_1 и g_2 называется преобразование, которое получается в результате применения сначала преобразования g_1, а затем преобразования g_2, так что, по определению,

$$x\,(g_1 g_2) = (x g_1)\, g_2. \tag{1.7.1a}$$

Произведением $g_1 g_2$ *левых преобразований* называется преобразование, которое получается в результате применения сначала преобразования g_2, а затем преобразования g_1, так что, по определению,

$$(g_1 g_2)\,x = g_1(g_2 x). \tag{1.7.1б}$$

Нетрудно убедиться, что совокупность всех правых преобразований множества X — обозначим ее $G_r(X)$ — есть группа. Единичным элементом e в $G_r(X)$ является тождественное преобразование, т. е. отображение $x \to x$, которое оставляет на месте каждый элемент $x \in X$, а обратное преобразование g^{-1} к g задается условием $x'g^{-1} = x$, если $xg = x'$.

Аналогично определяется группа $G_l(X)$ всех левых преобразований множества X. Очевидно, тождественное отображение $g \to g$ есть антиизоморфизм группы $G_r(X)$ на группу $G_l(X)$ и также группы $G_l(X)$ на группу $G_r(X)$. Если X конечно и состоит из n элементов, то $G_l(X)$ есть группа всех подстановок n элементов. Она называется *симметрической группой* и обозначается S_n. Ее порядок равен числу перестановок n элементов, следовательно, равен $n!$. В дальнейшем термин *преобразование* будет означать правое преобразование, и мы будем также писать $G(X)$ вместо $G_r(X)$.

Всякая подгруппа G группы $G(X)$ называется *группой* (*правых*) *преобразований множества* X, а пара (X, G) — *пространством* X *с группой преобразований* G; элементы $x \in X$ называются *точками* пространства X.

Аналогично вводится пространство X с группой левых преобразований.

Пусть (X, G) — пространство X с группой преобразований G. Всякое множество $O_x = \{xg,\ g \in G\}$, где x фиксировано, а g пробегает всю группу G, называется *траекторией*, или *орбитой* относительно G.

I. *Две точки* $x_1, x_2 \in X$ *принадлежат одной и той же орбите тогда и только тогда, когда* $x_2 = x_1 g$ *при некотором* $g \in G$.

Действительно, если $x_2 = x_1 g$, то x_2 и x_1 принадлежат орбите, содержащей x_1. Обратно, если x$_2$ и x_1 принадлежат одной орбите, то $x_1 = xg_1$, $x_2 = xg_2$ при некоторых $x \in X$, $g_1, g_2 \in G$ и потому $x_2 = x_1 g_1^{-1} g_2$.

Из I следует, что *все пространство* X *распадается на попарно непересекающиеся орбиты.*

Пространство X называется *транзитивным*, или *однородным* относительно G, если X состоит из одной орбиты. В силу I это означает, что для каждой пары $x_1, x_2 \in X$ существует такой элемент $g \in G$, что $x_2 = x_1 g$.

В общем случае рассмотрим суже́ние каждого преобразования g на фиксированной орбите O_x; совокупность этих сужений снова обозначим через G. Тогда O_x станет транзитивным пространством с группой преобразований G и все пространство распадается на попарно непересекающиеся транзитивные пространства с группой преобразований G. Каждую группу G можно следующим образом представить как группу преобразований. Положим $X = G$ и каждому элементу $g_0 \in G$ поставим в соответствие преобразование множества G — обозначим это преобразование $\widehat{g}_0$ — по формуле

$$g \to g\widehat{g}_0 = gg_0. \tag{1.7.2}$$

Преобразование (1.7.2) называется *правым сдвигом* на G. Обозначим через $\widehat{G}$ совокупность всех правых сдвигов.

Из соотношения

$$g(\widehat{g}_1\widehat{g}_2) = (g\widehat{g}_1)\,\widehat{g}_2 = (gg_1)\,g_2 = g(g_1g_2) = g(\widehat{g_1g_2})$$

следует, что $\widehat{G}$ — группа и что соответствие $g \to \widehat{g}$ есть гомоморфизм группы G на группу $\widehat{G}$. Очевидно, этот гомоморфизм взаимно однозначен; соответствие $g \to \widehat{g}$ есть изоморфизм группы G на группу $\widehat{G}$, так что:

II. *Всякая группа G изоморфна группе всех правых сдвигов на G.*

Изоморфизм $g \to \widehat{g}$ называется *правым регулярным представлением* [1]) группы G. Аналогично правому регулярному представлению строится *левое регулярное представление* группы G. Именно, каждому элементу $g_0 \in G$ ставится в соответствие левое преобразование $\check{g}_0$ множества G по формуле

$$g \to \check{g}_0 g = g_0 g. \tag{1.7.3}$$

Это преобразование называется *левым сдвигом* на G. Обозначим через $\check{G}$ совокупность всех левых сдвигов на G. Из соотношения

$$(\check{g}_1\check{g}_2)\,g = \check{g}_1(\check{g}_2 g) = g_1(g_2 g) = (g_1g_2)\,g = (\widecheck{g_1g_2})\,g$$

и взаимной однозначности отображения $g \to \check{g}$ следует, что $\check{G}$ — группа и что соответствие $g \to \check{g}$ есть изоморфизм группы G на группу $\check{G}$. Этот изоморфизм называется *левым регулярным представлением* группы G. Если группа G конечна и состоит из n элементов, то $\check{g}$ есть левое преобразование конечного множества G, т. е. подстановка n элементов. Поэтому $\check{G}$ есть подгруппа группы S_n. Отсюда и из II заключаем:

III. *Всякая конечная группа G изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n*, где $n = |G|$.

Важным примером группы преобразований является совокупность всех автоморфизмов заданной группы G. Здесь $X = G$, а преобразованиями служат автоморфизмы группы G. Если f_1, f_2 — два

[1]) Ниже (см., например, п. 1.3 гл. II) этот термин будет употребляться и в другом смысле.

автоморфизма группы G, то, очевидно, $f_1 f_2^{-1}$ — автоморфизм группы G. Следовательно, совокупность всех автоморфизмов группы G есть также группа. Она называется *группой автоморфизмов* группы G и обозначается $A(G)$. Совокупность всех внутренних автоморфизмов

$$a_{g_0}\colon g \to g_0^{-1} g g_0 \tag{1.7.4}$$

(обозначим эту совокупность $A(G)$) есть подгруппа группы $A(G)$. Действительно,

$$g(a_{g_1} a_{g_2}) = (g a_{g_1})\, a_{g_2} = g_2^{-1}(g_1^{-1} g g_1)\, g_2 = (g_1 g_2)^{-1} g (g_1 g_2) = g a_{g_1 g_2},$$

и потому соответствие $g \to a_g$ есть гомоморфизм группы G в группу $A(G)$. Следовательно, $A_i(G)$ — подгруппа $A(G)$ в силу I п. 1.6; $A_i(G)$ называется *группой внутренних автоморфизмов* группы G. Каждая орбита в G относительно $A_i(G)$ состоит из элементов вида $g^{-1} g_0 g$, где g_0 фиксирован, а g пробегает всю группу G. Два элемента g_1 и g_2 тогда и только тогда принадлежат одной и той же такой орбите, когда

$$g_2 = g^{-1} g_i g \tag{1.7.5}$$

при некотором $g \in G$ (см. I). Элементы g_1 и g_2, удовлетворяющие условию (1.7.5) при некотором $g \in G$, называются *сопряженными*. Совокупность всех элементов группы G, сопряженных фиксированному элементу (следовательно, сопряженных между собой), называется *классом сопряженных элементов*. Из предыдущих рассуждений заключаем, что *орбиты в G относительно $A_i(G)$ совпадают с классами сопряженных элементов в G*.

Найдем ядро $\operatorname{Ker} a$ гомоморфизма $g \to a_g$. Элемент g_0 группы G тогда и только тогда принадлежит $\operatorname{Ker} a$, когда a_{g_0} — тождественное отображение, т. е. $g a_{g_0} = g$ для всех $g \in G$. В силу (1.7.4) это означает, что $g_0^{-1} g g_0 = g$, т. е. $g g_0 = g_0 g$ для всех $g \in G$. Следовательно, *ядро гомоморфизма $g \to a_g$ совпадает с центром $Z(G)$ группы G*.

Кроме того:

IV. *Подгруппа H группы G тогда и только тогда есть нормальный делитель группы G, когда H инвариантно относительно всех внутренних автоморфизмов a_g, $g \in G$.*

Действительно, если H — нормальный делитель, то $Hg = gH$, а значит, $g^{-1} H g = H$, т. е. H инвариантно относительно всех a_g, $g \in G$. Обратно, если H инвариантно относительно всех a_g, $g \in G$, то $g^{-1} H g \subset H$ для всех $g \in G$. Подставив сюда g^{-1} вместо g и умножая полученные соотношения $g H g^{-1} \subset H$ слева на g^{-1}, а справа на g, получим, что $H \subset g^{-1} H g$. Следовательно, $H = g^{-1} H g$, $gH = Hg$, так что H — нормальный делитель группы G.

Поэтому нормальные делители называют еще *инвариантными подгруппами*.

Примеры и упражнения. 1. Пусть X — окружность, Γ^1 — совокупность всех вращений (поворотов) окружности X; при этом два вращения не считаются различными, если они приводят к одному и тому же новому положению исходной окружности. Очевидно, каждое вращение $\gamma \in \Gamma^1$ задается углом φ поворота окружности X, причем можно считать, что $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Произведению $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ отвечает угол φ, определенный условием $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi + 2n\pi$, где $n \in N$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Группа преобразований Γ^1 называется *группой вращений окружности*. Очевидно, окружность X однородна относительно Γ^1. Группа Γ^1 изоморфна тору $\mathscr{T}^1$ (см. пример 4 п. 1.6), и их изоморфизм f задается формулой

$$f\colon \varphi \to \alpha = \frac{1}{2\pi}\varphi.$$

2. Пусть $X = (-\infty, +\infty)$, S — совокупность всех левых преобразований

$$s\colon x \to sx = ax + b \tag{1.7.6}$$

пространства $(-\infty, +\infty)$, где a, b — действительные числа и $a > 0$; легко видеть, что S — группа; S содержит две подгруппы: группу S^1 всех преобразований $s_b\colon x \to s_b x = x + b$ и группу S^2 всех преобразований $s_a\colon x \to s_a x = ax$, причем S^1 — нормальный делитель в S. Группа S называется *группой линейных преобразований прямой* (точнее, линейных преобразований прямой, сохраняющих направление), S^1 — *группой сдвигов* прямой, S^2 — *группой растяжений прямой*. X однородно относительно S^1, следовательно, подавно относительно S.

Упражнение. Найти фактор-группу S/S^1.

3. Пусть Π^1 — комплексная плоскость с присоединенной бесконечной точкой, F^1 — совокупность всех правых преобразований $f\colon z \to z' = fz$ по формуле

$$\begin{cases} z' = (az+b)/(cz+d) & \text{при} \quad z \neq \infty \quad \text{и} \quad z \neq -d/c, \\ z' = \infty & \text{при} \quad z = -d/c, \\ z' = a/c & \text{при} \quad z = \infty, \end{cases}$$

таких, что

$$ad - bc \neq 0.$$

Легко видеть, что F^1 — группа и Π^1 однородно относительно F^1; F^1 называется *группой дробно-линейных преобразований плоскости* Π^1.

4. Обозначим через $\mathbf{C}^n$ совокупность всех систем $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $x_j \in \mathbf{C}^1$, $j = 1, \ldots, n$, а через G^n — совокупность всех левых линейных преобразований $g\colon x \to gx$ пространства $X = C^n$, где

$$(gx)_j = \sum_{k=1}^{n} g_{jk}x_k, \tag{1.7.7}$$

с определителем $\det(g_{ik}) \neq 0$. Легко видеть, что G^n — группа, изоморфная группе $GL(n, \mathbf{C})$, и что $\mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ однородно относительно G^n.

5. Подстановка $s \in S_n$ (S_n — симметрическая группа) называется *циклом*, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{l-1} & k_l \\ k_2 & k_3 & \dots & k_l & k_1 \end{pmatrix}, \tag{1.7.8}$$

где все $k_1, \dots, k_l$ различны, т.е. если s переводит k_1 в k_2, k_2 в k_3, $\dots$, k_{l-1} в k_l и k_l в k_1 и оставляет на месте все числа среди 1, 2, $\dots$, n отличные от $k_1, k_2, \dots, k_l$; $k_1, k_2, \dots, k_l$ называются *элементами*, а число l — *длиной цикла*. Цикл вида (1.7.8) кратко обозначается $(k_1, k_2, \dots, k_l)$ и число l называется *длиной цикла*. Цикл (k_1, k_2) длины 2 называется *транспозицией* элементов k_1, k_2. Доказать, что:

а). Каждая подстановка $s \in S_n$ разлагается в произведение транспозиций, причем число транспозиций при данном s либо всегда четно, либо всегда нечетно, независимо от способа разложения. Подстановка s называется *четной*, если она разлагается в произведение четного числа транспозиций, и *нечетной*, если она разлагается в произведение нечетного числа транспозиций.

б). Совокупность P_n всех четных подстановок $s \in S_n$ есть нормальный делитель в S_n; найти факторгруппу S_n/P_n. P_n называется *знакопеременной группой*.

в). Каждая подстановка $s \in S_n$ разлагается единственным образом в произведение циклов без общих элементов (порядок в произведении не играет роли, так как циклы без общих элементов перестановочны). Две подстановки $s, s' \in S_n$ сопряжены тогда и только тогда, когда наборы длин циклов, участвующих в таком произведении, одни и те же для s и s'.

6. Для группы S_3 выписать таблицу Кэли и все классы сопряженных элементов.

7. Найти все классы сопряженных элементов в группах $GL(n, \mathbf{C})$ и $SL(n, \mathbf{C})$

1.8. Каноническая реализация однородного пространства. Существует простой способ построения однородного пространства, состоящий в следующем. Пусть G — группа, H — ее подгруппа. Введем для краткости обозначения $\widetilde{G} = G/H$ и каждому элементу g_0 из G поставим в соответствие преобразование $\overline{g}_0$ пространства $\widetilde{G}$ по формуле [1]

$$\{g\}\overline{g}_0 = \{gg_0\}, \tag{1.8.1}$$

[1] Отображение $\overline{g}_0$ по формуле (1.8.1) взаимно однозначно и его образ есть $\widetilde{G}$, так что $\overline{g}_0$ — преобразование. Действительно, если $\{g_1\}\overline{g}_0 = \{g_2\}\overline{g}_0$, т.е. $\{g_1g_0\} = \{g_2g_0\}$, то $g_1g_0 = hg_2g_0$ при некотором $h \in H$. Отсюда $g_1 = hg_2$, т.е. $\{g_1\} = \{g_2\}$. Далее, если $\{g_1\}$ — произвольный элемент из $\widetilde{G}$, то при $g = g_1g_0^{-1}$ $\{g\}\overline{g}_0 = \{gg_0\} = \{g_1g_0^{-1}g_0\} = \{g_1\}$, так что $\overline{g}_0$ отображает $\widetilde{G}$ на $\widetilde{G}$.

где $\{g\}$, $\{gg_0\}$ — правые смежные классы группы G по H с представителями g и gg_0 (см. п. 1.2). Легко видеть, что отображение $g \to \overline{g}$ есть гомоморфизм группы G в группу $G(\widetilde{G})$; следовательно, образ $\overline{G}$ группы G при этом отображении есть группа (см. I п. 1.6). Мы получаем, таким образом, пространство $\widetilde{G}$ с группой преобразований $\overline{G}$. Это пространство однородно относительно $\overline{G}$. Действительно, для заданных двух точек $\{g_1\}$, $\{g_2\}$ положим $g_0 = g_1^{-1}g_2$. Тогда

$$\{g_1\}\overline{g}_0 = \{g_1g_0\} = \{g_1g_1^{-1}g_2\} = \{g_2\},$$

так что $\widetilde{G} = G/H$ — *однородное пространство с группой преобразований* $\overline{G}$. Если, в частности, $H = \{e\}$, то $\widetilde{G} = G$, и мы приходим к правому регулярному представлению $g \to \overline{g}$ группы G. Пусть H_0 — ядро гомоморфизма $g \to \overline{g}$. В силу I п. 1.6 H_0 — нормальный делитель группы G. По определению, H_0 состоит из тех и только тех элементов $g_0 \in G$, для которых $\overline{g}_0$ — тождественное преобразование, т. е. для которых $Hgg_0 = Hg$ при всех $g \in G$, что равносильно соотношению

$$gg_0g^{-1} \in H \quad \text{при всех} \quad g \in G. \tag{1.8.2}$$

Полагая в (1.8.2) $g = e$, заключаем, что $g_0 \in H$; следовательно,

$$H_0 \subset H. \tag{1.8.3}$$

Если $g_1 \in H_0$ и $g_2 \in H_0$, то в силу (1.8.2) при всех $g \in G$ $\quad gg_1g^{-1} \in H$ и $gg_2g^{-1} \in H$; следовательно, $gg_1g_2^{-1}g^{-1} = (gg_1g^{-1})(gg_2g^{-1})^{-1} \in H$, и потому $g_1g_2 \in H_0$. Это означает, что H_0 — подгруппа группы H. Таким образом, *ядро гомоморфизма $g \to \overline{g}$ есть подгруппа группы H, являющаяся нормальным делителем группы G*. Обратно, пусть H_1 — подгруппа группы H, являющаяся нормальным делителем группы G. Тогда $gH_1g^{-1} \subset H_1 \subset H$ при всех $g \in G$ и потому $H_1 \subset H_0$. Следовательно:

I. *Ядро гомоморфизма $g \to \overline{g}$ есть максимальная подгруппа группы H, являющаяся нормальным делителем группы G.*

Отсюда заключаем:

II. *Гомоморфизм $g \to \overline{g}$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда группа G не содержит отличной от $\{e\}$ подгруппы, являющейся нормальным делителем группы G.*

Покажем теперь, что описанный выше способ построения однородного пространства является в известной мере универсальным. Пусть X — произвольное однородное пространство с группой преобразований G и x_0 — фиксированная точка пространства X. Обозначим через H совокупность всех преобразований h из группы G, оставляющих на месте x_0, так что

$$x_0h = x_0. \tag{1.8.4}$$

Очевидно, H — подгруппа группы G. Она называется *стационарной группой* точки x_0. Так как X однородно, то каждая другая точка

$x \in X$ получается из x_0 применением некоторого преобразования $g \in G$: $x = x_0 g$. Если g_1, g_2 — два таких преобразования, так что $x = x_0 g_1$ и $x = x_0 g_2$, то $x_0 g_2 = x_0 g_1$ и, следовательно, $x_0 g_2 g_1^{-1} = x_0$. Это означает, что $g_2 g_1^{-1} \in H$, т. е. что $g_2 \in H g_1$, следовательно, что g_2 и g_1 принадлежат одному и тому же правому смежному классу группы G по H. Обратно, если g_1 и g_2 принадлежат одному правому смежному классу по H, то $g_2 = h g_1$ при некотором $h \in H$; следовательно, в силу (1.8.4) $x_0 g_2 = x_0 h g_1$, т. е. g_1 и g_2 переводят x_0 в одну и ту же точку x. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие f: $x \to \widetilde{g}$ между точками $x \in X$ и правыми смежными классами G по H, т. е. точками $\widetilde{g}$ фактор-пространства $\widetilde{G} = G/H$. Правый смежный класс $\widetilde{g}$, отвечающий точке x, состоит из тех и только тех преобразований g, для которых

$$x_0 g = x. \tag{1.8.5}$$

Выясним, во что перейдут преобразования g при отображении f. Пусть точка $x \in X$ переходит в класс $\{g\}$ при отображении f, так что $x_0 g = x$. Тогда $x g_0 = x_0 g g_0$ и потому точка $x g_0$ переходит в класс $\{g g_0\} = \{g\}\overline{g}_0$; следовательно, *при отображении f преобразование $\overline{g}_0$ переходит в преобразование g_0 пространства $\widetilde{G} = G/H$.*

Пусть H_1 — подгруппа группы H, являющаяся нормальным делителем группы G, и $g_1 \in H_1$. Тогда в силу I $\overline{g}_1 = e$, т. е. $\{g g_1\} = \{g\}$ для каждого $g \in G$; применяя обе части этого соотношения к элементу x_0 и полагая $x_0 g = x$, получим, что $x g_1 = x$ для всех $x \in X$. Последнее же означает, что $g_1 = e$, ибо G — группа преобразований. Таким образом, $H_1 = \{e\}$, и соответствие $g \to \overline{g}$ есть изоморфизм в силу II. Тем самым доказано следующее предложение:

III. *Пусть X — однородное пространство с группой преобразований G, H — стационарная группа фиксированной точки $x_0 \in X$ и f — отображение, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие правый класс $\widetilde{g} = \{g\} \in G/H$ всех элементов g из G, для которых $x_0 g = x$. Тогда f взаимно однозначно отображает X на G/H и при этом отображении каждое преобразование g_0 переходит в преобразование $\overline{g}_0$, определенное формулой*

$$\{g\}\overline{g}_0 = \{g g_0\}, \tag{1.8.6}$$

так что

$$f\{xg\} = f(x)\overline{g}. \tag{1.8.7}$$

Полученное соответствие $g \to \overline{g}$ есть изоморфизм группы G на группу $\overline{G}$ всех преобразований $\overline{g}$.

Обычно точки $x \in X$ отождествляют с отвечающими им классами $f(x) \in C/H$. Тогда в силу предложения III X совпадает с G/H, преобразования g — с преобразованиями $\overline{g}$ и группа G — с группой $\overline{G}$. Это отождествление называется *канонической реализацией* однородного пространства X с группой преобразований G, а сама пара $(G/H, \overline{G})$ — *канонической моделью* однородного пространства.

Предыдущие рассуждения приводят к следующему определению.

Два однородных пространства с группой преобразований (X, G), (X', G') называются *эквивалентными*, если существуют:

а) изоморфизм φ: $g \to g'$ группы G на группу G';

б) взаимно однозначное отображение f: $x \to x'$ пространства X на X'

такие, что если $x \to x'$, то $xg \to x'g'$, т. е. что

$$f(xg) = f(x)\,\varphi(g); \tag{1.8.8}$$

нетрудно проверить, что определенная таким образом эквивалентность удовлетворяет всем аксиомам соотношения эквивалентности (см. добавление I).

Предложение III означает, *что каждое однородное пространство* (X, G) *эквивалентно некоторой канонической модели*.

IV. *Два однородных пространства* (X, G), (X', G') *эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют*:

1) *изоморфизм* φ: $g \to g'$ *группы* G *на группу* G';

2) *точки* $x_0 \in X$, $x'_0 \in X'$, *такие, что* φ *отображает стационарную группу* H *точки* x_0 *на стационарную группу* H' *точки* x'_0.

Доказательство. Пусть (X, G), (X', G') эквивалентны и пусть f, φ удовлетворяют условиям а), б). Пусть x_0 — фиксированная точка из X; положим $x'_0 = f(x_0)$. Тогда $x'_0 \in X$. Пусть H и H' — стационарные группы точек x_0 и x'_0. Тогда φ отображает H на H'. Действительно, если $g \in H$, то $x_0 g = x_0$. Отсюда в силу (1.8.8) $f(x_0) = f(x_0 g) = f(x_0)\,\varphi(g)$, т. е. $x'_0 = x'_0\varphi(g)$. Это означает, что $\varphi(g) \in H'$. Обратно, если $\varphi(g) \in H'$, то $x'_0 = x'_0\varphi(g)$, т. е. $f(x_0) = f(x_0)\,\varphi(g) = f(x_0 g)$. Отсюда $x_0 = x_0 g$ в силу взаимной однозначности отображения f, т. е. $g \in H$. Этим доказано, что φ, x_0, x'_0 удовлетворяют условиям 1), 2).

Обратно, пусть существуют φ, x_0, x'_0, удовлетворяющие условиям 1), 2). Построим отображение f пространства X на X', полагая при $x = x_0 g$

$$f(x) = f(x_0 g) = x'_0\varphi(g). \tag{1.8.9}$$

Это определение не зависит от выбора элемента $g \in G$, для которого $x = x_0 g$. Действительно, если также $x = x_0 g_1$, то $g_1 = hg$, где $h \in H$, поэтому

$$x'_0\varphi(g_1) = x'_0\varphi(hg) = x'_0\varphi(h)\,\varphi(g) = x'_0\varphi(g),$$

ибо $\varphi(h) \in H$. Нетрудно также показать, что f взаимно однозначно отображает X на X'. Из (1.8.9) следует, что выполняется условие (1.8.8); следовательно, (X, G) и (X', G') эквивалентны.

Замечание. Аналогичная III каноническая реализация имеет место и для однородного пространства с группой G левых преобразований. В этом случае G/H обозначает пространство левых смежных

классов по H, где H — стационарная подгруппа, определенная совершенно аналогично; преобразование g_0 переходит при этой реализации в преобразование
$$\overline{g}_0\colon \{g\} \to \{g_0 g\}.$$

П р и м е р ы и у п р а ж н е н и я. 1. Пусть Π^2 — совокупность всех пар $z = \{z_1, z_2\}$, $z_1, z_2 \in \Pi^1$, а F^2 — совокупность всех преобразований $f\colon z \to z' = \{z_1', z_2'\}$, где

$$\begin{aligned} &z_i' = (az_i + c)/(bz_i + d) && \text{при} \quad z_i \neq \infty \quad \text{и} \quad z_i \neq -d/b, \\ &z_i' = a/b && \text{при} \quad z_i = \infty, \\ &z_i' = \infty && \text{при} \quad z_i = -d/b,\ i = 1, 2;\ ad - bc \neq 0. \end{aligned} \tag{1.8.10}$$

Легко проверить, что F^2 — группа, так что Π^2 — пространство с группой преобразований F^2. Найти все орбиты в Π^2 относительно F^2.

2. Пусть Π'^2 — совокупность всех пар $z = \{z_1, z_2\}$, $z_1, z_2 \in \Pi^1$, удовлетворяющих условию $z_1 \neq z_2$, а F^2 состоит из сужений преобразований f (см. (1.8.10); мы их снова обозначим f) на Π'^2. Пусть, далее, $\widetilde{\Pi}'^2$ — совокупность всех пар $x = (z, \zeta)$, $z, \zeta \in \Pi^1$, $\zeta \neq \infty$, а $\widetilde{F}^2$ — совокупность всех преобразований $\widetilde{f}\colon x \to x' = \{z', \zeta'\}$, где

$$\begin{aligned} &z' = (az + c)/(bz + d) && \text{при} \quad z \neq \infty, \quad z \neq -d/c, \\ &z' = a/b && \text{при} \quad z = \infty, \\ &z' = \infty && \text{при} \quad z = -d/b, \end{aligned}$$
$$\zeta' = (bz + d)^2 \zeta + b\,(bz + d).$$

Доказать, что:

1) Π'^2 однородно относительно F_2 и $\widetilde{\Pi}^2$ однородно относительно $\widetilde{F}^2$;

2) (Π'^2, F^2) и $(\widetilde{\Pi}'^2, \widetilde{F}^2)$ эквивалентны.

Найти изоморфизм φ и отображение f, переводящие (Π'^2, F^2) в $(\widetilde{\Pi}'^2, \widetilde{F}^2)$.

У к а з а н и е. Рассмотреть отображение $\varphi\colon f \to \widetilde{f}$, при котором f и $\widetilde{f}$ отвечают одним и тем же a, b, c, d, и стационарные группы точек $z_0 \in \Pi'^2$, $x_0 \in \widetilde{\Pi}'^2$, где $z_0 = (0, \infty)$, $x_0 = (0, 0)$.

1.9. Прямое произведение групп. *Прямым произведением групп* $G_1, \ldots, G_n$ называется совокупность G всевозможных систем $g = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n$, в которой умножение задается формулой

$$gg' = \{g_1 g_1', g_2 g_2', \ldots, g_n g_n'\} \quad \text{при} \quad g = \{g_1, \ldots, g_n\}, \quad g' = \{g_1', \ldots, g_n'\}. \tag{1.9.1}$$

Нетрудно проверить, что при этом определении умножения G есть группа, причем единицей в G является $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, где $e_1, \ldots, e_n$ — единицы в $G_1, \ldots, G_n$. Прямое произведение группы $G_1, \ldots, G_n$ обозначается $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$. Отображение

$g_1 \to \{g_1, e_2, \ldots, e_n\}$ есть изоморфизм группы G_1 в $G = G_1 \times \ldots \times G_n$; поэтому часто отождествляют g_1 с $\{g_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Тогда G_1 можно рассматривать как в подгруппу в G и путем аналогичных отождествлений можно рассматривать $G_2, \ldots, G_n$ как подгруппы в G. При таком отождествлении каждый элемент $g \in G$ представляется единственным образом в виде

$$g = g_1 g_2 \ldots g_n, \quad g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n, \tag{1.9.2}$$

причем

$$g_j g_k = g_k g_j, \quad j \neq k, \tag{1.9.3}$$

т. е. каждый $g_j \in G_j$ перестановочен с каждым $g_k \in G_k$ при $j \neq k$. Обратно, если в некоторой группе G существуют подгруппы $G_1, \ldots, G_n$, удовлетворяющие условиям (1.9.2), (1.9.3), то G называют *прямым произведением подгрупп* $G_1, \ldots, G_n$ и пишут

$$G = G_1 \times \ldots \times G_n. \tag{1.9.4}$$

Таким образом, запись (1.9.4) имеет два разных смысла, которые совпадают при указанном выше отождествлении.

Если $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, где $G_1, \ldots, G_n$ — подгруппы в G, то, как легко видеть, каждая из подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_n$ есть нормальный делитель в G.

Примеры. 1. Пусть $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = \mathbf{C}^1$ (см. пример 1 п. 1.1); тогда $G_1 \times \ldots \times G_n$ есть совокупность всех систем $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ комплексных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем произведением двух таких систем $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$ является $\{x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n\}$. Группа $G_1 \times \ldots \times G_n$ называется в этом случае *комплексной n-мерной векторной группой* и обозначается $\mathbf{C}^n$. Аналогично определяется *вещественная n-мерная векторная группа* $\mathbf{R}^n$. Разница лишь в том, что в случае $\mathbf{R}^n$ x_j и x'_j вещественны. Группа $\mathbf{C}^n$ изоморфна группе $\mathbf{R}^{2n}$ (доказать!).

2. Пусть $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = \mathbf{C}_0^1$ (см. пример 2 п. 1.1). Тогда $G_1 \times \ldots \times G_n$ есть совокупность всех систем $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_j \in \mathbf{C}_0^1$, причем произведением двух таких систем $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ является $\{x_1 x'_1, \ldots, x_n x'_n\}$. В этом случае группа $G_1 \times \ldots \times G_n$ обозначается $\mathbf{C}_0^n$. Аналогично определяется $\mathbf{R}_0^n$.

3. Пусть $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = \mathscr{T}^1$ (см. пример 4 п. 1.6); тогда $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ состоит из всех систем $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1)$, и произведением двух таких систем $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ является $\{[x_1 + x'_1], \ldots, [x_n + x'_n]\}$. В этом случае $G_1 \times \ldots \times G_n$ называется *n-мерным тором* и обозначается $\mathscr{T}^n$.

§ 2. Основные понятия и простейшие предложения теории представлений

2.1. Определение представления. Пусть G — группа, X — комплексное линейное пространство $\neq (0)$. *Представлением группы* G в пространстве X называется отображение T, которое каждому элементу g группы G ставит в соответствие линейный оператор $T(g)$ в пространстве X[1] так, что выполнены условия

1) $T(e) = 1$, где 1 — единичный оператор в X;

2) $T(g_1 g_2) = T(g_1)\,T(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Пространство X называется *пространством представления*, а операторы $T(g)$ — *операторами представления*. Из свойства 1) и 2) следует, что $T(g^{-1})\,T(g) = T(g^{-1}g) = T(e) = 1$ и, аналогично, $T(g)\,T(g^1) = 1$. Следовательно, *каждый оператор* $T(g)$ *взаимно однозначно отображает* X *на* X *и*

$$T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}. \tag{2.1.1}$$

Поэтому свойство 2) означает, что *представление в пространстве* X *есть гомоморфизм группы* G *в группу* G_X (т. е. в группу всех линейных операторов в X, взаимно однозначно отображающих X на X; см. пример 4 п. 1.1), и это свойство можно принять в качестве другого определения представления (см. I п. 1.6).

Пусть T — представление группы G в линейном пространстве X и H — подгруппа группы G. Рассматривая операторы $T(g)$ только при $g = h \in H$, мы получим представление $T|_H$ группы H. Оно называется *сужением представления* T *на подгруппу* H. Подпространство $M \subset X$ называется *инвариантным относительно представления* T, если оно инвариантно относительно всех операторов $T(g)$ этого представления. Пусть подпространство $M \subset X$ инвариантно относительно представления T группы G в X. Рассматривая операторы $T(g)$ только на M, мы получим представление группы G в M; оно называется *сужением или ограничением представления* T *на* M и обозначается $T|_M$. Кроме того, операторы $T(g)$ порождают операторы $\widetilde{T}(g)$ в фактор-пространстве $\widetilde{X} = X/M$, и нетрудно убедиться, что соответствие $g \to \widetilde{T}(g)$ удовлетворяет условиям 1), 2) определения представления. Следовательно, это соответствие задает представление (обозначим его $\widetilde{T}$) в X/M. Представление $\widetilde{T}$ называется *порожденным* представлением T в фактор-пространстве X/M. Представление называется *конечномерным*, если пространство X представления конечномерно, и *бесконечномерным* в противном случае. Если X конечномерно, то его размерность $\dim X$ называется *размерностью* (а также *степенью*) *представления* T и обозначается n_T. Если T конечномерно и $n_T = n$,

[1] То есть $\mathrm{T}(g)$ есть линейное отображение пространства X в X.

то, выбрав в X базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, мы можем задать операторы $T(g)$ матрицами n-го порядка:

$$t(g) = \left\| \begin{matrix} t_{11}(g) & \ldots & t_{1n}(g) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1}(g) & \ldots & t_{nn}(g) \end{matrix} \right\|. \tag{2.1.2}$$

Это означает, что

$$T(g)\, e_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)\, e_j. \tag{2.1.3}$$

Условия 1) и 2) примут тогда вид

$$t(e) = 1, \quad t(g_1 g_2) = t(g_1)\, t(g_2), \tag{2.1.4}$$

или, в подробной форме,

$$t_{jk}(e) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k \end{cases} \tag{2.1.5}$$

и

$$t_{jk}(g_1 g_2) = \sum_{s=1}^{n} t_{js}(g_1)\, t_{sk}(g_2). \tag{2.1.6}$$

Матрица $t(g)$ называется *матрицей представления* T, а функции $t_{jk}(g)$ — *матричными элементами* представления T в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Обратно, пусть на группе G задана матричная функция $g \to t(g)$ фиксированного порядка n, удовлетворяющая условиям (2.1.4). Каждому $g \in G$ поставим в соответствие оператор $T(g)$ в координатном пространстве $\mathbf{C}^n$ с матрицей $t(g)$, так что

$$T(g)\colon x_j \to x'_j = \sum_{k=1}^{n} t_{jk}(g) x_k \tag{2.1.7}$$

при $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathbf{C}^n$. Из (2.1.4) следует, что соответствие $g \to T(g)$ есть представление группы G. Поэтому конечномерное представление можно также рассматривать как матричную функцию $g \to T(g)$, удовлетворяющую условиям (2.1.4); в частности, одномерное представление — как числовую функцию $g \to T(g)$, удовлетворяющую условиям (2.1.4). Если сама группа G состоит из матриц g фиксированного порядка, например, $GL(n, \mathbf{C})$, $SL(n, \mathbf{C})$ (примеры 5 и 6 п. 1.1), то одно из простейших представлений получается при $T(g) = g$. Это представление называется *тождественным* представлением.

Представление в пространстве X называется *неприводимым*, если в X нет подпространства, отличного от (0) и всего X, инвариантного относительно операторов представления; в противном случае представление называется *приводимым*.

Очевидно, одномерное представление неприводимо; ниже мы увидим, что существуют группы, имеющие неодномерные и даже бесконечномерные неприводимые представления.

Простейшее представление получается, если положить $T(g) = 1$ для каждого $g \in G$ — оно называется *единичным представлением*. В случае единичного представления T в X каждое подпространство $M \subset X$ инвариантно относительно T и потому единичное представление неприводимо лишь тогда, когда оно одномерно.

I. *Если T — представление в конечномерном пространстве X, то в X существует подпространство M, $M \neq 0$, на котором сужение представления T неприводимо.*

Доказательство. Если само T неприводимо, то утверждение тривиально и $M = X$. Пусть T приводимо. Тогда в X существует подпространство $M_1 \neq (0)$, $M_1 \neq M$, инвариантное относительно T. Рассмотрим сужение T на M_1. Если это сужение неприводимо, то утверждение доказано и можно положить $M = M_1$. Если же это сужение приводимо, то существует подпространство $M_2 \subset M_1$, $M_2 \neq (0)$, $M_2 \neq M_1$, инвариантное относительно T. Так как $\dim X > \dim M_1 > \dim M_2 > \ldots$, то после конечного числа (не более $\dim X$) шагов мы придем к инвариантному подпространству M_k, на котором сужение представления T уже неприводимо.

Примеры и упражнения. 1. Пусть $G = \mathbf{R}^1$ (см. пример 1 п. 1.1). При каждом фиксированном комплексном k функция $a \to e^{ka}$ на $\mathbf{R}^1$ удовлетворяет условиям (2.1.4) и потому задает одномерное представление группы $\mathbf{R}^1$.

Аналогично, функция $z = x + iy \to e^{ik_1 x_e ik_y}$ на $\mathbf{C}^1$ (см. пример 1 п. 1.1) задает одномерное представление группы G при каждых фиксированных комплексных k_1 и k_2.

2. Доказать, что функции (см. пример 2 п. 1.1):

а) $a \to e^{k(\ln|a|)}(\operatorname{sign} a)^{\varepsilon}$ на $\mathbf{R}_0^1$ при каждых фиксированных комплексном k и $\varepsilon = 0$ или 1;

б) $z \to e^{k \ln|z|}(\arg z)^n$ на $\mathbf{C}_0^1$ при каждых фиксированных комплексном k и целом n задают одномерное представление группы $\mathbf{R}_0^1$ и $\mathbf{C}_0^1$ соответственно.

3. Функция $\varphi \to e^{in\varphi}$ на группе Γ^1 вращений окружности (см. пример 1 п. 1.6) при каждом фиксированном целом n задает одномерное представление группы Γ^1.

4. Доказать, что тождественные представления групп $GL(n, \mathbf{C})$, $SL(n, \mathbf{C})$, $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ неприводимы.

5. Доказать, что:

а) матричная функция $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ на $\mathbf{R}$ задает двумерное приводимое представление T группы $\mathbf{R}^1$;

б) имеется в точности одно одномерное подпространство M, инвариантное относительно T. Найти это подпространство M и доказать что:

в) сужение T на M есть единичное представление;

г) представление $\widetilde{T}$ в фактор-пространстве по M, порожденное представлением T, есть единичное представление.

2.2. Эквивалентность. Два представления T, S группы G в пространствах X и Y называют *эквивалентными* и пишут $T \sim S$, если существует линейный оператор A из X в Y, взаимно однозначно отображающий X на Y и удовлетворяющий условию

$$AT(g) = S(g)A \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.2.1}$$

В частности, может быть $Y = X$, так что можно говорить об эквивалентности представлений в одном и том же пространстве. Условие (2.2.1) означает, что $AT(g)\,x = S(g)Ax$ для всех $x \in X$, $g \in G$, т. е. если A отображает x в y (т. е. $Ax = y$), то A отображает также $T(g)\,x$ в $S(g)\,y$ (т. е. $AT(g)\,x = S(g)y$). Очевидно, условие (2.2.1) можно также переписать в виде

$$T(g) = A^{-1}S(g)A \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.2.2}$$

Нетрудно видеть, что введенное понятие эквивалентности представлений удовлетворяет всем аксиомам соотношения эквивалентности.

I. *Если X конечномерно и $n_T = n$, то эквивалентность S и T означает, что также $n_S = n$ и что при надлежащем выборе базисов в X и Y матричные элементы представлений S и T совпадают.*

Действительно, если $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис в X, то, полагая $f_j = Ae_j$, $j = 1, \ldots, n$, получим базис в Y. Применяя к обеим частям (2.1.3) оператор A и пользуясь условием (2.2.1), получим

$$S(g)\,f_k = S(g)Ae_k = AT(g)\,e_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)Ae_j = \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)\,f_j.$$

Обратно, если $n_T = n_S = n$ и $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ — такие базисы в X и Y, что матричные элементы T и S совпадают в этих базисах, то, положив $A(c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) = c_1f_1 + \ldots + c_nf_n$ (где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные комплексные числа), мы получим оператор A, взаимно однозначно отображающий X на Y и удовлетворяющий условию (2.2.1).

В частности, *эквивалентные одномерные представления определяются одной и той же числовой функцией $t(g)$.*

II. *Если $S \sim T$ и T неприводимо, то S также неприводимо.*

Утверждение непосредственно следует из определений неприводимости и эквивалентности, и мы предоставляем читателю подробное рассуждение.

Лемма 1 (лемма Шура). *Пусть T и S — неприводимые представления группы G в пространствах X и Y соответственно и пусть A — оператор из X в Y, удовлетворяющий условию*

$$AT(g) = S(g)A \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.2.3}$$

Тогда либо A взаимно однозначно отображает X на Y, следовательно, $T \sim S$, либо $A = 0$.

Доказательство. Положим $L = AX$; тогда L — подпространство в Y. Оно инвариантно относительно всех $S(g)$, ибо в силу (2.2.3) $S(g)Ax = AT(g)\,x \in AX = L$ для всех $g \in G$, $x \in X$. Но тогда в силу неприводимости S либо $L = (0)$, либо $L = Y$. В первом случае $A = 0$. Рассмотрим случай $L = Y$. Тогда A отображает X на Y. Докажем, что A взаимно однозначен. Положим $M = \{x\colon Ax = 0\}$; достаточно доказать, что $M = (0)$. Для этого заметим, что M инвариантно относительно T. Действительно, если $x \in M$, то $Ax = 0$. Но тогда в силу (2.2.3) $AT(g)\,x = S(g)Ax = S(g)\,0 = 0$, так что и $T(g)\,x \in M$. В силу неприводимости представления T отсюда заключаем, что либо $M = (0)$, либо $M = X$. Но второй случай невозможен, ибо он означает, что $Y = L = AX = (0)$. Этим завершается доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть T — конечномерное неприводимое представление группы G в пространстве X. Тогда каждый линейный оператор B в пространстве X, перестановочный со всеми операторами $T(g)$, $g \in G$, имеет вид $B = \lambda 1$, где λ — число.*

Доказательство. По условию,

$$BT(g) = T(g)B \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.2.4}$$

Поскольку B — линейный оператор в конечномерном пространстве, то B имеет по крайней мере одно собственное значение λ. Положим $A = B - \lambda 1$; тогда A не взаимно однозначен на X. С другой стороны, из (2.2.4) следует, что $AT(g) = T(g)A$ для всех $g \in G$, т. е. A удовлетворяет условию (2.2.3) при $S(g) = T(g)$, $Y = X$. Так как A не взаимно однозначен, то в силу леммы 1 $A = 0$, т. е. $B - \lambda 1 = 0$, $B = \lambda 1$.

Приведем еще одно доказательство леммы 2, не использующее лемму 1. Пусть снова λ — собственное значение оператора B. Положим $L = \{x\colon x \in X\colon BX = \lambda x\}$; $L \neq 0$, ибо λ — собственное значение оператора B. Кроме того, L инвариантно относительно T. Действительно, если $x \in L$, то $Bx = \lambda x$. Отсюда $BT(g)\,x = T(g)Bx = Tg(\lambda x) = \lambda T(g)\,x$, так что и $T(g)\,x \in L$. В силу неприводимости представления T заключаем, что $L = X$, т. е. $Bx = \lambda x$ на всем X, $B = \lambda 1$.

Следствие. *Неприводимое конечномерное представление коммутативной группы одномерно.*

Доказательство. Пусть T — неприводимое представление коммутативной группы G в конечномерном пространстве X. Тогда для любых g_0, $g \in G$ $T(g_0)T(g) = T(g_0 g) = T(g g_0) = T(g)T(g_0)$, т. е. каждый оператор $T(g_0)$ перестановочен со всеми $T(g)$, так что $T(g_0) = \lambda(g_0)\,1$ на основании леммы 2. Если $\dim X > 1$, то каждое подпространство в X будет инвариантным относительно всех операторов $T(g) = \lambda(g)\,1$, а это противоречит неприводимости представления T; следовательно, $\dim X = 1$.

Итак, неприводимое конечномерное представление коммутативной группы одномерно, следовательно, задается числовой функцией $t(g)$, удовлетворяющей условиям

$$t(e) = 1, \quad t(g_1 g_2) = t(g_1)\,t(g_2). \tag{2.2.5}$$

Всякая числовая функция на коммутативной группе G, удовлетворяющая условиям (2.2.5), называется *характером* на группе G.

Примеры и упражнения. 1. Доказать, что всякое конечномерное представление коммутативной группы содержит одномерное инвариантное подпространство.

2. Пусть $G = S_3$ и пусть представление $g \to T(g)$ группы G в $\mathbf{C}^3$ определено по следующему правилу: если $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ ((i, j, k) — перестановка чисел 1, 2, 3), то $T(g)\,e_1 = e_i$, $T(g)\,e_2 = e_j$, $T(g)\,e_3 = e_k$. Найти неприводимые подпредставления представления T.

3. Доказать, что любое неприводимое представление циклической группы G порядка n с образующим элементом a имеет вид $T_m(a^k) = e^{2\pi mki/n}$, где $m = 0, 1, \ldots, n-1$ (оператор $T_m(a^k)$ есть оператор умножения на число $e^{2\pi mki/n}$ в одномерном комплексном векторном пространстве $\mathbf{C}$).

2.3. Сопряженное представление. Пусть X, Y — линейные пространства. *Билинейной формой* на паре X, Y называется числовая функция на $X \times Y$: $\{x, y\} \to (x, y)$, удовлетворяющая следующим условиям [1]:

1) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$,
2) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$,
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
4) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$,

для всех x, x_1, $x_2 \in X$, y, y_1, $y_2 \in Y$ и любого числа α. В частности, Y может совпадать с X, так что можно говорить о билинейной форме на X. Если (x, y) — билинейная форма на паре линейных пространств X, Y, то вектор $x \in X$ называют *ортогональным к* $y \in Y$ *относительно* (x, y) и пишут $x \perp y$, если $(x, y) = 0$. Два множества $E \subset X$

[1] Нам удобно здесь отклониться от общепринятой терминологии, в которой билинейной формой называется функция (x, y), удовлетворяющая условиям 1), 3), 4), но вместо условия 2) — условию 2$'$) $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$. В книге Н. Бурбаки [1] функция (x, y), удовлетворяющая условиям 1)–4) в тексте, называется *полуторалинейной формой*.

и $E_1 \subset Y$ называют *ортогональными относительно* (x, y) и пишут $E \perp E_1$, если каждый вектор из E ортогонален каждому вектору из E_1. Далее, если E — некоторое множество в X, то множество всех $y \in Y$, ортогональных к E, называется *ортогональным дополнением к* E *в* Y относительно (x, y) и обозначается $E^{\perp}_{(x,\,y)}$, или, кратко, $E^{\perp}$, если ясно, относительно какой формы берется это дополнение. Аналогично определяется ортогональное дополнение $E_1^{\perp}$ к $E_1 \subset Y$ в X относительно (x, y).

Из свойств 1)–4) следует, что $E^{\perp}$ и $E_1^{\perp}$ — подпространства в Y и X соответственно.

Пара X, Y, на которой задана билинейная форма (x, y), называется *находящейся в двойственности относительно формы* (x, y), если, кроме 1)–4), выполняются условия:

5) *из* $(x_0, y) = 0$ *для всех* $y \in Y$ *следует* $x_0 = 0$;

6) *из* $(x, y_0) = 0$ *для всех* $x \in X$ *следует* $y_0 = 0$.

Условие 5) означает, что $Y^{\perp}_{(x,\,y)} = (0)$, а условие 6) — что $X^{\perp}_{(x,\,y)} = 0$. Если (x, y) — билинейная форма на паре X, Y, то функция $(y, x)_1 = \overline{(x, y)}$ — билинейная форма на паре Y, X.

Отсюда заключаем:

I. *Если пара* X, Y *находится в двойственности относительно формы* (x, y), *то пара* Y, X *находится в двойственности относительно формы* $(y, x)_1 = \overline{(x, y)}$.

Рассмотрим в качестве примера случай конечномерных пространств X и Y. Пусть $\dim X = m$, $\dim Y = n$ и пусть $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_n$ — базисы в X и Y соответственно. Тогда для $x \in X$, $y \in Y$

$$x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j, \quad y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k, \tag{2.3.1}$$

где ξ_j, η_k — числа; отсюда и из свойств 1)–4) заключаем, что

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \overline{\eta}_k, \tag{2.3.2}$$

где $a_{jk} = (e_j, f_k)$. Обратно, при любом выборе чисел a_{jk} формулы (2.3.1), (2.3.2) определяют билинейную форму на паре X, Y. Числа

$$a_{jk} = (e_j, f_k) \tag{2.3.3}$$

называются *коэффициентами формы* (x, y) *относительно базисов* $e_1, \ldots, e_m$; $f_1, \ldots, f_n$.

Выясним теперь, при каких условиях пара X, Y находится в двойственности относительно формы (2.3.2).

Положим $y_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k^0 f_k$. Условие 6) означает, что из равенства

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \overline{\eta}_k^0 \right) \xi_j = 0 \quad \text{при всех} \quad \xi_j \tag{2.3.4}$$

следует $\eta_k^0 = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Но (2.3.4) эквивалентно однородной системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} a_{jk} \overline{\eta}_k^0 = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.3.5}$$

Следовательно, условие 6) означает, что система (2.3.5) имеет только тривиальное решение. Для этого же необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$a = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \tag{2.3.6}$$

был не меньше n, в частности, должно быть $m \geqslant n$. Меняя в этом рассуждении x и y ролями и применяя условие 5), заключаем, что также $n \geqslant m$. Следовательно, $n = m$ и $\det a \neq 0$. Но в этом случае можно упростить выражение (2.3.2) для (x, y). Действительно, выберем в Y новый базис $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ по формулам $f_k' = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{jk} f_j$, где

$$\overline{b} = \left\| \begin{matrix} \overline{b}_{11} & \ldots & \overline{b}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{b}_{n1} & \ldots & \overline{b}_{nn} \end{matrix} \right\|$$

— обратная матрица к a; она существует, ибо $\det a \neq 0$. Тогда коэффициентами формы (x, y) относительно базисов $e_1, \ldots, e_n$; $f_1', \ldots, f_n'$ будут

$$a_{jk}' = (e_j, f_k') = \left(e_j', \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu k} f_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^{n} (e_j, f_\nu) \, \overline{b}_{\nu k} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_{j\nu} \overline{b}_{\nu k} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k, \end{cases}$$

и потому $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \overline{\eta}_j'$, где η_j' — координаты вектора y в базисе $f_1', \ldots, f_k'$. Мы доказали следующее предложение:

II. *Два конечномерных пространства* X, Y *тогда и только тогда могут находиться в двойственности*, *когда* $\dim X = \dim Y$. *В этом* *случае форма* (2.3.2) *при* $n = m = \dim X = \dim Y$ *тогда и только тогда задает двойственность пары* X, Y, *когда определитель этой формы отличен от нуля.*

При надлежащем выборе базисов в $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ *выражение* (2.3.2) *для формы* (x, y) *принимает вид*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k, \tag{2.3.7}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — *координаты векторов* x *и* y *в этих базисах.*

Вернемся к общему случаю. Пусть X, Y — линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно формы (x, y), и T, S — представления группы G в X и Y соответственно. Представление S называется *сопряженным к представлению* T *относительно* (x, y), если

$$(T(g)\, x,\, S(g)\, y) = (x, y) \quad \text{для всех} \quad g \in G, x \in X, y \in Y. \tag{2.3.8}$$

III. *Условие* (2.3.8) *эквивалентно условию*

$$(T(g^{-1})\, x,\, y) = (x,\, S(g)\, y) \quad \text{для всех} \quad g \in G, x \in X, y \in Y. \tag{2.3.9}$$

Для доказательства достаточно заменить в (2.3.8) x на $T(g^{-1})\, x$ и заметить, что $T(g)$ взаимно однозначно отображает X на X.

IV. *Если* X *и* Y *находятся в двойственности относительно формы* (x, y), T — *представление в* X *и если в* Y *существует представление, сопряженное к* T *относительно* (x, y), *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть S и S' — представления в Y, сопряженные к T относительно (x, y). Тогда, в силу (2.3.9) $(T(g^{-1})\, x, y) = (x, S(g)\, y)$ и $(T(g^{-1})\, x, y) = (x, S'(g)\, y)$, а значит, $0 = (x, (S(g) - S'(g))\, y)$ для всех $g \in G$, $x \in X$, $y \in Y$. Отсюда в силу условия 6) на с. 37 $(S(g) - S'(g))\, y = 0$ для всех $y \in Y$, $g \in G$; следовательно, $S(g) = S'(g)$, и $S = S'$.

Далее из I заключаем, что:

V. *Если* S *сопряжено к* T *относительно* (x, y), *то* T *сопряжено к* S *относительно* $(y, x)_1 = (\overline{x, y})$.

Рассмотрим подробнее случай конечномерных X, Y. Пусть представление S в пространстве Y сопряжено представлению T в пространстве X относительно формы (x, y). Выберем в X и Y базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ (где $n = \dim X = \dim Y$) так, что выполняется (2.3.7) (см. II), и следовательно,

$$(e_j, f_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Пусть $t_{jk}(g)$, $s_{jk}(g)$ — матричные элементы представлений T и S в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ соответственно, так что

$$T(g)\, e_j = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu f}(g)\, e_\nu, \quad S(g)\, f_k = \sum_{\mu=1}^{n} s_{\mu k}(g)\, f\mu \tag{2.3.11}$$

(см. (2.1.3)). В силу свойств 1)–4) формы (x, y), условие (2.3.9) эквивалентно системе соотношений

$$(T(g^{-1})\, e_j, f_k) = (e_j, S(g)\, f_k), \quad j, k = 1, \ldots, n, \tag{2.3.12}$$

которые в силу (2.3.10) и (2.3.11) сводятся к соотношениям

$$t_{kj}(g^{-1}) = \overline{s_{jk}(g)}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n, \quad n = \dim X = \dim Y. \tag{2.3.13}$$

Таким образом:

VI. *Два конечномерных представления T и S в пространствах X и Y тогда и только тогда взаимно сопряжены относительно некоторой формы (x, y), когда при надлежащем выборе базисов в X и Y их матричные элементы связаны соотношениями* (2.3.13).

Из VI заключаем:

VII. *Если X и Y — конечномерные пространства, находящиеся в двойственности относительно формы (x, y), и в X задано представление T группы G, то в Y существует и притом только одно представление S группы G, сопряженное представлению T.*

Доказательство. Единственность S была доказана в IV; докажем его существование. Положим $n = \dim X = \dim Y$ и выберем базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ в X и Y так, чтобы выполнялось (2.3.7). Пусть $t_{jk}(g)$ — матричные элементы представления T в базисе $e_1, \ldots, e_n$ и $t(g)$ — соответствующая матрица. Определим оператор $S(g)$ в Y при помощи его матричных элементов $s_{jk}(g)$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$, полагая

$$s_{jk}(g) = \overline{t_{kj}(g^{-1})}, \quad j, k = 1, \ldots, n; \tag{2.3.14}$$

пусть $s(g)$ — матрица оператора $S(g)$. Соотношения (2.3.14) означают, что $s(g) = t(g^{-1})^*$, где $*$ обозначает эрмитово-сопряженную матрицу.

Докажем, что соответствие $g \to S(g)$ задает представление группы G в Y. Действительно,

$$s(e) = t(e)^* = 1^* = 1, \quad s(g_1 g_2) = t((g_1 g_2)^{-1})^* = \\ = t(g_2^{-1} g_1^{-1})^* = (t(g_2^{-1})\, t(g_1^{-1}))^* = s(g_1)\, s(g_2).$$

Отсюда

$$S(e) = 1, \quad S(g_1 g_2) = S(g_1)\, S(g_2).$$

Наконец, соотношения (2.3.14) эквивалентны соотношениям (2.3.13); следовательно, S сопряжено к T относительно (x, y).

VIII. *Если конечномерные представления T и S взаимно сопряжены, то T неприводимо тогда и только тогда, когда S неприводимо.*

Доказательство. Пусть X и Y — пространства представлений T и S, так что X и Y находятся в двойственности относительно некоторой формы (x, y) и $\dim X = \dim Y$. Пусть M — подпространство в Y, инвариантное относительно S. Положим $L = M^{\perp}$. Очевидно, L — подпространство в X; кроме того, L инвариантно относительно T. Действительно, если $x \in L$, то $(x, y) = 0$ для всех $y \in M$ и потому также $(x, S(g^{-1})\, y) = 0$ для всех $y \in M$, ибо, по условию, M инвариантно относительно S. Но тогда в силу (2.3.9) для всех $y \in M$

$$(T(g)\, x, y) = (x, S(g^{-1})\, y) = 0,$$

так что и $T(g)\, x \in L$.

Пусть теперь T неприводимо; тогда либо $L = (0)$, либо $L = X$. В первом случае для X и M выполняется условие 5) определения двойственности (см. с. 37) и очевидно, что также выполняется условие 6), так что X и M находятся в двойственности относительно (x, y); в силу II последнее невозможно при $\dim M < \dim Y = \dim X$, т. е. при $M \neq Y$. Во втором случае, если $y \in M$, то $(x, y) = 0$ для всех $x \in X$, откуда в силу условия 6) на с. 37 заключаем, что $y = 0$; следовательно, $M = (0)$. Итак, если T неприводимо, то единственными подпространствами M в Y, инвариантными относительно S, являются $M = (0)$ и $M = Y$. Следовательно, S неприводимо. Меняя в предыдущем рассуждении T и S ролями, заключаем, что из неприводимости S следует неприводимость T.

Замечание. Аналогично тому, как это сделано выше, можно ввести двойственность относительно формы (x, y), удовлетворяющей условиям 1), 3), 4), а вместо условия 2) — условию 2′) $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$ (см. сноску на с. 36). Представление S в пространстве X называется *контрагредиентным* представлению T в пространстве Y относительно такой формы (x, y), если $(T(g)\, x, S(g)\, y) = (x, y)$ для всех $g \in G$, $x \in X$, $y \in Y$. Все предложения этого п. 2.3 остаются справедливыми для контрагредиентного представления, причем формулы (2.3.2), (2.3.7), (2.3.9), (2.3.13) следует заменить соответственно формулами:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \eta_k, \tag{2.3.2′}$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k, \tag{2.3.7′}$$

$$(T(g)\, x, y) = (x, S(g^{-1})\, y), \tag{2.3.9′}$$

$$t_{kj}(g) = s_{jk}(g^{-1}) \tag{2.3.13′}$$

и все доказательства в п. 2.3 почти дословно переносятся на случай такой формы (x, y).

Примеры. 1. Пусть T — конечномерное представление группы G в векторном пространстве X, S — представление группы G в пространстве Y, сопряженное представлению T. Показать, что векторное подпространство $L \subset X$ инвариантно относительно представления T тогда и только тогда, когда подпространство $M = L^\perp \subset Y$ инвариантно относительно представления S. [Указание: см. доказательство VIII).]

2. Доказать, что любое n-мерное представление коммутативной группы содержит $n-1$-мерное инвариантное подпространство.

3. Найти представление, сопряженное одномерному представлению T группы G.

4. Найти необходимое и достаточное условие эквивалентности представлений T и T^*, где T — одномерное представление группы G, T^* — сопряженное к T представление.

5. Пусть G — группа матриц, T — ее тождественное представление. Справедливо ли соотношение $T \sim T^*$ (где T^* — представление, сопряженное к T), если G — группа:

а) $GL(n, \mathbf{R})$; б) $SL(n, \mathbf{R})$; в) $U(n)$; г) $O(n)$; д) $SU(n)$; е)$SO(n)$?

2.4. Прямая сумма представлений.. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_m$ — линейные пространства, $X = X_1 + \ldots + X_m$ — их прямая сумма, так что каждый вектор x из X единственным образом представляется в виде $x = x_1 + \ldots + x_m$, где $x_k \in X_k$ (см. Курош [1]). Пусть в каждом X_k задано представление T^k одной и той же группы G. Определим линейный оператор $T(g)$ в X, полагая

$$T(g)(x_1 + \ldots + x_m) = T^1(g)\, x_1 + \ldots + T^m(g)\, x_m. \tag{2.4.1}$$

Очевидно,

$$T(e) = 1, \quad T(g_1 g_2) = T(g_1)\, T(g_2),$$

так что соответствие $g \to T(g)$ есть представление группы G в пространстве X. Представление T в пространстве $X = X_1 + \ldots + X_m$, определенное формулой (2.4.1), называется *прямой суммой представлений* $T^1, \ldots, T^m$ и обозначается $T^1 + \ldots + T^m$. Очевидно, каждое X_k есть подпространство в X, инвариантное относительно T, и сужение T на X_k есть T^k.

Рассмотрим подробнее случай конечномерных X_k, $k = 1, \ldots, m$. Пусть $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ — базис в X_k и пусть $t_{jl}^k(g)$, $j, l = 1, \ldots, n_k$, — матричные элементы представления T^k в этом базисе; $t^k(g)$ — соответствующая матрица. Тогда объединение всех этих базисов есть базис в $X = X_1 + \ldots + X_m$ и в силу (2.4.1) и (2.1.3)

$$T(g)\, e_j^k = T^k(g)\, e_j^k = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}^k(g)\, e_\nu^k.$$

Если поэтому расположить базисы $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ в порядке возрастания индекса k, то матрицей оператора $T(g)$ в полученном базисе пространства X будет

$$t(g) = \left\| \begin{matrix} t'_{11}(g) & \ldots t'_{1n_1}(g) & 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t'_{n_1 1}(g) & \ldots t'_{n_1 n_1}(g) & 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 \\ 0 & \ldots 0 & t^2_{11}(g) & \ldots t^2_{1n_2}(g) & \ldots 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots 0 & t^2_{n_2 1}(g) & \ldots t^2_{n_2 n_2}(g) & \ldots 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 & \ldots t^m_{11}(g) & \ldots t^m_{1n_m}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 & \ldots t^m_{n_m 1}(g) & \ldots t^m_{n_m n_m}(g) \end{matrix} \right\|, \tag{2.4.2}$$

или, в символической записи,

$$t(g) = \left\| \begin{matrix} t^1(g) & & & \\ & t^2(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^m(g) \end{matrix} \right\|, \tag{2.4.3}$$

где на всех не указанных местах стоят нули. Следовательно,

I. *Пусть* T — *прямая сумма представлений* $T^1, \ldots, T^m$ *в конечномерных пространствах* $X_1, \ldots, X_m$. *Если* $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ — *базис в* X^k, *то при расположении этих базисов в порядке возрастания индекса* k *матрица оператора* $T(g)$ *в полученном базисе в* $X = X_1 + \ldots + X_m$ *имеет квазидиагональную форму* (2.4.3), *где вдоль диагонали расположены матрицы* $t^k(g)$ *представлений* X^k *в базисах* $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$.

Вернемся к общему случаю. Представление T в пространстве X называется *вполне приводимым*, если T есть прямая сумма конечного числа неприводимых представлений. В этом случае говорят также, что T *разлагается в прямую сумму неприводимых представлений*. При этом не исключается тот случай, когда эта прямая сумма состоит только из одного слагаемого, так что неприводимое представление также считается вполне приводимым. Представление T называют *кратным неприводимому представлению* T^1 и пишут $T = nT^1$, если оно есть прямая сумма n представлений, каждое из которых эквивалентно одному и тому же неприводимому представлению T^1. Вообще, если вполне приводимое представление T есть прямая сумма неприводимых представлений, среди которых имеется n_1 представлений, эквивалентных T^1, n_2 — эквивалентных T^2, …, n_p — эквивалентных T^p, и нет никаких других неприводимых представлений, то пишут

$$T = n_1 T^1 + n_2 T^2 + \ldots + n_p T^p$$

и говорят, что T^j *входит*, или *содержится* в T с кратностью n_j $(j = 1, \ldots, p)$.

Нетрудно привести пример приводимого, но не вполне приводимого (и притом даже конечномерного) представления. Достаточно рассмотреть двумерное представление $\alpha \to T(\alpha)$ группы $\mathbf{R}^1$ (см. пример 1 п. 2.1) в пространстве $X = \mathbf{C}^2$, матрицей которого является

$$t(\alpha) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^1. \tag{2.4.4}$$

Условия 1), 2) определения представления здесь выполняются, ибо

$$t(0) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$t(\alpha_1)\, t(\alpha_2) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & 1 \end{Vmatrix} = t(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Так как это представление двумерно, то каждое его нетривиальное инвариантное подпространство, отличное от (0) и всего пространства, одномерно. Пусть M — такое одномерное подпространство, $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ — вектор из M. Так как M инвариантно, то $t(\alpha)\, x = \lambda(\alpha)\, x$, где $\lambda(\alpha)$ — числовая функция, т. е. в силу (2.4.4)

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \alpha\xi_1 + \xi_2 \end{Vmatrix} = \lambda(\alpha) \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}. \tag{2.4.5}$$

Но (2.4.5) означает, что

$$\xi_1 = \lambda(\alpha)\, \xi_1, \quad \alpha\xi_1 + \xi_2 = \lambda(\alpha)\, \xi_2. \tag{2.4.6}$$

Из первого соотношения (2.4.6) следует, что либо $\xi_1 = 0$, либо $\lambda(\alpha) = 1$. Но второй случай приводит снова к первому, ибо из второго соотношения (2.4.6) тогда следует, что $\alpha\xi_1 + \xi_2 = \xi_2$, а значит, $\alpha\xi_1 = 0$ при произвольном α, и потому $\xi_1 = 0$. Итак, единственным нетривиальным инвариантным подпространством данного представления является $M = \left\{ \begin{Vmatrix} 0 \\ \xi \end{Vmatrix}, \xi \in \mathbf{C}^1 \right\}$, и потому это представление не может быть прямой суммой неприводимых представлений.

При фактическом разложении вполне приводимого представления в ряде случаев оказывается удобным следующее предложение:

II. *Пусть T — представление группы G в пространстве X и пусть M_1, M_2, M_3, … — последовательность подпространств в X, обладающая следующими свойствами*:

1) *каждое* M_k *инвариантно относительно* T;

2) *сужения* T^j *представления* T *на* M_k *неприводимы.*

Тогда из последовательности M_1, M_2, M_3, ... *можно выделить такие подпространства* M_{k_1}, M_{k_2}, ..., *что*:

а) M_{k_1}, M_{k_2}, ... *линейно независимы.*

б) $\sum\limits_j M_{k_j} = \sum\limits_k M_k$.

В частности, если $\sum\limits_k M_k = X$, *то также* $\sum\limits_j M_{k_j} = X$.

Доказательство. Построим M_{k_j} по индукции. Положим $k_1 = 1$, так что $M_{k_1} = M_1$. Предположим, что уже построены линейно независимые M_{k_1}, ..., M_{k_n}, удовлетворяющие условию

$$M_{k_1} \dotplus \ldots \dotplus M_{k_n} = M_1 \dotplus M_2 \dotplus \ldots \dotplus M_{k_n}, \tag{2.4.7}$$

и рассмотрим подпространство $M = (M_1 \dotplus \ldots \dotplus M_{k_n}) \cap M_k$ при $k > k_n$. Оно инвариантно относительно T и содержится в M_k. В силу условия 2) либо M $= (0)$, либо $M = M_k$. Если первый случай имеет место при каком-нибудь $k > k_n$, то полагаем k_{n+l} равным наименьшему из этих k. Если же при всех $k > k_n$ имеет место второй случай, то

$$M_k \subset M_{k_1} \dotplus \ldots \dotplus M_{k_n} \quad \text{при} \quad k > k_n,$$

так что в силу (2.4.7) уже $M_{k_1} \dotplus \ldots \dotplus M_{k_n} = \sum\limits_k M_k$.

Примеры и упражнения. 1. Доказать, что представление T (см. упражнение 2 на с. 36) разложимо в прямую сумму двух неприводимых представлений.

2. Доказать, что представление T разложимо в прямую сумму представлений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ тогда и только тогда, когда сопряженное представление T^* разложимо в прямую сумму представлений $T^{(1)^*}$ и $T^{(2)^*}$.

3. Доказать, что конечномерное представление конечной коммутативной группы разложимо в прямую сумму одномерных представлений.

2.5. Полупрямая сумма (зацепление) представлений. Представление T группы G в пространстве X называют *полупрямой суммой* (или *зацеплением*) представлений T^k в пространствах X_k, $k = 1, \ldots, m$, и пишут $T = T^1 \to T^2 \to T^3 \to \ldots \to T^m$, если в X существует такая система инвариантных относительно T подпространств $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subseteq M_m = X$, что сужение T на M_1 эквивалентно T^1, представление $\widetilde{T}^2$, порожденное представлением T на M_2/M_1 (см. п. 2.1), эквивалентно T^2, представление $\widetilde{T}^3$, порожденное представлением T на M_3/M_2, эквивалентно T^3, ..., представление $\widetilde{T}^m$, порожденное представлением T на X/M_{m-1}, эквивалентно T^m.

Очевидно, что если T — прямая сумма представлений $T^1, \ldots, T^m$ (т. е. $T = T^1 + \ldots + T^m$), то T есть также зацепление этих представлений (т. е. $T = T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$); в качестве подпространств

$M_1,\ M_2,\ \ldots, M_m$ можно взять $M_1 = X_1,\ M_2 = X_1 + X_2,\ \ldots, M_m = X_1 + \ldots + X_m = X$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть представление T в примере в конце п. 2.4. В силу (2.4.4) это представление задается формулами

$$T(\alpha)\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \alpha\xi_1 + \xi_2 \end{matrix} \right\|. \tag{2.5.1}$$

В пространстве X этого представления есть только одно нетривиальное инвариантное подпространство, $M = \left\{ \left\| \begin{matrix} 0 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|, \xi_2 \in \mathbf{C}^1 \right\}$; для $\xi = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| \in M$,

$$T(\alpha)\,\xi = \xi,$$

т. е. $T(\alpha) = 1$ на M. Каждый вектор $\overline{\xi}$ фактор-пространства $\mathbf{C}^2/M$ есть совокупность всех $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$, где ξ_1 фиксировано, а ξ_2 пробегает все $\mathbf{C}^1$. Поэтому из (2.5.1) следует, что представление $\widetilde{T}$, порожденное в $\mathbf{C}^2/M$ представлением T, задается формулой $\widetilde{T}(\alpha) = 1$. Следовательно, рассматриваемое представление T есть зацепление двух единичных представлений группы $\mathbf{R}^1$, но не есть прямая сумма этих представлений.

Рассмотрим случай зацепления конечномерных $T^1,\ \ldots, T^m$. Пусть $e_1^k,\ \ldots, e_{n_k}^k$ — базис в X_k и $t_{j\nu}^k(g)$ — матричные элементы представления T^k в этом базисе ($k = 1,\ \ldots, m$). По условию, представление $\widetilde{T}^k$, порожденное представлением T в $\widetilde{X}_k = M_k/M_{k-1}$ ($k = 1,\ \ldots, m$, $\widetilde{X}_1 = M_1$), эквивалентно представлению T^k; следовательно (см. I п. 2.2), можно так выбрать базис $\widetilde{f}_1^k,\ \ldots, \widetilde{f}_{n_k}^k$ в $\widetilde{X}_k$, что матричные элементы представления T^k в этом базисе совпадают с $t_{j\nu}^k(g)$. Пусть $f_1^k,\ \ldots, f_{n_k}^k$ — элементы из M_k, являющиеся представителями классов $\widetilde{f}_1^k,\ \ldots, \widetilde{f}_{n_k}^k$ при $k \geqslant 2$ и $f_1^1 = \widetilde{f}_1^1,\ \ldots, f_{n_1}^1 = \widetilde{f}_{n_1}^1$. Тогда все f_ν^k, $\nu = 1,\ \ldots, n_k$; $k = 1,\ \ldots, m$, образуют базис в X. Действительно, пусть $x \in X$ и пусть $\widetilde{x}$ — образ элемента x при каноническом отображении $X \to X/M_{m-1}$. Тогда $x \in \widetilde{x}$. Так как $\widetilde{f}_1^m,\ \ldots \widetilde{f}_{n_m}^m$ — базис в X/M_{m-1}, то $\widetilde{x} = \alpha_1^m \widetilde{f}_1^m + \ldots + \alpha_{n_m}^m \widetilde{f}_{n_m}^m$ при некоторых числах $\alpha_1^m,\ \ldots, \alpha_{n_m}^m$. Отсюда $x = \alpha_1^m f_1^m + \ldots + \alpha_{n_m}^m f_{n_m}^m + y_{m-1}$, где $y_{m-1} \in M_{m-1}$. Применяя к y_{m-1} и M_{m-1}/M_{m-2} предыдущее рассуждение вместо x и X/M_{m-1}, заключаем, что $y_{m-1} = \alpha_1^{m-1} f_1^{m-1} + \ldots + \alpha_{n_{m-1}}^{m-1} f_{n_{m-1}}^{m-1} + y_{m-2}$, где $y_{m-2} \in M_{m-2}$. Повторяя это рассуждение, после конечного числа шагов получим, что

$$x = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_1^k f_1^k.$$

Остается доказать, что f_j^k, $j = 1, \ldots, n_k$; $k = 1, \ldots, m$, линейно независимы. Пусть

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^k f_j^k = 0; \tag{2.5.2}$$

надо доказать, что все $\alpha_j^k = 0$.

Применяя к обеим частям (2.5.2) каноническое отображение $X \to \to X/M_{m-1}$, получим, что

$$\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j^m \widetilde{f}_j^m = 0. \tag{2.5.3}$$

Так как $\widetilde{f}_j^m$, $j = 1, \ldots, n_m$, — базис в X/M_{m-1}, то из (2.5.3) следует, что $\alpha_j^m = 0$, $j = 1, \ldots, n_m$. Поэтому (2.5.2) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^k f_j^k = 0. \tag{2.5.4}$$

Применяя теперь к (2.5.4) каноническое отображение $M_{m-1} \to \to M_{m-1}/M_{m-2}$ и повторяя предыдущее рассуждение, заключаем, что также $\alpha_j^{m-1} = 0$, $j = 1, \ldots, n_{m-1}$. После конечного числа таких шагов мы получим, что все $\alpha_j^k = 0$.

Итак, все f_ν^k образуют базис в X. Расположим f_ν^k следующим образом:

$$f_1^1, \ldots, f_{n_1}^1; \quad f_1^2, \ldots, f_{n_2}^2; \ldots; f_1^m, f_2^m \ldots, f_{n_m}^m, \tag{2.5.5}$$

и найдем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$ в этом базисе. По условию, матричные элементы сужения представления T на M_1 в базисе $f_1^1, \ldots \ldots, f_{n_1}^1$совпадают с $t_{jk}^1(g)$, так что

$$T(g)\, f_k^1 = \sum_{j=1}^{n_1} t_{jk}^1(g)\, f_j^1. \tag{2.5.6}$$

Далее, матричные элементы представления T^2 в базисе $\widetilde{f}_1^2, \ldots, \widetilde{f}_{n_2}^2$ совпадают с $t_{jk}^2(g)$, так что

$$\widetilde{T}(g) \widetilde{f}_k^2(g) = \sum_{j=1}^{n_2} t_{jk}^2(g)\, \widetilde{f}_j^2.$$

Отсюда

$$T(g)\, f_k^2 = \sum_{j=1}^{n_2} t_{jk}^2(g)\, f_j^2 + y_1, \quad y_1 \in M_1. \tag{2.5.7}$$

Повторяя это рассуждение, заключаем, что, вообще,

$$T(g)\, f_k^{\nu} = \sum_{j=1}^{n_\nu} t_k^{\nu}(g)\, f_j^{\nu} + y_{\nu-1},$$

где

$$y_{\nu-1} \in M_{\nu-1}, \quad \nu = 1,\ \ldots,\, m, \quad y_0 = 0. \tag{2.5.8}$$

Но это означает, что матрица $t(g)$ оператора $T(g)$ в базисе (2.5.5) имеет вид

$$t(g) = \left\| \begin{matrix} t_{11}^1(g) & \ldots t_{1n_1}^1(g) & 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ t_{n_1 1}^1(g) & \ldots t_{n_1 n_1}^1(g) & 0 & \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 \\ * & \ldots * & t_{11}^2(g) & \ldots t_{1n_2}^2(g) & \ldots 0 & \ldots 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ * & \ldots * & t_{n_2 1}^2(g) & \ldots t_{n_1 n_2}^2(g) & \ldots 0 & \ldots 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ * & \ldots * & * & \ldots\ldots & \ldots t_{11}^m(g) & \ldots t_{1n_m}^m(g) \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ * & \ldots * & * & \ldots\ldots & \ldots t_{n_m 1}^m(g) & \ldots t_{n_m n_m}^m(g) \end{matrix} \right\|, \tag{2.5.9}$$

где $*$ обозначают некоторые матричные элементы, или, символически,

$$t(g) = \left\| \begin{matrix} t^1(g) & & & \\ * & t^2(g) & & \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ * & * & \ldots & t^m(g) \end{matrix} \right\|, \tag{2.5.10}$$

где $t^k(g)$ — матрица представления T^k в базисе $e_1^k,\ \ldots,\, e_{n_k}^k$, $*$ обозначает некоторые матрицы (зависящие, вообще говоря, от g), а на всех не указанных местах стоят нули.

Таким образом:

I. *Если* $T = T^1 \to T^2 \to \ldots T^m$, *где* $T^1,\ \ldots,\, T^m$ *конечномерны, то базис в пространстве представления* T *можно выбрать так, что матрица* T *в этом базисе имеет вид* (2.5.10), *где* $t^k(g)$ — *матрица представления* T^k, $k = 1,\ \ldots,\, m$, $*$ *обозначает некоторые матрицы, а на всех не указанных местах стоят нули.*

В случае прямой суммы представлений базис можно выбрать так, что все матрицы, обозначенные звездочкой $*$, равны нулю (см. I п. 2.4). В общем же случае зацепления представлений это, вообще говоря, сделать нельзя (см. предыдущий пример).

З а м е ч а н и е. Аналогично зацеплению $T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$, введенному выше, можно еще определить зацепление $T^1 \leftarrow T^2 \leftarrow \ldots \leftarrow T^m$. Так называется представление T, если в пространстве X представления T существуют подпространства $M_m \subset M_{m-1} \subset \ldots \subset M_1 = M$, инвариантные относительно T и такие, что сужение представления T на M_m эквивалентно T^m, а представление $\widetilde{T}^k$, порожденное представлением T в M_k/M_{k+1}, $k = 1, \ldots, n-1$, эквивалентно T^k. Очевидно, что это зацепление отличается от зацепления $T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$ лишь нумерацией инвариантных подпространств. Мы предоставляем читателю доказать, что если $T = T^1 \leftarrow T^2 \leftarrow \ldots \leftarrow T^m$, то при надлежащем выборе базиса матрица $t(g)$ представления T запишется в виде

$$\left\| \begin{matrix} t^1(g) & * & \ldots & * \\ & t^2(g) & \ldots & * \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & t^m(g) \end{matrix} \right\|, \tag{2.5.11}$$

где $t^1(g)$, $t^2(g)$, $\ldots$, $t^m(g)$ — матрицы представлений T^1, T^2, $\ldots$, T^m.

П р и м е р ы и у п р а ж н е н и я. 1. Доказать, что зацепление представлений $\left\| \begin{matrix} T^{(1)}(g) & A(g) \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{matrix} \right\|$ разложимо в прямую сумму тогда и только тогда, когда существует линейный оператор Y из пространства представления $T^{(2)}$ в пространство представления $T^{(1)}$, такой, что для некоторого числа λ равенство $T^{(1)}(g)Y - YT^{(2)}(g) = \lambda A(g)$ выполняется для всех $g \in G$.

2. Показать, что конечномерное представление конечной группы не является нетривиальным зацеплением одномерных представлений.

3. Показать, что зацепление конечномерных неприводимых неэквивалентных представлений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, вообще говоря, не разложимо в прямую сумму представлений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$.

2.6. Тензорное произведение конечномерных представлений. Пусть T^1, T^2 — представления группы G в конечномерных пространствах X_1, X_2. *Тензорным произведением* $T^1 \otimes T^2$ *представлений* T^1, T^2 называется представление T в пространстве $X = X_1 \otimes X_2$ (см. З а м а н с к и й [1]), операторы $T(g)$ которого на векторах $x_1 \otimes x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, задаются формулой

$$T(g)\,(x_1 \otimes x_2) = T^1(g)\,x_1 \otimes T^2(g)\,x_2. \tag{2.6.1}$$

Отметим, во-первых, что формула (2.6.1) полностью определяет оператор $T(g)$, во-вторых, что соответствие $g \to T(g)$ действительно есть представление, ибо

$$T(e)\,(x_1 \otimes x_2) = T^1(e)\,x_1 \otimes T^2(e)\,x_2 = x_1 \otimes x_2, \tag{2.6.2a}$$

$$T(g_1 g_2)\,(x_1 \otimes x_2) = T^1(g_1 g_2)\,x_1 \otimes T^2(g_1 g_2)\,x_2 = \\ = T^1(g_1)T^1(g_2)\,x_1 \otimes T^2(g_1)T^2(g_2)\,x_2 = \\ = T(g_1)\,(T^1(g_2)\,x_1 \otimes T^2(g_2)\,x_2) = T(g_1)\,T(g_2)\,(x_1 \otimes x_2), \qquad (2.6.2б)$$

и отсюда следует, что $T(e) = 1$, $T(g_1 g_2) = T(g_1)\,T(g_2)$. Пусть $n_1 = \dim X_1$ и $n_2 = \dim X_2$ и пусть $e_1^1, \ldots, e_{n_1}^1$ и $e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2$ — базисы в X_1 и X_2. Полагая

$$e_{jk} = e_j^1 \otimes e_k^2, \qquad (2.6.3)$$

мы получим базис e_{jk}, $j = 1, \ldots, n_1$, $k = 1, \ldots, n_2$, в $X_1 \otimes X_2$. Элементы этого базиса задаются сложным индексом, состоящим из пары чисел j, k, поэтому матричные элементы представления $T^1 \otimes T^2$ должны задаваться двумя сложными индексами, т. е. четверкой чисел j, k, μ, ν. Обозначим через $t_{\mu\nu jk}(g)$ матричные элементы представления $T = T^1 \otimes T^2$ в базисе $e_{jk} = e_j^1 \otimes e_k^2$. Для их вычисления заметим, что в силу (2.6.1) и (2.6.2)

$$T(g)\,e_{jk} = T^1(g)\,e_j^1 \otimes T^2(g)\,e_k^2 = \left(\sum_{\mu=1}^{n_1} t^1_{\mu j}(g)\,e^1_\mu\right) \otimes \left(\sum_{\nu=1}^{n_2} t^2_{\nu k}(g)\,e^2_\nu\right) = \\ = \sum_{\mu=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_2} t^1_{\mu j}(g)\,t^2_{\nu k}(g)\,(e^1_\mu \otimes e^2_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_2} t^1_{\mu j}(g)\,t^2_{\nu k}(g)\,(e_{\mu\nu})$$

и потому

$$t_{\mu\nu jk}(g) = t^1_{\mu j}(g)\,t^2_{\nu k}(g). \qquad (2.6.4)$$

Аналогично определяется тензорное произведение любого конечного числа конечномерных представлений. *Тензорным произведением $T^1 \otimes T^2 \otimes \ldots \otimes T^m$ конечномерных представлений $T^1, \ldots, T^m$ группы G в пространствах $X_1, \ldots X_m$* называется представление T в пространстве $X_1 \otimes X_2 \otimes \ldots \otimes X_m$, операторы $T(g)$ которого на векторах $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_m \in X_m$, задаются формулой

$$T(g)\,(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) = T^1(g)\,x_1 \otimes \ldots \otimes T^m(g)\,x_m. \qquad (2.6.5)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, заключаем:

I. *Пусть $T^1, \ldots, T^m$ — представления группы G в конечномерных пространствах $X_1, \ldots, X_m$, $n_1, \ldots, n_m$ — размерности этих пространств, $f_1^k, \ldots, f_{n_k}^k$ — базис X_k и $t^k_{\nu j}(g)$ — матричные элементы представления T^k в этом базисе* ($k = 1, \ldots, m$). *Тогда матричные элементы $t_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m j_1 j_2\ldots j_m}(g)$ тензорного произведения $T = T^1 \otimes \ldots \otimes T^m$ представлений $T^1, \ldots, T^m$ определяются по формуле*

$$t_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m j_1 j_2\ldots j_m}(g) = t^1_{\nu_1 j_1}(g)\,t^2_{\nu_2 j_2}(g)\ldots t^m_{\nu_m j_m}(g). \qquad (2.6.6)$$

Примеры и упражнения. 1. Пусть χ_1, χ_2 — характеры группы G. Показать, что $(\chi_1 \otimes \chi_2)\,(g) = \chi_1(g)\,\chi_2(g)$.

2. Пусть $T^{(1)}, T^{(2)}$ — конечномерные представления группы G в пространствах X, Y соответственно. Пусть L — линейное пространство всевозможных линейных отображений A линейного пространства Y' (сопряженного к Y) в пространство X. Определим в L представление $g \to S(g)$, полагая $S(g)A = T^{(1)}(g)A(T^{(2)}(g))'$ для $A \in L$. Доказать, что представление S эквивалентно тензорному произведению $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$.

3. Доказать, что единичное представление группы G тогда и только тогда является подпредставлением тензорного произведения конечномерных неприводимых представлений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$группы G, когда $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ взаимно сопряжены.

2.7. Конечномерные представления прямого произведения групп. Пусть $G = G_1 \times G_2$ — прямое произведение групп G_1 и G_2, T^1 — конечномерное представление группы G_1 в пространстве X_1 и T^2 — конечномерное представление группы G_2 в пространстве X_2. По этим двум представлениям можно построить представление T группы G в пространстве $X = X_1 \otimes X_2$, полагая

$$T(g)(x_1 \otimes x_2) = T^1(g_1)\,x_1 \otimes T^2(g_2)\,x_2 \quad \text{при} \quad g = g_1 \times g_2. \tag{2.7.1}$$

Нетрудно убедиться, что соответствие $g \to T(g)$ есть представление группы G. Оно обозначается $T^1_{G_1} \otimes T^2_{G_2}$. Рассмотрим случай $G_2 = G_1$, так что T^1 и T^2 — представления одной и той же группы G_1. Группа G содержит подгруппу G_0, состоящую из всех $g = g_1 \times g_1$, $g_1 \in G_1$, очевидно, изоморфную группе G_1. Поэтому сужение представления $T^1_{G_1} \otimes T^2_{G_1}$ на группу G_0 есть представление группы G_1. С другой стороны, из (2.7.1) следует, что

$$T(g)(x_1 \otimes x_2) = T^1(g_1)\,x_1 \otimes T^2(g_1)\,x_2 \quad \text{при} \quad g = g_1 \times g_1 \in G_0, \tag{2.7.2}$$

и сравнение с (2.6.1) показывает:

I. *Сужение представления $T^1_{G_1} \otimes T^2_{G_2}$ группы $G \times G$ на группу G_0 всех $g_1 \times g_1$, $g_1 \in G$, совпадает с тензорным произведением $T^1 \otimes T^2$ представлений T^1, T^2 группы G.*

Очевидно, утверждение предложения I остается справедливым для прямого произведения $G = G \times \ldots \times G$ любого конечного числа экземпляров группы G. В этом случае роль группы G_0 играет совокупность всех $g_1 \times g_1 \times \ldots \times g_1$, $g_1 \in G_1$.

II. *Всякое одномерное представление*

$$\begin{gathered} g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_n \to f(g_1, g_2, \ldots, g_n), \\ g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n, \end{gathered} \tag{2.7.3}$$

прямого произведения $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ групп $G_1, \ldots, G_n$ задается формулой

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = f_1(g_1)\,f_2(g_2)\ldots f_n(g_n), \tag{2.7.4}$$

где

$$g_j \to f_j(g_j), \;\; g_j \in G_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.7.5}$$

— одномерные представления групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$. *Обратно, всякая функция* $f(g_1, \ldots, g_n)$ *вида* (2.7.4), *где* $g_i \to f_j(g_j)$, $g_j \in G_j$, *— одномерные представления групп* $G_1, \ldots, G_n$, *задает одномерное представление группы* G. *Представление* f *унитарно*[1] *тогда и только тогда, когда унитарно каждое из представлений* f_j, $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Положим

$$f_1(g_1) = f(g_1, e_2, \ldots, e_n), \quad f_2(g_2) = (e_1, g_2, e_3, \ldots, e_n), \ldots \\ \ldots, f_n(g_n) = f(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, g_n), \tag{2.7.6}$$

где e_j — единичный элемент в G_j. Тогда

$$f_1(e_1) = f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$$

и при $g_1, g_1' \in G_1$

$$f_1(g_1 g_1') = f(gg_1', e_2, \ldots, e_n) = \\ = f(g_1, e_2, \ldots, e_n)\, f(g_1', e_2, \ldots, e_n) = f_1(g_1)\, f_1(g_1'),$$

следовательно, $g_1 \to f_1(g_1)$ — одномерное представление группы G. Аналогично доказывается, что каждое $g_j \to f_j(g_j)$, $g_j \in G_j$, есть одномерное представление группы G_j. Кроме того,

$$f_1(g_1)\, f_2(g_2) \ldots f_n(g_n) = \\ = f(g_1, e_2, \ldots, e_n)\, f(e_1, g_2, \ldots, e_n) \ldots f(e_1, \ldots, e_{n-1}, g_n) = \\ = f(g_1, g_2, \ldots, g_n).$$

Этим доказано первое утверждение предложения II; обратное утверждение очевидно. Унитарность представления (2.7.3) означает, что $|f_1(g_1, \ldots, g_n)| = 1$; отсюда в силу (2.7.6) следует, что

$$|f_1(g_1)| = 1, \ldots, |f_n(g_n)| = 1. \tag{2.7.7}$$

Обратное утверждение следует из (2.7.4) и (2.7.7).

III. *Всякое неприводимое конечномерное представление* T *группы* $G = G_1 \times G_2$ *эквивалентно тензорному произведению неприводимых представлений* T_1 *и* T_2 *групп* G_1 *и* G_2 *соответственно, причем* T_1 *и* T_2 *являются подпредставлениями ограничений представления* T *на группы* $G_1 \approx G_1 \times \{e_2\}$ *и* $G_2 \approx \{e_1\} \times G_2$ *соответственно, где* e_1 *и* e_2 *— единичные элементы групп* G_1, G_2.

[1] Определение унитарного представления см. ниже, п. 2.8.

Доказательство. Пусть T_1, T_2 — представления групп G_1 и G_2; читатель легко проверит, что представление $T = T_1 \otimes T_2$ группы $G = G_1 \times G_2$ неприводимо тогда и только тогда, когда T_1 и T_2 неприводимы. Покажем, что всякое неприводимое представление T группы $G_1 \times G_2$ в (конечномерном) пространстве E эквивалентно представлению вида $T_1 \times T_2$, где T_1 и T_2 — неприводимые представления групп G_1 и G_2 соответственно. Пусть S_1, S_2 — представления групп G_1 и G_2 соответственно в пространстве E, определяемые формулами $S_1(g_1) = T((g_1, e_2))$, $S_2(g_2) = T((e_1, g_2))$. Пусть T_1 — ограничение представления S_1 на некоторое инвариантное и неприводимое относительно представления S_1 подпространство E_1. Пусть x — ненулевой вектор в подпространстве E_1. Обозначим через E_2 подпространство в E, образованное конечными линейными комбинациями векторов вида $S_2(g_2)\,x$, $g_2 \in G_2$. Подпространство E_2 инвариантно относительно представления S_2; обозначим через T_2 ограничение представления S_2 на подпространство E_2. Определим отображение A тензорного произведения $E_1 \otimes E_2$ в E следующим образом. Пусть $x_1 \otimes x_2 \in E_1 \otimes E_2$; тогда x_1 и x_2 можно представить в виде

$$x_1 = \sum_{p=1}^{m} \lambda_p T_1(g_1^{(p)})\,x, \quad x_2 = \sum_{q=1}^{n} \mu_q T_2(g_2^{(q)})\,x, \text{ где } g_1^{(p)} \in G_1,\ g_2^{(q)} \in G_2,$$

а λ_p, μ_q — некоторые числа. Положим $A(x_1 \otimes x_2) = \sum\limits_{p=1}^{m} \sum\limits_{q=1}^{n} \lambda_p \mu_q \times$ $\times\, T((g_1^{(p)}, g_2^{(q)}))\,x$. Так как $(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (e_1, g_2)(g_1, e_2) = (g_1, g_2)$ в $G_1 \times G_2$, то

$$S_1(g_1)\,S_2(g_2)\,y = S_2(g_2)\,S_1(g_1)\,y = T(g_1, g_2)\,y \tag{2.7.8}$$

для всех $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, $y \in E$. Используя соотношение (2.7.8) и определение представлений T_1 и T_2, читатель легко проверит, что отображение A корректно определено и может быть продолжено по линейности до отображения $E_1 \otimes E_2$ в E, причем $A(T_1(g_1)\,x_1 \otimes T_2(g_2)\,x_2) = T(g_1, g_2) A(x_1 \otimes x_2)$ для всех $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, и отображение A является оператором, осуществляющим эквивалентность представлений T и $T_1 \otimes T_2$. Так как T неприводимо, то и представление T_2 неприводимо.

2.8. Унитарные представления. Билинейная форма (x_1, x_2) на линейном пространстве X называется *эрмитовой*, если $(x_2, x_1) = \overline{(x_1, x_2)}$; эрмитова билинейная форма (x_2, x_1) на X называется *неотрицательной*, если $(x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$, и *положительной*, если $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$. Положительная билинейная форма на X называется еще *скалярным произведением на* X. Линейное пространство X с заданным на нем скалярным произведением называется *предгильбертовым пространством*. Конечномерное предгильбертово пространство называется *евклидовым пространством*. Если X —

предгильбертово пространство, то (x, y) всегда будет обозначать (если это не оговорено) заданное на X скалярное произведение; под ортогональностью в X понимается ортогональность относительно (x, y). Очевидно, предгильбертово пространство X находится в двойственности с самим собой относительно (x, y) (см. п. 2.3). Линейный оператор A в предгильбертовом пространстве X называется *унитарным*, если A взаимно однозначно отображает X на X и

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in X. \tag{2.8.1}$$

Представление T группы G в предгильбертовом пространстве X называется *унитарным*, если все операторы представления унитарны. Поскольку операторы представления в X всегда взаимно однозначно отображают X на X (см. 2.1), то в силу (2.8.1) *унитарность представления T эквивалентна условию*

$$(T(g)\,x, T(g)\,y) = (x, y) \quad \text{для всех} \quad g \in G, \quad x, y \in X. \tag{2.8.2}$$

Сравнивая (2.8.2) с (2.3.8), заключаем:

I. *Если представление T в предгильбертовом пространстве X унитарно, то оно сопряжено самому себе относительно (x, y).*

Далее, рассуждая как и при выводе условия (2.3.9), заключаем, что условие (2.8.2) эквивалентно условию

$$(T(g^{-1})\,x, y) = (x, T(g)\,y) \quad \text{для всех} \quad g \in G, \quad x, y \in X. \tag{2.8.3}$$

II. *Если T — унитарное представление группы G в предгильбертовом пространстве X и M инвариантно относительно T, то $M^{\perp}$ также инвариантно относительно T.*

Доказательство. Пусть $y \in M^{\perp}$. Для любого $x \in M$ также $T(g^{-1})\,x \in M$, ибо M инвариантно относительно T и потому $y \perp T(g^{-1})\,x$. Но тогда в силу (2.8.3)

$$(x, T(g)\,y) = (T(g^{-1})\,x, y) = 0;$$

следовательно, $T(g)\,y \perp M$, $T(g)\,y \in M^{\perp}$. Это означает, что $M^{\perp}$ инвариантно относительно T.

Если X — евклидово пространство и $\dim X = n$, то в X можно выбрать базис $e_1, \ldots, e_n$, удовлетворяющий условиям

$$(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k; \end{cases} \tag{2.8.4}$$

такой базис называется *ортонормальным*. Пусть $t_{jk}(g)$ — матричные элементы представления T в этом базисе. Условие (2.8.2) унитарности эквивалентно условиям

$$(T(g)\,e_j, T(g)\,e_k) = (e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{2.8.5}$$

Но в силу (2.1.3) и (2.8.4)

$$(T(g)\,e_j,\,T(g)\,e_k) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}(g)\,e_\nu \sum_{\mu=1}^{n} t_{\mu k}(g)\,e_\mu\right) = \\ = \sum_{\nu,\,\mu=1}^{n} t_{\nu j}(g)\,\overline{t_{\mu k}(g)}(e_\nu,\,e_\mu) = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}(g)\overline{t_{\nu k}(g)};$$

следовательно, условие (2.8.2) эквивалентно условиям

$$\sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu j}(g)\,\overline{t_{\nu k}(g)} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{2.8.6}$$

Очевидно, условие (2.8.3) означает, что

$$t^*(g)\,t(g) = 1, \tag{2.8.7}$$

где $t^*(g)$ — матрица, эрмитово сопряженная к $t(g)$ (см. п. 2.3); матрица t, удовлетворяющая условию $t^*t = 1$, называется *унитарной*. Таким образом,

III. *Матрица конечномерного унитарного представления в ортонормальном базисе унитарна.*

Соотношение (2.8.6) означает, что

$$t^*(g) = (t(g))^{-1}. \tag{2.8.8}$$

С другой стороны, $T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}$ и потому $(t(g))^{-1} = t(g^{-1})$. Поэтому (2.8.8) можно переписать в виде

$$t(g^{-1}) = t^*(g), \tag{2.8.9}$$

или, в матричных элементах,

$$t_{jk}(g^{-1}) = \overline{t_{kj}(g)}. \tag{2.8.10}$$

IV. *Пусть T — унитарное представление в евклидовом пространстве X, M — подпространство в X, инвариантное относительно T, и P — ортогональный проектор*[1] *в X на M. Тогда P перестановочен со всеми $T(g)$, $g \in G$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Тогда $P_x \in M$; следовательно, и $T(g)Px \in M$, ибо M инвариантно. Отсюда $PT(g)Px = T(g)Px$ для всех $x \in X$, т. е.

$$PT(g)P = T(g)P. \tag{2.8.11}$$

Подставляя в (2.8.11) g^{-1} вместо g и учитывая, что $T(g^{-1}) = (T(g))^{-1} = T^*(g)$, получим $PT^*(g)P = T^*(g)P$. Но тогда $(PT^*(g)P)^* = (T^*(g)P)^*$, т. е. $PT(g)P = PT(g)$. Сравнение последнего равенства с (2.8.11) дает $T(g)P = PT(g)$, что и требовалось.

[1] То есть P — проектор (см. сноску на с. 56) и $P^* = P$.

V. *Унитарное представление* T *в евклидовом пространстве* X *неприводимо тогда и только тогда, когда каждый оператор* $A \in L(X)$, *перестановочный со всеми* $T(g)$, *кратен единичному оператору*: $A = \lambda 1$.

Доказательство. Пусть T неприводимо и A из $L(X)$ перестановочен со всеми $T(g)$; тогда $A = \lambda 1$ в силу леммы 2 п. 2.2. Обратно, пусть каждый оператор A из $L(X)$, перестановочный со всеми $T(g)$, кратен единичному оператору и пусть M — подпространство в X, инвариантное относительно T, а P — проектор [1]) в X, отображающий X на M. Тогда P перестановочен со всеми $T(g)$ в силу IV, а значит, в силу сделанного предположения, $P = \lambda 1$. Но последнее равенство возможно лишь при $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$, т. е. при $P = 0$ или $P = 1$, т. е. при $M = (0)$ или $M = X$. Это означает, что T неприводимо.

Два представления T, S группы G в предгильбертовых пространствах X, Y называются *унитарно эквивалентными*, если существует линейный оператор A из X в Y, удовлетворяющий условиям:

$$A \text{ взаимно однозначно отображает } X \text{ на } Y; \tag{2.8.12}$$

$$(Ax_1, Ax_2) = (x_1, x_2) \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in X; \tag{2.8.13}$$

$$AT(g) = S(g)A \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.8.14}$$

Таким образом, унитарная эквивалентность отличается от простой эквивалентности тем, что добавляется еще условие (2.8.13), означающее изометричность оператора A.

VI. *Если два унитарных представления* T, S *группы* G *в евклидовых пространствах эквивалентны, то они также унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть A — линейный оператор из X в Y, удовлетворяющий условиям (2.8.12), (2.8.14). Тогда $A = UB$, где B — эрмитов оператор в X, взаимно однозначно отображающий X на X, а U изометрически отображает X на Y (см. Гантмахер [1]), так что

$$(Ux_1, Ux_2) = (x_1, x_2). \tag{2.8.15}$$

Подставляя $A = UB$ в (2.8.14), получаем, что

$$UBT(g) = S(g)UB; \tag{2.8.16}$$

подставив в (2.8.16) g^{-1} вместо g и учитывая, что $T(g^{-1}) = T^*(g)$, заключаем, что $UBT^*(g) = S^*(g)UB$; следовательно, $(UBT^*(g))^* = (S^*(g)UB)^*$, т. е.

$$T(g)BU^{-1} = BU^*S(g). \tag{2.8.17}$$

[1]) Напомним, что *проектором* называется оператор P, удовлетворяющий условию $P^2 = P$; он называется *проектором на* M, если $PX = M$.

Отсюда в силу (2.8.16)

$$T(g)B^2 = T(g)BU^*UB = BU^*S(g)UB = BU^*UBT(g) = B^2T(g).$$

Таким образом, B^2, а значит, и B, перестановочен со всеми $T(g)$. Но тогда (2.8.11) можно записать в виде

$$UT(g)B = S(g)UB. \tag{2.8.18}$$

Умножая обе части (2.8.18) справа на B^{-1}, получим, что $UT(g) = S(g)U$, а это вместе с (2.8.15) означает, что T и S унитарно эквивалентны.

VII. *Два унитарных представления T, S группы G в евклидовых пространствах X, Y эквивалентны тогда и только тогда, когда в X и Y существуют ортонормальные базисы, относительно которых матричные элементы представлений T и S совпадают.*

Доказательство. Если T и S эквивалентны, то в силу VI они также унитарно эквивалентны. Пусть A — оператор из X в Y, удовлетворяющий условиям (2.8.13), (2.8.14), и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный ортонормальный базис в X. Положим $f_1 = Ae_1, \ldots, f_n = Ae_n$; тогда в силу (2.8.12), (2.8.13) $f_1, \ldots, f_n$ — ортонормальный базис в Y. Используя далее условие (2.8.14) и повторяя рассуждение в доказательстве предложения I п. 2.2, заключаем, что матричные элементы представлений T и S в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ совпадают. Обратное утверждение следует из I п. 2.2.

Нам понадобится еще следующее простое предложение.

VIII. *Если X — евклидово пространство и M — подпространство в X, отличное от X, то $M^\perp \neq (0)$.*

Доказательство. Пусть $\dim X = n$, $\dim N = m$. Так как $M \neq X$, то $m < n$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X и $f_1, \ldots, f_n$ — базис в M. Подберем элемент $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \neq 0$ и $\in M^\perp$. Для этого достаточно, чтобы $(x, f_k) = 0$, $k = 1, \ldots, m$, или, в подробной записи,

$$\alpha_1(e_1, f_k) + \ldots + \alpha_n(e_n, f_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2.8.19}$$

Но (2.8.19) есть m однородных уравнений относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем $m < n$, поэтому (2.8.19) имеет нетривиальное решение $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$. Полагая $x = \alpha_1^0 e_1 + \ldots + \alpha_n^0 e_n$, получим вектор $x \neq 0$ и $\in M^\perp$; следовательно, $M^\perp \neq (0)$.

Представление T в пространстве X называется *эквивалентным унитарному*, если в X существует скалярное произведение (x, y), относительно которого T унитарно.

IX. *Если конечномерное представление эквивалентно унитарному, то оно вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть T — представление в пространстве X и пусть (x, y) — скалярное произведение, относительно которого T унитарно. В силу I п. 2.1 в X существует подпространство M_1,

$M_1 \neq (0)$, инвариантное относительно T, на котором сужение T неприводимо. Если $M_1 = X$, то утверждение в IX доказано. Если же $M_1 \neq X$, то $M_1^{\perp} \neq (0)$ в силу IV и инвариантно относительно T в силу II. Применяя снова I п. 2.1 к сужению T на $M_1^{\perp}$, мы получим, что в $M^{\perp}$ существует подпространство M_2, инвариантное относительно T, на котором сужение T неприводимо. По построению $M_2 \subset M_1^{\perp}$, и потому $M_2 \perp M_1$. Очевидно, $M_1 + M_2$ инвариантно относительно T. Если $M_1 + M_2 = X$, то утверждение IX уже доказано, если же $M_1 + M_2 \neq X$, то применяем предыдущее рассуждение к $M_1 + M_2$ вместо M_1. Так как X конечномерно, то после конечного числа таких шагов мы получим, что $X = M_1 + \ldots + M_k$, где $M_1, \ldots, M_k$ — инвариантные относительно T взаимно ортогональные подпространства, на каждом из которых сужение T неприводимо.

Замечание. В предыдущем доказательстве установлено существование разложения рассматриваемого представления на неприводимые представления. Вопрос о фактическом нахождении такого разложения может представить значительные трудности и является одной из важных задач теории конечномерных представлений.

2.9. Характер конечномерного представления. Напомним, что *следом* $\operatorname{tr} a$ матрицы $a = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, называется сумма ее диагональных элементов [1]):

$$\operatorname{tr} a = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}. \tag{2.9.1}$$

I. *След* $\operatorname{tr} a$ *обладает следующими свойствами*:

$$\begin{aligned}
&1)\ \operatorname{tr}(\alpha a) = \alpha \operatorname{tr}(a),\\
&2)\ \operatorname{tr}(a+b) = \operatorname{tr} a + \operatorname{tr} b,\\
&3)\ \operatorname{tr} 1 = n,\\
&4)\ \operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba),\\
&5)\ \operatorname{tr}(b^{-1}ab) = \operatorname{tr} a, \text{ если } b^{-1} \text{ существует.}
\end{aligned} \tag{2.9.2}$$

Здесь α — *число*, a, b —*матрицы одного порядка*, n — *порядок матрицы* 1.

Доказательство. Свойства 1)–3) очевидны; свойство 4) следует из равенств

$$\operatorname{tr}(ab) = \sum_{j=1}^{n} (ab)_{jj} = \sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk} b_{kj} = \sum_{j,\,k=1}^{n} a_{kj} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (ba)_{jj} = \operatorname{tr}(ba), \tag{2.9.3}$$

где n — порядок матриц a и b. Теперь свойство 5) следует из 4). Действительно, $\operatorname{tr}(b^{-1}ab) = \operatorname{tr}(bb^{-1}a) = \operatorname{tr} a$.

[1]) tr — начальные буквы английского слова *trace*, означающего *след*.

II. *След матрицы равен сумме всех ее собственных значений, в которой каждое собственное значение повторяется столько раз, с какой кратностью оно является нулем характеристического уравнения этой матрицы.*

Доказательство. Известно (см. напр. Гельфанд [1]), что каждую матрицу a можно представить в виде $a = b^{-1}a_1 b$, где a_1 — так называемая *жорданова форма* матрицы a:

$$a_1 = \begin{Vmatrix}
\lambda_1 & 1 & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & \ddots & 1 & & & & \\
 & & & \lambda_1 & \ddots & & & \\
 & & & & \ddots & 1 & & \\
 & & & & & \lambda_1 & \ddots & \\
 & & & & & & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & \lambda_1
\end{Vmatrix},$$

причем по диагонали находятся все собственные значения матрицы, каждое столько раз, с какой кратностью оно является нулем характеристического уравнения матрицы a, а на не отмеченных местах находятся нули. Отсюда и из свойства 5) следует утверждение.

Пусть теперь X — конечномерное линейное пространство, $n = \dim X$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X. Каждый линейный оператор A в X задается матрицей $a = (a_{jk})$ в этом базисе. *Следом* $\operatorname{tr} A$ *оператора* A называется след его матрицы. Это определение не зависит от выбора базиса. Действительно, при переходе от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к другому базису $f_1, \ldots, f_n$ матрица оператора A перейдет в матрицу $b^{-1}ab$, где b — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $f_1, \ldots, f_n$. В силу свойства 5) след при этом не изменится.

III. *Пусть A — линейный оператор в конечномерном пространстве X, M — подпространство в X, инвариантное относительно A, P — проектор (не обязательно ортогональный) в X на M, A_M — сужение оператора A на M. Тогда*

$$\operatorname{tr}(A_M) = \operatorname{tr}(AP). \tag{2.9.4}$$

Доказательство. Положим

$$N = (1 - P)X. \tag{2.9.5}$$

Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис в M и $e_{m+1}, \ldots, e_n$ — базис в N. Из определения проектора следует, что $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X. При этом в силу

(2.9.5) и определения проектора

$$APe_k = \begin{cases} Ae_k = A_m e_k & \text{при} \quad k = 1, \ldots, m, \\ \quad 0 & \text{при} \quad k = m+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.9.6}$$

и потому матрица a оператора AP в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет вид

$$a = \left\| \begin{matrix} a_m & 0 \\ * & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{2.9.7}$$

где a_m — матрица оператора A_M в базисе $e_1, \ldots, e_m$. Отсюда следует (2.9.4).

Характером $\chi_T(g)$ конечномерного представления T называется след оператора $T(g)$ этого представления:

$$\chi_T(g) = \mathrm{tr}(T(g)). \tag{2.9.8}$$

Если не может возникнуть недоразумения, то пишут $\chi(g)$ вместо $\chi_T(g)$.

Таким образом, в силу (2.9.1) и (2.9.2)

$$\chi_T(g) = t_{11}(g) + t_{22}(g) + \ldots + t_{nn}(g), \tag{2.9.9}$$

где $t_{jk}(g)$ — матричные элементы представления T в некотором базисе, а n — размерность этого представления. Если группа G коммутативна и T одномерно, то $\chi_T(g)$ совпадает с характером на группе G (см. п. 2.2).

IV. *Характер конечномерного представления обладает следующими свойствами*:

а) *характеры эквивалентных представлений совпадают*;

б) *характер постоянен на каждом классе сопряженных элементов*;

в) *если T и S сопряжены, то $\chi_S(g) = \overline{\chi_T(g^{-1})}$*;

г) *если T унитарно, то $\chi_T(g^{-1}) = \overline{\chi_T(g)}$*;

д) *характер зацепления, в частности, прямой суммы конечного числа представлений, равен сумме характеров этих представлений*;

е) *характер тензорного произведения конечного числа представлений равен произведению характеров этих представлений.*

Доказательство. Пусть представления T и S в пространствах X и Y эквивалентны. В силу I п. 2.2 можно так выбрать базисы в X и Y, что матричные элементы T и S в этих базисах совпадают. Отсюда и из (2.9.9) следует свойство а) [1]).

---

[1]) Ниже мы увидим, что в ряде случаев верно н обратное утверждение.

Если g_2 и g_1 сопряжены, то $g_2 = g^{-1} g_1 g$ при некотором $g \in G$ (см. (1.7.5)). Отсюда и из свойства 5) следа заключаем:

$$\chi(g_2) = \chi(g^{-1} g_1 g) = \operatorname{tr}(T(g^{-1} g_1 g)) = \\ = \operatorname{tr}((T(g))^{-1} T(g_1) T(g)) = \operatorname{tr}(T(g_1)) = \chi(g_1).$$

Если S и T сопряжены, то при надлежащем выборе базисов

$$s_{jk}(g) = \overline{t_{kj}(g^{-1})}$$

(см. (2.3.13)). Отсюда

$$\chi_S(g) = s_{11}(g) + \ldots + s_{nn}(g) = \overline{t_{11}(g^{-1})} + \ldots + \overline{t_{nn}(g^{-1})} = \overline{\chi_T(g^{-1})}.$$

Свойство г) теперь следует из свойства в), ибо если T унитарно, то оно сопряжено себе (см. I п. 2.8) и потому $\chi_T(g) = \overline{\chi_T(g^{-1})}$. Отсюда

$$\chi_T(g^{-1}) = \overline{\chi_T(g)}.$$

Пусть $T = T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$; тогда при надлежащем выборе базиса матрица $t(g)$ представления T имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} t^1_{11}(g) & \ldots & t^1_{1n_1}(g) & 0 & \ldots & 0 & 0 & & \ldots & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ t^1_{n_1 1}(g) & \ldots & t^1_{n_1 n_1}(g) & 0 & & 0 & 0 & & \ldots & 0 \\ * & \ldots & * & \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ * & \ldots & * & * & & * & t^m_{11}(g) & & \ldots & t^m_{1n_m}(g) \\ * & \ldots & * & * & & * & t^m_{n_m 1}(g) & & \ldots & t^m_{n_m n_m}(g) \end{matrix} \right\|,$$

где $t^k_{j\nu}$ — матричные элементы представления T^k, $k = 1, \ldots, n$ (см. (2.5.9)). Отсюда

$$\chi_T(g) = t^1_{11}(g) + \ldots + t^1_{n_1 n_1}(g) + t^2_{11}(g) + \ldots + t^2_{n_2 n_2}(g) + \ldots \\ \ldots + t^m_{11}(g) + \ldots + t^m_{n_m n_m}(g) = \\ = \chi_{T^1}(g) + \chi_{T^2}(g) + \ldots + \chi_{T^m}(g). \quad (2.9.10)$$

В частности, (2.9.10) имеет место при $T = T^1 + \ldots + T^m$. Наконец, пусть $T = T^1 \otimes T^2$ и пусть X_1, X_2 — пространства представлений T^1, T^2 и $e^1_1, \ldots, e^1_{n_1}$, $e^2_1, \ldots, e^2_{n_2}$ — базисы в X_1, X_2. Тогда матричными элементами представления T в базисе $e_{jk} = e^1_j \otimes e^2_k$ являются

$$t_{\mu\nu jk}(g) = t^1_{\mu j}(g)\, t^2_{\nu k}(g)$$

(см. (2.6.4)), в частности, диагональными матричными элементами будут

$$t_{jkjk}(g) = t^1_{jj}(g)\, t^2_{kk}(g)$$

и потому

$$\chi_{T^1\otimes T^2}(g) = \sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2} t^1_{jj}(g)\, t^2_{kk}(g) = \\ = \sum_{j=1}^{n_1} t^1_{jj}(g) \sum_{k=1}^{n_2} t^2_{kk}(g) = \chi_{T^1}(g)\chi_{T^2}(g).$$

Применяя аналогичное рассуждение к формуле (2.6.6), заключаем, что

$$\chi_{T^1\otimes\ldots\otimes T^m}(g) = \chi_{T^1}(g)\ldots\chi_{T^m}(g). \tag{2.9.11}$$

Примеры и упражнения. 1. Найти неприводимые представления групп S_3, S_4, P_3 и P_4 и вычислить их характеры.

2. Привести пример не эквивалентных представлений (бесконечной) группы, имеющих равные характеры.

2.10. Сплетающие операторы. Пусть T, S — представления группы G в пространствах X и Y. Линейный оператор A из X в Y называется оператором, *сплетающим* T и S, если

$$AT(g) = S(g)A \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.10.1}$$

В частности, если $X = Y$ и $T = S$, то формула (2.10.1) принимает вид

$$AT(g) = T(g)A \quad \text{для всех} \quad g \in G; \tag{2.10.2}$$

в этом случае говорят, что A *перестановочен* с представлением T (ср. (2.2.3)).

Понятие сплетающего оператора обобщает понятие эквивалентности представлений. Действительно, если A — оператор, сплетающий T и S, причем A взаимно однозначно отображает X на Y, то представления T и S эквивалентны (см. п. 2.2).

Совокупность линейных операторов A, сплетающих T и S, обозначается $\mathrm{Hom}\,(T, S)$ или $\mathrm{Hom}_0(T, S)$.

I. $\mathrm{Hom}\,(T, S)$ *есть линейное подпространство пространства линейных операторов из* X *в* Y.

Действительно, если A_1, $A_2 \in \mathrm{Hom}\,(T, S)$, то

$$(A_1 + A_2)T(g) = A_1T(g) + A_2T(g) = \\ = S(g)A_1 + S(g)A_2 = S(g)(A_1 + A_2)$$

для всех $g \in G$, т. е. $A_1 + A_2 \in \mathrm{Hom}\,(T, S)$; а если $A \in \mathrm{Hom}\,(T, S)$, то для любого числа λ

$$(\lambda A)T(g) = \lambda(AT(g)) = \lambda(S(g)A) = S(g)(\lambda A)$$

для всех $g \in G$, поэтому $\lambda A \in \mathrm{Hom}\,(T, S)$.

Размерность линейного пространства $\mathrm{Hom}\,(T, S)$ называется *числом сплетения* представлений T и S.

II. *Если* $S = T$, *то множество* $\operatorname{Hom}(T, T)$ *образует подалгебру* (см. п. 2.1 гл. II) *в алгебре* $L(X)$ *линейных операторов в пространстве* X.

Действительно, $\operatorname{Hom}(T, T)$ есть линейное подпространство в $L(X)$, и для любых A, $B \in \operatorname{Hom}(T, T)$

$$ABT(g) = AT(g)B = T(g)AB \quad \text{для всех} \quad g \in G.$$

Поэтому A, $B \in \operatorname{Hom}(T, T)$.

III. *Если* $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$, L *— ядро оператора* A (т. е. $L = \{x\colon x \in X,\ Ax = 0\}$), M *— образ оператора* A (т. е. $M = \{y\colon y = Ax$ *для некоторого* $x \in X\}$), *то* L *инвариантно относительно* T, M *инвариантно относительно* S.

Действительно, если $x \in L$, т. е. $Ax = 0$, то $AT(g)\,x = S(g)Ax = S(g)\,0 = 0$ для всех $g \in G$, т.е. $T(g)\,x \in L$ для всех $g \in G$; если $y \in M$, т. е. $y = AX$ для некоторого $x \in X$, то $S(g)\,y = S(g)Ax = A(T(g)\,x)$, т. е. $S(g)\,y \in M$ для любого $g \in G$

IV. *Если* $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$, L *— ядро* A, M *— образ* A, *то представление* T, *порожденное представлением* $\widetilde{T}$ *в фактор-пространстве* X/L, *эквивалентно сужению* $S|_M$ *представления* S *на* M.

Действительно, оператор A определяет оператор $\widetilde{A}$, отображающий X/L на M взаимно однозначно, по формуле $\widetilde{A}(x + L) = Ax$, $x \in X$. Тогда, если T — представление, порожденное представлением T в фактор-пространстве X/L, то

$$\widetilde{A}\widetilde{T}(g)(x + L) = \widetilde{A}(T(g)\,x + L) = AT(g)\,x = S(g)Ax = S(g)\widetilde{A}(x + L)$$

для всех $x \in X$ и $g \in G$; но $\widetilde{A}(x + L) \in M$, поэтому $S(g)\widetilde{A}(x + L) = S(g)|_M\widetilde{A}(x + L)|_M$, где $S(g)|_M$ — сужение оператора $S(g)$ на M; поэтому $\widetilde{A}\widetilde{T}(g) = S(g)|_M\widetilde{A}$ для всех $g \in G$, и $\widetilde{T} \sim S|_M$.

V. *Пусть* T *— неприводимое конечномерное представление группы* G *в линейном пространстве* X, S *— конечномерное представление группы* G *в пространстве* Y, *кратное неприводимому представлению*T_1: $S = nT_1$. *Тогда*

$$\dim \operatorname{Hom}(T, S) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad T \not\sim T_1, \\ n, & \text{если} \quad T \sim T_1. \end{cases} \tag{2.10.3}$$

Доказательство. Пусть $Y = Y_1 + \ldots + Y_n$, где каждое подпространство $Y_i \subset Y$ инвариантно относительно S и сужение представления S на каждое подпространство Y_i эквивалентно представлению T_1. Обозначим это сужение S_t. Пусть P_i — линейный оператор в пространстве Y, который каждому элементу $y = y_1 + \ldots + y_n$ ($y_i \in Y_i$, $i = 1, \ldots, n$) сопоставляет элемент $y_i \in Y_i$, т. е. $P_{iy} = y_i$. Из определения прямой суммы представлений непосредственно следует, что оператор P_i перестановочен с представлением S, т. е. $P_iS(g) = S(g)P_i$ для всех $g \in G$. Отсюда следует, что если $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$, то

$$P_iAT(g) = P_i(S(g)A) = S(g)P_iA \quad \text{для всех} \quad g \in G, \tag{2.10.4}$$

т. е. оператор P_iA сплетает T и S. Так как образ оператора P_iA содержится в пространстве Y_i подпредставления S_i, то оператор P_iA, рассматриваемый как линейный оператор из X в $Y_i = P_iY$, сплетает T и S_i. Но S_i эквивалентно T_1, поэтому $P_iA = 0$ при $T \nsim T_1$ согласно лемме Шура; но тогда $Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} P_iAx = 0$ для всех $x \in X$, т. е. $A = 0$.

Пусть теперь $T \sim T_1$; тогда S_i эквивалентно T. Пусть B_i — линейный оператор из X в Y_i, осуществляющий эквивалентность T и S_i:

$$B_iT(g) = S_i(g)B_i \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.10.5}$$

Так как B_i — изоморфизм X на Y_i (по определению эквивалентности), то существует оператор B_i^{-1}; умножая (2.10.5) слева и справа на B_i^{-1}, получаем

$$T(g)B_i^{-1} = B_i^{-1}S_i(g) \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.10.6}$$

Из (2.10.4) и (2.10.6) заключаем, что

$$P_iAB_i^{-1}S_i(g) = P_iAT(g)B_i^{-1} = S_i(g)P_iAB_i^{-1},$$

т. е. оператор $P_iAB_i^{-1}$ перестановочен с неприводимым конечномерным представлением S_i группы G; поэтому (см. лемму 2 п. 2.2)

$$P_iAB_i^{-1} = \lambda_i 1, \quad \text{где} \quad \lambda \text{ — число;}$$

тогда $P_iA = \lambda B_i$, где B_i рассматриваются как операторы из X в Y. Так как $y = P_1y + \ldots + P_ny$ для всех $y \in Y$ (по определению P_i), то

$$A = \sum_{i=1}^{n} P_iA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_iB_i,$$

т. е. любой оператор A, сплетающий T и S, есть линейная комбинация B_i. Обратно, любой оператор A вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_iB_i$ сплетает T и S. Действительно, согласно I достаточно показать, что B_i сплетает T и S; но формула (2.10.4) равносильна соотношению $B_iT(g) = S(g)B_i$ для всех $g \in G$, так как образ оператора B_i содержится в Y_i. Итак, $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$ тогда и только тогда, когда $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_iB_i$. Так как каждый оператор B_i есть изоморфизм X на Y_i, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_iB_i$ тогда и только тогда, когда все $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, поэтому соответствие $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_iB_i \leftrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ есть изоморфизм линейных пространств $\operatorname{Hom}(T, S)$ и $\mathbf{C}^n$, следовательно, $\dim \operatorname{Hom}(T, S) = n$.

VI. *Пусть* T — *неприводимое конечномерное представление группы* G *в линейном пространстве* X; S — *конечномерное представление группы* G, *представимое в виде прямой суммы*: $S = n_1 T^1 + \ldots + n_p T^p$, *где* $T^1, \ldots, T^p$ — *неприводимые представления группы* G. *Тогда*

$$\dim \operatorname{Hom}(T, S) = \begin{cases} n_k, & \text{если } T \text{ эквивалентно } T_k, \\ 0, & \text{если } T \text{ не эквивалентно } T^1, \ldots, T^p, \end{cases} \tag{2.10.7}$$

т. е. размерность пространства $\operatorname{Hom}(T, S)$ *сплетающих операторов равна кратности вхождения в* S *соответствующего неприводимого представления.*

Доказательство. Пусть Y — пространство представления S и $Y = Y_1 + \ldots + Y_p$, где Y_k — пространство представления $n_k T^k$. Пусть P_k — линейный оператор в пространстве Y, сопоставляющий элементу $y = y_1 + \ldots + y_p$ ($y_k \in Y_k$, $k = 1, \ldots, p$) элемент $y_k \in Y_k \subset Y$, т. е. $P_k y = y_k$; очевидно, $P_1 + \ldots + P_p = 1$. Так же, как и в доказательстве V, убеждаемся, что если $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$, то $P_k A \in \operatorname{Hom}(T, S)$, и если S^k — сужение S на Y_k, то $P_k A \in \operatorname{Hom}(T, S^k)$. Таким образом,

$$A = P_1 A + \ldots + P_p A, \tag{2.10.8}$$

где $P_k A \in \operatorname{Hom}(T, S^k)$. Читатель легко проверит, что если A — линейный оператор из X в Y такой, что $P_k A \in \operatorname{Hom}(T, S^k)$, то $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$. Но, согласно V имеем:

$$\begin{aligned} &\dim \operatorname{Hom}(T, S^k) = 0, && \text{если} \quad T \not\sim T^k, \\ &\dim \operatorname{Hom}(T, S^k) = n_k, && \text{если} \quad T \sim T^k. \end{aligned}$$

Поэтому, если $T \not\sim T^1, \ldots, T \not\sim T^p$, то для любого $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$ имеем $P_k A = 0$; следовательно, $A = 0$, т. е. $\operatorname{Hom}(T, S) = \{0\}$; если же $T \sim T^k$, то $T \not\sim T^j$, при $j \neq k$; поэтому для любого $A \in \operatorname{Hom}(T, S)$ имеем $P^j A = 0$ при $j \neq k$ и из (2.10.8) следует, что $A = P^k A$; поэтому $\operatorname{Hom}(T, S)$ изоморфно $\operatorname{Hom}(T, S^k)$, которое имеет размерность n_k согласно V.

Примеры и упражнения. 1. Пусть T, S — неприводимые конечномерные представления группы G. Следующие условия эквивалентны: а) $\operatorname{Hom}(T, S) \neq 0$, б) $\dim \operatorname{Hom}(T, S) = 1$; в) $T \sim S$.

2. Если T — конечномерное представление группы G, то для некоторых неприводимых представлений группы G выполняются соотношения $\operatorname{Hom}(T, S) \neq 0$, $\operatorname{Hom}(S_1, T) \neq 0$.

3. Пусть $T = m_1 T^1 + \ldots + m_p T^p$, $S = n_1 T^1 + \ldots + n_p T^p$ — разложения конечномерных представлений T и S в прямую сумму неприводимых представлений группы G. Тогда $\dim \operatorname{Hom}(T, S) = m_1 n_1 + \ldots + m_p n_p$.

4. Пусть X, X' — линейные пространства; Y, Y' — линейные пространства, находящиеся в двойственности с X, X' соответственно относительно форм (x, y) и $(x', y')'$. Пусть T, T' — представления группы G в X, X' соответственно; S, S' — представления, сопряженные T, T'.

а). Пусть A — линейный оператор из X в X', B — линейный оператор из Y' в Y такой, что $(Ax, y')' = (x, By')$ для всех $x \in X$, $y \in Y'$. При этих условиях оператор A сплетает T и T' тогда и только тогда, когда оператор B сплетает S' и S.

б). Если X и X' конечномерны, то линейные пространства $\operatorname{Hom}(T, T')$ и $\operatorname{Hom}(S, S')$ изоморфны.

5. Пусть T, S — конечномерные представления группы G. Вообще говоря, $\dim \operatorname{Hom}(T, S) \neq \dim \operatorname{Hom}(S, T)$. [Указание: рассмотреть в качестве T или S зацепление неприводимых представлений.]

Глава II

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП [1]

§ 1. Основные предложения теории представлений конечных групп

1.1. Инвариантное среднее на конечной группе. Пусть G — группа N-го порядка, $g_1 = e$, g_2, …, g_N — все ее различные элементы. Будем рассматривать числовые функции $f(g)$ на G, т. е. наборы из N чисел $f(g_1)$, … $f(g_N)$. Пусть f — такая функция и $h \in G$, так что h — один из элементов g_1, …, g_N. Функция f_h, определенная формулой

$$f_h(g) = f(gh), \tag{1.1.1а}$$

называется *правым сдвигом на h функции f*. Аналогично, функция f^h, определенная формулой

$$f^h(g) = f(hg), \tag{1.1.1б}$$

называется *левым сдвигом на h функции f*.

Одним из основных методов изучения представлений конечной группы G является образование инвариантного среднего на G. Среднее арифметическое значений числовой функции f на группе G порядка N называется *инвариантным средним* функции f на G и обозначается $M(f)$, так что, по определению,

$$M(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(g_k), \tag{1.1.2а}$$

или, в сокращенной записи,

$$M(f) = \frac{1}{N}\sum_{g} f(g). \tag{1.1.2б}$$

Иногда пишут $M(f(g))$вместо $M(f)$.

I. *Инвариантное среднее $M(f)$ обладает следующими свойствами*:

1) $M(1) = 1$, *где* 1 *слева — функция* $f \equiv 1$ *на* G;

[1] Всюду в этой главе мы рассматриваем только конечные группы и только их конечномерные представления, не всегда это оговаривая.

2) $M(\overline{f}) = \overline{M(f)}$;
3) $M(f) \geqslant 0$ *при* $f \geqslant 0$ *и* $M(f) > 0$ *при* $f \geqslant 0$ *и* $f \not\equiv 0$;
4) $M(f_1 + f_2) = M(f_1) + M(f_2)$;
5) $M(\alpha f) = \alpha M(f)$, *где* α — *число*;
6) $M(f_h) = M(f)$ *и* $M(f^h) = M(f)$;
7) $M(f(g^{-1})) = M(f(g))$.

Доказательство. Свойства 1)–5) непосредственно следуют из определения (1.1.2). Для доказательства свойства 6) достаточно заметить, что при фиксированном $h \in G$ множество g_1h, g_2h, $\ldots$, g_Nh совпадает с G, так что g_1h, g_2h, $\ldots$, g_Nh — те же элементы g_1, $\ldots$, g_N, но, может быть, записанные в другом порядке. Поэтому

$$M(f_h) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_h(g_k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(g_kh) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(g_k) = M(f).$$

Аналогично доказывается, что $M(f^h) = M(f)$. Именно в силу этого свойства инвариантности $M(f)$ при сдвигах функции f число $M(f)$ называется инвариантным средним. Аналогично инвариантному среднему числовой функции вводятся инвариантные средние векторной и операторной функции на конечной группе. Пусть $x = x(g)$ — векторная функция на группе $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$ со значениями из фиксированного линейного пространства X. Если X конечномерно, то $(x)_j$ будет обозначать j-ю координату вектора x относительно заданного базиса в X. *Инвариантным средним* векторной функции x на группе G называется вектор

$$M(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(g_k). \tag{1.1.3}$$

Иногда пишут $M(x(g))$ вместо $M(x)$.

II. *Инвариантное среднее $M(x)$ обладает следующими свойствами*:

а) $M(c) = c$, *где c слева — функция $x(g) \equiv c$, c справа — вектор, не зависящий от g*;
б) $M(x_1 + x_2) = M(x_1) + M(x_2)$, *где* $x_1(g), x_2(g) \in X$;
в) $M(\alpha x) = \alpha M(x)$, *где α — число*;
г) $M(Ax) = AM(x)$, *где A — линейный оператор в X, всюду определенный в X и не зависящий от g*;
д) $M(x_h) = M(x)$ *и* $M(x^h) = M(x)$, *где* $x_h(g) = x(gh)$ *и* $x^h(g) = x(hg)$;
е) $(M(x))_j = M((x)_j)$, *где координаты слева и справа берутся относительно одного и того же базиса в X*.

Все эти свойства непосредственно следуют из определения (1.1.3) среднего $M(x)$; в частности, свойство д) доказывается так же, как свойство б) в I; свойство г) следует из равенств

$$M(Ax) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Ax(g_k) = A\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(g_k)\Big) = AM(x).$$

Перейдем к инвариантному среднему операторной функции. В дальнейшем X, Y, Z обозначают линейные пространства, $L(X)$ — совокупность всех линейных операторов в X, всюду определенных в X, $L(X, Y)$ — совокупность всех линейных операторов из X в Y, всюду определенных в X. Если X и Y конечномерны, $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ — заданные базисы в X и Y и $A \in L(X, Y)$, то $(A)_{jk}$ будут обозначать матричные элементы оператора A относительно заданных базисов. Пусть $A = A(g)$ — операторная функция на группе $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$ со значениями из $L(X, Y)$. *Инвариантным средним операторной функции* на группе G называется оператор

$$M(A) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A(g_k). \tag{1.1.4}$$

Иногда пишут $M(A(g))$ вместо $M(A)$.

III. *Инвариантное среднее $M(A)$ операторной функции $A = A(g)$, $A(g) \in L(X)$ обладает следующими свойствами*:

а$'$) $M(A) = A$, *если* $A \in L(X, Y)$ *не зависит от* g;

б$'$) $M(A_1 + A_2) = M(A_1) + M(A_2)$, *где* $A_1(g)$, $A_2(g) \in L(X, Y)$;

в$'$) $M(\alpha A) = \alpha M(A)$, *где* α *—число*;

г$'$) $M(BA) = BM(A)$, $M(AC) = M(A)C$, *если* $B \in L(Y, Z)$, $C \in L(Z, X)$ *и* B *и* C *не зависят от* g, $A(g) \in L(X, Y)$;

д$'$) $M(A_h) = M(A)$ и $M(A^h) = M(A)$, *где* $A_h(g) = A(gh)$ *и* $A^h(g) = A(hg)$;

е$'$) $\operatorname{tr}(M(A)) = M(\operatorname{tr}(A))$, *если* $A(g) \in L(X)$ *и* X *конечномерно*;

ж$'$) $(M(A))_{jk} = M((A)_{jk})$, *где матричные элементы слева и справа берутся относительно одних и тех же базисов в* X *и* Y.

Доказательство. Свойства а$'$)–г$'$) непосредственно следуют из (1.1.4) и линейности операторов B и $A(g)$; свойства д$'$) и ж$'$) доказываются так же, как свойства б) в I и е) в II. Наконец, свойство е$'$) получается из цепочки равенств

$$\operatorname{tr}(M(A)) = \operatorname{tr}\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A(g_k)\Big) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \operatorname{tr}(A(g_k)) = M(\operatorname{tr} A)$$

(см. 1) и 2) в I п. 2.9 гл. I).

1.2. Полная приводимость представлений конечной группы [1].

Теорема 1. *Всякое представление конечной группы эквивалентно унитарному представлению.*

Доказательство. Пусть T — представление конечной группы в конечномерном пространстве X и $(x, y)_1$ — какое-нибудь скалярное произведение в X, например, $(x, y)_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \overline{\eta}_j$, $n = \dim X$, где ξ_j, η_j — координаты векторов $x, y \in X$ в некотором базисе в X. Определим форму (x, y) в X, полагая

$$f(g) = (T(g)\, x, T(g)\, y)_1, \tag{1.2.1}$$

$$(x, y) = M(f) = M((T(g)\, x, T(g)\, y)_1); \tag{1.2.2}$$

форма (x, y) есть скалярное произведение в X. Действительно, (x, y) билинейна в силу свойств 1), 4), 5) среднего $M(f)$, линейности оператора $T(g)$ и билинейности формы $(x, y)_1$. Далее, так как $(x, y)_1$ — эрмитова, то в силу 2) I п. 1.1

$$(y, x) = M((T(g)\, y, T(g)\, x)_1) = \overline{M((T(g)\, x, T(g)\, y)_1)} = \overline{(x, y)};$$

следовательно, (x, y) также эрмитова. Наконец, $(T(g)\, x, T(g)\, x)_1 \geqslant 0$, ибо $(x, y)_1$ — скалярное произведение. Отсюда в силу 3) I п. 1.1

$$(x, x) = M((T(g)\, x, T(g)\, x)_1) \geqslant 0,$$

причем знак равенства здесь имеет место лишь тогда, когда $(T(g)\, x, T(g)\, x)_1 = 0$ при всех $g \in G$. Полагая здесь $g = e$, получим, что $(x, x)_1 = 0$; следовательно, $x = 0$. Итак, $(x, x) \geqslant 0$, и $(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$. Тем самым доказано, что (x, y) — скалярное произведение на X. Для завершения доказательства теоремы заметим теперь, что в силу 6) I п. 1.1, (1.2.1) и (1.2.2) для каждого $h \in G$

$$\begin{aligned}(T(h)\, x, T(h)\, y) &= M(T(g)\, T(h)\, x, T(g)\, T(h)\, y) = \\ &= M(T(gh)\, x, T(gh)\, y) = M(f_h) = M(f) = (x, y),\end{aligned}$$

а это значит, что T унитарно относительно (x, y). Заметив теперь, что каждое конечномерное представление, эквивалентное унитарному, вполне приводимо (см. V п. 2.8 гл. I), заключаем, что имеет место

Теорема 2. *Каждое представление конечной группы вполне приводимо.*

Основными задачами теории представлений конечных групп являются:

1. Нахождение всех неприводимых конечномерных представлений заданной конечной группы.

[1] Напомним, что в этой главе мы рассматриваем только конечномерные представления.

2. Разложение заданного конечномерного представления конечной группы на ее неприводимые представления.

Ниже (см. п. 1.8) мы увидим, что вторую задачу можно решить, если известно решение первой. А решение первой задачи известно лишь для небольшого числа конечных групп.

1.3. Пространство $L^2(G)$; регулярное представление. Обозначим через $L^2(G)$ совокупность всех числовых функций $f(g)$ на конечной группе $G = \{g_1, \ldots, g_N\}$. Каждая $f(g)$ есть просто система из N чисел $f(g_1)$, $f(g_2)$, $\ldots$, $f(g_N)$. Определим в $L^2(G)$ действия сложения и умножения на число, как соответствующие действия с функциями. Тогда $L^2(G)$ станет N-мерным линейным пространством. Наконец, определим в $L^2(G)$ билинейную форму (f_1, f_2) по формуле

$$(f_1, f_2) = M(f_1, \overline{f}_2) \, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f_1(g_k) \, \overline{f_2(g_k)}. \tag{1.3.1}$$

Нетрудно видеть, что форма (f_1, f_2) эрмитова и положительно определена, а потому есть скалярное произведение в $L^2(G)$. Следовательно, $L^2(G)$, с определенными выше действиями сложения, умножения на число и скалярным произведением, есть N-мерное евклидово пространство.

Определим теперь операторы $T(g)$, $g \in G$, полагая для каждого $h \in G$

$$T(h) \, f = f_h, \quad \text{т. е.} \quad T(h) \, f(g) = f(gh). \tag{1.3.2}$$

Очевидно, $T(h)$ линеен. Кроме того, соответствие $h \to T(h)$ есть представление группы G — обозначим его T. Действительно, для h_1, $h_2 \in G$

$$\begin{aligned} T(h_1) \, T(h_2) \, f(g) = T(h_1)(T(h_2) \, f(g)) = T(h_1)(f(gh_2)) = \\ = f((gh_1) \, h_2) = f(g(h_1 h_2)) = T(h_1, h_2) \, f(g) \end{aligned}$$

и, очевидно, $T(e) \, f(g) = f(g)$. Это представление унитарно. Действительно, полагая $f = f_1 \overline{f}_2$, имеем в силу 6) I п. 1.1

$$(T(h) \, f_1, T(h) \, f_2) = M(f_{1h} \overline{f}_{2h}) = M(f_h) = M(f) = M(f_1 \overline{f}_2) = (f_1 f_2).$$

Построенное унитарное представление T в $L^2(G)$ называется *правым регулярным представлением группы* G. Аналогично определяется *левое регулярное представление* $\widetilde{T}$ *группы* G *в* $L^2(G)$ по формуле

$$\widetilde{T}_h f(g) = f(h^{-1} g). \tag{1.3.3}$$

Представление $\widetilde{T}$ унитарно; это следует из левой инвариантности среднего $M(f)$ (см. (1.1.1б) и 6) I п. 1.1).

I. *Левое и правое регулярные представления унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Каждой функции $f \in L^2(G)$ поставим в соответствие функцию
$$f'(g) = f(g^{-1}). \tag{1.3.4}$$

Оператор $W\colon f \to f'$, очевидно, линеен. Кроме того, из (1.3.4) следует, что
$$W^2 = 1,$$

и потому W отображает $L^2(G)$ на $L^2(G)$. Кроме того, в силу 7) I п. 1.1 для $f,\, f_1 \in L^2(G)$
$$(Wf,\, Wf_1) = (f',\, f_1') = M(f(g^{-1})\,\overline{f_1(g^{-1})}) = M(f(g)\,\overline{f_1(g)}) = (f,\, f_1);$$

следовательно, W унитарен. Наконец,
$$(WT(h)\,f)(g) = (Wf)(gh) = f(g^{-1}h),$$
$$(\widetilde{T}(h)\,Wf)(g) = \widetilde{T}(h)f'(g) = \widetilde{T}(h)\,f(g^{-1}) = f((h^{-1}g)^{-1}) = f(g^{-1}h).$$

Отсюда $WT(h) = \widetilde{T}(h)W$, т. е. W переводит $T(h)$ в $\widetilde{T}(h)$.

1.4. Соотношения ортогональности. Согласно теореме 1 п. 1.2 каждое представление T конечной группы G эквивалентно унитарному. Поэтому мы можем и будем в дальнейшем считать, что в пространстве X этого представления уже введено скалярное произведение $(x,\, y)$, относительно которого T унитарно. Кроме того, мы будем в дальнейшем считать, что $t_{jk}(g)$ — матричные элементы представления по отношению к ортонормальному относительно $(x,\, y)$ базису в X, так что матрица $t(g)$ представления T унитарна (см. III п. 2.8 гл. I).

Теорема 1. *Пусть T^1 и T^2 — два неприводимых представления конечной группы G. $t_{jk}^1(g)$, $t_{jk}^2(g)$ — их матричные элементы. Тогда*
$$(t_{jk}^1(g),\, t_{pq}^2(q)) = 0, \quad \textit{если} \quad T^1 \quad \textit{и} \quad T^2 \quad \textit{не эквивалентны}, \tag{1.4.1}$$
$$(t_{jk}^1(g),\, t_{pq}^1(g)) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad j \neq p \quad \textit{или} \quad k \neq q, \\ 1/n_1, & \textit{если} \quad j = p \quad \textit{и} \quad k = q, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

где n_1 — размерность представления T^1 и $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в $L^2(G)$.

Доказательство. Пусть X и Y — пространства представлений T^1 и T^2 и пусть $B \in L(X,\, Y)$. Положим $A(g) = T^1(g)BT^2(g^{-1})$ и
$$C = M(A(g)) = M(T^1(g)BT^2(g^{-1})). \tag{1.4.3}$$

Ясно, что также $C \in L(Y,\, X)$. Кроме того,
$$T^1(h)C = CT^2(h). \tag{1.4.4}$$

Действительно, в силу свойств г′) и е′) в III п. 1.1

$$\begin{aligned}T^1(h)C = T^1(h)M(A(g)) &= M(T^1)(h)A(g)\,T^2(h^{-1})\,T^2(h) =\\ &= M(T^1(h)\,T^1(g)BT^2(g^{-1})\,T^2(h^{-1}))\,T^2(h) =\\ &= M(T^1(hg)BT^2(hg)^{-1})\,T^2(h) = M((A(hg)))\,T^2(h) =\\ &= M(A(g))\,T^2(h) = CT^2(h).\end{aligned}$$

Предположим, что T^1 и T^2 не эквивалентны; применяя к (1.4.4) лемму Шура (см. п. 2.2 гл. I) заключаем, что $C = 0$, т. е.

$$M(T^1(g)BT^2(g^{-1})) = 0 \quad \text{для каждого} \quad B \in L(Y,\, X). \tag{1.4.5}$$

Переходя в (1.4.5) к матричным элементам и используя свойство ж′) в III п.1.1, заключаем, что

$$M\left(\sum_{\mu=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_2} t^1_{j\mu}(g)\,b_{\mu\nu}t^2_{\nu p}(g^{-1})\right) = 0, \tag{1.4.6}$$
$$j = 1,\, \ldots,\, n_1; \quad p = 1,\, \ldots,\, n_2$$

при произвольных $b_{\mu\nu}$. Выберем

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mu = k \quad \text{и} \quad \nu = q,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Тогда (1.4.6) перейдет в равенство

$$M(t^1_{jk}(g)\,t^2_{qp}(g^{-1})) = 0. \tag{1.4.7}$$

Но $t^2_{qp}(g^{-1}) = \overline{t^2_{pq}(g)}$ (см. (2.8.7) гл. I), так что (1.4.7) совпадает с равенством

$$M(t^1_{jk}(g)\,\overline{t^2_{pq}(g)}) = 0.$$

По определению скалярного произведения в $L^2(G)$ (см. (1.3.1)) последнее соотношение совпадает с (1.4.1). Соотношение (1.4.4) имеет, в частности, место при $T^2 = T^1$, $Y = X$. Оно принимает тогда вид $T^1(h)C = CT^1(h)$, т. е. C перестановочен со всеми $T^1(g)$. В силу леммы 2 п. 2.2 гл. I отсюда следует, что $C = \lambda 1$, где λ — некоторое число.

Найдем λ. Для этого заметим, что в силу ж′) и а′) III п. 1.1 и 5) I п. 2.9 гл. I

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} M(T^1(g)BT^1(g^{-1})) &= \operatorname{tr} M(T^1(g)B(T^1(g))^{-1}) =\\ &= M(\operatorname{tr}(T^1(g)B(T^1(g))^{-1})) = M(\operatorname{tr} B) = \operatorname{tr} B;\end{aligned}$$

с другой стороны, $\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} \lambda 1 = \lambda n_1$, где $n_1 = \dim X_1$, и потому $\lambda = \dfrac{1}{n_1}\operatorname{tr} B$. Отсюда

$$C = \left(\frac{1}{n_1}\operatorname{tr} B\right)\cdot 1. \tag{1.4.8}$$

Комбинируя (1.4.8) с (1.4.3) при $T^2 = T^1$, заключаем, что

$$M(T^1(g)BT^1(g^{-1})) = \left(\frac{1}{n_1}\operatorname{tr} B\right)\cdot 1 \tag{1.4.9}$$

при произвольном $B \in L(X)$. Переходя в (1.4.9) к матричным элементам, получим, что

$$M\left(\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_1} t^1_{j\mu}(g)\, b_{\mu\nu} t^1_{\nu p}(g^{-1})\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n_1}\displaystyle\sum_{\mu=1}^{n_1} b_{\mu\mu} & \text{при} \quad j = p, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq p \end{cases} \tag{1.4.10}$$

при произвольных числах $b_{\mu\nu}$. Выберем

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mu = k \quad \text{и} \quad \nu = q, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда (1.4.10) примет вид

$$M(t^1_{jk}(g)\, t^1_{qp}(g^{-1})) = \begin{cases} 1/n_1 & \text{при} \quad j = p \quad \text{и} \quad k = q, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq p \quad \text{или} \quad k \neq q, \end{cases} \tag{1.4.11}$$

но так как $t^1_{qp}(g^{-1}) = \overline{t^1_{pq}(g)}$, соотношение (1.4.11) совпадает с (1.4.2); этим завершается доказательство теоремы.

Формулы (1.4.1), (1.4.2) называются *соотношениями ортогональности* для конечной группы.

Пусть теперь $T^1, T^2, \ldots, T^m$ — попарно не эквивалентные неприводимые представления группы G порядка N и $n_1, \ldots, n_m$ — их размерности. В силу (1.4.1) и (1.4.2) матричные элементы $t^k_{j\nu}(g)$, $j, \nu = 1, \ldots, n_k$; $k = 1, \ldots, m$, этих представлений образуют ортогональную систему в $L^2(G)$ и потому линейно независимы. Следовательно, их общее число $\leqslant N$. Но тогда также и $m \leqslant N$. Другими словами, имеет место

Следствие 1. *Число попарно не эквивалентных неприводимых представлений конечной группы конечно и не превосходит порядка группы.*

Система $T^1, T^2, \ldots, T^m$ представлений группы G называется *полной системой ее неприводимых представлений*, если:

а) представления $T^1, T^2, \ldots, T^m$ неприводимы и попарно не эквивалентны;

б) каждое неприводимое представление группы G эквивалентно одному из представлений $T^1, T^2, \ldots, T^m$.

В силу следствия 1 справедлива

Теорема 2. *Если $T^1, T^2, \ldots, T^m$ — полная система неприводимых представлений конечной группы G, то матричные элементы $t^k_{j\nu}(g)$ всех этих представлений образуют полную ортогональную систему в $L^2(G)$.*

Доказательство. Ортогональность этой системы была доказана выше (теорема 1); надо только доказать ее полноту.

Рассмотрим правое регулярное представление T группы G; его операторами являются операторы правого сдвига

$$T(h)\, f(g) = f(gh) \tag{1.4.12}$$

(см. (1.3.2)). Согласно теореме 2 п.1.2 это представление вполне приводимо; следовательно,

$$L^2(G) = X_1 + X_2 + \ldots + X_p, \tag{1.4.13}$$

где X_k, $k = 1, \ldots, p$, — такие инвариантные относительно T подпространства, что сужение $\widetilde{T}^k$ представления T на каждом X_k неприводимо. Поэтому оно эквивалентно одному из представлений T^1, $T^2, \ldots, T^m$, ибо эти представления образуют полную систему. Пусть $\widetilde{T}^k$ эквивалентно представлению T^l, $l = l(k)$. Тогда можно так выбрать ортонормальный базис $f_1(g), \ldots, f_{nk}(g)$ в X_k, что матричные элементы представления $\widetilde{T}^k$ в этом базисе совпадают с $t^l_{j\nu}(g)$ (см. VII п. 2.8 гл. I). В силу (1.4.12) и (2.1.3) гл. I это означает, что

$$f_\nu(gh) = T(h)\, f_\nu(g) = \widetilde{T}^k(h)\, f_\nu(g) = \sum_{j=1}^{n_l} t^l_{j\nu}(h)\, f_j(g).$$

Полагая здесь $g = e$ и $f_j(e) = c_j$, мы получим, что

$$f_\nu(h) = \sum_{j=1}^{n} c_j t^l_{j\nu}(h) \quad \text{для всех} \quad h \in G.$$

Это означает, что функция f_j базиса в X_k, а значит, каждая функция f из X_k, есть линейная комбинация функций $t^l_{j\nu}(h)$. В силу соотношения $L^2(G) = X_1 + \ldots + X_p$ (см. (1.4.13)), отсюда заключаем, что каждая функция из $L^2(G)$ есть линейная комбинация функций $t^l_{j\nu}$, $j, \nu = 1, \ldots$ $\ldots, n_l$, $l = 1, \ldots, p$. Но это и означает, что $t^l_{j\nu}$ образуют базис в $L^2(G)$.

Замечание. Положив

$$e^k_{j\nu}(g) = \sqrt{n_k}\, t^k_{j\nu}(g), \tag{1.4.14}$$

мы получим в силу (1.4.1), (1.4.2) и теоремы 2 ортонормальный базис в $L^2(G)$.

Теорема 3 (теорема Бернсайда). *Порядок N группы равен сумме квадратов размерностей полной системы неприводимых представлений этой группы*:

$$N = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_m^2. \tag{1.4.15}$$

Доказательство. Как мы видели выше, $\dim L^2(G) = N$. С другой стороны, $\dim L^2(G)$ равна числу элементов базиса

$$t^k_{j\nu}, \quad j, \nu = 1, \ldots, n_k; \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.4.16}$$

Но при каждом фиксированном k число функций $t^k_{j\nu}$, $j, \nu = 1, \ldots, n_k$, равно n_k^2. Поэтому число элементов базиса $L^2(G)$ равно $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_m^2$. Отсюда следует (1.4.15).

1.5. Разложение регулярного представления конечной группы на ее неприводимые представления.

Теорема 1. *Правое регулярное представление конечной группы G разлагается на ее неприводимые представления и каждое неприводимое представление T^k группы G содержится в разложении ее регулярного представления с кратностью n_k, равной размерности представления T^k.*

Доказательство. Пусть N — порядок группы G, $T^1, \ldots, T^m$ — полная система ее неприводимых представлений, $t^k_{j\nu}(g)$ — их матричные элементы. Обозначим через M^k_j подпространство, натянутое на $t^k_{j\nu}(g)$, $\nu = 1, \ldots, n_k$, при фиксированных j и k. Из соотношений ортогональности (1.4.1), (1.4.2) следует, что

$$M^k_j \perp M^{k'}_{j'} \quad \text{при} \quad j \neq j' \quad \text{или} \quad k \neq k'.$$

Кроме того, $t^k_{j\nu}(g)$ образуют базис в $L^2(G)$ (см. теорему 2 п.1.4). Поэтому

$$L^2(G) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \oplus M^k_j. \tag{1.5.1}$$

Каждое M^k_j инвариантно относительно правого регулярного представления T группы G. Действительно, $t^k_{j\nu}(g)$, $\nu = 1, \ldots, n_k$, при фиксированных k и j образуют базис в M^k_j и в силу (2.1.6) гл. I

$$T(h)\, t^k_{j\nu}(g) = t^k_{j\nu}(gh) = \sum_{\mu=1}^{n_k} t^k_{j\mu}(g)\, t^k_{\mu\nu}(h) = \sum_{\mu=1}^{n_1} t^k_{\mu\nu}(h)\, t^k_{j\mu}(g). \tag{1.5.2}$$

Но это означает, что $T(h)\, t^k_{j\nu}(g)$ есть линейная комбинация функций $t^k_{j\mu}(g)$, $\mu = 1, \ldots, n_k$, и потому $T(h)\, t^k_{j\nu}(g) \in M^k_j$.

Обозначим через T^{jk} сужение T на M^k_j. Умножая теперь (1.6.2) на $\sqrt{n_k}$ и учитывая формулы (1.4.14), получаем

$$T^{jk}(h)\, e^k_{j\nu} = T(h)\, e^k_{j\nu} = \sum_{\mu=1}^{n_k} t^k_{\mu\nu}(h)\, e^k_{j\mu}. \tag{1.5.3}$$

Но $e^k_{j\mu}$, $\mu = 1, \ldots, n_k$, — ортонормальный базис в M^k_j (см. замечание в п. 1.4); поэтому из (1.5.3) следует, что матричные элементы T^{jk}

в базисе $e^k_{J\mu}$, $\mu = 1, \ldots, n_k$, совпадают с $t^k_{\mu\nu}(h)$. Следовательно, T_{jk} эквивалентно T^k. Итак, сужение T на каждом M^k_j, $j = 1, \ldots, n_k$, эквивалентно T^k, а это и означает в силу (1.5.1), что T^k содержится в регулярном представлении T с кратностью n_k.

Замечание 1. Аналогичная теорема имеет место и для левого регулярного представления. Мы предоставляем читателю подробное проведение ее доказательства.

Замечание 2. Разложение (1.5.1) и, следовательно, разложение регулярного представления на неприводимые зависит от выбора матричных элементов $t^k_{j\mu}(g)$, т. е. от выбора ортонормального базиса в пространстве X_k неприводимого представления T^k, $k = 1, 2, \ldots, m$; следовательно, это разложение неоднозначно (за исключением случая $n_k = 1$). Аналогичная ситуация имеет место при разложении на неприводимые представления любого представления заданной группы, если в этом разложении неприводимые представления содержатся с кратностью > 1 (см. ниже с. 85).

Замечание 3. Для нахождения полной системы неприводимых представлений заданной конечной группы G естественно пытаться разлагать ее регулярные представления на неприводимые представления, поскольку все представления полной системы содержатся в этом разложении. Однако до сих пор не существует общих методов такого разложения, если не известны заранее матричные элементы неприводимых представлений группы G, а следовательно, и сами неприводимые представления. При фактическом проведении разложения по методу доказательства теоремы 1 эти матричные элементы должны быть известны заранее.

1.6. Равенство Парсеваля и формула Планшереля. Согласно замечанию в п. 1.4 функции

$$e^k_{j\nu}(g) = \sqrt{n_k}\, t^k_{j\nu}(g) \tag{1.6.1}$$

образуют ортонормальный базис в $L^2(G)$. Поэтому для любой функции $f(g)$

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j,\nu=1}^{n_k} |(f, e^k_{j\nu})|^2. \tag{1.6.2}$$

Но в силу (1.6.1)

$$(f, e^k_{j\nu}) = \sqrt{n_k}\,(f, t^k_{j\nu}),$$

и потому (1.6.2) перепишется в виде

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j,\nu}^{n_k} n_k |(f, t^k_{j\nu})|^2, \tag{1.6.3}$$

где $t^k_{j\nu}(g)$ — матричные элементы полной системы неприводимых представлений группы G, n_k — размерность этих представлений.

Числа $(f, t^k_{j\nu})$ называются *коэффициентами Фурье* функции f относительно $t^k_{j\nu}$, а формула (1.6.2) — *равенством Парсеваля* для группы G.

Читатель, знакомый с теорией рядов Фурье, легко усмотрит здесь аналогию с формулами этой теории. Как мы увидим ниже (см., например, гл. IV), в действительности и формулы теории рядов, и формула (1.6.3) являются частными случаями общих формул теории представлений групп.

Пусть $T^{k*}(g)$ — сопряженный оператор к $T^k(g)$ относительно скалярного произведения, в котором T^k унитарно. Положим

$$T^k(f) = M(f(g)\, T^{k*}(f)) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(g_k)\, T^{k*}(g). \tag{1.6.4}$$

Операторная функция $T^k(f)$ от индекса k, определенная формулой (1.6.4), называется *преобразованием Фурье* функции f.

Пусть $t^k_{j\nu}(g)$ — матричные элементы оператора $T^k(g)$относительно ортонормального базиса $e^k_1, \ldots, e^k_{n_k}$; следовательно, $\overline{t^k_{\nu j}(g)}$ — матричные элементы оператора $T^{k*}(g)$ относительно того же базиса. Отсюда и из (1.6.4) заключаем, что

$$\left\| \begin{matrix} (f, t^k_{11}) & \ldots & (f, t^k_{n_k 1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (f, t^k_{1 n_k}) & \ldots & (f, t^k_{n_k n_k}) \end{matrix} \right\|$$

— матрица оператора $T^k(f)$ относительно $e^k_1, \ldots, e^k_{n_k}$. Поэтому [1])

$$\operatorname{tr}(T^{k*}(f)\, T^k(f)) = \sum_{j,\,\nu=1}^{n_k} |(f, t^k_{j\nu})|^2. \tag{1.6.5}$$

Комбинируя формулы (1.6.5) и (1.6.3), получаем

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{m} n_k \operatorname{tr}(T^{k*}(f)\, T^k(f)). \tag{1.6.6}$$

Формула (1.6.6) называется *формулой Планшереля для конечной группы*.

[1]) Если заменить T^k эквивалентным ему представлением, то $T^k(f)$, вообще говоря, изменяется; однако, из свойства 5) I п. 2.9 гл. I следа вытекает, что $\operatorname{tr}(T^{k*}(f)\, T^k(f))$ при этом не изменяется.

1.7. Характеры представлений конечной группы.

Теорема 1. *Пусть T^1, T^2, $\ldots, T^m$ — полная система неприводимых представлений конечной группы G, χ_1, χ_2, $\ldots, \chi_m$ — их характеры. Тогда*

$$(\chi_k, \chi_j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = j, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq j, \end{cases} \qquad k, j = 1, \ldots, m. \tag{1.7.1}$$

Доказательство. В силу соотношений ортогональности (см. (1.4.1), (1.4.2)) при $k \neq j$

$$(\chi_k, \chi_j) = \left(\sum_{\mu=1}^{n_k} t_{\mu\mu}^k, \sum_{\nu=1}^{n_j} t_{\nu\nu}^j \right) = \sum_{\mu=1}^{n_k} \sum_{\nu=1}^{n_j} (t_{\mu\mu}^{t_k}, t_{\nu\nu}^j) = 0,$$

а при $k = j$

$$(\chi_k, \chi_k) = \left(\sum_{\mu=1}^{n_k} t_{\mu\mu}^k, \sum_{\nu=1}^{n_k} t_{\nu\nu}^k \right) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n_k} \sum_{\nu=1}^{n_k} (t_{\mu\mu}^k, t_{\nu\nu}^k) = \sum_{\mu=1}^{n_k} (t_{\mu\mu}^k, t_{\mu\mu}^k) = \sum_{\mu=1}^{n_k} \frac{1}{n_k} = 1.$$

Формулы (1.6.1) называются *соотношениями ортогональности для характеров* конечной группы. Из них следует, что χ_1, χ_2, $\ldots, \chi_n$ линейно независимы.

Пусть теперь T — произвольное представление группы G. Согласно теореме 2 п. 1.2 T вполне приводимо, так что

$$T = r_1 T^1 + r_2 T^2 + \ldots + r_m T^m, \tag{1.7.2}$$

где r_j — кратность, с которой T^j содержится в T (при этом некоторые из r_j могут быть $= 0$). Применяя к (1.6.2) д) в III п. 2.9 гл. I заключаем, что

$$\chi_T = r_1 \chi_1 + r_2 \chi_2 + \ldots + r_m \chi_m. \tag{1.7.3}$$

Отсюда в силу (1.6.1)

$$(\chi_T, \chi_j) = (r_1 \chi_1 + r_2 \chi_2 + \ldots + r_m \chi_m, \chi_j) = r_j. \tag{1.7.4}$$

Другими словами,

I. *Коэффициент Фурье характера χ_T представления T относительно характера χ_j неприводимого представления T^j равен кратности, с которой T^j содержится в представлении T.*

Таким образом, зная характеры полной системы неприводимых представлений, мы можем (даже если сами эти представления неизвестны) сказать, какие неприводимые представления и с какой кратностью содержатся в заданном представлении, и ответ не зависит от способа разложения этого представления на неприводимые представления (ср. замечание 2 в п. 1.5).

Из (1.7.1) и (1.7.3) следует также, что

$$(\chi_T, \chi_T) = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2. \tag{1.7.5}$$

В частности, $(\chi_T, \chi_T) = 1$ тогда и только тогда, когда одно из чисел $r_1 = 1$, а все остальные r_k равны нулю. В силу I это означает, что T содержит только T^j и притом однократно и не содержит других T^k. Следовательно,

II. *Представление T конечной группы неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_T, \chi_T) = 1$.*

Отметим еще один критерий неприводимости:

III. *Представление T конечной группы в пространстве X неприводимо тогда и только тогда, когда каждый линейный оператор B в X, перестановочный со всеми $T(g)$, кратен единичному оператору.*

Утверждение следует непосредственно из V п. 2.8 гл. I и теоремы 1 п. 1.2.

IV. *Если характеры χ, χ' двух представлений T, T' конечной группы G совпадают, то эти представления эквивалентны.*

Действительно, если $\chi_T = \chi_{T'}$, то в силу (1.6.4)

$$(\chi_{T'}, \chi_j) = (\chi_T, \chi_j) = r_j,$$

так что T' и T содержат одни и те же неприводимые представления T^j и с одной и той же кратностью r_j. Следовательно, T' эквивалентно T.

Обозначим через M совокупность всех функций $f(g)$ на G, постоянных на классах сопряженных элементов. Пусть K_1, K_2, ..., K_q — все эти классы. Тогда функцию $f(g) \in M$ можно рассматривать как функцию от классов, полагая $f(K_j) = f(g)$ при $g \in K_j$. Тогда каждая функция f из M есть просто набор из q чисел $f(K_1)$, ..., $f(K_q)$. Поэтому M есть q-мерное подпространство в $L^2(G)$.

Теорема 2. *Характеры χ_1, χ_2, ..., χ_m полной системы попарно не эквивалентных неприводимых представлений конечной группы G образуют полную ортонормальную систему в M.*

Доказательство. Согласно б) III п. 2.9 гл. I и теореме 1 все характеры χ_i принадлежат M и образуют в M ортонормальную систему. Остается доказать полноту этой системы в M. Пусть $f \in M$; тогда $f(h) = f(g^{-1}hg)$ для любых $g, h \in G$. Нам надо доказать, что f есть линейная комбинация характеров χ_1, ..., χ_m. Поскольку система $t^k_{j\nu}$ полна в $L^2(G)$ (см. теорему 2 п. 1.4), то

$$f(h) = f(g^{-1}hg) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j,\,\nu=1}^{n_k} c^k_{j\nu} t^k_{j\nu}(g^{-1}hg),$$

где $c^k_{J\nu}$ — некоторые числа; отсюда

$$f(h) = M_g(f(h)) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j,\,\nu=1}^{n_k} c^k_{j\nu} M_g(t^k_{j\nu}(g^{-1}hg)), \tag{1.7.6}$$

где M_g — среднее по g на группе G. Но в силу соотношений ортогональности (1.4.1), (1.4.2) и формул (2.1.4) гл. I

$$M_g(t^k_{j\nu}(g^{-1}hg)) = M_g\left(\sum_{p,\,q=1}^{n_k} t^k_{jp}(g^{-1}t^k_{pq}(h)\,t^k_{q\nu}(g)\right) =$$

$$= \sum_{p,\,q=1}^{n_k} t^k_{pq}(h) M_g(\overline{t^k_{pj}(g)}\,t^k_{q\nu}(g)) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq \nu, \\ \dfrac{1}{n_k}\displaystyle\sum_{p=1}^{n_k} t^k_{pp}(h) = \dfrac{1}{n_k}\,\chi_k(h) & \text{при} \quad j = \nu. \end{cases}$$

Поэтому (1.7.6) перепишется в виде

$$f(h) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{n_k}\, c^k_{jj}\right)\chi_k(h),$$

а это и требовалось доказать.

Из теоремы 2 следует, что $\dim M = m$; с другой стороны, как мы видели выше, $\dim M = q$. Следовательно, $m = q$. Другими словами, имеет место

Теорема 3. *Полная система неприводимых представлений конечной группы содержит столько представлений, сколько в этой группе имеется классов сопряженных элементов.*

1.8. Разложение заданного представления конечной группы на ее неприводимые представления. Пусть G — конечная группа, $T^1, \ldots, T^m$ — ее полная система неприводимых представлений, $n_1, \ldots, n_m$ — их размерности, $t^k_{j\nu}(g)$ — матричные элементы представления T^k, $k = 1, \ldots, m$. Укажем прием фактического разложения заданного представления T группы G на ее неприводимые представления; этот прием примени́м, если известны $t^k_{j\nu}(g)$.

Пусть X — пространство представления T. Как обычно (см. теорему 1 п. 1.2), мы считаем T унитарным. Определим операторы $P^k_{j\nu}$ в X, полагая

$$P^k_{j\nu} = n_k M(\overline{t^k_{j\nu}(g)}\,T(g)). \tag{1.8.1}$$

I. *Операторы $P^k_{j\nu}$ обладают следующими свойствами*:

$$T(h)P^k_{j\mu} = \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{2j}(h)P^k_{\nu\mu}, \tag{1.8.2а}$$

$$P^k_{j\mu}T(h) = \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{\mu\nu}(h)P^k_{j\nu} \tag{1.8.2б}$$

для всех $h \in G$;

$$P^k_{jl}P^{k'}_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad k' \neq k \quad \textit{или} \quad l \neq \mu, \\ P^k_{j\nu} & \textit{при} \quad k' = k \quad \textit{и} \quad l = \mu, \end{cases} \tag{1.8.3}$$

$$(P^k_{jl})^* = P^k_{lj}; \tag{1.8.4}$$

в частности,

$$P^k_{jj}P^{k'}_{\mu\mu} = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad k' \neq k, \quad \textit{или} \quad \mu \neq j, \\ P^k_{jj} & \textit{при} \quad k' = k \quad \textit{и} \quad \mu = j, \end{cases} \tag{1.8.5}$$

$$(P^k_{jj})^* = P^k_{jj}. \tag{1.8.6}$$

Доказательство. Из (1.8.1) свойств III инвариантного среднего (1.4.1) и соотношения $t^k_{j\nu}(h^{-1}) = \overline{t^k_{\nu j}(h)}$ (см. (2.8.7) гл. I заключаем:

$$\begin{aligned} T(h)P^k_{j\mu} &= n_k T(h) M(\overline{t^k_{j\mu}(g)}\, T(g)) = n_k M(\overline{t^k_{j\mu}(g)}\, T(h)\, T(g)) = \\ &= n_k M(\overline{t^k_{j\mu}(g)}\, T(hg)) = n_k M(\overline{t^k_{j\mu}(h^{-1}g)}\, T(g)) = \\ &= n_k M\Big(\sum_{\nu=1}^{n_k} \overline{t^k_{j\nu}(h^{-1})}\, \overline{t^k_{\nu\mu}(g)}\, T(g)\Big) = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{\nu j}(h)\, n_k M(\overline{t^k_{\nu\mu}(g)}\, T(g)) = \sum_{\nu=1}^{n_k} t^k_{\nu j}(h) P^k_{\nu\mu}, \end{aligned}$$

и (1.8.2а) доказано. Аналогично доказывается (1.8.2б). Далее, в силу (1.8.2а) и соотношений ортогональности (1.4.1), (1.4.2)

$$\begin{aligned} P^k_{jl}P^{k'}_{\mu\nu} &= n_k M(\overline{t^k_{jl}(g)}\, T(g))P^{k'}_{\mu\nu} = n_k M(\overline{t^k_{jl}(g)}\, T(g)P^{k'}_{\mu\nu}) = \\ &= n_k M\Big(\overline{t^k_{jl}(g)} \sum_{q=1}^{n_{k'}} t^{k'}_{q\mu}(g)P^{k'}_{q\nu}\Big) = n_k \sum_{q=1}^{n_{k'}} (t^{k'}_{q\mu}, t^k_{jl})P^{k'}_{ql} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k' \neq k \quad \text{или} \quad l \neq \mu, \\ n_k(t^k_{jl}, t^k_{jl})P^k_{j\nu} = P^k_{j\nu} & \text{при} \quad k' = k \quad \text{и} \quad l = \mu, \end{cases} \end{aligned}$$

а это совпадает с (1.8.3). Для доказательства свойства (1.8.4) заметим, что T унитарно, так что $(T(g))^* = T(g^{-1})$ и потому

$$(P^k_{jl})^* = \left(n_k M\left(\overline{t^k_{jl}(g)}\,T(g)\right)\right)^* = \left(\frac{n_k}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\overline{t^k_{jl}(g_\nu)}\,T(g_\nu)\right)^* =$$

$$= \frac{n_k}{N}\sum_{\nu=1}^{N} t^k_{jl}(g_\nu)(T(g_\nu))^* = \frac{n_k}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\overline{t^k_{lj}(g_\nu^{-1})}\,T(g_\nu^{-1}) =$$

$$= \frac{n_k}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\overline{t^k_{lj}(g_\nu)}\,T(g_\nu) = P^k_{lj}.$$

Из (1.8.3) и (1.8.4) следуют (1.8.5) и (1.8.6). Положим теперь

$$X^k_j = P^k_{jj}X; \tag{1.8.7}$$

очевидно, X^k_j — подпространство в X. При этом не исключено, что некоторые $X^l_j = (0)$; это означает, что соответствующие $P^l_{jj} = 0$.

II. *Подпространства X^k_j обладают следующими свойствами*:

$$X^k_j \perp X^{k'}_{j'} \quad \textit{при} \quad k' \neq k \quad \textit{или} \quad j' \neq j, \tag{1.8.8}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k} \oplus X^k_j = X, \tag{1.8.9}$$

$$P^k_{j\mu}X^{k'}_\nu = (0) \quad \textit{при} \quad k' \neq k \quad \textit{или} \quad \mu \neq \nu, \tag{1.8.10}$$

$$P^k_{j\mu} \ \textit{изометрически отображает}\ X^k_\mu \ \textit{на}\ X^k_j. \tag{1.8.11}$$

Доказательство. Из (1.8.5) и (1.8.6) заключаем, что P^k_{jj} — взаимно ортогональные проекторы, проектирующие в силу (1.8.7) пространство X на X^k_j Отсюда следует (1.8.8). Докажем (1.8.9). Положим

$$Y = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k} \oplus X^k_j \tag{1.8.12}$$

и допустим, что $Y \neq X$. Тогда в X существует вектор $x_0 \neq 0$, ортогональный к Y, а значит, и к каждому X^k_j (см. VIII п. 2.8 гл. 1). В силу (1.8.7), это означает, что $x_0 \perp P^k_{j\nu}x$ для всех $x \in X$, так что подавно $f(g) = (x_0, T(g)\,x) = 0$. Действительно, имеем (см. (1.8.1))

$$0 = (x_0, P^k_{j\nu}x) = (x_0, n_k M(\overline{t^k_{j\nu}(g)}\,T(g)\,x)) =$$

$$= n_k\left(x_0, \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{N}\overline{t^k_{J\nu}(g_\mu)}\,T(g_\mu)\,x\right) =$$

$$= \frac{n_k}{N}\sum_{\mu=1}^{N} t^k_{j\nu}(g_\mu)(x_0, T(g_\mu)\,x) = n_k(t^k_{j\nu}, f) \tag{1.8.13}$$

для всех $j,\nu=1,\ \ldots,n_k$; $k=1,\ \ldots,m$. Но функции $t^k_{j\nu}$ образуют базис в $L^2(G)$ (см. теорему 2 п. 1.4). Поэтому из (1.8.13) следует, что

$$0=f(g)=(x_0,T(g)\,x)\quad \text{для всех}\quad x\in X,\quad g\in G. \tag{1.8.14}$$

Полагая в (1.8.14) $g=e$, $x=x_0$, получим $(x_0,x_0)=0$, что невозможно при $x_0\neq 0$. Таким образом, $Y=X$; в силу (1.8.12) это совпадает с (1.8.9). Для доказательства свойства (1.8.10) заметим, что в силу (1.8.3)

$$P^k_{j\mu}X^{k'}_{\nu}=P^k_{j\mu}P^k_{\nu\nu}X=0\quad \text{при}\quad k'\neq k\quad \text{или}\quad \mu\neq\nu.$$

Заметим теперь, что в силу (1.8.3) P^k_{ν} единичен на X^k_j. Действительно, если $x\in X^k_j$, то $x=P^k_{jj}y$, $y\in X$; $P^k_{jj}x=x$. Докажем, наконец, свойство (1.8.11): в силу (1.8.7) $x=P^k_{jj}x_1$, $x_1\in X$, и потому $P^k_{jj}(x)=(P^k_{jj})^2x_1=P^k_{jj}x_1=x$. Пусть теперь $x\in X^k_{\mu}$, так что $x=P^k_{\mu\mu}x$. Тогда в силу (1.8.3)

$$P^k_{j\mu}x=P^k_{j\mu}P^k_{\mu\mu}x=P^k_{jj}P^k_{j\mu}x\in X^k_j.$$

Поэтому

$$P^k_{j\mu}X^k_{\mu}\subset X^k_j. \tag{1.8.15}$$

Применяя к обеим частям (1.8.5) оператор $P^k_{\mu j}$ и используя снова (1.8.3) и (1.8.5), получаем

$$X^k_{\mu}=P^k_{\mu\mu}X^k_{\mu}=P^k_{\mu j}P^k_{j\mu}X^k_{\mu}\subset P^k_{\mu j}X^k_j\subset X^k_{\mu},$$

а отсюда следует, что $P^k_{\mu j}X^k_j=X^k_{\mu}$. Меняя ролями μ и j, получим, что $P^k_{j\mu}X^k_{\mu}=X^k_j$, т. е. $P^k_{j\mu}$ отображает X^k_{μ} на X^k_j. Пусть теперь $x,y\in X^k_{\mu}$. Тогда $P^k_{\mu\mu}x=x$ и в силу (1.8.4) и (1.8.3)

$$(P^k_{j\mu}x,\,P^k_{j\mu}y)=((P^k_{j\mu})^*P^k_{j\mu}x,\,y)=(P^k_{\mu j}P^k_{J\mu}x,\,y)=(P^k_{\mu\mu}x,\,y)=(x,\,y).$$

Этим доказана изометричность, а значит, и взаимная однозначность отображения $P^k_{j\mu}\colon X^k_{\mu}\to X^k_j$.

Из доказанного свойства (1.8.11) заключаем:

$$\dim X^k_{\mu}=\dim X^k_j\quad \text{для всех}\quad \mu,j=1,\ \ldots,n_k. \tag{1.8.16}$$

Мы можем теперь приступить к фактическому разложению представления T на неприводимые представления. Прежде всего положим

$$Y^k=\sum_{j=1}^{n_k}\oplus X^k_j. \tag{1.8.17}$$

Тогда из (1.8.9) заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{m}\oplus Y^k=X. \tag{1.8.18}$$

Выберем в одном из X_j^k [1]), например, в X_1^k, ортонормальный базис $e_{11}^k, e_{21}^k, \ldots, e_{r_k 1}^k$, где $r_k = \dim X_1^k = \dim X_j^k$, $j = 1, \ldots, n_k$, и положим

$$e_{j\nu}^k = P_{\nu 1}^k e_{j1}^k, \quad k = 1, \ldots, m, \quad \nu, j = 1, \ldots, r_k. \tag{1.8.19}$$

В силу (1.8.11)

$$e_{1\nu}^k, e_{2\nu}^k, \ldots, e_{r_k \nu}^k$$

— ортонормальный базис в X_ν^k, причем из (1.8.8) вытекает, что

$$e_{j\nu}^k \perp e_{j'\nu'}^{k'} \quad \text{при} \quad k' \neq k, \quad \text{или} \quad j' \neq j, \quad \text{или} \quad \nu' \neq \nu. \tag{1.8.20}$$

В частности,

$$e_{j1}^k, e_{j2}^k, \ldots, e_{jn_k}^k \tag{1.8.21}$$

— ортонормальная система; пусть Y_j^k — подпространство, натянутое на систему (1.8.21), так что эта система — базис в Y_j^k. Из (1.8.17) и (1.8.18) заключаем, что

$$Y^k = \sum_{j=1}^{r_k} \oplus Y_j^k, \tag{1.8.22}$$

$$X = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_m} \oplus Y_j^k. \tag{1.8.23}$$

III. *Каждое Y_j^k инвариантно относительно T и сужение представления T на Y_j^k неприводимо и эквивалентно T^k. Следовательно, формула* (1.8.23) *задает разложение представления T группы G на ее неприводимые подпредставления T^k, причем кратность, с которой каждое T^k содержится в T, совпадает с $\dim X_j^m$.*

Доказательство. В силу (1.8.19) и (1.8.20) при фиксированных j и k

$$\begin{aligned} T(g)\, e_{j\mu}^k &= T(g) P_{\mu 1}^k e_{j1}^k = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n_k} t_{\nu\mu}^k(g) P_{\nu 1}^k e_{j1}^k = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n_k} t_{\nu\mu}^k(g)\, e_{j\nu}^k \in Y_j^k. \end{aligned}$$

Это означает, что Y_j^k инвариантно относительно T и что матричные элементы сужения представления T на Y_j^k относительно базиса (1.8.21) в Y_j^k совпадают с $t_{jk}^k(g)$, т. е. что это сужение эквивалентно

[1]) X_j^k можно фактически построить, заметив, что X_j^k есть совокупность всевозможных линейных комбинаций $\alpha_1 P_{jj}^k f_1 + \ldots + \alpha_n P_{jj}^k f_n$, где $f_1, \ldots, f_n$ — произвольный базнс в X.

представлению T^k и потому неприводимо. Из (1.8.23) непосредственно видно, что кратность T^k в T совпадает с $r_k = \dim X_j^k$. Если какие-либо $X_j^k = (0)$, то $r_k = 0$ и соответствующие T^k не содержатся в T.

Описанное разложение (1.8.23) зависит от выбора базиса $e_{11}^k, \ldots$ $\ldots, e_{r_k 1}^k$ в X_1^k (а также от выбора матричных элементов $t_{j\nu}^k(g)$, т. е. от выбора базиса в пространстве X_k представления T^k) и потому, вообще говоря, неоднозначно (см. замечание 2 в п. 1.5).

С другой стороны, сужение T на Y^k кратно представлению T^k с кратностью r_k, поэтому формула (1.8.18) задает разложение представления T на попарно не эквивалентные представления, кратные неприводимым представлениям.

IV. *Разложение представления конечной группы G на попарно не эквивалентные представления, кратные неприводимым представлениям, однозначно.*

Доказательство. Положим

$$P^k = \sum_{j=1}^{n_k} P_{jj}^k. \tag{1.8.24}$$

В силу (1.8.5) P^k — проектор, а в силу (1.8.16) и (1.8.17)

$$Y^k = P^k X. \tag{1.8.25}$$

P^k, а значит, и Y^k, не зависит от выбора $t_{j\nu}^k(g)$. Действительно, учитывая (1.8.1) и определение характера (2.9.3) в гл. I, заключаем:

$$\begin{aligned} P^k &= \sum_{j=1}^{n_k} n_k M(\overline{t_{jj}^k(g)}\, T(g)) = \\ &= n_k M\left(\sum_{j=1}^{n_k} \overline{t_{jj}^k(g)}\, T(g)\right) = \\ &= n_k M(\overline{\chi_T(g)}\, T(g)). \end{aligned} \tag{1.8.26}$$

Последнее выражение не зависит от выбора $t_{j\nu}^k(g)$, ибо $\chi_T(g)$ от этого выбора не зависит (см. п. 2.9 гл. I).

Пусть теперь Z — инвариантное относительно T подпространство, на котором сужение S представления T неприводимо и эквивалентно T^k, и пусть $f_1, \ldots, f_{n_k}$ — ортонормальный базис в Z, в котором матричные элементы представления S совпадают с $t_{j\nu}^k(g)$, так что

$$S(g)\, f_\nu = \sum_{j=1}^{n_k} t_{J\nu}^k(g)\, f_j. \tag{1.8.27}$$

Покажем, что

$$f_\nu \in Y^k, \quad \nu = 1, \ldots, n_k; \tag{1.8.28}$$

для этого достаточно установить, что $P^k f_\nu = f_\nu$. Последнее в силу (1.8.26), (1.8.27) и соотношений ортогональности (1.4.2) следует из цепочки равенств:

$$P^k f_\nu = nM(\overline{\chi_T(g)}\, T(g))\, f_\nu = n_k M\left(\sum_{\mu=1}^{n_k} \overline{t^k_{\mu\mu}(g)}\, T(g)\, f_\nu\right) =$$
$$= n_k M\left(\sum_{j,\,\mu=1}^{n_k} \overline{t^k_{\mu\mu}(g)}\, t^k_{j\nu}(g)\, f_j\right) = n_k \sum_{j,\,\mu=1}^{n_k} (t^k_{J\nu}, t^k_{\mu\mu})\, f_j =$$
$$= n_k (t^k_{\nu\nu}, t^k_{\nu\nu})\, f_\nu = f_\nu.$$

Из (1.8.28) вытекает, что $Z \subset Y^k$.

Пусть теперь

$$X = \sum_{k=1}^{m} \oplus Z^k, \quad Z^k = \sum_{j=1}^{s_k} \oplus Z^k_j, \tag{1.8.29}$$

где Z^k_j инвариантны относительно T и сужение представления T на Z^k_j эквивалентно T^k. По только что доказанному все $Z^k_j \subset Y^k$ и потому также

$$Z^k = \sum_{j=1}^{s_k} \oplus Z^k_j \subset Y^k. \tag{1.8.30}$$

Но кратность, с которой T^k содержится в T, не зависит от способа разложения (см. I п. 1.7); поэтому $s_k = n_k$. Отсюда и из (1.8.29), (1.8.17) вытекает:

$$\dim Z^k = n_k r_k = \dim Y^k,$$

а потому включение (1.8.30) есть в действительности равенство $Z^k = Y^k$; это и доказывает предложение IV.

П р и м е р ы и у п р а ж н е н и я. 1. Разложить регулярное представление группы S_3 на неприводимые представления.

2. Доказать, что размерность неприводимого представления конечной группы является делителем порядка группы.

3. Пусть p — простое число. Доказать, что любая группа порядка p^2 коммутативна.

§ 2. Групповая алгебра конечной группы

2.1. Основные понятия теории алгебр. Множество A называется *алгеброй*, если

1) A — линейное пространство;
2) в A определено произведение ab каждой пары элементов a, $b \in A$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$ab \in A, \tag{2.1.1}$$
$$a(b + c) = ab + ac, \tag{2.1.2}$$
$$(a + b)\, c = ac + bc, \tag{2.1.3}$$
$$\alpha(ab) = a(\alpha b) = (a\alpha)\, b \tag{2.1.4}$$

для любых a, b, $c \in A$ и всех чисел α.

Алгебра A называется *вещественной*, если A — вещественное линейное пространство, и *комплексной*, если A — комплексное линейное пространство. В первом случае α в условии (2.1.4) — произвольное вещественное число, а во втором случае — произвольное комплексное число. Алгебра A называется *конечномерной*, если A — конечномерное линейное пространство.

Подмножество B алгебры A называется ее *подалгеброй*, если:

1) B — линейное подпространство линейного пространства A;
2) из b_1, $b_2 \in B$ следует, что $b_1 b_2 \in B$.

Другими словами, B должно быть алгеброй при том же определении действий, что и в алгебре A. Подалгебру алгебры A мы будем для краткости называть *подалгеброй в* A. Очевидно, *пересечение любого множества подалгебр* A *есть также подалгебра в* A. В частности, *пересечение всех подалгебр* A, *содержащих данное множество* $S \subset B$, *есть минимальная подалгебра в* A, *содержащая* S. Она называется *подалгеброй в* A, *порожденной множеством* S, и обозначается $A(S)$.

Множество I_l в алгебре A называется ее *левым идеалом*, если:

а) I_l — подпространство линейного пространства A;
б) $aI_l \subset I_l$ для каждого $a \in A$.

Аналогично определяется *правый идеал* I_r. Множество I в алгебре A называется *двусторонним идеалом*, если I — одновременно левый и правый идеал. Очевидно, множество (0) и вся алгебра A являются левым и правым, следовательно, двусторонним идеалом алгебры A; оба они называются ее *несобственными идеалами*. Идеалы алгебры A, отличные от (0) и A, называются ее *собственными идеалами*. Идеалы алгебры A мы для краткости будем называть *идеалами в* A. Очевидно (правый, левый, или двусторонний) *идеал является также подалгеброй*. Алгебра A называется *простой*, если в ней нет собственных двусторонних идеалов. Левый идеал $I_l \neq (0)$ называется *минимальным*, если он не содержит левых идеалов $\widetilde{I_l}$, отличных от (0) и I_l, т. е. если из $(0) \neq \widetilde{I}_l \subset I_l$ следует $\widetilde{I}_l = I_l$. Левый идеал $I_l \neq A$ называется *максимальным*, если он не содержится в левом идеале, отличном от A и I_l. Аналогично определяются минимальные и максимальные правые и двусторонние идеалы.

Алгебра A называется *прямой суммой* алгебр $A_1, \ldots, A_n$ и обозначается $A_1 + \ldots + A_n$, если:

а) линейное пространство A есть прямая сумма линейных пространств $A_1, \ldots, A_n$;

б) если $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, где $a_j, b_j \in A_j$, $j = 1, \ldots, n$, то $ab = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

Из этого определения ясно, что *каждая алгебра* A_j, $j = 1, \ldots, n$, *есть двусторонний идеал в* $A_1 + \ldots + A_n$.

Примеры и упражнения. 1. Совокупность всех вещественных чисел есть вещественная алгебра, если определить в ней действия сложения, умножения на вещественное число и умножение любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^1$ как обычные действия с вещественными числами; эту алгебру обозначим A_r^1, чтобы отличить ее от группы $\mathbf{R}^1$ (см. пример 1 п. 1.1, гл. I). Аналогично определяется комплексная алгебра A_c^1 всех комплексных чисел.

2. Совокупность всех систем $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_j \in \mathbf{R}^1$, с покоординатным определением сложения, умножения на вещественное число и умножением есть вещественная алгебра, которую обозначим A_r^n. Очевидно, что

$$A_r^n = A_r^1 + A_r^1 + \ldots + A_r^1,$$

где справа содержатся n слагаемых. Аналогично определяется комплексная алгебра A_c^n, причем $A_c^n = A_c^1 + \ldots + A_c^1$, где справа n слагаемых.

3. Совокупность всех вещественных матриц n-го порядка образует вещественную алгебру, если определить в ней сложение, умножение на вещественное число и умножение как соответствующие действия с матрицами. Эту алгебру обозначим $A_r(n \times n)$. Аналогично определяется алгебра $A_c(n \times n)$ всех комплексных матриц n-го порядка.

4. Пусть X — линейное (комплексное или вещественное) пространство, $\mathscr{A}(X)$ — совокупность всех (соответственно комплексно или вещественно) линейных операторов в X, всюду определенных на X. Определим в $\mathscr{A}(X)$ действия сложения, умножения на число и умножения как соответствующие действия с операторами. Очевидно, $\mathscr{A}(X)$ — алгебра, комплексная, если X комплексно, и вещественная, если X вещественно. Для фиксированного вектора $x_0 \in X$ $(x_0 \neq 0)$ совокупность I всех операторов $A \in \mathscr{A}(x)$, удовлетворяющих условию $Ax_0 = 0$, есть левый идеал в $\mathscr{A}(X)$. Доказать, что если X конечномерно, то для каждого левого идеала I_l в $\mathscr{A}(X)$ существует вектор $x_0 \in X$, для которого $Ax_0 = 0$ при всех $A \in I_l$.

5. Пусть X^3 — трехмерное вещественное векторное пространство. Определим в X^3 сложение и умножение на вещественные числа как соответствующие действия с векторами, а умножение — как векторное умножение. Тогда X^3 — алгебра.

2.2. Фактор-алгебра по двустороннему идеалу. Пусть A — алгебра, I — двусторонний идеал алгебры A. Тогда I — также линейное подпространство линейного пространства A. Пусть $\widetilde{A}$ — фактор-пространство A/I: $\widetilde{A} = A/I$, так что элементами $\widetilde{A}$ являются классы $\widetilde{a} = I + a$, где a — представитель класса a. Определим в $\widetilde{A}$ *умножение*, полагая

$$\widetilde{a}\widetilde{b} = I + ab \quad \text{для} \quad a \in \widetilde{a}, \quad b \in \widetilde{b}. \tag{2.2.1}$$

Это определение не зависит от выбора представителей $a \in \widetilde{a}$, $b \in \widetilde{b}$. Действительно, если, например, также $a_1 \in \widetilde{a}$, то $a_1 - a \in I$ и потому $a_1 b - ab = (a_1 - a)\, b \in I$, так как I —двусторонний идеал. Следовательно, $I + a_1 b = I + a_1 b - ab + ab = I + ab$. Аналогично проверяется, что если $b, b_1 \in \widetilde{b}$, то $ab_1 + I = ab + I$. Нетрудно также проверить, что для введенного таким образом произведения $\widetilde{a}\widetilde{b}$ удовлетворяются условия (2.1.1)–(2.1.4), так что $\widetilde{A}$ — алгебра. Она называется *фактор-алгеброй алгебры A по идеалу I* и также обозначается A/I.

2.3. Гомоморфизм и изоморфизм алгебр. Отображение f алгебры A в алгебру B называется *гомоморфизмом A в B*, если:

1) f — линейное отображение линейного пространства в линейное пространство B;
2) $f(a_1 a_2) = f(a_1)\, f(a_2)$ для каждых $a_1, a_2 \in A$.

Прообраз $f^{-1}(0)$ нуля 0 алгебры B называется *ядром гомоморфизма f* и обозначается $\operatorname{Ker} f$.

Если при гомоморфизме f алгебры A в алгебру B образ алгебры A совпадает с B, то f называется *гомоморфизмом* алгебры A *на* B. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Алгебры A и B называются *изоморфными*, если существует изоморфизм алгебры A на алгебру B.

I. *Если f — гомоморфизм алгебры A в алгебру B, то*:

1) *$f(A)$ — подалгебра в B*;
2) *f отображает каждую подалгебру в A на подалгебру в $f(A)$*;
3) *f отображает каждый (левый, правый, двусторонний) идеал в A на (соответственно левый, правый, двусторонний) идеал в $f(A)$*;
4) *ядро $\operatorname{Ker} f$ гомоморфизма f есть двусторонний идеал в A.*

Гомоморфизм f тогда и только тогда является изоморфизмом, когда $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Доказательство, ввиду его простоты, мы представляем читателю.

Простой пример гомоморфизма строится следующим образом.

Пусть A — алгебра, I — двусторонний идеал в A и $\widetilde{A} = A/I$. Обозначим через φ отображение, которое каждому элементу $a \in A$

ставит в соответствие класс $\widetilde{a}$, содержащий a. Из самого определения действий в $\widetilde{A}$ легко следует, что φ — гомоморфизм алгебры A на алгебру $\widetilde{A} = A/I$; он называется *каноническим* (или *естественным*) *гомоморфизмом алгебры* A *на* A/I.

II. *Если* f — *гомоморфизм алгебры* A *на алгебру* B *и* $I = \operatorname{Ker} f$, *то*:

1) B *изоморфна алгебре* A/I;
2) $f = \psi\varphi$, *где* φ — *канонический гомоморфизм алгебры* B *на алгебру* A/I, *а* ψ — *изоморфизм алгебры* A/I *на алгебру* B.

Доказательство (аналогичное доказательству предложения II п. 1.6 гл. I) мы предоставляем читателю.

2.4. Ассоциативные алгебры. Алгебра A называется *ассоциативной*, если

$$(ab)\,c = a(bc) \quad \text{для всех} \quad a,\, b,\, c \in A, \tag{2.4.1}$$

и *неассоциативной* в противном случае. Так, алгебры в примерах 1–4 п. 2.1 ассоциативны, а алгебра в примере 5 п. 2.1 неассоциативна. Все результаты пп. 2.1–2.3 справедливы независимо от того, является ли алгебра ассоциативной или нет. Однако в дальнейшем в этом параграфе мы будем предполагать, что рассматриваемые алгебры ассоциативны, и термин *алгебра*, если это не оговорено, будет обозначать ассоциативную алгебру [1)].

В силу ассоциативности однозначно определено произведение $a_1 a_2 \ldots a_n \in A$. Если, в частности, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, то это произведение называется *n-й степенью элемента* a и обозначается a^n. Из (2.4.1) легко следует, что

$$a^n a^m = a^{n+m}. \tag{2.4.2}$$

Элемент e алгебры A называется ее *единичным элементом* (или просто *единицей* алгебры A), если $ea = ae = a$ для всех $a \in A$. Алгебра A называется *алгеброй с единицей*, если в ней существует единичный элемент. Нетрудно убедиться (рассуждая, как в сноске на с. 9), что единица единственна, если она существует. Два элемента a, b алгебры A называются *перестановочными*, если $ab = ba$. Алгебра A называется *коммутативной*, если каждые ее два элемента перестановочны, так что $ab = ba$ для каждых $a, b \in A$. Совокупность всех элементов алгебры A, перестановочных с каждым элементом из A, называется *центром алгебры* A и обозначается $Z(A)$. Очевидно, $Z(A)$ — коммутативная подалгебра в A, совпадающая с A тогда и только тогда, когда сама A коммутативна.

[1)] Важный класс неассоциативных алгебр будет рассмотрен ниже в главах IX и X.

2.5. Алгебры с инволюцией. Отображение $a \to a^*$ алгебры A в A называется *инволюцией*, если [1])

1) $a^{**} = a$,
2) $(\alpha a)^* = \widetilde{\alpha} a$,
3) $(a + b)^* = a^* + b^*$,
4) $(ab)^* = b^* a^*$

для всех a, $b \in A$ и всех чисел α.

Инволюция называется *невырожденной*, если, кроме того,

5) из $a^* a = 0$ следует $a = 0$.

Из свойства 1) следует, что инволюция $a \to a^*$ есть отображение алгебры A *на* A, из свойства 2) — что $0^* = 0$. Алгебра называется *симметричной*, если в ней задана инволюция. Пусть A — симметричная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *эрмитовым*, если $a^* = a$.

I. *Каждый элемент $a \in A$ представляется, и притом единственным образом, в виде*

$$a = a_1 + i a_2, \tag{2.5.1}$$

где a_1, a_2 — эрмитовы элементы из A.

Действительно, из (2.5.1) и свойств 2) и 3) заключаем, что $a^* = a_1 - i a_2$, и потому

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*). \tag{2.5.2}$$

Поэтому, если (2.5.1) имеет место, то a_1 и a_2 определяются единственным образом; обратно, при каждом $a \in A$ формулы (4.5.2) определяют эрмитовы элементы a_1, $a_2 \in A$, для которых выполняется (2.5.1).

II. *Для каждого $a \in A$ элемент $a^* a$ эрмитов.*

Действительно, в силу 1) и 5) $(a^* a)^* = a^* a^{**} = a^* a$.

III. *Если симметричная алгебра A содержит единицу e, то e — эрмитов элемент.*

Утверждение следует из II и соотношения $e^* = e^* e$. В предложениях IV и V предполагается, что A — *симметричная алгебра с невырожденной инволюцией.*

IV. *Если a — эрмитов элемент из A и $a^2 = 0$, то $a = 0$.*

Действительно, $a^* a - a^2 = 0$ и остается применить свойство 5) инволюции.

V. *Если I_l — левый идеал в A и*

$$I_l I_l = (0), \tag{2.5.3}$$

то $I_l = (0)$.

Пусть $a \in I_l$. Тогда также $a^* a \in I_l$ и из (4.5.3) заключаем, что $(a^* a)^2 = 0$. Но тогда $a^* a = 0$, ибо $a^* a$ — эрмитов (см. II и IV);

[1]) Если A — вещественная алгебра, то α в свойстве 2) — вещественное число и потому $\widetilde{\alpha} = \alpha$.

следовательно, $a = 0$ в силу свойства 5) инволюции. Итак, каждый элемент a из I_l есть 0, т. е. $I_l = (0)$.

2.6. Представления алгебр. Пусть A — алгебра, X — комплексное линейное пространство $\neq (0)$. *Представлением алгебры A в пространстве X* называется отображение T, которое каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие линейный оператор $T(a)$ в пространстве X так, что:

1) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$,
2) $T(a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2)$,
3) $T(a_1 a_2) = T(a_1)\,T(a_2)$,
4) $T(e) = 1$, если A — алгебра с единицей e

для любых a, a_1, $a_2 \in A$ и любого числа α.

Пространство X называется *пространством представления*, а операторы $T(a)$ — *операторами представления*. Свойства 1)–4) означают, что отображение T: $a \to T(a)$ есть гомоморфизм алгебры A в алгебру $A(X)$ (см. пример 4 п. 2.1), удовлетворяющий условию 4), если A — алгебра с единицей. Все основные понятия и предложения теории представлений групп, изложенные в пп. 2.1, 2.2, 2.4–2.6 гл. I, в частности, понятия неприводимости и эквивалентности; леммы 1, 2 п. 2.2 гл. I и следствие из них естественным образом переносятся на представления алгебр; подробности мы предоставляем читателю. Важный пример представления T алгебры A получаем, если в качестве X взять линейное пространство A и определить $T(a)$ по формуле

$$T(a)\,x = ax \quad \text{для всех} \quad a, x \in A, \tag{2.6.1}$$

так что $T(a)$ есть просто оператор умножения слева на a. Из свойств (2.1.1)–(2.1.4) алгебры A и свойства ассоциативности непосредственно следует, что условия 1)–4) будут выполнены, поэтому T является представлением. Это представление называется *левым регулярным представлением алгебры A*.

I. *Подпространство $M \subset A$ тогда и только тогда инвариантно относительно левого регулярного представления алгебры A, когда M — левый идеал в A.*

Утверждение непосредственно следует из определений левого идеала (см. п. 2.1) и левого регулярного представления (см. (2.6.1)).

II. *Сужение левого регулярного представления алгебры A на ее левом идеале I_l неприводимо тогда и только тогда, когда I_l — минимальный левый идеал в A.*

Утверждение непосредственно следует из I и определений минимального левого идеала и неприводимого представления.

III. *Левое регулярное представление T конечномерной алгебры A вполне приводимо тогда и только тогда, когда A есть прямая сумма*

$$A = I_{l_1} + \ldots + I_{l_k} \tag{2.6.2}$$

(*как линейное пространство*) *своих минимальных левых идеалов и разложение представления* T *на неприводимые представления получается путем этого разложения* (2.6.2) *пространства* A.

Утверждение непосредственно следует из II и определения прямой суммы представлений.

В силу III задача разложения левого регулярного представления конечномерной алгебры A на неприводимые представления эквивалентна задаче разложения алгебры A в прямую сумму ее минимальных идеалов.

Пусть теперь A — симметричная алгебра, X и Y — линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно билинейной формы (x, y), $x \in X$, $y \in Y$. Представления T и S в пространствах X и Y называются *взаимно сопряженными* относительно формы (x, y), если

$$(T(a)\,x,\, y) = (x,\, S(a^*)\,y) \quad \text{для всех} \quad a \in A, \quad x \in X, \quad y \in Y. \tag{2.6.3}$$

Рассуждая, как в п. 2.3, заключаем:

I. *Если* A — *симметричная алгебра*, X *и* Y — *конечномерные пространства*, *находящиеся в двойственности относительно формы* (x, y), *то для каждого представления* T *алгебры* A *в* X *существует*, *и притом только одно*, *представление* S *алгебры* A *в* Y, *сопряженное к* T *относительно* (x, y) *и при надлежащем выборе базисов* $e_1, \ldots, e_n$ *и* $f_1, \ldots, f_n$ $(n = \dim X = \dim Y)$ *в* X *и* Y *матричные элементы* T *и* S *относительно этих базисов связаны соотношением*

$$t_{jk}(a) = \overline{(t_{kj}(a^*)}. \tag{2.6.4}$$

II. *Если конечномерные представления* T *и* S *алгебры* A *с инволюцией взаимно сопряжены*, *то* T *неприводимо тогда и только тогда*, *когда* S *неприводимо*.

Пусть снова A — симметричная алгебра, X — предгильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), $x, y \in X$. Представление T алгебры A в пространстве X называется *симметричным*, если

$$(T(a)\,x,\, y) = (x,\, T(a^*)\,y) \quad \text{для всех} \quad a \in A, \quad x, y \in X. \tag{2.6.5}$$

Если X — евклидово (т. е. конечномерное предгильбертово) пространство, то (2.6.5) означает, что

$$T(a^*) = (T(a))^* \quad \text{для всех} \quad a \in A. \tag{2.6.6}$$

Соотношение (2.6.4) в свою очередь означает, что для матрицы $t(a)$ представления T относительно ортонормального базиса в X

$$t(a^*) = (t(a))^*, \tag{2.6.7}$$

т. е.

$$t_{jk}(a^*) = \overline{t_{kj}(a)}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, \dim X. \tag{2.6.8}$$

III. *Если T — симметричное представление симметричной алгебры A в евклидовом пространстве X и M — подпространство в X, инвариантное относительно T, то $M^{\perp}$ также инвариантно относительно T.*

Доказательство. Пусть $x \in M$, $y \in M^{\perp}$. Тогда также $T(a^*)\,x \in \in M$, ибо M инвариантно относительно T. Поэтому $T(a^*)\,x \perp y$, т. е. (см. (2.6.5))

$$0 = (T(a^*)\,x, y) = (x, T(a)\,y). \tag{2.6.9}$$

Но (2.6.9) означает, что $T(a) \perp x$ для всех $x \in M$, т. е. $T(a)\,y \in M^{\perp}$.

IV. *Всякое симметричное представление симметричной алгебры в евклидовом пространстве вполне приводимо.*

Доказательство аналогично доказательству предложения IX п. 2.8 гл. I, причем вместо II п. 2.8 гл. I следует использовать предыдущее предложение III.

2.7. Определение и простейшие свойства групповой алгебры конечной группы. Здесь и всюду в дальнейшем в этом параграфе мы без оговорок предполагаем, что G — конечная группа. Пусть G состоит из m различных элементов $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Рассмотрим совокупность A_G всех формальных сумм $a = \sum\limits_{k=1}^{m} a(g_k)\,g_k$, или, кратко, $a = \sum\limits_{g} a(g)\,g$, где $a(g_n)$ — произвольные комплексные числа, и определим в A_G сложение, умножение на число и умножение по формулам

$$\alpha a = \sum_{\Gamma} a(g)\,g, \tag{2.7.1}$$

$$a + b = \sum_{g} [a(g) + b(g)]\,g, \tag{2.7.2}$$

$$ab = \sum_{g', g''} a(g')\,b(g'')\,g'g'' \tag{2.7.3}$$

при $a = \sum\limits_{g} a(g)\,g$, $b = \sum\limits_{g} b(g)\,g$. При этом считается $a = b$ лишь при $a(g) = b(g)$ для всех $g \in G$; в частности, $a = 0$ лишь при $a(g) = 0$.

Нетрудно убедиться, что тогда выполняются условия (2.1.1)–(2.1.4), так что при определении действий по формулам (2.7.1)–(2.7.2) A_G — действительно алгебра; она называется *групповой алгеброй* группы G. Мы условимся не различать элемент $g_0 \in G$ и сумму $\sum\limits_{g} a(g)\,g$, в которой $a(g) = 0$ при $g \neq g_0$ и $a(g_0) = 1$. Тогда элементы группы G станут также элементами алгебры A_G.

I. *Произведение g_1 и $g_2 \in G$ как элементов группы G совпадает с их произведением как элементов алгебры A_G.*

Утверждение непосредственно следует из (2.7.1в).

II. *Групповая алгебра ассоциативна.*

Утверждение непосредственно следует из ассоциативности умножения в G (см. б) п. 1.1 гл. I), и мы предоставляем читателю подробное рассуждение.

III. *Групповая алгебра содержит единицу.*

Именно, единица в A_G совпадает с единицей e в G.

Очевидно также, что групповая алгебра конечномерна и $\dim A_G = |G|$. Определим теперь в групповой алгебре A_G инволюцию, полагая

$$\left(\sum_g a(g)\, g\right)^* = \sum \overline{a(g)}\, g^{-1}. \tag{2.7.2}$$

Нетрудно также убедиться, что при этом выполняются условия 1)–4) п. 2.5, накладываемые на инволюцию.

IV. *При определении инволюции по формуле* (2.7.2) A_G — *симметричная алгебра с невырожденной инволюцией.*

Доказательство. Из (2.7.1)–(2.7.2) следует, что

$$a^*a = \sum_{g',\,g''} \overline{a}(g')\, a(g'')\, g'^{-1}g''$$

и коэффициент $(a^*a)(e)$ при $g = e$ в этой сумме получается при $g' = g''$, так что

$$(a^*a)(e) = \sum_{g'} \overline{a}(g')\, a(g') = \sum_{g'} |a(g')|^2.$$

Если $a^*a = 0$, то $(a^*a)(g) = 0$ для всех g, в частности, $(a^*a)(e) = 0$, т. е. $\sum\limits_{g'}(a(g'))^2 = 0$. Отсюда $a(g') = 0$ для всех $g' \in G$, т. е. $a = 0$.

V. *Для каждого $a \in A_G$ элемент*

$$a' = \sum_g g^{-1}ag$$

принадлежит центру $Z(A_G)$ алгебры A_G.

Доказательство. Для каждого $g_0 \in G$

$$g_0^{-1}a'g_0 = \sum_g g_0^{-1}g^{-1}agg_0 = \sum_g (gg_0)^{-1}a(gg_0) = \sum_g g^{-1}ag = a'$$

и потому

$$a'g' = g'a. \tag{2.7.3}$$

Умножая обе части (2.7.3) на $b(g')$ и суммируя по g', получаем, что $a'b = ba'$ для каждого $b \in A_G$, следовательно, $a' \in Z(A_G)$.

Очевидно, задание суммы $\sum\limits_g a(g)\,g$ равносильно заданию функции $a=\{a(g)\}$ на группе G, где $a(g)$ — коэффициент при g в сумме $\sum\limits_g a(g)\,g$. Следовательно, алгебру A_G можно также рассматривать как совокупность всех функций $a=\{a(g)\}$ на G. Из (2.7.1) и (2.7.2) непосредственно следует, что тогда

$$\alpha a = \{\alpha a(g)\}, \tag{2.7.4}$$

$$a+b = \{a(g)+b(g)\}. \tag{2.7.5}$$

Чтобы определить теперь закон умножения в функциях на группе, достаточно найти коэффициент при g в формуле (2.7.3). Для этого, положив в (2.7.3) $g=g'g''$ (следовательно, $g''=g'^{-1}g$), перепишем эту формулу в виде

$$ab=\sum_g \sum_{g'} a(g')\,b(g'^{-1}g)\,g.$$

Отсюда следует, что

$$ab=\Big\{\sum_{g'} a(g')\,b(g'^{-1}g)\Big\}. \tag{2.7.6}$$

Заменив далее в (4.7.3) g^{-1} на g, получим, что

$$a^*=\{\overline{a(g^{-1})}\}. \tag{2.7.7}$$

Формулы (2.7.4)–(2.7.6) можно также записать в виде

$$(\alpha a)(g)=\alpha a(g), \tag{2.7.4$'$}$$

$$(a+b)(g)=a(g)+b(g), \tag{2.7.5$'$}$$

$$(ab)(g)=\sum_{g'} a(g')\,b(g'^{-1}g), \tag{2.7.6$'$}$$

$$a^*(g)=\overline{a(g^{-1})}. \tag{2.7.7$'$}$$

Функция $(ab)(g)$, определенная формулой (2.7.6$'$), называется *сверткой* функций a и b.

Итак, групповую алгебру A_G конечной группы G можно также рассматривать как совокупность всех комплексных функций $a(g)$ на G, в которой операции сложения, умножения на число, умножения и инволюции задаются формулами (2.7.4$'$)–(2.7.7$'$). В дальнейшем нам понадобятся оба способа описания алгебры A_G.

VI. *При умножении элемента $a=\sum\limits_g a(g)\,g$ слева или справа на g_0 функция $a(g)$ переходит соответственно в $a(g_0^{-1}g)$, $a(gg_0^{-1})$.*

Доказательство. Из равенства

$$g_0 a = \sum_g a(g)\, g_0 g = \sum_g a(g_0^{-1} g)\, g$$

следует утверждение об умножении слева; аналогично доказывается утверждение об умножении справа.

Элементы $a = \{a(g)\}$ алгебры A_G можно также рассматривать как элементы пространства $L^2(G)$; напомним, что скалярным произведением двух элементов $a, b \in L^2(G)$ является

$$(a, b) = \frac{1}{n} \sum_g a(g)\, \overline{b(g)}. \tag{2.7.8}$$

Выражение для (a, b) можно записать в другом виде, если ввести линейный функционал $f_0(a)$ на A_G по формуле

$$f_0(a) = a(e) \quad \text{при} \quad a = \sum_g a(g)\, g;$$

тогда

$$(a, b) = \frac{1}{n}\, f_0(b^* a). \tag{2.7.9}$$

Действительно, в силу (2.7.1б) и (2.7.2)

$$b^* a = \sum_{g', g''} \overline{b(g')}\, a(g'')\, g'^{-1} g'', \tag{2.7.10}$$

а $f_0(b^* a) = (b^* a)(e)$ есть сумма тех слагаемых в (2.7.10), для которых $g' = g''$; следовательно,

$$f_0(b^* a) = \sum_{g'} \overline{b(g')}\, a(g') = n(a, b).$$

Для каждого множества $E \subset A_G$ обозначим через $E^\perp$ ортогональное дополнение множества E в $L^2(G) = A_G$. Если E — подпространство в A_G, то, очевидно,

$$A_G = E \oplus E^\perp. \tag{2.7.11}$$

VII. *Если I_l — левый идеал в A_G, то $I_l^\perp$ — также левый идеал в A_G и*

$$A_G = I_l \oplus I_l^\perp. \tag{2.7.12}$$

Доказательство. Пусть $a \in I_l$, $b \in I_l^\perp$ и $c \in A_G$. Тогда также $c^* a \in I_l$ и потому

$$(a, cb) = (c^* a, b) = 0.$$

Следовательно, также $cb \in I_l^\perp$, а это означает, что $I_l^\perp$ — левый идеал. Соотношение (2.7.12) непосредственно следует из (2.7.11).

VIII. *Каждый левый идеал I_l в A_G можно представить в виде*

$$I_l = A_G \varepsilon, \tag{2.7.13}$$

где ε — некоторый элемент из I_l. Элемент ε можно выбрать так, что

$$\varepsilon^2 = \varepsilon. \tag{2.7.14}$$

В этом случае

$$I_l = \{a\colon a \in A_G,\, a\varepsilon = \varepsilon\}. \tag{2.7.15}$$

Доказательство. Применим разложение (2.7.12) к единице e. Мы получим

$$e = e' + e'', \quad e' \in I_l, \quad e'' \in I_l^{\perp}. \tag{2.7.16}$$

Умножая обе части (2.7.15) слева и справа на e', получим

$$e' = e'^2 + e'e'', \quad e' = e'^2 + e''e'.$$

Отсюда $e'e'' = e''e'$, и потому

$$e'e'' = e''e' \in I_l \cap I_l' = (0), \tag{2.7.17}$$

так что $e'e'' = e''e' = 0$ и $e' = e'^2$.

Поскольку $e' \in I_l$, $e'' \in I_l^{\perp}$, то

$$A_G e' \in I_l, \quad A_G e'' \in I_l^{\perp}. \tag{2.7.18}$$

С другой стороны, из (2.7.16) заключаем, что

$$A_G = A_G e = A_G e' \oplus A_G e'',$$

и сравнение с (2.7.12) и (2.7.18) дает

$$I_l = A_G e', \quad I_l^{\perp} = A_G e''. \tag{2.7.19}$$

Соотношения (2.7.13) и (2.7.14) получаются поэтому при $\varepsilon = e'$. Пусть выполняются (2.7.13) и (2.7.14) и пусть $a \in I_l$. Тогда $a = b\varepsilon$ при некотором $b \in A_G$ и потому $a\varepsilon = b\varepsilon^2 = b\varepsilon = a$. Обратно, если $a\varepsilon = a$, то, очевидно, $a = a\varepsilon \in A_G\varepsilon = I_l$.

Замечание. Нетрудно также показать, что при $\varepsilon = e'$

$$I_l^{\perp} = \{a\colon a \in A_g,\, a\varepsilon = 0\}.$$

Элемент $\varepsilon \in A_G$ называется *идемпотентом*, если $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Идемпотент ε называется *примитивным*, если его нельзя представить в виде суммы двух ненулевых идемпотентов.

Упражнение 1. Пусть ε — идемпотент. Доказать, что $I_l = A_G\varepsilon$ минимален в A_G тогда и только тогда, когда ε примитивен.

2.8. Представления групповой алгебры и их связь с представлениями группы. Пусть G — конечная группа, A_G — ее групповая алгебра и пусть задано представление T алгебры A_G в пространстве X. Поскольку $G \subset A_G$, то можно рассмотреть сужение отображения T на G. Применяя соотношение $T(a_1a_2) = T(a_1)\,T(a_2)$ (см. 3) п. 2.6) к случаю $a_1 = g_1$, $a_2 = g_2$ и учитывая II п. 2.7 и равенство $T(e) = 1$ (см. 4) п. 2.6), заключаем, что это сужение есть представление $g \to T(g)$

группы G. Обратно, пусть задано представление $g \to T(g)$ группы G в пространстве X. Каждому эдементу $a = \sum\limits_g a(g)\, g \in A_G$ поставим в соответствие оператор

$$T(a) = \sum_G a(g)\, T(g). \tag{2.8.1}$$

Докажем, что полученное соответствие $T\colon a \to T(a)$ есть представление алгебры A_G. Свойства 1), 2) и 4) представления алгебры (см. п. 2.6) проверяются тривиальным образом. Проверим, что также $T(a_1 a_2) = T(a_1)\, T(a_2)$ (см. 3) п. 2.6). Пусть $a_1 = \sum\limits_g a_1(g)\, g$, $a_2 = \sum\limits_g a_2(g)\, g$. По определению умножения в A_G (см. (2.7.1в))

$$a_1 a_2 = \sum_{g',\, g''} a_1(g')\, a_2(g'')\, g' g'';$$

следовательно, в силу (2.8.1)

$$T(a_1 a_2) = \sum_{g',\, g''} a_1(g')\, a_2(g'')\, T(g' g'') = \sum_{g',\, g''} a_1(g')\, a_2(g'')\, T(g')\, T(g'') = \\ = \sum_{g'} a_1(g')\, T(g') \sum_{g''} a_2(g'')\, T(g'') = T(a_1)\, T(a_2).$$

Мы доказали, что имеет место

Теорема 1. *Каждому представлению T: $a \to T(a)$ групповой алгебры A_G группы G отвечает представление $g \to T(g)$ этой группы, которое получается сужением на G представления $a \to T(a)$. Обратно, каждому представлению $g \to T(g)$ группы G отвечает по формуле* (2.8.1) *представление $a \to T(a)$ ее групповой алгебры A_G. Представления группы G и ее групповой алгебры A_G называются соответствующими друг другу, если они связаны соотношением* (2.8.1).

Теорема 2. *Представление $g \to T(g)$ группы G в евклидовом пространстве X унитарно тогда и только тогда, когда соответствующее представление $a \to T(a)$ ее групповой алгебры A_G симметрично.*

Доказательство. Пусть представление $g \to T(g)$ унитарно, так что

$$(T(g))^* = T(g^{-1}). \tag{2.8.2}$$

Тогда при $a = \sum\limits_g a(g)\, g$

$$(T(a))^* = \left(\sum_g a(g)\, T(g)\right)^* = \sum_g \overline{a(g)}\, (T(g))^* = \sum_g \overline{a(g)}\, T(g^{-1}),$$

а с другой стороны, $a^* = \sum_g \overline{a(g)}\, g^{-1}$ (см. (2.7.3)) и потому

$$T(a^*) = \sum_g \overline{a(g)}\, T(g^{-1}).$$

Следовательно,

$$(T(a))^* = T(a^*), \tag{2.8.3}$$

т. е. представление $a \to T(a)$ симметрично. Обратно, если представление $a \to T(a)$ симметрично, то, применяя соотношение (2.8.3) к случаю $a = g$, заключаем, что соответствующее представление $g \to T(g)$ унитарно.

Используя соотношение (2.8.1), читатель легко убедится в справедливости следующих предложений:

I. *Два представления $g \to T(g)$, $g \to S(g)$ группы G эквивалентны* (*в частности*, *унитарно эквивалентны*) *тогда и только тогда*, *когда соответствующие представления ее групповой алгебры A_G эквивалентны* (*соответственно унитарно эквивалентны*).

II. *Представление $g \to T(g)$ группы G неприводимо тогда и только тогда*, *когда неприводимо соответствующее представление ее групповой алгебры A_G.*

III. *Соотношение $T = T^{(1)} + \ldots + T^{(k)}$ для представлений группы равносильно тому же соотношению для соответствующих представлений ее групповой алгебры.*

Из этих предложений следует, что задачи описания всех (с точностью до эквивалентности) неприводимых представлений и разложения заданного представления на неприводимые представления для группы равносильны соответствующим задачам для ее групповой алгебры.

Примéним предыдущие результаты к левому регулярному представлению группы G (см. п. 1.3). Напомним, что это представление $h \to \widetilde{T}(h)$, $h \in G$, задается в пространстве $L^2(G)$ по формуле

$$\widetilde{T}(h)\, f(g) = f(h^{-1}g) \quad \text{для} \quad f \in L^2(G). \tag{2.8.4}$$

Найдем представление групповой алгебры A_G, соответствующее представлению $h \to \widetilde{T}(h)$. Прежде всего заметим, что $L^2(G)$ и A_G состоят из одних и тех же (именно, из всех) функций на группе G. Поэтому можно также считать, что $f \in A_G$. Применяя теперь формулу (2.8.1) и учитывая формулу (2.7.6), заключаем, что

$$\widetilde{T}(a)\, f(g) = \sum_h a(h)\, \widetilde{T}(h)\, f(g) = \sum_h a(h)\, f(h^{-1}g) = (af)(g).$$

Другими словами (см. п. 2.6):

IV. *Левому регулярному представлению группы G отвечает левое регулярное представление ее групповой алгебры.*

Из предложений III п. 2.6 и I–IV заключаем:

V. *Минимальный левый идеал I_l алгебры A_G есть инвариантное подпространство левого регулярного представления группы G и сужение на I_l этого представления неприводимо.*

VI. *Разложению*

$$A_G = I_l^1 \dotplus \ldots \dotplus I_l^m \tag{2.8.5}$$

групповой алгебры A_G в прямую сумму ее минимальных левых идеалов отвечает разложение

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}^1 \dotplus \ldots \dotplus \widetilde{T}^m \tag{2.8.6}$$

левого регулярного представления группы G в прямую сумму ее неприводимых представлений $\widetilde{T}^1, \ldots, \widetilde{T}^m$, причем $\widetilde{T}^1, \ldots, \widetilde{T}^m$ — сужения представления T на идеалах $I_l^1, \ldots, I_l^m$.

Согласно теореме 1 п. 1.5 в разложении (2.8.6) содержатся все (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления конечной группы G, поэтому для нахождения ее полной системы неприводимых представлений достаточно найти разложение алгебры A_G в прямую сумму ее минимальных левых идеалов.

В заключение выведем формулу для следа неприводимого представления, которая будет использована в дальнейшем. Напомним (см. VIII п. 2.7), что каждый левый идеал I_l в A_G имеет вид $I_l = A_G\varepsilon$, где $\varepsilon \in I_l$.

VII. *Пусть неприводимое представление T группы G есть сужение ее левого регулярного представления $\widetilde{T}$ на минимальном левом идеале*

$$I_l = A_G\varepsilon, \tag{2.8.7}$$

где ε — идемпотент [1]; *тогда*

$$\chi_T(g) = \sum_{g'} \varepsilon(g'^{-1}g^{-1}g'). \tag{2.8.8}$$

Доказательство. Определим оператор P в A_G, полагая $P_x = x\varepsilon$ для $x \in A_G$. Так как ε — идемпотент, то из (2.8.7) заключаем, что P — проектор в A_G на I_l. Наряду с оператором $T(a)$ в I_l рассмотрим теперь оператор $T'(a)$ во всей алгебре A_G, определенный формулой

$$T'(a)\,x = \widetilde{T}Px = \widetilde{T}(a)\,x\varepsilon = ax\varepsilon.$$

Тогда I_l инвариантно относительно $T'(a)$ и $T(a)$ — сужение оператора $T'(a)$ на I_l. Поэтому (см. III п. 2.9 гл. I)

$$\mathrm{tr}(T(a)) = \mathrm{tr}(T'(a)). \tag{2.8.9}$$

[1] См. замечание после предложения VIII п. 2.7.

При реализации алгебры A_G в виде функций $x(g) = \{x(g_1),\ \ldots,\ x(g_n)\}$ на $G = \{g_1,\ \ldots,\ g_n\}$

$$T'(a)\{x(g)\} = \sum_{g'g''} a(g')\, x(g'^{-1}g'')\, \varepsilon(g''^{-1}g) = \\ = \sum_{g',\, g''} a(g')\, x(g'')\, \varepsilon(g''^{-1}g'^{-1}g),$$

следовательно, $T'(a)$ есть преобразование n-мерного пространства A_G переменных $\{x(g_1''),\ \ldots,\ x(g_n'')\}$ с матрицей

$$t(g,\, g'') = \sum_{g'} a(g')\, \varepsilon(g''^{-1}g'^{-1}g).$$

Поэтому

$$\operatorname{tr}(T'(a)) = \sum_{g} t(g,\, g) = \sum_{g,\, g'} a(g')\, \varepsilon(g^{-1}g'^{-1}g) = \\ = \sum_{g,\, g'} a(g)\, \varepsilon(g'^{-1}g^{-1}g')$$

и сравнение с (2.8.9) дает

$$\sum_{g,\, g'} a(g)\, e(g'^{-1}g^{-1}g) = \operatorname{tr}(T(a)) = \sum_{g} a(g)\, \operatorname{tr}(T(g)) = \sum_{g} a(g)\, \chi_T(g);$$

отсюда следует (2.8.8).

2.9. Дальнейшие свойства групповой алгебры.

Теорема 1. *Пусть $T^1,\ \ldots,\ T^m$ — полная система неприводимых представлений конечной группы G; $n_1,\ \ldots,\ n_m$ — их размерности; $t^1(a) \ldots,\ t^m(a)$ — их матрицы в ортонормальных базисах; тогда отображение f: $a \to \{t^1(a),\ \ldots,\ t^m(a)\}$ есть симметричный изоморфизм групповой алгебры на прямую сумму m полных матричных алгебр размерностей $n_1,\ \ldots,\ n_m$.*

Доказательство. Пусть B — прямая сумма полных матричных алгебр $A(n_1 \times n_1),\ \ldots,\ A(n_m \times n_m)$ в пространствах размерностей n_1, $n_2,\ \ldots,\ n_m$. Из определения представления алгебры следует, что отображение f: $a \to \{t^1(a),\ \ldots,\ t^m(a)\}$ есть гомоморфизм алгебры A_G в алгебру B; f симметричен, ибо $T^1,\ \ldots,\ T^m$ унитарны (теорема 2 п. 2.8). Докажем, что f отображает A_G на B. Из формулы $T(a) = \sum\limits_{g} a(g)\, T(g)$ при $a = \sum\limits_{g} a(g)\, g$ (см. (2.8.1)) заключаем, что

$$t^k(a) = \sum_{g} a(g)\, t^k(g), \quad k = 1,\, 2,\ \ldots,\, m,$$

и потому
$$t^k_{j\nu}(a) = \sum_g a(g)\, t^k_{j\nu}(g), \quad j, \nu = 1, \ldots, n_k. \tag{2.9.1}$$

Положим в (2.9.1) $a(g) = a^{k'}_{j'\nu'}(g) = \dfrac{n_{k'}}{n}\,\overline{t^{k'}_{j'\nu'}(g)}$; в силу соотношений ортогональности (см. (1.4.1), (1.4.2)), мы получим, что для $a = a^{k'}_{j'\nu'}$
$$t^k_{j\nu}(a^{k'}_{j'\nu'} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = k', \quad j = j', \quad \nu = \nu', \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Другими словами, в соответствующей системе
$$\{t^1(a^{k'}_{j'\nu'}), \ldots, t^m(a^{k'}_{j'\nu'})\} \tag{2.9.2}$$
лишь $t^{k'}(a^{k'}_{j'\nu'}) \neq 0$, причем в матрице $t^{k'}(a^{k'}_{j'\nu'})$ на пересечении j'-й строки и ν'-го столбца стоит единица, а на всех прочих местах нули. Следовательно, всевозможные системы (2.9.2) образуют базис в B и потому f отображает A_G на B.

Найдем $\operatorname{Ker} f$. Если $a \in \operatorname{Ker} f$, то $t^k(a) = 0$ для всех k, т. е.
$$t^k_{j\nu}(a) = \sum_g a(g)\, t^k_{j\nu}(g) = 0 \tag{2.9.3}$$
для всех k, j, ν. Но функции $t^k_{j\nu}(g)$, $j, \nu = 1, \ldots, n_k$, $k = 1, \ldots, m$, образуют полную систему в $L^2(G)$ $(= A_G)$ (теорема 2.1.4) и потому из (2.9.3) следует, что $a(g) = 0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, f — изоморфизм и теорема полностью доказана.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие 1. *Групповая алгебра конечной группы симметрично изоморфна прямой сумме полных матричных алгебр.*

Теорема 2. *Центр $Z(A_G)$ групповой алгебры A_G конечной группы G состоит из всех функций $a(g)$ на G, постоянных на классах сопряженных элементов, и при изоморфизме f: $a \to \{t^1(a), \ldots, t^m(a)\}$ каждый элемент a из $Z(A_G)$ переходит в $\left\{\dfrac{1}{n_1}\chi_1(a)\, 1_{n_1}, \ldots, \dfrac{1}{n_m}\chi_m(a)\, 1_{n_m}\right\}$, где $\chi_1, \ldots, \chi_m$ — характеры представлений $T^1, \ldots, T^m$ и $1_{n_1}, \ldots, 1_{n_m}$ — единичные матрицы размерностей $n_1, \ldots, n_m$.*

Доказательство. Если $a = \sum\limits_g a(g)\, g \in Z(A_G)$, то $g'a = ag'$, т. е.
$$\sum_g a(g)\, g'g = \sum_g a(g)\, gg' \quad \text{для всех} \quad g' \in G. \tag{2.9.4}$$

Сравнивая коэффициенты при g_1 в обеих частях (2.9.4), заключаем, что
$$a(g'^{-1}g_1) = a(g_1 g'^{-1}) \quad \text{для всех} \quad g_1, g' \in G. \tag{2.9.5}$$

Положив здесь $g_1 = gg'$, получаем

$$a(g'^{-1}gg') = a(g) \quad \text{для всех} \quad g,\, g' \in G, \tag{2.9.6}$$

т. е. $a(g)$ постоянны на классах сопряженных элементов. Обратно, если выполняется (2.9.6), то выполняется также (2.9.5), а значит, и (2.9.4). Умножая обе части (2.9.4) на $b(g')$ и суммируя по g', заключаем, что

$$\sum_{g,\,g'} b(g')\,a(g)\,g'g = \sum_{g,\,g'} a(g)\,b(g')\,gg',$$

т. е. $ba = ab$ для всех $b \in A_G$. Это означает, что $a \in Z(A_G)$, и первая часть теоремы доказана.

При изоморфизме f центр алгебры A_G отображается на центр алгебры B. Согласно теореме 1 последний состоит из всевозможных $\{t^1(a),\, \ldots,\, t^m(a)\}$, где $t^k(a)$ принадлежит центру алгебры $A(n_k \times n_k)$, и потому $t^k(a) = \lambda_k(a)\,1$. Беря след в обеих частях последнего равенства, заключаем, что $\chi_k(a) = n_k\lambda_k(a)$, так что $\lambda_k(a) = \dfrac{1}{n_k}\,\chi_k(a)$ и $t^k(a) = \dfrac{1}{n_k}\,\chi_k(a)\,1_{n_k}$.

§ 3. Представления симметрической группы

3.1. Постановка задачи. Напомним, что симметрической группой S_n называется группа всех подстановок n элементов $1,\ 2,\ \ldots,\ n$; ее порядок равен $n!$ (см. пример 5 п. 1.7 гл. I). Каждая подстановка $g \in S_n$ есть произведение циклов без общих элементов; пусть $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h$ — длины этих циклов, так что

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = n. \tag{3.1.1}$$

Поскольку эти циклы перестановочны, мы их расположим в произведении так, что

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant a_h. \tag{3.1.2}$$

Две подстановки $g,\, g' \in S_n$ сопряжены тогда и только тогда, когда для них число циклов, а также длины соответствующих циклов совпадают, так что $h' = h$, $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\ldots$, $\alpha'_h = \alpha_h$ (см. пример 5 п. 1.7 гл. I). Поэтому класс сопряженных элементов в группе S_n однозначно задается набором положительных целых чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_h$, удовлетворяющих условиям (3.1.1) и (3.1.2), и имеется в точности столько классов сопряженных элементов, сколько имеется таких наборов чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_h$, т. е. способов разбиения числа n на сумму целых положительных слагаемых $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_h$. С другой стороны, полная система неприводимых представлений группы S_n содержит столько представлений, сколько в S_n есть классов сопряженных элементов (теорема 3 п. 1.7), следовательно, сколько есть наборов целых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$, удовлетворяющих условиям (3.1.1), (3.1.2). Поэтому для получения полной системы неприводимых представлений группы S_n достаточно для каждого такого набора построить неприводимое представление этой группы так, чтобы представления, отвечающие разным наборам, были не эквивалентны.

Целью данного параграфа является фактическое проведение этого построения.

3.2. Схемы и диаграммы Юнга. Каждому набору $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ целых положительных чисел, удовлетворяющих условиям (3.1.1), (3.1.2), поставим в соответствие схему (рис. 1)

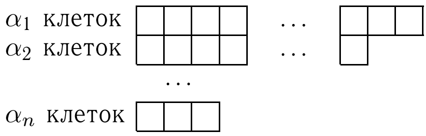


Рис. 1

из h строк, в которой k-я строка состоит из α_k клеток ($k = 1, \ldots, h$), а j-я клетка $k{+}1$-й строки находится под j-й клеткой k-й строки. Такая схема называется *схемой Юнга*, отвечающей набору α, и также обозначается α.

Например, в случае $n = 3$ возможны следующие схемы Юнга (рис. 2).

Общее число клеток в схеме Юнга равно $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = n$. Поэтому можно разместить по этим клеткам числа $1, 2, \ldots, n$.

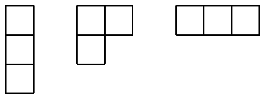


Рис. 2

Размещение чисел $1, 2, \ldots, n$ по клеткам схемы α называется *диаграммой Юнга*, отвечающей схеме α, и обозначается Σ_α. Отметим, что данной схеме Юнга α отвечает много, именно $n!$, различных диаграмм Юнга, соответствующих различным способам размещения чисел $1, 2, \ldots, n$ по клеткам схемы α. Если задана какая-нибудь диаграмма Σ_α, то при $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix} \in S_n$ через $g\Sigma_\alpha$ обозначим диаграмму, полученную из Σ_α заменой в каждой клетке находящегося в ней числа j числом k_j. Очевидно, что $g\Sigma_\alpha$ при фиксированной Σ_α и всевозможных $g \in G$ пробегает все диаграммы, отвечающие схеме α. Строки диаграммы Σ_α можно рассматривать как циклы длин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ и, следовательно, эти диаграммы определяют некоторую подстановку, именно, произведение этих циклов.

I. *Если диаграмма Σ_α отвечает подстановке g_0, то диаграмме $g\Sigma_\alpha$ отвечает подстановка gg_0g^{-1}.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке, которую мы предоставляем читателю. Отметим, что достаточно проверить утверждение для транспозиции, так как каждая подстановка g есть произведение транспозиций. Для заданной диаграммы Юнга Σ_α обозначим через P_α совокупность всех подстановок, переставляющих элементы лишь в строках диаграммы Σ_α; очевидно, P_α — подгруппа в S_n. Отдельные подстановки из P_α обозначим буквой p. Аналогично, обозначим через Q_α совокупность всех подстановок, переставляющих элементы лишь в столбцах диаграммы Σ_α. Очевидно также, что Q_α — подгруппа в S_n. Отдельные элементы из Q_α обозначим буквой q. Пусть m_α, m'_α — порядки групп P_α, Q_α. Отметим, что P_α, Q_α в действительности зависят не только от схемы α, но и от диаграммы Σ_α.

II. *При переходе от Σ_α к $g\Sigma_\alpha$ группы P_α и Q_α переходят в $gP_\alpha g^{-1}$ и $gQ_\alpha g^{-1}$.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке, которую мы предоставляем читателю; достаточно эту проверку провести для случая, когда g — транспозиция, ибо всякая подстановка есть произведение транспозиций. Пусть A — групповая алгебра группы S_n: $A = As_n$. Рассмотрим следующие элементы алгебры A:

$$f_\alpha = \sum_p p, \quad \varphi_\alpha = \sum_q \sigma_q q, \tag{3.2.1}$$

где

$$\sigma_q = \begin{cases} 1, & \text{если } q \text{ — четная подстановка,} \\ -1, & \text{если } q \text{ — нечетная подстановка.} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

III. *Имеют место соотношения*

$$pf_\alpha = f_\alpha p = f_\alpha, \tag{3.2.3}$$

$$\sigma q\varphi_\alpha = \varphi_\alpha \sigma_q q = \varphi_\alpha, \tag{3.2.4}$$

$$f_\alpha^2 = m_\alpha f_\alpha,\ \varphi_\alpha^2 = m'_\alpha \varphi_\alpha. \tag{3.2.5}$$

Доказательство. Очевидно, что $\sigma_q \sigma'_q = \sigma_{qq'}$, поэтому из (3.2.1) заключаем:

$$pf_\alpha = p\sum_{p'} p' = \sum_{p'} pp' = \sum_{p'} p' = f_\alpha, \quad f_\alpha p = \sum_{p'} p'p = \sum_{p'} p' = f_\alpha,$$

$$\sigma_q q\varphi_\alpha = \sigma_q q \sum_{q'} \sigma_{q'} q' = \sum_{q'} \sigma_{qq'} qq' = \sum_{q'} \sigma_{q'} q' = \varphi_\alpha$$

и, аналогично, $\varphi_\alpha \sigma_q q = \varphi_\alpha$.

Отсюда

$$f_\alpha^2 = f_\alpha f_\alpha = f_\alpha \sum_p p = \sum_p f_\alpha = m_\alpha f_\alpha;$$

аналогично доказывается, что $\varphi_\alpha^2 = m'_\alpha \varphi_\alpha$.

3.3. Комбинаторная лемма. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{h'})$; будем писать $\alpha > \beta$, если первая отличная от нуля разность $\alpha_k - \beta_k$ положительна; при этом мы считаем $\alpha_k = 0$, если $k > h$, и $\beta_k = 0$, если $k > h'$. Описанное упорядочение схем α называется *лексикографическим*.

Лемма. *Если*: а) $\alpha \geqslant \beta$; б) *никакие два элемента, стоящие в одном столбце диаграммы* Σ_β, *не находятся в одной строке диаграммы* Σ_α, *то*:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \alpha = \beta,\\
&2)\ \Sigma_\beta = pq\Sigma_\alpha, \qquad \textit{где} \quad p \in P_\alpha, \quad q \in Q_\alpha, \qquad\qquad (3.3.1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{а } P_\alpha,\ Q_\alpha \textit{ построены по } \Sigma_\alpha.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Из условия $\alpha \geqslant \beta$ следует, что

$$\alpha_1 \geqslant \beta_1. \tag{3.3.2}$$

С другой стороны, первая строка в Σ_α состот из α_1 чисел, причем в силу условия б) все эти числа находятся в разных столбцах схемы Σ_p. Таким образом, число столбцов в Σ_p не меньше α_1, так что $\beta_1 \geqslant \alpha_1$. Сравнивая с (3.3.2), мы видим, что $\beta_1 = \alpha_1$. В силу условия б) все элементы первой строки в Σ_α находятся в разных столбцах в Σ_β; следовательно, при некоторой подстановке $q_1' \in Q_\beta$, отвечающей Σ_β, первые строки диаграмм Σ_α и $q_1'\Sigma_\beta$ будут состоять из одних и тех элементов, но, может быть, в разном порядке.

Поскольку $\alpha \geqslant \beta$ и $\alpha_1 = \beta_1$, то $\alpha_2 \geqslant \beta_2$. Отбрасывая мысленно в Σ_α и $q_1'\Sigma_\beta$ первые строки и применяя к полученным диаграммам предыдущее рассуждение, заключаем, что $\alpha_2 = \beta_2$ при некоторой подстановке q_2', отвечающей диаграмме $q_1'\Sigma_\beta$ и оставляющей на месте элементы первой строки $q_1'\Sigma_\beta$; вторые строки в Σ_α и $q_2'q_1'\Sigma_\beta$ состоят из одних и тех же элементов, но, возможно, в разном порядке.

Повторяя это рассуждение, заключаем, что $\alpha = \beta$, и, кроме того, получаем диаграмму $q_h'q_{h-1}' \ldots q_1'\Sigma_\beta$, строка которой состоит из тех же элементов, что и соответствующие строки в Σ_α, но, вообще говоря, в другом порядке. Следовательно, при некоторой подстановке $p \in P_\alpha$, отвечающей Σ_α, получаем схему

$$p\Sigma_\alpha = q'\Sigma_\beta; \tag{3.3.3}$$

для краткости обозначено $q' = q_h'q_{h-1}' \ldots q_1'$. Очевидно, каждое q_j', а потому и q', переставляет лишь элементы в одном и том же столбце в Σ_β, так что $q' \in Q_\beta$ (где Q_β отвечает Σ_β). Применяя теперь предложение II к $\Sigma_\beta = q'^{-1}p\Sigma_\alpha$ (см. (3.3.3)), мы видим, что $q' = q'^{-1}pq^{-1}(q'^{-1}p)^{-1}$, т. е.

$$q' = q'^{-1}pq^{-1}p^{-1}q', \tag{3.3.4}$$

где $q \in Q_\alpha$ (нам удобно здесь писать q^{-1} вместо q). Из (3.3.4) легко выводим, что $q' = pq^{-1}p^{-1}$, а тогда из (3.3.3) вытекает, что $\Sigma_\beta = q'^{-1}p\Sigma_\alpha = \left(pqp^{-1}\right)p\Sigma_\alpha = pq\Sigma_\alpha$, и лемма доказана.

Следствие. *При* $\alpha > \beta$

$$f_\alpha g \varphi_\beta g^{-1} = 0 \quad \textit{для всех} \quad g \in S_n, \tag{3.3.5}$$

$$f_\alpha A \varphi_\beta = (0). \tag{3.3.6}$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$f_\alpha \varphi_\beta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha > \beta. \tag{3.3.7}$$

Пусть Σ_α, Σ_β — диаграммы, по которым построены f_α, f_β (см. п. 3.2). Так как $\alpha > \beta$, то, по предыдущей лемме, должна существовать пара чисел i, k, которая в Σ_α находится в одной строке, а в Σ_β — в одном столбце. Пусть t — транспозиция этих чисел: $t = (i, k)$. Тогда $t \in P_\alpha$ для Σ_α и $t \in Q_\beta$ для Σ_β. Отсюда в силу (3.2.3) и (3.2.4)

$$f_\alpha = f_\alpha t, \quad \varphi_\beta = \sigma_t t \varphi_\beta = -t\varphi_\beta$$

и потому [1]

$$f_\alpha \varphi_\beta = f_\alpha t(-i\varphi_\beta) = -f_\alpha t^2 \varphi_\beta = -f_\alpha \varphi_\beta.$$

Последнее равенство возможно лишь при $f_\alpha \varphi_\beta = 0$ и (3.3.7) доказано. Для доказательства соотношения (3.3.5) достаточно заметить, что $g\varphi_\beta g^{-1}$ есть φ_β, построенное для $g\Sigma_\beta$ (см. II п. 3.2); поэтому (3.3.5) следует из (3.3.7) для $\varphi'_\beta = g\varphi_\beta g^{-1}$, отвечающего $g\Sigma_\beta$. Умножая теперь обе части (3.3.5) справа на $a(g)\, g$ и суммируя затем по g, получим, что $f_\alpha \sum\limits_g a(g)\, g\varphi_\beta = 0$, т. е. $f_\alpha a \varphi_\beta = 0$ для всех $a \in A$; этим доказано соотношение (3.3.6).

3.4. Симметризаторы Юнга. Положим для заданной диаграммы Σ_α

$$h_\alpha = f_\alpha \varphi_\alpha = \sum_{p,\, q} \sigma_q pq. \tag{3.4.1}$$

$h_\alpha \neq 0$, так как слагаемое $h_\alpha(e)$ (при $p = q = e$) есть $\sigma_e = 1$:

$$h_\alpha(e) = 1. \tag{3.4.1a}$$

Элемент h_α впервые был найден Юнгом; он называется *симметризатором Юнга*, отвечающим диаграмме Σ_α.

I. *Для* h_α *имеет место соотношение*

$$p h_\alpha \sigma_q q = h_\alpha. \tag{3.4.2}$$

Действительно, в силу (3.2.3) и (3.2.4)

$$p h_\alpha \sigma_q q = p f_\alpha \varphi_\alpha \sigma_q q = f_\alpha \varphi_\alpha = h_\alpha.$$

II. *Если для некоторого элемента* $a \in A$

$$p a \sigma_q q = a \quad \textit{при всех} \quad p \in P_\alpha, \quad q \in Q_\alpha, \tag{3.4.3}$$

[1] Напоминаем, что $t^2 = e$ и $\sigma_t = -1$.

то

$$a = \lambda h_\alpha, \tag{3.4.4}$$

где λ *— число.*

Доказательство. Пусть для элемента $a = \sum\limits_g a(g)\, g$ выполняется (3.4.3), так что

$$\sum_g \sigma_q a(g)\, pgq = \sum_g a(g)\, g \quad \text{для всех} \quad p \in P_\alpha, \quad g \in Q_\alpha. \tag{3.4.5}$$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях (3.4.5) при $g = pq$, заключаем, что

$$\sigma_q a(e) = a(pq). \tag{3.4.6}$$

Пусть g_0 не представимо в виде pq; докажем, что тогда $\alpha(g_0) = 0$. Рассмотрим Σ_α и $g_0\Sigma_\alpha$; согласно лемме п. 3.3 существуют два числа j, k, находящиеся в одной строке в Σ_α и в одном столбце в $g_0\Sigma_\alpha$. Положим снова $t = (j, k)$; тогда $t \in P_\alpha$ и $t \in Q'_\alpha$, где q'_α отвечает диаграмме $g_0\Sigma_\alpha$.

В силу II п. 3.2 отсюда следует, что $g_0^{-1} t g_0 \in Q_\alpha$. Положим теперь в (3.4.5) $p = t$, $q = g_0^{-1} t g_0$ и сравним в обеих частях полученного равенства коэффициенты при g_0. В левой части g_0 получится при $g = g_0$, ибо $p g_0 q = t g_0 g_0^{-1} t g_0 = g_0$, и не может получиться ни при каком другом g. Поэтому $\sigma_q a(g_0) = a(g_0)$, а это возможно лишь при $a(g_0) = 0$, ибо $\sigma_q = -1$ ($q = (j', k')$, где j', k' получены из (j, k) применением подстановки g_0). Итак,

$$a(g) = \begin{cases} \sigma_q a(e) & \text{при} \quad g = pq, \\ 0, & \text{если} \quad g \text{ — не вида } pq. \end{cases}$$

Следовательно,

$$a = \sum_{p,\,q} \sigma_q a(e)\, pq = a(e) \sum_{p,\,q} \sigma_q pq = a(e)\, h_\alpha,$$

что и требовалось доказать.

III. *Элемент* h_α *эрмитов.*

Действительно, по определению инволюции в групповой алгебре (см. (2.7.3)) и вследствие леммы п. 3.3

$$h_\alpha^* = \left(\sum_{p,\,q} \sigma_q pq\right)^* = \sum_{p,\,q} \sigma_q q^{-1} p^{-1} = \sum_{p,\,q} \sigma_{q^{-1}} pq = \sum_{p,\,q} \sigma_q pq = h_\alpha$$

($\sigma_q = \sigma_{q^{-1}}$, ибо q и q^{-1} обе четны или обе нечетны).

IV. *Если* $\alpha \neq \beta$, *то*

$$h_\alpha h_\beta = 0. \tag{3.4.7}$$

Доказательство. Согласно следствию п. 3.3

$$h_\alpha h_\beta = f_\alpha \varphi_\beta f_\beta \varphi_\beta \in f_\alpha A \varphi_\beta = (0).$$

V. *Для каждого* $b \in A$

$$h_\alpha b h_\alpha = \lambda h_\alpha, \tag{3.4.8}$$

где λ — *число* (*вообще говоря, зависящее от* α); *в частности* (*при* $b = e$),

$$h_\alpha^2 = \mu_\alpha h_\alpha, \tag{3.4.9}$$

где μ_α — *число.*

Доказательство. Из (3.4.2) легко выводим, что элемент $a = h_\alpha b h_\alpha$ удовлетворяет условию (3.4.3), так что (3.4.8) следует из предложения II.

3.5. Построение полной системы неприводимых представлений группы S_n. Положим теперь

$$I^\alpha = A h_\alpha; \tag{3.5.1}$$

очевидно, I^α — левый идеал в A и $I^\alpha \neq (0)$, ибо $h_\alpha \neq 0$.

I. I^α — *минимальный левый идеал в* A.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$h_\alpha I^\alpha \subset \mathbf{C} h_\alpha, \tag{3.5.2}$$

где $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел. Действительно,

$$h_\alpha I^\alpha = h_\alpha A h_\alpha;$$

следовательно, если $b \in h_\alpha I^\alpha$, то $b = h_\alpha a h_\alpha$ при некотором $a \in A$. Поэтому для всех $p \in P_\alpha$; $q \in Q_\alpha$

$$p b \sigma_q q = p h_\alpha a h_\alpha \sigma_q q = h_\alpha a h_\alpha = b$$

(см. (3.4.1) и (3.2.3), (3.2.4)). В силу II п. 3.4 отсюда заключаем, что $b = \lambda h_\alpha$ и (3.5.2) доказано.

Пусть теперь I_l — левый идеал, содержащийся в I^α:

$$I_l \subset I^\alpha. \tag{3.5.3}$$

Тогда

$$h_\alpha I_l \subset h_\alpha I^\alpha \subset \mathbf{C} h_\alpha$$

(см. (3.5.2)). Но $\mathbf{C} h_\alpha$ одномерно; поэтому возможны только следующие два случая:

1) $h_\alpha I_l = \mathbf{C} h_\alpha$,

2) $h_\alpha I_l = (0)$.

В случае 1) $I^\alpha = A h_\alpha = A \mathbf{C} h_\alpha = A h_\alpha I_l \subset I_l$ и потому $I_l = I^\alpha$.

В случае 2) $I_l^2 = I_l I_l \subset I^\alpha I_l = A h_\alpha I_l = (0)$; следовательно, $I_l = 0$ в силу V п. 2.5, ибо инволюция в групповой алгебре невырождена (см. IV п. 2.7).

Итак, каждый левый идеал I_l, содержащийся в I^α, либо совпадает с I_l, либо $= (0)$, а это означает, что I^α минимален. Предложение I доказано.

II. *Пространство* I^{α} *инвариантно относительно левого регулярного представления* $\widetilde{T}$ *группы* S_n *и сужение* $\widetilde{T}^{\alpha}$ *представления* T *на* I^{α} *неприводимо.*

Утверждение непосредственно следует из V п. 2.8 и I.

III. *При* $\alpha \neq \beta$ *представления* $\widetilde{T}^{\alpha}$ *и* $\widetilde{T}^{\beta}$ *не эквивалентны.*

Доказательство. Если $\alpha \neq \beta$, то $\alpha > \beta$ или $\alpha < \beta$. Пусть, для определенности, $\alpha > \beta$. Тогда в силу (3.3.7)

$$f_{\alpha}Ah_{\beta} = f_{\alpha}Af_{\beta}\varphi_{\beta} \subset f_{\alpha}A\varphi_{\beta} = (0),$$

так что

$$f_{\alpha}I^{\beta} = f_{\alpha}Ah_{\beta} = (0). \tag{3.5.4}$$

С другой стороны,

$$f_{\alpha}I^{\alpha} \neq (0). \tag{3.5.5}$$

Действительно, $I^{\alpha} = Ah_{\alpha}$ содержит элемент h_{α}, для которого $f_{\alpha}h_{\alpha} = h_{\alpha} \neq 0$.

Предположим, что $\widetilde{T}^{\alpha}$ и $\widetilde{T}^{\beta}$ эквивалентны; тогда соответствующие им представления $a \to \widetilde{T}^{\alpha}(a)$, $a \to \widetilde{T}^{\beta}(a)$ алгебры A также эквивалентны (см. I п. 2.8), так что существует линейное взаимно однозначное отображение U пространства I^{α} на I^{β}, при котором $\widetilde{T}^{\alpha}(a)$ переходит в $\widetilde{T}^{\beta}(a)$:

$$\widetilde{T}^{\alpha}(a) = U^{-1}\widetilde{T}^{\beta}(a)U;$$

в частности, при $a = f_{\alpha}$

$$\widetilde{T}^{\alpha}(f_{\alpha}) = U^{-1}\widetilde{T}^{\beta}(f_{\alpha})U.$$

Но это невозможно, ибо в силу (3.5.4) и (3.5.5)

$$\widetilde{T}^{\alpha}(f_{\alpha})I^{\alpha} = f_{\alpha}I^{\alpha} \neq (0),$$
$$U^{-1}\widetilde{T}^{\beta}(f_{\alpha})UI^{\alpha} = U^{-1}\widetilde{T}^{\beta}(f_{\alpha})I^{\beta} = U^{-1}f_{\alpha}I^{\beta} = (0).$$

Следовательно, $\widetilde{T}^{\alpha}$ и $\widetilde{T}^{\beta}$ не эквивалентны.

Теорема. *Пусть каждой схеме Юнга* α *поставлена в соответствие какая-нибудь фиксированная диаграмма Юнга* Σ_{α} *и по диаграмме* Σ_{α} *построен элемент* h_{α} *групповой алгебры* $A = A_{S_n}$:

$$h_{\alpha} = \sum_{p,\,q} \sigma_q pq, \quad p \in P_{\alpha}, \quad q \in Q_{\alpha},$$

$$\sigma_q = \begin{cases} 1, & \text{если } q \text{ — четная подстановка}, \\ -1, & \text{если } q \text{ — нечетная подстановка}. \end{cases}$$

Тогда $I^{\alpha} = Ah_{\alpha}$ *— инвариантные подпространства относительно левого регулярного представления* $\widetilde{T}$ *группы* S_n *и сужения* $\widetilde{T}^{\alpha}$ *представления* $\widetilde{T}$ *на* I^{α} *образуют при всевозможных* α *полную систему неприводимых представлений группы* S_n.

Доказательство. Согласно предложениям II и III представления $\widetilde{T}^\alpha$ и $\widetilde{T}^\beta$ не эквивалентны при $\alpha \neq \beta$. С другой стороны, число различных α равно числу классов сопряженных элементов в S_n и, следовательно, совпадает с числом представлений в полной системе (см. пп. 3.1 и 3.2).

Из доказанной теоремы вытекает следующий практический прием построения полной системы $\widetilde{T}$:

1) нумеруются в каком-нибудь порядке $g_1, \ldots, g_r$ $(r = n!)$ все элементы группы S_n;
2) фиксируются схема Юнга α и диаграмма Юнга Σ_α;
3) по данной диаграмме Σ_α определяются группы P_α, Q_α и элемент h_α;
4) в системе элементов $g_1 h_\alpha$, $g_2 h_\alpha$, $\ldots$, $g_r h_\alpha$ отбрасывается каждый, который является линейной комбинацией предыдущих; оставшаяся система, пусть это будет
$$a_1 = g_{k_1} h_\alpha, \quad a_2 = g_{k_2} h_\alpha, \ \ldots, \ a_{n_\alpha} = g_{n_\alpha} h_\alpha, \quad j_1 = 1,$$
образует базис в $I^\alpha = A h_\alpha$;
5) поэтому
$$\widetilde{T}(g)\, a_j = g a_j = \sum_{s=1}^{n_a} t_{sj}(g)\, a_s, \quad j = 1, \ \ldots, n, \tag{3.5.6}$$
и эта формула определяет матричные элементы представления $\widetilde{T}^\alpha$.

Если применить к $a_1, \ldots, a_{n_\alpha}$ процесс ортогонализации относительно скалярного произведения в $L^2(S_n)$, то получается ортонормальный базис в I^α, по отношению к которому матрица представления $\widetilde{T}^\alpha$ унитарна. По поводу фактического вычисления матричных элементов представлений $\widetilde{T}^\alpha$ см. Молчанов [1*].

3.6. Характеры неприводимых представлений симметрической группы. Положим
$$\chi_\alpha = \chi_{\widetilde{T}^\alpha} \tag{3.6.1}$$
и найдем выражения для χ_α через симметризаторы h_α. Предварительно докажем следующее предложение:

I. *Для числа μ_α в соотношении* (3.4.9) *имеет место формула*
$$\mu_\alpha = n!/n_\alpha, \tag{3.6.2}$$
где n_α — размерность представления $\widetilde{T}^\alpha$.

Доказательство. Пусть C_α — линейный оператор в A, определенный равенством
$$C_\alpha a = a h_\alpha. \tag{3.6.3}$$
Очевидно,
$$C_\alpha A = I^\alpha \tag{3.6.4}$$

и в силу (3.4.9) $C_\alpha a h_\alpha = a h_\alpha^2 = \mu a h_\alpha = \mu_\alpha a h_\alpha$, так что

$$C_\alpha = \mu_\alpha 1 \quad \text{на} \quad I^\alpha. \tag{3.6.5}$$

Выберем теперь какой-нибудь базис $a_1, \ldots, a_p$ в I^α и дополним его как-нибудь до базиса $a_1, \ldots, a_{n1}$ в A; в силу (3.6.4) и (3.6.5) матрица c_α оператора C_α в этом базисе имеет вид

$$c_\alpha = \begin{Vmatrix} \mu_\alpha 1_\alpha & * \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где 1_α — единичная матрица порядка n_α. Поэтому

$$\operatorname{tr} C_\alpha = \mu_\alpha n_\alpha. \tag{3.6.6}$$

С другой стороны, (3.6.3) означает, что

$$(C_\alpha a)(g) = \sum_{g_1} a(g_1)\, h_\alpha(g_1^{-1} g),$$

т. е. C_α есть линейное преобразование переменных $a(g)$, $a \in G$, с матрицей $c_\alpha(g_1, g) = h_\alpha(g_1^{-1} g)$. Поэтому

$$\operatorname{tr} C_\alpha = \sum_g c_\alpha(g, g) = \sum_g h_\alpha(g^{-1} g) = \sum_g h_\alpha(e) = \sum_g 1 = n! \tag{3.6.7}$$

(см. (3.4.1a)). Сравнение правых частей (3.6.6) и (3.6.7) приводит к формуле (3.6.2).

Из формулы (3.6.2) заключаем, что $\mu_\alpha > 0$. Положим

$$e_\alpha = \frac{1}{\mu_\alpha}\, h_\alpha = \frac{n_\alpha}{n!}\, h_\alpha. \tag{3.6.8}$$

II. *Элемент e_α есть идемпотент в I^α.*

Доказательство. Очевидно, $e_\alpha \in I^\alpha$ и $e_\alpha \neq 0$; кроме того, в силу (3.4.9) и (3.6.8)

$$e_\alpha^2 = \frac{1}{\mu_\alpha^2}\, h_\alpha^2 = \frac{1}{\mu_\alpha^2}\, \mu_\alpha h_\alpha = \frac{1}{\mu_\alpha}\, h_\alpha = e_\alpha.$$

Теорема 1. *Характер χ_α неприводимого представления T^α группы S_n выражается через симметризатор h_α по формуле*

$$\chi_\alpha(g) = \frac{n_\alpha}{n!} \sum_{g_1} h_\alpha(g_1^{-1} g^{-1} g_1), \tag{3.6.9}$$

где n_α — размерность представления T^α.

Утверждение теоремы сразу же следует из (2.8.8) и (3.6.8), так как $I^\alpha = A h_\alpha = A e_\alpha$.

Приведем еще формулы, непосредственно выражающие n_α и χ_α через числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, определяющие схему α.

Предварительно напомним, что $\chi_\alpha(g)$ зависит лишь от класса сопряженных элементов, содержащего g. Следовательно, обозначая этот класс буквой β, мы можем положить

$$\chi_\alpha(g) = \chi_\alpha(\beta) \quad \text{при} \quad g \in \beta.$$

С другой стороны, пусть g содержит β_1 циклов длины 1, β_2 циклов длины 2, $\ldots$, β_q циклов длины q, так что

$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + q\beta_q = n. \tag{3.6.10}$$

Класс β однозначно определяется числами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$; этот факт мы запишем в виде

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q). \tag{3.6.11}$$

Исследование формулы (3.6.9), которое мы опускаем [1]), приводит к следующему результату:

Теорема 2. *Размерность* n_α *неприводимого представления* T^α *группы* S_n, *отвечающего схеме* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$, *определяется по формуле*

$$n_\alpha = n!\,\frac{D_\alpha}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_h!}, \tag{3.6.12}$$

где

$$D_\alpha = \prod_{p<q}(l_p - l_q), \tag{3.6.13а}$$

$$l_1 = \alpha_1 + (h-1), \quad l_2 = \alpha_2 + (h-2), \; \ldots, l_h = \alpha_h, \tag{3.6.13б}$$

а для характеров χ_α *представлений* T^α *имеет место тождество*

$$\sigma_\beta|\xi^{h-1}, \ldots, 1| = \sum_\alpha \chi_\alpha(\beta)|\xi^{l_1}, \ldots, \xi^{l_h}| \tag{3.6.14}$$

относительно $\xi_1, \ldots, \xi_h$.

Здесь

$$\sigma_\beta = (\xi_1 + \ldots + \xi_h)^{\beta_1}(\xi_1^2 + \ldots + \xi_h^2)^{\beta_2}\ldots(\xi_1^q + \ldots + \xi_h^q)^{\beta_q}, \tag{3.6.15}$$

$$|\xi^{p_1}\ldots\xi^{p_h}| = \begin{vmatrix} \xi_1^{p_1} & \ldots & \xi_1^{p_h} \\ \xi_2^{p_1} & \ldots & \xi_2^{p_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_h^{p_1} & \ldots & \xi_h^{p_h} \end{vmatrix}$$

и суммирование (3.6.14) *распространяется на все* α *с фиксированными* h, *т.е. на все* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, *для которых*

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_h \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = n.$$

[1]) Подробное доказательство которого, а также нижеследующей теоремы 3, см. в книге Г. Вейля [1], гл. VII.

Отметим еще следующее правило рекуррентного вычисления характеров χ_α:

Теорема 3. *Если класс β содержит цикл длины v, а β^1 — класс, полученный из β вычеркиванием этого цикла, то*

$$\chi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_h}(\beta) = \chi_{\sigma_1-v,\alpha_2,\ldots,\alpha_h}(\beta) + \chi_{\alpha_1,\alpha_2-v,\ldots,\alpha_h}(\beta^1) + \ldots. \tag{3.6.16}$$

При этом, если индексы $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_h$ при каких-нибудь χ в правой части не удовлетворяют условию

$$\alpha'_1 \geqslant \alpha'_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha'_h \geqslant 0, \tag{3.6.17}$$

то надо поступить следующим образом:

1) *если* (3.6.17) *не выполняется на последнем месте, т. е. $\alpha'_h < 0$, то соответствующее χ следует вычеркнуть*;

2) *если* (3.6.17) *не выполняется на более раннем месте, так что*

$$\alpha'_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha'_{j-1} \geqslant \alpha'_{j+1} \geqslant \ldots \geqslant \alpha'_h, \quad \text{но} \quad \alpha'_j < \alpha'_{j+1},$$

то поступаем так же при $\alpha'_{j+1} - \alpha'_j = 1$ и заменяем

$$\chi_{\ldots\alpha'_j\alpha'_{j+1}\ldots} \tag{3.6.18}$$

на

$$-\chi_{\ldots\alpha'_{j-1}\alpha'_{j+1}\ldots}$$

при $\alpha'_{j+1} - \alpha'_j \geqslant 2$.

В последнем случае для новых α'_j в (3.6.18) *«неправильность» $\alpha'_j < \alpha'_{j+1}$ либо устраняется, либо $\alpha'_{j+1} - \alpha'_j$ уменьшается на единицу* [1]).

3.7. Разложение левого регулярного представления группы S_n на ее неприводимые представления. Разложим сначала левое регулярное представление $\widetilde{T}$ группы S_n на представления, кратные неприводимым. Положим для этого

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g_1} g_1 h_\alpha g_1^{-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{g_1} g_1 e_\alpha g_1^{-1}, \tag{3.7.1}$$

где h_α построен по фиксированной диаграмме Σ_α (см. (3.4.1)), а $\mu = \mu_\alpha = n_\alpha/n!$ (см. (3.6.2)). Очевидно, (3.7.1) означает, что

$$\varepsilon_\alpha(g) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g_1} h_\alpha(g_1^{-1} g g_1) = \frac{1}{\mu} \sum_{g_1} e_\alpha(g_1^{-1} g g_1); \tag{3.7.2}$$

сравнение с (3.6.9) приводит к формуле

$$\varepsilon_\alpha(g) = \frac{1}{\mu_\alpha} \chi_\alpha(g^{-1}). \tag{3.7.3}$$

[1]) В таком общем виде это правило было указано Мурнаганом (см. Мурнаган [1]).

I. *Элементы* ε_α *обладают следующими свойствами*:
1) $\varepsilon_\alpha \neq 0$;
2) ε_α — *эрмитов идемпотент*;
3) ε_α *принадлежит центру* $Z(A_{S_n})$ *алгебры* A_{S_n};
4) $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 0$ *и* $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = 0$ *при* $\alpha \neq \beta$;
5) ε_α, *отвечающие всевозможным схемам* α, *образуют базис в* $Z(A_{S_n})$.

Доказательство. 1). В силу (3.4.1) и (3.7.1)

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\mu^2} \sum_{g_1} \sum_{p,\,q} \sigma_q g_1^{-1} p q g_1. \tag{3.7.4}$$

Коэффициент $\varepsilon_\alpha(e)$ получается в сумме (3.7.4) из тех слагаемых, для которых $g_1^{-1} p q g_1 = e$, т.е. $pq = e$, а это возможно лишь при $p = e$, $q = e$. Следовательно,

$$\varepsilon_\alpha(e) = \frac{1}{\mu^2} \sum_g \sigma_e g^{-1} g = \frac{1}{\mu^2} \sum_g 1 = \frac{n!}{\mu^2} = \frac{n_\alpha^2}{n!}, \tag{3.7.5}$$

и потому $\varepsilon_\alpha \neq 0$.

2). Так как h_α эрмитов (см. III п. 3.4), то по определению инволюции (см. (2.7.2))

$$\varepsilon_\alpha^* = \frac{1}{\mu^2} \sum_g (g^{-1} h_\alpha g)^* = \frac{1}{\mu^2} \sum_g g^{-1} h_\alpha^* g = \frac{1}{\mu^2} \sum_g g^{-1} h_\alpha g = \varepsilon_\alpha,$$

т. е. ε_α эрмитов.

3). ε_α принадлежит $Z(A_{S_n})$ в силу теоремы 2 п. 2.9 и (3.7.2).

4). Заметим прежде всего, что $g_1^{-1} h_\alpha g_1$ и $g_2^{-1} h_\beta g_2$ являются элементами h_α и h_β, отвечающими диаграммам $g_1^{-1}\Sigma_\alpha$ и $g_2^{-1}\Sigma_\beta$; следовательно, при $\alpha \neq \beta$

$$g_1^{-1} h_\alpha g_1 \cdot g_2^{-1} h_\beta g_2 = 0 \tag{3.7.6}$$

на основании IV п. 3.4. Суммируя в (3.7.6) по g_1 и g_2, получим

$$\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \sum_{g_1} \sum_{g_2} g_1^{-1} h_\alpha g_1 g_2^{-1} h_\beta g_2 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta. \tag{3.7.7}$$

Но тогда в силу (3.7.7) и свойства 3) при $\alpha \neq \beta$

$$(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = n^{-1} f_0(\varepsilon_\beta^* \varepsilon_\alpha) = n^{-1} f_0(\varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha) = n^{-1} f_0(0) = 0. \tag{3.7.8}$$

5). В силу (3.7.8) ε_α, отвечающие различным α, взаимно ортогональны и, кроме того, $\varepsilon_\alpha \neq 0$ в силу свойства 1). Следовательно ε_α — линейно независимые элементы центра $Z(A_{S_n})$. Их число равно числу классов сопряженных элементов в группе и, следовательно, размерности центра $Z(A_{S_n})$. Поэтому ε_α образуют базис в $Z(A_{S_n})$.

§ 4. Индуцированные представления

4.1. Определение и простейшие свойства индуцированного представления. Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа, T — представление группы H в пространстве V. Определим представление U группы G следующим образом:

1) пространством представления U является множество $\mathscr{V}$ функций $f(g)$ на группе G со значениями в V, таких, что

$$f(hg) = T(h)\, f(g) \quad \text{для всех} \quad h \in H, \quad g \in G; \tag{4.1.1}$$

2) операторы представления U действуют в пространстве $\mathscr{V}$ по формуле $[U(g_0)\, f](g) = f(gg_0)$.

Покажем, что соответствие $g \to U(g)$ действительно является представлением группы G.

Прежде всего отметим, что $U(g)$ действует в $\mathscr{V}$, т. е. при $f \in \mathscr{V}$ также $U(g)\, f \in \mathscr{V}$. Действительно, пусть $f \in \mathscr{V}$, т. е. выполняется (4.1.1); положим $U(g_0)\, f(g) = f(gg_0) = \varphi(g)$. Тогда $\varphi(hg) = f((hg)\, g_0) = f(h(gg_0)) = T(h)\, f(gg_0) = T(h)\, \varphi(g)$, так что $\varphi \in \mathscr{V}$. Очевидно также, что $U(g_0)$ — линейный оператор в $\mathscr{V}$ для каждого $g_0 \in G$ и что $U(e) = 1$. Наконец, $[U(g_0)U(g_1)\, f](g) = U(g_0)\, f(gg_1) = f((gg_0)\, g_1) = f(g(g_0g_1)) = U(g_0g_1)\, f(g)$, т. е. $U(g_0)U(g_1) = U(g_0g_1)$ для всех $g_0, g_1 \in G$.

Представление U, определенное условиями 1), 2), называется представлением группы G, *индуцированным* представлением T подгруппы H, и обозначается U^T, или ${}_HU^T$, или ${}_HU^T_G$, если нужно указать подгруппу H и группу G.

I. *Размерность представления ${}_HU^T$ равна произведению размерности пространства V и индекса подгруппы H в G.*

Действительно, выберем в каждом классе вида Hg по представителю; пусть k — число таких классов (т. е. k есть индекс [1]) H в G, и пусть $g_1, \ldots, g_k$ — представители попарно различных классов Hg_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим отображение p пространства $\mathscr{V}$ в прямую сумму k экземпляров пространства V, определяемое формулой $f \to \{f(g_1), \ldots, f(g_k)\}$. Функция $f \in \mathscr{V}$ однозначно определяется условием $f(hg) = T(h)\, f(g)$ на смежном классе вида Hg_0, если известно значение f в точке g_0; поэтому отображение p взаимно однозначно и, очевидно, линейно. Отсюда следует, что $\dim \mathscr{V} = k \dim V$.

II. *Если $H = G$, то ${}_HU^T$ эквивалентно T.*

Действительно, пусть $H = G$; тогда G содержит лишь один смежный класс Hg, и в качестве представителя этого класса можно взять элемент $g = e$. Отображение p: $f \to f(e)$ определяет в этом случае изоморфизм пространств $\mathscr{V}$ и V; положим $p^{-1}\xi = f_\xi(g)$ для $\xi \in V$, так что $f_\xi(e) = \xi$. При этом изоморфизме представление U

[1]) См. п. 1.2 гл. I.

переходит в индуцирующее представление T. Действительно, $p^{-1}\xi = f_\xi(g) = T(g)\, f_\xi(e) = T(g)\,\xi$ при $\xi \in V$; поэтому $\{[p^{-1}T(g_0)\, p]\, f\}(g) = p^{-1}T(g_0)\, f(e) = p^{-1}f(g_0) = T(g)\, f(g_0) = T(g)\, T(g_0)\, f(e) = f(gg_0)$, т. е. $p^{-1}T(g_0)\, p = U(g_0)$.

III. *Если $H = \{e\}$ и T — единичное представление группы H, то ${}_HU^T$ эквивалентно правому регулярному представлению группы G.*

Доказательство. Пусть $H = \{e\}$ и T — единичное представление группы H. В этом случае пространство $\mathscr{V}$ состоит из всех числовых функций на G и представление U^T, действующее по формуле $U(g_0)\, f(g_0) = f(gg_0)$, есть правое регулярное представление.

4.2. Теорема о сквозном индуцировании. *Пусть K, H — подгруппы группы G, $K \subset H$. Пусть T — представление подгруппы K в пространстве V, S — индуцированное представлением T представление группы H. Тогда представления ${}_KU_G^T$ и ${}_HU_G^S$ эквивалентны, т. е. $U^{U^T} \sim U^T$.*

Доказательство. Пространство представления ${}_HU_G^S$ состоит из функций F на группе G, принимающих значения в пространстве представления S и удовлетворяющих условию $F(hg) = S(h)F(g)$ для всех $h \in H$, $g \in G$; но при каждом $g \in G$ «значение» $F(g)$ есть функция на H со значениями в V, такая, что $\{F(g)\}(kh) = T(k)\{F(g)\}(h)$. Поэтому элементами пространства представления ${}_HU_G^S$ можно считать функции f двух переменных на $G \times H$ со значениями в V, такие, что $f(h_0 g, h) = f(g, hh_0)$ для всех h_0, $h \in H$, $g \in G$ и $f(g, kh) = T(k)\, f(g, h)$ для всех $k \in K$, $h \in H$, $g \in G$. Введем отображение p пространства $\mathscr{V}^S$ представления ${}_HU_G^S$ в пространство $\mathscr{V}^T$ представления ${}_KU_G^T$, определяемое формулой $(pf)(g) = f(g, e)$ для $f \in \mathscr{V}^S$. Читатель легко проверит, что p — изоморфизм пространства $\mathscr{V}^S$ на пространство $\mathscr{V}^T$, осуществляющий эквивалентность представлений ${}_HU_G^S$ и ${}_KU_G^T$.

4.3. Теорема двойственности Фробениуса. *Пусть T, L — неприводимые представления группы G и ее подгруппы H соответственно. Тогда кратность представления T в U^L равна кратности представления L в $T|_H$.*

Доказательство. Покажем, что линейное пространство $\mathrm{Hom}\,(T, U^L)$ операторов, сплетающих T с U^L, изоморфно линейному пространству $\mathrm{Hom}\,(T|_H, L)$ операторов, сплетающих $T|_H$ с L:

$$\mathrm{Hom}\,(T|_H, L) \sim \mathrm{Hom}\,(T, U^L) \tag{4.3.1}$$

для любых представлений T группы G и любых представлений L подгруппы H. Если T и L неприводимы, то размерности этих пространств равны рассматриваемым в теореме кратностям, так что формула (4.3.1) доказывает теорему. Проверим формулу (4.3.1). Пусть K — линейный оператор из пространства V_T представления T в пространство V_{U^L} представления U^L, сплетающий T и U^L, т. е. $KT(g) = U^L(g)K$ для всех $g \in G$. Сопоставим оператору K оператор $\widetilde{K}$ из пространства V_T представления $T|_H$ в пространство V_L представления L, полагая $\widetilde{K}K\xi = (K\xi)(e)$, где $K\xi$ — функция на G со значениями в V_L, отвечающая $\xi \in V_T$. Так как $KT(h) = U^L(h)K$ для $h \in H$, то $\widetilde{K}T(h)\,\xi = (K(T(h)\,\xi))(e) = (U^L(h)K\xi)(e) = (K\xi)(h) = L(h)(K\xi)(e) = L(h)\,\widetilde{K}\xi$ для всех $\xi \in H_T$, т. е. $\widetilde{K}$ сплетает $T|_H$ и L, и соответствие $K \to \widetilde{K}$ определяет отображение $\mathrm{Hom}\,(T, U^L)$ в $\mathrm{Hom}\,(T|_H, L)$; так как $(K\xi)(g) = (U^L(g)K\xi)(e) = (KT(g)\,\xi)(e) = \widetilde{K}T(g)\,\xi$, то $\widetilde{K}$ определяется K и отображение $K \to \widetilde{K}$ есть изоморфизм.

4.4. Характер индуцированного представления.

Теорема. *Характер χ индуцированного представления ${}_HU_G^T$ определяется формулой*

$$\chi(g) = \sum_{\{\delta_i:\ \delta_i g \in H\delta_i\}} \psi(\delta_i g \delta_i^{-1}), \tag{4.4.1}$$

где $\{\delta_i\}$ — набор представителей смежных классов вида Hg_0, $g_0 \in G$; ψ — характер представления T.

Доказательство. Пусть $\{e_j\}$ — базис в пространстве V представления T. Тогда функции

$$f_{ij}(g) = \begin{cases} T(h)\,e_j & \text{при} \quad g = h\delta_i, \quad h \in H, \\ 0 & \text{при} \quad g \notin H\delta_i, \end{cases} \tag{4.4.2}$$

образуют базис в пространстве $\mathscr{V}$ представления U^T. Действительно, $\mathscr{V}$ есть прямая сумма подпространств $\mathscr{V}_i = \{f\colon f(g) = 0 \text{ при } g \notin H\delta_i\}$; с другой стороны, функции $f_{ij}(g)$ при фиксированном i образуют базис в $\mathscr{V}_i$.

Если $g = h\delta_g$, то при $\delta_k g_0 = \widetilde{h}\delta_q$, $\widetilde{h} \in H$,

$$U^T(g_0)\,f_{ij}(g) = f_{ij}(gg_0) = f_{ij}(h\delta_k g_0) = f_{ij}(h\widetilde{h}\delta_q) = \begin{cases} T(h)\,T(\widetilde{h})\,e_j & \text{при} \quad q = i, \\ 0 & \text{при} \quad q \neq i. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Таким образом, для $g = h\delta_k$ коэффициент при $f_{ij}(g)$ в разложении $U^T(g_0)\,f_{ij}(g)$ по базису $\{f_{ij}\}$ (т. е. соответствующий диагональный элемент матрицы оператора $U^T(g_0)$ в базисе (4.4.2)) может быть отличен от нуля лишь в случае, когда $\delta_k g_0 = \widetilde{h}\delta_i$, т. е. когда $\delta_k g_0 \in H\delta_i$. Положим $T(\widetilde{h})\,e_j = \sum\limits_r \alpha_{rj}(\widetilde{h})\,e_r$; тогда в силу (4.4.2) и (4.4.3) $U^T(g_0)\,f_{ij}(g) = \sum\limits_k \sum\limits_r \alpha_{rj}(\widetilde{h})\,f_{kr}(g)$ для $g = h\delta_k$, $\delta_k g_0 \in H\delta_i$; следовательно, коэффициент при $f_{ij}(g)$ равен $\alpha_{ij}(\widetilde{h})$ для $g = h\delta_k$, $\delta_i g_0 = \widetilde{h}\delta_i$, $\widetilde{h} \in H$. Поэтому

$$\chi(g_0) = \sum_{\{\delta_i:\ \delta_i g_0 \in H\delta_i\}} \sum_j \alpha_{jj}(\widetilde{h}). \tag{4.4.4}$$

Так как $\sum +j\alpha_{jj}(\widetilde{h}) = \psi(\widetilde{h})$ и $\widetilde{h} = \delta_i g_0 \delta_0 i^{-1}$, то формула (4.4.1) непосредственно следует из (4.4.4).

4.5. Сужение индуцированного представления на подгруппу.

Теорема. *Пусть G — конечная группа, H и K — ее подгруппы, L — представление группы H. Положим $G_g = K \cap g^{-1}Hg$, где $g \in G$. Пусть T^g — представление группы K, индуцированное представлением L^g: $x \to L(gxg^{-1})$ подгруппы G_g. Тогда представление T^g определено однозначно (с точностью до эквивалентности) двойным классом $HgK = D(g)$, содержащим g. Обозначим T^g через T^D. Сужение представления U^L на K есть прямая сумма представлений T^D (где сумма берется по множеству двойных классов вида HgK, $g \in G$).*

Доказательство. Пусть $g_1 = h_0 g k_0$; тогда

$$G_{g_1} = K \cap g_1^{-1} H g_1 = K \cap k_0^{-1} g^{-1} h_0^{-1} H h_0 g k_0 = k_0^{-1} G_g k_0,$$

т. е. G_{g_1} и G_g сопряжены в K с помощью внутреннего автоморфизма (определяемого элементом k_0). Если $\delta_1, \ldots, \delta_m$ — набор представителей попарно не пересекающихся классов вида $G_g g_0$, $g_0 \in G$, то элементы $k_0^{-1}\delta_1 k_0$, $i = 1, \ldots, m$, образуют набор представителей попарно не пересекающихся классов вида $G_{g_1} g_0$, $g_0 \in G$. Так как всякий характер постоянен на классах сопряженных элементов, то из формулы (4.4.1) получаем, что характеры представлений T_g и T_{g_1} равны; следовательно, представления T^g и T^{g_1} эквивалентны.

Пусть $\mathscr{V}_j$ — подпространство пространства $\mathscr{V}$ представления U^L, образованное функциями, равными нулю вне Hg_jK, где $g_1, \ldots, g_i$ — полный набор представителей попарно различных двойных классов HgK, $g \in G$. Очевидно, что каждое подпространство $\mathscr{V}_j$ инвариантно относительно операторов $U^L(k)$, $k \in K$, и представление $U^L|_K$ есть прямая сумма подпредставлений, определяемых подпространствами $\mathscr{V}_j$, $j = 1, \ldots, l$, так как в формулах $f(hg) = L(h)\, f(g)$ и $U^L(k)\, f(g) = f(gk)$, $h \in H$, $k \in K$, участвуют элементы из одного и того же двойного класса HgK.

Покажем, что подпредставление $U^L|_K$ в пространстве $\mathscr{V}_j$ эквивалентно представлению группы K, индуцированному представлением T^D, где $D = Hg_jK$. Пусть p — отображение, сопоставляющее каждой функции f из пространства $\mathscr{V}_j$ функцию $p(f)$ на группе K со значениями в пространстве V представления L по формуле $p(f)(k) = f(g_jk)$. Данная функция $\overline{\varphi}$ на K есть образ некоторой функции $f \in \mathscr{V}_i$ при отображении p тогда и только тогда, когда существует такая функция $\overline{\varphi}$ на классе D, что $\overline{\varphi}(g_jk) = \varphi(k)$ и для функции $\overline{\varphi}$ выполняется соотношение $\overline{\varphi}(hh_0g_ik) \equiv L(h)\,\overline{\varphi}(h_0g_ik)$; для справедливости же последнего соотношения при всех h, $h_0 \in H$ и $k \in K$ необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось для $h_0 = e$ и для $hg_ik \in g_iK$. Итак, пусть $hg_ik = g_i\widetilde{k}$; должно выполняться соотношение $\overline{\varphi}(hg_ik) = L(h)\,\varphi(k) = \varphi(\widetilde{k})$; но $g_i^{-1}hg_i = \widetilde{k}k^{-1}$, т. е. $\widetilde{k}k^{-1} \in G_{g_i}$;

при этом $L_{gi}(\widetilde{k}k^{-1}) = L(g_i\widetilde{k}k^{-1}g^{-1}) = L(h)$. Таким образом, функция φ на K тогда и только тогда является образом некоторой функции $f \in \mathscr{V}_i$ при отображении p, когда φ лежит в пространстве индуцированного представления $T^{g_i} = {}_{G_{g_i}}U_K^L$. Непосредственно проверяется, что p — изоморфизм, осуществляющий эквивалентность представления T^{g_i} и подпредставления представления $U^L|_K$ в пространстве $\mathscr{V}_i$.

4.6. Индуцированные представления прямого произведения групп.

Теорема. *Пусть G_1, G_2 — конечные группы; H_1, H_2 — подгруппы в G_1, G_2 соответственно; L_1, L_2 — представления групп H_1, H_2 в пространствах V_1, V_2. Тогда ${}_{H_1\times H_2}U_{G_1\times G_2}^{L_1\otimes L_2}$ эквивалентно ${}_{H_1}U_{G_1}^{L_1} \to {}_{H_2}U_{G_2}^{L_2}$.*

Действительно, легко проверить, что оператор естественного изоморфизма между пространством функций на $G_1 \times G_2$ со значениями в $V_1 \otimes V_2$ и тензорным произведением пространств функций на G_1 со значениями в V_1 и на G_2 со значениями в V_2 осуществляет эквивалентность представлений ${}_{H_1\times H_2}U_{G_1\times G_2}^{L_1\otimes L_2}$ и ${}_{H_1}U_{G_1}^{L_1} \otimes {}_{H_2}U_{G_2}^{L_2}$.

4.7. Тензорное произведение и индуцированные представления. Тензорное произведение двух представлений T_1, T_2 группы G можно рассматривать как сужение представления $T_1 \otimes T_2$ группы $G \times G$ на диагональную подгруппу $\overline{G} = \{(g, g)\colon g \in G\} \subset G \times G$; поэтому с помощью теоремы п. 4.5 можно получить информацию о разложении тензорных произведений.

Теорема (теорема о тензорных произведениях). *Пусть G — конечная группа; H и K — подгруппы группы G; T, S — представления групп H и K соответственно. Пусть G_{g_1,g_2} — подгруппа группы G вида $g_1^{-1}Hg_1 \cap g_2^{-1}Kg_2$, $\quad g_1, g_2 \in G$. Пусть $T^{g_1}\colon x \to T(g_1xg_1^{-1})$, $S^{g_2}\colon x \to S(g_1xg_2^{-1})$ — представления группы G_{g_1,g_2}; L^{g_1,g_2} — тензорное произведение представлений T^{g_1} и S^{g_2}; $U^{L^{g_1,g_2}}$ — соответствующее индуцированное представление группы G. Тогда $U^{L g_1,g_2}$ определяется однозначно (с точностью до эквивалентности) двойным классом $Hg_1g_2^{-1}K$, содержащим $g_1g_2^{-1}$, и прямая сумма представлений $U^{L^{g_1,g_2}}$ (по двойным классам вида HgK) эквивалентна $U^T \otimes U^S$.*

Доказательство может быть получено из теоремы п. 4.5, примененной к представлению $U_{G\times G}^{T\otimes S}$ (см. п. 4.6), индуцированному с подгруппы $H \times K$, с последующим сужением на $\widetilde{G}$. Подробности доказательства предоставляются читателю.

4.8. Теорема импримитивности. Пусть T — представление группы G, H — подгруппа в G. Говорят, что T *допускает систему импримитивности* с базой G/H, если существует отображение P множества подмножеств в G/H в множество проекторов в пространстве V представления T, такое, что $P(\varnothing) = 0$, $P(G/H) = I$; если E, $F \subset G/H$

и $E \cap F = \varnothing$, то $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$; $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ для всех $E, F \subset G/H$ и $P(Eg) = T^{-1}(g)P(E)T(g)$ для всех $E \subset G/H$.

Теорема (критерий индуцированности представления). *Представление T группы G эквивалентно представлению вида ${}_HU_G^L$ для данной подгруппы H и некоторого представления L подгруппы H тогда и только тогда, когда T допускает систему импримитивности с базой G/H.*

Доказательство см., например, в книге Серра [2].

Примеры и упражнения. 1. Показать с помощью теоремы п. 4.3, что порядок группы равен сумме квадратов размерностей неприводимых представлений.

2. Критерий неприводимости индуцированного представления.

Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа, T — неприводимое представление группы H. Показать, что представление U^T неприводнмо тогда и только тогда, когда для всех $g \notin H$ представления группы $H^g = g^{-1}Hg \cap H$, определяемые формулами $h \to T(ghg^{-1})$ и $h \to T(h)$, не имеют общих неприводимых компонент.

3. Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа. Показать, что представление группы G, индуцированное единичным представлением группы H, содержит единичное представление группы G.

4. Пусть G — конечная группа; H, K — подгруппы группы G; T, S — представления групп H, K соответственно. Пусть ${}_HU^T$ и ${}_KU^S$ неприводимы. ${}_HU^T \sim {}_KU^S$ тогда и только тогда, когда существует элемент $g \in G$ такой, что представления $h \to T(ghg^{-1})$ и $h \to S(h)$ подгруппы $g^{-1}Hg \cap K$ имеют общую неприводимую компоненту.

5. Пусть G — группа матриц вида $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ с элементами из конечного поля; H — подгруппа матриц вида $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{Vmatrix}$. Найти представления группы G, индуцированные одномерными представлениями группы H, и исследовать их неприводимость (см. также § 5).

§ 5. Представления группы $SL(2, F_q)$

5.1. Поле. Множество K называется *полем*, если в K определены операции *сложения* и *умножения*, т. е. каждой упорядоченной паре элементов (x, y) из K сопоставлен элемент $x + y \in K$, называемый *суммой* x и y, и элемент $xy \in K$, называемый *произведением* x и y, причем:

1) K является коммутативной группой относительно сложения (эта группа называется аддитивной группой поля K);

2) если 0 — единичный элемент относительно сложения, то множество $K^* = K \diagdown \{0\}$ является коммутативной группой относительно умножения (эта группа называется мультипликативной группой поля K);
3) сложение *дистрибутивно* относительно умножения, т. е. для любых x, y, $z \in K$ выполняется равенство

$$x(y+z) = (xy) + (xz).$$

Простыми примерами полей являются: множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел и множество $\mathbf{C}$ комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения.

Рассмотрим еще один пример поля, а именно, поля с p элементами, где p — простое натуральное число. Определим в множестве чисел $0, 1, \ldots, p-1$ «сумму» чисел m и n как остаток от деления обычной суммы $m+n$ на p, и «произведение» как остаток от деления обычного произведения mn на p. Читатель легко проверит, что введенные операции удовлетворяют условиям 1)–3). Полученное поле называется *полем вычетов* по модулю p и обозначается $\mathbf{F}_p$. Оно является примером *конечного* поля, т. е. поля с конечным множеством элементов.

Можно показать (см. например, Ван дер Варден [1]), что если K — конечное поле и K содержит q элементов, то $q = p^n$, где p — простое, а n — натуральное число. Число p называется *характеристикой поля* K. Поле с $q = p^n$ элементами определяется однозначно с точностью до *изоморфизма*, т. е. взаимно однозначного отображения, сохраняющего сложение и умножение; это поле обозначается через $\mathbf{F}_q$.

Мультипликативная группа поля $\mathbf{F}_q$ является циклической. Если q нечетно, то поле $\mathbf{F}_q$ содержит $(q+1)/2$ элементов u, представимых в виде $u = v^2$, где $v \in \mathbf{F}_q$; такие элементы называются *квадратами в поле* $\mathbf{F}_q$. Образующий элемент циклической группы поля $\mathbf{F}_q$ не является квадратом.

5.2. «Окружности» в конечном поле. Зафиксируем некоторый элемент поля $\mathbf{F}_q$, не являющийся квадратом, и обозначим его ε. Множество пар (x, y), $x, y \in \mathbf{F}_q$, удовлетворяющих условию $x^2 - \varepsilon y^2 = c$ для данного $c \in \mathbf{F}_q$, назовем *окружностью* в поле $\mathbf{F}_q$. Заметим, что «окружность нулевого радиуса», т. е. множество пар (x, y) таких, что $x^2 - \varepsilon y^2 = 0$, состоит из единственного элемента $(0, 0)$, так как при $y \neq 0$ элемент εy^2 не является квадратом, как и ε.

I. *Окружность $x^2 - \varepsilon y^2 = 1$ состоит из $q+1$ элемента.*

Доказательство. Очевидно, что точка $(-1, 0)$ лежит на рассматриваемой окружности, и если точка (x, y), принадлежащая окружности, удовлетворяет условию $x = -1$, то $y = 0$. Пусть (x, y) лежит на окружности и $x \neq -1$; положим $t = y/(x+1)$. Тогда последовательно имеем $x^2 - 1 = \varepsilon y^2$, $x + 1 = yt^{-1}$, $x - 1 = (x^2-1)/(x+1) = \varepsilon yt$, $(x-1)/(x+1) = \varepsilon t^2$, $x = (1+\varepsilon t^2)/(1-\varepsilon t^2)$, $y = t(x+1) = 2t/(1-\varepsilon t^2)$. Так как t — любое, то число различных элементов рассматриваемой окружности, таких, что $x \neq -1$, равно q, т. е. окружность содержит $q+1$ элемент.

II. *При любом* $c \in \mathbf{F}_q^*$ *окружность* $x^2 - \varepsilon y^2 = c$ *состоит из* $q+1$ *элемента.*

Для доказательства рассмотрим множество $\mathscr{O}$ матриц вида $a = \left\| \begin{matrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{matrix} \right\|$ таких, что $\det a = \sigma^2 - \varepsilon v^2$ отличен от нуля. Так как $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 0$ лишь при $\sigma = v = 0$, то множество $\mathscr{O}$ содержит $q^2 - 1$ элемент. Читатель легко проверит, что множество $\mathscr{O}$ является группой относительно умножения матриц, а отображение det: $a \to \det a$ есть гомоморфизм группы $\mathscr{O}$ в группу $\mathbf{F}_q^*$. Согласно I ядро этого гомоморфизма содержит $q+1$ элемент, поэтому образ гомоморфизма det содержит $(q^2-1)/(q+1) = q-1$ элемент. Так как $\mathbf{F}_q^*$ состоит из $q-1$ элемента, то образ гомоморфизма det совпадает с $\mathbf{F}_q^*$, т. е. для любого $c \neq 0$ существует смежный класс по ядру гомоморфизма det, переходящий при этом гомоморфизме в число c; так как число элементов в смежном классе равно числу элементов в ядре гомоморфизма, то утверждение доказано.

5.3. Определение группы $G = SL(2, \mathbf{F}_q)$. Порядок группы G и классы сопряженных элементов в G. Пусть $\mathbf{F}_q$ — конечное поле с $q = p^n$ элементами, где p — простое число. Обозначим через $G = SL(2, \mathbf{F}_q)$ группу всех унимодулярных магриц g второго порядка с элементами из поля $\mathbf{F}_q$:

$$g = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|; \quad a, b, c, d \in \mathbf{F}_q; \quad ad - bc = 1 \in \mathbf{F}_q.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $p \neq 2$.

Найдем порядок группы G и опишем классы сопряженных элементов.

Если $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $a \in \mathbf{F}_q^*$, то при любых b и c находим d из соотношения $ad - bc = 1$ по формуле $d = a^{-1}(1 + bc)$, т. е. если $a \in \mathbf{F}_q^*$, то b и c пробегают все $\mathbf{F}_q$ и число таких элементов группы G равно $(q-1)\,q^2$. Если $a = 0$, то $bc = -1$, т. е. $b \in \mathbf{F}_q^*$ и $c = -b^{-1}$; тогда d может быть любым; число таких элементов группы G равно $q(q-1)$. Таким образом, порядок группы G равен $q^2(q-1) + q(q-1) = q(q^2-1)$.

Найдем классы сопряженных элементов в группе G. Очевидно, что $\{e\}$ и $\{-e\}$ являются классами сопряженных элементов; ими исчерпывается центр группы G. Для описания других классов сопряженных элементов в G заметим, что если M — класс сопряженных элементов в G, содержащий элемент $g_0 \in G$, то M — однородное пространство относительно действия группы G на M по формуле $h \to ghg^{-1}$, $g \in G$, $h \in M$.

Пусть Q — стационарная подгруппа, отвечающая элементу g_0, т. е. множество элементов $g \in G$ таких, что $gg_0g^{-1} = g_0$. Число элементов в классе M равно индексу Q в G (см. III п. 1.8 гл. I).

Рассмотрим класс сопряженных элементов, определяемый элементом $g_\lambda = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}$, где $\lambda^2 \neq 1$; обозначим этот класс через A_λ.

I. *Число классов* A_λ *равно* $(q-3)/2$; *каждый из классов* A_λ *содержит* $q(q+1)$ *элементов.*

Доказательство. Стационарная подгруппа Q, соответствующая классу A_λ, состоит из элементов $g \in G$ таких, что $gg_\lambda g^{-1} = g_\lambda$, т. е. $gg_\lambda = g_\lambda g$. Как легко проверить, это означает, что подгруппа Q состоит из диагональных матриц. Поэтому Q — подгруппа порядка $q-1$, и индекс подгруппы Q в G равен $q(q^2-1)/(q-1) = q(q+1)$. Следовательно, каждый класс A_λ содержит $q(q+1)$ элемент. Число таких классов равно $(q-3)/2$, так как g_λ и g_μ ($\lambda, \mu \neq 0$, $\lambda^2 \neq 1$, $\mu^2 \neq 1$) тогда и только тогда принадлежат одному и тому же классу, когда $\lambda = \mu$ или $\lambda = \mu^{-1}$.

Рассмотрим классы сопряженных элементов, определяемые элементами

$$e_1^+ = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad e_\varepsilon^+ = \begin{Vmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \varepsilon_1^- = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad e_\varepsilon^- = \begin{Vmatrix} -1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Обозначим эти четыре класса через $B^+(1)$, $B^+(\varepsilon)$, $B^-(1)$, $B^-(\varepsilon)$ соответственно.

II. *Каждый из классов* $B^+(1)$, $B^+(\varepsilon)$, $B^-(1)$, $B^-(\varepsilon)$ *содержит* $(q^2-1)/2$ *элементов.*

Доказательство. Соответствующая подгруппа Q образована элементами $g \in G$ такими, что g перестановочен с e_1^+ (соответственно e_ε^+, e_1^-, e_ε^-), поэтому подгруппа Q состоит, как легко проверить, из всех матриц вида $\begin{Vmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix}$, где $\alpha = \pm 1$. Поэтому подгруппа Q имеет порядок $2q$; таким образом, индекс подгруппы Q в G равен $q(q^2-1)/2q = (q^2-1)/2$, т. е. каждый из классов $B^+(1)$, $B^+(\varepsilon)$, $B^-(1)$, $B^-(\varepsilon)$ состоит из $(q^2-1)/2$ элементов.

Рассмотрим класс сопряженных элементов, определяемый элементом $g_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix}$, где пара (σ, v) принадлежит «окружности единичного радиуса», т. е. $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$, причем $\sigma^2 \neq 1$. Обозначим этот класс через C_σ.

III. *Класс* C_σ *определяется числом* σ *однозначно. Каждый из классов* C_σ *содержит* $q(q-1)$ *элементов. Число классов* C_σ *равно* $(q-1)/2$.

Доказательство. Пусть $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$; при данном σ, $\sigma^2 \neq 1$, элемент v определяется однозначно с точностью до знака; покажем, что матрицы $\begin{Vmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} \sigma & -v \\ -\varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix}$ принадлежат одному и тому же классу сопряженных элементов в G. Действительно, пусть (α, β) — точка на окружности $\alpha^2 - \varepsilon\beta^2 = -1$ (согласно II п. 5.2 эта окружность не пуста); непосредственный подсчет показывает, что $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon\beta & -\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma & -v \\ -\varepsilon v & \sigma \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon\beta & -\alpha \end{Vmatrix}$, причем $\det \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon\beta & -\alpha \end{Vmatrix} = -\alpha^2 + \varepsilon\beta^2 = 1$, т. е. $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon\beta & -\alpha \end{Vmatrix} \in G$. Таким образом, класс C_σ определяется числом σ однозначно. Если также $g_\tau \in C_\sigma$, то следы матриц g_τ и g_σ равны; поэтому $\sigma = \tau$, т. е. все классы C_σ различны, и число классов C_σ равно числу $\sigma \in \mathfrak{F}_q$, таких, что $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$ при некотором $v \neq 0$. Но «окружность единичного радиуса» содержит $q + 1$ элемент, в том числе пары $(1, 0)$ и $(-1, 0)$; поэтому число пар (σ, v), $\sigma^2 \neq 1$, таких, что $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$, равно $q - 1$; с другой стороны, при данном σ элемент $v \neq 0$ определяется равенством $\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1$ с точностью до знака, поэтому число классов C_σ равно $(q - 1)/2$.

Подгруппа Q состоит из элементов $g \in G$, перестановочных с g_σ, а значит, как легко проверить, из матриц вида $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon\beta & \alpha \end{Vmatrix}$, где $\alpha^2 - \varepsilon\beta^2 = 1$. Согласно I п. 5.2 подгруппа Q имеет порядок $q + 1$, поэтому индекс Q в G равен $q(q - 1)$, т. е. число элементов в классе C_σ равно $q(q - 1)$, что завершает доказательство утверждения III.

Таким образом, число классов сопряженных элементов в G равно $2 + (q - 3)/2 + 4 + (q - 1)/2 = q + 4$ [1]. Согласно теореме 3 п. 1.7 гл. II группа G имеет в точности $q + 4$ попарно не эквивалентных представления. Найдем эти представления.

5.4. Представления T_π. Пусть π — одномерное представление (т. е. характер) группы $\mathbf{F}_q^*$ (иногда говорят, что π — мультипликативный характер поля $\mathbf{F}_q$). Обозначим через H_π пространство всех функций $f(x, y)$, $x, y \in \mathbf{F}_q$, заданных при $(x, y) \neq (0, 0)$ и удовлетворяющих условию

$$f(\lambda x, \lambda y) = \pi(\lambda)\, f(x, y) \quad (\lambda \in \mathbf{F}_q^*, \quad y \in \mathbf{F}_q, \quad (x, y) \neq (0, 0)), \tag{5.4.1}$$

[1] Число элементов группы G, принадлежащих рассматриваемым классам $\{e\}$, $\{-e\}$, A_λ, $B^+(1)$, $B^+(\varepsilon)$, $B^-(1)$, $B^-(\varepsilon)$, C_σ, равно $2 + \left(\frac{q-3}{2}\right) q(q+1) + 4\left(\frac{q^2-1}{2}\right) + \frac{q-1}{2} q(q-1) = q(q^2-1)$, т. е. равно порядку группы G.

и определим представление T_π группы G в пространстве H_π по формуле

$$(T_\pi(g)\,f)(x,\,y) = f(ax+cy,\,bx+dy) \qquad \left(g = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}\right). \tag{5.4.2}$$

Легко проверить, что соответствие $g \to T_\pi(g)$ есть действительно представление группы G.

Согласно условию (5.4.1) любая функция из H_π однозначно определяется своими значениями в $q+1$ точке: $(0,\,1)$ и $(1,\,a)$, $a \in \mathbf{F}_q$; поэтому размерность представления T_π равна $q+1$.

Найдем характер φ_π представления T_π. Рассмотрим в H_π базис, образованный векторами f_∞ и f_a, $a \in \mathbf{F}_q$, где f_∞ и f_a определяются формулами

$$\begin{gathered} f_\infty(x,\,y) = \begin{cases} \pi(x), & \text{если} \quad y = 0, \\ 0, & \text{если} \quad y \neq 0; \end{cases} \\ f_a(x,\,y) = \begin{cases} \pi(y), & \text{если} \quad x = ay, \\ 0, & \text{если} \quad x \neq ay. \end{cases} \end{gathered} \tag{5.4.3}$$

Пусть χ — некоторый фиксированный характер аддитивной группы поля $\mathbf{F}_q$ (так называемый «аддитивный характер поля $\mathbf{F}_q$») такой, что $\chi(a) \not\equiv 1$ $(a \in \mathbf{F}_q)$. Положим $e_\infty = f_\infty$, $e_u = \sum\limits_{a \in \mathbf{F}_q} \chi(ua)\,f_a$ $(u \in \mathbf{F}_q)$. Тогда, как легко проверить непосредственно,

$$\begin{aligned} T_\pi(g_\lambda)\,e_u &= \pi(\lambda)\,e_{\lambda^{-2}u}, \\ T_\pi(g_\lambda)\,e_\infty &= \pi(\lambda^{-1})\,e_\infty, \end{aligned} \tag{5.4.4а}$$

$$\begin{aligned} T_\pi\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{Vmatrix}\right) e_u &= \chi(ub)\,e_\pi, \\ T_\pi\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{Vmatrix}\right) e_\infty &= e_\infty \end{aligned} \tag{5.4.4б}$$

для всех $g_\lambda = \begin{Vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}$, $\lambda \neq 0$ и всех $b \in \mathbf{F}_q$. Так как матрицы $\begin{Vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{Vmatrix}$ сопряжены в группе G при помощи элемента $s = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, то формулы (5.4.4) позволяют найти значение характера φ_π представления T_π на классах сопряженных элементов $\{e\}$, $\{-e\}$, A_λ, $B^\pm(1)$, $B^\pm(\varepsilon)$. Очевидно, $\varphi_\pi(e) = \dim T_\pi = q+1$, $\varphi_\pi(-e) = \pi(-1)(q+1)$. Найдем $\varphi_\pi(e_1^+)$. В силу (5.4.4б)

$$\varphi_\pi(e_1^+) = \varphi_\pi\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}\right) = \sum_{u \in \mathbf{F}_q} \chi(-u) + 1. \tag{5.4.5}$$

Но χ — не единичный характер, поэтому из соотношений ортогональности (1.4.2) следует, что $\sum\limits_{u\in\mathbf{F}_q}\chi(-u)=0$; следовательно, $\varphi_\pi(e_1^+)=1$. Аналогично, $\varphi_\pi(e_\varepsilon^+)=1$; $\varphi_\pi(e_1^-)=\varphi_\pi(e_\varepsilon^-)=\pi(-1)$. Найдем $\varphi_\pi(g_\lambda)$, $\lambda\neq\pm1$. Так как $\lambda^2\neq1$, то при $\pi\neq0$ имеем $\pi\neq\lambda^2u$, поэтому диагональный матричный элемент в разложении вектора $T_\pi(g_\lambda)\,e_u$, $u\in\mathbf{F}_q$ (см. 5.4.4a) отличен от нуля лишь при $u=0$; таким образом, $\varphi_\pi(g_\lambda)=\pi(\lambda^{-1})+\pi(\lambda)$.

Остается определить характер φ_π на классе C_σ. Пусть ρ — одномерное представление подгруппы $K=\left\{\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ \mu & \lambda^{-1}\end{Vmatrix},\,\lambda\in\mathbf{F}_q^*,\,\mu\in\mathbf{F}_q\right\}$, определенное формулой: $\rho(k)=\pi(\lambda)$ при $k=\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ \mu & \lambda^{-1}\end{Vmatrix}$. Представление T_π эквивалентно представлению группы G, индуцированному представлением ρ. Действительно, пусть ψ — такая функция на G, что $\psi(kg)=\rho(k)\,\psi(g)$ для всех $k\in K$, $g\in G$, т. е.

$$\begin{aligned}\psi\left(\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ \mu & \lambda^{-1}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a & b\\ c & d\end{Vmatrix}\right)&=\\ &=\psi\left(\begin{Vmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \mu a+\lambda^{-1}c & \mu b+\lambda^{-1}d\end{Vmatrix}\right)=\\ &=\pi(\lambda)\,\psi\left(\begin{Vmatrix}a & b\\ c & d\end{Vmatrix}\right).\end{aligned}\tag{5.4.6}$$

Положим $F(a,b)=\psi\left(\begin{Vmatrix}a & b\\ c & d\end{Vmatrix}\right)$ и обозначим через X совокупность всех пар $(x,\,y)$, $x,\,y\in\mathbf{F}_q$, отличных от $(0,\,0)$. При фиксированном $(a,\,b)\in X$ общее решение уравнения $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=1$ имеет вид $c=c_0+\mu a$, $d=d_0+\mu b$, где $\mu\in\mathbf{F}_q$, $\begin{vmatrix}a & b\\ c_0 & d_0\end{vmatrix}=1$; поэтому из условия (5.4.6) следует, что функция F определена корректно, т. е. не зависит от выбора c и d таких, что $ad-bc=1$. Таким образом, между пространством индуцированного представления U^ρ и пространством H_π установлено соответствие $\psi\to F$; читатель легко проверит, что это соответствие является изоморфизмом, переводящим U^ρ в T_π. Из формулы (4.4.1) для характера индуцированного представления следует, что характер представления U^ρ равен нулю на элементах $g\in G$, не сопряженных элементам подгруппы K; поэтому $\varphi_\pi(g_\sigma)=0$. Объединяя найденные соотношения для φ_π, получаем:

I. *Пусть φ_π — характер представления T_π. Тогда*

$$\varphi_\pi(e)=q+1,\quad \varphi_\pi(-e)=(q+1)\,\pi(-1);$$

$$\varphi_\pi(g_\lambda)=\pi(\lambda)+\pi(\lambda^{-1})\quad (\lambda^2\neq1);$$

$$\varphi_\pi(e_1^+) = \varphi_\pi(e_\varepsilon^+) = 1; \quad \varphi_\pi(e_1^-) = \varphi_\pi(e_\varepsilon^-) = \pi(-1);$$
$$\varphi_\pi(g_\sigma) = 0 \quad (\sigma^2 - \varepsilon v^2 = 1, \quad \sigma^2 \neq 1).$$

Непосредственный подсчет показывает, что при $\pi^2 \not\equiv 1$ имеем $\sum\limits_{g \in G} |\varphi_\pi(g)|^2 = q(q^2-1)$. Отсюда и из II п. 1.8 следует, что:

II. *Все представления* T_π, *отвечающие характерам* π, *таким, что* $\pi^2 \not\equiv 1$, *неприводимы.*

Кроме того, из формул для φ_π следует, что:

III. *Представления* T_π, T_{π_1} $(\pi^2 \not\equiv 1,\ \pi_1^2 \not\equiv 1)$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда либо* $\pi = \pi_1$, *либо* $\pi = \pi_1^{-1}$.

Рассмотрим представление T_1, где 1 — единичный характер группы $\mathbf{F}_q^*$, так что $1(\lambda) \equiv 1$ при всех $\lambda \in \mathbf{F}_q^*$. Очевидно, что постоянные функции ($f(x, y) = c$ при всех $(x, y) \neq (0, 0)$) принадлежат H_1 и образуют одномерное инвариантное подпространство в H_1, в котором действует единичное представление 1_G группы G, характер которого φ_{1_G} тождественно равен 1. Пространство функций $f \in H_1$ таких, что $\sum\limits_{(x,y)\neq(0,0)} f(x, y) = 0$, также инвариантно относительно T_1, т. е. в этом подпространстве действует некоторое подпредставление $\widetilde{T}_1$ представления T_1, и размерность $\widetilde{T}_1$ равна q. Очевидно, характер $\varphi_{\widetilde{T}_1}$ представления $\widetilde{T}_1$ равен $\varphi_1 - \varphi_{1_G} = \varphi_1 - 1$, где φ_1 — характер представления T_1. Следовательно,

IV. *Пусть* $\widetilde{\varphi}$ — *характер представления* $\widetilde{T}_1$. *Тогда* $\widetilde{\varphi}(e) = \widetilde{\varphi}(-e) = q$; $\widetilde{\varphi}(e_1^+) = \widetilde{\varphi}(e_1^-) = \widetilde{\varphi}(e_\varepsilon^+) = \widetilde{\varphi}(e_\varepsilon^-) = 0$; $\widetilde{\varphi}(g_\lambda) = 1$; $\widetilde{\varphi}(g_\sigma) = -1$.

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\sum_{g \in G} |\widetilde{\varphi}(g)|^2 = q(q^2-1) = |G|,$$

и из предложения II п. 1.8 следует, что

V. *Представление* $\widetilde{T}_1$ *неприводимо.*

Представление T_{π_0}, где $\pi_0^2 \not\equiv 1$, $\pi_0 \not\equiv 1$, будет рассмотрено в п. 5.6.

5.5. Тригонометрическая сумма в $\mathbf{F}_q$. Пусть $\pi_0 \not\equiv 1$ — характер группы $\mathbf{F}_q^*$, принимающий значения 1 и -1. Тогда π_0 принимает значение 1 на всех квадратах в $\mathbf{F}_q^*$ $(\pi_0(a^2) = (\pi_0(a))^2 = +1)$. Множество квадратов в $\mathbf{F}_q^*$ образует подгруппу индекса 2 в $\mathbf{F}_q^*$, поэтому из условия $\pi_0 \not\equiv 1$ следует, что $\pi_0(x) = -1$ для всех элементов $x \in \mathbf{F}_q^*$, не являющихся квадратами. Характер π_0 называется *квадратичным вычетом* в поле $\mathbf{F}_q$. Заметим, что $\pi_0(\varepsilon) = -1$.

Рассмотрим функцию $f(a) = \sum\limits_{u \in \mathbf{F}_q^{*2}} \chi(au)$, где $\mathbf{F}_q^{*2}$ — подгруппа группы $\mathbf{F}_q^*$, образованная ненулевыми квадратами в $\mathbf{F}_q$. Если $a = 0$, то $f(a) = (q-1)/2$, так как порядок подгруппы $\mathbf{F}_q^{*2}$ равен $(q-1)/2$. Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$f(a) = \sum_{u=v^2\neq 0} \chi(au) = \sum_{u\neq 0} \chi(au)\, \frac{\pi_0(u)+1}{2}; \tag{5.5.1}$$

из соотношений ортогональности (1.4.2) следует, что неединичный характер χ ортогонален (как функция на группе) характеру, тождественно равному единице, т. е. $\sum_{u\in\mathbf{F}_q} \chi(u) = 0$ при $\chi \not\equiv 1$. Поэтому (см. (5.5.1))

$$f(a) = \frac{1}{2}\sum_{u\neq 0}\chi(au)\,\pi_0(u) + \frac{1}{2}\sum_{u\neq 0}\chi(au) = \frac{1}{2}\sum_{u\neq 0}\chi(au)\,\pi_0(u) - \frac{1}{2}. \tag{5.5.2}$$

Положим [1]

$$\Phi(a) = \sum_{u\neq 0}\chi(au)\,\pi_0(u); \tag{5.5.3}$$

тогда

$$\Phi(a) = \sum_{v\neq 0}\chi(v)\,\pi_0(va^{-1}) = \pi_0(a^{-1})\sum_{v\neq 0}\chi(v)\,\pi_0(v). \tag{5.5.4}$$

Обозначим $\sum_{v\neq 0}\chi(v)\,\pi_0(v)$ через $\Gamma(\pi_0)$; так как $\pi_0(a^{-1}) = \pi_0(a)$, то $\Phi(a) = \Gamma(\pi_0)\,\pi_0(a)$, поэтому

$$\sum_{a\neq 0}\Phi(a)\,\chi(av) = \Gamma(\pi_0)\sum_{a\neq 0}\pi_0(a)\,\chi(av) = \\ = \Gamma(\pi_0)\,\Phi(v) = (\Gamma(\pi_0))^2\pi_0(v). \tag{5.5.5}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\sum_{a\neq 0}\Phi(a)\,\chi(av) &= \sum_{u\neq 0}\sum_{a\neq 0}\chi(au+av)\,\pi_0(u) = \\ &= \sum_{w\neq 0}\pi_0(-w)\sum_{a\neq 0}\chi(a(v-w)) = \\ &= \sum_{w\neq 0}\pi_0(-w)(-1) + q\pi_0(-v) = q\pi_0(-v).\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

[1] Заметим, что если $\mathbf{F}$ — поле вычетов по модулю p и χ — характер, сопоставляющий элементу $k \in \mathbf{F}$ число $\chi(k) = e^{2\pi\frac{k}{p}i}$, то $\Phi(a)$ является обычной тригонометрической суммой, которая называется *гауссовой суммой*. См. Ж.-П. Серр [3].

Сравнивая (5.5.2), (5.5.4), (5.5.5) и (5.5.6), заключаем, что

$$\Gamma(\pi_0)^2 = \left(\sum_{v\neq 0}\chi(v)\,\pi_0(v)\right)^2 = q\pi_0(-1), \tag{5.5.7}$$

$$\sum_{u\in\mathbf{F}_q^{*2}}\chi(au) = \frac{1}{2}\,\Gamma(\pi_0)\,\pi_0(a) - \frac{1}{2} \quad (a\neq 0). \tag{5.5.8}$$

5.6. Представление T_{π_0}. Рассмотрим представление T_{π_0}.

Пусть χ_0 — характер представления T_π. Из I п. 5.4 с учетом равенства $\pi_0(x)^2\equiv 1$ следует, что $\sum\limits_{g\in G}|\chi_0(g)|^2 = 2\,|G|$. Следовательно, представление T_{π_0} приводимо; согласно (1.7.5) оно разлагается на два неприводимых подпредставления.

Рассмотрим ограничение представления T_{π_0} на подгруппу K. Очевидно, что любое инвариантное относительно представления T_{π_0} подпространство инвариантно также относительно $T_{\pi_0}|_K$. С другой стороны, из формул (5.4.4) следует, что подпространство $H_{\pi_0}^+$, натянутое на $\Gamma(\pi_0)\,e_\infty + e_0$ и e_{v^2}, $v\in\mathbf{F}_q^*$, и подпространство $H_{\pi_0}^-$, натянутое на $\Gamma(\pi_0)\,e_\infty - e_0$ и e_u, $u\in\mathbf{F}_q^*\diagdown\mathbf{F}_q^{*2}$, инвариантны относительно $T_{\pi_0}|_K$. Пусть θ^+, θ^- — характеры соответствующих представлений группы K. Из формул (5.5.4) следует, что $\theta^+\neq\theta^-$ (например, $\theta^+(e_1^+) = (1+\Gamma(\pi_0))/2 \neq (1-\Gamma(\pi_0))/2 = \theta^-(e_1^+)$). Следовательно, ограничения представления $T_{\pi_0}|_K$ на $H_{\pi_0}^+$ и $H_{\pi_0}^-$ не эквивалентны. С другой стороны, читатель легко проверит, используя лемму Шура или вычисляя $\sum\limits_{k\in K}|\theta^+(k)|^2$, что ограничения представления $T_{\pi_0}|_K$ на $H_{\pi_0}^+$ и $H_{\pi_0}^-$ неприводимы. Поэтому подпространства $H_{\pi_0}^+$ и $H_{\pi_0}^-$ определены однозначно как единственные собственные подпространства пространства H_{π_0}, инвариантные относительно $T_{\pi_0}|_K$. Так как представление T_{π_0} приводимо, то существует собственное подпространство $\widetilde{H}\subset H_{\pi_0}$, инвариантное относительно T_{π_0}. Тогда $\widetilde{H}$ инвариантно относительно $T_{\pi_0}|_K$, поэтому $\widetilde{H} = H_{\pi_0}^+$ или $\widetilde{H} = H_{\pi_0}^-$. Отсюда следует, что подпространства $H_{\pi_0}^+$ и $H_{\pi_0}^-$ инвариантны относительно T_{π_0}. Пусть $T_{\pi_0}^+$ и $T_{\pi_0}^-$ — сужения представления T_{π_0} в подпространствах $H_{\pi_0}^+$, $H_{\pi_0}^-$ соответственно. Очевидно, что размерности этих представлении равны $(q+1)/2$.

Найдем характеры представлений $T_{\pi_0}^+$, $T_{\pi_0}^-$. Пусть φ^+ — характер представления $T_{\pi_0}^+$. Из формул (5.4.4), (5.4.5) и (5.5.8) следует, что

$$\varphi^+(-e) = \pi_0(-1)(q+1)/2;$$

$$\varphi^+(e_1^+) = 1 + \sum_{u=v^2\neq 0}\chi(u) = (1+\Gamma(\pi_0))/2;$$

$$\varphi^+(e_\varepsilon^+) = 1 + \sum_{u=v^2\neq 0}\chi(u\varepsilon) = (1-\Gamma(\pi_0))/2;$$

$$\varphi^+(e_1^-) = (1+\Gamma(\pi_0))\,\pi_0(-1)/2;$$
$$\varphi^+(e_\varepsilon^-) = \pi_0(-1)(1-\Gamma(\pi_0))/2; \quad \varphi^+(g_\lambda) = \pi_0(\lambda).$$

Кроме того, $\varphi^+(e) = (q+1)/2$ $(= \dim T_{\pi_0}^+)$. Следовательно,

$$\sum_{g\in G} |\varphi^+(g)|^2 \geqslant ((q+1)/2)^2 + ((q+1)/2)^2 + \\ + \{|1+\Gamma(\pi_0)|^2/2 + |1-\Gamma(\pi_0)|^2/2\}(q^2-1)/2 + \\ + (q-3)\,q(q+1)/2 = q(q^2-1);$$

поэтому $\sum\limits_{g_\sigma} |\varphi^+(g)|^2 \leqslant 0$, т. е. $\varphi^+(g_\sigma) = 0$ для всех g_σ. Так как характер φ^- представления $T_{\pi_0}^-$ удовлетворяет соотношению $\varphi^- = \varphi - \varphi^+$, то получаем:

I. *Пусть φ^+, φ^- — характеры представлений $T_{\pi_0}^+$ и $T_{\pi_0}^-$ соответственно. Тогда*

$$\varphi^+(e) = (q+1)/2; \quad \varphi^+(-e) = (q+1)\,\pi_0(-1)/2;$$
$$\varphi^+(e_1^+) = (\Gamma(\pi_0)+1)/2; \quad \varphi^+(e_\varepsilon^+) = (1-\Gamma(\pi_0))/2;$$
$$\varphi^+(e_1^-) = (\Gamma(\pi_0)+1)\,\pi_0(-1)/2; \quad \varphi^+(e_\varepsilon^-) = (1-\Gamma(\pi_0))\,\pi_0(-1)/2;$$
$$\varphi^+(g_\lambda) = \pi_0(\lambda); \quad \varphi^+(g_\sigma) = 0; \quad \varphi^-(e) = (q+1)/2;$$
$$\varphi^-(-e) = (q+1)\,\pi_0(-1)/2; \quad \varphi^-(e_1^+) = (1-\Gamma(\pi_0))/2;$$
$$\varphi^-(e_\varepsilon^+) = (1+\Gamma(\pi_0))/2; \quad \varphi^-(e_1^-) = (1-\Gamma(\pi_0))\,\pi_0(-1)/2;$$
$$\varphi^-(e_\varepsilon^-) = (1+\Gamma(\pi_0))\,\pi_0(-1)/2; \quad \varphi^-(g_\lambda) = \pi_0(\lambda); \quad \varphi^-(g_\sigma) = 0.$$

Сравнивая формулы для характеров представлений T_π $(\pi^2 \neq 1)$, 1_G, $\widetilde{T}_1$, $T_{\pi_0}^+$, $T_{\pi_0}^-$, убеждаемся, что построен набор из $2+2+(q-3)/2 = (q+5)/2$ попарно не эквивалентных неприводимых представлений группы G.

5.7. Представления S_π. Построим еще один набор представлений группы G. Рассмотрим *квадратичное расширение* $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ поля $\mathbf{F}_q$, т. е. множество элементов вида $x + y\sqrt{\varepsilon}$, $x, y \in \mathbf{F}_q$, с обычными операциями сложения и умножения многочленов от $\sqrt{\varepsilon}$ с коэффициентами из $\mathbf{F}_q$, причем $\sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$. Тогда $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ превращается в поле, содержащее $\mathbf{F}_q$ в качестве подполя. Введем в $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ операцию сопряжения, полагая $\widetilde{t} = x - y\sqrt{\varepsilon}$ для $t = x + y\sqrt{\varepsilon} \in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$. Отметим, что множество $U = \{t\colon t \in \mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon}),\ t\widetilde{t} = 1\}$ образует подгруппу мультипликативной группы $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$ поля $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$.

Пусть ρ — характер группы $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$, причем $\rho(t) \not\equiv 1$ при $t \in U$. Рассмотрим векторное пространство H, образованное функциями f на $\mathbf{F}_q^*$, и определим в пространстве H представление S_ρ группы G, полагая

$$(S_\rho(g)\,f)(u) = \sum_{v\in\mathbf{F}_q^*} K_\rho(u, v; g)\,f(v),$$

где $g = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, и

$$K_\rho(u, v; g) = \\ = \begin{cases} -\dfrac{1}{q}\,\chi\left(\dfrac{du+av}{b}\right) \displaystyle\sum_{t\tilde{t}=vu^{-1}} \chi\left(-\dfrac{ut+vt^{-1}}{b}\right)\rho(t), & \text{если } b \neq 0; \quad (5.7.1\text{а}) \\ \rho(d)\,\chi(dcu)\,\delta(d^2u - v), & \text{если } b = 0; \quad (5.7.1\text{б}) \end{cases}$$

здесь δ — *символ Кронекера* ($\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, $\delta(0) = 1$); χ — фиксированный аддитивный характер поля $\mathbf{F}_q$, не равный тождественно единице.

Тот факт, что S_ρ — представление (т. е. $S(e) = 1$, $S_\rho(g_1 g_2) = S_\rho(g_1)S_\rho(g_2)$), проверяется непосредственно. Размерность S_ρ равна $q - 1$.

Пусть π — сужение характера ρ на подгруппу U. Тогда π — характер группы U, не равный тождественно единице.

Найдем характер φ_ρ представления S_ρ. Очевидно, $\varphi_\rho(e) = q - 1$, $\varphi_\rho(-e) = (q-1)\,\pi(-1)$ (так как $-1 \in U$, то $\rho(-1) = \pi(-1)$). Из формулы (5.7.1б) следует также, что $\varphi_\rho(g_\lambda) = 0$ (так как $\lambda^2 \neq 1$ для всех g_λ); $\varphi_\rho(e_1^+) = \sum\limits_{u \neq 0} \chi(u) = \sum\limits_{u} \chi(u) - 1 = -1$; аналогично, $\varphi_\rho(e_\varepsilon^+) = -1$, $\varphi_\rho(e_1^-) = \varphi_\rho(e_\varepsilon^-) = -\pi(-1)$. Заметим, что из соотношений ортогональности (1.4.2) для характеров χ_p, определяемых формулой $\chi_p(u) = \chi(pu)$, следует, что $\sum\limits_{u \neq 0} \chi(pu) = q - 1$ при $p = 0$ и $\sum\limits_{\pi \neq 0} \chi(pu) = -1$ при $p \neq 0$ ($p \in \mathbf{F}_q$), поэтому для $g = g_\sigma$ получаем, полагая $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma = a + d$, $t_0 \in U$:

$$\begin{aligned} \varphi_\rho(g_\sigma) &= \sum_{u \neq 0} K_\rho(u, u; g) = \\ &= -\frac{1}{q} \sum_{u \neq 0} \chi\left(\frac{2\sigma u}{v}\right) \sum_{t\tilde{t}=1} \chi\left(-\frac{ut + ut^{-1}}{v}\right)\rho(t) = \\ &= -\frac{1}{q} \sum_{t\tilde{t}=1} \rho(t) \sum_{u \neq 0} \chi\left(\frac{2\sigma - (t + t^{-1})}{v}\, u\right) = \\ &= -\frac{1}{q} \sum_{t\tilde{t}=1} \rho(t)(-1) - \frac{1}{q}\left(\rho(t_0)\, q + \rho(t_0^{-1})\, q\right) = -\bigl(\rho(t_0) + \rho(t_0^{-1})\bigr), \end{aligned}$$

так как из условия, что $\rho \not\equiv 1$ на U, следует, что $\sum\limits_{t\tilde{t}=1} \rho(t) = 0$. Так как $t_0 \in U$ и $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma$, то $\varphi_\rho(g_\sigma) = -\pi(t_0) - \pi(t_0^{-1})$, где $g_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & v \\ \varepsilon v & \sigma \end{pmatrix}$, $t_0\tilde{t}_0 = 1$, $t_0 + t_0^{-1} = 2\sigma$, т. е. $t_0 = \sigma \pm v\sqrt{\varepsilon}$. Объединяя полученные соотношения, получаем:

I. *Пусть* φ_ρ — *характер представления* S_ρ, π — *сужение характера* ρ *на подгруппу* U. *Тогда* $\varphi_\rho(e) = q-1$; $\varphi_\rho(-e) = (q-1) \times \times \pi(-1)$; $\varphi_\rho(g_\lambda) = 0$; $\varphi_\rho(e_1^+) = \varphi_\rho(e_\varepsilon^+) = -1$; $\varphi_\rho(e_1^-) = \varphi_\rho(e_\varepsilon^{-1}) = = -\pi(-1)$; $\varphi_\rho(g_\sigma) = -\pi(t_0) - \pi(t_0^{-1})$, *где* $t_0\widetilde{t}_0 = 1$, $t_0 + \widetilde{t}_0 = 2\sigma$.

Отсюда непосредственно следует:
II. *Если* $\rho_1 = \rho_2$ *на* U, *или* $\rho_1 = \rho_2^{-1}$ *на* U, *то* $\varphi_{\rho_1} \approx \varphi_{\rho_2}$.

Обозначим представление S_ρ через S_π, где π — сужение ρ на U. Формула для $\varphi_\rho(g_\sigma)$ однозначно определяет $\pi(t) + \pi(t^{-1})$ для всех t таких, что $t\widetilde{t} = 1$; поэтому

III. *Представления* S_{π_1} *и* S_{π_2} *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\pi_1 = \pi_2$ *или* $\pi_1 = (\pi_2)^{-1}$.

Легко проверить, что $\sum\limits_{g\in G} |\varphi_\rho(g)|^2 = q(q^2-1)$, если $\rho^2 \not\equiv 1$ на U; т. е. если $\pi^2 \not\equiv 1$ на U, то S_π неприводимо. Если $\pi_1 \not\equiv 1$ — характер U такой, что $\pi_1^2 \equiv 1$, то π_1 принимает значения ± 1, откуда сразу следует, что $\pi_1 = 1$ на подгруппе $U^2 \subset U$, образованной квадратами элементов U. Следовательно, $\pi_1 = -1$ на $U \diagdown U^2$, т. е. π_1 определен однозначно. Пусть φ_1 — характер представления S_{π_1}; тогда непосредственно проверяется, что $\sum\limits_{g\in G} |\varphi_1(g)|^2 = 2q(q^2-1)$, т. е. S_{π_1} распадается в прямую сумму двух неприводимых представлений G (см. (3.7.5)). Но из формулы (5.7.1б) следует, что подпространство $H^+ \subset H$, образованное функциями, равными нулю на $\mathbf{F}_q^* \diagdown \mathbf{F}_q^{*^2}$, и пространство $H^- \subset H$, образованное функциями, обращающимися в нуль на $\mathbf{F}_q^{*^2}$, инвариантны относительно операторов $S_{\pi_1}(k)$, $k \in K$. Более того, так как подгруппа матриц вида $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{Vmatrix}$ действует в H умножениями на характеры $\chi(cu)$, то любой оператор A в H, перестановочный с операторами представления S_{π_1}, перестановочен, в частности, с операторами умножения на $\chi(cu)$, а значит, и с операторами умножения на любую функцию $\alpha(u)$ (так как $\alpha(u)$ есть линейная комбинация характеров). Но тогда A есть оператор умножения на функцию. Действительно, если $f_0(u) \equiv 1$ и $Af_0 = \psi_A$, то

$$(A\varphi)(u) = (A(\varphi f_0))(u) = \varphi(u)(Af_0)(u) = \psi_A(u)\,\varphi(u),$$

т. е. A есть оператор умножения на $\psi_A(u)$. Так как $(S_{\pi_1}(g)\,f)(u) = = \rho(d)\,f(d^2u)$ для $g = \begin{Vmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{Vmatrix}$, то $\psi_A(d^2u) = \psi_A(u)$, т. е. функция ψ_A постоянна на смежных классах $\mathbf{F}_q^*$ по $\mathbf{F}_q^{*^2}$. Отсюда следует, что сужения представления S_{π_1} на K неприводимы на H^+ и H^-, а так как S_{π_1} приводимо, то H^+ и H^- инвариантны относительно S_{π_1} [1]). Пусть $S^+_{\pi_1}$, $S^-_{\pi_2}$ — подпредставления S_{π_1} в пространствах H^+ и H^- соответственно. Размерность каждого из представлений $S^+_{\pi_1}$, $S^-_{\pi_2}$ равна $(q-1)/2$. Найдем их характеры φ_1^+, φ_1^-.

Пусть φ_1^+ — характер представления $S^+_{\pi_1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^+(e) = (q-1)/2; \quad \varphi_1^+(-e) = \pi_1(-1)(q-1)/2;\\
&\varphi_1^+(e_\varepsilon^+) = \sum_{u=v^2\neq 0} \chi(\varepsilon u) = -(\Gamma(\pi_0)+1)/2;\\
&\varphi_1^+(e_1^-) = \sum_{u=v^2\neq 0} \chi(\varepsilon u) = -(\Gamma(\pi_0)+1)/2;\\
&\varphi_1^+(e_1^-) = \pi_1(-1)(\Gamma(\pi_0)-1)/2;\\
&\varphi_1^+(e_\varepsilon^-) = -\pi_1(-1)(\Gamma(\pi_0)+1)/2; \quad \varphi_1^+(g_\lambda) = 0
\end{aligned}$$

(так как $\lambda^2 \neq 1$, то из (5.7.1б) сразу получаем, что $K(u,u;g_\lambda) = 0$ для всех $u \neq 0$); $\varphi_1^+(g_\sigma) = \sum\limits_{u=w^2\neq 0} K_{\pi_0}(u,u;g) = -\dfrac{1}{a}\sum\limits_{t\tilde{t}=1}\pi_1(t) \times \sum\limits_{u=w^2\neq 0}\chi\left(\dfrac{2\sigma - t - t^{-1}}{v}\,u\right)$, и по формуле (5.4.2) получаем

$$\begin{aligned}
\varphi_1^+(g_\sigma) &= -\frac{1}{q}\sum_{\substack{t\tilde{t}=1\\ t\neq t_0,\tilde{t}_0}} \pi_1(t)\left\{\frac{1}{2}\,\Gamma(\pi_0)\,\pi_0\left(\frac{2\sigma-(t+t^{-1})}{v}\right) - \frac{1}{2}\right\} - \\
&\qquad - \frac{q-1}{2q}\,\{\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1})\} = \\
&= -\frac{1}{q}\,\frac{\Gamma(\pi_0)}{2}\sum_{\substack{t\tilde{t}=1\\ t\neq t_0,\tilde{t}_0}} \pi_1(t)\,\pi_0\left(\frac{2\sigma-(t+t^{-1})}{v}\right) - \frac{1}{2}\,(\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1})),
\end{aligned} \tag{5.7.2}$$

где $t_0 + \tilde{t}_0 = 2\sigma$, $t_0\tilde{t}_0 = 1$. Но так как π_1 и π_0 принимают вещественные значения, а $\Gamma(\pi_0) = (q\pi_0(-1))^{1/2}$ либо вещественно, либо чисто мнимо, то из соотношений $\sum\limits_{g\in G}|\varphi_1^+(g)|^2 = q(q^2-1)$, $\sum\limits_{g\in G}\varphi_1^+(g)\,\varphi_1^-(g) = 0$

[1]) Отсюда следует, в частности, что для $vu^{-1} \in \mathbf{F}_q^*\diagdown\mathbf{F}_q^{*2}$ имеем $K_{\pi_1}(u,v;g) = 0$, т. е. $\sum\limits_{t\tilde{t}=vu^{-1}}\chi\left(-\frac{1}{b}\,(ut+vt^{-1})\right)\rho(t) = 0$ для $vu^{-1}\in\mathbf{F}_q^*\diagdown\mathbf{F}_q^{*2}$ и любого мультипликативного характера ρ на $\mathbf{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^*$, ограничение которого на U совпадает с π_1.

(выражающих соотношения ортогональности, см. п. 1.7), следует, что

$$\sum_{\substack{t\widetilde{t}=1\\ t\neq t_0,\,\widetilde{t}_0}} \pi_1(t)\,\pi_0\left(\frac{2\sigma-(t+t^{-1})}{v}\right)=0$$

для $g=\left\|\begin{matrix}\sigma & v\\ \varepsilon v & \sigma\end{matrix}\right\|$, $t_0+t_0^{-1}=2\sigma$, $t_0\widetilde{t}_0=1$. Отсюда и из (5.7.2) следует, что $\varphi_1^+(g_\sigma)=-\dfrac{1}{2}\,(\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1}))$; так как $\varphi_1^-=\varphi_1-\varphi_1^+$, то окончательно получаем:

IV. *Пусть* φ_1^+, φ_1^- — *характеры представлений* $S_{\pi_1}^+$, $S_{\pi_1}^-$ *соответственно. Тогда* $\varphi_1^+(e)=(q-1)/2$; $\varphi_1^+(-e)=(q-1)\,\pi_1(-1)/2$;

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^+(e_1^+)=(\Gamma(\pi_0)-1)/2,\quad \varphi_1^+(e_\varepsilon^+)=-(\Gamma(\pi_0)+1)/2;\\
&\varphi_1^+(e_1^-)=(\Gamma(\pi_0)-1)\,\pi_1(-1)/2;\\
&\varphi_1^+(e_\varepsilon^-)=-(\Gamma(\pi_0)+1)\,\pi_1(-1)/2;\\
&\varphi_1^+(g_\lambda)=0;\quad \varphi_1^+(g_\lambda)=-(\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1}))/2=-\pi_1(t_0),
\end{aligned}$$

где $t_0+t_0^{-1}=2\sigma$, $t_0\widetilde{t}_0=1$;

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^-(e)=(q-1)/2;\quad \varphi_1^-(-e)=(q-1)\,\pi_1(-1)/2;\\
&\varphi_1^-(e_1^+)=-(\Gamma(\pi_0)+1)/2;\\
&\varphi_1^-(e_\varepsilon^+)=(\Gamma(\pi_0)-1)/2;\quad \varphi_1^-(e_1^-)=-(\Gamma(\pi_0)+1)\,\pi_1(-1)/2;\\
&\varphi_1^-(e_\varepsilon^-)=(\Gamma(\pi_0)-1)\,\pi_1(-1)/2;\quad \varphi_1^-(g_\lambda)=0;\\
&\varphi_1^-(g_\sigma)=-(\pi_1(t_0)+\pi_1(t_0^{-1}))/2=-(\pi_1(t_0),
\end{aligned}$$

где $t_0+t_0^{-1}=2\sigma$, $t_0\widetilde{t}_0=1$.

Представления группы G вида S_π $(\pi^2\neq 1)$, $S_{\pi_1}^+$, $S_{\pi_1}^-$ образуют набор из $(q-1)/2+2=(q+3)/2$ попарно не эквивалентных представлений. Сравнивая характеры этих представлений с характерами представлений T_π и их подпредставлений, убеждаемся, что построены $q+4$ попарно не эквивалентных неприводимых представления. Так как число классов сопряженных элементов в G равно $q+4$, то

V. *Набор из* $q+4$ *представлений* 1_G; T_π; $\pi^2\not\equiv 1$, $\widetilde{T}_1$; $T_{\pi_0}^+$; $T_{\pi_0}^-$; S_π, $\pi^2\not\equiv 1$; $S_{\pi_1}^+$; $S_{\pi_1}^-$ *образует полную систему неприводимых представлений группы* G.

Характеры неприводимых унитарных представлений группы $SL(n,\mathbf{F}_q)$ при $n>3$ найдены Грином [1*]. Изучению различных свойств представлений группы $SL(n,\mathbf{F}_q)$ посвящена работа С.И. Гельфанда [1*].

Глава III

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

§ 1. Топологические пространства

1.1. Определение топологического пространства. Множество X называется *топологическим пространством*, если в нем выделена некоторая система $\mathscr{U} = \{U\}$ подмножеств U, обладающая следующими свойствами [1]):

1) $\varnothing \in \mathscr{U}$, $X \in \mathscr{U}$;
2) объединение любого набора множеств из $\mathscr{U}$ также принадлежит $\mathscr{U}$;
3) пересечение любого конечного числа множеств, принадлежащих $\mathscr{U}$, также принадлежит $\mathscr{U}$.

Множества $U \in \mathscr{U}$ называются *открытыми* множествами топологического пространства X, а элементы $x \in X$ — *точками* этого пространства. Говорят также, что система множеств $\mathscr{U}$ определяет *топологию* T в множестве X, или также, что $\mathscr{U}$ наделяет X топологией T.

В одном и том же множестве X можно задавать различные системы $\mathscr{U}$; они определяют тогда различные топологии в X. Одно и то же множество X с различными топологиями следует рассматривать как различные топологические пространства. Одна из топологий получается, если считать открытыми все подмножества в X; очевидно, условия 1)–3) тогда выполнены. Определенная таким образом топология на X называется *дискретной*.

Система $\mathscr{V} = (V)$ множеств $V \subset X$ называется *базой* топологического пространства, если каждое открытое множество $\mathscr{U}$ в X есть объединение множеств $V \subset \mathscr{V}$. Очевидно, топологию в X можно задать, указав, какая система $\mathscr{V}$ считается базой; тогда открытыми множествами будут всевозможные объединения множеств из $\mathscr{V}$. Очевидно, система $\mathscr{V}$ тогда и только тогда будет базой топологического пространства,

[1]) $\varnothing$ здесь и всюду в дальнейшем обозначает пустое множество.

когда:

1) $\varnothing \in \mathscr{V}$;
2) пересечение любого конечного числа множеств из T есть объединение множеств из $\mathscr{V}$;
3) объединение всех множеств из T совпадает с X.

П р и м е р ы. 1. Пусть $\mathbf{R}^1$ — совокупность всех действительных чисел. Определим в $\mathbf{R}^1$ топологию, считая элементами базы всевозможные интервалы $a < x < b$ и пустое множество $\varnothing$. Очевидно, условия 1)–3) будут выполнены и открытыми множествами будут обычные открытые множества в $\mathbf{R}^1$. Топология в $\mathbf{R}^1$, таким образом определенная, называется *естественной* топологией в $\mathbf{R}^1$. Очевидно, эта топология отлична от дискретной топологии в $\mathbf{R}^1$. Всюду в дальнейшем, если это не оговорено, $\mathbf{R}^1$ обозначает топологическое пространство всех действительных чисел с естественной топологией.

2. Пусть $X = \mathbf{R}^n$ — совокупность всевозможных систем $x = \{x_1, \ldots$ $\ldots, x_n\}$, $x_k \in \mathbf{R}^1$. Определим в $\mathbf{R}^n$ топологию, считая базой систему $\mathscr{V}$, состоящую из пустого множества и всевозможных открытых параллелепипедов:

$$a_k < x_k < b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1.1}$$

Открытыми множествами будут пустое множество и всевозможные объединения параллелепипедов (1.1.1); это — обычные открытые множества в n-мерном пространстве (при $n = 2$ и $n = 3$ — обычные открытые множества на плоскости и в трехмерном пространстве соответственно). Очевидно, условия 1)–3) будут при этом выполнены. Заданная таким образом топология называется *естественной* топологией в $\mathbf{R}^n$. sp3 3. Пусть $X = \mathbf{C}^n$ — совокупность всех систем $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ комплексных чисел $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbf{R}^1$. Поставим в соответствие системе $z = \{x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n\}$ систему $x = \{x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n\} \in \mathbf{R}^{2n}$. Мы отобразим тогда $\mathbf{C}^n$ взаимно однозначно на $\mathbf{R}^{2n}$. Будем считать открытыми множествами в $\mathbf{C}^n$ прообразы открытых множеств в $\mathbf{R}^{2n}$ при этом отображении. Очевидно, базой в $\mathbf{C}^n$ будут пустое множество и всевозможные множества

$$a_k < x_k < b_k, \quad c_k < y_k < d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Заданная таким образом топология называется *естественной* топологией в $\mathbf{C}^n$.

Всюду в дальнейшем, если это не оговорено, $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ обозначают множества $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$, наделенные естественной топологией.

4. Пусть X состоит из двух точек: $X = \{a, b\}$. Введем в X топологию, считая открытыми множествами всё X, пустое множество $\varnothing$ и множество $\{a\}$, состоящее нз одной точки a. Очевидно, условия 1)–3) будут выполнены.

У п р а ж н е н и е. Доказать, что пустое множество и всевозможные открытые шары $U(a, r) = \{x\colon (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}$, $r > 0$, $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbf{R}^n$ образуют базу в $\mathbf{R}^n$.

1.2. Окрестности. *Окрестностью* $U(x)$ точки x топологического пространства X называется всякое открытое множество, содержащее x.

I. *Множество* $M \subset X$ *открыто тогда и только тогда, когда каждая точка* $x \in M$ *имеет окрестность* $U(x) \subset M$.

Действительно, если M открыто, то оно само есть такая окрестность каждой точки $x \in M$. Обратно, если каждая точка $x \in M$ имеет окрестность $U(x) \subset M$, то M есть объединение таких $U(x)$ и потому открыто в силу 2) п. 1.1.

Система $\mathscr{W}$ окрестностей точки x называется *базой окрестностей* этой точки, если каждая окрестность $U(x)$ содержит некоторую $W(x) \in \mathscr{W}$. Из этого определения непосредственно видно, что база окрестностей должна обладать следующими свойствами:

1) $x \in W(x)$;
2) каждое пересечение $W_1(x) \cap W_2(x)$ окрестностей из базы содержит окрестность, принадлежащую базе;
3) если $y \in W(x)$, то в базе окрестностей точки y существует окрестность $W(y) \subset W(x)$.

Обратно, если каждой точке $x \in X$ поставлена в соответствие система множеств $W(x)$, удовлетворяющая условиям 1)–3), то можно определить топологию в X, объявив открытыми множествами $\varnothing$ и всевозможные объединения множеств $W(x)$. Нетрудно проверить, что при этом будут выполнены условия 1)–3) п. 1.1. Сами множества $W(x)$, $x \in X$, образуют базу этого топологического пространства. Поэтому топологию в X можно также задавать, указывая базу окрестностей каждой точки $x \in X$. Так, в примере 1 п. 1.1 в качестве базы окрестностей точки x_0 можно взять всевозможные интервалы $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

1.3. Замкнутые множества; замыкание множеств. Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми* множествами. Из свойств 1)–3) открытых множеств (см. п. 1.1) следует, что:

1) пустое множество и все пространство замкнуты;
2) пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто;
3) объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Замкнутые множества обозначаются обычно буквой F, а совокупность всех F — буквой $\mathscr{F}$. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество $M \subset X$, называется *замыканием* множества M и обозначается $\overline{M}$. В силу 2) $\overline{M}$ замкнуто и, очевидно, является минимальным замкнутым множеством, содержащим M. Далее, очевидно, что $\overline{M} = M$ тогда и только тогда, когда M замкнуто и что:

1′) $M \subset \overline{M}$;
2′) $\overline{\overline{M}} = M$ (ибо $\overline{M}$ замкнуто);

3′) $\overline{M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 \cup \ldots \cup \overline{M}_n$ для любого конечного числа множеств;

4′) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Каждая точка x из $\overline{M}$ называется *точкой прикосновения* множества M; $x \in \overline{M}$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность $U(x)$ содержит по крайней мере одну точку из M. Близким к понятию точки прикосновения является понятие предела последовательности. Точку x называют *пределом последовательности* x_1, x_2, x_3, … и пишут $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если каждая окрестность $U(x)$ содержит все члены этой последовательности, начиная с некоторого. Множество $M \subset X$ называется *плотным* в X, если $\overline{M} = X$. Пространство X называется *сепарабельным*, если в X существует счетное множество, плотное в X.

Примеры. В пространствах $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{R}^n$ замкнутые множества — обычные замкнутые множества, замыкание совпадает с обычным замыканием, предел — с обычным пределом. Эти пространства сепарабельны, так как точки с рациональными координатами образуют счетное, плотное в них множество.

1.4. Сравнение топологий. Пусть на множестве X заданы две топологии T_1, T_2 при помощи систем $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ открытых множеств. Топологию T_2 называют *мажорирующей* топологию T_1 и пишут $T_1 \leqslant T_2$, если $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}_2$; если, кроме того, $\mathscr{U}_1 \neq \mathscr{U}_2$, то говорят, что T_2 *сильнее* T_1 (а также, что T_1 *слабее* T_2) и пишут $T_1 < T_2$ (а также $T_2 > T_1$). Очевидно, дискретная топология на X мажорирует каждую топологию на X.

Обозначим через $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ совокупности всех замкнутых множеств, а через $\overline{M}^1$ и $\overline{M}^2$ — замыкания множества $M \subset X$ в топологиях T_1 и T_2.

I. *Если $T_1 \leqslant T_2$ на X, то $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ и потому*

$$\overline{M}^1 \supset \overline{M}^2$$

для каждого множества $M \subset X$.

1.5. Внутренность и граница множества. Объединение всех открытых множеств, содержащихся в данном множестве $M \subset X$, есть максимальное открытое (в силу 2) п. 1.1) множество, содержащееся в M; оно называется *внутренностью* множества M и обозначается $\operatorname{int} M$. Множество $\overline{M} - \operatorname{int} M$ называется *границей* множества M и обозначается ∂M.

Примеры. Пусть $X = \mathbf{R}^n$ и

$$M_1 = \{x\colon x \in \mathbf{R}^n,\ (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \leqslant r^2\},$$
$$M_2 = \{x\colon x \in \mathbf{R}^n,\ (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < r^2\},$$
$$M_3 = \{x\colon x \in \mathbf{R}^n,\ 0 < (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < r^2\},$$
$$M_4 = \{x\colon x \in \mathbf{R}^n,\ (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = r^2\},$$

где $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $r > 0$ фиксированы. Очевидно, M_1 — замкнутый шар, M_2 — открытый шар, M_3 — открытый шар с выколотой точкой, а M_4 — сфера в $\mathbf{R}^n$ с центром a и радиусом r. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&\overline{M}_1 = M_1, \quad \operatorname{int} M_1 = M_2, \quad \partial M_1 = \operatorname{int} M_4,\\
&\overline{M}_2 = M_1, \quad \operatorname{int} M_2 = M_2, \quad \partial M_2 = M_4,\\
&\overline{M}_3 = M_1, \quad \operatorname{int} M_3 = M_3, \quad \partial M_3 = \{a, M_4\},\\
&\overline{M}_4 = M_4, \quad \operatorname{int} M_4 = \varnothing, \quad \partial M_4 = M_4.
\end{aligned}$$

1.6. Подпространства. Всякое подмножество Y топологического пространства X можно превратить в топологическое пространство, считая открытыми множествами в Y пересечения с Y открытых множеств из X. Пространство Y с таким образом определенной в нем топологией называют *подпространством* пространства X и говорят, что топология в Y *индуцирована* топологией пространства X. Из этого определения непосредственно следует, что:

1) если $\mathscr{V} = \{V\}$ — база в X, то $\{V \cap Y\}$ — база в Y;
2) всякое замкнутое множество в Y есть пересечение с Y замкнутого множества в X;
3) замыкание в Y всякого множества $M \subset Y$ есть пересечение с Y замыкания множества M в X.

Из 2) заключаем:

I. *Если Y замкнуто в X, то каждое множество $M \subset Y$, замкнутое в Y, замкнуто также в X.*

II. *Если $M_1 \subset M_2 \subset X$, то замыкание в M_1 каждого множества $A \subset M_1$ есть пересечение с M_1 замыкания множества A в M_2.*

Доказательство. Пусть $(\overline{A})_{M_1}$, $(\overline{A})_{M_2}$, $\overline{A}$ — замыкания множества A в M_1, M_2 и X соответственно. Тогда $(\overline{A})_{M_1} = \overline{A} \cap M_1$ и $(\overline{A})_{M_1} \cap M_1 = (\overline{A} \cap M_2) \cap M_1 = \overline{A} \cap (M_2 \cap M_1) = \overline{A} \cap M_1 = (\overline{A})_{M_1}$.

Примеры. 1. Множества $[a, b] = \{x\colon x \in \mathbf{R}^1,\ a \leqslant x \leqslant b\}$ и $(a, b) = \{x\colon x \in \mathbf{R}^1,\ a < x < b\}$, рассматриваемые как подпространства пространства $\mathbf{R}^1$, называются соответственно *отрезком* и *интервалом*.

2. Аналогично, множества $[a_1, b_1; a_2, b_2] = \{x\colon x \in \mathbf{R}^2,\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\}$ и $(a_1, b_1; a_2 b_2) = \{x\colon x \in \mathbf{R}^2,\ a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2\}$, рассматриваемые как подпространства пространства $\mathbf{R}^2$, называются соответственно *замкнутым* и *открытым прямоугольником*.

Замечание. Открытое (соответственно замкнутое) множество в подпространстве Y пространства X может не быть открытым (соответственно замкнутым) множеством в X. Так, при $X = \mathbf{R}^1$, $Y = [a, b]$ (см. выше пример 1) каждое множество $[a, \alpha) = \{x\colon x \in \mathbf{R}^1,\ a \leqslant x < \alpha\}$, $a < \alpha < b$, открыто в Y, но не открыто в X.

1.7. Отображения топологических пространств. Пусть f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. По аналогии с обычным определением непрерывной функции отображение f называют *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если прообраз каждой окрестности $V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ содержит некоторую окрестность $U(x_0)$ точки x_0. Отображение f пространства X в пространство Y называют *непрерывным*, если f непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Из этого определения и предложения 1 п. 1.2 непосредственно следует:

I. *Отображение f пространства X в пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества из Y есть открытое множество в X (или когда прообраз каждого замкнутого множества из Y есть замкнутое множество в X).*

Кроме того,

II. *Если непрерывное отображение f пространства X в пространство Y отображает множество $M \subset X$ в множество $N \subset Y$, то оно отображает также $\overline{M}$ в $\overline{N}$.*

Действительно, $f^{-1}(\overline{N})$ замкнуто в силу I и содержит M, а значит, и $\overline{M}$.

Если f — непрерывное отображение пространства X в Y, то f называют также *непрерывной функцией* на X со значениями в Y, а $f(X)$ — *непрерывным образом* пространства X (в пространстве Y). Если, в частности, X — отрезок: $X = [a, b]$ (см. пример 1 п. 1.5), то непрерывный образ $f(X) = f([a, b])$ в Y называется *непрерывной кривой* в Y; $f(a)$ называется *началом*, а $f(b)$ — *концом* этой кривой. Говорят также, что эта кривая *соединяет* точки $f(a)$ и $f(b)$. Кривая называется *замкнутой*, если ее начало и конец совпадают.

Отображение f пространства X на пространство Y называют *гомеоморфизмом*, если:

1) f взаимно однозначно;

2) отображения f и f^{-1} непрерывны.

Отображение f пространства X в пространство Y называют *гомеоморфизмом X в Y*, если f — гомеоморфизм X на $f(X)$, рассматриваемое как топологическое подпространство пространства Y. Два топологических пространства X и Y называют *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм X на Y. Из предложения I непосредственно следует:

III. *При гомеоморфизме X на Y открытые множества отображаются на открытые множества, замкнутые на замкнутые и замыкание каждого множества в X отображается на замыкание образа этого мнсжества в Y. Таким образом, при гомеоморфизме сохраняются свойства множества быть замкнутым, огкрытым или замыканием некоторого множества.*

Свойства, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, называют *топологическими*, а отрасль математики, изучающую топологические свойства, — *топологией*.

1.8. Отделимые пространства. Топологическое пространство X называется *отделимым* (или *хаусдорфовым*), если оно удовлетворяет следующей аксиоме отделимости: каждые две различные точки в X имеют непересекающиеся окрестности.

Так, пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ (примеры п. 1.1) отделимы. Пространство $X = \{a, b\}$ в примере 4 п. 1.1 не отделимо. Действительно, единственной окрестностью точки b является все X, а оно пересекается с каждой окрестностью точки a.

I. *Если f и φ — два непрерывных отображения пространства X в отделимое пространство Y, то множество $M_1 = \{y\colon f(x) \neq \varphi(x)\}$ открыто, а множество $M_2 = \{x\colon f(x) = \varphi(x)\}$ замкнуто.*

Доказательство. Достаточно доказать, что M_1 открыто, ибо M_2 есть дополнение к M_1 в X. Пусть $x \in M$, т.е. $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$. Тогда существуют непересекающиеся окрестности $U = U(f(x_0))$ и $V = V(\varphi(x_0))$. В силу непрерывности f и φ существует окрестность $W(x_0)$, образы которой при отображениях f и φ содержатся соответственно в U и V. Так как U и V не пересекаются, то $W(x_0) \subset M_1$. Таким образом, для каждой точки $x \in M_1$ существует окрестность $W(x_0) \subset M_1$, в силу I п. 1.2 M_1 открыто.

Следствие. *Если f_j, φ_j, $j = 1, \ldots, m$, — непрерывные отображения пространства X в отделимое пространство Y, то множество $M = \{x\colon f_j(x) = \varphi_j(x),\ j = 1, \ldots, m\}$ замкнуто.*

Действительно, M есть пересечение множеств $M_j = \{x\colon f_j(x) = \varphi_j(x)\}$, $j = 1, \ldots, m$, замкнутых в силу I.

II. *Если два непрерывных отображения f и φ пространства X в отделимое пространство Y совпадают на множестве $N \subset X$, то они также совпадают на $\overline{N}$.*

Доказательство. Пусть M_2 — то же, что и в I. Тогда $N \subset M_2$ и потому $\overline{N} \subset \overline{M}_2 = M_2$; следовательно, $f(x) = \varphi(x)$ на $\overline{N}$.

III. *Если f и φ — две непрерывные вещественные функции на отделимом пространстве X, то множество $M_1 = \{x\colon f(x) < \varphi(x)\}$ открыто, а множество $M_2 = \{x\colon f(x) \geqslant \varphi(x)\}$ замкнуто.*

Доказательство совпадает с доказательством предложения I. В рассматриваемом случае $Y = \mathbf{R}^1$.

IV. *Всякое конечное множество в отделимом пространстве замкнуто.*

Доказательство. Достаточно доказать предложение IV для множества $\{x_0\}$, состоящего из одной точки x_0, ибо объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто (свойство 3) п. 1.3). Но если $x_1 \neq x_0$, то существует окрестность $U(x_1)$, не содержащая x_0, ибо X отделимо. Поэтому $X - \{x_0\}$ открыто, следовательно, $\{x_0\}$ замкнуто.

1.9. Топологическое произведение пространств. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — топологические пространства. Обозначим через $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ совокупность всех систем $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_j \in X_j$,

$j = 1, \ldots, n$; вообще, если $M_1, \ldots, M_n$ — произвольные множества в $X_1, \ldots, X_n$ соответственно, то $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ обозначает совокупность всех систем $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, которые получаются, когда $x_1, \ldots, x_n$ независимо друг от друга пробегают $M_1, \ldots, M_n$.

Введем в $X_1 \times \ldots \times X_n$ топологию, считая базой окрестностей точки $x^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ совокупность всех множеств $U_1(x_1^0) \times \ldots \times U_n(x_n^0)$, где $U_i(x_i^0)$ — произвольные окрестности из базы окрестностей точки x_i^0. Очевидно, аксиомы 1)–3) базы окрестностей (см. п. 1.2) будут выполнены, так что $X_1 \times \ldots \times X_n$ станет топологическим пространством; это пространство называется *топологическим произведением* [1]) пространств $X_1, \ldots, X_n$.

Если $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то x_j называют *j-й координатой точки x и проекцией точки x на X_j*.

I. *Отображение $\{x_1, \ldots, x_n\} \to x_j$ пространства $X_1 \times \ldots \times X_n$ на X_j непрерывно.*

Утверждение непосредственно следует из определения топологии в $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Примеры и упражнения. 1. Пространство $\mathbf{R}^n$ есть топологическое произведение n экземпляров пространства $\mathbf{R}$ (см. примеры 1 и 2 п. 1.1). Действительно, интервалы (a_j, b_j), содержащие точку x_j, образуют базу ее окрестностей, а параллелепипеды $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, содержащие $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, — базу окрестностей точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Аналогично, $\mathbf{C}^n$ есть топологическое произведение n экземпляров пространства $\mathbf{C}^1$ (см. пример 3 п. 7.1).

2. Доказать, что топологическое произведение отделимых пространств отделимо.

§ 2. Топологические группы

2.1. Определение топологической группы. Множество G называется *топологической группой*, если:

а) G — группа;

б) G — отделимое [2]) топологическое пространство;

в) функции $f_1(g) = g^{-1}$ и $f_2(g, h) = gh$ непрерывны (вторая по совокупности переменных $g, h \in G$).

---

[1]) Это определение может быть обобщено и на случай бесконечного числа пространств (см., например, Бурбаки [3], или Наймарк [1]); однако нам такое обобщение не понадобится.

[2]) В действительности отделимость пространства G (и даже более сильное утверждение) следует из условий а), в) и более слабого, чем отделимость, условия: для каждых двух различных элементов $g_1, g_2 \in G$ существует окрестность каждого из них, не содержащая другой (см., например, Понтрягин [1], § 17).

Условие в) означает, что f_1 есть непрерывное отображение G в G, а f_2 — непрерывное отображение $G \times G$ в G (см. п. 1.9). Из определения группы (см. п. 1.1 гл. I) следует, что в действительности f_1 и f_2 отображают на G.

Всякая группа G становится топологической, если ее наделить дискретной топологией, ибо на дискретном топологическом пространстве все функции, в частности, f_1 и f_2 в условии в), непрерывны (см. I п. 1.7). Такая топологическая группа называется *дискретной*.

I. *Отображение $g \to g^{-1}$ есть гомеоморфизм топологического пространства G на G.*

Действительно, отображение f_1: $g \to g^{-1}$ непрерывно в силу условия в); обратное отображение к $g \to g^{-1}$ совпадает с f_1 (ибо f_1: $g^{-1} \to (g^{-1})^{-1} = g$) и потому также непрерывно.

Из I следует, что если U — окрестность единицы, то U^{-1} — также окрестность единицы.

II. *Всякая окрестность единицы U содержит симметричную окрестность единицы, т. е. окрестность V, удовлетворяющую условию $V^{-1} = V$.*

Действительно, такой окрестностью является $V = U \cap U^{-1}$.

III. *Всякая окрестность U единицы содержит окрестность V единицы такую, что $VV \subset U$.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $f_2(g_1, g_2) = g_1 g_2$ при $g_1 = e$, $g_2 = e$ существуют окрестности V_1, V_2 единицы, для которых $V_1 V_2 \subset U$; тогда окрестность $V = V_1 \cap V_2$ удовлетворяет условию $VV \subset U$.

Примеры. 1. $\mathbf{R}^1$ — группа (см. пример 1 п. 1.1) и $\mathbf{R}^1$ с естественной топологией, — отделимое топологическое пространство. Очевидно, условие в) выполняется; оно означает, что $f_2(x) = -x$ и $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ — непрерывные функции. Следовательно, $\mathbf{R}^1$ с естественной топологией — топологическая группа. Аналогично, $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ с естественной топологией — топологические группы.

2. $\mathbf{R}_0^1$ — группа и $\mathbf{R}_0^1$ — топологическое пространство в естественной топологии (топологии подпространства в $\mathbf{R}^1$). Условие в) выполняется; оно означает, что $f_1(x) = x^{-1}$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$ — непрерывные функции на $\mathbf{R}_0^1$ и $\mathbf{R}_1^0 \times \mathbf{R}_1^0$. Следовательно, $\mathbf{R}_0^1$ с естественной топологией — топологическая группа. Аналогично, $\mathbf{R}_0^+$ и $\mathbf{C}_0^1$ с естественной топологией — топологические группы.

3. Полная линейная группа $GL(n, \mathbf{C})$. Каждый элемент

$$g = \left\| \begin{matrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{matrix} \right\| \in GL(n, \mathbf{C})$$

можно рассматривать как точку $(g_{11}, \ldots, g_{1n}, g_{21}, \ldots, g_{2n}, g_{n1}, \ldots \ldots, g_{nn})$ пространства $\mathbf{C}^{n^2}$ и, следовательно, всю группу $GL(n, \mathbf{C})$ —

как подмножество в $\mathbf{C}^{n^2}$. Мы наделим $GL(n, \mathbf{C})$ топологией подпространства пространства $\mathbf{C}^{n^2}$ с естественной топологией (см. пример 3 п. 1.1), и эту топологию будем называть *естественной топологией* группы $GL(n, \mathbf{C})$. Докажем непрерывность функций f_1 и f_2 в условии в). Пусть G_{ji} — алгебраическое дополнение элемента g_{ji} в матрице g. По определению топологии в $\mathbf{C}^{n^2}$ и в $GL(n, \mathbf{C})$ непрерывность функций f_1 и f_2 означает непрерывность на $GL(n, \mathbf{C})$ их матричных элементов

$$
\begin{aligned}
f_{1jl} &= (g_{jl}^{-1} = \frac{G_{ij}}{\det g}, \\
f_{2jl} &= (gj)_{ji} = \sum_{s=1}^{n} g_{js} h_{sl}, \quad j, l = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{2.1.1}
$$

Но G_{jl} и $\det g$ — многочлены от g_{ji} и, значит, непрерывны на всем $\mathbf{C}^{n^2}$, а потому и на $GL(n, \mathbf{C})$. Кроме того, $\det g \neq 0$ на $GL(n, \mathbf{C})$; следовательно, f_{1jl} непрерывны на $GL(n, \mathbf{C})$. Далее, функция $f_{2jl} = \sum\limits_{s=1}^{n} g_{js} h_{sl}$ есть многочлен от g_{jl}, h_{jl} и потому непрерывна на всем $\mathbf{C}^{n^2} \times \mathbf{C}^{n^2}$, а значит, и на $GL(n, \mathbf{C}) \times GL(n, \mathbf{C})$. Таким образом, условие в) выполняется; следовательно, $GL(n, \mathbf{C})$ с естественной топологией есть топологическая группа.

Аналогично определяется естественная топология в $GL(n, \mathbf{R})$ и доказывается, что в этой топологии $GL(n, \mathbf{R})$ — топологическая группа; надо только заменить $\mathbf{C}^{n^2}$ пространством $\mathbf{R}^{n^2}$.

Из определения топологии в $GL(n, \mathbf{C})$ следует, что множества

$$
W(g^0, \varepsilon) = \{g \colon g \in GL(n, \mathbf{C}), \quad |g_{jl} - g_{jl}^0| < \varepsilon, \quad j, l = 1, 2, \ldots, n\}
$$

образуют в этой топологии базу окрестностей элемента $g^0 \in G$. Отметим еще, что $GL(n, \mathbf{C})$ и $GL(n, \mathbf{R})$ — открытые множества в $\mathbf{C}^{n^2}$ и $\mathbf{R}^{n^2}$ соответственно. Действительно,

$$
\begin{aligned}
GL(n, \mathbf{C}) &= \{g \colon g \in \mathbf{C}^{n^2}, \ \det g \neq 0\}, \\
GL(n, \mathbf{R}) &= \{g \colon g \in \mathbf{R}^{n^2}, \ \det g \neq 0\},
\end{aligned}
$$

так что утверждение следует из I п. 1.8 и непрерывности функции $\det g$. В дальнейшем, если это не оговорено, все группы в примерах 1)–3) считаются топологическими группами с их естественной топологией.

2.2. Сдвиги на топологической группе.

I. *Правый сдвиг $g \to gg_0$ и левый сдвиг $g \to g_0 g$ на топологической группе G являются гомеоморфизмами пространства G на G.*

Доказательство. Правый сдвиг $g \to gg_0$ взаимно однозначно отображает G на G и непрерывен в силу условия в) п. 2.1. Обратное к сдвигу $g \to gg_0$ отображение есть сдвиг $g \to gg_0^{-1}$ и потому оно также непрерывно; следовательно, правый сдвиг есть гомеоморфизм. Аналогично доказывается, что левый сдвиг — гомеоморфизм.

II. *Если* $\{W(g)\}$ — *база окрестностей элемента* g *топологической группы* G, *то* $\{W(g)\,g_0\}$ *и* $\{g_0W(g)\}$ — *базы окрестностей элементов* gg_0 *и* g_0g *соответственно. В частности, если* $\{W(e)\}$ — *база окрестностей единичного элемента* e *группы* G, *то* $\{W(e)(g_0)\}$ *и* $\{g_0W(e)\}$ — *базы окрестностей элемента* $g_0 \in G$.

Утверждение непосредственно вытекает из I и III п. 1.7. Из предложения II следует, что топология на группе полностью определяется заданием базы окрестностей $\{W(e)\}$ единичного элемента; базы окрестностей других элементов получаются из них правыми или левыми сдвигами.

2.3. Подгруппы топологической группы. Пусть G — топологическая группа, H — подгруппа группы G. Наделим H топологией, считая H топологическим подпространством (см. 1.6) пространства G. Условие в) п. 2.1 будет при этом выполнено в H, так как оно выполняется во всей группе G. Следовательно, H с таким образом определенной топологией станет топологической группой. В дальнейшем, если это не оговорено, *подгруппа топологической группы* G *будет предполагаться наделенной топологией подпространства топологического пространства* G.

Подгруппа H группы G называется *замкнутой*, если она — замкнутое подмножество в пространстве G. Топологическая группа G называется *линейной группой*, если она изоморфна (как топологическая группа) некоторой подгруппе группы $GL(n, \mathbf{C})$ или $GL(n, \mathbf{R})$.

Примеры. 1. $GL(n, \mathbf{R})$ — подгруппа группы $GL(n, \mathbf{C})$; она замкнута в силу следствия п. 1.8. Действительно,

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{g \colon g \in GL(n, \mathbf{C}), \quad \operatorname{Im} g_{jl} = 0, \quad j, l = 1, \ldots, n\}$$

и $\operatorname{Im} g_{jl}$ — непрерывные функции на $GL(n, \mathbf{C})$.

2. $SL(n, \mathbf{C})$ — подгруппа группы $GL(n, \mathbf{R})$; она замкнута, ибо

$$SL(n, \mathbf{C}) = \{g \colon g \in GL(n, \mathbf{C}), \quad \det g = 1\}$$

и $\det g$ — непрерывная функция на $GL(n, \mathbf{C})$. Аналогично, $SL(n, \mathbf{R})$ — замкнутая подгруппа группы $GL(n, \mathbf{R})$, а значит, и группы $GL(n, \mathbf{C})$.

3. $U(n)$ и $SU(n)$ — подгруппы групп $GL(n, \mathbf{C})$ и $SL(n, \mathbf{C})$ соответственно. Они замкнуты, ибо

$$U(n) = \Big\{g \colon g \in GL(n, \mathbf{C}), \quad \sum_{s=1}^{n} \overline{g}_{sj} g_{sl} = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \ldots, n\Big\},$$

$$SU(n) = \Big\{g \colon g \in SL(n, \mathbf{C}), \quad \sum_{s=1}^{n} \overline{g}_{sj} g_{sl} = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, \ldots, n\Big\},$$

где

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = l, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq l, \end{cases}$$

а функции $\sum\limits_{s=1}^{n} \overline{g}_{sj} g_{sl}$, $j, l = 1, \ldots, n$, непрерывны на $GL(n, \mathbf{C})$ и $SL(n, \mathbf{C})$.

2.4. Фактор-пространство. Фактор-группа. Пусть G — топологическая группа, H — ее подгруппа. Положим $\widetilde{G} = G/H$, где G/H — пространство правых смежных классов группы G по H и обозначим через φ каноническое отображение G на $\widetilde{G}$. Введем в $\widetilde{G}$ топологию, считая открытыми множествами в G образы $\varphi(U)$ открытых множеств U в G при отображении φ. Очевидно, условия 1)–3) п. 1.1 будут выполнены; следовательно, система всевозможных $\varphi(U)$ определяет топологию в $\widetilde{G}$. В дальнейшем мы будем считать $\widetilde{G}$ наделенным этой топологией.

Отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *открытым*, если образ каждого открытого в X множества открыт.

I. *Каноническое отображение φ пространства G на $\widetilde{G} = G/H$ открыто и непрерывно.*

Доказательство. Из самого определения топологии в $\widetilde{G}$ следует, что φ открыто. Далее, пусть $\widetilde{U}$ — открытое множество в $\widetilde{G}$. По определению топологии в $\widetilde{G}$, $\widetilde{U} = \varphi(U)$, где U открыто в G. Поэтому прообраз множества $\widetilde{U}$

$$\varphi^{-1}(\widetilde{U}) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$$

открыт как объединение открытых множеств Uh (см. I п. 2.2); следовательно, ψ непрерывно.

II. *Если H — замкнутая подгруппа топологической группы G, то фактор-пространство $\widetilde{G} = G/H$ отделимо.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in \widetilde{G}$ и $\widetilde{g}_1 \neq \widetilde{g}_2$. Пусть $g_1 \in \widetilde{g}_1$, $g_2 \in \widetilde{g}_2$. Так как $\widetilde{g}_1 \neq \widetilde{g}_2$, то $g_1^{-1} g_2 \notin H$. В силу замкнутости H отсюда следует, что существует окрестность U элемента $g_1^{-1} g_2$, не пересекающаяся с H:

$$U \cap H = \varnothing. \tag{2.4.1}$$

С другой стороны, в силу непрерывности функций $f_1(g) = g^{-1}$ и $f_2(g, h) = gh$ (см. п. 2.1) существуют такие окрестности U_1 и U_2 элементов g_1 и g_2, что

$$U_1^{-1} U_2 \subset U. \tag{2.4.2}$$

Положим $\widetilde{U}_1 = \varphi(U_1)$, $\widetilde{U}_2 = \varphi(U_2)$; по определению топологии в $\widetilde{G}$ множества $\widetilde{U}_1$ и $\widetilde{U}_2$ — окрестности классов $\widetilde{g}_1$ и $\widetilde{g}_2$. Докажем, что $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \varnothing$. Предположим противное; пусть

$$\widetilde{g}_0 \in \widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2). \tag{2.4.3}$$

Из (2.4.3) заключаем, что существуют такие элементы

$$g_0, g_0' \in \widetilde{g}_0, \tag{2.4.4}$$

что $g_0 \in U_1$, $g_0' \in U_2$; следовательно,

$$g_0^{-1} g_0' \in U_1^{-1} U_2. \tag{2.4.5}$$

С другой стороны, из (2.4.4) вытекает, что

$$g_0^{-1} g_0' \in H. \tag{2.4.6}$$

Но (2.4.5) и (2.4.6) противоречат соотношению (2.4.1); следовательно, $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \varnothing$ и отделимость пространства $\widetilde{G}$ доказана.

III. *Пусть H — подгруппа топологической группы G. Тогда для каждого $g_0 \in G$ отображение $\widetilde{g}_0$: $\widetilde{g} \to \widetilde{g} g_0$ есть гомеоморфизм пространства $\widetilde{G}$ на $\widetilde{G}$.*

Доказательство. Отображение $g \to \widetilde{g} g_0$ взаимно однозначно отображает $\widetilde{G}$ на $\widetilde{G}$ (см. п. 1.7 гл. I); докажем, что оно непрерывно.

Пусть $\widetilde{U}$ — открытое множество в $\widetilde{G}$; надо доказать, что его прообраз $\widetilde{U}\overline{g_0^{-1}}$ открыт в $\widetilde{G}$. Но $\widetilde{U} = \varphi(U)$, где U открыто в G и, по определению преобразования $\overline{g}_0$,

$$\widetilde{U}\overline{g_0^{-1}} = \varphi(U g_0^{-1}),$$

где $U g_0^{-1}$ открыто в силу I п. 2.2; следовательно, $\widetilde{U}\overline{g_0^{-1}}$ открыто в $\widetilde{G}$ и g_0 непрерывно. Применяя этот результат к g_0^{-1} вместо g_0, заключаем, что $(\overline{g}_0)^{-1} = \overline{g_0^{-1}}$ непрерывно. Следовательно, отображение $\overline{g}_0$ есть гомеоморфизм.

Очевидно, что в пространстве левых смежных классов можно аналогичным образом определить топологию; тогда имеют место предложения, аналогичные предложениям II и III.

IV. *Если H — замкнутый нормальный делитель топологической группы G, то G/H — топологическая группа.*

Доказательство. G/H — группа и G/H — отделимое топологическое пространство. Остается доказать, что для G/H выполняется условие в) п. 2.1. Положим снова $\widetilde{G} = G/H$ и обозначим снова через φ каноническое отображение $G \to \widetilde{G}$. Пусть $\widetilde{U}$ — окрестность элемента $\widetilde{g}_1^{-1} \in \widetilde{G}$. Тогда существуют такой элемент $g_1^{-1} \in \widetilde{g}_1^{-1}$ и такая его окрестность U, что $\widetilde{U} = \varphi(U)$. В силу непрерывности функции $f(g) = g^{-1}$ существует такая окрестность U_1 элемента t_1, что

$$U_1^{-1} \subset U. \tag{2.4.7}$$

Положим $\widetilde{U}_1 = \varphi(U_1)$; тогда $\widetilde{U}_1$ — окрестность элемента $\widetilde{g}_1$ и в силу (2.4.7)

$$\widetilde{U}_1^{-1} = \varphi(U_1)^{-1} \subset \varphi(U) = \widetilde{U}.$$

Следовательно, функция $f_1(\widetilde{g}) = \widetilde{g}^{-1}$ непрерывна на $\widetilde{G}$. Далее, пусть U — окрестность элемента $\widetilde{g}\widetilde{h}$, где $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \widetilde{G}$. Тогда существуют такие элементы $g \in \widetilde{g}$, $h \in \widetilde{h}$ и такая окрестность U элемента gh, что $\widetilde{U} = \varphi(U)$. В силу непрерывности функции $f_2(g, h) = gh$ существуют такие окрестности U_1, U_2 элементов g, h, что

$$U_1 U_2 \subset U. \tag{2.4.8}$$

Положим $\widetilde{U}_1 = \varphi(\widetilde{U}_1)$, $\widetilde{U}_2 = \varphi(U_2)$; тогда $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$ — окрестности элементов $\widetilde{g}$, $\widetilde{h}$ и в силу (2.4.8)

$$\widetilde{U}_1 \widetilde{U} - 2 = \varphi(U_1)\,\varphi(U_2) = \varphi(U_1 U_2) \subset \varphi(U) = \widetilde{U}.$$

Следовательно, функция $f_2(\widetilde{g}, \widetilde{h}) = \widetilde{g}\widetilde{h}$ непрерывна на $\widetilde{G}$. Итак, выполняется условие в) п. 2.1, так что $\widetilde{G}$ — топологическая группа.

2.5. Гомоморфизм и изоморфизм топологических групп. Пусть G и G' — топологические группы. Отображение f группы G в группу G' называется *непрерывным гомоморфизмом* G в G', если:

а) f — непрерывное отображение пространства G на пространство G';

б) f — гомоморфизм группы G в группу G'.

Если, кроме того, $f(G) = G'$, то f называется *непрерывным гомоморфизмом* группы G *на* группу G'.

I. *Если H — замкнутый нормальный делитель топологической группы G, то каноническое отображение φ группы G на фактор-группу G/H есть открытый непрерывный гомоморфизм G на G/H.*

Действительно, φ — гомоморфизм (см. п. 1.6 гл. I) и φ открыт и непрерывен в силу I п. 2.4.

Отображение f группы G в группу G' называется *непрерывным изоморфизмом G в G'*, если:

а$'$) f — непрерывное отображение пространства G в пространство G';

б$'$) f — изоморфизм группы G в группу G'.

Если, кроме того, $f(g) = G'$, то f называется *непрерывным изоморфизмом группы G на группу G'.*

Отображение f группы G в группу G' называется *топологическим изоморфизмом G в G''*, если

а$''$) f — гомеоморфизм пространства G в пространство G';

б$''$) f — изоморфизм группы G в группу G'.

Если, кроме того, $f(G) = G'$, то f называется *топологическим изоморфизмом группы G на группу G'*. Две топологические группы, G и G', называются *топологически изоморфными*, если существует топологический изоморфизм G на группу G'.

II. 1. *Если f — непрерывный гомоморфизм группы G на группу G' и $H = \ker f$, то*:

а) *H — замкнутый нормальный делитель группы G*;

б) *$f = \psi\varphi$, где φ — канонический гомоморфизм группы G на группу G/H, а ψ — непрерывный изоморфизм группы $\widetilde{G}$ на группу G'.*

2. *Если, кроме того, f открыт, то ψ — топологический изоморфизм группы $\widetilde{G} = G/H$ на группу G', так что $\widetilde{G}$ и G' топологически изоморфны.*

Доказательство. 1. H замкнут, как прообраз одной точки (единичного элемента e' группы G). Далее, соотношение $f = \psi\varphi$, где φ — канонический гомоморфизм G на $\widetilde{G} = G/H$, а ψ — изоморфизм группы $\widetilde{G}$ на G', доказано в III п. 1.5 гл. I. Поэтому для доказательства утверждения б) остается показать, что ψ непрерывен. Пусть U' — открытое множество в G'. Положим $\psi^{-1}(U') = \widetilde{U}$; нам надо доказать, что $\widetilde{U}$ открыто. Положим $\psi^{-1}(U') = U$; U открыто, ибо f непрерывен и $U' = f(U) = (\psi\varphi)(U) = \psi(\varphi(U))$. Отсюда, поскольку ψ взаимно однозначен (ψ — изоморфизм!),

$$\widetilde{U} = \psi^{-1}(U') = \varphi(U),$$

так что $\widetilde{U} = \varphi(U)$ открыто по определению топологии в $\widetilde{G}$.

2. Пусть f непрерывен и открыт; докажем, что ψ — топологический изоморфизм. По доказанному выше (п. 1) ψ непрерывен; поэтому остается доказать, что ψ^{-1} непрерывен.

Пусть $\widetilde{U}$ — открытое множество в $\widetilde{G}$. Положим

$$U' = (\psi^{-1})^{-1}(\widetilde{U}) = \psi(\widetilde{U}); \tag{2.5.1}$$

надо доказать, что U' открыто в G'. По определению топологии в $\widetilde{G}$

$$\widetilde{U} = \varphi(U), \tag{2.5.2}$$

где U открыто в G. Но тогда в силу (2.5.1)

$$U' = \psi(\varphi(U)) = f(U),$$

так что U' открыто в G', поскольку f открыт.

Замечание. Для широких классов топологических групп, в частности, для $GL(n, \mathbf{C})$ и ее замкнутых подгрупп, уже из непрерывности гомоморфизма следует, что он открыт (см. Понтрягин [1], § 20, теорема 12).

Топологический изоморфизм топологической группы G на G называется *топологическим автоморфизмом* (ср. п. 1.6 гл. I). Например, отображение

$$g \to g_1^{-1} g g_1 \tag{2.5.3}$$

есть топологический автоморфизм (I п. 2.2) для каждого $g_1 \in G$. Топологические автоморфизмы, заданные формулой (2.5.3), называются *внутренними*, а все другие — *внешними*.

В дальнейшем, в применении к топологическим группам, термины *гомоморфизм*, *изоморфизм*, *автоморфизм*, *изоморфность* будут соответственно означать *непрерывный гомоморфизм*, *топологический изоморфизм*, *топологический автоморфизм* и *топологическую изоморфность*. Если же речь будет идти о гомоморфизме, изоморфизме, автоморфизме и изоморфности в смысле определений гл. I, то к этим терминам будет добавлено прилагательное *алгебраический*.

Примеры и упражнения. 1. Доказать, что: а) отображение f: $g \to \det g$ (пример I п. 1.6 гл. I) есть открытый непрерывный гомоморфизм группы $GL(n, \mathbf{C})$ на группу $\mathbf{C}_0^1$; б) фактор-группа $\widetilde{G} = GL(n, \mathbf{C})/SL(n, \mathbf{C})$ топологически изоморфна группе $\mathbf{C}_0^1$.

2. Доказать, что группы G_X при $\dim X = n$ и $GL(n, \mathbf{C})$ топологически изоморфны (см. пример 3, п. 1.6 гл. I).

3. Одномерный тор $\mathscr{T}^1$ изоморфен фактор-группе $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ (см. пример 4 п. 1.6 гл. I). Определим топологию в $\mathscr{T}$, считая открытыми множествами в $\mathscr{T}^1$ образы открытых множеств в $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$ при этом изоморфизме. Тогда $\mathscr{T}^1$ станет топологической группой и группа $\mathscr{T}^1$ будет топологически изоморфна группе $\mathbf{R}^1/\mathbf{N}$. Описать непосредственно топологию в $\mathscr{T}^1$. Используя изоморфизм группы $\mathscr{T}^1$ и Γ^1 (вращений окружности, см. пример 1 п. 1.7 гл. I), определить топологию в Γ^1 так, чтобы $\mathscr{T}^1$ и Γ^1 были топологически изоморфны. В дальнейшем, если это не оговорено, $\mathscr{T}^1$ и Γ^1 считаются топологическими группами с определенными таким образом топологиями, которые называются *естественными*. Доказать, что пространства $\mathscr{T}^1$ и Γ^1 гомеоморфны окружности с ее естественной топологией.

4. Доказать, что *если гомоморфизм f топологической группы G в топологическую группу G_1 непрерывен в единичном элементе $e \in \in G$, то f непрерывен.*

Указание. Воспользоваться предложением I п. 2.2.

2.6. Группы преобразований топологического пространства. *Преобразованием топологического пространства X* называется всякий гомеоморфизм пространства X на X. Произведение двух гомеоморфизмов пространства X и обратный к гомеоморфизму пространства X есть также гомеоморфизм этого пространства. Кроме того, тождественное преобразование есть, очевидно, гомеоморфизм. Отсюда следует, что *совокупность всех преобразований топологического пространства X есть группа*; ее единичным элементом является тождественное преобразование. Всякая подгруппа G этой группы называется *группой преобразований* пространства X, а пара (X, G) — *топологическим пространством X с группой преобразований G*.

Всякое преобразование топологического пространства X является также преобразованием множества X (см. п. 1.5 гл. I); поэтому мы можем применить к преобразованиям топологического пространства обозначения, терминологию и результаты пп. 1.5, 1.7 гл. I. В частности, мы будем пользоваться и правой: $x \to xg$, и левой: $x \to gx$ записями для преобразования g. Если надо это подчеркнуть, то мы будем обозначать через G_r группу правых преобразований и через G_l — группу левых преобразований. В дальнейшем, для определенности, мы будем здесь рассматривать группы правых преобразований и писать G вместо G_r. Полученные для G_r результаты остаются верными, с надлежащими видоизменениями, и для G_l.

Часто группа G преобразований пространства X является топологической группой. Это обстоятельство, а также тот факт, что преобразования пространства X являются его гомеоморфизмами, приводит к дополнениям топологического характера в результатах пп. 1.5, 1.7 гл. I.

Каждую топологическую группу G можно следующим образом представить как группу преобразований.

Положим $X = G$ и каждому элементу $g_0 \in G$ поставим в соответствие правый сдвиг $\widehat{g}_0$: $g \to gg_0$. Тогда $\widehat{g}_0$ — гомеоморфизм пространства G (I п. 2.2) и отображение $4g_0 \to \widehat{g}_0$ есть алгебраический изоморфизм группы G на группу $\widehat{G}$ всех правых сдвигов (II п. 1.6 гл. I). Введем в $\widehat{G}$ топологию, считая открытыми множествами в $\widehat{G}$ образы открытых множеств в G при отображении $g_0 \to \widehat{g}_0$. Легко видеть, что тогда $\widehat{G}$ станет топологической группой, а отображение $g_0 \to \widehat{g}_0$ станет изоморфизмом топологической группы G на топологическую группу $\widehat{G}$. Таким образом,

I. *Всякая топологическая группа G изоморфна топологической группе $\widehat{G}$ правых сдвигов на G.*

Аналогичное утверждение имеет место для группы левых сдвигов.

II. *Пусть G — топологическая группа, H — ее замкнутая подгруппа, $\widetilde{G} = G/H$ — топологическое пространство правых смежных классов группы G по подгруппе H. Тогда*:

1) *для каждого $g_0 \in G$ отображение $\overline{g}_0$, определенное формулой*

$$\{g\}\overline{g}_0 = \{gg_0\}, \tag{2.6.1}$$

где $\{g\} \in \widetilde{G}$, есть преобразование топологического пространства $\widetilde{G}$.

2) *$\widetilde{G}$ — однородное пространство относительно группы $\widetilde{G}$ всех преобразований $\overline{g}_0$, $g_0 \in G$.*

3) *Отображение f: $g \to \overline{g}$ есть гомоморфизм группы G на группу $\overline{G}$ и ядро N этого гомоморфизма есть содержащийся в H нормальный делитель группы G.*

Доказательство. Утверждение 1) совпадает с III п. 2.4, а утверждения 2) и 3) доказаны в п. 1.7 гл. I.

Предположим теперь, что ядро N гомоморфизма $f\colon g \to \overline{g}$ замкнуто в G. Положим $\dot{G} = G/N$. Тогда $\dot{G}$ — топологическая группа (IV п. 2.4) и $\dot{f} = \dot{\psi}\dot{\varphi}$, где $\dot{\varphi}$ — каноническое отображение G на $\dot{G}$, а $\dot{\psi}$ — алгебраический изоморфизм $\dot{G}$ на $\overline{G}$ (п. 1.7 гл. I). Определим в $\overline{G}$ топологию, считая открытыми множествами в $\overline{G}$ образы открытых множеств в $\dot{G}$ при изоморфизме $\dot{\psi}$. Очевидно, что тогда $\overline{G}$ станет топологической группой, топологически изоморфной группе $\dot{G}$. В дальнейшем мы всегда будем считать (разумеется, если N замкнуто), что $\overline{G}$ — топологическая группа с определенной выше топологией. Если, в частности, $N = \{e\}$, то $\dot{G} = G$ и $\overline{G}$ (топологически) изоморфна группе G.

III. *Пусть (X, G) — топологическое пространство с топологической группой правых преобразований G, однородное относительно G; H — стационарная группа фиксированной точки $x_0 \in X$ и f — отображение, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие правый класс $\widetilde{g} = \{g\} \in G/H$ всех элементов g из G, для которых $x_0 g = x$. Пусть выполнено условие*:

α) *соответствие ω: $g \to x_0 g$ есть открытое непрерывное отображение группы G в X.*

Тогда f есть гомеоморфизм пространства X на $G = G/H$, при котором каждое преобразование $g_0 \in G$ переходит в преобразование $\overline{g}_0$ пространства $\widetilde{G}$, определенное формулой

$$\{g\}\overline{g}_0 = \{gg_0\} \quad \text{\textit{при}} \quad \{g\} \in \widetilde{G},$$

так что $f(xg) = f(x)\,\overline{g}$. Полученное соответствие ψ: $g_0 \to \overline{g}$ есть топологический изоморфизм группы G на группу $\overline{G}$.

Доказательство. В утверждении III п. 1.7 гл. I было доказано, что f взаимно однозначно и что ψ — изоморфизм группы G на группу $\overline{G}$. Поэтому надо только доказать, что f и ψ — гомеоморфизмы. Прежде всего отметим, что H замкнута, как прообраз одной точки x_0 при непрерывном отображении ω (см. условие α)); поэтому $\widetilde{G} = G/H$ — отделимое топологическое пространство (II п. 2.4). Пусть $\widetilde{U}$ — открытое множество в $\widetilde{G}$; тогда $\widetilde{U} = \varphi(U)$, где U — открытое множество в G, а φ — каноническое отображение $G \to \widetilde{G}$ (см. п. 2.4). Но из определения отображений f и ω следует, что

$$f\omega = \varphi \tag{2.6.2}$$

и потому $f\omega(U) = \varphi(U) = \widetilde{U}$. Отсюда $f^{-1}(\widetilde{U}) = \omega(U)$ открыто, ибо ω — открытое отображение (см. условие α)); следовательно, f непрерывно. Пусть теперь V — открытое множество в X. Положим $U = \omega^{-1}(V)$; тогда U открыто в G в силу непрерывности отображения ω (условие α)). С другой стороны, из (2.6.2) заключаем, что $f(V) = f\omega(U) = \varphi(U)$ открыто в $\widetilde{G}$ по определению топологии в $\widetilde{G}$. Следовательно, f^{-1} также непрерывно и f — гомеоморфизм. Из самого определения топологии в $\overline{G}$ (см. выше) непосредственно следует, что ψ — также гомеоморфизм.

Доказанное предложение III приводит к следующему определению.

Два однородных пространства X, X' с топологическими группами преобразований G, G' соответственно называются *топологически эквивалентными*, если существуют:

а) топологический изоморфизм φ: $g \to g'$ группы G на группу G';

б) гомеоморфизм f: $g \to g'$ пространства X на X', такие, что если $x \to x'$, то $xg \to x'g'$, т. е. такие, что

$$f(xg) = f(x)\,\varphi(g).$$

Предложение III означает, что *всякое однородное пространство X с топологической группой преобразований G, удовлетворяющее условию α) при некотором $x_0 \in X$, топологически изоморфно пространству $\widetilde{G} = G/H$ с группой преобразований $\overline{G}$, где H — стационарная группа точки $x_0 \in X$.* Обычно отождествляют X с $\widetilde{G}$ и G с $\overline{G}$; это отождествление называется *канонической реализацией* пары (X, G), а сама пара $(\widetilde{G}, \overline{G})$ — *канонической моделью* однородного пространства.

Таким образом, *всякое однородное пространство, удовлетворяющее условию α) при некотором $x_0 \in X$, топологически изоморфно некоторой канонической модели.* В дальнейшем, в применении к топологическим однородным пространствам с топологической группой преобразований, термин *изоморфизм* будет означать топологический изоморфизм. Если же речь будет идти об изоморфизме в смысле определения в п. 1.7 гл. I, то мы будем добавлять к этому термину прилагательное *алгебраический*.

Замечание. *Из условия α) в предложении* III *следует, что в действительности для каждого $x \in X$ соответствие ω_x: $g \to xg$ есть открытое отображение группы G в X.* Действительно, пусть выполнено условие α) для точки x_0. Поскольку X однородно, то существует такой элемент $g_0 \in G$, что $x_0 g_0 = x$. Тогда в силу соотношения $xg = (x_0 g_0)\,g = x_0(g_0 g)$ отображение ω_x открыто как произведение гомеоморфизма $g \to g_0 g$ (I п. 2.1) и открытого отображения ω.

§ 3. Определение конечномерного представления топологической группы; примеры

3.1. Непрерывные функции на топологической группе. Пусть $f(g)$ — числовая функция, заданная на топологической группе G; функция $f(g)$ называется *непрерывной* на G, если $f(g)$ непрерывна на топологическом пространстве G.

Пусть, далее, X — конечномерное комплексное векторное пространство, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ $(n = \dim X)$ — фиксированный базис в X,

$f(g)$ — векторная функция со значениями в X, заданная на топологической группе G; $f_1(g), \ldots, f_n(g)$ — компоненты функции f в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Функция $f(g)$ называется *непрерывной* на группе G, если числовые функции $f_1(g), \ldots, f_n(g)$ непрерывны на G. Это определение не зависит от выбора базиса $e_1, \ldots, e_n$ в X. Действительно, компоненты $f'_j(g)$ функции $f(g)$ в другом базисе $e'_1, \ldots, e'_n$ являются линейными комбинациями компонент $f_j(g)$ с постоянными коэффициентами; следовательно, из непрерывности функций f_j следует непрерывность функций f'_j.

Пусть, наконец, $A(g)$ — операторная функция на G, значениями которой являются линейные операторы в X. Функция $A(g)$ называется *непрерывной* на G, если $A(g)\,x$ — непрерывная векторная функция на G для каждого $x \in X$. Из этого определения ясно, что:

I. *Непрерывность функции $A(g)$ равносильна непрерывности ее матричных элементов $a_{jl}(g)$ в каком-нибудь, а значит, в любом другом, базисе $e_1, \ldots, e_n$ в X.*

Действительно, непрерывность функции $A(g)\,x$ равносильна непрерывности вектор-функций

$$A(g)\,e_l = \sum_{j=1}^{n} a_{jl}(g)\,e_j,$$

а значит, числовых функций $a_{jl}(g)$.

3.2. Определение конечномерного представления топологической группы. Пусть G — топологическая группа, X — конечномерное комплексное пространство $\neq (0)$. *Представлением* топологической группы G в пространстве X называется отображение T, которое каждому элементу g группы G ставит в соответствие линейный оператор $T(g)$ в пространстве X так, что выполнены условия:

1) $T(e) = 1$, где 1 — единичный оператор в X;

2) $T(g_1 g_2) = T(g_1)\,T(g_2)$;

3) $T(g)$ — непрерывная операторная функция на G.

Таким образом, по сравнению с определением в п. 2.1 гл. I здесь добавлено условие 3) непрерывности [1] операторной функции $T(g)$, которое в дальнейшем будет играть существенную роль. Представления же в смысле определения п. 2.1 гл. I (т.е. не обязательно удовлетворяющие условию 3)) мы будем теперь называть *алгебраическими* представлениями.

I. *Если T — представление топологической группы G в пространстве X, то его сужение на подгруппу группы G, а также его сужение на инвариантном подпространстве пространства X,*

---

[1] Чтобы это подчеркнуть, представления топологической группы часто называют *непрерывными*.

удовлетворяет условию 3), *т.е. также является представлением топологической группы.*

Отсюда следует, что все определения и предложения § 2 гл. I применимы к представлениям топологических групп.

II. *Матричные элементы* $t_{jl}(g)$ *и характер* $\chi_T(g)$ *конечномерного представления топологической группы* G — *непрерывные числовые функции на* G.

Непрерывность матричных элементов $t_{jl}(g)$ следует из условия 3) и предложения I п. 3.1, а характера $\chi_T(g)$ — из формулы (см. (2.9.3) гл. I)

$$\chi_T(g) = \sum_{j=1}^{n} t_{jj}(g).$$

Из предложения I и определения топологии в $GL(n, \mathbf{C})$ заключаем, что представление топологической группы G в n-мерном пространстве есть непрерывный гомоморфизм группы G в группу $GL(n, \mathbf{C})$, и это свойство может быть принято в качестве другого определения конечномерного представления топологической группы.

III. *Все одномерные представления*

$$g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_n \to f(g_1, g_2, \ldots, g_n), \quad g_1 \in G_1, \ \ldots, g_n \in G_n, \tag{3.2.1}$$

прямого произведения $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ *топологических групп* G_1, $G_2, \ldots, G_n$ *задаются формулой*

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = f_1(g_1)\, f_2(g_2) \ldots f_n(g_n), \tag{3.2.2}$$

где

$$g_j \to f_j(g_j), \quad g_j \in G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

— *одномерные представления групп* $G_1, \ldots, G_n$. *Представление* (3.2.1) *унитарно тогда и только тогда, когда унитарно каждое из представлений* (3.2.3).

Доказательство. Алгебраическая часть утверждений предложения II доказана в II п. 2.7 гл. I. Остается заметить, что непрерывность функции $f(g_1, \ldots, g_n)$ в (3.2.2) на $G_1 \times \ldots \times G_n$ равносильна непрерывности каждой из функций $f_1(g_1), \ldots, f_n(g_n)$ на $G_1, \ldots, G_n$ соответственно.

3.3. Описание всех одномерных представлений простейших коммутативных топологических групп. Каждое неприводимое конечномерное представление коммутативной группы одномерно (см. следствие из леммы 2 п. 2.2 гл. I). Поэтому для коммутативных групп задача описания всех неприводимых конечномерных представлений сводится просто к нахождению всех одномерных представлений этих групп.

а). Одномерные представления группы $\mathbf{R}^1$. Каждое одномерное представление группы $\mathbf{R}^1$ задается (вообще говоря, комплекснозначной) числовой функцией $\alpha \to f(\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$, удовлетворяющей условиям:

$$f(0) = 1, \tag{3.3.1}$$

$$f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1)\, f(\alpha_2), \tag{3.3.2}$$

и непрерывной в силу условия 3) п. 3.2 (см. (2.1.4) гл. I). Найдем общий вид функции, удовлетворяющей этим условиям; тем самым будут найдены все одномерные представления группы $\mathbf{R}^1$. Из равенств

$$f(\alpha)\, f(-\alpha) = f(\alpha - \alpha) = f(0) = 1$$

следует, что

$$f(\alpha) \neq 0 \quad \text{при каждом} \quad \alpha \in \mathbf{R}^1. \tag{3.3.3}$$

Далее:

I. *Функция $f(\alpha)$ дифференцируема и ее производная непрерывна* [1] *в каждой точке $\alpha \in \mathbf{R}^1$.*

Доказательство. Пусть $\omega(\alpha)$ — непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^1$, равная нулю вне некоторой окрестности точки $\alpha_0 \in \mathbf{R}^1$ и такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, \omega(\alpha)\, d\alpha \neq 0; \tag{3.3.4}$$

в силу (3.3.3) такая функция $\omega(\alpha)$ существует. Умножим обе части (3.3.2) на $\omega(\alpha_2)$ и проинтегрируем обе части полученного равенства по α_2 от $-\infty$ до $+\infty$. Мы получим [2]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_1 + \alpha_2)\, \omega(\alpha_2)\, d\alpha_2 = f(\alpha_1) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_2)\, \omega(\alpha_2)\, d\alpha_2. \tag{3.3.5}$$

Положим $c = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_2)\, \omega(\alpha_2)\, d\alpha_2$; в силу (3.3.4) $c \neq 0$; поэтому из (3.3.5) заключаем, что

$$f(\alpha_1) = \frac{1}{c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_1 + \alpha_2)\, \omega(\alpha_2)\, d\alpha_2 = \frac{1}{c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, \omega(\alpha - \alpha_1)\, d\alpha. \tag{3.3.6}$$

Но правая часть (3.3.5) непрерывно дифференцируема по α_1, ибо этим свойством обладает $\omega(\alpha - \alpha_1)$, а интеграл в действительности берется по конечному интервалу; следовательно, $f(\alpha_1)$ также непрерывно дифференцируема.

---

[1] Кратко, $f(a)$ — непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}^1$.

[2] Этот прием в более общей ситуации принадлежит И. М. Гельфанду (Гельфанд И. М. [2*]).

Замечание 1. Беря в качестве $\omega(\alpha)$ бесконечно дифференцируемую функцию и используя (3.3.6), легко убедиться, что и $f(\alpha)$ бесконечно дифференцируема.

II. *Функция $f(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{df}{d\alpha} = kf, \tag{3.3.7}$$

где k — некоторая постоянная.

Доказательство. Дифференцируя обе части (3.3.2) по α_1 и полагая затем $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$, получаем

$$f'(\alpha) = f'(0)\, f(\alpha) = kf(\alpha), \tag{3.3.8}$$

где $k = f'(0)$; очевидно, (3.3.8) совпадает с (3.3.7).

Но всякое решение уравнения (3.3.7), удовлетворяющее условию (3.3.1), имеет вид

$$f(\alpha) = e^{k\alpha};$$

мы приходим к следующему результату:

III. *Все одномерные представления $\alpha \to f(\alpha)$ группы $\mathbf{R}^1$ задаются формулой*

$$f(\alpha) = e^{k\alpha}, \tag{3.3.9}$$

где k — некоторая (вообще говоря, комплексная) постоянная.

Найдем все унитарные одномерные представления $\alpha \to f(\alpha)$ группы $\mathbf{R}^1$. Унитарность в одномерном случае означает, что $|f(\alpha)| = 1$; при $f(\alpha) = e^{k\alpha}$ это возможно лишь, если k чисто мнимо, $k = i\tau$, $\tau \in \mathbf{R}^1$. Таким образом,

IV. *Всякое унитарное одномерное представление $\alpha \to f(\alpha)$ группы $\mathbf{R}^1$ задается формулой*

$$f(\alpha) = e^{i\tau\alpha}, \tag{3.3.10}$$

где τ — некоторая действительная постоянная; обратно, при каждом $\tau \in \mathbf{R}^1$ формула (3.3.10) *определяет одномерное унитарное представление группы $\mathbf{R}^1$.*

Замечание 2. Читатель уже обратил внимание на тот замечательный факт, что только из непрерывности представления $\alpha \to f(\alpha)$ уже следует дифференцируемость (и в силу (3.3.9) даже аналитичность!) функции $f(\alpha)$. Как мы увидим ниже, аналогичный факт имеет место для широких классов групп.

б). Одномерные представления группы $\mathbf{R}^n$. Группа $\mathbf{R}^n$ есть прямое произведение n экземпляров группы $\mathbf{R}^1$. Поэтому, комбинируя предложение III п. 3.2 и предложения III и IV примера а), заключаем:

Все одномерные представления $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ группы $\mathbf{R}^n$ задаются формулой

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = e^{k_1\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n}, \tag{3.3.11}$$

где $k_1, \ldots, k_n$ *— произвольные комплексные числа. Эти представления унитарны тогда и только тогда, когда*

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = e^{i(\tau_1\alpha_1+\ldots+\tau_n\alpha_n)}, \quad \tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbf{R}^1. \tag{3.3.12}$$

в). Одномерные представления группы $\mathbf{C}^n$. Группа $\mathbf{C}^n$ изоморфна группе $\mathbf{R}^{2n}$ и отображение $(z_1, \ldots, z_n) \to (\alpha_1, \beta_1, \ldots \ldots, \alpha_n, \beta_n)$ есть изоморфизм группы $\mathbf{C}^n$ на группу $\mathbf{R}^{2n}$, где

$$z_j = \alpha_j + i\beta_j. \tag{3.3.13}$$

Поэтому одномерное представление

$$(z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$$

группы $\mathbf{C}^n$ определяет одномерное представление

$$(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) \to f(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$$

группы $\mathbf{R}^{2n}$ при

$$f(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) = \varphi(\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n). \tag{3.3.14}$$

Следовательно, в силу (3.3.11)

$$f(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) = e^{k_1\alpha_1+i_1\beta_1+\ldots+k_n\alpha_n+i_n\beta_n}. \tag{3.3.15}$$

Но в силу (3.3.13)

$$\alpha_j = \frac{z_j + \overline{z}_j}{2}, \quad \beta_j = \frac{z_j - \overline{z}_j}{2i}. \tag{3.3.16}$$

Положим, кроме того,

$$p_j = \frac{1}{2}(k_j - il_j), \quad q_j = \frac{1}{2}(k_j + il_j). \tag{3.3.17}$$

Из (3.3.14) и (3.3.17) получаем

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = e^{p_1z_1+q_1\overline{z}_1+\ldots+p_nz_n+q_n\overline{z}_n}. \tag{3.3.18}$$

Следовательно, *все одномерные представления* $(z_1, \ldots, z_n) \to \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ *группы* $\mathbf{C}^n$ *задаются формулой* (3.3.18), *где* $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ *— произвольные комплексные числа.*

Представление унитарно тогда и только тогда, когда k_j, l_j чисто мнимы. Отсюда и из (3.3.17) заключаем: *Все одномерные унитарные представления* $(z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ *группы* $\mathbf{C}^n$ *задаются формулой*

$$\varphi(z_1, \ldots z_n) = e^{p_1z_1-\overline{p}_1\overline{z}_1+\ldots+p_nz_n-\overline{p}_n\overline{z}_n}, \tag{3.3.19}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ *— произвольные комплексные числа.*

г). Одномерные представления группы Γ^1 (группа вращений окружности; см. пример 1 п. 1.7 гл. I). Каждое вращение окружности задается углом α поворота, причем повороты на α

и на $\alpha + 2\pi$ считаются одним и тем же вращением. Поэтому в одномерном представлении

$$\alpha \to f(\alpha) \tag{3.3.20}$$

группы Γ^1 функция $f(\alpha)$, кроме условий в примере а), должна еще удовлетворять условию

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha). \tag{3.3.21}$$

Из условий в примере а) следует, что $f(\alpha) = e^{k\alpha}$, а из условия (3.3.21), что $k = im$, где m — целое число. Таким образом,

Все одномерные представления $\alpha \to f(\alpha)$ группы Γ^1 задаются формулой

$$f(\alpha) = e^{im\alpha}, \tag{3.3.22}$$

где m — произвольное целое число.

Очевидно, *все эти представления унитарны.*

д). Одномерные представления тора $\mathscr{T}^1$. Тор $\mathscr{T}^1$ изоморфен группе Γ^1 и отображение $\alpha \to \beta = \dfrac{1}{2\pi}\,\alpha$ есть изоморфизм $\Gamma^1 \to \mathscr{T}^1$ (см. пример 1 п. 1.6 гл. I). Поэтому одномерное представление

$$\beta \to \varphi(\beta) \tag{3.3.23}$$

группы $\mathscr{T}^1$ определяет одномерное представление

$$\alpha \to f(\alpha)$$

группы Γ^1 при

$$f(\alpha) = \varphi\left(\frac{1}{2\pi}\,\alpha\right). \tag{3.3.24}$$

Но, как было показано в примере г),

$$f(\alpha) = e^{im\alpha},$$

где m — целое число. Комбинируя эту формулу с (3.3.24), заключаем:

Все одномерные представления $\beta \to \varphi(\beta)$ тора $\mathscr{T}^1$ задаются формулой

$$\varphi(\beta) = e^{2\pi i m\beta}, \tag{3.3.25}$$

где m — произвольное целое число.

Очевидно, все эти представления унитарны.

е). Одномерные представления тора $\mathscr{T}^n$. Тор $\mathscr{T}^n$ есть прямое произведение n экземпляров группы $\mathscr{T}^1$. Поэтому, комбинируя результат задачи д) с III п. 2.3, заключаем:

Все одномерные представления $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \to \varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ тора $\mathscr{T}^n$ задаются формулой

$$\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n) = e^{2\pi i(m_1\beta_1 + \ldots + m_n\beta_n)}, \tag{3.3.26}$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — произвольные целые числа. Все эти представления унитарны.

ж). Одномерные представления группы $\mathbf{R}_0^+$. Обозначим через $\mathbf{R}_0^+$ совокупность всех положительных чисел, рассматриваемую как топологическую подгруппу топологической группы $\mathbf{R}_0$. Очевидно, отображение $\beta \to \alpha = \ln\beta$ есть изоморфизм группы $\mathbf{R}_0^+$ на группу $\mathbf{R}^1$. Поэтому одномерное представление $\beta \to \varphi(\beta)$ группы $\mathbf{R}_0^+$ определяет одномерное представление $\alpha \to f(\alpha)$ группы $\mathbf{R}^1$, если положить

$$f(\alpha) = \varphi(e^n), \quad \text{следовательно}, \quad \varphi(\beta) = f(\ln\beta). \tag{3.3.27}$$

Согласно предложению III в примере а) $f(\alpha) = e^{k\alpha} = e^{k\ln\beta} = \beta^k$. Отсюда и из (3.3.27) заключаем:

Все одномерные представления $\beta \to \varphi(\beta)$ группы $\mathbf{R}_0^+$ задаются формулой

$$\varphi(\beta) = \beta^k = e^{k\ln\beta}, \tag{3.3.28}$$

где k — произвольное комплексное число. Эти представления унитарны тогда и только тогда, когда $k = i\tau$, $\tau \in \mathbf{R}^1$.

з). Одномерные представления группы $\mathbf{R}_0$. Обозначим через $\mathbf{R}_0^-$ совокупность всех отрицательных чисел; тогда $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0^+ \cup \mathbf{R}_0^-$ и каждое число $\beta \in \mathbf{R}_0^-$ имеет вид $\beta = (-1)|\beta|$. Пусть $\beta \to \varphi(\beta)$ — одномерное представление группы $\mathbf{R}_0$. Его сужение на $\mathbf{R}_0^+$ есть одномерное представление группы $\mathbf{R}_0^+$; следовательно, в силу (3.3.28)

$$\varphi(\beta) = \beta^k \quad \text{при} \quad \beta > 0, \tag{3.3.29}$$

где k — произвольное комплексное число. Для $\beta < 0$ в силу (3.3.29)

$$\varphi(\beta) = \varphi((-1)|\beta|) = \varphi(-1)\,\varphi(|\beta|) = \varphi(-1)|\beta|^k. \tag{3.3.30}$$

Но из

$$\varphi(-1)\,\varphi(-1) = \varphi((-1)^k) = \varphi(1) = 1$$

следует, что $\varphi(-1) = \pm 1 = (-1)^\varepsilon$, где $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$. Поэтому формулу (3.3.30) можно переписать в виде

$$\varphi(\beta) = (-1)^\varepsilon|\beta|^k \quad \text{при} \quad \Pi < 0. \tag{3.3.31}$$

Формулы (3.3.29), (3.3.31) можно объединить в виде одной формулы:

$$\varphi(\beta) = (\operatorname{sign}\beta)^\varepsilon|\beta|^k. \tag{3.3.32}$$

Таким образом,

Все одномерные представления группы $\mathbf{R}_0$ задаются формулой (3.3.32), *где k — произвольное комплексное число, а $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$. Эти представления унитарны тогда и только тогда, когда k — чисто мнимое.*

и). Одномерные представления группы $\mathbf{C}_0^1$. Группа $\mathbf{C}_0^1$ изоморфна прямому произведению $\mathbf{R}_0^1 \times \Gamma^1$ и отображение $z \to (r, \alpha)$ при $z = |r|$, $\alpha = \arg z$ есть изоморфизм группы $\mathbf{C}_0^1$ на $\mathbf{R}_0^+ \times \Gamma^1$. Комбинируя II п. 3.2 с (3.3.22) и (3.3.28), заключаем:

Все одномерные представления $z \to \varphi(z)$ *группы* $\mathbf{C}_0^1$ *задаются формулой*

$$\varphi(z) = |z|^k e^{im \arg z}, \tag{3.3.33}$$

где k — *произвольное комплексное, а* m — *произвольное целое число. Эти представления унитарны тогда и только тогда, когда* k — *чисто мнимое.*

к). Одномерные представления группы $\mathbf{C}_0^n$. Группа $\mathbf{C}_0^n$ есть прямое произведение n экземпляров группы $\mathbf{C}_0^n$. Поэтому, комбинируя III п. 3.2 с (3.3.33), получаем:

Все одномерные представления $(z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(z_1, \ldots, z_n)$ *группы* $\mathbf{C}_0^n$ *задаются формулой*

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = |z_1|^{k_1} \ldots |z_n|^{k_n} e^{i(m_1 \arg z_1 + \ldots + m_n \arg z_n)}, \tag{3.3.34}$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — *произвольные комплексные, а* $m_1, \ldots, m_n$ — *произвольные целые числа. Эти представления унитарны тогда и только тогда, когда* $k_1, \ldots, k_n$ *чисто мнимы.*

3.4. Тензорные представления линейных групп. Матричные элементы каждого тензорного представления группы $GL(n, \mathbf{C})$ (т. е. тензорного произведения m экземпляров тождественного представления $g \to g$, $g \in GL(n, \mathbf{C})$) являются одночленами от матричных элементов группы $GL(n, \mathbf{C})$ и, следовательно, непрерывными функциями на $GL(n, \mathbf{C})$. Это означает, что для операторов тензорного представления группы $GL(n, \mathbf{C})$ выполняется 3) п. 2.2 (условие непрерывности); итак:

I. *Тензорные представления группы* $GL(n, \mathbf{C})$ *являются представлениями топологической группы* $GL(n, \mathbf{C})$.

Отсюда и из I п. 3.2 заключаем:

II. *Тензорные представления линейной группы* G (см. п. 2.3), *рассматриваемой как подгруппа топологической группы* $GL(n, \mathbf{C})$, *а также сужения этих представлений на инвариантном подпространстве, являются представлениями топологической группы* G.

§ 4. Общее определение представления топологической группы

4.1. Топологические линейные пространства. Множество X называется *топологическим линейным пространством*, если:

1) X — линейное пространство;
2) X — отделимое топологическое пространство;
3) соответствие $\{x_1, x_2\} \to x_1 + x_2$, $x_1, x_2 \in X$, есть непрерывное отображение топологического пространства $X \times X$ в топологическое пространство X;
4) соответствие $\{\alpha, x\} \to \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{C}^1$, $x \in X$, есть непрерывное отображение топологического пространства $\mathbf{C}^1 \times X$ в топологическое пространство X.

Простейшим примером топологического линейного пространства является линейное пространство $\mathbf{C}^n$, наделенное своей естественной топологией. Другие примеры см. ниже.

Из условий 3) и 4) следует, что X — топологическая группа относительно операции сложения в X. В дальнейшем в этом параграфе X, Y, Z обозначают топологические линейные пространства.

Множество $M \subset X$ называется *замкнутым подпространством* пространства X, если

а) M — подпространство линейного пространства X;

б) M — замкнутое подмножество топологического пространства X.

I. *Замыкание $\overline{M}$ подпространства M в X есть также подпространство в X.*

Доказательство. 1. В силу 3 соответствие $x \to x + x_1$, $x \in M$, $x_1 \in M$, есть непрерывное отображение X в X, переводящее M в M, а значит, и $\overline{M}$ в $\overline{M}$; следовательно, $x + x_1 \in \overline{M}$ при $x \in \overline{M}$, $x_1 \in M$. Но тогда соответствие $x \to x + x_1$, $x_1 \in X$, $x \in \overline{M}$, есть непрерывное отображение X в X, переводящее M в $\overline{M}$, а значит, и $\overline{M}$ в $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$; следовательно, $x + x_1 \in \overline{M}$ при $x, x_1 \in \overline{M}$.

2. В силу 4) соответствие $x \to \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $x \in X$, есть непрерывное отображение X в X, переводящее M в M, а значит, и $\overline{M}$ в $\overline{M}$; следовательно, $\alpha x \in \overline{M}$ при $\alpha \in \mathbf{C}$, $x \in \overline{M}$.

Доказанное в пп. 1 и 2 означает, что $\overline{M}$ — подпространство в линейном пространстве X; очевидно, $\overline{M}$ замкнуто; следовательно, $\overline{M}$ — замкнутое подпространство в X.

Оператор A из X в Y с областью определения X называется *непрерывным*, если соответствие A: $x \to Ax$ есть непрерывное отображение X в Y; в частности, непрерывный оператор A из X в X называется *непрерывным оператором* в X.

II. *Если A — непрерывный линейный оператор в X, а M — подпространство в X, инвариантное относительно A, то $\overline{M}$ — также инвариантно относительно A.*

Доказательство. Соответствие A: $x \to Ax$, $x \in X$, есть непрерывное отображение X в X, переводящее M в M, а значит, и $\overline{M}$ в $\overline{M}$.

Примеры. 1. Нормированные пространства. Пусть X — нормированное пространство (см. Шилов [1]). Введем в X топологию, считая базой окрестностей каждой точки $x_0 \in X$ совокупность всевозможных открытых шаров

$$W(x_0, \varepsilon) = \{x\colon \|x - x_0\| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.1.1}$$

Нетрудно убедиться, что для множеств (4.1.1) выполнены все аксиомы базы окрестностей (см. п. 1.1), а также аксиома отделимости (см. п. 1.8); следовательно, множества (4.1.1) определяют отделимую топологию в X. Определенная таким образом топология в нормированном пространстве X называется *сильной топологией в X*.

Нормированное пространство, наделенное сильной топологией, есть топологическое линейное пространство.

Действительно, легко проверить, что для нормированного пространства, наделенного сильной топологией, выполняются аксиомы 1)–4) п. 4.1.

Упражнение. Доказать, что *для линейного оператора из нормированного пространства X в нормированное пространство Y непрерывность равносильна ограниченности.*

2. Евклидовы (в частности, гильбертовы) пространства. Евклидово пространство X является нормированным пространством с нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, где (x, y) — скалярное произведение в X. Следовательно:

Евклидово (в частности, гильбертово) пространство X с сильной топологией, определенной нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, есть топологическое линейное пространство.

3. Локально выпуклые пространства. Пусть X — линейное пространство. *Отрезком* $[x_1, x_2]$, соединяющим две точки $x_1, x_2 \in X$, называется множество $tx_1 + (1-t)\,x_2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; точки x_1, x_2 называются *концами* отрезка $[x_1, x_2]$. (Если X — плоскость, или трехмерное пространство, то концы векторов $x \in [x_1, x_2]$ действительно образуют отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2.) Множество $Q \subset X$ называется *выпуклым*, если оно вместе с каждыми двумя своими точками x_1, x_2 содержит и отрезок $[x_1, x_2]$, их соединяющий. Очевидно, *пересечение выпуклых множеств выпукло*. Множество Q называется *симметричным*, если из $x \in Q$, $|\alpha| = 1$ следует, что также $\alpha x \in Q$.

Числовая функция $p(x)$ на X называется *полунормой*, если:

1) $p(x) \geqslant 0$ для каждого $x \in X$;
2) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ для любых $x \in X$, $\alpha \in \mathbf{C}$;
3) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$. Из условия 2) следует, что $p(0) = 0$.

I. *Если p — полунорма в X, то для каждого $c > 0$ множество*

$$Q = \{x \colon x \in X, p(x) < c\}$$

выпукло и симметрично.

Доказательство. Если $x_1, x_2 \in Q$, то $p(x_1) < c$, $p(x_2) < c$; отсюда в силу свойств 2) и 3) полунормы при $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$p(tx_1 + (1-t)\,x_2) \leqslant p(tx_1) + p((1-t)\,x_2) = \\ = tp(x_1) + (1-t)\,p(x_2) < ct + c\,(1-t) = c;$$

следовательно, $[x_1, x_2] \subset Q$, так что Q выпукло. Далее, если $x \in Q$, то $p(x) < c$; тогда при $|\alpha| = 1$, $\alpha \in \mathbf{C}$, также

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) = p(x) < c,$$

т. е. $\alpha x \in Q$; следовательно, Q симметрично.

Пусть теперь на линейном пространстве X задано семейство P полунорм p. Семейство P называется *достаточным*, если для каждого $x \in X$ существует такая полунорма $p \in P$, что $p(x) > 0$. Пусть P — достаточное семейство полунорм на X. Определим топологию на X, считая базой окрестностей каждой точки $x_0 \in X$ всевозможные множества

$$W(x_0, p_1, \ldots, p_n, \varepsilon) = \\ = \{x \colon x \in X, \quad p_1(x - x_1) < \varepsilon, \ldots, p_n(x - x_0) < \varepsilon\}, \quad (4.1.2)$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — произвольное конечное множество полунорм из P, а ε — произвольное положительное число. Легко проверить, что для множеств (4.1.2) выполняются аксиомы базы окрестностей, а также аксиома отделимости. Следовательно, эти множества определяют отделимую топологию в X. Легко также проверить, что для X, наделенного этой топологией, выполняются аксиомы 1)–4) п. 4.1. Следовательно X, наделенное этой топологией, есть топологическое линейное пространство. Оно называется *локально выпуклым пространством*.

Отметим, что $W(x_0, p_1, \ldots, p_n, \varepsilon)$ есть пересечение выпуклых множеств

$$W(x, p_j, \varepsilon) = \{x \colon x \in X, p_j(x - x_0 < \varepsilon\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

(см. III) и потому также выпукло. Таким образом, база (4.1.2) окрестностей состоит из выпуклых множеств. Этим объясняется название: локально выпуклые пространства. *Нормированные пространства* (см. пример 1) *локально выпуклы*. Действительно, в этом случае P состоит из одного элемента $p(x) = \|x\|$; P достаточно, ибо, по определению нормы, если $x \neq 0$, то $\|x\| > 0$.

4. Пространство $C(-\infty, \infty)$. Обозначим через $C(-\infty, \infty)$ совокупность всех комплекснозначных непрерывных функций $x = x(t)$, заданных и непрерывных в интервале $(-\infty, \infty)$. Определим действия сложения и умножения на число как поточечные сложения и умножения на число функций. Далее, положим для каждого отрезка $[a, b]$, $a < b$ и $x \in C(-\infty, \infty)$

$$p_{[a,b]}(x) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

Легко видеть, что $p_{[a,b]}(x)$ — полунорма на $C(-\infty, \infty)$. Обозначим через P совокупность всех $p_{[a,b]}$, отвечающих всевозможным отрезкам $[a, b]$. Множество P достаточно. Действительно, пусть $x = x(t) \neq 0$. Это означает, что существует точка $t_0 \in (-\infty, \infty)$, в которой $x(t_0) \neq 0$. Пусть $[a, b]$ — отрезок, содержащий точку t_0. Тогда

$$p_{[a,b]}(x) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \geqslant |x(t_0)| > 0.$$

Следовательно, P определяет локально выпуклую топологию на $C(-\infty, \infty)$, и $C(-\infty, \infty)$, наделенное этой топологией, есть локально выпуклое пространство. Очевидно, во всех рассуждениях в примере 4 можно заменить $C(-\infty, \infty)$ пространством всех комплекснозначных функций, заданных в интервале $(-\infty, \infty)$ и ограниченных на каждом конечном отрезке.

5. Пространство $D^\infty(a, b)$. Обозначим через $D^\infty(a, b)$ совокупность всех комплекснозначных функций $x = x(t)$, непрерывных и имеющих непрерывные производные всех порядков на отрезке $[a, b]$. Определим в $D^\infty(a, b)$ сложение и умножение на число так же, как в примере 4, и положим для $x \in D^\infty(a, b)$

$$p_k(x) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)|,$$
$$P = \{p_k, \quad k = 0, 1, \ldots\}.$$

Легко проверить, что p_k — полунормы и что P — достаточное множество полунорм на $D^\infty(a, b)$. Следовательно, P определяет локально выпуклую топологию на $D^\infty(a, b)$, и $D^\infty(a, b)$, наделенное этой топологией, есть локально выпуклое пространство.

4.2. Определение представления топологической группы; основные понятия. Дадим теперь общее определение представления топологической группы. Пусть G — топологическая группа, X — топологическое линейное пространство. Будем говорить, что задано представление T: $g \to T(g)$ группы G в пространстве X, если каждому элементу $g \in G$ поставлен в соответствие непрерывный линейный оператор $T(g)$ в X, определенный во всем X так, что выполнены следующие условия:

1) $T(e) = 1$, где e — единичный элемент группы G, а 1 — единичный оператор в X;
2) $T(g_1 g_2) = T(g_1)\, T(g_2)$;
3) соответствие $\{x, g\} \to T(g)\, x$ есть непрерывное отображение топологического произведения $X \times G$ в X.

Пространство X называется *пространством представления* T, а операторы $T(g)$ — *операторами представления*. Таким образом, в отличие от определения, данного в § 2 гл. I, здесь добавлено условие 3) непрерывности. Оно означает, что $T(g)\, x$ есть вектор-функция на G со значениями в X, непрерывная по совокупности переменных g, x. В частности, непрерывность оператора $T(g)$ в X следует из условия 3). Условие 3) уже входит в определение представления топологической группы; однако в некоторых случаях, чтобы подчеркнуть этот факт, представление называют *непрерывным*. Представления в смысле определения § 2 гл. I мы будем теперь называть *алгебраическими*. В случае конечномерного X условие 3) совпадает с условием 3) в п. 3.2.

Это следует из линейности каждой координаты

$$(T(g)\,x)_j = \sum_{l=1}^{r} t_{jl}(g)\,x_i, \quad r = \dim X,$$

вектора $T(g)\,x$ относительно координат x_l вектора x при фиксированном базисе в X (см., например, Фихтенгольц [1]). Два представления, T^1 и T^2, группы G в пространствах X^1 и X^2 называют *эквивалентными* и пишут $T_1 \sim T_2$, если существует линейное и взаимно однозначное отображение S пространства X^1 на пространство X^2, обладающее следующими свойствами:

1′) S есть топологическое отображение топологического линейного пространства X^1 на топологическое линейное пространство X^2;

2′) для каждого $g \in G$

$$ST^1(g) = T^2(g)S. \tag{4.2.1}$$

Представление T топологической группы в топологическом линейном пространстве X называется *неприводимым*, если в X нет *замкнутых* подпространств, отличных от (0) и X и инвариантных относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$. Таким образом, в отличие от определений, данных в § 2 гл. I, в определении эквивалентности представлений топологических групп добавлено условие 1′) топологичности отображения S, а в определение неприводимости — условие замкнутости инвариантных подпространств.

В некоторых случаях, чтобы это подчеркнуть, эквивалентные представления топологических групп называют *топологически эквивалентными*, а неприводимые представления топологических групп — *топологически неприводимыми*. Эквивалентность и неприводимость в смысле определений в § 2 гл. I мы будем теперь называть *алгебраической эквивалентностью* и *алгебраической неприводимостью* соответственно. Очевидно, что *из топологической эквивалентности следует алгебраическая эквивалентность и из алгебраической неприводимости следует топологическая неприводимость*. Обратное, вообще говоря, неверно. Представление T группы G в X называется *унитарным*, если X — гильбертово (в частности, евклидово) пространство и все операторы $T(g)$ представления T унитарны.

I. *Пусть T — унитарное алгебраическое представление топологической группы G в пространстве X; если вектор-функция $T(g)\,x$ непрерывна по g при каждом $x \in X$, то T непрерывно по совокупности переменных g, x.*

Доказательство. Пусть заданы $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$, $g_0 \in G$. В силу непрерывности функции $T(g)\,x_0$ в точке g_0 существует такая окрестность $U(g_0)$, что $\|T(g)\,x_0 - T(g_0)\,x_0\| < \varepsilon$. Тогда при $\|x - x_0\| < \varepsilon$

и $g \in U(g_0)$

$$\|T(g)\,x - T(g_0)\,x_0\| = \|T(g)\,x - T(g)\,x_0 + T(g)\,x_0 - T(g_0)\,x_0\| \leqslant \\ \leqslant \|T(g)(x - x_0)\| + \|T(g)\,x_0 - T(g_0)\,x_0\| < \|x - x_0\| + \varepsilon < 2\varepsilon;$$

ибо $\|T(g)\| = 1$.

О некоторых обобщениях предложения I см. ниже.

П р и м е р. Пусть $G = \Gamma^1$. Элементы группы Γ^1 задаются углами поворота γ, так что функции f на Γ^1 можно рассматривать как функции $f(\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{R}^1$. При этом должно быть

$$f(\gamma + 2\pi) = f(\gamma), \tag{4.2.2}$$

ибо $\gamma + 2\pi$ и γ определяют один и тот же элемент группы Γ^1.

В данном примере мы будем рассматривать функции f, измеримые по Лебегу и определенные почти всюду на $\mathbf{R}^1$. Для таких функций мы потребуем (и это естественно), чтобы условие (4.2.2) выполнялось для почти каждого $\gamma \in \mathbf{R}^1$. Но каждая такая функция f полностью (т. е. для почти каждого $\gamma \in \mathbf{R}^1$) определяется своими значениями на любом отрезке длины 2π, например, на отрезке $[-\pi, \pi]$. Обозначим через $L^2(\Gamma^1)$, а также через $L^2(-\pi, \pi)$, совокупность всех измеримых по Лебегу функций $f(\gamma)$, $\gamma \in [-\pi, \pi]$, определенных для почти каждого $\gamma \in [-\pi, \pi]$ и удовлетворяющих условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\gamma)|^2\, d\gamma < \infty. \tag{4.2.3}$$

При этом две такие функции, отличающиеся только на множестве меры нуль, мы будем считать одним и тем же элементом пространства $L^2(\Gamma^1)$. (Подробнее см. Ш и л о в [I].) Определим в $L^2(\Gamma^1)$ сложение и умножение на число как поточечное сложение функций и умножение их на число. Далее определим скалярное произведение (f_1, f_2) функций $f_1, f_2 \in L^2(\Gamma^1)$ по формуле

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma)\, \overline{f_2(\gamma)}\, d\gamma. \tag{4.2.4}$$

Тогда $L^2(\Gamma^1)$ становится гильбертовым пространством (см. также Ш и л о в [1]). Определим представление T группы Γ^1 следующим образом. Пусть $X = L^2(\Gamma^1)$ и пусть $T(\gamma)$ — операторы в $L^2(\Gamma^1)$, определенные формулой

$$T(\gamma_0)\, f(\gamma) = f(\gamma + \gamma_0). \tag{4.2.5}$$

Докажем, что соответствие $T\colon \gamma \to T(\gamma)$ есть унитарное представление группы Γ^1 в пространстве $L^2(\Gamma^1)$. Очевидно, при $f, f_1, f_2 \in L^2(\Gamma^1)$:

α) $T(0)\quad f(\gamma) = f(\gamma)$, т. е. $T(0) = 1$ (0 — единичный элемент группы Γ^1), β) $T(\gamma_1)\,T(\gamma_2)\,f(\gamma) = T(\gamma_1)\,f(\gamma+\gamma_2) = f(\gamma+\gamma_1+\gamma_2) = T(\gamma_1+\gamma_2)\times$ $\times\, f(\gamma)$, т. е. $T(\gamma_1+\gamma_2) = T(\gamma_1)\,T(\gamma_2)$.

Это означает, что T — алгебраическое представление группы Γ^1.

Далее, при $f_1,\, f_2 \in L^2(\Gamma^1)$

$$(T(\gamma_0)\,f_1, T(\gamma_0)\,f_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma+\gamma_0)\,\overline{f_2(\gamma+\gamma_0)}\,d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma)\,\overline{f_2(\gamma)}\,d\gamma;$$

следовательна, T унитарно.

Докажем, наконец, что T непрерывно. В силу I достаточно показать, что соответствие $\gamma \to T(\gamma)\,f$ есть непрерывное отображение Γ^1 в $L^2(\Gamma^1)$. Обозначим через $C(\Gamma^1)$ совокупность всех непрерывных функций на Γ^1. Очевидно, функции из $C(\Gamma^1)$ можно рассматривать как непрерывные функции на $\mathbf{R}^1$, удовлетворяющие условию (4.2.2). Такие функции равномерно непрерывны; следовательно, если $\varphi \in C(\Gamma^1)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $\gamma_0 \in \Gamma$ существует такая окрестность $U(0)$ элемента 0 в Γ^1, что

$$|\varphi(\gamma+\gamma_1) - \varphi(\gamma)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \gamma_1 \in U(0) \quad \text{и всех} \quad \gamma \in \mathbf{R}^1; \tag{4.2.6}$$

отсюда

$$\|T(\gamma_1)\,\varphi - T(\gamma_0)\,\varphi\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\gamma+\gamma_1) - \varphi(\gamma+\gamma_0)|^2\,d\gamma < \varepsilon^2. \tag{4.2.7}$$

Пусть теперь f — произвольная функция из $L^2(\Gamma^1)$. Так как $C(\Gamma^1)$ плотно в $L^2(\Gamma^1)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\varphi \in C(\Gamma^1)$, что

$$\|f - \varepsilon\|_2 < \varepsilon. \tag{4.2.8}$$

Тогда в силу (4.2.7) и (4.2.8)

$$\|T(\gamma_1)\,f - T(\gamma_0)\,f_2\|_2 \leqslant \|T(\gamma_1)(f-\varepsilon)\|_2 + \|T(\gamma_1)\,\varphi - T(\gamma_0)\,\varphi\|_2 +$$
$$+ \|T(\gamma_0)(\varphi - f)\|_2 = \|f-\varphi\|_2 + \|T(\gamma_1)\,\varphi - T(\gamma_0)\,\varphi\|_2 + \|f-\varphi\|_2 < 3\varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность T.

Представление T называется *регулярным представлением* группы Γ^1. Общее определение регулярного представления см. ниже в гл. IV.

Глава IV

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

§ 1. Компактные топологические группы

1.1. Компактные топологические пространства. Пусть M — подмножество топологического пространства X. Систему $\{G\}$ множеств называют *покрытием* множества M, если объединение всех множеств G содержит M.

Топологическое пространство X называют *компактным* [1]), если каждое его покрытие $\{G\}$ открытыми множествами G содержит конечное число множеств $\{G_1, \ldots, G_n\}$, также образующих покрытие X.

Множество $M \subset X$ называют *компактным*, если оно, рассматриваемое как подпространство в X, компактно [2]). Переходя к дополнительным множествам, заключаем:

I. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда в нем всякая система $\{F\}$ замкнутых множеств с пустым пересечением содержит конечное число множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$ с пустым пересечением.*

Из I следует, что

II. *Замкнутое подмножество F_0 компактного пространства X компактно.*

Действительно, пусть $\{F\}$ — система замкнутых подмножеств в F_0 с пустым пересечением. Тогда $\{F\}$ — также система замкнутых множеств в X (см. I п. 1.6) с пустым пересечением, а значит, содержит (в силу I) конечное число множеств $F_1, \ldots, F_n$ с пустым пересечением.

Можно дать еще следующее эквивалентное определение компактного пространства. Систему $\{M\}$ множеств назовем *центрированной*, если любое конечное число множеств имеет непустое пересечение. В силу I пространство X компактно тогда и только тогда, когда в нем всякая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

---

[1]) П. С. Александров, который ввел это понятие, назвал такие пространства *бикомпактными*; мы применяем термин *компактное* множество, принятый в современной литературе.

[2]) Очевидно, всякое конечное множество компактно.

Этому предложению можно придать еще следующую форму:

III. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда в нем всякая центрированная система множеств имеет по крайней мере одну общую точку прикосновения.*

Доказательство. Пусть X компактно, а $\{M\}$ — центрированная система множеств. Тогда $\{\overline{M}\}$ — центрированная система замкнутых множеств, следовательно, $\{\overline{M}\}$ имеет непустое пересечение; любая точка этого пересечения есть общая точка прикосновения множеств M.

Обратно, пусть всякая центрированная система множеств в X имеет общую точку прикосновения. В частности, всякая центрированная система $\{F\}$ замкнутых множеств F должна иметь общую точку прикосновения, но в силу замкнутости множеств F эта точка принадлежит их пересечению; следовательно, F компактно.

IV. *Если F — компактное множество в отделимом пространстве X и $x \notin F$, то существуют непересекающиеся открытые множества U и V, содержащие соответственно x и F.*

Доказательство. Для каждой точки $y \in F$ существуют непересекающиеся окрестности U_y, V_y точек x и y. В силу компактности F среди множеств V_y существует конечное число $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$, образующих покрытие множества F. Тогда множества $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{y_k}$, $V = \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{y_k}$ удовлетворяют поставленным требованиям.

V. *Компактное множество в отделимом пространстве замкнуто.*

Доказательство. Пусть F компактно и $x \notin F$. В силу IV существует окрестность U точки x, не пересекающаяся с F; следовательно (п. 1.3 гл. III), $x \notin \overline{F}$. Отсюда $\overline{F} \subset F$ и потому $\overline{F} = F$.

VI. *Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ компактно в $\mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено* [1]) *в $\mathbf{R}^n$.*

Доказательство. Достаточность совпадает с утверждением известной леммы Бореля–Лебега (см., например, Фихтенгольц [1], т. 1). Обратно, пусть M компактно в $\mathbf{R}^n$. В силу V M замкнуто. Докажем, что M ограничено. Для этого покроем каждую точку множества шаром радиуса 1. В силу компактности M из этих шаров можно выбрать конечное число, образующее покрытие M. Шар, содержащий это конечное число шаров, содержит все M.

VII. *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение компактного пространства X на пространство Y и пусть $\{G'\}$ — покрытие пространства Y открытыми множествами. Тогда множества

---

[1]) Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *ограниченным*, если в $\mathbf{R}^n$ существует шар, содержащий M.

$G = f^{-1}(G')$ открыты в X и образуют покрытие $\{G\}$ пространства X. В силу компактности пространства X покрытие $\{G\}$ содержит конечную систему $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, также образующую покрытие пространства X. Но тогда $\{G'_1, G'_2, \ldots, G'_n\}$ есть содержащееся в $\{G'\}$ покрытие пространства Y. Итак, каждое покрытие $\{G'\}$ пространства Y открытыми множествами содержит конечное покрытие Y, т. е. Y компактно.

VIII. *При непрерывном отображении компактного пространства в отделимое пространство образы замкнутых множеств замкнуты.*

Доказательство. Пусть M — замкнутое множество в компактном пространстве X. В силу II M компактно, следовательно, его непрерывный образ также компактен (см. VII) и потому замкнут в содержащем его отделимом пространстве (см. V).

Непрерывное отображение f пространства X в $\mathbf{R}^1$ называется *непрерывной вещественной функцией на* X.

IX. *Непрерывная вещественная функция f на компактном пространстве X принимает на этом пространстве наибольшее и наименьшее значения.*

Доказательство. В силу VII и VI $f(X)$ есть замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{R}^1$; следовательно, оно имеет наименьший и наибольший элементы. Действительно, из ограниченности множества $f(X)$ следует, что существуют $\inf f(X)$ и $\sup f(X)$, а из его замкнутости — что существуют $\inf f(X)$, $\sup f(X) \in f(X)$ и потому являются наименьшим и наибольшим элементами в $f(X)$.

Пусть f — числовая функция на топологическом пространстве X. Обозначим через U_f объединение всех открытых множеств, на которых $f(x) = 0$, а через Q_f — дополнение U_f. Очевидно, U_f — наибольшее открытое множество, на котором $f(x) = 0$, следовательно, Q_f — наименьшее замкнутое множество[1)], вне которого $f(x) = 0$. Множество Q_f называется *носителем* функции f. Функция f называется *финитной*, если ее носитель Q_f — компактное множество.

X. *Всякая числовая функция f на компактном топологическом пространстве X финитна.*

Действительно, Q_f компактно как замкнутое подмножество компактного пространства X (см. II).

Пусть X, Y — топологические пространства и $M \subset X \times Y$; совокупность всех $x \in X$, для которых $x \times y \in M$ при некотором $y \in M$, называется *проекцией множества* M на X; аналогично определяется проекция множества M на Y.

XI. *Если Y компактно, то проекция на X всякого замкнутого множества $F \subset X \times Y$ замкнута.*

[1)] При этом может случиться, что $U_f = \varnothing$, следовательно, $Q_f = X$.

Доказательство. Пусть M — проекция множества F на X и $x_0 \in \overline{M}$. Тогда всякая окрестность $U(x_0)$ имеет непустое пересечение с M; следовательно, множества

$$N_U = \{y\colon x \times y \in F,\, x \in U(x_0)\}$$

образуют центрированную систему в компактном пространстве Y и потому имеют общую точку прикосновения y_0. Но тогда $x_0 \times y_0 \in \overline{F} = F$; следовательно, $x_0 \in M$. Итак, если $x_0 \in \overline{M}$, то $x_0 \in M$; это и означает, что M замкнуто.

XII. *Топологическое произведение конечного числа* [1]) *компактных пространств компактно.*

Доказательство. Пусть X, Y компактны. Пусть $\{F_\alpha\}$ — центрированная система замкнутых множеств в пространстве $X \times Y$, Φ_α — проекция множества F_α на пространство X. Мы вправе считать, что система $\{F_\alpha\}$ содержит конечные пересечения своих элементов. Множество Φ_α замкнуто согласно XI. Система замкнутых подмножеств $\{\Phi_\alpha\}$ пространства X централизована, поэтому имеет непустое пересечение. Пусть $x_0 \in \bigcap\limits_\alpha \Phi_\alpha$ и M_{x_0} — множество всевозможных пар вида $\{x_0, y\}$, $y \in Y$. Тогда отображение $\{x_0, y\} \to y$ есть гомеоморфизм пространства M_{x_0} на Y; поэтому M_{x_0} — компактное пространство. По построению x_0 семейство пересечений $F_\alpha \cap M_{x_0}$ центрировано, причем множества $F_\alpha \cap M_{x_0}$ замкнуты в M_{x_0}. Ввиду компактности множества M_{x_0} семейство $\{F_\alpha \cap M_{x_0}\}$ имеет общую точку $\{x_0, y_0\}$. Итак, $\cap(F_\alpha \cap M_{x_0}) \neq \varnothing$; тогда и подавно $\cap F_\alpha \neq \varnothing$. Следовательно, $X \cap Y$ компактно.

Аналогично доказывается утверждение для любого конечного числа компактных пространств.

XIII. *Если G и F — открытое и замкнутое множества в топологическом произведении $X \times Y$ топологических пространств X и Y, а Q — компактное множество в X, то множество $\bigcup\limits_{x \in Q} \{y\colon x \times y \in F\}$ замкнуто, а множество $\bigcap\limits_{x \in Q} \{y\colon x \times y \in G\}$ открыто.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что $\bigcup\limits_{x \in Q} \{y\colon x \times y \in F\}$ есть проекция на Y замкнутого множества $(Q \times Y) \cap F$ (см. XI); второе утверждение получается из первого переходом к дополнительным множествам.

---

[1]) Утверждение предложения XII справедливо также и для бесконечного числа компактных пространств при надлежащей топологизации их произведения (см., например, Наймарк [1]). Соответствующий результат принадлежит А. Н. Тихонову. Нам этот результат не понадобится.

XIV. *Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция на топологическом произведении $X \times Y$ топологических пространств X, Y со значениями в топологическом пространстве Z и пусть Q — компактное множество в X, а G — открытое множество в Z. Тогда множество $W = \{y\colon f(x, y) \in G$ для всех $x \in Q\}$ открыто в Y.*

Доказательство. Пусть $\widehat{G}$ — прообраз G при отображении $z = f(x, y)$; тогда $\widehat{G}$ открыто в $X \times Y$ и

$$W = \bigcap_{x \in Q} \{y\colon x \times y \in \widehat{G}\},$$

так что остается применить предложение XIII.

Подмножество Q топологической группы G называется *компактным*, если Q — компактное подмножество топологического пространства G.

XV. *Если Q_1, Q_2 — компактные подмножества топологической группы G, то Q_1^{-1} и Q_1Q_2 также компактны.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения VII, ибо Q_1^{-1} и Q_1Q_2 — непрерывные образы компактных пространств Q_1 и $Q_1 \times Q_2$ (см. XII) при непрерывных отображениях $g \to g^{-1}$ и $\{g_1, g_2\} \to g_1g_2$ соответственно.

1.2. Локально компактные пространства; локально компактные группы. Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Например, пространство $\mathbf{R}^n$ локально компактно; каждая его точка $x^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ имеет окрестность $U(x_0) = \{x\colon |x_j - x_j^0| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n\}$, замыкание которой есть замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ и потому компактно.

Пространство $\mathbf{C}^n$ гомеоморфно $\mathbf{R}^{2n}$ и потому также локально компактно.

Гильбертово пространство бесконечной размерности не локально компактно (доказать!).

I. *Замкнутое подпространство F локально компактного пространства X локально компактно.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in F$ и V — такая окрестность точки x_0 в X, что $\overline{V}$ компактно. Тогда $V \cap F$ — окрестность точки x_0 в F и $\overline{V \cap F}$ есть замкнутое подмножество в компактном пространстве $\overline{V}$ и потому компактно (II п. 1.1).

Топологическая группа G называется *локально компактной*, если топологическое пространство G локально компактно.

II. *Топологическая группа G локально компактна, если существует окрестность V единицы e группы G, замыкание которой компактно.*

Действительно, гомеоморфизм $g \to g_0 g$ отображает V на окрестность $g_0 V$ элемента g_0 и $\overline{g_0 V}$ компактно, как гомеоморфный образ компактного множества $\overline{V}$.

Например, группа $GL(n, \mathbf{C})$ локально компактна. Действительно, пусть

$$V = \{g \colon |g_{jl} - \delta_{jl}| < \varepsilon\}, \quad \text{где} \quad \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = l, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq l. \end{cases}$$

При достаточно малом ε $V \subset GL(n, \mathbf{C})$, следовательно, V — окрестность единицы $e = \|\delta_{jl}\|_{j,\,l=1}^{n}$ и $\overline{V}$ есть замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{C}^{n^2}$ и потому компактно (VI п. 1.1). Следовательно, $GL(n, \mathbf{C})$ локально компактна в силу II. Группы $SL(n, \mathbf{C})$, $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ замкнуты в $GL(n, \mathbf{R})$ и потому локально компактны в силу I.

Функция f на топологической группе G называется *равномерно непрерывной* на G, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V единицы группы G, что

$$|f(g_1) - f(g_2)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad g_2 \in g_1 V. \tag{1.2.1}$$

Если G — аддитивная группа $\mathbf{R}^1$, то V имеет вид $V = \{x \colon |x| < \delta\}$, где $\delta > 0$; $f = f(x)$ — функция на $\mathbf{R}^1$; условие $g_2 \in g_2 V$ перепишется теперь в виде $x_1 \in x_2 V$, т. е. $x_1 - x_2 \in V$; следовательно, условие (1.2.1) означает, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$, и мы приходим к обычному определению равномерной непрерывности функции на $\mathbf{R}^1$.

III. (Теорема о равномерной непрерывности.) *Всякая финитная непрерывная функция f на локально компактной группе G равномерно непрерывна на G.*

Доказательство. Пусть Q — носитель функции f и U — такая симметричная окрестность единицы, что $\overline{U}$ компактно. По условию, Q компактно, поэтому также и $Q\overline{U}$ компактно (см. XV п. 1.1). Положим

$$W = \{g \colon |f(g_1 g) - f(g_1)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad g_1 \in Q\overline{U}\}.$$

Очевидно, $e \in W$; в силу XIV п. 1.1 W открыто; следовательно, W — окрестность единицы e. Если $g \in U$, то $f(g_1 g)$ и $f(g_1)$ обращаются в нуль при $g_1 \notin Q\overline{U}$ и потому $|f(g_1 g) - f(g_1)| < \varepsilon$ при $g \in W \cap U$ для всех $g_1 \in G$. Положив $g_1 g = g_2$ и $V = W \cap U$, мы получим, что $|f(g_2) - f(g_1)| < \varepsilon$ при $g_2 \in g_1 V$.

1.3. Лемма Урысона. Топологическое пространство X называется *нормальным*, если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset X$ существуют непересекающиеся открытые множества U_1, U_2, содержащие соответственно F_1 и F_2. Это условие эквивалентно следующему: для любого замкнутого множества F и открытого множества $U \supset F$ существует открытое множество V, такое, что $F \subset V$ и $\overline{V} \subset U$. Действительно, достаточно рассмотреть замкнутое множество $X \setminus U$, не пересекающееся с F.

I. *Компактное отделимое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2 — замкнутые (и потому компактные) не пересекающиеся множества в X. В силу IV п. 1.1 для каждой точки $y \in F_2$ существуют непересекающиеся открытые множества U_y, V_y, содержащие F_1 и y соответственно. Множества V_y, $y \in F_2$ образуют покрытие множества F_2. Так как F_2 компактно, то среди множеств V_y существует конечное число $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$, образующих покрытие множества F_2. Тогда

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}, \quad V = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$$

— открытые не пересекающиеся множества, содержащие F_1 и F_2 соответственно.

II. (Лемма Урысона.) *Для любых двух замкнутых не пересекающихся множеств F_0, F_1 нормального пространства X существует непрерывная в X вещественная функция f, удовлетворяющая условиям:*

1) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$;
2) $f(x) = 0$ *на* F_0;
3) $f(x) = 1$ *на* F_1.

Доказательство. Утверждение тривиально, если одно из множеств F_0, F_1 пусто. Так, если F_0 — пустое множество, то достаточно положить $f(x) = 1$ для всех $x \in X$. Поэтому мы предположим, что F_0 и F_1 — непустые множества.

Положим $V_1 = X - F$. Тогда $F_0 \subset V_1$, и в силу нормальности пространства X существует открытое множество, — обозначим его V_0, — такое, что $F_0 \subset V_0$, $\overline{V}_0 \subset V_1$.

Аналогично, существует открытое множество, — обозначим его $V_{1/2}$, — такое, что $\overline{V}_0 \subset V_{1/2}$ и $\overline{V}_{1/2} \subset V_1$. Повторяя это рассуждение, мы для каждого числа r вида $m/2^n$, $0 \leqslant m \leqslant 2^n$, определим открытое множество V_r так, что $\overline{V}_{r_1} \subset V_{r_2}$, при $r_1 < r_2$.

Положим теперь для любого вещественного числа t из интервала $0 < t < 1$

$$V_t = \bigcup_{r \leqslant t} V_r,$$

а также $V_t = \varnothing$ при $t < 0$ и $V_t = X$ при $t > 1$. Тем самым открытые множества V_t будут определены для всех вещественных значений t. При этом

$$\overline{V}_{t_1} \subset V_{t_2}, \quad \text{если} \quad t_1 < t_2. \tag{1.3.1}$$

Действительно, при $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$ существуют рациональные числа r_1, r_2 вида $m/2^n$, удовлетворяющие условиям $t_1 < r_1 < r_2 < t_2$, и потому $\overline{V}_{t_1} \subset \overline{V}_{r_1} \subset V_{r_2} \subset V_{t_2}$.

Если же $t_1 < 0$ при $t_2 > 0$, то соотношение (1.3.1) очевидно, ибо тогда $V_{t_1} = \varnothing$, соответственно, $V_{t_2} = X$ при $t_2 > 1$.

Положим
$$f(x) = \inf\{t\colon x \in V_t\} \tag{1.3.2}$$
и докажем, что $f(x)$ удовлетворяет всем поставленным требованиям.

При $t > 1$ множество $V_t = X$ содержит любую точку x; поэтому $\{t\colon x \in V_t\} \supset (1, \infty)$, откуда в силу (1.3.2) $f(x) \leqslant 1$. При $t < 0$ множество $V_t = \varnothing$ не содержит никакой точки x. Поэтому множество $\{t\colon x \in V_t\}$ не содержит точек $t < 0$, так что в силу (1.3.2) $f(x) \geqslant 0$. Если $x \in V_0$, то $0 \in \{t\colon x \in V_t\}$; следовательно, $f(x) \leqslant 0$. В соединении с неравенством $f(x) \geqslant 0$ это дает $f(x) = 0$ на V_0; в частности, $f(x) = 0$ на $F_0 \subset V_0$. Аналогично, из $x \notin V$, т. е. $x \in F_1$, вытекает, что $1 \notin \{t\colon x \in V_t\}$; отсюда в силу (1.3.2) $f(x) \geqslant 1$. С другой стороны, по доказанному выше, $f(x) \leqslant 1$. Поэтому $f(x) = 1$ на F_1. Остается доказать непрерывность функции $f(x)$. Пусть $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$; положим $y_0 = f(x_0)$. В силу (1.3.1) и (1.3.2) $x_0 \in V_t$ при $t > y_0$ и $x_0 \notin \overline{V}_t$ при $t < y_0$. В частности, $x_0 \in V_{y_0+\varepsilon} \diagdown \overline{V}_{y_0-\varepsilon_2}$, так что, будучи открытым множеством, $V_{y_0+\varepsilon} \diagdown \overline{V}_{y_0-\varepsilon}$ — окрестность точки x_0. Если $x \in V_{y_0+\varepsilon} \diagdown \overline{V}_{x_0-\varepsilon}$, то $y_0 + \varepsilon \in \{t\colon x \in V_t\}$ и $y_0 - \varepsilon \notin \{t\colon x \in V_t\}$. Поэтому в силу (1.3.1) и (1.3.2) $y_0 - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant y_0 + \varepsilon$, т. е. $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. Это означает, что f непрерывна.

Замечание. В силу I компактное пространство нормально; поэтому утверждение леммы Урысона справедливо для замкнутых множеств в компактном пространстве.

1.4. Теорема Стоуна. Пусть Q — произвольное множество. Введем для вещественных функций f на Q обозначения
$$(f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n)(q) = \max\{f_1(q),\, f_2(q),\, \ldots,\, f_n(q)\},$$
$$(f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n)(q) = \min\{f_1(q),\, f_2(q),\, \ldots,\, f_n(q)\}.$$
Совокупность A вещественных функций на Q называется *решеткой*, если она вместе с каждыми двумя функциями f_1, f_2 содержит также $f_1 \cup f_2$ и $f_1 \cap f_2$; очевидно, в этом случае A вместе с каждым $f_1, \ldots, f_n$ содержит также $f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n$ и $f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n$. Совокупность A вещественных функций называется вещественной *алгеброй функций*, если она вместе с каждой функцией содержит ее произведение на любое вещественное число и вместе с каждыми двумя функциями содержит их сумму и их произведение. Вещественная алгебра A функций на Q называется *равномерно замкнутой*, если предел каждой равномерно сходящейся на Q последовательности функций $f_n \in A$ принадлежит A. Если алгебра A не является равномерно замкнутой, то, присоединив в ней все такие пределы, мы получим новое множество функций, содержащее A и являющееся, как легко видеть, равномерно замкнутой алгеброй. Эта алгебра называется *равномерным замыканием* алгебры A и обозначается $\overline{A}$.

Примером равномерно замкнутой вещественной алгебры функций является совокупность $C^r(X)$ всех вещественных непрерывных функций на данном топологическом пространстве X.

I. *Всякая равномерно замкнутая вещественная алгебра A ограниченных функций, содержащая все вещественные константы, образует решетку.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $f \in A$, то также $|f| \subset A$, ибо тогда из f_1, $f_2 \in A$ следует, что функции

$$f_1 \cup f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|), \quad f_1 \cap f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|)$$

также принадлежат A.

Пусть $f \in A$ и $|f(x)| \leqslant c$ для всех $x \in X$. Тогда

$$|f(x)| = \sqrt{c^2 - [c^2 - (f(x))^2]} = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{(f(x))^2}{c^2}\right)} = \\ = c\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}\left(1 - \frac{(f(x))^2}{c^2}\right)^n\right\},$$

где ряд в правой части сходится равномерно на X, ибо $0 \leqslant 1 - \frac{(f(x))^2}{c^2} \leqslant 1$, и все члены ряда принадлежат A. Следовательно, $|f| \in A$.

II. *Пусть A — совокупность непрерывных вещественных функций $f = f(x)$ на компактном пространстве X, удовлетворяющих условиям:*

1) *A — решетка;*
2) *для любых двух различных точек $\xi, \eta \in X$ и любых вещественных чисел a, b существует функция $f_{\xi\eta} \in A$ такая, что $f_{\xi\eta}(\xi) = a$, $f_{\xi\eta}(\eta) = b$.*

Тогда всякая непрерывная на X вещественная функция есть предел равномерно сходящейся последовательности функций $f_n \in A$.

Доказательство. Пусть f — произвольная непрерывная вещественная на X, ε — произвольное положительное число, а $f_{\xi\eta}(x)$ — функция из A, удовлетворяющая условию 2) при $a = f(\xi)$, $b = f(\eta)$. Положим

$$U_{\xi\eta} = \{x\colon f_{\xi\eta}(x) < f(x) + \varepsilon\}, \quad V_{\xi\eta} = \{x\colon f_{\xi\eta}(x) > f(x) - \varepsilon\};$$

$U_{\xi\eta}$, $V_{\xi\eta}$ — открытые множества в X, содержащие ξ и η. При фиксированном ξ множества $U_{\xi\eta}$ образуют покрытие компактного пространства X; выделяя из этого покрытия конечное покрытие $\{U_{\xi_1\eta}, U_{\xi_2\eta}, \ldots$ $\ldots, U_{\xi_n\eta}\}$ и полагая $\varphi_\xi = f_{\xi_1\eta} \cap f_{\xi_2\eta} \cap \ldots \cap f_{\xi_n\eta}$, $V_\xi = \bigcap\limits_{j=1}^{n} V_{\xi_j\eta}$, мы получим функцию $\varphi_\xi \in A$, удовлетворяющую условиям

$$\varphi_\xi(x) < f(x) + \varepsilon \quad \text{на всем} \quad X,$$
$$\varphi_\xi(x) > f(x) - \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in V_\xi.$$

Выделим теперь из покрытия $\{V_\xi\}$ пространства X конечное покрытие $\{V_{\xi_1}, \ldots, V_{\xi_m}\}$ и, полагая $\psi = \varphi_{\xi_1} \cup \varphi_{\xi_2} \cup \ldots \cup \varphi_{\xi_m}$, мы получим функцию $\psi \in A$, удовлетворяющую условиям $f(x) - \varepsilon < \psi(x) < f(x) + \varepsilon$ во всем X.

Положим теперь $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, и обозначим через ψ_n соответствующую функцию ψ. Тогда $\psi_n \in A$ и $f(x) - 1/n < \psi_n(x) < f(x) + 1/n$ во всем X; следовательно, ψ_n, сходится равномерно к f.

Множество A функций на Q называется *отделяющим точки*, если для любых двух различных точек $q_1, q_2 \in Q$ существует такая функция $f \in A$, что $f(q_1) \neq f(q_2)$.

Теорема 1 (Стоун [1]). *Пусть A — вещественная алгебра непрерывных функций на компактном пространстве X, содержащая все вещественные константы и отделяющая точки. Тогда равномерное замыкание $\overline{A}$ алгебры A совпадает с алгеброй $C^r(X)$ всех непрерывных на X функций.*

Доказательство. Согласно предложению I алгебра $\overline{A}$ — решетка. Докажем, что $\overline{A}$ (и даже A) удовлетворяет условию 2) предложения II. Отсюда на основании II будет следовать, что $\overline{A} = C^r(X)$.

Пусть заданы $\xi, \eta \in X$, $\xi \neq \eta$. В A существует такая функция $f(x)$, что
$$f(\xi) \neq 0, \quad f(\xi) \neq f(\eta). \tag{1.4.1}$$

Действительно, существуют функции $\varphi \in A$, $\psi \in A$, удовлетворяющие условиям $\varphi(\xi) \neq \varphi(\eta)$ и $\psi(\xi) \neq 0$ (например, $\psi(\xi) = C \neq 0$ на X). Тогда функция
$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad \varphi(\xi) \neq 0; \\ \psi(x) & \text{при} \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \psi(\xi) \neq \psi(\eta); \\ \varphi(x) + \psi(x) & \text{при} \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \psi(\xi) = \psi(\eta), \end{cases} \tag{1.4.2}$$
удовлетворяет условиям (1.4.1). При этом мы можем считать, что $f(\eta) = 0$; в противном случае мы заменим $f(x)$ функцией
$$f_0(x) = \frac{1}{f(\eta)}\, f(x) - \left[\frac{1}{f(\eta)}\, f(x)\right]^2.$$

Но тогда, положив $f_1(x) = \dfrac{1}{f(\xi)}\, f(x)$, мы получим функцию $f_1 \in A$, удовлетворяющую условиям $f_1(\xi) = 1$, $f_1(\eta) = 0$. Аналогично, существует функция $f_2 \in A$, удовлетворяющая условиям $f_2(\xi) = 0$, $f_2(\eta) = 1$. Тогда функция $af_1 + bf_2$ принадлежит A и принимает значения a и b в точках ξ и η соответственно. Следовательно, $\overline{A}$ удовлетворяет всем условиям предложения II и потому совпадает с $C^r(X)$.

Теорема 2 (теорема Вейерштрасса). *Пусть X — замкнутое ограниченное подмножество n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$;*

тогда всякая непрерывная на X вещественная функция $f(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами.

Для доказательства достаточно применить теорему Стоуна к алгебре A всех многочленов $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами, рассматриваемых как функции на X.

Множество A комплексных функций на Q называется *комплексной алгеброй функций*, если оно вместе с каждой функцией содержит ее произведение на произвольное комплексное число и вместе с каждыми двумя функциями содержит их сумму и их произведение. Для комплексной алгебры функций равномерная замкнутость и равномерное замыкание определяются дословно так же, как для вещественной алгебры функций.

Примером равномерно замкнутой комплексной алгебры функций является алгебра $C(X)$ всех непрерывных комплексных функций на заданном топологическом пространстве X.

Теорема 3. *Пусть A — комплексная алгебра непрерывных функций на компактном пространстве X, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *A отделяет точки на X;*
2) *если $f(x) \in A$, то также $\overline{f(x)} \in A$;*
3) *f содержит все комплексные константы.*

Тогда равномерное замыкание $\overline{A}$ алгебры A совпадает с $C(X)$.

Доказательство. Пусть A_1 — совокупность всех вещественных функций, принадлежащих A. Очевидно, что A_1 — вещественная алгебра функций. Если $f \in A$, то в силу условия 2) также $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ и $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$ принадлежат A, а значит, и A_1. Отсюда следует, что A_1 отделяет точки на X. Действительно, если $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$, то в силу условия 1) существует такая функция $f \in A$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда имеет место хотя бы одно из неравенств $\operatorname{Re} f(x_1) \neq \operatorname{Re} f(x_2)$, $\operatorname{Im} f(x_1) \neq \operatorname{Im} f(x_2)$, где $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in A_1$. На основании теоремы Стоуна

$$\overline{A}_1 = C^r(X). \tag{1.4.3}$$

Пусть теперь f — произвольная непрерывная на X функция. В силу (1.4.3) существуют такие последовательности $\varphi_n \in A_1$, $\psi_n \in A_1$, что $\varphi_n \to \operatorname{Re} f$ и $\psi_n \to \operatorname{Im} f$ равномерно на X. Тогда $\varphi_n + i\psi_n \in A$ и $\varphi_n + i\psi_n \to f$ равномерно на X.

1.5. Определение компактной топологической группы. Примеры. Топологическая группа G называется *компактной*, если топологическое пространство G компактно.

I. *Всякая замкнутая подгруппа компактной топологической группы компактна.*

Утверждение непосредственно следует из II п. 1.1.

II. *Непрерывная функция на компактной группе G равномерно непрерывна на G.*

Утверждение непосредственно следует из III п.1.2 и X п. 1.1.

Примеры. 1. Конечные группы. Всякая конечная группа (наделенная дискретной топологией) компактна (см. сноску на с. 173).

2. Группа $U(n)$. Напомним, что матрица u называется *унитарной*, если

$$u^* u = 1, \tag{1.5.1}$$

где 1 — единичная матрица. Обозначим через $U(n)$ совокупность всех унитарных матриц n-го порядка. Если $u_1, u_2 \in U(n)$, т. е. $u_1^* u_1 = 1$, $u_2^* u_2 = 1$, то также $(u_1 u_2)^*(u_1 u_2) = u_2^* u_1^* u_1 u_2 = 1 \cdot 1 = 1$, т. е. $u_1 u_2 \in U(n)$. Далее, если $u \in U(n)$, то в силу (1.5.1) $u^{-1} = u^*$ и $(u^{-1})^* u^{-1} = u^{**} u^{-1} = u u^{-1} = 1$, т. е. также $u^{-1} \in U(n)$. Следовательно, $U(n)$ — подгруппа группы $GL(n, \mathbf{C})$. Мы наделим группу $U(n)$ топологией подпространства топологического пространства $GL(n, \mathbf{C})$ и будем в дальнейшем под $U(n)$ подразумевать топологическую группу с таким образом определенной топологией. Группа $U(n)$ называется *унитарной группой n-го порядка*.

III. *Группа $U(n)$ компактна.*

Доказательство. Из определения топологии в $GL(n, \mathbf{C})$ (см. пример 3 п. 2.1 гл. III) следует, что топология в $U(n)$ есть топология подпространства топологического пространства $\mathbf{C}^{n^2}$. Докажем, что $U(n)$ — ограниченное замкнутое множество в $\mathbf{C}^{n^2}$; на основании VI п. 1.1 отсюда будет следовать, что $U(n)$ компактно. Но (1.5.1) означает, что $U(n)$ есть совокупность тех и только тех точек $(u_{11}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{n_1}, \ldots, u_{nn}) \in \mathbf{C}^{n^2}$, для которых

$$\sum_{l=1}^{n} \overline{u}_{lj} u_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

Поскольку левые и правые части (1.5.1) — непрерывные функции на $\mathbf{C}^{n^2}$, то $U(n)$ замкнуто в силу I п. 1.8 гл. III. Далее, полагая в (1.5.1) $j = k$ и суммируя по k от 1 до n, заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |u_{lk}|^2 = n.$$

Это означает, что $U(n)$ находится в шаре (точнее, на поверхности шара) пространства $\mathbf{C}^{n^2}$ с центром в точке $(0, \ldots, 0)$ и радиусом $\sqrt{n}$, так что множество $U(n)$ ограничено в $\mathbf{C}^{n^2}$. Следовательно, $U(n)$ компактна.

В частности, компактна группа $U(1)$ $(n = 1)$. Очевидно, $U(1)$ есть мультипликативная группа чисел $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}^1$, по модулю равных единице. Легко видеть, что $U(1)$ (топологически) изоморфна группе Γ^1

вращений окружности, а значит, и одномерному тору $\mathscr{T}^1$ (см. пример 3 п. 2.5 гл. III). Следовательно, *группы* Γ^1 *и* $\mathscr{T}^1$ *компактны.*

Замечание 1. Из (1.5.1) следует, что $\det u^* \det u = 1$, т. е.

$$|\det u| = 1, \tag{1.5.2}$$

для каждой матрицы $u \in U(n)$. Очевидно, отображение $u \to \det u$ есть непрерывный гомоморфизм группы $U(n)$ на группу $U(1)$.

3. Группа $SU(n)$. Так обозначается совокупность всех матриц $u \in U(n)$, удовлетворяющих условию $\det u = 1$.

Из очевидного соотношения $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbf{C})$ следует, что $SU(n)$ — замкнутая подгруппа группы $U(n)$. Отсюда и из I заключаем:

IV. *Группа* $SU(n)$ *компактна.*

Каждой матрице $u \in U(n)$ поставим в соответствие элемент $\{\alpha, v\}$ группы $U(1) \times SU(n)$ по формулам

$$\alpha = \det u, \quad v_{1k} = \frac{1}{\alpha}\, u_{1k}, \quad v_{jk} = u_{jk} \quad \text{при} \quad j > 1.$$

Читатель легко убедится, что это соответствие есть гомеоморфизм группы $U(n)$ на группу $U(1) \times SU(n)$; следовательно,

V. *Группы* $U(n)$ *и* $U(1) \times SU(n)$ *гомеоморфны.*

Замечание 2. Разумеется, определенный выше гомеоморфизм не является единственно возможным. Например, можно было бы положить

$$\alpha = \det u, \quad v_{2k} = \frac{1}{\alpha}\, u_{2k}, \quad v_{jk} = u_{jk} \quad \text{при} \quad j \neq 2.$$

Рассмотрим теперь подробнее случай $n = 2$. $SU(2)$ состоит из всех матриц $u = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{Vmatrix}$, удовлетворяющих условиям:

$$a\overline{a} + b\overline{b} = 1, \quad a_1\overline{a}_1 + b_1\overline{b}_1 = 1, \quad a\overline{a}_1 + b\overline{b}_1 = 0, \quad a_1 b - b_1 a = 1. \tag{1.5.3}$$

Отсюда

$$\overline{b}_1 = \overline{b}_1(a_1 b - b_1 a) = -a_1 a \overline{a}_1 - \overline{b}_1 b_1 a = -a(a_1\overline{a}_1 + b_1\overline{b}_1) = -a,$$
$$\overline{a}_1 = \overline{a}_1(a_1 b - b_1 a) = \overline{a}_1 a_1 b + b_1(\overline{b}_1 b) = b(\overline{a}_1 a_1 + \overline{b}_1 b_1) = b.$$

Обратно, если $\overline{b}_1 = -a$ и $\overline{a}_1 = b$ и если, кроме того, $|a|^2 + |b|^2 = 1$, то $u \in SU(2)$. Таким образом,

VI. *Группа* $SU(2)$ *состоит из всех матриц*

$$u = \begin{Vmatrix} \overline{b} & -\overline{a} \\ a & b \end{Vmatrix}, \tag{1.5.4}$$

удовлетворяющих условию

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{1.5.5}$$

Положим

$$a = x_1 + ix_2, \quad b = x_3 + ix_4; \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}. \tag{1.5.6}$$

Тогда (1.5.5) перепишется в виде

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 = 1. \tag{1.5.7}$$

Мы видим, что формулы (1.5.6) задают отображение $u \to (x_1, x_2, x_3, x_4)$ топологического пространства $SU(2)$ на единичную сферу в $\mathbf{R}^4$. Отсюда, сравнивая топологию на $SU(2)$ и в $\mathbf{R}^4$, заключаем:

VII. *Соответствие* $u \to (x_1, x_2, x_3, x_4)$, *определенное формулами* (1.5.6), *есть гомеоморфизм* $SU(2)$ *на единичную сферу в* $\mathbf{R}^1$; *следовательно*, $SU(2)$ *гомеоморфна единичной сфере в* $\mathbf{R}^1$.

4. Группа $O(n, \mathbf{R})$. Обозначим через $O(n, \mathbf{R})$ совокупность всех матриц g n-го порядка с вещественными элементами, удовлетворяющих условию

$$g'g = 1, \tag{1.5.8}$$

где g' — транспонированная к g матрица. Очевидно, для вещественных матриц условия (1.5.1) и (1.5.8) равносильны; поэтому

$$O(n, \mathbf{R}) = U(n) \cap GL(n, \mathbf{R}). \tag{1.5.9}$$

Но $U(n)$ и $GL(n, \mathbf{R})$ — замкнутые подгруппы группы $GL(n, \mathbf{C})$ (см. примеры 1 и 3 п. 2.3 гл. III); поэтому из (1.5.9) заключаем, что $O(n, \mathbf{R})$ — замкнутая подгруппа группы $U(n)$.

Отсюда в силу II п. 1.1

VIII. *Группа* $O(n, \mathbf{R})$ *компактна*.

Группа $O(n, \mathbf{R})$ называется *вещественной ортогональной группой*, а ее элементы — *вещественными ортогональными матрицами*.

Замечание 3. Из соотношения (1.5.8) вытекает, что $\det g' \times \det g = 1$, т. е. $(\det g)^2 = 1$; следовательно,

$$\det g = \pm 1 \quad \text{при} \quad g \in O(n, \mathbf{R}). \tag{1.5.10}$$

Очевидно, отображение $g \to \det g$ есть гомоморфизм группы $O(n, \mathbf{R})$ на мультипликативную группу $\{-1, 1\}$.

5. Группа $SO(n, \mathbf{R})$. Обозначим через $SO(n, \mathbf{R})$ совокупность всех вещественных ортогональных матриц g, удовлетворяющих условию $\det g = 1$. Очевидно,

$$SO(n, \mathbf{R}) = O(n, \mathbf{R}) \cap SL(b, \mathbf{R}); \tag{1.5.11}$$

но $O(n, \mathbf{R})$ и $SL(n, \mathbf{R})$ — замкнутые подгруппы в $GL(n, \mathbf{R})$, поэтому из (1.5.11) следует, что $SO(n, \mathbf{R})$ — *замкнутая подгруппа группы* $O(n, \mathbf{R})$.

Отсюда в силу II п. 1.1:

IX. *Группа* $SO(n, \mathbf{R})$ *компактна*.

Группа $SO(n, \mathbf{R})$ называется *унимодулярной вещественной ортогональной группой.*

X. *Группа* $O(n, \mathbf{R})$ *гомеоморфна группе* $\{-1, 1\} \times SO(n, \mathbf{R})$.

Доказательство аналогично доказательству предложения V, причем вместо (1.5.2) следует воспользоваться соотношением (1.5.10).

Рассмотрим теперь подробнее случаи $n = 2$ и $n = 3$. Группа $SO(2, \mathbf{R})$ состоит из всех матриц

$$g = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}$$

с вещественными элементами, удовлетворяющих согласно (1.5.11) условиям

$$\begin{gathered} g_{11}^2 + g_{12}^2 = 1, \quad g_{21}^2 + g_{22}^2 = 1, \\ g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} = 0, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1. \end{gathered} \tag{1.5.12}$$

В силу первого из условий (1.5.12) мы можем положить

$$g_{11} = \cos\theta, \quad g_{12} = -\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{1.5.13}$$

причем θ определен лишь с точностью до слагаемого, кратного 2π. Тогда из третьего условия (1.5.12) следует, что $g_{21} = \lambda\sin\theta$ и $g_{22} = \lambda\cos\theta$. Подставляя эти выражения в последнее условие (1.5.12), заключаем, что $\lambda = 1$, так что $g_{21} = \sin\theta$, $g_{22} = \cos\theta$. Второе условие (1.5.13), очевидно, также будет выполнено. Таким образом,

XI. *Группа* $SO(2, \mathbf{R})$ *состоит из всех матриц вида*

$$g = \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}, \tag{1.5.14}$$

где θ *— действительное число.*

Положим

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, \\ x_2' &= x_1\sin\theta + x_2\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

Из равенств $(x_1 + ix_2)\,e^{i\theta} = (x_1 + ix_2)(\cos\theta + i\sin\theta) = x_1' + ix_2'$ непосредственно следует, что x_1', x_2' — координаты точки, полученной из (x_1, x_2) поворотом относительно начала $(0, 0)$ плоскости $\mathbf{R}^2$ на угол θ против часовой стрелки. Следовательно, линейное преобразование (1.5.15) с матрицей g есть просто поворот плоскости $\mathbf{R}^2$ на угол θ. Поэтому группа $SO(2, \mathbf{R})$ называется *группой вращений двумерного пространства*. Вращению g_θ плоскости $\mathbf{R}^2$ вокруг $(0, 0)$ на угол θ поставим в соответствие вращение γ_θ окружности с центром $(0, 0)$ на тот же угол θ (см. пример 1 п. 1.7 гл. 1). Очевидно, что соответствие $g_\theta \to \gamma_\theta$, при этом получаемое, есть изоморфизм, из сравнения топологий на $SO(2, \mathbf{R})$ и на Γ^1 легко следует, что этот изоморфизм — топологический. Следовательно,

XII. *Группа* $SO(2, \mathbf{R})$ *изоморфна группе* Γ^1, *а значит, и группе* $\mathcal{T}^1$.

Группа $SO(3, \mathbf{R})$. Обозначим через G_0 совокупность всех вращений пространства $\mathbf{R}^3$ относительно начала $O = (0, 0, 0)$. Выберем фиксированную ортогональную систему координат с началом в точке O и обозначим через e_1, e_2, e_3 единичные векторы на координатных осях. Вращение $g \in G_0$ переводит e_1, e_2, e_3 в три взаимно ортогональных вектора g_1, g_2, g_3 с той же ориентацией, что и e_1, e_2, e_3. Пусть g_{ik} — проекция вектора g_k на i-ю ось. Векторы g_1, g_2, g_3 полностью определяются своими проекциями g_{ik}, т. е. матрицей

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{Vmatrix}.$$

Эту матрицу также обозначим буквой g и будем называть *матрицей вращения* g. Очевидно, g_{ik} вещественны. Из ортогональности векторов g_1, g_2, g_3 следует, что g ортогональна. Кроме того, поскольку ориентации e_1, e_2, e_3 и g_1, g_2, g_3 совпадают, то $\det g = 1$. Следовательно, $g \in SO(3, \mathbf{R})$.

Вращение g *полностью определяется своей матрицей* g.

Действительно, всякий вектор $x \in \mathbf{R}^3$ имеет вид $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, где x_1, x_2, x_3 — проекции вектора x на соответствующие координатные оси. Поскольку вращение g линейно и переводит e_1, e_2, e_3 в g_1, g_2, g_3, то оно переводит вектор x в вектор

$$x' = x_1g_1 + x_2g_2 + x_3g_3. \tag{1.5.16}$$

Пусть x'_1, x'_2, x'_3 — проекции вектора x' иа исходные координатные оси. Проектируя обе части (1.5.16) на эти оси, получаем

$$\begin{aligned} x'_1 &= g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3, \\ x'_2 &= g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + g_{23}x_3, \\ x'_3 &= g_{31}x_1 + g_{32}x_2 + g_{33}x_3, \end{aligned} \tag{1.5.17}$$

т. е. вращение g есть линейное преобразование пространства $\mathbf{R}^3$ с матрицей $g \in SO(3, \mathbf{R})$. Обратно, для каждой матрицы $g \in SO(3, \mathbf{R})$ при помощи формулы (1.5.17) определяем вращение $g \in G_0$. Поэтому группа $SO(3, \mathbf{R})$ называется *группой вращений трехмерного пространства*. Ее неприводимые представления играют важную роль во многих приложениях [1]) (см. ниже, § 3 гл. IV и гл. X).

В ряде случаев вращения трехмерного пространства оказывается удобным описывать при помощи следующих трех независимых параметров, называемых эйлеровыми углами. Пусть при вращении g

[1]) По аналогии со случаями $n = 2$ и $n = 3$ группа $SO(n, \mathbf{R})$ называется *группой вращений пространства* $\mathbf{R}^n$.

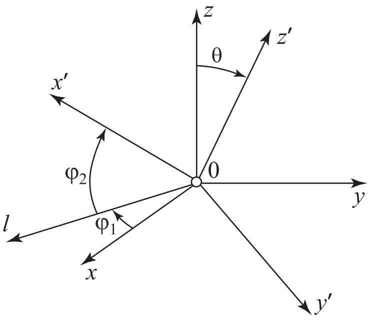


Рис. 3

координатные оси Ox, Oy, Oz переходят в оси Ox', Oy', Oz' (рис. 3). Обозначим через Ol прямую, по которой пересекаются плоскости xOy и xOy'; припишем Ol такое направление, чтобы наблюдатель, ориентированный по этому направлению, видел вращение, совмещающее ось Oz с осью Oz' по углу $\leqslant \pi$, происходящим против часовой стрелки. Этим условием направление прямой Ol определяется однозначно, за исключением того случая, когда оси Oz и Oz' совпадают или образуют угол π. Далее, обозначим через φ_1 угол, образованный осью Ox с прямой Ol, через φ_2 — угол, образованный прямой Ol с осью Ox', и через θ — угол между Oz и Oz'. Углы φ_1, φ_2, θ и называются*эйлеровыми углами* вращения g. По самому их определению $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Разным тройкам чисел φ_1, φ_2, θ из этих интервалов отвечают разные вращения, за исключением случаев $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. В этих случаях плоскости xOy и $x'Oy'$ совпадают и потому прямая l не определена. Выбирая ее различными способами, мы видим, что тройки $(\varphi_1, \varphi_2, 0)$ и $(\varphi_1 + \alpha, \varphi_1 - \alpha, 0)$ определяют одно и то же вращение и аналогично $(\varphi_1, \varphi_2, \pi)$ и $(\varphi_1 + \alpha, \varphi_2 + \alpha, \pi)$ определяют одно и то же вращение.

XIII. *Вращение g полностью определяется своими эйлеровыми углами φ_1, φ_2, θ.*

Доказательство. Обозначим через g_φ и g_θ вращения вокруг осей Oz и Ox на угол φ и θ соответственно. Вращение g можно представить как произведение

$$g = \overline{g}_{\varphi_2}\overline{g}_\theta g_{\varphi_1} \tag{1.5.18}$$

трех вращений g_{φ_1}, $\overline{g}_\theta$, $\overline{g}_{\varphi_2}$ вокруг осей Oz, Ol, Oz' соответственно. Действительно, в результате вращения g_{φ_1} ось Ox совпадет с осью Ol, после чего в результате вращения $\overline{g}_\theta$ ось Oz перейдет в Oz', а затем в результате вращения $\overline{g}_{\varphi_2}$ оси Ox и Oy совпадут с осями Ox' и Oy'. Этим доказана формула (1.5.18), а значит, и предложение XIII.

Вращение $\overline{g}_\theta$ есть вращение g_θ вспомогательной системы координатных осей, полученной из исходной вращением g_{φ_1}, поэтому $\overline{g}_\theta = g_{\varphi_1} g_\theta g_{\varphi_1}^{-1}$. Аналогично, $\overline{g}_{\varphi_2} = (\overline{g}_\theta g_{\varphi_1})\, g_{\varphi_2} (\overline{g}_\theta g_{\varphi_1})^{-1}$. Отсюда и из (1.5.18) заключаем:

$$g = \overline{g}_{\varphi_2}\overline{g}_\theta g_{\varphi_2} = (\overline{g}_\theta g_{\varphi_2})\, g_{\varphi_2} (\overline{g}_\theta g_{\varphi_1})^{-1} \overline{g}_\theta g_{\varphi_1} = \overline{g}_\theta g_{\varphi_1} g_{\varphi_2} = g_{\varphi_1} g_\theta g_{\varphi_2}. \tag{1.5.19}$$

Из (1.5.19) легко получить выражения для матричных элементов g_{ik} вращения g через эйлеровы углы. Действительно, матрицы вращений g_{Π}, g_θ имеют вид

$$g_\varphi = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g_\theta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (1.5.19) и учитывая, что при умножении вращений их матрицы перемножаются, получаем:

$$g = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\theta\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \sin\varphi_1\sin\theta \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\theta\cos\varphi_1\sin\varphi_2 & \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\theta\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\theta \\ \sin\varphi_2\sin\theta & \cos\varphi_2\sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}. \tag{1.5.20}$$

Упражнение. Доказать, что отображение

$$f\colon \begin{Vmatrix} \overline{b} & -\overline{a} \\ a & b \end{Vmatrix} \to$$
$$\to \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(b^2 - a^2 + \overline{b}^2 - \overline{a}^2) & \frac{i}{2}(b^2 + a^2 - \overline{b}^2 - \overline{a}^2) & ab + \overline{a}\overline{b} \\ \frac{i}{2}(-\overline{b}^2 + \overline{a}^2 + b^2 - a^2) & \frac{1}{2}(b^2 + a^2 + \overline{b}^2 + \overline{a}^2) & i(ab - \overline{a}\overline{b}) \\ -a\overline{b} - \overline{a}b & i(\overline{a}b - a\overline{b}) & b\overline{b} - a\overline{a} \end{Vmatrix}$$

есть открытый непрерывный гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3, \mathbf{R})$ с ядром $\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \right\}$.

Указание. Предварительно доказать, что f отображает матрицы

$$\begin{Vmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix}$$

в g_φ и g_θ соответственно.

§ 2. Представления компактных групп

2.1. Инвариантное среднее на компактной группе. Пусть G — компактная топологическая группа. На группе G существует двусторонне инвариантная мера μ, и эта мера может быть выбрана так, что $\mu(G) = 1$ (см. Шилов [1]). Определим на группе G инвариантное среднее следующим образом. Пусть $f \in L^1(G)$ (т. е. f интегрируема на G относительно меры μ); число

$$M(f) = \int_G f(g)\, d\mu(g)$$

называется *инвариантным средним* функции f на G. Иногда пишут $M_g(f(g))$ вместо $M(f)$.

I. *Инвариантное среднее $M(f)$ обладает такими свойствами*:
1) $M(1) = 1$, *где* 1 *слева — функция* $f \equiv 1$ *на* G, 1 *справа — число*;
2) $M(\overline{f}) = \overline{M(f)}$;
3) $M(f) \geqslant 0$ *при* $f \geqslant 0$ *и* $M(f) > 0$, *если* f *непрерывна*, $f \geqslant 0$ *и* $f \not\equiv 0$;
3′) $|M(f_1)| \leqslant M(|f_1|) \leqslant M(|f_2|)$ *при* $|f_1| \leqslant |f_2|$;
4) $M(f_1 + f_2) = M(f_1) + M(f_2)$;
5) $M(\alpha f) = \alpha M(f)$, *где* α *— число*;
6) $M(f_h) = M(f)$ *и* $M(f^h) = M(f)$, *где* $f_h(g) = f(gh)$, $f^h(g) = f(hg)$;
7) $M_g(f(g^{-1})) = M_g(f(g))$.

Свойства 1), 2), 4), 5) непосредственно следуют из свойств интеграла, свойства 3) и 3′) следуют из свойств интеграла и положительности меры непустых открытых множеств, свойства 6) и 7) связаны с инвариантностью меры μ.

Упражнение. Доказать, что свойство 3′) следует из свойств 3)–5).

Понятие инвариантного среднего можно распространить на векторные и операторные функции на группе G (см. Наймарк [1]); при этом, в частности, справедливы предложения, аналогичные предложениям II и III п. 1.1 § 1 гл. II.

2.2. Полная приводимость представлений компактной группы.
Теорема 1. *Всякое непрерывное представление $g \to T(g)$ компактной группы G в предгильбертовом пространстве эквивалентно непрерывному унитарному представлению.*

Доказательство. Пусть H — предгильбертово пространство относительно скалярного произведения $(x, y)_1$, и $g \to T(g)$ — непрерывное представление группы G в H. Определим форму (x, y) в H, полагая

$$f(g) = (T(g)\,x, T(g)\,y)_1, \tag{2.2.1}$$
$$(x, y) = M(f) = M((T(g)\,x, T(g)\,y)_1). \tag{2.2.2}$$

Форма (x, y) есть скалярное произведение в H. Действительно, форма (x, y) билинейна в силу свойств 1), 4), 5) инвариантного среднего

$M(f)$, линейности оператора $T(g)$ и билинейности формы $(x, y)_1$. Далее, так как $(x, y)_1$ эрмитова, то в силу свойства 2) I

$$(y, x) = M((T(g)\,y, T(g)\,x)_1 = M(\overline{(T(g)\,x, T(g)\,y)_1}) = \overline{(x, y)},$$

поэтому (x, y) также эрмитова. Наконец, $(T(g)\,x, T(g)\,x)_1 \geqslant 0$, так как $(x, y)_1$ — скалярное произведение. Отсюда в силу свойства 3) I

$$(x, y) = M((T(g)\,x, T(g)\,x)_1) \geqslant 0.$$

Так как $g \to T(g)$ — непрерывное представление, то функция $f(g)$, определенная формулой (2.2.1), непрерывна. Поэтому из 3) I следует, что $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $(T(g)\,x, T(g)\,x)_1 = 0$ при всех $g \in G$. Полагая здесь $g = e$, получим, что $(x, x)_1 = 0$, откуда $x = 0$. Итак, $(x, x) \geqslant 0$ и $(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$. Тем самым доказано, что (x, y) — скалярное произведение в H. В силу 6) I, (2.2.1) и (2.2.2) для каждого $h \in G$ имеем

$$\begin{aligned}(T(h)\,x, T(h)\,y) = M((T(g)\,T(h)\,x, T(g)\,T(h)\,y)_1) =\\ = M((T(gh)\,x, T(gh)\,y)_1) = M(f_h) = M(f) =\\ = M((T(g)\,x, T(g)\,y)_1) = (x, y),\end{aligned}$$

поэтому T унитарно относительно (x, y). Следовательно, тождественное отображение $x \to x$ пространства H со скалярным произведением $(x, y)_1$ на то же пространство H со скалярным произведением (x, y) переводит $T(g)$ снова в $T(g)$, унитарный относительно (x, y).

Остается доказать, что $g \to T(g)$ непрерывно относительно (x, y). Положим для данного $x \in H$

$$\varphi(g, h) = \|T(hg)\,x - T(h_0g)\,x\|_1, \quad g, h, h_0 \in G, \tag{2.2.3}$$

где $\|x\|_1 = \sqrt{(x, x)_1}$; так как представление $g \to T(g)$ непрерывно, то $\varphi(g, h)$ — непрерывная функция на $G \times G$ и

$$\varphi(g, h_0) = 0. \tag{2.2.4}$$

Положим, далее,

$$V_1 = \{\lambda\colon \lambda \in \mathbf{C}^1, |\lambda| < \varepsilon\}, \tag{2.2.5}$$

$$V_2 = \{h\colon h \in G, \varphi(g, h) = V_1 \quad \text{для всех} \quad g \in G\}; \tag{2.2.6}$$

V_1 — окрестность нуля в $\mathbf{C}^1$, поэтому (см. XIV п. 1.1) V_2 — открытое множество в G, содержащее h_0 (в силу (2.2.4)), т. е. V_2 — окрестность элемента h_0. В силу (2.2.6) и (2.2.3)

$$\|T(hg)\,x - T(h_0g)\,x\|_1 < \varepsilon \quad \text{при} \quad h \in V_2 \quad \text{и всех} \quad g \in G. \tag{2.2.7}$$

Далее, $\|T(g)\,y\|_1$ — непрерывная функция от g на компактной группе G[1]) и потому

$$\|T(g)\,y\|_1 \leqslant C(y) \quad \text{для всех} \quad g \in G. \tag{2.2.8}$$

Комбинируя (2.2.7) и (2.2.8), заключаем, что при $g \in G$, $h \in V_2$

$$\begin{aligned}|(T(h)\,T(g)\,x,\, T(g)\,y)_1 - (T(h_0)\,T(g)\,x,\, T(g)\,y)_1| &= \\ = |(T(hg)\,x - T(h_0 g)\,x,\, T(g)\,y)_1| &\leqslant \\ \leqslant \|T(hg)\,x - T(h_0 g)\,x\|_1\, \|T(g)\,y\|_1 &\leqslant \varepsilon\, C(y),\end{aligned}$$

и потому при $h \in V_2$

$$\begin{aligned}&|T(h)\,x,\, y) - (T(H_0)\,x,\, y)| = \\ &= M_g\{(T(h)\,T(g)\,x,\, T(g)\,y) - (T(h_0)\,T(g)\,x,\, T(g)\,y)\} \leqslant M(\varepsilon\, C(y)) = \\ &= \varepsilon\, C(y).\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Неравенство (2.2.9) доказывает непрерывность на G функции $(T(h)\,x,\, y)$.

Согласно теореме 1 каждое конечномерное непрерывное представление компактной группы G можно считать унитарным.

I. *Если H — гильбертово, то скалярное произведение $(x,\, y)$ в H эквивалентно исходному скалярному произведению $(x,\, y)_1$, т.е. существует такое число $c > 0$, что $(x,\, x) \leqslant c\,(x,\, x)_1$, $(xx_1) \leqslant c\,(x,\, x)$ для всех $x \in H$.*

Доказательство. В силу (2.2.8) $\|T(g)\,x\|_1^2 = (T(g)\,x,\, T(g)\,x)_1 \leqslant \leqslant C(x)^2$ для некоторой постоянной $C(x)$, зависящей от x. Согласно теореме Банаха–Штейнгауза (см., например, Шилов [1]) отсюда следует, что существует постоянная c, не зависящая от $x \in H$, такая, что $(T(g)\,x,\, T(g)\,x)_1 = \|T(g)\,x\|_1^2 \leqslant c^2\|x\|_1^2$ для всех $x \in H$. Поэтому

$$\|x\|^2 = (x,\, x) = M((T(g)\,x,\, T(g)\,x)_1) \leqslant M(c^2(x,\, x)_1) = c^2\|x\|_1^2,$$

так что $\|x\| \leqslant c\,\|x\|_1$. Обратно, $\|x\|_1 = \|T(g^{-1})\,T(g)\,x\|_1 \leqslant c\,\|T(g)\,x\|_1$, поэтому

$$M(\|x\|_1^2) \leqslant M(c^2\|T(g)\,x\|_1^2) = c^2\|x\|^2,$$

отсюда $\|x\|_1^2 \leqslant c^2\|x\|^2$, т. е. $\|x\|_1 \leqslant c\,\|x\|$.

Из предложения I снова следует, для случая гильбертова пространства H, что представление $g \to T(g)$ непрерывно относительно $(x,\, y)$.

Напомним, что любое конечномерное представление, эквивалентное унитарному, вполне приводимо (см. II п. 2.8 гл. I). Отсюда следует

[1]) $\|T(g)\,y\|_1 = \sqrt{(T(g)\,y,\, T(g)\,y)_1}$, а $(T(g)\,y,\, T(g)\,y)_1$ непрерывна ввиду непрерывности функции $T(g)\,y$ (по определению представления) и непрерывности скалярного произведения по совокупности переменных.

Теорема 2. *Каждое конечномерное непрерывное представление компактной группы вполне приводимо.*

2.3. Пространство $L^2(G)$; регулярное представление. Обозначим через $L^2(G)$ совокупность всех числовых функций f на компактной группе G, таких, что:

1) f измерима относительно инвариантной меры на G;
2) $\int\limits_G |f(g)|^2\,dg < +\infty$ [1]).

Отождествим функции, отличающиеся лишь на множестве меры нуль (подробнее см., например, Шилов [1]). Определим в $L^2(G)$ операции сложения и умножения на число обычным образом. Тогда $L^2(G)$ становится линейным пространством. Положим

$$(f_1,\, f_2) = M(f_1\overline{f}_2) = \int\limits_G f_1(g)\,\overline{f_2(g)}\,dg. \tag{2.3.1}$$

Форма $(f_1,\, f_2)$ является эрмитовой положительно определенной формой на $L^2(G)$, превращающей $L^2(G)$ в евклидово пространство. Пространство $L^2(G)$ полно относительно скалярного произведения (2.3.1), т.е. является гильбертовым пространством (см. Шилов [1]). Легко видеть, что пространство $L^2(G)$ конечномерно тогда и только тогда, когда G — конечная группа.

Определим теперь операторы $T(g)$, $g \in G$, полагая для каждого $h \in G$

$$T(h)\,f = f_h, \quad \text{т.е.} \quad T(h)\,f(g) = f(gh). \tag{2.3.2}$$

Очевидно, что функция f_h измерима, если f измерима. Из инвариантности меры следует, что

$$\int\limits_G |f_h(g)|^2\,dg = \int\limits_G |f(gh)|^2\,dg = \int\limits_G |f(g)|^2\,dg < +\infty; \tag{2.3.3}$$

поэтому $f_h \in L^2(G)$ для любой $f \in L^2(G)$ и любого $h \in G$. Кроме того, оператор $T(h)$, очевидно, линеен. Соответствие $h \to T(h)$ есть представление группы G; действительно, при $h_1,\, h_2 \in G$

$$T(h_1)\,T(h_2)\,f(g) = T(h_1)(T(h_2)\,f(g)) = T(h_1)(f(gh_2)) = \\ = f((gh_1)\,h_2) = f(g(h_1j_2)) = T(h_1h_2)\,f(g),$$

и $T(e)\,f(g) = f(ge) = f(g)$. Построенное представление унитарно; действительно, для любых $f_1,\, f_2 \in L^2(G)$ функция $f = f_1\overline{f}_2$ интегрируема и $(T(h)\,f_1, T(h)\,f_2) = M((f_1)_h\overline{(f_2)_h}) = M(f_h) = M(f) = m(f_1\overline{f}_2) = (f_1,\, f_2)$. Наконец, представление T: $h \to T(h)$ непрерывно, т.е. для любой $f \in L^2(G)$ функция $h \to T(h)\,f$ является непрерывным отображением G в $L^2(G)$. Действительно, если φ непрерывна на G, то φ равномерно непрерывна на G слева, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует

[1]) Условимся в дальнейшем писать dg вместо $d\mu(g)$.

такая окрестность U единичного элемента e группы G, что при $g_1 \in g_2U$ выполняется соотношение $|\varphi(g_1) - \varphi(g_2)| < \varepsilon$; если $h \in h_0U$, то также $gh \in gh_0U$ и потому $|T(h)\,\varphi(g) - T(h_0)\,\varphi(g)| = |\varphi(gh) - \varphi(gh_0)| < \varepsilon$ при $h \in h_0U$ и всех $g \in G$. Тогда $\|T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi\|^2 = (T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi, T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi) = M(|T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi|^2) \leqslant \varepsilon^2$ при $h \in h_0U$. Пусть $f \in L^2(G)$; так как совокупность $C(G)$ всех непрерывных функций на G всюду плотна в $L^2(G)$, то существует $\varphi \in C(G)$ такая, что $\|f - \varphi\| < \varepsilon/3$. Так как представление T унитарно, то $\|T(h)\,f - T(h)\,\varphi\| < \varepsilon/3$ и $\|T(h_0)\,f - T(h_0)\,\varphi\| < \varepsilon/3$ при всех h, $h_0 \in G$. Пользуясь непрерывностью φ, найдем окрестность U элемента $e \in G$ такую, что при $h \in h_0U$ выполняется неравенство $\|T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi\| \leqslant \varepsilon/3$; тогда

$$\|T(h)\,f - T(h_0)\,f\| \leqslant \\ \leqslant \|T(h)\,f - T(h)\,\varphi\| + \|T(h)\,\varphi - T(h_0)\,\varphi\| + \|T(h_0)\,\varphi - T(h_0)\,f\| < \varepsilon$$

при $h \in h_0U$, что доказывает непрерывность представления T.

Построенное непрерывное унитарное представление T группы G в пространстве $L^2(G)$ называется *правым регулярным представлением* группы G. Аналогично определяется *левое регулярное представление* S группы G в пространстве $L^2(G)$ по формуле

$$S(h)\,f(g) = f(h^{-1}g). \tag{2.3.4}$$

Представление S унитарно, это следует из левой инвариантности среднего $M(f)$ на компактной группе G (см. 6) I п. 2.1).

I. *Левое и правое регулярные представления G унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Каждой функции $f \in L^2(G)$ поставим в соответствие функцию

$$f'(g) = f(g^{-1}) \tag{2.3.5}$$

и определим оператор W в $L^2(G)$ как оператор, переводящий f в f' для любой $f \in L^2(G)$. Очевидно, что оператор W линеен и отображает $L^2(G)$ на $L^2(G)$. Кроме того, для любых f, $f_1 \in L^2(G)$ имеем согласно 7) I п. 2.1:

$$(Wf, Wf_1) = (f', f_1') = M(f(g^{-1})\,f_1(g^{-1})) = M(f(g)\,f_1(g)) = (f, f_1);$$

поэтому W унитарен. Наконец, для любого $h \in G$ и любой $f \in L^2(G)$

$$(WT(h)\,f)(g) = (T(h)\,f)(g^{-1}) = f(g^{-1}h) = f((h^{-1}g)^{-1}) = \\ = (Wf)(h^{-1}g) = (S(h)Wf)(g);$$

поэтому $WT(h) = S(h)W$ для любого $h \in G$, т. е. W переводит T в S.

2.4. Соотношения ортогональности. Пусть T — конечномерное непрерывное унитарное представление группы G в пространстве H, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в H; условие унитарности представления T равносильно условию, что матрица $t(g)$ оператора $T(g)$ относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ является унитарной матрицей для любого $g \in G$ (см. III п. 2.8 гл. I). Условие непрерывности представления T равносильно условию непрерывности всех матричных элементов $t_{jk}(g)$ представления T по отношению к ортонормированному базису $e_1, \ldots, e_n$.

Рассмотрим множество попарно не эквивалентных конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений T^α, $\alpha \in A$, группы G. Множество T^α, $\alpha \in A$, называется *полным*, если каждое конечномерное неприводимое непрерывное представление группы G эквивалентно одному из T^α. В дальнейшем будем считать, что множество T^α, $\alpha \in A$, полно.

Пусть $t^\alpha_{jk}(g)$, $j, k = 1, \ldots, \dim T^\alpha$, — матричные элементы представления T^α в некотором ортонормированном базисе в пространстве представления T^α. Пусть $n_\alpha = \dim T^\alpha$ — размерность представления T^α.

Т е о р е м а 1. *Матричные элементы непрерывных конечномерных неприводимых унитарных представлений T^α, $T^{\alpha'}$ компактной группы G удовлетворяют соотношениям*

$$\int\limits_G t^\alpha_{l_j}(g)\,\overline{t^{\alpha'}_{l'_{j'}}(g)}\,dg = \begin{cases} 0 & \textit{при } \alpha' \neq \alpha, \textit{ или при } \alpha' = \alpha, \\ & \textit{но } l' \neq l \textit{ или } j' \neq j; \\ 1/n_\alpha, & \textit{если } \alpha' = \alpha,\ l' = l,\ j' = j. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

З а м е ч а н и е. Соотношения (2.4.1) называются соотношениями ортогональности для компактной группы. Они являются обобщением соотношений ортогональности (1.4.1), (1.4.2) гл. II для конечной группы.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 является дословным повторением доказательства теоремы 1 п. 1.4 гл. II.

Теорема 1 означает, что функции

$$e^\alpha_{lj}(g) = \sqrt{n_\alpha}\, t^\alpha_{jl}(g) \quad (\alpha \in A, \quad l, j = 1, \ldots, n_\alpha) \tag{2.4.2}$$

образуют ортонормированную систему в $L^2(G)$.

Напомним (см. К о л м о г о р о в и Ф о м и н [1], Ш и л о в [1]), что ортонормированная система $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве H называется *полной*, если множество конечных линейных комбинаций векторов системы $\{e_n\}$ плотно в H.

Т е о р е м а 2. *Ортонормированная система $\{e^\alpha_{lj}\}$ полна в $L^2(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить, что множество конечных линейных комбинаций элементов системы $\{t^\alpha_{lj}\}$ плотно в $L^2(G)$ относительно нормы в $L^2(G)$. Докажем, что для любой функции $f \in L^2(G)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация

$\sum\limits_{\alpha, j, l} \gamma^\alpha_{j,l} t^\alpha_{jl}(g)$ матричных элементов непрерывных неприводимых унитарных представлений группы G, такая, что

$$\Big\| f(g) - \sum_{\alpha, j, l} \gamma^\alpha_{j,l} c^\alpha_{jl}(g) \Big\|_{L^2(G)} < \varepsilon.$$

Доказательство этого последнего утверждения разобьем на несколько шагов.

а). Пусть $\chi(g)$ — вещественная непрерывная функция на G, не равная тождественно нулю. Пусть $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ [1]. Рассмотрим функцию $K(g_1, g_2) = \chi(g_1 g_2^{-1})$. Тогда K — непрерывная симметричная функция на $G \times G$ $\quad (K(g_2, g_1) = \chi(g_2 g_1^{-1}) = \chi((g_1 g_2^{-1})^{-1}) = \chi(g_1 g_2^{-1}) = K(g_1, g_2))$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(g) = \chi \int\limits_G K(g, g_1)\, \varphi(g_1)\, dg_1 \tag{2.4.3}$$

(это уравнение является обобщением обычного интегрального уравнения Фредгольма для функций на отрезке; теория интегральных уравнений вида (2.4.3) аналогична теории интегральных уравнений на отрезке; см., например, *Колмогоров и Фомин* [1], гл. IX).

Так как $K(g, g_1)$ — непрерывная функция, то для любой функции $\varphi \in L^2(G)$ функция $\psi(g)$, определяемая равенством

$$\psi(g) = \int\limits_G K(g, g_1)\, \varphi(g_1)\, dg_1,$$

является непрерывной функцией на группе G; функция $\psi(g)$ называется *истокообразно представимой с помощью ядра* $K(g, g_1)$. В частности, всякое решение φ уравнения (2.4.3), принадлежащее $L^2(G)$, является истокообразно представимой функцией; поэтому любое решение φ уравнения (2.4.3) непрерывно. Из непрерывности K следует, что интеграл $\iint\limits_{G\times G} |K(g, g_1)|^2\, dg\, dg_1$ конечен, поэтому можно воспользоваться теорией Гильберта–Шмидта интегральных уравнений с симметричными квадратично интегрируемыми ядрами. Напомним, что вещественное число λ называется *собственным значением*, а функция $\varphi \not\equiv 0$ — соответствующей *собственной функцией* интегрального уравнения (2.4.3), если λ и φ обращают соотношение (2.4.3) в тождество. Согласно теории Гильберта–Шмидта любое интегральное уравнение с симметричным квадратично интегрируемым ядром имеет хотя бы одно собственное значение λ; пусть M_λ — подпространство $L^2(G)$,

[1] Например, если $\psi(g) \not\equiv 0$ — неотрицательная непрерывная функция, то функция $\chi(g) = \psi(g) + \psi(g^{-1})$ удовлетворяет всем требованиям, предъявленным к функции $\chi(g)$.

составленное из функции 0 и всех собственных функций уравнения (2.4.3), отвечающих собственному значению λ; тогда M_λ — конечномерное подпространство, образованное непрерывными функциями на G.

I. *Подпространство* M_λ *инвариантно относительно правого сдвига, т.е. если* $\varphi(g) \in M_\lambda$, *то* $\varphi(gg_0) \in M_\lambda$.

Действительно, пусть $\varphi(g) \in M_\lambda$, т. е.

$$\varphi(g) = \lambda \int\limits_G K(g, g_1)\, \varphi(g_1)\, dg_1 = \lambda \int\limits_G \chi(gg_1^{-1})\, \varphi(g_1)\, dg_1,$$

тогда

$$\varphi(gg_0) = \lambda \int\limits_G \chi((gg_0)\, g_1^{-1})\, \varphi(g_1)\, dg_1 = \lambda \int\limits_G \chi(gg_0g_1^{-1})\, \varphi(g_1)\, dg_1;$$

положим $h = g_1 g_0^{-1}$, тогда $g_1 = hg_0$ и, ввиду инвариантности меры dg_1, имеем

$$\varphi(gg_0) = \lambda \int\limits_G \chi(g^{-1}h)\, \varphi(hg_0)\, dh,$$

т. е. $\varphi(gg_0) \in M_\lambda$.

Так как конечномерное пространство $M_\lambda \subset L^2(G)$ инвариантно относительно правого сдвига на G, то в M_λ определено подпредставление правого регулярного представления группы G. Полученное таким образом представление T_λ группы G в M_λ непрерывно, конечномерно и унитарно, поэтому оно является прямой суммой конечного числа непрерывных неприводимых унитарных представлений $T_\lambda^{(1)}, \ldots, T_\lambda^{(p)}$ группы G (см. IX п. 2.9 гл. I); если $M_\lambda^{(1)}, \ldots, M_\lambda^{(p)}$ — пространства этих неприводимых представлений, то

$$M_\lambda = M_\lambda^{(1)} + \ldots + M_\lambda^{(p)}. \tag{2.4.4}$$

II. *Любая функция из пространства* $M_\lambda^{(k)}$ *неприводимого представления* $T_\lambda^{(k)}$ *группы* G *является линейной комбинацией матричных элементов этого представления.*

Пусть $e_1(g), \ldots, e_n(g)$ — базис в пространстве $M_\lambda^{(k)}$; так как $M_\lambda^{(k)} \subset M_\lambda$, то функции $e_1(g), \ldots, e_n(g)$ непрерывны. Представление $T_\lambda^{(k)}$ является подпредставлением правого регулярного представления; поэтому $T_\lambda^{(k)}(g_0)\, f(g) = f(gg_0)$ для всех $f \in M_\lambda^{(k)}$. Пусть $c_{ij}(g_0)$ — матричные элементы оператора $T_\lambda^{(k)}(g_0)$ в базисе $e_1(g), \ldots, e_n(g)$; тогда

$$\begin{aligned} e_1(gg_0) &= c_{11}(g_0)\, e_1(g) + \ldots + c_{n1}(g_0)\, e_n(g), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n(gg_0) &= c_{1n}(g_0)\, e_1(g) + \ldots + c_{nn}(g_0)\, e_n(g) \end{aligned}$$

для всех g, $g_0 \in G$. Подставляя $g = e$, $g_0 = h$, получаем, что

$$\begin{aligned} e_1(h) &= e_1(e)\, c_{11}(h) + \ldots + e_n(e)\, c_{n1}(h), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n(h) &= e_1(e)\, c_{1n}(h) + \ldots + e_n(e)\, c_{nn}(h), \end{aligned}$$

т. е. любой элемент базиса в $M_\lambda^{(k)}$, а поэтому и любой элемент $M_\lambda^{(k)}$ является линейной комбинацией матричных элементов неприводимого непрерывного унитарного представления $T_\lambda^{(k)}$. Это $T_\lambda^{(k)}$ эквивалентно одному из T^α, поэтому базис $e_1(g)$, …, $e_n(g)$ можно выбрать так, что $c_{jk}(g)$ будут совпадать с $t_{jk}^\alpha(g)$ при некотором $\alpha \in A$.

Отсюда и из (2.4.4) непосредственно следует

III. *Любая функция из пространства M_λ является конечной линейной комбинацией матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы G.*

Согласно теории Гильберта–Шмидта любая истокообразно представимая (с помощью некоторого непрерывного ядра K) функция $\psi(g)$ на группе G разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям соответствующего уравнения (2.4.3). Отсюда следует

IV. *Если ψ — истокообразно представимая функция на группе G, то ψ равномерно аппроксимируется конечными линейными комбинациями матричных элементов неприводимых непрерывных конечномерных унитарных представлений группы G.*

Теорема 3. *Всякая непрерывная функция на G равномерно аппроксимируется истокообразно представимыми функциями.*

Доказательство. Пусть f — непрерывная функция на G. Так как f равномерно непрерывна на G, то существует такая окрестность U единичного элемента e группы G, что $|f(g) - f(g')| < \varepsilon$ при всех $g, g' \in G$, для которых $g' \in Ug$; заменяя U на $U \cap U^{-1}$, можем предполагать в дальнейшем, что U симметрична, т. е. $U = U^{-1}$. Выберем в U окрестность V элемента e такую, что $\overline{V} \subset U$. Пусть ψ — такая неотрицательная непрерывная функция на G, что $\psi = 1$ на V и $\psi = 0$ вне U (существование такой функции ψ следует из леммы Урысона; см. II п. 1.3). Положим $\chi(g) = c(\psi(g) + \psi(g^{-1}))$; тогда $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$. Выберем число c так, чтобы $\int \chi(g)\, dg = 1$. Так как U симметрична и $\psi(g) = 0$ вне U, то $\psi(g^{-1}) = 0$ вне U, поэтому $\chi(g) = 0$ вне U. Построим истокообразно представимую функцию

$$\varphi(g) = \int f(g_1)\, \chi(g g_1^{-1})\, dg_1;$$

полагая $h = g_1 g^{-1}$ и пользуясь инвариантностью меры, получаем, что

$$\varphi(g) = \int f(hg)\, \chi(h^{-1})\, dh.$$

Так как $\int \chi(g)\,dg = 1$, то $\int \chi(h^{-1})\,dh = 1$, поэтому $f(g) = \int f(g)\,\chi(h^{-1})\,dh$ и

$$|f(g)-\varphi(g)| = \left|\int_G f(g)\,\chi(h^{-1})\,dh - \int_G f(hg)\,\chi(h^{-1})\,dh\right| =$$
$$= \left|\int_G (f(g)-f(hg))\,\chi(h^{-1})\,dh\right| \leqslant \int_G |f(g)-f(hg)|\chi(h^{-1})\,dh =$$
$$= \int_U |f(g)-f(hg)|\chi(h^{-1})\,dh, \quad (2.4.5)$$

поскольку $\chi(h^{-1}) = \chi(h) = 0$ вне U. По построению окрестности U имеем $|f(g)-f(hg)| < \varepsilon$ при всех $g \in G$, $h \in U$, так как $hg \in Ug$ при $h \in U$; следовательно, $\int_U |f(g)-f(hg)|\chi(h^{-1})\,dh \leqslant \varepsilon \int_U \chi(h^{-1})\,dh = \varepsilon$, и из соотношения (2.4.5) следует, что $|f(g)-\varphi(g)| \leqslant \varepsilon$ при всех $g \in G$, что доказывает теорему 3.

Теорема 4. *Любая непрерывная функция на компактной топологической группе G равномерно аппроксимируется на G конечными линейными комбинациями матричных элементов непрерывных неприводимых конечномерных унитарных представлений группы G.*

Доказательство сразу следует из теоремы 3 и предложения IV.

б). Завершим теперь доказательство теоремы 2. Пусть $f \in L^2(G)$. Так как множество непрерывных функций на G всюду плотно в $L^2(G)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция $\widetilde{f}$ на G, что $\|f - \widetilde{f}\|_{L^2(G)} < \varepsilon/2$. Согласно теореме 3 для непрерывной функции $\widetilde{f}$ можно найти конечную линейную комбинацию φ матричных элементов непрерывных неприводимых конечномерных унитарных представлений группы G такую, что $|\widetilde{f}(g) - \varphi(g)| < \varepsilon/2$ для всех $g \in G$; тогда $\|\widetilde{f} - \varphi\|_{L^2(G)} = \left(\int_G |\widetilde{f}(g)-\varphi(g)|^2\,dg\right)^{1/2} < (\varepsilon^2/4)^{1/2} = \varepsilon/2$, откуда $\|f-\varphi\|_{L^2(G)} \leqslant \|f-\widetilde{f}\|_{L^2} + \|\widetilde{f}-\varphi\|_{L^2} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Следовательно, конечные линейные комбинации функций из системы $\{e^{\alpha}_{lj}\}$ плотны в $L^2(G)$; поэтому $\{e^{\alpha}_{lj}\}$ — полная ортонормированная система, и теорема 2 доказана.

Теорема 5. *Любая функция $f \in L^2(G)$ представима в виде*

$$f = \sum_{\alpha\in A}\sum_{l,j=1}^{n_\alpha} (f, e^{\alpha}_{lj})\,e^{\alpha}_{lj} = \sum_{\alpha\in A}\sum_{l,j=1}^{n_\alpha} n_\alpha (f, t^{\alpha}_{lj})\,t^{\alpha}_{lj}, \quad (2.4.6)$$

где ряд сходится в $L^2(G)$; при этом имеет место равенство

$$(f, f) = \sum_{\alpha\in A}\sum_{l,j=1}^{n_\alpha} |(f, e^{\alpha}_{lj})|^2 = \sum_{\alpha\in A}\sum_{l,j=1}^{n_\alpha} n_\alpha |(f, t^{\alpha}_{lj})|^2. \quad (2.4.7)$$

Доказательство теоремы 5 является непосредственным следствием теоремы 2 и общей теории ортогональных разложений в гильбертовом пространстве (см., например, Колмогоров и Фомин [1], § 4 гл. III). Равенство (2.4.7) называется *формулой Планшереля*.

2.5. Разложение регулярного представления.

Теорема. *Пусть T — правое регулярное представление группы G в гильбертовом пространстве $L^2(G)$ и пусть $\{T^\alpha, \alpha \in A\}$ — семейство всевозможных попарно не эквивалентных, конечномерных неприводимых унитарных представлений группы G. Обозначим через t^α_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots, n_\alpha;\ n_\alpha = \dim T^\alpha)$ набор матричных элементов представления T^α в некотором ортонормированном базисе $\{e_k\}$, а через H^α — подпространство пространства $L^2(G)$, порожденное функциями $t^\alpha_{jk}(g)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n_\alpha)$. Тогда гильбертово пространство $L^2(G)$ разлагается в гильбертову прямую сумму конечномерных подпространств H^α по всем $\alpha \in A$; каждое пространство H^α инвариантно относительно правого регулярного представления T, и сужение $\dot{T}^\alpha$ представления T^α на подпространство H^α кратно представлению T^α с кратностью, равной n_α.*

Доказательство. По определению представления, имеет место равенство
$$t^\alpha_{ij}(gg_0) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} t^\alpha_{ik}(g)\, t^\alpha_{kl}(g_0), \tag{2.5.1}$$
которое можно записать в виде
$$[T(g_0)\, t^\alpha_{il}](g) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} t^\alpha_{ik}(g)\, t^\alpha_{kl}(g_0). \tag{2.5.2}$$
Из соотношения (2.5.2) следует, что функции $t^\alpha_{jk}(g)$, образующие (при фиксированном α) базис в пространстве H^α, переходят под действием операторов правого регулярного представления T в линейные комбинации тех же функций $t^\alpha_{jk}(g)$. Но тогда любой элемент из H^α, будучи линейной комбинацией функций t^α_{jk}, переходит под действием операторов представления T снова в элемент из H^α, т.е. каждое подпространство H^α инвариантно относительно операторов правого регулярного представления. Обозначим сужение представления T на подпространство H^α через $\dot{T}^\alpha$; тогда формулу (2.5.2) можно переписать в виде
$$[\dot{T}^\alpha(g_0)\, t^\alpha_{lj}](g) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} t^\alpha_{kl}(g_0)\, t^\alpha_{ik}(g). \tag{2.5.3}$$

Обозначим через H^α_i, $i = 1, \ldots, n_\alpha$, подпространства, порожденные функциями вида $t^\alpha_{ij}(g)$, $j = 1, \ldots, \dim T^\alpha$, при фиксированном i. Тогда подпространство H^α есть ортогональная прямая сумма подпространств H^α_i, $i = 1, \ldots, n_\alpha$, и из формулы (2.5.3) следует, что подпространство H^α_i инвариантно относительно всех операторов представления $\dot{T}^{\alpha}$. Пусть $\dot{T}_i^{\alpha}$ — сужение представления $\dot{T}^{\alpha}$ на подпространство H_i^{α}. Формула (2.5.3) показывает, что матричные элементы представления $\dot{T}_i^{\alpha}$ в базисе $\{t_{ij}^{\alpha}(g), j = 1, \ldots, n_{\alpha}\}$ совпадают с матричными элементами представления T^{α} в базисе $\{e_k\}$. Таким образом, каждое из представлений $\dot{T}_i^{\alpha}$ эквивалентно представлению T^{α}, что завершает доказательство теоремы.

2.6. Характеры неприводимых унитарных представлений компактных групп. Пусть T — непрерывное конечномерное представление компактной группы G; пусть $e_1, \ldots, e_n$ ($n = \dim T$) — базис в пространстве H представления T. Обозначим через $t_{ij}(g)$, $i, j = 1, \ldots, n$, матричные элементы представления T в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Функция

$$\chi(g) = t_{11}(g) + \ldots + t_{nn}(g) \tag{2.6.1}$$

является характером представления T. Из общих свойств характеров конечномерных представлений (см. IV п. 2.9 гл. I) следует, что непрерывная на группе G функция χ не зависит от выбора базиса в пространстве представления T, χ не меняется при замене представления T эквивалентным представлением, χ постоянна на классах сопряженных элементов группы G, значение функции χ в единице группы равно размерности представления, и т. д.

Из соотношений ортогональности для матричных элементов (теорема 1 п. 4) следует, что справедлива

Теорема 1. *Характеры χ^{α}, $\chi^{\alpha'}$ неприводимых унитарных представлений T^{α}, $T^{\alpha'}$ компактной группы G удовлетворяют соотношениям*

$$\int\limits_G \chi^{\alpha}(g)\,\overline{\chi^{\alpha'}(g)} = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad \alpha' \neq \alpha, \\ 1 & \textit{при} \quad \alpha' = \alpha. \end{cases} \tag{2.6.2}$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_G \chi^{\alpha}(g)\,\overline{\chi^{\alpha'}(g)}\,dg = \int\limits_G \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} t_{i1}^{\alpha}(g) \sum_{j=1}^{n_{\alpha'}} \overline{t_{jj}^{\alpha'}(g)}\,dg =$$

$$= \sum_{i=1,\,j=1}^{n_{\alpha_1} n_{\alpha'}} \int\limits_G t_{ii}^{\alpha}(g)\,\overline{t_{jj}^{\alpha'}(g)}\,dg \tag{2.6.3}$$

и величина правой части формулы (2.6.3) определяется формулами (2.4.1), откуда сразу получаем (2.6.2).

I. *Пусть S — конечномерное непрерывное унитарное представление группы G; обозначим через χ характер представления S. Пусть*

$$S = n_1 T^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus n_p T^{\alpha_p} \tag{2.6.4}$$

— разложение представления S в прямую сумму представлений, кратных неприводимым унитарным представлениям $T^{\alpha_1}, \ldots, T^{\alpha_p}$

группы G. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_p$ — характеры представлений $T^{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, T^{\alpha_p}$ соответственно. Тогда

$$\chi = n_1\chi_1 + \ldots + n_p\chi_p, \tag{2.6.5}$$

где числа $n_1, \ldots, n_p$ определяются соотношением

$$n_k = (\chi, \chi_k), \quad k = 1, \ldots, p. \tag{2.6.6}$$

Обратно, если имеет место равенство (2.6.5), *то представление S допускает разложение по формуле* (2.6.4).

Доказательство. Очевидно, что из соотношения (2.6.4) следует соотношение (2.6.5). Если имеет место равенство (2.6.5), то из соотношения (2.6.2) следует, что

$$(\chi, \chi_k) = n_k(\chi_k, \chi_k) = n_k$$

для всех $k = 1, \ldots, p$, что доказывает формулу (2.6.6). Предположим теперь, что выполнено соотношение (2.6.5), и пусть формула

$$S = m_1 T^{\alpha_1'} \oplus \ldots \oplus m_k T^{\alpha_k'} \tag{2.6.7}$$

определяет разложение представления S в прямую сумму представлений, кратных некоторым неприводимым представлениям $T^{\alpha_1'}, \ldots, T^{\alpha_k'}$. Пусть χ_l' — характер представления $T^{\alpha_i'}$ ($i = 1, \ldots, k$). Из соотношения (2.6.7) следует равенство

$$\chi = m_1\chi_1' + \ldots + m_k\chi_k'. \tag{2.6.8}$$

Тогда формулы (2.6.5) и (2.6.8) определяют два разложения одной и той же функции χ по ортонормированной системе, образованной характерами полной системы $\{T^\alpha\}$ непрерывных конечномерных унитарных представлений группы G. Такие два разложения могут отличаться лишь порядком слагаемых; таким образом, если исключить в (2.6.5) и (2.6.8) нулевые слагаемые, то $k = p$ и, с точностью до нумерации, имеем $T^{\alpha_i} = T^{\alpha_i'}$, $m_i = n_i$, т. е. имеет место равенство (2.6.4).

II. *Характеры двух непрерывных конечномерных унитарных представлений T^1, T^2 группы G совпадают тогда и только тогда, когда представления T^1 и T^2 эквивалентны.*

Доказательство. Пусть χ^1, χ^2 — характеры представлений T^1, T^2 соответственно. Если $\chi^1 = \chi^2$, то разложения вида (2.6.5) для характеров χ^1 и χ^2 совпадают, поэтому согласно I разложения вида (2.6.4) для представлений T^1 и T^2 также совпадают, т. е. T^1 эквивалентно T^2. Обратно, из эквивалентности представлений непосредственно следует равенство характеров.

III. *Пусть S — непрерывное конечномерное унитарное представление группы G. Представление S неприводимо тогда и только тогда, когда $\int\limits_G |\chi_S(g)|^2\,dg = 1$.*

Доказательство. Если представление S неприводимо, то $\int\limits_G |\chi_S(g)|^2\,dg = 1$ согласно теореме 1. Обратно, пусть $\int\limits_G |\chi_S(g)|^2\,dg = 1$ и пусть формула (2.6.4) задает разложение представления S в прямую сумму представлений, кратных неприводимым. Тогда имеет место равенство (2.6.5), и из соотношений ортогональности (2,6.2) следует, что

$$\int\limits_G |\chi_S(g)|^2\,dg = (\chi_S, \chi_S) = n_1^2(\chi_1, \chi_1) + \ldots + n_p^2(\chi_p, \chi_p) = \\ = n_1^2 + \ldots + n_p^2, \quad (2.6.9)$$

где $n_1, \ldots, n_p$ — натуральные числа. Так как левая часть формулы (2.6.9) равна 1 по условию, то $n_1^2 + \ldots + n_p^2 = 1$, откуда $p = 1$ и $n_1 = 1$, т. е. S эквивалентно T^{α_1} и потому неприводимо.

Пусть T — неприводимое непрерывное унитарное представление группы G, χ — его характер. Функция $(\dim T)^{-1}\chi$ называется *нормализованным характером* представления T.

Теорема 2. *Пусть ψ — непрерывная комплексная функция на группе G. Функция ψ тогда и только тогда является нормализованным характером некоторого непрерывного неприводимого унитарного представления группы G, когда $\psi \neq 0$ и*

$$\int\limits_G \psi(ghg^{-1}k)\,dg = \psi(h)\,\psi(k) \quad (2.6.10)$$

для всех $h, k \in G$.

Доказательство. а). Пусть существует неприводимое унитарное представление T группы G такое, что $\psi = (\dim T)^{-1}\chi$, где χ — характер представления T. Пусть A — линейный оператор в пространстве H представления T, определяемый формулой

$$A = \int\limits_G T(ghg^{-1})\,dg. \quad (2.6.11)$$

Так как представление T непрерывно, то интеграл в (2.6.11) существует. Для любого $k \in G$ выполняется соотношение

$$T(k)A = T(k)\int T(ghg^{-1})\,dg = \\ = \int T(k)\,T(ghg^{-1})\,dg = \int T(kghg^{-1})\,dg. \quad (2.6.12)$$

Полагая $g_1 = kg$, получаем, что правая часть равенства (2.6.12) может быть переписана в виде

$$\int T(g_1hg_1^{-1}k)\,dg_1 = \int T(g_1hg_1^{-1})\,T(k)\,dg_1 = \\ = \left(\int T(g_1hg_1^{-1})\,dg_1\right)T(k) = AT(k). \quad (2.6.13)$$

Объединяя (2.6.12) и (2.6.13), получаем

$$T(k)A = AT(k) \tag{2.6.14}$$

для всех $k \in G$. По условию, представление T неприводимо. Поэтому из (2.6.14) и леммы Шура следует, что оператор A кратен единичному:

$$A = \lambda \cdot 1_H, \tag{2.6.15}$$

где λ — некоторое число, q_H — единичный оператор в пространстве H. Тогда

$$\operatorname{tr} A = \lambda \cdot \dim H = \lambda \cdot \dim T. \tag{2.6.16}$$

С другой стороны, вычисляя след от обеих частей равенства (2.6.11), получаем

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \int T(ghg^{-1})\, dg = \int \operatorname{tr} T(ghg^{-1})\, dg = \\ = \int \chi(ghg^{-1})\, dg = \int \chi(h)\, dg = \chi(h). \tag{2.6.17}$$

Из (2.6.11), (2.6.15) и (2.6.17) заключаем, что

$$\int T(ghg^{-1})\, dg = (\dim T)^{-1} \chi(h)\, 1_H, \tag{2.6.18}$$

а из (2.6.18) следует, что

$$\int T(ghg^{-1}k)\, dg = \left(\int T(ghg^{-1})\, dg\right) T(k) = (\dim T)^{-1} \chi(h)\, T(k). \tag{2.6.19}$$

Вычисляя след обеих частей равенства (2.6.19), получаем, что

$$\int \chi(ghg^{-1}k)\, dg = (\dim T)^{-1} \chi(h)\, \chi(k) \tag{2.6.20}$$

для всех h, $k \in G$. Деля обе части равенства (2.6.20) на $\dim T$ и заменяя $(\dim T)^{-1}\chi$ функцией ψ, получаем соотношение (2.6.10).

б). Предположим теперь, что ψ — ненулевая непрерывная функция на группе G, удовлетворяющая соотношению (2.6.10). Так как матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы G образуют в $L^2(G)$ полную ортогональную систему, то существует неприводимое унитарное представление T группы G в конечномерном гильбертовом пространстве H такое, что для некоторого матричного элемента $t_{ij}(g)$ представления T

$$(t_{ij}, \overline{\psi}) = \int t_{ij}(g)\, \psi(g)\, dg \neq 0. \tag{2.6.21}$$

Из соотношения (2.6.21) следует, что оператор $T(\psi)$, определенный равенством

$$T(\psi) = \int \psi(g)\, T(g)\, dg, \tag{2.6.22}$$

имеет ненулевой матричный элемент и потому отличен от нуля. Умножая (2.6.22) на $\psi(h)$, $h \in G$, получаем равенство

$$\psi(h)\, T(\psi) = \int\limits_G \psi(h)\, \psi(k)\, T(k)\, dk. \tag{2.6.23}$$

Согласно соотношению (2.6.10) формула (2.6.23) может быть переписана в виде

$$\psi(h)\, T(\psi) = \iint \psi(ghg^{-1}k)\, T(k)\, dg\, dk. \tag{2.6.24}$$

Выполняя в (2.6.24) замену переменной $k_1 = ghg^{-1}k$ и меняя затем порядок интегрирования, получаем, что

$$\psi(h)\, T(\psi) = \iint \psi(k_1)\, T(gh^{-1}g^{-1}k_1)\, dg\, dk_1 = \\ = \int \psi(k_1) \left(\int T(gh^{-1}g^{-1})\, dg \right) T(k_1)\, dk_1. \tag{2.6.25}$$

Пусть χ — характер представления T. Подставляя соотношение (2.6.18) в (2.6.25), получаем, что

$$\psi(h)\, T(\psi) = \int \psi(k_1)(\dim T)^{-1} \chi(h^{-1})\, T(k_1)\, dk_1 = \\ = (\dim T)^{-1} \chi(h^{-1})\, T(\psi). \tag{2.6.26}$$

Так как $T(\psi) \neq 0$ по построению T, то из (2.6.26) и IV г) п. 2.9 гл. I следует соотношение

$$\psi(h) = (\dim T)^{-1} \chi(h^{-1}) = (\dim T)^{-1} \overline{\chi(h)} \tag{2.6.27}$$

для всех $h \in G$. Пусть $\overline{T}$ — представление группы G в том же гильбертовом пространстве H, такое, что в некотором ортонормированием базисе матрица оператора $\overline{T}(g)$ при любом $g \in G$ состоит из элементов, комплексно сопряженных соответствующим элементам матрицы оператора $T(g)$. Читатель легко проверит, что $\overline{T}$ — неприводимое непрерывное унитарное представление группы G в H, причем характер представления $\overline{T}$ определяется формулой

$$\chi_{\overline{T}}(g) = \overline{\chi(g)} \tag{2.6.28}$$

для всех $g \in G$. Представление $\overline{T}$, определенное однозначно с точностью до эквивалентности, называется представлением, *сопряженным* к T. Сравнивая (2.6.27) и (2.6.28), получаем, что

$$\psi(g) = (\dim T)^{-1} \chi_{\overline{T}}(g) = (\dim \overline{T})^{-1} x_{\overline{T}}(g) \tag{2.6.29}$$

для всех $g \in G$, что завершает доказательство теоремы 2.

2.7. Разложение произвольного непрерывного унитарного представления группы G на неприводимые представления. Пусть S — непрерывное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H, T — конечномерное неприводимое непрерывное унитарное представление группы G, χ_T — характер представления T; $e_1, \ldots, e_n$ $(n = \dim T)$ — базис в пространстве представления T; $t_{ij}^T(g)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — матричные элементы представления T в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Положим

$$\begin{aligned} E_{ij}^T &= (\dim T) \int_G \overline{t_{ij}^T(g)}\, S(g)\, dg; \\ E^T &= (\dim T) \int_G \overline{\chi_T(g)}\, S(g)\, dg. \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Согласно (2.6.28), вторую из формул (2.7.1) можно записать также в виде

$$E^T = (\dim T) \int_G \chi_{\overline{T}}(g)\, S(g)\, dg, \tag{2.7.2}$$

где $\chi_{\overline{T}}$ — характер представления $\overline{T}$, сопряженного представлению T. Так как $\overline{t_{ij}^T(g)}S(g)$ и $\overline{\chi_T(g)}S(g)$ — непрерывные операторнозначные функции на G, то интегралы в правых частях формул (2.7.1) и (2.7.2) существуют, причем E_{ij}^T и E^T являются непрерывными линейными операторами в H. Отметим основные свойства операторов E_{ij}^T, E^T.

I. *Операторы E_{ij}^T, E^T удовлетворяют следующим соотношениям*:

$$E^T = \sum_{i=1}^n E_{ii}^T; \tag{2.7.3а}$$

$$S(g)E_{jl}^T = \sum_{i=1}^n t_{ij}^T(g) E_{il}^T \quad \textit{для всех} \quad g \in G; \tag{2.7.3б}$$

$$E_{jl}^T S(g) = \sum_{i=1}^n t_{li}^T(g) E_{ji}^T \quad \textit{для всех} \quad g \in G; \tag{2.7.3в}$$

$$E_{ij}^T E_{lk}^{T'} = 0, \tag{2.7.3г}$$

если T' — неприводимое унитарное представление группы G, не эквивалентное T;

$$E_{ij}^T E_{lk}^T = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad j \neq l, \\ E_{ik}^T, & \textit{если} \quad j = l; \end{cases} \tag{2.7.3д}$$

$$E_{ii}^T E_{jj}^T = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad i \neq j, \\ E_{ii}^T & \textit{при} \quad i = j; \end{cases} \tag{2.7.3е}$$

$$(E_{ij}^T)^* = E_{ji}^T; \tag{2.7.3ж}$$

$$E^T E^{T'} = 0, \tag{2.7.3з}$$

если T' — неприводимое унитарное представление группы G, не эквивалентное T;

$$E^{T^*} = E^T = E^{T^2}; \tag{2.7.3и}$$

$$E^T S(g) = S(g) E^T \quad \textit{для всех} \quad g \in G. \tag{2.7.3к}$$

Доказательство. Соотношение (2.7.3а) является непосредственным следствием формул (2.7.1) и (2.6.1). Докажем формулу (2.7.3б). Из соотношений ортогональности, инвариантности интеграла и свойств интеграла от операторнозначных функций следует, что

$$\begin{aligned} S(g)E^T_{jl} &= S(g)(\dim T)\int \overline{t^T_{jl}(h)}\, S(h)\, dh = \\ &= (\dim T)\int \overline{t^T_{jl}(h)}\, S(gh)\, dh = \\ &= (\dim T)\int \overline{t^T_{jl}(g^{-1}h)}\, S(h)\, dh = \\ &= (\dim T)\int \sum_{i=1}^{n} \overline{t^T_{ji}(g^{-1})}\, \overline{t^T_{il}(h)}\, S(h)\, dh = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{t^T_{ji}(g^{-1})}(\dim T)\int \overline{t^T_{il}(h)}\, S(h)\, dh = \sum_{i=1}^{n} \overline{t^T_{ji}(g^{-1})}\, E^T_{il}, \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

и из (2.7.4) и соотношения $\overline{t^T_{ji}(g^{-1})} = t^T_{ij}(g)$ следует формула (2.7.3б). Аналогично доказывается равенство (2.7.3в). Докажем соотношения (2.7.3г) и (2.7.3д). Используя соотношение (2.7.3б), получаем

$$\begin{aligned} E^T_{ij}E^{T'}_{lk} &= \left((\dim T)\int \overline{t^T_{ij}(g)}\, S(g)\, dg\right) E^{T'}_{lk} = \\ &= (\dim T)\int \overline{t^T_{il}(g)}\, (S(g)E^{T'}_{lk})\, dg = \\ &= (\dim T)\int \overline{t^T_{ij}(g)} \left(\sum_{p=1}^{\dim T'} t^{T'}_{pl}(g)E^{T'}_{pk}\right) dg = \\ &= (\dim T)\sum_{p=1}^{\dim T'} \left(\int t^{T'}_{pl}(g)\, \overline{t^T_{ij}(g)}\, dg\right) E^{T'}_{pk}. \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Из соотношений ортогональности (2.4.1) непосредственно следует, что если T и T' не эквивалентны, то интеграл в правой части (2.7.5) равен нулю; если же $T' = T$, то из (2.4.1) следует, что при $l \neq j$ все слагаемые в правой части (2.7.5) равны нулю, а при $l = j$ единственное ненулевое слагаемое в правой части (3.7.5) соответствует $p = i$, причем это слагаемое равно $(\dim T)(\dim T)^{-1}E^T_{ik} = E^T_{ik}$. Итак,

$$E^T_{il}E^T_{jk} = E^T_{ik}, \tag{2.7.6}$$

чем завершается доказательство соотношений (2.7.3г) и (2.7.3д). Соотношение (2.7.3е) есть частный случай равенства (2.7.3д). Далее, в силу унитарности операторов $S(g)$ имеем

$$\begin{aligned}(E^T_{ij})^* &= \left((\dim T)\int \overline{t^T_{ij}(g)}\, S(g)\, dg\right)^* = \\ &= (\dim T)\int t^T_{ij}(g)\, S^*(g)\, dg = (\dim T)\int t^T_{ij}(g)\, S(g)^{-1}\, dg = \\ &= (\dim T)\int t_{ij}(g)\, S(g^{-1})\, dg = (\dim T)\int t^T_{ij}(g^{-1})\, S(g)\, dg = \\ &= (\dim T)\int \overline{t^T_{ji}(g)}\, S(g)\, dg = E^T_{ji},\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

ибо на основании непрерывности перехода от оператора к его сопряженному можно переходить в соотношении (2.7.7) к сопряженным операторам под знаком интеграла. Соотношение (2.7.7) доказывает равенство (2.7.3ж). Отсюда

$$(E^T)^* = \left(\sum_{i=1}^{n} E^T_{ii}\right)^* = \sum_{i=1}^{n}(E^T_{ii})^* = \sum_{i=1}^{n} E^T_{ii} = E^T, \tag{2.7.8}$$

что доказывает первое из соотношений (2.7.3и). Аналогично доказываются второе соотношение в (2.7.3и) и равенство (2.7.3з). Наконец, из (2.7.3а)–(2.7.3б) следует, что

$$S(g)E^T = \sum_{i,\,j=1}^{n} t^T_{ij}(g)E^T_{ij}, \quad E^T S(g) = \sum_{i,\,j=1}^{n} t^T_{ij}(g)E^T_{ij}, \tag{2.7.9}$$

откуда сразу следует равенство (2.7.3к).

Отметим ряд следствий предложения I.

Пусть M^T_i — совокупность всех векторов $x \in H$, удовлетворяющих соотношению $E^T_{ii}x = x$; пусть M^T — совокупность всех векторов $x \in H$, удовлетворяющих соотношению $E^T x = x$.

II. *Множества M^T_i и M^T суть замкнутые линейные подпространства гильбертова пространства H. Если T' и T не эквивалентны, то $M^{T'}_k$ и M^T_i ортогональны, $M^{T'}$ и M^T ортогональны. Если $i \neq k$, то M^T_i ортогонально M^T_k.*

Доказательство. Согласно I операторы E^T_{ii} и E^T суть операторы ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве H. Множества M^T_i и M^T, по определению, являются подпространствами, на которые проектируют E^T_{ii} и E^T соответственно. Отсюда, в частности, следует, что M^T_i и M^T — замкнутые линейные подпространства в H. Далее, пусть $x \in M^T_i$ и $y \in M^{T'}_k$, причем T не эквивалентно T' или $T = T'$, но $k \neq i$; тогда из (2.7.3г) и (2.7.3д) следует, что

$$(x,\, y) = (E^T_{ii}x,\, E^{T'}_{kk}y) = (E^{T'}_{kk}E^T_{ii}x,\, y) = (0,\, y) = 0,$$

что доказывает ортогональность M_i^T и $M_k^{T'}$. Аналогично доказывается, что M^T ортогонально $M^{T'}$, если T не эквивалентно T'.

III. *Пространство M^T есть ортогональная прямая сумма пространств M_i^T $(i = 1, \ldots, \dim T)$.*

Доказательство. Если вектор x_j принадлежит M_j^T, то из соотношений (2.7.3) следует равенство

$$E^T x_j = E^T \cdot E_{jj}^T x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} E_{ii}^T\right) E_{jj}^T = \sum_{i=1}^{n} (E_{ii}^T E_{jj}^T)\, x_j = E_{jj}^T x_j = x_j,$$

т. е. $x_j \in M^T$; поэтому M^T содержит всевозможные суммы $x_1 + \ldots + x_n$, $x_j \in M_j^T$. Обратно, если $x \in M^T$, то, полагая $x_i = E_{ii}^T x$, видим, что $x = E^T x = \left(\sum E_{ii}^T\right) x = \sum x_i$, причем $E_{ii}^T x_i = (E_{ii}^T)^2 x = E_{ii}^T x = x_i$, т. е. $x_i \in M_i^T$. Наконец, M_i^T попарно ортогональны согласно II, что доказывает утверждение III.

IV. *Гильбертово пространство H есть ортогональная прямая сумма подпространств M^T, где T пробегает полное семейство попарно не эквивалентных неприводимых представлений* [1] *группы G.*

Доказательство. Известно, что пространства M^T попарно ортогональны. Пусть H_1 — замыкание линейного подпространства H, образованного конечными суммами элементов из подпространств M^T. Покажем, что $H_1 = H$, чем будет завершено доказательство предложения IV.

Пусть $H_1 \neq H$. Тогда существует ненулевой вектор $x \in H$, ортогональный подпространству H_1. В частности, вектор x ортогонален всем подпространствам M^T. Заметим теперь, что из (2.7.3д) следует равенство

$$E_{ii}^T E_{ik}^T x = E_{ik}^T x \tag{2.7.10}$$

для всех T и всех $i, k = 1, \ldots, \dim T$. Из соотношения (2.7.10) заключаем, что $E_{ik}^T x \in M_i^T$. Поэтому для всех T и всех i, k имеем

$$(x, E_{ik}^T x) = 0 \tag{2.7.11}$$

по построению x. Соотношение (2.7.11) можно переписать в виде равенства

$$(\dim T) \int \overline{t_{ik}^T(g)}(x, S(g)\, x)\, dg = 0, \tag{2.7.12}$$

справедливого для всех T и всех $i, k = 1, \ldots, \dim T$. Но согласно теореме 2 п. 2.4, функции $t_{ik}^T(g)$ образуют полную систему в $L^2(G)$; поэтому из (2.7.10) следует, что непрерывная функция $(x, S(g)\, x)$ переменного $g \in G$ определяет нулевой элемент пространства $L^2(G)$. Следовательно, $(x, S(g)\, x) = 0$ для всех $g \in G$. В частности, при $g = e$

[1] Разумеется, здесь можно считать отброшенными те T, для которых $M^T = (0)$.

получаем, что $(x, x) = 0$, что противоречит построению x. Поэтому $H_1 = H$ и предложение IV доказано.

Представление S группы G в гильбертовом пространстве H называется *кратным неприводимому представлению* T, если пространство H есть ортогональная прямая сумма замкнутых линейных подпространств H^i, $i = 1, \ldots, \dim T$, обладающих следующим свойством: для любого H^i и любого $x \in H^i$ существуют векторы $x_j \in H^j$, $j = 1, \ldots, \dim T$, такие, что $x_i = x$ и

$$S(g)\, x_j = \sum_{k=1}^{\dim T} t_{kj}^T(g)\, x_k \tag{2.7.13}$$

для всех $g \in G$.

V. *Пусть* $x_1, \ldots, x_{\dim T}$ — *набор векторов в пространстве* H. *Соотношение* (2.7.13) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$E_{kj}^T x_j = x_k \quad \text{для всех} \quad j, k = 1, \ldots, \dim T. \tag{2.7.14}$$

В частности, если S *кратно* T, *то* $H^i = M_i^T$.

Доказательство. Если выполнено соотношение (2.7.13), то, применяя (2.4.1), получаем

$$E_{kj}^T x_j = (\dim T) \int \overline{t_{kj}^T(g)}\, S(g)\, x_j\, dg =$$
$$= (\dim T) \int \overline{t_{kj}^T(g)} \sum_{p=1}^{\dim T} t_{pl}^T(g)\, x_p\, dg =$$
$$= (\dim T) \sum_{p=1}^{\dim T} \left(\int t_{pj}^T(g)\, \overline{t_{kj}^T(g)}\, dg \right) x_p = x_k,$$

т. е. имеет место равенство (2.7.14). Обратно, если выполнено соотношение (2.7.14), то, применяя (2.7.36), получаем

$$S(g)\, x_j = S(g) E_{jj}^T x_j = \sum_{k=1}^{\dim T} t_{kj}^T(g) E_{kj}^T x_j = \sum_{k=1}^{\dim T} t_{kj}^T(g)\, x_k,$$

что доказывает предложение V.

VI. *Если представление* S *группы* G *в гильбертовом пространстве* H *кратно неприводимому представлению* T, *то пространство* H *является ортогональной прямой суммой некоторого семейства таких своих подпространств* M_λ, *что*:

1) *каждое* M_λ *инвариантно относительно представления* S, *и*
2) *сужение представления* S *на любое подпространство* M_λ *эквивалентно представлению* T.

Доказательство. Пусть $\{e_\lambda^1,\ \lambda \in \Lambda\}$ — ортонормированный базис в пространстве H^1. Очевидно, что $e_\lambda^1 = E_{11}^T e_\lambda^1$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Положим $e_\lambda^i = E_{i1}^T e_\lambda^1$ для всех $i = 2, \ldots, \dim T$. Как мы уже видели в доказательстве предложения IV, векторы e_λ^i принадлежат подпространству $M_i^T = H^i$. Читатель легко проверит, что векторы e_λ^i при фиксированном i образуют ортонормированный базис в пространстве M_i^T. Так как H есть прямая сумма H^i, то семейство векторов $\{e_\lambda^i, i = 1, \ldots, \dim T, \lambda \in \Lambda\}$ образует ортонормированный базис в H. Пусть N_λ, $\lambda \in \Lambda$, — подпространство пространства H, порожденное векторами e_λ^i, $i = 1, \ldots, \dim T$. Из построения векторов e_λ^i и соотношений (2.7.3) следует, что

$$E_{kj}^T e_\lambda^j = E_{kj}^T E_{j1}^T e_\lambda^1 = E_{k1}^T e_\lambda^1 = e_\lambda^k, \tag{2.7.15}$$

т. е. векторы e_λ^k удовлетворяют соотношениям (2.7.14). Согласно V отсюда следует, что

$$S(g) = e_\lambda^j = \sum_{k=1}^{\dim T} t_{kj}^T(g)\, e_\lambda^k. \tag{2.7.16}$$

Равенство (2.7.16) означает, что M_λ инвариантно относительно $S(g)$ и ограничение представления S на M_λ эквивалентно представлению T. Так как набор $\{e_\lambda^i, i = 1, \ldots, \dim T, \lambda \in \Lambda\}$ образует ортонормированный базис в H, то ортогональная прямая сумма подпространств M_λ, $\lambda \in \Lambda$, есть все пространство H. Тем самым VI доказано.

Предложение VI показывает, что данное выше определение представления, кратного неприводимому, эквивалентно ранее данному (см. гл. I, п. 2.4) определению такого представления.

VII. *Пусть S — непрерывное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Каждое из подпространств M^T инвариантно относительно всех операторов $S(g)$, и если $M^T \neq (0)$, то сужение представления S на подпространство M^T есть унитарное представление группы G в M^T, кратное неприводимому представлению T. Таким образом, любое непрерывное унитарное представление компактной группы G в гильбертовом пространстве есть ортогональная прямая сумма унитарных представлений этой группы, кратных конечномерным непрерывным неприводимым унитарным представлениям группы G.*

Доказательство. Ввиду предложения IV нам достаточно доказать, что каждое из подпространств M^T инвариантно относительно всех операторов $S(g)$ и что ограничение представления S на подпространство M^T кратно неприводимому представлению T. Пусть $x \in M^T$; тогда $x = E^T x$, и согласно (2.7.3к) имеем

$$S(g)\, x = S(g) E^t X = E^T S(g)\, x \tag{2.7.17}$$

для всех $g \in G$, т. е. $S(g)\, x \in M^T$ при $x \in M^T$. Итак, M^T инвариантно относительно $S(g)$, $g \in G$. Далее, пространство M^T есть ортогональная прямая сумма подпространств $H^i = M_i^T$, $i = 1, \ldots, \dim T$. Пусть

$x \in M_i^T$. Положим $x_j = E_{ji}^T x$ для всех $j = 1, \ldots, \dim T$; тогда $x_j \in M_j^T$ для всех j и $x_i = x$, поэтому $x_k = E_{kj}^T x_j$ для всех $j, k = 1, \ldots, \dim T$. Согласно предложению V это означает, что сужение представления S на подпространство M^T кратно неприводимому представлению T. Предложение VII доказано.

Предложения I–VII в совокупности не только гарантируют возможность разложения данного представления на неприводимые представления, но и указывают правило для этого разложения. В частности, согласно предложению VII проектор E^T проектирует все пространство H на подпространство M^T, где действует подпредставление представления S, кратное неприводимому представлению T. Предложение VI указывает способ разложения этих представлений, кратных неприводимым, на неприводимые представления. Заметим, что хотя разложение представления, кратного неприводимому, в прямую сумму неприводимых представлений не однозначно, но однозначная определенность оператора E^T показывает, что разложение данного непрерывного унитарного представления S в прямую сумму представлений, кратных попарно не эквивалентным неприводимым представлениям, однозначно.

2.8. Достаточные условия полноты данного набора неприводимых унитарных представлений группы G. Покажем, что имеет место теорема, до известной степени обратная теоремам 2 и 4 п. 2.4.

Теорема. *Пусть $\{T^\alpha, \alpha \in A\}$ — некоторое семейство неприводимых унитарных представлений компактной группы G; пусть $\{t_{ij}^\alpha(g), i, j = 1, \ldots, \dim T^\alpha\}$ — набор матричных элементов представления T^α в некотором ортонормированием базисе. Если конечные линейные комбинации семейства функций $\{t_{ij}^\alpha(g), \alpha \in A, i, j = 1, \ldots, \dim T^\alpha\}$ образуют множество, плотное в пространстве $L^2(G)$ или в пространстве $C(G)$, то любое неприводимое унитарное представление группы G унитарно эквивалентно одному из представлений системы $\{T^\alpha\}$.*

Доказательство. Если линейные комбинации семейства функций $\{t_{ij}^\alpha\}$ плотны в $C(G)$, то они и подавно плотны в $L^2(G)$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что линейные комбинации функций $\{t_{ij}^\alpha\}$ плотны в $L^2(G)$. Пусть S — неприводимое (конечномерное) унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H; пусть χ — характер представления S. По условию, ортогональная система $\{t_{ij}^\alpha\}$ полна в гильбертовом пространстве $L^2(G)$, поэтому существует функция $t_{ij}^\alpha(g)$, такая, что

$$(\chi, t_{ij}^\alpha) \neq 0. \tag{2.8.1}$$

Построим для представления S оператор $E_{ij}^{T^\alpha}$; имеем

$$E_{ij}^{T^\alpha} = (\dim T^\alpha) \int_G \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, S(g)\, dg. \tag{2.8.2}$$

Ввиду непрерывности операции перехода от оператора к его следу можно вычислить след правой части равенства (2.8.2) при помощи перехода к следу под знаком интеграла. Поэтому

$$\operatorname{tr}(E_{ij}^{T^\alpha}) = (\dim T^\alpha)\int \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\operatorname{tr} S(g)\,dg = \\ = (\dim T^\alpha)\int_G \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\,\chi(g)\,dg = (\chi,\, t_{ij}^\alpha)(\dim T^\alpha). \quad (2.8.3)$$

Согласно (2.8.1) правая часть (2.8.3) не равна нулю. Поэтому $E_{ij}^{T^\alpha} \neq 0$. Используя (2.7.3д), получаем

$$E_{ii}^{T^\alpha} \neq 0, \quad (2.8.4)$$

так как $E_{ii}^{T^\alpha} E_{ij}^{T^\alpha} = E_{ij}^{T^\alpha} \neq 0$. Но тогда и подавно

$$E^{T^\alpha} \neq 0, \quad \text{поэтому} \quad M^{T^\alpha} \neq (0). \quad (2.8.5)$$

Из соотношения (2.8.6) и предложения VII п. 2.7 следует, что представление S содержит ненулевое подпредставление, эквивалентное T^α. Но представление S неприводимо, поэтому S эквивалентно T^α.

2.9. Примеры. 1. Пусть G — группа вращений окружности ($G = \Gamma^1$; см. пример 1 п. 1.7 гл. I). Любую функцию f на группе G можно рассматривать как функцию на числовой прямой $\mathbf{R}$, удовлетворяющую соотношению

$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi) \quad (2.9.1)$$

для всех $\varphi \in \mathbf{R}$. Одномерные представления группы G можно отождествить с числовыми функциями на G (п. 2.1 гл. I). Рассмотрим семейство χ_n, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, одномерных представлений группы G, определяемое формулами

$$\chi_n(\varphi) = e^{in\varphi}, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (2.9.2)$$

Функции $\chi_n(\varphi)$ удовлетворяют соотношению (2.9.1), поэтому определение χ_n как функций на группе G корректно. Функции $\chi_n(\varphi)$ являются матричными элементами соответствующих неприводимых представлений. В примере г) п. 3.3 гл. III было доказано, что функции $\chi_n(\varphi)$ образуют полную систему неприводимых представлений группы G. Дадим еще другое доказательство этого факта. Рассмотрим множество A конечных линейных комбинаций функций $\chi_n(\varphi)$ на группе G. Семейство A образует алгебру функций на группе G, так как произведение функций χ_n и χ_m есть χ_{n+m}. Алгебра A разделяет точки G, так как уже функция $\chi_1(\varphi) = e^{i\varphi}$ разделяет точки G, определяя точное представление группы G. Кроме того, алгебра A содержит постоянные функции (так как $\chi_0(g) \equiv 1$). Наконец $\overline{\chi}_n = \chi_{-n}$, поэтому алгебра A вместе с любой функцией содержит комплексно сопряженную к ней. Согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса алгебра A плотна в $C(G)$.

Тогда из теоремы п. 2.8 следует, что семейство χ_n, $n \in \mathbf{Z}$, определяет полную систему неприводимых унитарных представлений группы G.

Применим в рассматриваемом случае теорему 5 п. 2.4. Легко проверить, что мера $d\varphi/2\pi$ является инвариантной мерой на G такой, что мера всей группы G равна единице. Поэтому пространство $L^2(G)$ можно отождествить с множеством всех измеримых 2π-периодических функций f на числовой прямой, таких, что $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2\, d\varphi < +\infty$.

Согласно теореме 5 п. 4 семейство функций χ_n, $n \in \mathbf{Z}$, образует в $L^2(G)$ ортонормированный базис, и формула (2.4.7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2\, d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad \text{для любой} \quad f \in L^2(G), \tag{2.9.3}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,\overline{\chi_n(\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi. \tag{2.9.4}$$

Формула (2.9.3) является известным *равенством Парсеваля* в теории тригонометрических рядов Фурье.

Отсюда, в частности, следует полнота тригонометрической системы в $L^2[-\pi, \pi]$.

2. Пусть G — группа унитарных матриц второго порядка с определителем 1, т. е. $G = SU(2)$ (см. пример 3 п. 1.2 § 1). Построим полный набор неприводимых унитарных представлений группы G.

Пусть m — неотрицательное целое число, H_m — линейное пространство однородных многочленов степени m от двух переменных z_1 и z_2, снабженное скалярным произведением

$$(p(z_1, z_2), q(z_1, z_2)) = \int\limits_{|z_1|^2+|z_2|^2 \leqslant 1} p(z_1, z_2)\,\overline{q(z_1, z_2)}\, dz_1\, dz_2, \tag{2.9.5}$$

где $dz_1 = dx_1\, dy_1$, $dz_2 = dx_2\, dy_2$ при $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Читатель легко проверит, что линейное пространство H_m, снабженное скалярным произведением (2.9.5), есть конечномерное гильбертово пространство, и формула

$$(T_m(g)\, p)(z_1, z_2) = p(g_{11}z_1 + g_{21}z_2,\, g_{12}z_1 + g_{22}z_2), \tag{2.9.6}$$

где

$$g = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} \in SU(2),$$

определяет непрерывное унитарное представление группы G в пространстве H_m. В частности, операторы $T_m(g)$, определенные формулой (2.9.6), переводят однородные многочлены степени m в однородные многочлены степени m.

I. *Представления T_m неприводимы.*

Доказательство. Пусть Γ — подгруппа группы G, образованная диагональными матрицами, т. е.

$$\Gamma = \left\{ \gamma_\varphi = \left\| \begin{matrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{matrix} \right\|, \quad \varphi \in \mathbf{R} \right\}. \tag{2.9.7}$$

Ограничение представления T_m на Γ допускает разложение в прямую сумму попарно не эквивалентных одномерных представлений. Действительно, если $p_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{m-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, то

$$[T_m(\gamma_\varphi)\, p_k](z_1, z_2) = (e^{i\varphi} z_1)^k (e^{-i\varphi} z_2)^{m-k} = e^{i(2k-m)\,\varphi} p_k(z_1, z_2). \tag{2.9.8}$$

Таким образом, всякое подпространство L пространства H_m, инвариантное относительно представления T, должно быть прямой суммой подпространств, инвариантных относительно ограничения представления T на подгруппу Γ, т. е. если $L \neq (0)$, то L должно быть линейной оболочкой некоторых многочленов p_k, $k = 0, \ldots, m$.

Рассмотрим теперь подгруппу Δ группы G, определяемую формулой

$$\Delta = \left\{ \delta_\theta = \left\| \begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \right\|, \quad \theta \in \mathbf{R} \right\}. \tag{2.9.9}$$

Очевидно, что

$$(T_m(\delta_\theta)\, p_k)(z_1, z_2) = \\ = (z_1 \cos\theta + z_2 \sin\theta)^k (-z_1 \sin\theta + z_2 \cos\theta)^{m-k}. \tag{2.9.10}$$

Пусть формула

$$T_m(\delta_\theta)\, p_k = \sum_{j=0}^{m} t_{kj}(\theta)\, p_j \tag{2.9.11}$$

определяет разложение правой части соотношения (2.9.10) по базису (p_k). Очевидно, что $t_{kj}(\theta)$ являются многочленами от $\cos\theta$ и $\sin\theta$, в частности, функции $t_{kj}(\theta)$ непрерывно дифференцируемы. Покажем, что $t_{k,\,k+1}(t)$ и $t_{k,\,k-1}(\theta)$ не равны тождественно нулю, если $k+1 \leqslant m$ или $k-1 \geqslant 0$ соответственно. Достаточно показать, что производные этих функций по θ при $\theta = 0$ не равны нулю. Дифференцируя соотношение (2.9.10) по θ при $\theta = 0$, получаем равенство

$$\frac{d}{d\theta}\, (T_m(\delta_\theta)\, p_k)(z_1, z_2)|_{\theta=0} = \\ = k z_1^{k-1} z_2^{m-k+1} - (m-k)\, z_1^{k+1} z_2^{m-k+1} = \\ = k p_{k-1}(z_1, z_2) - (m-k)\, p_{k+1}(z_1, z_2). \tag{2.9.12}$$

Сравнивая (2.9.12) с соотношением (2.9.11), получаем

$$\sum_{j=0}^{m}(d/d\theta)(t_{kj}(\theta))|_{\theta=0}\cdot p_j = kp_{k-1}-(m-k)\,p_{k+1}, \tag{2.9.13}$$

т. е. $t_{k,\,k+1}(\theta)\not\equiv 0$ при $k<m$; $t_{k,\,k-1}(\theta)\not\equiv 0$ при $k>0$. Отсюда следует, что если L — ненулевое, т. е. L содержит некоторый многочлен p_{k_0}, то L содержит все многочлены p_k с номерами $k\leqslant m$, $k>k_0$, и с номерами $k\geqslant 0$, $k<k_0$, т. е. $L=H_m$. Следовательно, представление T_m неприводимо.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное предложение.

II. *Для любого элемента $g\in G$ существуют элементы $v\in G$ и $\gamma\in\Gamma$ такие, что $g=v\gamma v^{-1}$.*

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно, что любая унитарная матрица g может быть приведена унитарным преобразованием w к диагональному виду γ:

$$g=w\gamma w^{-1}.$$

Если $g\in SU(2)$, т. е. $\det u=1$, то и $\det\gamma=1$, поэтому $\gamma\in\Gamma$. Если $\det w\neq 1$, то, заменяя матрицу w матрицей $v=w\tau$, где $\tau=\begin{Vmatrix}(\det w)^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$, видим, что $\det v=1$. Поэтому $v\in SU(2)$, а матрица τ коммутирует с любой матрицей $\gamma\in\Gamma$, так как τ и γ одновременно имеют диагональный вид. Поэтому $\tau\gamma\tau^{-1}=\gamma$ и

$$v\gamma v^{-1}=w\tau\gamma(w\tau)^{-1}=w\gamma w^{-1}=g.$$

III. *Характер χ_m неприводимого унитарного представления T_m определяется формулой*

$$\chi_m(g)=\frac{e^{i(m+1)\,\varphi}-e^{-i(m+1)\,\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}, \tag{2.9.14}$$

при

$$g=v\gamma_\varphi v^{-1},\quad v\in SU(2),\quad \gamma_\varphi=\begin{Vmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{Vmatrix}. \tag{2.9.15}$$

Доказательство. Пусть выполнено соотношение (2.9.15). Так как характер конечномерного представления является функцией, постоянной на классах сопряженных элементов группы G, то $\chi_m(g)=\chi_m(v^{-1}gv)=\chi_m(\gamma_\varphi)$. Поэтому для доказательства соотношения (2.9.14) достаточно вычислить величину $\chi_m(\gamma_\varphi)$. Но из соотношения (2.9.8) следует, что

$$\chi_m(\gamma_\varphi)=\sum_{k=0}^{m}e^{i(2k-m)\,\varphi}. \tag{2.9.16}$$

Суммируя геометрическую прогрессию в правой части формулы (2.9.16), получаем равенство (2.9.14).

IV. *Характеры χ_m представлений T_m удовлетворяют соотношению*

$$\chi_m(g)\,\chi_n(g) = \chi_{m+n}(g) + \chi_{m+n-2}(g) + \ldots + \chi_{|m-n|}(g) \qquad (2.9.17)$$

для всех $g \in G$ и всех неотрицательных чисел m и n.

Доказательство. Достаточно проверить формулу (2.9.17) для $g = \gamma_\varphi$. Из соотношений (2.9.14) и (2. 9.16) получаем, что

$$\chi_m(\gamma_\varphi)\,\chi_n(\gamma_\varphi) = \\ = \frac{e^{i(m+1)\,\varphi} - e^{-i(m+1)\,\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}\,(e^{in\varphi} + e^{i(n-2)\,\varphi} + \ldots + e^{-in\varphi}). \qquad (2.9.18)$$

Подстановка соотношения (2.9.14) в правую часть (2.9.17) дает то же выражение, что и в правой части (2.9.18).

V. *Тензорное произведение представлений T_m и T_n разлагается в ортогональную прямую сумму представлений T_{m+n}, T_{m+n-2}, ..., $T_{|m-n|}$.*

Это утверждение является непосредственным следствием IV п. 2.9 гл. I и предложения I п. 2.6.

VI. *Конечные линейные комбинации матричных элементов $t^m_{ij}(g)$, $m \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, \dim T_m$, неприводимых унитарных представлений T_m плотны в $C(G)$.*

Доказательство. Из предложения V следует, что конечные линейные комбинации матричных элементов представлений T_m образуют некоторую алгебру A непрерывных функций на G. Эта алгебра содержит константы, так как содержит матричный элемент единичного представления T_0 группы G. Кроме того, алгебра A разделяет точки G, так как представление T_1 имеет в базисе $p_1 = z_1$, $p_2 = z_2$ матричные элементы g_{ij}, $i, j = 1, 2$ (т. е. T_1 эквивалентно тождественному представлению). Наконец, если $\overline{T}_k$ — представление, сопряженное T_k, то $\chi_{\overline{T}_k} = \overline{\chi}_k$, а из формулы (2.9.14) следует, что $\overline{\chi}_k = \chi_k$. Поэтому $\overline{T}_k$ эквивалентно T_k. Следовательно, алгебра A вместе с любой функцией содержит сопряженную к ней. Согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса, алгебра A плотна в $C(G)$.

VII. *Семейство представлений T_m образует полную систему*[1] *неприводимых унитарных представлений группы G.*

Это следует из VI и теоремы п. 2.8.

[1] Ниже (см. гл. XII) полнота системы T_m будет получена другим путем, как следствие общего результата о представлениях группы $SU(n)$.

Применяя теорему 5 п. 2.4, видим, что справедлива

Теорема. *Функции* $\varphi_{ij}^m(g) = \sqrt{m+1}\, t_{ij}^m(g)$, *где* $m \geqslant 0$, $i, j = 0, \ldots, m$, *а* $t_{ij}^m(g)$ — *матричные элементы неприводимого представления* T_m *в некотором ортонормированном базисе, образуют ортонормированную систему в* $L^2(G)$, *и для любой функции* $f \in L^2(G)$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_G |f(g)|^2\, dg = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \sum_{i,j=0}^{\infty} |(f, t_{ij}^m)|^2. \tag{2.9.19}$$

§ 3. Групповая алгебра компактной группы

3.1. Определение и простейшие свойства групповой алгебры. Пусть G — компактная топологическая группа. Обозначим через $L^1(G)$ совокупность всех суммируемых числовых функций на группе G, т. е. таких функций f, что:

1) f измерима относительно инвариантной меры на G;
2) $\int\limits_G |f(g)|\, dg < +\infty$.

Отождествим функции, отличающиеся лишь на множестве меры нуль. Определим в $L^1(G)$ операции сложения и умножения на число обычным образом. Тогда $L^1(G)$ становится линейным пространством. Определим в пространстве $L^1(G)$ операцию умножения, полагая

$$(f_1 * f_2)(g) = \int\limits_G f_1(h)\, f_2(h^{-1}g)\, dh \tag{3.1.1}$$

для всех f_1, $f_2 \in L^1(G)$. Функция $f_1 * f_2$ называется *сверткой* функций f_1 и f_2.

Покажем, что функция $f_1 * f_2$ принадлежит пространству $L^1(G)$. Рассмотрим отображение φ компактной группы $G \times G$ на себя, определенное формулой $(g, h) \to (h^{-1}g, h)$. Это отображение, очевидно, является гомеоморфизмом; легко проверить, что при отображении φ открытые множества вида $M_1 \times M_2$ переходят в множества той же меры. Следовательно, отображение φ переводит измеримые функции на $G \times G$ в измеримые. Таким образом, поскольку функция $f_1(h)\, f_2(g)$ измерима на $G \times G$, то и функция $f_1(h)\, f_2(h^{-1}g)$ измерима на $G \times G$. С другой стороны, повторный интеграл от функции $|f_1(h)\, f_2(h^{-1}g)|$ равен

$$\int\limits_G dh \int\limits_G |f_1(h)|\, |f_2(h^{-1}g)|\, dg = \\ = \int\limits_G |f_1(h)|\, dh \int\limits_G |f_2(h^{-1}g)|\, dg = \int\limits_G |f_1(h)|\, dh \int\limits_G |f_2(g)|\, dg < +\infty; \tag{3.1.2}$$

следовательно, функция $f_1(h)\, f_2(h^{-1}g)$ есть суммируемая функция на $G \times G$. Применяя к этой функции теорему Фубини, получаем, что для почти всех $g \in G$ интеграл $\int\limits_G f_1(h)\, f_2(h^{-1}g)\, dh$ существует и определяет суммируемую функцию на G. Следовательно, формула (3.1.1) корректно определяет умножение в $L^1(G)$. Читатель легко проверит, что для любого комплексного числа λ и любых f_1, f_2, $f_3 \in L^1(G)$ имеют место равенства

$$\begin{gathered} \lambda(f_1 * f_2) = \lambda f_1 * f_2, \\ f_1 * (\lambda f_2) = \lambda(f_1 * f_2), \\ f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3, \\ (f_1 + f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3, \\ f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3. \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

Соотношения (3.1.3) означают, что $L^1(G)$ есть ассоциативная алгебра над полем комплексных чисел.

Положим

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})} \quad \text{для всех} \quad g \in G, \quad f \in L^1(G). \tag{3.1.4}$$

Так как

$$\int\limits_G |f^*(g)|\, dg = \int\limits_G |\overline{f(g^{-1})}|\, dg = \int\limits_G |f(g)|\, dg \tag{3.1.5}$$

(в силу свойства 7) предложения I п. 2.1), то $f^* = L^1(G)$. Читатель легко проверит, что отображение $f \to f^*$ удовлетворяет условиям 1)–4) п. 2.5 гл. II. Таким образом, $L^1(G)$ можно рассматривать как симметричную алгебру.

Введем в $L^1(G)$ *норму*, полагая

$$\|f\|_{L^1(G)} = \int\limits_G |f(g)|\, dg \tag{3.1.6}$$

для всех $f \in L^1(G)$. Из соотношения (3.1.5) следует, что

$$\|f^*\|_{L^1(G)} = \|f\|_{L^1(G)}. \tag{3.1.7}$$

Кроме того, из теоремы Фубини и инвариантности меры dg заключаем, что

$$\begin{aligned} &\|f_1 * f_2\|_{L^1(G)} = \\ &\quad = \int \left| \int f_1(h)\, f_2(h^{-1}g)\, dh \right| dg \leqslant \int \left\{ \int |f_1(h)|\, |f_2(h^{-1}g)|\, dh \right\} dg = \\ &\quad = \int \left\{ \int |f_2(h^{-1}g)|\, dg \right\} |f_1(h)|\, dh = \int |f_2(g)|\, dg \int |f_1(h)|\, dh = \\ &\qquad\qquad = \|f_1\|_{L^1(G)} \|f_2\|_{L^1(G)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|f_1 * f_2\|_{L^1(G)} \leqslant \|f_1\|_{L^1(G)} \|f_2\|_{L^1(G)}. \tag{3.1.8}$$

Сравнивая определение алгебры $L^1(G)$ — в частности, формулу (3.1.1), — с определением групповой алгебры конечной группы G — в частности, с формулой (2.7.6) гл. II, мы видим, что для конечной группы G алгебра $L^1(G)$ совпадает с алгеброй A_G.

В общем случае алгебра $L^1(G)$ называется *групповой алгеброй* группы G.

I. *Групповая алгебра $L^1(G)$ тогда и только тогда содержит единицу, когда группа G конечна.*

Доказательство. Если группа G конечна, то групповая алгебра $L^1(G)$ содержит единицу согласно предложению II п. 2.7 гл. II. Обратно, пусть алгебра $L^1(G)$ содержит единицу $e(g)$. Покажем, что мера непустых открытых множеств имеет положительную нижнюю грань. Действительно, допустим, что существуют окрестности единичного элемента сколь угодно малой меры, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U единичного элемента группы G, такая, что $\int\limits_U |e(g)|\,dg < \varepsilon$. Пусть V — симметричная окрестность единичного элемента группы G, удовлетворяющая условию $V^2 \subset U$, и пусть ξ_V — характеристическая функция окрестности V. Тогда при $g \in V$

$$1 = \xi_V(g) = (e * \xi_V)(g) = \int\limits_G e(h)\,\xi_V(h^{-1}g)\,dh = \\ = \int\limits_{gV} e(h)\,dh \leqslant \int\limits_U |e(h)|\,dh < \varepsilon,$$

что невозможно при $\varepsilon < 1$.

Итак, мера любого непустого открытого подмножества $M \subset G$ не может быть меньше некоторого $a > 0$. Если группа G бесконечна, то для любого n найдется n различных точек $g_1, \ldots, g_n \in G$; эти точки имеют непересекающиеся окрестности $M_1, \ldots, M_n$, поэтому мера всей группы G не меньше na при любом n. Так как $\mu(G) = 1$, то G конечна.

II. *Если $f \in L^1(G)$, то функции*

$$f^{g_0}(g) = f(g_0 g), \quad f_{g_0}(g) = f(g g_0) \tag{3.1.9}$$

являются непрерывными функциями от g_0 в смысле нормы в $L^1(G)$.

Доказательство. Если f — непрерывная функция на G, то f равномерно непрерывна на G (см. III п. 1.2), поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U единичного элемента группы G, что $|f(h_1) - f(h_0)| < \varepsilon$ при $h_1 \in h_0 U$; тогда при $g_1 \in g_0 U$ также $g g_1 \in h h_0 U$ и потому

$$\|f_{g_1} - f_{g_0}\|_{L^1(G)} = \int\limits_G |f_{g_1}(g) - f_{g_0}(g)|\,dg = \\ = \int\limits_G |f(g g_1) - f(g g_0)|\,dg \leqslant \varepsilon \int\limits_G dg = \varepsilon,$$

т. е. утверждение предложения II справедливо для всех непрерывных функций f на G. Если f — произвольная функция из $L^1(G)$, то существует непрерывная на группе G функция f_1 такая, что $\|f - f_1\| < \varepsilon/3$. Выберем окрестность V единичного элемента в группе G так, чтобы при $g \in hU$ имело место равенство $\|(f_1)_g - (f_1)_h\|_{L^1} < \varepsilon/3$; тогда

$$\|f_g - f_h\|_{L^1} \leqslant \|f_g - (f_1)_g\|_{L^1} + \|(f_1)_g - (f_1)_h\|_{L^1} + \\ + \|(f_1)_h - f_h\|_{L^1} < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Аналогично доказывается непрерывность функции f^{g_0}.

Пусть $f \in L^2(G)$. Тогда f — измеримая функция на G и $\int\limits_G |f(g)|^2\,dg$ конечен. Из неравенства $|f| \leqslant (1 + |f|^2)/2$ следует тогда, что $\int\limits_G |f(g)|\,dg$ конечен. Следовательно, имеет место включение

$$L^2(G) \subset L^1(G). \tag{3.1.10}$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\left(\int\limits_G |f(g)|\,dg\right)^2 \leqslant \left(\int\limits_G 1\,dg\right) \int\limits_G |f(g)|^2\,dg = \int\limits_G |f(g)|^2\,dg,$$

т. е.

$$\|f\|^2_{L^1(G)} \leqslant \int\limits_G |f(g)|^2\,dg = \|f\|^2_{L^2(G)}. \tag{3.1.11}$$

III. *Если $f \in L^2(G)$, то функции f^{g_0}, f_{g_0}, определенные формулами* (3.1.9), *являются непрерывными функциями от g_0 в смысле нормы в $L^2(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству предложения II и поэтому предоставляется читателю.

IV. *Если $f_1, f_2 \in L^2(G)$, то $f_1 * f_2$ есть непрерывная функция на G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, функция f_2^* есть элемент пространства $L^2(G)$. Согласно III функция $(f_2^*)^{g^{-1}}$ есть непрерывная функция в смысле нормы в $L^2(G)$. С другой стороны,

$$(f_1 * f_2)(g) = \int\limits_G f_1(h)\, f_2(h^{-1}g)\,dh = \\ = \int\limits_G f_1(h)\,\overline{(f_2^*)^{g^{-1}}(h)}\,dh = (f_1, (f_2^*)^{g^{-1}}); \tag{3.1.12}$$

так как $(f_2^*)^{g^{-1}}$ — непрерывная функция в $L^2(G)$, то $(f_1, (f_2^*)^{g^{-1}})$ — непрерывная числовая функция, и из равенства (3.1.12) следует, что $f_1 * f_2$ непрерывна.

V. *Для любой функции* $f \in L^1(G)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\varphi \in L^1(G)$, *такая, что* $\|f * \varphi - f\|_{L^1(G)} < \varepsilon$, $\|\varphi * f - \overline{f}\|_{L^1(G)} < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть U — окрестность единичного элемента в группе G, φ_U — неотрицательная функция из $L^1(G)$, равная нулю вне U и удовлетворяющая условию

$$\int_G \varphi_U(g)\,dg = 1 \tag{3.1.13}$$

(например, $\varphi_U = (1/\pi(U))\,\chi_U$, где $\pi(U)$ — мера Хаара множества U, χ_U — характеристическая функция окрестности U). Тогда

$$(\varphi_U * f)(g) = \int_G \varphi_U(h)\, f(h^{-1}g)\,dh,$$

поэтому

$$\varphi_U * f = \int_G \varphi_U(h)\, f^{h^{-1}}\,dh; \tag{3.1.14}$$

из (3.1.13) и (3.1.14) следует, что

$$\|\varphi_U * f - f\|_{L^1(G)} = \left\|\int_G \varphi_U(h)\, f^{h^{-1}}\,dh - f\right\|_{L^1(G)} =$$

$$= \left\|\int_U \varphi_U(h)(f^{h^{-1}} - f)\,dh\right\|_{L^1(G)} \leqslant \int_U \varphi_U(h)\|f^{h^{-1}} - f\|_{L^1(G)}\,dh. \tag{3.1.15}$$

Согласно II окрестность U можно выбрать так, что $\|f^{h^{-1}} - f\|_{L^1(G)} < \varepsilon$ при $h \in U$; тогда из (3.1.16) получаем, что

$$\|\varphi_U * f - f\|_{L^1(G)} \leqslant \varepsilon \int_U \varphi_U(h)\,dh = \varepsilon.$$

Аналогично доказывается, что $\|f * \varphi_U - f\|_{L^1(G)} \to 0$.

VI. *Замкнутое подпространство* I *в* $L^1(G)$ *тогда и только тогда является левым* (*соответственно правым*) *идеалом в* $L^1(G)$, *когда оно инвариантно относительно всех левых* (*соответственно правых*) *сдвигов.*

Доказательство. Пусть функция φ_U выбрана в соответствии с требованиями предложения V. Если I — левый идеал в $L^1(G)$ и $f \in I$, то и $(\varphi_U)^{g_0} * f \in I$. С другой стороны,

$$((\varphi_U)^{g_0} * f)(g) = \int \varphi_U(g_0 h)\, f(h^{-1}g)\,dh =$$

$$= \int \varphi_U(h)\, f(h^{-1}g_0 g)\,dh = (\varphi_U * f)^{g_0}(g). \tag{3.1.16}$$

Согласно V $\varphi_U * f \to f$; согласно II отсюда следует, что $(\varphi_U * f)^{g_0} \to$ $\to f^{g_0}$. Так как $(\varphi_U * f)^{g_0} = (\varphi_U)^{g_0} * f \in I$, то из замкнутости идеала I

следует, что $f^{g_0} \in I$. Итак, замкнутый левый идеал инвариантен относительно левых сдвигов.

Обратно, пусть I — замкнутое подпространство в $L^1(G)$, инвариантное относительно левых сдвигов. Если функция ψ непрерывна на G, то функция $\psi(h)\, f^{h^{-1}}$ является непрерывной функцией на G относительно нормы в $L^1(G)$ для любой функции $f \in L^1(G)$. Тогда, повторяя обычные рассуждения, можно показать, что интеграл

$$\psi * f = \int\limits_G \psi(h)\, f^{h^{-1}}\, dh$$

есть предел по норме конечных сумм вида

$$\sum_h \psi(h_k)\, f^{h_k^{-1}} \mu(\Delta_k),$$

где $\{\Delta_k\}$ образуют разбиение группы G на непересекающиеся измеримые подмножества. Пусть $f \in I$. Так как I инвариантно относительно левых сдвигов, то $\sum\limits_k \psi(h_k)\, f^{h_k-1}\pi(\Delta_k) \in I$; так как $\psi * f$ есть предел этих сумм и I замкнуто, то $\psi * f \in I$ для любой непрерывной функции ψ. Если ψ — произвольная функция из $L^1(G)$, то существует непрерывная функция φ на G такая, что $\|\psi - \varphi\|_{L^1(G)} < \varepsilon$. Тогда $\|\psi * f - \varphi * f\|_{L^1(G)} \leqslant \|\psi - \varphi\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^1(G)} < \varepsilon \|f\|_{L^1(G)}$ согласно (3.1.8). Так как $\varphi * f \in I$ для всех непрерывных функций φ, то из замкнутости подпространства I следует, что $\psi * f \in I$ для всех $\psi \in L^1(G)$, т. е. I — левый идеал в $L^1(G)$.

3.2. Представления групповой алгебры и их связь с представлениями группы. Пусть T — представление групповой алгебры $L^1(G)$ в гильбертовом пространстве H. Представление T называется *невырожденным*, если из условия $T(f)\,\xi = 0$ для данного $\xi \in H$ и всех $f \in L^1(G)$ следует, что $\xi = 0$.

I. *Пусть $f \to T(f)$ — невырожденное симметричное непрерывное представление групповой алгебры $L^1(G)$ в гильбертовом пространстве H, φ_U — семейство элементов алгебры $L^1(G)$, построенное в предложении* V п. 1. *Тогда $\|T(\varphi_U)\,\xi - \xi\| \to 0$ для любого вектора $\xi \in H$, и множество H' конечных линейных комбинаций векторов вида $T(f)\,\eta$, $f \in L^1(G)$, $\eta \in H$, всюду плотно в H.*

Доказательство. Пусть H_1 — замыкание линейной оболочки векторов вида $T(f)\,\eta$, $f \in L^1(G)$, $\eta \in H$. Если $H_1 \neq H$, то существует ненулевой вектор $\xi \in H$, ортогональный H_1, т. е. $(\xi, T(f)\,\eta) = 0$ для всех $f \in L^1(G)$, $\eta \in H$. Тогда

$$(T(f)\,\xi, \eta) = (\xi, T(f)^*\eta) = (\xi, T(f^*)\,\eta) = 0 \tag{3.2.1}$$

для всех $\eta \in H$, $f \in L^1(G)$. Из (3.2.1) следует, что $T(f)\,\xi = 0$ для всех $f \in L^1(G)$. Так как представление $f \to T(f)$ невырождено, то $\xi = 0$. Полученное противоречие показывает, что $H_1 = H$.

Если $\xi = T(f)\,\eta$ для некоторых $\eta \in H$, $f \in L^1(G)$, то

$$\|T(\varphi_U)\,\xi - \xi\| = \|T(\varphi_U)\,T(f)\,\eta - T(f)\,\eta\| = \\ = \|T(\varphi_U * f - f)\|\,\|\eta\| \to 0, \quad (3.2.2)$$

ибо $\|\varphi_U * f - f\|_{L^1(G)} \to 0$, а представление $f \to T(f)$ непрерывно. Из (3.2.2) следует, что $\|T(\varphi_U)\,\xi - \xi\| \to 0$ для любого вектора $\xi \in H'$ (т. е. представимого в виде конечной линейной комбинации векторов вида $T(f)\,\eta$). Но множество H' плотно в $H_1 = H$, и если ξ — любой вектор из H, то существует вектор $\xi' \in H$, удовлетворяющий условию $\|\xi - \xi'\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|T(\varphi_U)\,\xi - \xi\| \leqslant \|T(\varphi_U)\,\xi - T(\varphi_U)\,\xi'\| + \|T(\varphi_U)\,\xi' - \xi'\| + \\ + \|\xi' - \xi\| < (1 + \|T(\varphi_U)\|)\,\|\xi - \xi'\| + \|T(\varphi_U)\,\xi' - \xi'\|.$$

Так как отображение $f \to T(f)$ непрерывно и $\|\varphi_U\|_{L^1(G)} = 1$, то $\|T(\varphi_U)\| \leqslant C$ для некоторого C и всех U. Выбирая функцию φ_U, так, что $\|T(\varphi_U)\,\xi' - \xi'\| < \varepsilon$, получаем, что $\|T(\varphi_U)\,\xi - \xi\| < (C+2)\,\varepsilon$, что завершает доказательство предложения I.

II. *Между симметричными невырожденными представлениями $f \to T(f)$ групповой алгебры $L^1(G)$ группы G и непрерывными унитарными представлениями $g \to T(g)$ группы G существует взаимно однозначное соответствие, определяемое формулой*

$$T(f) = \int_G f(g)\,T(g)\,dg. \quad (3.2.3)$$

Доказательство. Пусть $g \to T(g)$ — непрерывное унитарное представление группы G. Определим операторы $T(f)$ формулой (3.2.3). Очевидно, что соответствие $f \to T(f)$ линейно. Кроме того,

$$T(f^*) = \int f^*(g)\,T(g)\,dg = \int \overline{f(g^{-1})}\,T(g)\,dg = \\ = \int \overline{f(g)}\,T(g^{-1})\,dg = \int \overline{f(g)}\,T^*(g)\,dg = \\ = \int (f(g)\,T(g))^*\,dg = T(f)^* \quad (3.2.4)$$

и

$$T(f_1 * f_2) = \int \Big(\int f_1(h)\,f_2(h^{-1}g)\,dh\Big)\,T(g)\,dg = \\ = \int f_1(h)\,\Big(\int f_2(h^{-1}g)\,T(g)\,dg\Big)\,dh = \\ = \int f_1(h)\,\Big(\int f_2(k)\,T(hk)\,dk\Big) = \\ = \int f_1(h)\,\Big(\int f_2(k)\,T(h)\,T(k)\,dk\Big)\,dh = \\ = \int f_1(h)\,T(h)\,dh \int f_2(k)\,T(k)\,dk = T(f_1)\,T(f_2). \quad (3.2.5)$$

Соотношения (3.2.4) и (3.2.5) означают, что соответствие $f \to T(f)$, определенное формулой (3,2.3), есть симметричное представление групповой алгебры $L^1(G)$. Покажем, что оно непрерывно. Поскольку $\|T(g)\| = 1$, то

$$\|T(f)\| = \Big\|\int\limits_G \|f(g)\,T(g)\,dg\Big\| \leqslant \int\limits_G \|f(g)\,T(g)\|\,dg = \\ = \int\limits_G |f(g)|\,dg = \|f\|_{L^1(G)} \quad (3.2.6)$$

для всех $f \in L^1(G)$; следовательно, отображение $f \to T(f)$ непрерывно.

Пусть g — некоторый элемент группы G. Согласно I $\|T(\varphi_U)\,\xi - \xi\| \to 0$, поэтому

$$\|T(g)\,T(\varphi_U)\,\xi - T(g)\,\xi\| \to 0; \quad (3.2.7)$$

но

$$T(g)\,T(\varphi_U) = T(g)\left(\int \varphi_U(h)\,T(h)\,dh\right) = \\ = \int \varphi_U(h)\,T(gh)\,dh = \int \varphi_U(g^{-1}h)\,T(h)\,dh = \\ = \int (\varphi_U)^{g^{-1}}(h)\,T(h)\,dh = T((\varphi_U)^{g^{-1}}); \quad (3.2.8)$$

таким образом, из (3.2.7) и (3.2,8) следует соотношение

$$T((\varphi_U)^{g^{-1}})\,\xi \to T(g)\,\xi \quad (3.2.9)$$

для всех $g \in G$.

Покажем, что представление $f \to T(f)$ невырождено. Но

$$T(\varphi_U)\,\xi \to \xi$$

для всех $\xi \in H$, откуда сразу следует, что представление $f \to T(f)$ невырождено.

Обратно, пусть задано невырожденное симметричное непрерывное представление групповой алгебры $L^1(G)$ в гильбертовом пространстве H. Покажем, что существует однозначно определенное непрерывное унитарное представление $g \to T(g)$ группы G, удовлетворяющее соотношению (3.2.3).

Единственность искомого представления группы G следует из равенства (3.2.9), показывающего, что если представление $f \to T(f)$ определено формулой (3.2.3), то операторы $T(g)$ однозначно определяются представлением $f \to T(f)$. Докажем существование представления $g \to T(g)$ группы G, удовлетворяющего соотношению (3.2.3). Согласно (3.1.16) $(\varphi_U)^{g_0} * f = (\varphi_U * f)^{g_0}$; с другой стороны, так как $\varphi_U * f \to f$ в $L^1(G)$, то $(\varphi_U * f)^{f_0} \to f^{g_0}$. Поэтому

$$(\varphi_U)^{g_0} * f \to f^{g_0} \xrightarrow[U]{} 0 \quad (3.2.10)$$

в $L^1(G)$. Ввиду непрерывности представления $f \to T(f)$ из равенства (3.2.10) следует, что

$$T((\varphi_U)^{g_0})\,T(f)\,\eta - T(f^{g_0})\,\eta \to 0 \tag{3.2.11}$$

для любого $\eta \in H$. Пусть H' — множество конечных линейных комбинаций векторов вида $T(f)\,\zeta$, $f \in L^1(G)$, $\zeta \in H$. Согласно (3.2.11) для любого вектора $\xi \in H'$ предел векторов $T((\varphi_U)^{g_0})\,\xi$ существует и принадлежит H'. Обозначим через $T'(g_0)$ оператор в H', определенный формулой

$$T'(g_0)\,\xi = \lim_U T((\varphi_U)^{g_0^{-1}})\,\xi \tag{3.2.12}$$

для всех $\xi \in H'$, $g_0 \in G$. Из равенства (3.2.11) следует тогда, что

$$T'(g_0)\,T(f) = T(f^{g_0^{-1}}) \tag{3.2.13}$$

для всех $g_0 \in G$, $f \in L^1(G)$. Так как $\|(\varphi_U)^{g_0^{-1}}\|_{L^1(G)} = \|\varphi_U\|_{L^1(G)} = 1$, то $\|T((\varphi_U)^{g_0^{-1}})\| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$, всех $g_0 \in G$ и всех φ_U. Поэтому оператор $T'(g_0)$, определенный формулой (3.2.12), однозначно продолжается до непрерывного линейного оператора во всем пространстве H; обозначим этот оператор через $T(g_0)$. Тогда

$$\|T(g_0)\| \leqslant C \quad \text{для всех} \quad g_0 \in G. \tag{3.2.14}$$

Из (3.2.13) следует, что для всех $g, h \in G$, $f \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} T'(gh)\,T(f) = T(f^{(gh)^{-1}}) = T((f^{h^{-1}})^{g^{-1}}) = \\ = T'(g)\,T(f^{h^{-1}}) = T'(g)\,T'(h)\,T(f). \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Равенство (3.2.15) означает, что $T'(gh) = T'(g)\,T'(h)$ на H'. Следовательно,

$$T(gh) = T(g)\,T(h) \tag{3.2.16}$$

для всех $g, h \in G$. Кроме того, из равенства (3.2.13) следует, что

$$T(e) = 1. \tag{3.2.17}$$

Если $\xi = T(f)\,\eta$, то

$$T(g_0)\,\xi = T'(g_0)\,T(f)\,\eta = T(f^{g_0^{-1}})\,\eta \tag{3.2.18}$$

и $f^{g_0^{-1}}$ непрерывно зависит от g_0 согласно II п. 3.1. Следовательно, правая часть равенства (3.2.18) непрерывно зависит от g_0, поэтому $T(g_0)\,\xi$ — непрерывная функция от g_0 для всех $\xi \in H'$. Для любого $\xi \in H$ существует $\xi' \in H$ такой, что $\|\xi - \xi'\| < \varepsilon$; тогда из (3.2.14) следует, что

$$\begin{aligned} \|T(g_1)\,\xi - T(g_0)\,\xi\| \leqslant \|T(g_1)(\xi - \xi')\| + \|T(g_1)\,\xi' - T(g_0)\,\xi'\| + \\ + \|T(g_0)(\xi' - \xi)\| \leqslant 2C\varepsilon + \|T(g_1)\,\xi' - T(g_0)\,\xi'\|, \end{aligned}$$

где $\|T(g_1)\,\xi' - T(g_0)\,\xi'\| \to 0$ при $g_1 \to g_0$. Таким образом, функция $T(g)\,\xi$ непрерывна по $g \in G$ при любом $\xi \in H$. Объединяя этот факт с соотношениями (3.2.16) и (3.2.17), видим, что отображение $g \to T(g)$ есть непрерывное представление группы G в пространстве H.

Покажем, что это представление унитарно. Пусть $V = U \cap U^{-1}$; тогда V — симметричная окрестность единичного элемента в G. Положим $\varphi_V(g) = (\mu(V))^{-1}\chi_V$, где χ_V — характеристическая функция множества V, $\mu(V)$ — мера Хаара множества V. Тогда

$$(\varphi_V)^*(g) = \overline{\varphi_V(g^{-1})} = \overline{\varphi_V(g)} = \varphi_V(g)$$

и

$$((\varphi_V)^{g_0^{-1}})^*(g) = \overline{\varphi_V(g_0^{-1}g^{-1})} = \varphi_V(gg_0) = (\varphi_V)_{g_0}(g).$$

Вычисление, аналогичное (3.1.16), показывает, что $f * (\varphi_V)^{g_0} = f_{g_0} * \varphi_V$. Применяя инволюцию, получаем

$$(\varphi_V)_{g_0} * f^* = \varphi_V * (f^*)^{g_0}, \tag{3.2.19}$$

откуда следует, что $(\varphi_V)_{g_0} * f \to f^{g_0}$ по V для всех $f \in L^1(G)$. Тогда $T((\varphi_V)_{g_0^{-1}})\,T(f) \to T(f^{g_0^{-1}}) = T'(g_0)\,T(f)$ для всех $g \in G$, $f \in L^1(G)$, поэтому

$$T'(g_0)\,\xi = \lim T((\varphi_V)_{g_0^{-1}})\,\xi \tag{3.2.20}$$

для всех $\xi \in H'$. Сравнивая (3.2.19) с (3.2.12) и используя соотношение $(\varphi_V)_{g_0^{-1}} = ((\varphi_V)_{g_0})^*$, видим, что $T'(g_0) = (T'(g_0^{-1}))^*$ на H', поэтому

$$T(g_0) = (T(g_0^{-1}))^*, \tag{3.2.21}$$

что доказывает унитарность представления $g \to T(g)$.

Докажем, наконец, что имеет место равенство (3.2.3). Так как

$$f_1 * f_2 = \int f_1(h)(f_2)^{h^{-1}}\,dh$$

(ср. (3.1.13)), то из (3.2.13) следует

$$T(f_1)\,T(f_2) = T(f_1 * f_2) = \int f_1(h)\,T((f_2)^{h^{-1}})\,dh = \\ = \int f_1(h)\,T(h)\,T(f_2)\,dh = \left(\int f_1(h)\,T(h)\,dh\right) T(f_2).$$

Поэтому ограниченные линейные операторы $T(f_1)$ и $\int f_1(h)\,T(h)\,dh$ совпадают на H'; следовательно, они совпадают на H.

3.3. Центр групповой алгебры. Пусть φ — такая функция из $L^1(G)$, что

$$\varphi * f = f * \varphi \tag{3.3.1}$$

для всех $f \in L^1(G)$, т.е. φ — функция на G, принадлежащая центру $Z_1(G)$ групповой алгебры $L^1(G)$ группы G. В частности, для любой непрерывной на G функции $f(g)$ равенство $(\varphi * f)(g) = (f * \varphi)(g)$ двух функций из $L^1(G)$ принимает вид равенства

$$\int \varphi(gh)\, f(h^{-1})\, dh = \int f(h)\, \varphi(h^{-1}g)\, dh, \tag{3.3.2}$$

в котором обе части являются непрерывными функциями от $g \in G$. Следовательно, равенство (3.3.2) имеет место для всех $g \in G$. Заменяя в правой части h^{-1} на h, получаем, что для всех $g \in G$ равенство

$$\varphi(gh) = \varphi(hg) \tag{3.3.3}$$

имеет место для почти всех $h \in G$. Так как функция $\varphi(gh)$ измерима как функция двух переменных на $G \times G$, то равенство (3.3.3) имеет место почти всюду на $G \times G$. Так как отображение $(g, h) \to (h^{-1}g, h)$ группы $G \times G$ в $G \times G$ сохраняет измеримость и меру (см. (3.1.2)), то, заменяя в (3.3.3) g на h^{-1}, получаем, что почти всюду на $G \times G$

$$\varphi(g) = \varphi(h^{-1}gh); \tag{3.3.4}$$

следовательно, для почти всех $g \in G$ (и тем более в смысле равенства двух функций из $L^1(G)$)

$$\varphi(g) = \int \varphi(h^{-1}gh)\, dh. \tag{3.3.5}$$

Обратно, если функция $\varphi \in L^1(G)$ удовлетворяет условию (3.3.4), то равенство (3.3.3) имеет место почти всюду на $G \times G$, поэтому (3.3.2) справедливо для почти всех $g \in G$, т. е. (3.3.1) имеет место для всех $f \in L^1(G)$ и $\varphi \in Z_1(G)$. Таким образом, мы доказали следующее предложение:

I. *Функция $\varphi \in L^1(G)$ тогда и только тогда принадлежит $Z_1(G)$, когда φ почти всюду на $G \times G$ удовлетворяет соотношению* (3.3.4).

II. *Сумма и свертка двух функций из $Z_1(G)$ также принадлежит $Z_1(G)$.*

Доказательство заключается в непосредственной проверке и потому опущено.

III. *Характер любого непрерывного унитарного конечномерного представления группы G принадлежит $Z_1(G)$.*

Доказательство. Характер любого непрерывного унитарного конечномерного представления группы G есть непрерывная функция на G, постоянная на классах сопряженных элементов и потому удовлетворяющая равенству (3.3.4).

IV. *Характеры непрерывных неприводимых унитарных представлений группы G образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $L^2(G) \cap Z_1(G)$, образованном суммируемыми с квадратом функциями на G, принадлежащими $Z_1(G)$.*

Доказательство. Из соотношений ортогональности для характеров (2.6.2) следует, что характеры χ_α неприводимых непрерывных унитарных представлений группы G образуют ортонормированную систему в $L^2(G)$. Согласно III характеры χ_α принадлежат $Z_1(G)$, поэтому $\chi_\alpha \in L^2(G) \cap Z_1(G)$. Из соотношения (3.3.3) и непрерывности умножения в $L^1(G)$ (см. (3.1.8)) следует, что центр $Z_1(G)$ замкнут в $L^1(G)$. Тогда из (3.1.10) и (3.1.11) следует, что подпространство $L^2(G) \cap Z_1(G)$ замкнуто в $L^2(G)$; поэтому $L^2(G) \cap Z_1(G)$ — гильбертово пространство.

Осталось показать, что ортонормированная система $\{\chi_\alpha\}$ полна в $L^2(G) \cap Z_1(G)$. Пусть $\varphi \in L^2(G) \cap Z_1(G)$; тогда, применяя (3.4.6), получаем, что равенство

$$\varphi(g) = \sum_\alpha n_\alpha \sum_{i,\,j} (\varphi,\, t^\alpha_{ij})\, t^\alpha_{ij}(g) \tag{3.3.6}$$

имеет место в $L^2(G)$ и, следовательно, почти всюду. С другой стороны, соотношение (3.3.4) имеет место для почти всех $(g,\, h) \in G \times G$; подставляя (3.3.6) в (3.3.4), получаем, что

$$\begin{aligned}\sum_\alpha n_\alpha \sum_{i,\,j} (\varphi,\, t^\alpha_{ij})\, t^\alpha_{ij}(g) &= \sum_\alpha n_\alpha \sum_{i,\,j} (\varphi,\, t^\alpha_{ij})\, t^\alpha_{ij}(h^{-1}gh) = \\ &= \sum_\alpha n_\alpha \sum_{k,\,l} \left(\sum_{i,\,j} (\varphi,\, t^\alpha_{ij})\, t^\alpha_{ik}(h^{-1})\, t^\alpha_{lj}(h) \right) t^\alpha_{kl}(g)\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

для почти всех $(g,\, h) \in G \times G$; в частности, равенство (3.3.7) при почти всех $h \in G$ имеет место для почти всех $g \in G$. С другой стороны, при фиксированном h правая и левая части равенства (3.3.7) принадлежат $L^2(G)$ (как функции от g). Следовательно, для почти всех $h \in G$ коэффициенты при $t^\alpha_{kl}(g)$ в правой и левой части (3.3.7) должны быть равны, откуда

$$(\varphi,\, t^\alpha_{kl}) = \sum_{i,\,j} (\varphi,\, t^\alpha_{ij})\, t^\alpha_{ik}(h^{-1})\, t^\alpha_{lj}(h) = \sum_{i,\,j} (\varphi,\, t^\alpha_{ij})\, \overline{t^\alpha_{kl}(h)}\, t^\alpha_{lj}(h) \tag{3.3.8}$$

для почти всех $h \in G$, но левая и правая части равенства (3.3.8) непрерывно зависят от h, поэтому (3.3.8) выполняется всюду. Интегрируя равенство (3.3.8) по h и применяя соотношения ортогональности (3.4.1), получаем

$$(\varphi,\, t^\alpha_{kl}) = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ \dfrac{1}{n_\alpha} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_\alpha} (\varphi,\, t^\alpha_{ii}) = \dfrac{1}{n_\alpha} \left(\varphi,\, \sum_i t^\alpha_{ii} \right) = \dfrac{1}{n_\alpha}\, (\varphi,\, \chi_\alpha) & \text{при} \quad i = j. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Подставляя (3.3.9) в (3.3.6), получаем, что

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_\alpha n_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} (\varphi,\, t_{ii}^\alpha)\, t_{ii}^\alpha = \\ &= \sum_\alpha n_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} \frac{1}{n_\alpha}\, (\varphi,\, \chi_\alpha)\, t_{ii}^\alpha = \\ &= \sum_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} (\varphi,\, \chi_\alpha)\, t_{ii}^\alpha = \\ &= \sum_\alpha (\varphi,\, \chi_\alpha)\, \chi_\alpha, \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

т. е. любая функция $\varphi \in L^2(G) \cap Z_1(G)$ разлагается в ряд по характерам.

Замечание. Если $\varphi \in Z_1(G)$, то ряд $\sum\limits_\alpha (\varphi,\, \chi_\alpha)\, \chi_\alpha$ не обязан сходиться к φ, но функция φ определяется коэффициентами $(\varphi,\, \chi_\alpha)$. Более того, любая функция $\varphi \in L^1(G)$ однозначно определяется коэффициентами $(\varphi,\, t_{ij}^\alpha)$. Покажем это.

Пусть U — окрестность единицы в G, U_1 — такая окрестность единицы, что $U_1^3 \subset U$ и $U_1^{-1} = U_1$. Пусть $g_1,\, \ldots,\, g_n$ — такие элементы группы G, что множества $g_i U_i$ $(i = 1,\, \ldots,\, n)$ покрывают группу G. Пусть U_2 — такая окрестность единичного элемента, что $g_i^{-1} U_2 g_i \subset \subset U_1$ при всех $i = 1,\, \ldots,\, n$, и пусть U_3 — такая окрестность единицы, что $U_3^2 \subset U_2$. Обозначим через θ_U функцию $(\mu(U_3))^{-1} \chi_{U_3}$ и положим $\psi_U = \theta_U * \theta_U$. Согласно IV п. 1 функция ψ_U непрерывна. Очевидно, что ψ_U — неотрицательная функция, ранная нулю вне окрестности U_2, причем

$$\int\limits_G \psi_U(g)\, dg = \int\limits_G \Bigl(\int\limits_G \theta_U(h)\, \theta(h^{-1} g)\, dh \Bigr)\, dg = \Bigl(\int\limits_G \theta_U(g)\, dg \Bigr)^2 = 1.$$

Пусть $\varphi_U(g) = \int\limits_G \psi_U(h^{-1} g h)\, dh$. Очевидно, что функция φ_U неотрицательна, непрерывна н удовлетворяет условию (3.3.4). Для любого $h \in G$ существует элемент g_k такой, что $h \in g_k U_1$, поэтому $h^{-1} U_2 h \subset U_1^{-1} g_k^{-1} U_2 g_k U_1 \subset U_1^3 \subset U$. Следовательно, функция φ_U обращается в нуль вне окрестности U. Очевидно, что $\int\limits_G \varphi_U(g)\, dg = 1$.

Рассмотрим теперь свертку $\varphi * \varphi_U$. Так как φ_U непрерывна, то из формулы $(\varphi * \varphi_U)(g) = \int\limits_G \varphi(h)\, \varphi_U(h^{-1} g)\, dh$ следует непрерывность функции $\varphi * \varphi_U$. Следовательно, и подавно $\varphi * \varphi_U \in L^2(G)$. Рассмотрим разложение функции $\varphi * \varphi_U$ в ряд по матричным элементам (3.4.6);

вычислим коэффициенты этого разложения:

$$(\varphi * \varphi_U,\, t_{ij}^{\alpha}) = \int\limits_G \Bigl(\int\limits_G \varphi(h)\, \varphi_U(h^{-1}g)\, dh\Bigr) \overline{t_{ij}^{\alpha}(g)}\, dg =$$

$$= \iint\limits_{G\times G} \varphi(h)\, \overline{t_{ij}^{\alpha}(g)}\, \varphi_U(h^{-1}g)\, dh\, dg = \iint\limits_{G\times G} \varphi(h)\, \varphi_U(k)\, \overline{t_{i,j}^{\alpha}(hk)}\, dh\, dk =$$

$$= \int\limits_{G\times G}\!\!\int \varphi(h)\, \varphi_U(k) \sum_{l=1}^{n_\alpha} \overline{t_{il}^{\alpha}(h)}\, \overline{t_{lj}^{\alpha}(k)}\, dh\, dk =$$

$$= \sum_{l=1}^{n_\alpha} \Bigl(\int\limits_G \varphi(h)\, \overline{t_{il}^{\alpha}(h)}\, dh\Bigr) \Bigl(\int\limits_G \varphi_U(k)\, \overline{t_{lj}^{\alpha}(k)}\, dk\Bigr) = \sum_{l=1}^{n_\alpha} (\varphi,\, t_{il}^{\alpha})(\varphi_U,\, t_{lj}^{\alpha}); \tag{3.3.11}$$

подставляя соотношение (3.3.9) для $(\varphi,\, t_{ij}^{\alpha})$ в равенство (3.3.11), получаем

$$(\varphi * \varphi_U,\, t_{ij}^{\alpha}) = \frac{1}{n_\alpha}\, (\varphi,\, t_{ij}^{\alpha})(\varphi_U,\, \chi^{\alpha}). \tag{3.3.12}$$

Поэтому из (3.4.6) и (3.3.12) получаем равенство

$$\varphi * \varphi_U = \sum_{\alpha} \sum_{i,j=1}^{n_\alpha} (\varphi,\, t_{ij}^{\alpha})(\varphi_U,\, \chi_\alpha)\, t_{ij}^{\alpha}. \tag{3.3.13}$$

Таким образом, $\varphi * \varphi_U$ определяется коэффициентами $(\varphi,\, t_{ij}^{\alpha})$ однозначно. Так как $\varphi * \varphi_U \to \varphi$ в $L^1(G)$, то функция φ однозначно определяется коэффициентами $(\varphi,\, t_{ij}^{\alpha})$.

3.4. Структура групповой алгебры.

I. *Характеры неприводимых непрерывных унитарных представлений группы G удовлетворяют соотношению*

$$\chi_\alpha * \chi_{\alpha'} = \begin{cases} 0, & \textit{если } T^{\alpha} \textit{ и } T^{\alpha} \textit{ не эквивалентны;} \\ n_\alpha^{-1}\chi_\alpha, & \textit{если } T^{\alpha} = T^{\alpha'}. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Доказательство. Из соотношений ортогональности (см. (2.4.1)) следует, что

$$(t_{ij}^{\alpha} * t_{kl}^{\alpha'})(g) = \int\limits_G t_{ij}^{\alpha}(h)\, t_{kl}^{\alpha'}(h^{-1}g)\, dh =$$

$$= \sum_{m=1}^{n_{\alpha'}} \Bigl(\int\limits_G t_{ij}^{\alpha}(h)\, t_{km}^{\alpha'}(h^{-1})\, dh\Bigr) t_{ml}^{\alpha'}(g) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n_\alpha} \Bigl(\int\limits_G t_{ij}^{\alpha}(h)\, \overline{t_{mk}^{\alpha'}(h)}\, dh\Bigr) t_{ml}^{\alpha'}(g) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \ne \alpha', \quad j \ne k, \\ n_\alpha^{-1} t_{il}^{\alpha}(g) & \text{при } \alpha = \alpha', \quad j = k. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Отсюда непосредственно следует равенство (3.4.1).

II. *Имеют место равенства*

$$t_{ij}^{\alpha} * \chi_{\alpha'} = \begin{cases} 0, & \text{если } T^{\alpha} \text{ и } T^{\alpha'} \text{ не эквивалентны,} \\ n_{\alpha}^{-1} t_{ij}^{\alpha}, & \text{если } T^{\alpha} = T^{\alpha'}. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Доказательство сразу следует из равенств (3.4.2).

III. *Пусть T^{α} — неприводимое непрерывное унитарное представление группы G, χ_{α} — его характер, I_{α} — множество функций $f \in L^1(G)$, удовлетворяющих условию $f * n_{\alpha}\chi_{\alpha} = f$. Тогда I_{α} — конечномерный (и поэтому замкнутый) минимальный симметричный двусторонний идеал в $L^1(G)$, образованный линейными комбинациями матричных элементов представления T^{α}. Идеал I_{α} изоморфен (как симметричная алгебра) алгебре всех линейных операторов в пространстве представления T^{α}.*

Доказательство. Очевидно, что I_{α} — линейное странство в $L^1(G)$. Пусть $f \in I_{\alpha}$, $\varphi \in L^1(G)$; тогда $(\varphi * f) * n_{\alpha}\chi_{\alpha} = \varphi * (f * n_{\alpha}\chi_{\alpha}) = \varphi * f$; поэтому $\varphi * f \in I_{\alpha}$, и I_{α} — левый идеал в $L^1(G)$. Но $\chi_{\alpha} \in Z_1(G)$ (см. III п. 3.3), поэтому $(f * \varphi) * n_{\alpha}\chi_{\alpha} = n_{\alpha}\chi_{\alpha} * (f * \varphi) = (n_{\alpha}\chi_{\alpha} * f) * \varphi = f * \varphi$. Итак, I_{α} — двусторонний идеал в $L^1(G)$. Соотношение $f = f * n_{\alpha}\chi_{\alpha}$ означает, что

$$\begin{aligned} f(g) = n_{\alpha} \int f(h)\, \chi_{\alpha}(h^{-1}g)\, dh = \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} n_{\alpha} \int f(h)\, t_{ii}^{\alpha}(h^{-1}g)\, dh = \\ = \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \sum_{j=1}^{n_{\alpha}} n_{\alpha} \left(\int f(h)\, t_{ij}^{\alpha}(h^{-1})\, dh \right) t_{ji}^{\alpha}(g), \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

т. е. f есть линейная комбинация матричных элементов представления T^{α}. Обратно, если f есть линейная комбинация матричных элементов представления T^{α}, то $f \in I_{\alpha}$ согласно предложению II, т. е. I_{α} совпадает с множеством линейных комбинаций матричных элементов представления T^{α}. Так как $t_{ij}^{\alpha}) * (g) = \overline{t_{ij}^{\alpha}(g^{-1})} = t_{ji}^{\alpha}(g)$, то идеал I_{α} симметричен. Чтобы доказать, что идеал I_{α} минимален (т. е. не существует ненулевых идеалов $I'_{\alpha} \subset I_{\alpha}$ алгебры $L^1(G)$, не совпадающих с I_{α}), нужно доказать, что I_{α} есть простая алгебра.

Пусть $f \in I_{\alpha}$; тогда $f = \sum c_{ij} t_{ij}^{\alpha}$, где c_{ij} — некоторые комплексные числа. Сопоставим функции f квадратную матрицу порядка n_{α} с матричными элементами $(n_{\alpha}^{-1} c_{ij})$. Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно и линейно отображает I_{α} на алгебру всех квадратных матриц порядка n_{α}. Пусть $f_1 = \sum c_{ij}^1 t_{ij}^{\alpha}$, $f_2 = \sum c_{ij}^2 t_{ij}^{\alpha}$; тогда из (3.4.2) следует, что

$$f_1 * f_2 = \sum_{i,j,k,l} c^1_{ij} c^2_{kl} (t^\alpha_{ij} * t^\alpha_{kl}) = \sum_{i,j,l} c^1_{il} c^2_{jl} n_\alpha^{-1} t^\alpha_{il} = \\ = \sum_{i,l} \Big(n_\alpha^{-1} \sum_{j=1}^{n_\alpha} c^1_{ij} c^2_{jl} \Big) t^\alpha_{il}. \quad (3.4.5)$$

Из (3.4.5) следует, что свертке функций из I_α соответствует произведение сопоставленных им матриц. Поэтому I_α изоморфен алгебре всех матриц порядка n_α (т. е. изоморфен алгебре всех линейных операторов в пространстве представления T^α). Так как алгебра матриц проста, то мы одновременно доказали, что I_α — простая алгебра.

Пусть B — банахово пространство, $\{B_\alpha\}$ — семейство замкнутых подпространств пространства B. Пространство B называется *замкнутой прямой суммой* семейства подпространств $\{B_\alpha\}$, если:

1) пространство B есть замыкание совокупности всех конечных сумм вида $x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_n}$, $x_{\alpha_k} \in B_{\alpha_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$;
2) последовательность $x^{(m)} = x^{(m)}_{\alpha_1} + x^{(m)}_{\alpha_2} + \ldots + x^{(m)}_{\alpha_m}$ сходится к нулю в B по норме, а при фиксированном α последовательность $x^{(m)}_\alpha$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится по норме,

то $\|x^{(m)}_\alpha\| \to 0$.

IV. а). *Любой ненулевой минимальный замкнутый двусторонний идеал в $L^1(G)$ совпадает с одним из идеалов I_α.*

б). *Алгебра $L^1(G)$ есть замкнутая прямая сумма своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов.*

Доказательство. а). Пусть I — ненулевой минимальный замкнутый двусторонний идеал в $L^1(G)$. Пусть φ — ненулевой элемент идеала I. Если $(\varphi, t^\alpha_{ij}) = 0$ для всех α, i, j, то из (3.3.13) следует, что $\varphi * \varphi_U = 0$ для всех U; так как $\|\varphi * \varphi_U - \varphi\|_{L^1(G)} \to 0$, то $\varphi = 0$. Полученное противоречие показывает, что для некоторого α и некоторых i, j $(\varphi, t^\alpha_{ij}) \neq 0$. Тогда из равенств

$$(\varphi * t^\alpha_{pq})(g) = \int\limits_G \varphi(h)\, t^\alpha_{pq}(h^{-1}g)\, dh = \sum_{k=1}^{n_\alpha} \Big(\int\limits_G \varphi(h)\, t^\alpha_{pq}(h^{-1})\, dh \Big) t^\alpha_{kq}(g) = \\ = \sum_{k=1}^{n_\alpha} \Big(\int\limits_G \varphi(h)\, \overline{t^\alpha_{kp}(h)}\, dh \Big) t^\alpha_{kq}(g) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} (\varphi, t^\alpha_{kp})\, t^\alpha_{kq}(g) \quad (3.4.6)$$

следует, что при $p = j$ по крайней мере один из коэффициентов (φ, t^α_{kp}) в (3.4.6) отличен от нуля, поэтому $\varphi * t^\alpha_{jq} \neq 0$ при всех q. Но из III следует, что $t^\alpha_{jq} \in I_\alpha$, поэтому свертка $\varphi * t^\alpha_{jq}$ принадлежит и идеалу I, и идеалу I_α. Так как $\varphi * t^\alpha_{jq} \neq 0$, то $I \cap I_\alpha \neq (0)$. Но $I \cap I_\alpha$ — ненулевой замкнутый двусторонний идеал, содержащийся в минимальных идеалах I и I_α, поэтому $I \cap I_\alpha = I$ и $I \cap I_\alpha = I_\alpha$, откуда $I = I_\alpha$.

б). Пусть $\varphi \in L^1(G)$. Согласно (3.3.13) функции вида $\varphi * \varphi_U$ являются пределами в $L^2(G)$ конечных линейных комбинаций матричных элементов представлений T^α. Согласно III эти матричные элементы принадлежат идеалу I^α, поэтому существует последовательность конечных сумм вида $\psi_{\alpha_1} + \ldots + \psi_{\alpha_n}$, $\psi_{\alpha_k} \in I_{\alpha_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к $\varphi * \varphi_U$ в смысле $L^2(G)$. Согласно (3.1.10) и (3.1.11) эта последовательность сходится к $\varphi * \varphi_U$ также и в пространстве $L^1(G)$. Но из V п. 3.1 следует, что $\varphi * \varphi_U - \varphi \to 0$ в $L^1(G)$, поэтому $L^1(G)$ есть замыкание совокупности конечных сумм вида $\psi_{\alpha_1} + \ldots + \psi_{\alpha_n}$, где $\psi_{\alpha_k} \in I_{\alpha_k}$.

Пусть теперь последовательность $\varphi^{(m)} = \varphi^{(m)}_{\alpha_1} + \ldots + \varphi^{(m)}_{\alpha_m}$ сходится в $L^1(G)$ к нулю по норме, причем $\varphi^{(m)}_{\alpha_k} \in I_{\alpha_k}$. Тогда $\varphi^{(m)} = \varphi^{(m)}_{\alpha_1} * n_{\alpha_1}\chi_{\alpha_1} + \ldots + \varphi^{(m)}_{\alpha_m} * n_{\alpha_m}\chi_{\alpha_m}$, поэтому $\varphi^{(m)} * n_\alpha\chi_\alpha = \varphi^{(m)}_{\alpha_1} * n_{\alpha_1}n_\alpha(\chi_{\alpha_1} * \chi_\alpha) + \ldots + \varphi^{(m)}_{\alpha_m} * n_{\alpha_m}n_\alpha(\chi_{\alpha_m} * \chi_\alpha)$ для всех α. Из соотношений (3.4.1) следует, что $\chi_{\alpha_k} * \chi_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \alpha_k$ и $\chi_{\alpha_k} * \chi_\alpha = n_\alpha\chi_{\alpha_k}$ при $\alpha = \alpha_k$, поэтому

$$\varphi^{(m)} * n_\alpha\chi_\alpha = \varphi^{(m)}_\alpha * n_\alpha\chi_\alpha = \varphi^{(m)}_\alpha \tag{3.4.7}$$

для всех α. Следовательно,

$$\|\varphi^{(m)}_\alpha\| \leqslant n_\alpha\|\varphi^{(m)}\|\,\|\chi_\alpha\|. \tag{3.4.8}$$

Из (3.4.8) и из условия $\varphi^{(m)} \to 0$ следует, что $\|\varphi^{(m)}_\alpha\| \to 0$ для всех α, что завершает доказательство предложения IV.

Основные результаты этой главы остаются справедливыми (с надлежащими изменениями) для локально компактных групп, не являющихся компактными; см., например, Наймарк [1], гл. VI.

Глава V

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СВЯЗНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП; ТЕОРЕМА ЛИ

§ 1. Связные топологические группы

1.1. Связные топологические пространства. Пусть X — множество. Будем говорить, что два множества, $M \subset X$ и $N \subset X$, образуют *разбиение* множества X, если $M \cup N = X$, $M \cap N = \varnothing$, $M \neq \varnothing$ и $N \neq \varnothing$.

Топологическое пространство X называется *связным*, если не существует его разбиения на замкнутые множества; в противном случае X называется *несвязным*.

Множество M в топологическом пространстве X называется *связным*, если оно, рассматриваемое как подпространство в X, связно; в противном случае M называется *несвязным*. Связное открытое множество называется *областью*.

Замечание. В этих определениях можно слово «замкнутые» заменить словом «открытые». Действительно, если $X = U_1 \cup U_2$, где U_1, U_2 открыты и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, то U_1, U_2 также замкнуты, как дополнения к открытым множествам U_2, U_1.

I. *Отрезок* $[a, b]$ *связен.*

Доказательство. Предположим противное; пусть $[a, b] = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 замкнуты, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ и $F_1 \neq \varnothing$, $F_2 \neq \varnothing$. Пусть для определенности $b \in F_2$; следовательно, $b \notin F_1$. Положим $x_0 = \sup F_1$. Тогда $x_0 \in F_1$, ибо F_1 замкнуто, и потому $x_0 \notin F_2$. Кроме того, $x_0 < b$, ибо $b \notin F_1$. По определению x_0 имеем $(x_0, b) \subset F_2$. Отсюда $x_0 \in \overline{F}_2 = F_2$, и мы приходим к противоречию, ибо $x_0 \notin F_2$.

II. *Непрерывный образ связного множества связен.*

Доказательство. Пусть X связно и f — непрерывное отображение X на Y: $Y = f(X)$. Пусть $Y = F_1 \cup F_2$, $F_1 \neq \varnothing$, $F_2 \neq \varnothing$ и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, где F_1, F_2 замкнуты. Положим $\widetilde{F}_1 = f^{-1}(F_1)$, $\widetilde{F}_2 = f^{-1}(F_2)$. Тогда X есть объединение замкнутых (в силу непрерывности f) непустых, не пересекающихся множеств $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$, а это противоречит связности X.

III. *Непрерывная кривая связна.*

Утверждение непосредственно следует из I и II, ибо, по определению, непрерывная кривая есть непрерывный образ отрезка (см. п. 1.2 гл. III).

IV. *Если множество $M \subset X$ плотно в X и связно, то X также связно.*

Доказательство. Предположим, что X несвязно, так что $X = U_1 \cup U_2$, где U_1, U_2 открыты в X (см. замечание на с. 235), $U_1 \in \varnothing$, $U_2 \in \varnothing$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Положим $M \cap U_1 = \widetilde{U}_1$, $M \cap U_2 = \widetilde{U}_2$. Тогда $M = \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2$, $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$ открыты в M, $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \varnothing$. Докажем, что $\widetilde{U}_1 \neq \varnothing$ и $\widetilde{U}_2 \neq \varnothing$; мы придем тогда к противоречию с предполагаемой связностью M.

Пусть, например, $\widetilde{U}_1 = \varnothing$, т. е. $M \cap U_1 = \varnothing$. Так как U_1 открыто, то это означает, что ни одна из точек U_1 не является точкой прикосновения множества M, т. е. что $U_1 = X \cap U_1 = \overline{M} \cap U_1 = \varnothing$; с другой стороны, по условию, $U_1 \neq \varnothing$.

V. *Если M связно, то всякое множество M_1, такое, что $M \subset M_1 \subset \overline{M}$, связно; в частности, если M связно, то и $\overline{M}$ связно.*

Утверждение непосредственно следует из IV, ибо M_1 и M плотны в $\overline{M}$.

VI. *Объединение совокупности связных множеств, имеющих общую точку, связно.*

Доказательство. Пусть $M = \bigcup\limits_{\alpha} M_\alpha$, где M_α связны, α пробегает произвольное множество и каждое M_α содержит x. Допустим, что $M = U_1 \cup U_2$, где U_1, U_2 — открытые в M множества, $U_1 \neq \varnothing$, $U_2 \neq \varnothing$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Это означает, что существуют такие открытые множества V_1, V_2, что $U_1 = V_1 \cap M$, $U_2 = V_2 \cap M$, следовательно,

$$V_1 \cap M \neq \varnothing, \quad V_2 \cap M \neq \varnothing \quad \text{и} \quad V_1 \cap V_2 \cap M = \varnothing. \tag{1.1.1}$$

Точка x принадлежит одному из множеств V_1, V_2; пусть, для определенности,

$$x \in V_1. \tag{1.1.2}$$

С другой стороны, из второго соотношения (1.1.1) заключаем, что

$$V_2 \cap M_\alpha \neq \varnothing \quad \text{при некотором} \quad \alpha. \tag{1.1.3}$$

Положим $V_1 \cap M_\alpha = W_{1\alpha}$, $V_2 \cap M_\alpha = W_{2\alpha}$; тогда $W_{1\alpha}$, $W_{2\alpha}$ открыты в M_α, $W_{1\alpha} \neq \varnothing$ в силу (1.1.2), $W_{2\alpha} \neq \varnothing$ в силу (1.1.3), ибо $M_\alpha \ni x$, и

$$M_\alpha = M \cap M_\alpha = (U_1 \cap M_\alpha) \cup (U_2 \cap M_\alpha) = \\ = (V_1 \cap M_\alpha) \cup (V_2 \cap M_\alpha) = W_{1\alpha} \cup W_{2\alpha},$$

а это противоречит предполагаемой связности M_α.

Пусть X — топологическое пространство. Объединение всех связных подмножеств множества X, содержащих x, связно в силу VI и есть, очевидно, наибольшее связное множество, содержащее x. Оно называется *связной компонентой* точки x и обозначается $K(x)$. *Связной компонентой* точки $x \in M$ в множестве $M \subset X$ называется связная компонента x в M, рассматриваемом как подпространство в X.

VII. *Связная компонента замкнута.*

Действительно, $\overline{K(x)}$ связно в силу V и содержит x. Но $K(x)$ — наибольшее связное множество, содержащее x, и потому $\overline{K(x)} \subset K(x)$. С другой стороны, $K(x) \subset \overline{K(x)}$, так что $K(x) = \overline{K(x)}$.

VIII. *Две различные связные компоненты не пересекаются.*

Действительно, если $K(x) \cap K(y) \neq \varnothing$, то в силу V $K(x) \cup K(y)$ связно и содержит x. По определению связной компоненты отсюда заключаем, что $K(x) \supset K(x) \cup K(y)$, а это возможно лишь при $K(y) = K(x)$.

В силу VIII все пространство X разбивается на совокупность не пересекающихся компонент; X связно тогда и только тогда, когда оно совпадает со связной компонентой любой своей точки, следовательно, когда оно состоит из одной связной компоненты.

IX. *Если каждые две точки $x, y \in X$ содержатся в связном подмножестве $M \subset X$, то X связно.*

Действительно, в этом случае X совпадает со связной компонентой любой точки.

X. *Если каждые две точки $x, y \in X$ можно соединить непрерывной кривой в X, то X связно.*

Действительно, в этом случае X связно в силу IX, ибо непрерывная кривая связна (см. III).

XI. *Пространство X несвязно тогда и только тогда, когда существует его непрерывное отображение на дискретное пространство, содержащее более одной точки.*

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из предложения II, ибо дискретное пространство, содержащее более одной точки, несвязно. Обратно, пусть X несвязно и пусть $X = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 замкнуты, $F_1 \neq \varnothing$, $F_2 \neq \varnothing$ и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Пусть $Y = \{a, b\}$ — двуточечное дискретное пространство, так что все подмножества в Y замкнуты. Положив $f(F_1) = \{a\}$, $f(F_2) = \{b\}$, мы получим непрерывное отображение F пространства X на Y.

XII. *Топологическое произведение $X_1 \times \ldots \times X_n$ пространств $X_1, \ldots, X_n$ связно тогда и только тогда, когда каждое из пространств $X_1, \ldots, X_n$ связно.*

Доказательство. Предположим, что $X_1, \ldots, X_n$ связны, а $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ несвязно. В силу XI тогда существует непрерывное отображение f пространства X на дискретное пространство Y, содержащее более одной точки. Пусть $a = \{a_1, \ldots, a_n\} \in X$. Рассмотрим при фиксированном j ($1 \leqslant j \leqslant n$) отображение f_j: $X_j \to Y$ пространства X_j в Y, определенное формулой

$$f_j(x_j) = f(x'_1 \times \ldots \times x'_n),$$

где

$$x'_j = x_j \quad \text{и} \quad x'_k = a_k \quad \text{при} \quad k \neq j.$$

Оно непрерывно и потому есть константа в силу XI. Таким образом,

$$f(a_1 \times \ldots \times a_{j-1} \times x_j \times a_{j+1} \times \ldots \times a_n) = \\ = f(a_1 \times \ldots \times a_j \times \ldots \times a_n). \quad (1.1.4)$$

В частности,

$$f(x_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = f(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n). \quad (1.1.5)$$

Применяя затем (1.1.4) к $j = 2$ и $a = x_1 \times a_3 \times \ldots \times a_n$, заключаем, что $f(x_1 \times x_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n) = f(x_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)$ и потому (см. (1.1.5))

$$f(x_1 \times x_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n) = f(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n).$$

Повторяя эти рассуждения, заключаем, что $f(x_1 \times \ldots \times x_n) = f(a_1 \times \times \ldots \times a_n)$, т. е. f отображает X на одну точку, тогда как, по предположению, f отображает X на Y, содержащее более одной точки.

Обратно, если X связно, то каждое X_j связно как непрерывный образ пространства X при непрерывном отображении $x_1 \times \ldots \times x_n \to \to x_j$ (см. II).

Примеры. 1. Пространство $\mathbf{R}^1$ связно; действительно, каждые его две точки a, b ($a < b$) содержатся в отрезке $[a, b]$, связном в силу I (см. IX).

2. Пространство $\mathbf{R}^n$ связно как топологическое произведение n экземпляров связного пространства $\mathbf{R}^1$. Впрочем, связность $\mathbf{R}^n$ следует также из того, что каждые его две точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ можно соединить отрезком (см. IX):

$$x_j = (1 - t)\, a_j + t b_j, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

3. Пространство $\mathbf{C}^1$ связно, как топологическое произведение $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$.

4. Пространство $\mathbf{C}^n$ связно, как топологическое произведение n экземпляров пространства $\mathbf{C}^1$. В связности $\mathbf{C}^n$ можно также убедиться, повторяя рассуждение в конце примера 2.

5. Множество $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, где $\varphi_0 \leqslant 2\pi$ (дуга единичной окружности, или вся единичная окружность) связно, как непрерывный образ отрезка $[0, \varphi_0]$ при непрерывном отображении $\varphi \in e^{i\varphi}$ (см. I и II; см. также III).

6. Множество $M_1 = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ (внутренность единичного круга) и $M_2 = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ (внешность единичного круга) в $\mathbf{R}^2$ связны. Действительно, каждые две точки из M_1 соединяются отрезком прямой, целиком лежащим в M_1, а каждые две точки a, b из M_2 — дугой окружности с центром в точке $(a + b)/2$, целиком лежащей в M_2. Множество $M_0 = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ (плоскость с «выколотой» точкой $(0, 0)$) в $\mathbf{R}^2$ связно; его связность доказывается так же, как и связность M_2.

7. Множество $M = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 \neq 1\}$ в $\mathbf{R}^2$ несвязно. Очевидно, $M = M_1 \cup M_2$ (см. пример 6) и M_1, M_2 являются связными компонентами множества M.

8. Множество M всех рациональных чисел, рассматриваемое как подпространство в $\mathbf{R}^1$, несвязно (доказать!).

1.2. Связные подмножества топологической группы, связные топологические группы. Подмножество S топологической группы G называется *связным*, если S — связное подмножество топологического пространства G.

I. *Если S — связное подмножество топологической группы G, то множество S^{-1} и множества g_0S, Sg_0, $g_0^{-1}Sg_0$ связны при каждом $g_0 \in G$.*

Действительно, S^{-1}, g_0S, Sg_0, $g_0^{-1}Sg_0$ связны как образы связного множества S при непрерывных отображениях $g \to g^{-1}$, $g \to g_0g$, $g \to$ $\to gg_0$, $g \to g_0^{-1}gg_0$ соответственно (II п. 1.1).

II. *Если S_1, S_2, …, S_n — связные подмножества топологической группы G, то множество $S_1S_2 \ldots S_n$ связно; в частности, если S связно, то S^n связно при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

Доказательство. Соответствие $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \to g_1g_2 \ldots g_n$ есть непрерывное отображение топологического произведения $S_1 \times$ $\times S_2 \times \ldots \times S_n$ на $S_1S_2 \ldots S_n$. Но $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ связно (XII п. 1.1); следовательно, и его непрерывный образ $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ связен (II п. 1.1). В частности, при $S_1 = S_2 = \ldots = S_n$ получаем, что S^n связно, если S связно.

Топологическая группа G называется *связной*, если топологическое пространство G связно. В противном случае G называется *несвязной*; в силу VIII п. 1.1 G разбивается тогда на непересекающиеся связные компоненты, которые описываются следующим образом.

III. *Связная компонента K единичного элемента e топологической группы G есть замкнутый нормальный делитель группы G.*

Доказательство. Если $g \in K$, то $g^{-1}K$ связно и содержит $g^{-1}g = e$; следовательно, $g^{-1}K \subset K$ для каждого $g \in K$. Это означает, что K — подгруппа группы G; K замкнута в силу III п. 1.1. Далее, отображение $g \to g_0^{-1}gg_0$ есть гомеоморфизм G на G, переводящий e в $g_0^{-1}gg_0 = e$. Поэтому $g_0^{-1}Kg_0$ есть связное множество, содержащее e, и потому $g_0^{-1}Kg_0 \subset K$ при каждом $g_0 \in G$. Это означает, что K — нормальный делитель группы G.

IV. *Связная компонента каждого элемента $g_0 \in G$ имеет вид $g_0K = Kg_0$.*

Утверждение непосредственно следует из того, что отображение $g \to g_0g$ есть гомеоморфизм G на G, переводящий e в g_0.

V. *Если G — связная топологическая группа и V — окрестность единицы группы G, то $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$.*

Доказательство. Положим $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$. Очевидно, что $M \neq \varnothing$, M есть объединение открытых множеств V^n и потому открыто. С другой стороны, $\overline{M} \subset MV = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^nV \subset M$. Отсюда $\overline{M} = M$, т.е. M замкнуто. Если $M \neq G$, то M и $G \diagdown M$ образуют разбиение пространства G на непустые замкнутые не пересекающиеся множества, что противоречит связности G; следовательно, $M = G$.

VI. *Пусть G — связная топологическая группа, N — дискретный нормальный делитель в G. Тогда N содержится в центре группы G.*

Доказательство. Пусть n — некоторый элемент группы N. Рассмотрим отображение φ группы G в N, определенное формулой $\varphi(g) = gng^{-1}$. Это отображение φ непрерывно, а группа G связна; следовательно, $\varphi(G)$ — связное множество. С другой стороны, $\varphi(G) \subset N$, поэтому $\varphi(G)$ дискретно. Следовательно, $\varphi(G)$ состоит из одного элемента. Так как $\varphi(e) = n$, то $\varphi(g) = n$ при всех $g \in G$. Таким образом, $gng^{-1} = n$, $gn = ng$ для всех $n \in N$, $g \in G$, т.е. N содержится в центре группы G.

Примеры. 1. Группы $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ связны, ибо топологические пространства $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ связны (см. примеры 1–4 п. 1.1).

2. Мультипликативная группа $\mathbf{R}_0$ несвязна; ее связными компонентами являются $\mathbf{R}_0^+$ (компонента 1) и $\mathbf{R}_0^-$ совокупность всех отрицательных действительных чисел (компонента -1).

3. Мультипликативная группа $\mathbf{C}_0$ связна (см. пример 5 п. 1.1).

4. Группа K_n. Обозначим через K_n совокупность всех комплексных матриц

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ k_{n_1} & k_{n_2} & k_{n3} & \ldots & k_{nn} \end{Vmatrix},$$

где все $k_{jj} \neq 0$. Легко непосредственно проверить, что K_n — группа относительно обычного умножения матриц, так что K_n — подгруппа группы $GL(n, \mathbf{C})$. Мы наделим K_n топологией, индуцируемой в ней топологией группы $GL(n, \mathbf{C})$.

VII. *K_n — замкнутая подгруппа группы $GL(n, \mathbf{C})$.*

Действительно, K_n есть совокупность тех и только тех матриц $g \in$ $\in GL(n, \mathbf{C})$, которые удовлетворяют условиям

$$g_{jl} = 0 \quad \text{при} \quad l > j;$$

поскольку g_{jk} — непрерывные функции на $GL(n, \mathbf{C})$, утверждение непосредственно следует из I п. 1.8 гл. III.

VIII. *Группа K_n связна.*

Действительно, параметры k_{jl}, $l < j$, элементов группы K независимо Друг от друга пробегают $\mathbf{C}^1$, а k_{jj} — независимо друг от друга и от k_{jl}, $l < j$, пробегают $\mathbf{C}_0^1$. Отсюда и из сравнения топологий заключаем, что топологическое пространство K гомеоморфно топологическому произведению $n(n-1)/2$ экземпляров пространства $\mathbf{C}^1$ и n экземпляров пространства $\mathbf{C}_0^1$. Поскольку $\mathbf{C}^1$ и $\mathbf{C}_0^1$ связны, то и K_n связна в силу XII п. 1.1.

5. Группа D_n. Обозначим через D_n совокупность всех диагональных матриц

$$\delta = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{matrix} \right\|,$$

удовлетворяющих условию $\det \delta = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \neq 0$. Очевидно, D_n — замкнутая подгруппа группы $GL(n, \mathbf{C})$. Мы наделим D_n топологией, индуцированной в D_n топологией группы $GL(n, \mathbf{C})$.

IX. *Группа D_n связна.*

Действительно, топологическое пространство D_n гомеоморфно топологическому произведению n экземпляров пространства $\mathbf{C}_0^1$. Поскольку $\mathbf{C}_0^1$ связно, то утверждение следует из XII п. 1.1.

6. Группа $U(n)$. Используем следующую простую лемму.

Лемма 1. *Всякую матрицу $u \in U(n)$ можно представить в виде $u = e^{ih}$, где h — эрмитова. Обратно, всякая матрица e^{ih}, где h — эрмитова, есть унитарная матрица.*

Доказательство. Всякую матрицу $u \in U(n)$ можно унитарным преобразованием привести к диагональному виду, т. е.

$$u = v \left\| \begin{matrix} e^{i\varphi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{i\varphi_n} \end{matrix} \right\| v^{-1},$$

где $v \in U(n)$, а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ действительны. Положим

$$h = v \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_n \end{matrix} \right\| v^{-1}.$$

Тогда h — эрмитова и, очевидно, $u = e^{ih}$. Обратно, если $u = e^{ih}$, где h — эрмитова, то $u^* = e^{-ih}$ и $u^* u = u u^* = e$.

X. *Группа* $U(n)$ *связна.*

Пусть $u_1 = e^{ih_1}$, $u_2 = e^{ih_2}$, где h_1, h_2 — эрмитовы. Положим $h = th_1 + (1-t)\,h_2$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $u(t) = e^{ih} = e^{ith_1 + i(1-t)\,h_2}$. Тогда $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — непрерывная кривая в $U(n)$, соединяющая u_1 и u_2. Итак, каждые две точки в $U(n)$ можно соединить непрерывной кривой в $U(n)$; следовательно, $U(n)$ связна. В частности, связна $U(1)$; это, впрочем, видно и непосредственно, так как топологическое пространство группы $U(1)$ гомеоморфно окружности. Группы Γ^1, $\mathscr{T}^1$ и $SO(2, \mathbf{R})$ топологически изоморфны $U(1)$ и, следовательно, связны.

7. Группа $SU(n)$.

XI. *Группа* $SU(n)$ *связна.*

Действительно, топологическое прямое произведение $SU(n) \times U(1)$ гомеоморфно (см. V п. 1.2 гл. IV) связной группе $U(n)$ (см. X) и потому связно. В силу XII п. 1.1 отсюда следует, что $SU(n)$ связно.

8. Группа $SO(3, \mathbf{R})$. Обозначим через I топологическое произведение $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$; оно связно, как топологическое произведение связных множеств (именно, отрезков, см. I и XII п. 1.1). С другой стороны, $SO(3, \mathbf{R})$ есть непрерывный образ пространства I; это непосредственно следует из формул (1.2.20) гл. IV. Следовательно:

XII. *Группа* $SO(3, \mathbf{R})$ *связна.*

9. Группа $O(3, \mathbf{R})$. Функция $f(g) = \det g$ непрерывна на $GL(n, \mathbf{C})$, следовательно, ее сужение на $O(3, \mathbf{R})$ есть также непрерывная функция. Но на $O(3, \mathbf{R})$ $\det g$ принимает только два значения: $\det g = 1$ и $\det g = -1$; следовательно:

XIII. *Группа* $O(3, \mathbf{R})$ *несвязна.*

Группа $SO(3, \mathbf{R})$ связна и содержится в $O(3, \mathbf{R})$. Если $\det g = -1$ и $\det g_0 = -1$, то $\det g_0^{-1} g = 1$, а значит, $g_0^{-1} g \in SO(3, \mathbf{R})$. Поэтому

$$\{g\colon \det g = -1\} = g_0 SO(3, \mathbf{R}).$$

Отсюда заключаем:

XIV. *Группа* $O(3, \mathbf{R})$ *распадается на два связных множества* $SO(3, \mathbf{R})$ *и* $g_0 SO(3, \mathbf{R})$, *где* g_0 — *произвольный фиксированный элемент, для которого* $\det g_{)} = -1$; *следовательно,* $SO(3, \mathbf{R})$ *есть связная компонента единичного элемента группы* $O(3, \mathbf{R})$.

Упражнение. Исследовать связность групп $O(n, \mathbf{R})$, $SO(n, \mathbf{R})$, $O(n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$.

10. Группа $GL(n, \mathbf{C})$. Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма 2. *Каждую матрицу* $g \in GL(n, \mathbf{C})$ *можно представить в виде*

$$g = ku, \quad \text{где} \quad k \in K_n, \quad u \in U(n). \tag{1.2.1}$$

Доказательство. Будем рассматривать строки матрицы g как векторы в $\mathbf{C}^n$. Поскольку $\det g \neq 0$, эти векторы линейно независимы. Применим к ним процесс ортогонализации: умножим

$\{g_{11}, \ldots, g_{1n}\}$ на такой множитель k_{11}, что полученный вектор — обозначим его $\{u_{11}, \ldots, u_{1n}\}$ — будет нормированным. Далее составим линейную комбинацию векторов $\{g_{11}, \ldots, tg_{1n}\}$ и $\{g_{21}, \ldots, g_{2n}\}$ с такими коэффициентами k_{21}, k_{22}, что полученный вектор — обозначим его $\{u_{21}, \ldots, u_{2n}\}$ — будет нормированным и ортогональным к $\{u_{11}, \ldots, u_{2n}\}$. Повторяя это рассуждение, мы получим, что

$$kg = u, \tag{1.2.2}$$

где $k \in K$, а строки матрицы u нормированы и взаимно ортогональны; следовательно, $u \in U(n)$. Но из (1.2.2) заключаем, что $g = k^{-1}u$, где $k^{-1} \in K_n$, $u \in U(n)$, а это и есть разложение вида (1.2.1).

Разложение (1.2.1) называется *разложением Крамера*.

XV. *Группа* $GL(n, \mathbf{C})$ *связна*.

Действительно, согласно лемме 2, $GL(n, \mathbf{C}) = K_n U(n)$ и утверждение следует из II, ибо K_n и $U(n)$ связны.

11. Группа $SL(n, \mathbf{C})$.

XVI. *Группа* $SL(n, \mathbf{C})$ *связна*.

Доказательство. Группа $GL(n, \mathbf{C})$ гомеоморфна прямому произведению $GL(1, \mathbf{C}) \times SL(n, \mathbf{C}) = \mathbf{C}_0^1 \times SL(n, \mathbf{C})$ (это утверждение доказывается аналогично предложению V п. 1.2 гл. IV). Поскольку $GL(n, \mathbf{C})$ связна, то утверждение непосредственно следует из XII, п. 1.1.

§ 2. Разрешимые и нильпотентные группы

2.1. Алгебраический коммутант. Пусть G — группа. *Коммутантом элементов* $g_1, g_2 \in G$ называется произведение $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$; если $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = e$, то, очевидно, $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Алгебраическим коммутантом $K_a(S_1, S_2)$ двух множеств $S_1, S_2 \subset \subset G$ называют минимальную алгебраическую подгруппу группы G, порожденную всевозможными коммутантами $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, $g_1 \in S_1$, $g_2 \in S_2$. В частности, $K_a(G, G)$ называется *алгебраическим коммутантом группы* G и обозначается G'_a.

I. *Алгебраический коммутант группы* G'_a *есть ее нормальный делитель и фактор-группа* G/G'_a *коммутативна*.

Доказательство. Каждый элемент $h \in G'_a$ имеет вид $h = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_{2n-1} g_{2n} g_{2n-1}^{-1} g_{2n}^{-1}$. Отсюда для каждого $g \in G$

$$g^{-1}hg = (g^{-1}g_1 g)(g^{-1}g_2 g)(g^{-1}g_1 g)^{-1}(g^{-1}g_2 g)^{-1} \ldots$$
$$\ldots (g^{-1}g_{2n-1}g)(g^{-1}g_{2n}g)(g^{-1}g_{2n-1}g)^{-1}(g^{-1}g_{2n}g)^{-1} \in G_a;$$

следовательно, G'_a — нормальный делитель группы G. Далее, пусть $\overline{g}_1, \overline{g}_2 \in G/G_a$ и пусть g_1, g_2 — представители классов $\overline{g}_1, \overline{g}_2$ соответственно. Тогда класс $\overline{g}_1 \overline{g}_2 \overline{g}_1^{-1} \overline{g}_2^{-1}$ содержит $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in G'_a$ и потому совпадает с $G'_a = \overline{e}$, где $\overline{e}$ — единичный элемент в G/G'_a. Это означает, что $\overline{g}_1\overline{g}_2 = \overline{g}_2\overline{g}_1$.

2.2. Алгебраически разрешимые и нильпотентные группы. Для заданной группы G построим две последовательности:

$$G_a^{(1)} = G'_1, \quad G_a^{(2)} = (G_a^{(1)})'_a, \; \ldots, G_a^{(n)} = (G_a^{(n-1)})'_a, \; \ldots \tag{2.2.1}$$

$$G_a^{[1]} = K_a(G, G) = G'_a, \quad G_a^{[2]} = K_a(G, G_a^{([1]}), \; \ldots$$
$$\ldots, G_a^{[n]} = K_a(G, G_0^{[n-1]}), \; \ldots \tag{2.2.2}$$

Группа $G_a^{(n)}$ называется *n-й алгебраической производной* группы G. Очевидно,

$$G_a^{[n]} \supset G_a^{(n)}. \tag{2.2.3}$$

Группа G называется *алгебраически разрешимой*, если при некотором n

$$G_a^{(n)} = \{e\}, \tag{2.2.4}$$

и минимальное число n, при котором имеет место (2.2.4), называется *рангом* разрешимой группы G. При $n = 1$ группа G коммутативна, так что разрешимые группы являются естественным обобщением коммутативных групп и ранг разрешимой группы характеризует ее степень некоммутативности. Группа G называется *алгебраически нильпотентной*, если при некотором n

$$G_a^{[n]} = \{e\}. \tag{2.2.5}$$

I. *Всякая алгебраически нильпотентная группа алгебраически разрешима.*

Действительно, если G алгебраически нильпотентна, то в силу (2.2.3) и (2.2.5) при некотором n

$$G_a^{(n)} \subset G_a^{[n]} = \{e\};$$

следовательно, $G_a^{(n)} = \{e\}$. Если G алгебраически разрешима, то, очевидно, каждая из групп $G_a^{(k)}$ алгебраически разрешима, и если G алгебраически нильпотентна, то каждая из групп $G_a^{[k]}$ алгебраически нильпотентна.

II. *Всякая подгруппа H алгебраически разрешимой* (*нильпотентной*) *группы G алгебраически разрешима* (*нильпотентна*).

Утверждение следует из очевидных соотношений

$$H^{(n)} \subset G^{(n)}, \quad H^{[n]} \subset G^{[n]}$$

(см. доказательство предложения I).

2.3. Коммутант топологической группы. Пусть G — топологическая группа. *Коммутантом* $K(S_1, S_2)$ двух множеств $S_1, S_2 \subset G$ называется минимальная замкнутая подгруппа группы G, содержащая все коммутанты

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}, \quad g_1 \in S_1, \quad g_2 \in S_2.$$

Из этого определения и из п. 2.1 непосредственно следует, что

$$K(S_1, S_2) = \overline{K_a(S_1, S_2)} \supset K_a(S_1, S_2). \tag{2.3.1}$$

В частности, коммутант $K(G, G)$ называется *коммутантом группы* G и обозначается G'; в этом случае (2.3.1) примет вид

$$G' = \overline{G'_a} \supset G'_a. \tag{2.3.2}$$

I. *Коммутант G' группы G есть ее замкнутый нормальный делитель и фактор-группа G/G' коммутативна.*

Доказательство. В силу (2.3.2) G' есть замыкание нормального делителя и потому — замкнутый нормальный делитель группы G. Доказательство коммутативности группы G/G' совпадает с доказательством коммутативности группы G/G'_a в I, п. 2.1.

II. *Если S_1, S_2 — связные подмножества топологической группы G, имеющие общий элемент, то*:
1) *$K_a(S_1, S_2)$ связен*;
2) *$K(S_1, S_2)$ связен.*

Доказательство. Положим

$$S_{12} = \{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}, \quad g_2 \in S_1, \quad g_2 \in S_2\}, \tag{2.3.3}$$

$$S_{21} = \{g_2 g_1 g_2^{-1} g_1^{-1}, \quad g_1 \in S_1, \quad g_2 \in S_2\}, \tag{2.3.4}$$

$$S = S_{12} \cup S_{21}. \tag{2.3.5}$$

Очевидно,

$$S_{21} = S_{12}^{-1} \quad \text{и} \quad S_{12} = S_{21}^{-1}. \tag{2.3.6}$$

Соответствие $\{g_1, g_2\} \to g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ есть непрерывное отображение пространства $S_1 \times S_2$ на S_{12}; следовательно, S_{12} есть непрерывный образ связного пространства $S_1 \times S_2$ (см. XII п. 1.1) и потому S_{12} связно. Аналогично, S_{21} связно.

Пусть g_0 — общий элемент S_1 и S_2; тогда S_{12} и S_{21} содержат e (см. (2.3.3) и (2.3.4) при $g_1 = g_2 = g_0$); следовательно, $S = S_{12} \cup S_{21}$ связно (VI п. 1.1). Но в силу (3.2.6)

$$K_a(S_1, S_2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n, \tag{2.3.7}$$

где каждое S^n связно (II п. 1.2) и $S = S^1 \subset S^2 \subset \ldots$. Поэтому

$$S^n \cap S^m \supset S \neq \varnothing \tag{2.3.8}$$

и объединение $K_a(S_1, S_2)$ всех S^n связно в силу (2.3.8) и VI п. 1.1. Но тогда и $K(S_1, S_2)$ связна, как замыкание $\overline{K_a(S_1, S_2)}$ связного множества $K_a(S_1, S_2)$ (см. (2.3.1) и V п. 1.1).

2.4. Разрешимые и нильпотентные топологические группы. Для данной топологической группы G построим две последовательности:

$$G^{(1)} = G', \quad G^{(2)} = (G^{(1)})', \ \ldots, G^{(n)} = (G^{(n-1)})', \ \ldots \tag{2.4.1}$$

$$G^{[1]} = K(G, G) = G', \quad G^{[2]} = K(G, G^{[1]}), \ \ldots, G^{[n]} = K(G, G^{[n-1]}), \ \ldots \tag{2.4.2}$$

Группа $G^{(n)}$ называется *n-й производной* группы G. Очевидно,

$$G^{[n]} \supset G^{(n)} \tag{2.4.3}$$

и (см. (2.3.1))

$$G^{[n]} \supset G_a^{[n]}, \quad G^{(n)} \supset G_a^{(n)}. \tag{2.4.4}$$

Топологическая группа G называется *разрешимой*, если при некотором n

$$G^{(n)} = \{e\}, \tag{2.4.5}$$

и минимальное число n, при котором имеет место (2.4.5), называется *рангом* разрешимой группы G. Топологическая группа G называется *полупростой*, если она не содержит замкнутых связных разрешимых нормальных делителей, отличных от $\{e\}$, и топологическая группа G называется *простой*, если она не содержит замкнутых нормальных делителей, отличных от G и $\{e\}$. Топологическая группа называется *нильпотентной*, если при некотором n

$$G^{[n]} = \{e\}. \tag{2.4.6}$$

I. *Всякая нильпотентная топологическая группа разрешима.*

II. *Всякая разрешимая* (*нильпотентная*) *топологическая группа также алгебраически разрешима* (*алгебраически нильпотентна*).

III. *Всякая подгруппа разрешимой* (*нильпотентной*) *топологической группы разрешима* (*нильпотентна*).

Доказательства этих предложений аналогичны доказательствам предложения I (см. также II) п. 2.2; ср. (2.4.4).

У п р а ж н е н и я. Доказать, что:

1. *Фактор-группа разрешимой группы по любому ее замкнутому нормальному делителю разрешима.*

У к а з а н и е. Доказать, что при каноническом гомоморфизме φ: $G \to \overline{G} = G/H$ всякая производная $G_a^{(k)}$ (соответственно $G^{(k)}$) переходит в $G_a^{(k)}$ (соответственно $G^{(k)}$).

2. *Если H — замкнутый* (*алгебраически*) *разрешимый нормальный делитель группы G и если фактор-группа G/H разрешима, то и G разрешима.*

Указание. Пусть k — ранг группы G/H; доказать, что $G^{(k)} \subset H$.

3. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда существуют*:

а) *замкнутый коммутативный нормальный делитель H_0 в G*,

б) *замкнутый коммутативный нормальный делитель H_1 в $G_1 = G/H_0$*,

в) *коммутативный нормальный делитель H_2 в $G_2 = G_1/H_1$, и т. д., причем на некотором конечном (m-м) шаге $G_m = \{e\}$.*

Указание. Пусть k — ранг группы G. Положить $H_0 = G^{(k-1)}$ и применить индукцию по k, используя предложения упражнений 1 и 2.

4. *Группа K_n разрешима.*

Указание. Положить

$$H_0 = \left\{ h_0,\ h_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ k_{n1} * k_{n2} & & \ldots & k_{n,\,n-1} & k_{1,\,n} \end{Vmatrix} \right\},$$

$$H_1 = \left\{ h_1,\ h_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ k_{n-1,\,1} & k_{n-1,\,2} & \ldots & k_{n-1,\,n-2} & k_{n-1,\,n-1} \end{Vmatrix} \right\}$$

и т. д. и применить утверждение упражнения 3.

5. *Фактор-группа нильпотентной группы по всякому ее замкнутому нормальному делителю нильпотентна.*

6. *Если H — центр группы G и G/H нильпотентна, то G нильпотентна.*

7. *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда: в G существует нетривиальный центр H_0; в $G_1 = G/H_0$ существует нетривиальный центр H_1, в $G_2 = G_1/H_1$ существует нетривиальный центр H_2 и т. д., причем на некотором конечном (m-м) шаге $G_m = \{e\}$.*

8. *Все матрицы z вида*

$$z = \begin{Vmatrix} 1 & z_{12} & \ldots & z_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & z_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

образуют нильпотентную группу.

9. *Группа* K_n *не нильпотентна* (но разрешима, см. упражнение 4).

10. *Производная разрешимой группы нильпотентна.*

11. *Доказать утверждения, аналогичные* 1–9, *для алгебраических групп.*

Указание. Считать рассматриваемые алгебраические группы топологическими, наделенными дискретной топологией.

§ 3. Теорема Ли

3.1. Основные теоремы о представлениях связных разрешимых групп.

Теорема 1 (теорема Ли). *Всякое конечномерное неприводимое представление* T: $g \to T(g)$ *связной алгебраически разрешимой группы* G *одномерно.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы индукцией по рангу группы. Если G — ранга 1, то G коммутативна (см. I п. 2.1) и утверждение следует из леммы Шура (см. следствие п. 2.2 гл. I). Пусть утверждение теоремы уже доказано для алгебраически разрешимых групп ранга $< n-1$; докажем это утверждение для групп G ранга n. Положим $H = G'_a$. Тогда H связна (II п. 2.3) и алгебраически разрешима ранга $< n$. Пусть T: $g \to T(g)$ — неприводимое конечномерное представление группы G в пространстве X и пусть $h \to T(h)$ — сужение представления T на группу H. Согласно I п. 2.1 гл. I в X существует подпространство X_1, на котором $h \to T(h)$ неприводимо. Но тогда согласно индуктивному предположению X_1 одномерно. Пусть $x_1 \in X_1$, $x_1 \neq 0$. Тогда $T(h)\, x_1 \in X_1$, т. е.

$$T(h)\, x_1 = \lambda_1(h)\, x_1, \quad h \in H, \tag{3.1.1}$$

где $\lambda_1(h)$ — числовая функция на H, непрерывная на H в силу непрерывности T. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ все различные функции на H, удовлетворяющие условию

$$T(h)\, x_j = \lambda_j(h)\, x_j, \quad h \in H, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{3.1.2}$$

при некотором $x_j \neq 0$, $x \in X$. Число таких x_j, а значит, и λ_j, конечно, ибо $\dim X < \infty$; положим $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ и наделим Λ дискретной топологией. Обозначим через Y_1 совокупность всех $y \in X$, удовлетворяющих условию

$$T(h)\, y = \lambda_1(h)\, y, \quad h \in H; \tag{3.1.3}$$

в силу (3.1.1) Y_1 — подпространство в X, отличное от (0). Теперь отметим, что $g^{-1}hg \in H$ при произвольных $g \in G$, $h \in H$, ибо H — нормальный делитель в G (I п. 2.1); следовательно, (3.1.3) применимо к $g^{-1}hg$:

$$T(g^{-1}hg)\, y = \lambda_1(g^{-1}hg)\, y, \quad h \in H, \quad y \in Y_1, \tag{3.1.4}$$

т. е.

$$T(g)^{-1}T(h)\,T(g)\,y = \lambda_1(g^{-1}hg)\,y, \qquad (3.1.5)$$
$$T(h)\,T(g)\,y = \lambda_{1g}(h)\,T(g)\,y, \quad y \in Y_1,$$

где обозначено

$$\lambda_{1g}(h) = \lambda_1(g^{-1}hg). \qquad (3.1.6)$$

Из (3.1.5) заключаем, что $\lambda_{1g}(h) \in \Lambda$. Но функция $g \to \lambda_{1g}(h) = \lambda_1(g^{-1}hg)$ непрерывна на G; следовательно, $h \to \lambda_{1g}(h)$ есть непрерывное отображение группы G в Λ. Действительно, прообраз одной точки, а значит, и любого подмножества из Λ, замкнут в G. Поскольку G связна, а Λ дискретно, то образом группы G при отображении $g \to \lambda_{1g}(h)$ является одна точка (XI п. 1.1), т. е. $\lambda_{1g}(h)$ не зависит от g. Отсюда $\lambda_{1g}(h) = \lambda_{1e}(h) = \lambda_1(h)$, и второе равенство (3.1.5) примет вид

$$T(h)\,T(g)\,y = \lambda_1(h)\,T(g)\,y, \quad y \in Y_1, \quad g \in G, \quad h \in H. \qquad (3.1.7)$$

Но (3.1.7) означает, что Y инвариантно относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$. Поскольку $Y_1 \neq (0)$, а T неприводимо, то $Y_1 = X$, так что (см. (3.1.3))

$$T(h)\,x = \lambda_1(h)\,x \quad \text{для} \quad x \in X. \qquad (3.1.8)$$

Отсюда

$$\det T(h) = (\lambda_1(h))^m, \quad \text{где} \quad m = \dim X. \qquad (3.1.9)$$

С другой стороны, при $h = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$,

$$\det T(h) = \det(T(g_1)\,T(g_2)\,T(g_1^{-1})\,T(g_2^{-1})) = 1$$

и в силу (2.3.7)

$$\det T(h) = 1 \quad \text{для всех} \quad h \in H. \qquad (3.1.10)$$

Сравнивая (3.1.9) и (3.1.10), заключаем, что $(\lambda_1(h))^m = 1$, так что возможными значениями функции $\lambda_1(h)$ являются элементы множества $\varepsilon = \{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$. Отсюда, пользуясь снова непрерывностью функции $h \to \lambda_1(h)$, $h \in H$, связностью группы H и дискретностью множества ε, заключаем, что $\lambda_1(h)$ не зависит от h, так что $\lambda_1(h) = \lambda_1(e) = 1$ (см. (3.1.1)). Отсюда и из (3.1.8) следует, что $T(h) = 1$. В частности, при $h = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ мы получаем

$$T(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}) = 1, \quad T(g_1)\,T(g_2)\,T(g_1)^{-1}T(g_2)^{-1} = 1;$$

следовательно,

$$T(g_1)\,T(g_2) = T(g_2)\,T(g_1),$$

т. е. все операторы $T(g)$, $g \in G$, перестановочны между собой. Но тогда из неприводимости представления $g \to T(g)$, $g \in G$, и леммы Шура следует, что X одномерно (см. следствие в п. 2.2 гл. I), и теорема доказана.

Теорема 2. *Если T: $g \to T(g)$ — конечномерное представление связной алгебраически разрешимой группы G, то в пространстве X этого представления существует вектор $x_0 \neq 0$, являющийся общим собственным вектором всех операторов $T(g)$.*

Доказательство. В пространстве X существует подпространство $X_1 \neq (0)$, инвариантное относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$, на котором $T|_{X_1}$ неприводимо (см. I п. 2.1 гл. II). Согласно теореме 1 X_1 одномерно. Пусть $x_0 \neq 0$ — вектор из X. Тогда $T(g)\,x_0 \in X$, т. е.

$$T(g)\,x_0 = \lambda(g)\,x_0 \quad \text{для всех} \quad g \in G,$$

где $\lambda(g)$ — числовая функция на G. Это и означает, что x_0 есть общий собственный вектор для всех $T(g)$, $g \in G$.

Замечание. Утверждения теорем 1 и 2, вообще говоря, не верны для бесконечномерных представлений.

3.2. Следствия из основных теорем.

Следствие 1. *Всякое конечномерное неприводимое представление T: $g \to T(g)$ связной разрешимой группы G одномерно.*

Следствие 2. *Если T: $g \to T(g)$ — конечномерное представление связной разрешимой группы G, то в пространстве X этого представления существует вектор $x_0 \neq 0$, являющийся общим собственным вектором всех операторов $T(g)$.*

Всякая разрешимая топологическая группа также алгебраически разрешима (II п. 2.4), поэтому оба утверждения следуют из теорем 1 и 2.

Упражнение. Доказать, что в пространстве конечномерного представления связной алгебраически разрешимой группы можно выбрать такой базис, что в этом базисе матрицы всех операторов представления треугольны.

Глава VI

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

Конечномерные неприводимые представления широких классов групп строятся аналогично тому, как это делается для группы $GL(n, \mathbf{C})$. Мы изложим сначала эту конструкцию на простейшем примере группы $GL(n, \mathbf{C})$. Всюду в этой главе G будет обозначать группу $GL(n, \mathbf{C})$.

§ 1. Некоторые подгруппы группы G

1.1. Группа K. Обозначим через K совокупность всех матриц [1])

$$k = \left\| \begin{matrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad k_{11} \neq 0, \ \dots, k_{nn} \neq 0,$$

K — замкнутая связная разрешимая подгруппа группы G (см. пример 4 п. 1.2 гл. V).

1.2. Группа H. Обозначим через H совокупность всех матриц h вида

$$h = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad h_{11} \neq 0, \ \dots, h_{nn} \neq 0.$$

I. *H — замкнутая связная разрешимая подгруппа G.*

Очевидно, H получается из K путем перехода к транспонированным матрицам; поэтому H — замкнутая связная разрешимая подгруппа группы G.

[1]) Для упрощения обозначения мы пишем в этой главе K вместо Kn (см. пример 4 п. 1.2 гл. V).

1.3. Группа D. Обозначим через D совокупность всех диагональных матриц

$$\delta = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{matrix} \right\|.$$

Очевидно, что D — замкнутая связная подгруппа группы K, а значит, и группы H. Очевидно также, что D коммутативна.

I. *D изоморфна прямому произведению n экземпляров группы $\mathbf{C}_0^1$.*

Отметим еще очевидное соотношение

$$K \cap H = D. \tag{1.3.1}$$

1.4. Группа Z_-. Обозначим через Z_- совокупность всех матриц вида

$$\zeta = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \zeta_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \zeta_{n1} & \zeta_{n2} & \zeta_{n3} & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где ζ_{jl}, $j > l$, — произвольные комплексные числа. Легко непосредственно убедиться, что Z_- — группа. Очевидно, Z_- — замкнутая связная подгруппа группы K, а значит, и группы G.

1.5. Группа Z_+. Обозначим через Z_+ совокупность всех матриц

$$z = \left\| \begin{matrix} 1 & z_{12} & z_{13} & \ldots & z_{1n} \\ 0 & 1 & z_{23} & \ldots & z_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где z_{jl}, $j < l$, — произвольные комплексные числа. Легко непосредственно убедиться, что Z_+ — группа. Очевидно, Z_+ — замкнутая связная подгруппа группы G и

$$K \cap Z_+ = \{e\}, \tag{1.5.1}$$

где e — единичная матрица.

I. *Отображения $\zeta \to \delta^{-1}\zeta\delta$, $z \to \delta^{-1}z\delta$ являются автоморфизмами групп Z_- и Z_+ соответственно.*

Действительно, перемножая матрицы, мы видим, что элементы g_{pq} матриц $\delta^{-1}\zeta\delta$ и $\delta^{-1}z\delta$ получаются из соответствующих элементов матриц ζ и z умножением на $\lambda_p^{-1}\lambda_q$; отсюда следует утверждение.

1.6. Разложение элементов группы K.

I. *Каждый элемент k группы K можно представить, и притом единственно, в виде*

$$k = \delta\zeta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-, \tag{1.6.1}$$

а также в виде

$$k = \zeta\delta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-. \tag{1.6.2}$$

Доказательство. Равенство (1.6.1) равносильно системе уравнений

$$k_{pq} = \lambda_p \zeta_{pq}, \quad p \geqslant q. \tag{1.6.3}$$

При $q = p$ из (1.6.3) получаем

$$\lambda_p = k_{pp}; \tag{1.6.4}$$

следовательно, при $q < p$ из (1.6.3) заключаем

$$\zeta_{pq} = k_{pq}/k_{pp}. \tag{1.6.5}$$

Таким образом, система (1.6.3) имеет, и притом единственное, решение. Этим доказано утверждение относительно (1.6.1); утверждение относительно (1.6.2) доказывается аналогично, причем в формуле (1.6.2)

$$\lambda_p = k_{pp}, \quad \zeta_{pq} = k_{pq}/k_{qq}. \tag{1.6.6}$$

1.7. Разложение элементов группы H.

I. *Каждый элемент h группы H можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$h = \delta z, \quad \delta \in D, \quad z = Z, \tag{1.7.1}$$

а также в виде

$$h = z\delta, \quad \delta \in D, \quad z \in Z_+. \tag{1.7.2}$$

Доказательство аналогично доказательству предложения I п. 1.6 (формулы (1.7.1), (1.7.2) можно получить из (1.6.1), (1.6.2), переходя к транспонированным матрицам); при этом в (1.7.1)

$$\lambda_p = h_{pp}, \quad z_{pq} = \frac{h_{pq}}{h_{pp}}, \tag{1.7.3}$$

а в (1.7.2)

$$\lambda_p = h_{pp}, \quad z_{pq} = \frac{h_{pq}}{h_{qq}}. \tag{1.7.4}$$

Упражнение. Доказать, что $H^{(1)} = Z_+$, $K^{(1)} = Z_-$.

Указание. Использовать предложения I пп. 1.5 и 1.7.

1.8. Разложение Гаусса. Положим для $g \in G$

$$\Delta_l(g) = \begin{vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{l1} & \dots & g_{ll} \end{vmatrix}. \tag{1.8.1}$$

Матрица $g \in G$ называется *регулярной*, если все

$$\Delta_l(g) \neq 0, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{1.8.2}$$

и *нерегулярной* в противном случае. Очевидно, регулярные матрицы g образуют открытое множество в G (обозначим его G_{reg}), а нерегулярные матрицы образуют в G множество низшей размерности.

I. *Всякую регулярную матрицу $g \in G$ можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$g = kz, \quad k \in K, \quad z \in Z. \tag{1.8.3}$$

Доказательство. Найдем такой элемент $\dot{z} = zZ_+$, что

$$g\dot{z} \in K. \tag{1.8.4}$$

Поскольку $\dot{z}_{pq} = 0$ при $p > q$, $\dot{z}_{pp} = 1$, а $k_{pq} = 0$ при $p < q$, то условие (1.8.4) равносильно системе равенств

$$\sum_{s=1}^{q-1} g_{ps}\dot{z}_{sq} + g_{pq} = 0 \quad \text{при} \quad p < q. \tag{1.8.5}$$

При фиксированном $q > 1$ и $p = 1, 2, \ldots, q-1$ равенства (1.8.5) являются системой уравнений относительно $\dot{z}_{1q}, \ldots, \dot{z}_{q-1,q}$. Ее определитель совпадает с $\Delta_q(g)$ и потому отличен от нуля в силу регулярности матрицы g; следовательно, система (1.8.5) имеет, и притом единственное, решение. Это означает, что существует такой элемент $\dot{z} \in Z_+$, что $g\dot{z} = k \in K$. Отсюда $g = k\dot{z}^{-1} = kz$, где обозначено $z = \dot{z}^{-1}$. Этим доказано существование разложения (1.8.3). Предположим теперь, что

$$g = kz = k_1z_1, \quad \text{где} \quad k, k_1 \in K, \quad z, z_1 \in Z_+.$$

Отсюда $kz = k_1z_1$, $k^{-1}k_1 = zz_1^{-1} \in K \cap Z_+ = \{e\}$ (см. (1.5.1)). Таким образом, $k^{-1}k_1 = e$, $zz_1^{-1} = e$; следовательно, $k = k_1$, $z = z_1$. Этим доказана единственность разложения (1.8.3). Формула (1.8.3) называется *разложением Гаусса* [1]). Комбинируя теперь предложения I п. 1.6 и I, заключаем:

II. *Каждую регулярную матрицу $g \in G$ можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$g \in \delta\zeta z, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-, \quad z \in Z_+, \tag{1.8.6}$$

а также в виде

$$g = \zeta\delta z, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z_-, \quad z \in Z_+. \tag{1.8.7}$$

Разложения (1.8.6) и (1.8.7) также называются *разложениями Гаусса*.

[1]) Гаусс использовал это разложение для рекуррентного решения системы линейных уравнений.

Найдем явные формулы для элементов матриц k и z в (1.8.3), а также для элементов матриц δ, ζ и z в (1.8.6) и (1.8.7) через элементы матрицы g.

Обозначим через $g\begin{pmatrix} p_1, & \ldots, & p_m \\ q_1, & \ldots, & q_m \end{pmatrix}$, $p_1 < \ldots < p_m$, $q_1 < \ldots < q_m$, минор из элементов матрицы g, находящихся на пересечении ее p_1, … …, p_m строки с q_1, …, q_m столбцом.

При умножении матрицы g справа на z к первой строке добавляется линейная комбинация следующих за ней строк, ко второй строке — линейная комбинация следующих за ней строк и т. д.; следовательно, минор $g\begin{pmatrix} p_1, & \ldots & p_m \\ q_1, & \ldots & q_m \end{pmatrix}$ не должен изменяться при таком умножении, т. е. он должен быть равен такому же минору матрицы k в формуле (1.8.3). В частности,

$$\Delta_m(g) = \begin{vmatrix} k_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ k_{m1} & k_{m2} & \ldots & k_{mm} \end{vmatrix} = k_{11}k_{12}\ldots k_{mm}, \tag{1.8.8}$$

и при $p > q$

$$g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k_{pq} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k_{p+1,\,q} & k_{p+1,\,p+1} & 7 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ k_{nq} & k_{n,\,p+1} & k_{n,\,p+2} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix} = \\ = k_{pq}k_{p+1,\,p+1}\ldots k_{nn}. \tag{1.8.9}$$

Из (1.8.8) следует, что

$$k_{mm} = \frac{\Delta_m(g)}{\Delta_{m-1}(g)}, \quad m = 2,\ \ldots,\ n, \tag{1.8.10}$$

$$k_{11} = \Delta_1(g), \tag{1.8.11}$$

а тогда из (1.8.9) заключаем:

$$k_{pq} = \frac{g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}}{k_{p+1,\,p+1}\ldots k_{nn}} = \Delta_n(g)\,\frac{g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}}{\Delta_p(g)}. \tag{1.8.12}$$

Комбинируя (1.8.10)–(1.8.12) с (1.6.4)–(1.6.6), получаем для ζ и δ

в (1.8.6):

$$\lambda_m = \frac{\Delta_m(g)}{\Delta_{m-1}(g)}, \quad m = 2, \ldots, n; \quad \lambda_1 = \Delta_1(g); \tag{1.8.13}$$

$$\zeta_{pq} = \frac{g\begin{pmatrix} p & p+1 & \ldots & n \\ q & p+1 & \ldots & n \end{pmatrix}}{\Delta_p(g)^2}\,\frac{\Delta_{p-1}(g)}{\Delta_n(g)}, \quad p < q. \tag{1.8.14}$$

Наконец, применяя в правой части (1.8.3) правило умножения миноров, получаем при $p < q$:

$$g\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p-1 & p \\ 1 & 2 & \ldots & p-1 & q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{p1} & k_{p2} & \ldots & k_{pp} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & z_{12} & \ldots & z_{1,\,q-1} & z_{1q} \\ 0 & 1 & \ldots & z_{2,\,q-1} & z_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & z_{p-1,\,q} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & z_{pq} \end{vmatrix} = \Delta_p(g)\, z_{pq},$$

откуда

$$z_{pq} = \frac{g\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p-1 & p \\ 1 & 2 & \ldots & p-1 & q \end{pmatrix}}{\Delta_p(g)}. \tag{1.8.15}$$

Таким образом,

III. *Элементы матриц* k, z, δ, ζ *в разложениях* (1.8.3) *и* (1.8.7) *выражаются через элементы матрицы* g *по формулам* (1.8.10)–(1.8.12), (1.8.13)–(1.8.15); *следовательно, элементы матриц* k, z, δ, ζ *в этих разложениях являются рациональными функциями элементов матрицы* g.

Замечание. В некоторых случаях удобно считать K группой всех матриц

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ 0 & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{1.8.16}$$

Z_+ — группой всех матриц

$$z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ z_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n1} & z_{n2} & \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \tag{1.8.17}$$

а Z_- — группой всех матриц

$$\zeta = \begin{Vmatrix} 1 & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \zeta_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1.8.18}$$

Для таких K, Z_+, Z_- (и с той же D) остаются в силе все разложения Гаусса.

Чтобы в этом убедиться, достаточно применить эти разложения к транспонированной матрице g', а затем перейти к транспонированным матрицам в обеих частях полученных формул.

Рассмотрим подробнее случай $n = 2$. Разложение Гаусса примет вид

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k_{11} + k_{12}z_{21} & k_{12} \\ k_{22}z_{21} & k_{22} \end{Vmatrix};$$

отсюда

$$\begin{aligned} k_{12} &= g_{12}, & k_{22} &= g_{22}, \\ k_{22}z_{21} &= g_{21}, & k_{11} + k_{12}z_{21} &= g_{11}; \end{aligned} \tag{1.8.19}$$

следовательно,

$$z_{21} = \frac{g_{21}}{g_{22}}, \quad k_{11} = g_{11} - k_{12}z_{21} = g_{11} - g_{12}\frac{g_{21}}{g_{22}} = \frac{\det g}{g_{22}}. \tag{1.8.20}$$

1.9. Разложение Грама. Обозначим через Γ совокупность всех диагональных матриц

$$\gamma = \begin{Vmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\varphi_n} \end{Vmatrix}, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbf{R}^1. \tag{1.9.1}$$

Очевидно, Γ — подгруппа группы D, изоморфная прямому произведению n экземпляров группы Γ^1. Положим для краткости $U(n) = U$. Ясно, что

$$\Gamma \subset U, \tag{1.9.2}$$

$$U \cap K = U \cap D = \Gamma. \tag{1.9.3}$$

Обозначим далее через E совокупность всех диагональных матриц

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{Vmatrix}, \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0. \tag{1.9.4}$$

Очевидно, E — погруппа группы D, изоморфная прямому произведению n экземпляров группы $\mathbf{R}_0^+$.

I. *Всякая матрица $\delta \in D$ представляется, и притом единственным образом, в виде*

$$\delta = \varepsilon\gamma = \gamma\varepsilon, \quad \varepsilon \in E, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{1.9.5}$$

Утверждение непосредственно следует из разложения $\lambda_j = \varepsilon_j e^{i\varphi_j}$, $\varepsilon_j > 0$, $\varphi_j \in \mathbf{R}^1$, где λ_j — диагональные элементы матрицы.

II. *Всякую матрицу $g \in G$ можно представить в виде*

$$g = ku, \quad k \in K, \quad u \in U. \tag{1.9.6}$$

Если также $g = k_1u_1$, $k_1 \in K$, $u_1 \in U$, то $k_1 = k\gamma$, $u_1 = \gamma^{-1}u$.

Первое утверждение было доказано выше (см. лемму 2 в примере 10 п. 1.2 гл. V). Если также $g = k_1u_1$, $k_1 \in K$, $u_1 \in U$, то $ku = k_1u_1$; отсюда в силу (1.9.4)

$$k^{-1}k_1 = uu_1^{-1} \in U \cap K = \Gamma;$$

следовательно, $k^{-1}k_1 = \gamma$, $uu_1^{-1} = \gamma$, где $\gamma \in \Gamma$, и $k_1 = k\gamma$, $u_1 = \gamma^{-1}u$.

III. *Всякую матрицу $g \in G$ можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$g = \zeta\varepsilon u, \quad \zeta \in Z_-, \quad \varepsilon \in E, \quad u \in U, \tag{1.9.7}$$

а также в виде

$$g = \varepsilon\zeta u, \quad \varepsilon \in E, \quad \zeta \in Z_-, \quad u \in U. \tag{1.9.8}$$

Доказательство. В силу (1.9.6)

$$g = ku_1, \quad k \in K, \quad u_1 \in U. \tag{1.9.9}$$

С другой стороны, в силу (1.6.2)

$$k = \zeta\delta, \quad \zeta \in Z_-, \quad \delta \in D, \tag{1.9.10}$$

и в силу (1.9.5)

$$\delta = \varepsilon\gamma, \quad \varepsilon \in E, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{1.9.11}$$

Подставляя эти выражения в (1.9.9), получаем, что $g = \zeta\varepsilon\gamma u_1 = \zeta\varepsilon u$, где $u = \gamma u_1 \in U$. Это доказывает существование разложения (1.9.7).

Если также $g = \zeta_1\varepsilon_1 u_1$, то $\zeta_1\varepsilon_1 u_1 = \zeta\varepsilon u$. Отсюда в силу II $u_1 = \gamma u$, $\zeta_1\varepsilon_1 = \zeta\varepsilon\gamma^{-1}$. Но тогда в силу единственности разложений (1.6.2) и (1.9.3), $\zeta_1 = \zeta$, $\varepsilon_1 = \varepsilon\gamma^{-1}$. Последнее возможно лишь при $\gamma = e$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Разложения (1.9.6) и (1.9.7)–(1.9.8) называются *разложениями Грама*.

§ 2. Описание неприводимых конечномерных представлений группы $GL(n, \mathbf{C})$

2.1. Веса и весовые векторы. Пусть $T\colon g \to T(g)$ — представление группы G в конечномерном пространстве X. Вектор $x \neq 0$, $x \in X$, называется *весовым вектором* представления T (относительно группы D), если

$$T(\delta)\,x = \nu(\delta)\,x \quad \text{для всех} \quad \delta \in D, \tag{2.1.1}$$

где $\nu(\delta)$ — непрерывный характер группы D; характер $\nu(\delta)$ называется *весом* представления T. Вектор $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$ называется *вектором старшего веса* представления T, если

$$\begin{aligned} &T(\delta)\,x_0 = \alpha(\delta)\,x_0 && \text{для всех} \quad \delta \in D \quad \text{и} \\ &T(z)\,x_0 = x_0 && \text{для всех} \quad z \in Z_+, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

где $\alpha(\delta)$ — непрерывный характер группы D; характер $\alpha(\delta)$ называется в этом случае *старшим весом* представления T. Наконец, вектор $x_0' \neq 0$, $x_0' \in X$ называется *вектором младшего веса* представления T, если

$$\begin{aligned} &T(\delta)\,x_0' = \mu(\delta)\,x_0' && \text{для всех} \quad \delta \in D \quad \text{и} \\ &T(\zeta)\,x_0' = x_0' && \text{для всех} \quad \zeta \in Z_-; \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

характер $\mu(\delta)$ называется в этом случае *младшим весом* представления.

Теорема 1. *В пространстве X каждого конечномерного представления $T\colon g \to T(g)$ группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ существуют вектор старшего веса и вектор младшего веса. Если, кроме того, T неприводимо, то в X существует только один, с точностью до числового множителя, вектор старшего веса и только один, с точностью до числового множителя, вектор младшего веса.*

Доказательство. Сужение на H представления T есть представление связной разрешимой группы H. На основании теоремы Ли (см. п. 3.1 гл. V) в X существует вектор $x_0 \neq 0$, являющийся общим собственным вектором для всех операторов $T(h)$

$$T(h)\,x_0 = \alpha(h)\,x_0 \quad \text{для всех} \quad h \in H, \tag{2.1.4}$$

где $h \to \alpha(h)$ — непрерывное одномерное представление группы H. Из (2.1.4) вытекает, что $T(\delta)\,x_0 = \alpha(\delta)\,x_0$ для всех $\delta \in D$ и $T(z)\,x_0 = x_0$ для всех $z \in Z_+$, ибо $Z_+ = H^{(1)}$; следовательно, x_0 — вектор старшего веса представления T. Заменив в этом рассуждении группу H группой K, мы докажем существование вектора младшего веса представления T. Предположим теперь, что T неприводимо. Пусть Y — линейное пространство, находящееся в двойственности с X относительно некоторой невырожденной билинейной формы (x, y), $\widehat{T}$ — представление группы G, контрагредиентное к T, y_0' — вектор младшего веса, а $\widehat{\mu}$ —

младший вес представления $\widehat{T}$. В силу (2.1.4) для каждого регулярного элемента $g = \zeta\delta z$, $\zeta \in Z_-$, $\delta \in D$, $z \in Z_+$,

$$(T(g)\,x_0,\, y_0') = (T(\zeta\delta z)\,x_0,\, y_0') = (T(\zeta)\,T(\delta)\,T(z)\,x_0,\, y_0') = \\ = (T(\delta)\,x_0,\, \widehat{T}(\zeta^{-1})\,y_0') = (\alpha(\delta)\,x_0,\, y_0') = \alpha(\delta)(x_0,\, y_0'), \quad (2.1.5)$$

и аналогично,

$$(T(g)\,x_0,\, y_0') = (T(\delta)\,x_0,\, y_0') = (x_0,\, \widehat{T}(\delta^{-1})\,y_0') = \widehat{\mu}(\delta^{-1})(x_0,\, y_0'). \quad (2.1.6)$$

Следовательно,

$$(\alpha(\delta) - \widehat{\mu}(\delta^{-1}))(x_0,\, y_0') = 0. \quad (2.1.7)$$

Если $(x_0,\, y_0') = 0$, то из (2.1.5) заключаем, что

$$(T(g)\,x_0,\, y_0') = 0 \quad (2.1.8)$$

для всех $g \in G_{\mathrm{reg}}$, а значит, и для всех g, ибо $\overline{G_{\mathrm{reg}}} = G$. Но линейная оболочка всех $T(g)\,x_0$, $g \in G$, совпадает с X, ибо T неприводимо, и мы получаем, что $(x,\, y_0') = 0$ для всех $x \in X$, а это противоречит невырожденности формы $(x,\, y)$. Следовательно,

$$(x_0,\, y_0') \neq 0, \quad (2.1.9)$$

и из (2.1.7) заключаем, что

$$\alpha(\delta) = \widehat{\mu}(\delta^{-1}). \quad (2.1.10)$$

Допустим теперь, что $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$ — другой вектор старшего веса и $\alpha_1(\delta)$ — соответствующий старший вес представления T. Тогда в силу (2.1.10) $\alpha_1(\delta) = \widehat{\mu}(\delta^{-1})$; следовательно, $\alpha_1(\delta) = \alpha(\delta)$. Далее, умножая x_0 на $c = \dfrac{(x_1,\, y_0)}{(x_0,\, y_0)}$, мы получаем, что

$$(cx_0 - x_1,\, y_0') = c(x_0,\, y_0') - (x_1,\, y_0') = 0. \quad (2.1.11)$$

Если $cx_0 - x_1 \neq 0$, то $cx_0 - x_1$ — также вектор старшего веса, отвечающий весу $\alpha(\delta)$; тогда (2.1.11) противоречит равенству (2.1.9) (в котором x_0 заменен вектором $cx_0 - x_1$). Таким образом, $cx_0 - x_1 = 0$, $x_1 = cx_0$, и x_0 определяется однозначно с точностью до множителя. Аналогично доказывается утверждение о векторе младшего веса.

Из доказанной теоремы вытекает:

С л е д с т в и е 1. *Для каждого конечномерного неприводимого представления группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ существуют: старший вес, и притом только один, и младший вес, и притом только один.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть T: $g \to T(g)$ — конечномерное представление группы G в конечномерном пространстве X, $x_0 \neq 0$ — вектор старшего веса, а $\alpha(\delta)$ — соответствующий старший вес представления T. Если*:

1) *X есть линейная оболочка всех $T(g)\,x_0$, $g \in G$,*

2) x_0 — *единственный с точностью до числового множителя вектор старшего веса представления* T *в* X, *то* T *неприводимо.*

Доказательство. Пусть $M \neq 0$ — подпространство в X, инвариантное относительно T. Согласно теореме 1 в M существует вектор старшего веса сужения T на M, который является также вектором старшего веса для T в X. В силу условия 2) этот вектор, с точностью до множителя, совпадает с x_0; следовательно, $x_0 \in M$. Но тогда также все $T(g)x_0$, $g \in G$, а значит, и их линейная оболочка, содержатся в M; с другой стороны, в силу условия 1) эта линейная оболочка $= X$. Таким образом, $X \subset M \subset X$, $M = X$. Следовательно, T неприводимо.

2.2. Каноническая реализация конечномерных неприводимых представлений группы G. Пусть T: $g \to T(g)$ — неприводимое представление группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ в конечномерном пространстве X и пусть Y, $\widehat{T}$, x_0, y_0', α, $\widehat{\mu}$ — те же, что и в доказательстве теоремы 1 п. 2.1.

Каждому вектору $x \in X$ поставим в соответствие функцию $f(g) = f_x(g)$ по формуле

$$f(g) = f_x(g) = (T(g)\,x,\, y_0'). \tag{2.2.1}$$

I. *Соответствие* $x \to f_x(g)$ *линейно.*

Действительно,

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}(g) &= (T(g)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2),\, y_0') = \\ &= \alpha_1 (T(g)\,x_1,\, y_0') + \alpha_2 (T(g)\,x_2,\, y_0') = \alpha_1 f_{x_1}(g) + \alpha_2 f_{x_2}(g). \end{aligned}$$

Обозначим через Φ образ пространства X при отображении $x \to f_x(g)$. В силу I Φ — линейное пространство функций на G, а в силу непрерывности представления T все функции из Φ непрерывны на G.

II. *Соответствие* $x \to f_x$ *взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть M — ядро отображения $x \to f_x(g)$; очевидно, M — подпространство в X. Если $x \in M$, то $0 = f_x(g) = (T(g)\,x,\, y_0)$ для всех $g \in G$. Но тогда для каждого $g_1 \in G$

$$(T(g)\,T(g_1)\,x,\, y_0') = (T(gg_1)\,x,\, y_0') = 0.$$

Следовательно, также $T(g_1)\,x \in M$, т. е. M инвариантно относительно всех $T(g_1)$, $g_1 \in G$. В силу неприводимости представления T отсюда заключаем, что либо $M = X$, либо $M = (0)$. В первом случае $(T(g)\,x,\, y_0) = 0$ для всех $x \in X$; в частности, $(x,\, y_0) = 0$ для всех $x \in X$, а это невозможно, ибо $(x,\, y)$ невырождена. Следовательно, $M = (0)$, т. е. соответствие $x \to f_x$ — изоморфизм.

Объединяя предложения I и II, заключаем:

III. *Соответствие* $x \to f_x(g)$ *по формуле* $f_x(g) = (T(g)\,x,\, y_0)$ *есть изоморфизм пространства* X *на пространство* Φ; *следовательно,* X *и* Φ *изоморфны.*

Рассмотрим подробнее некоторые свойства пространства Φ.

IV. *Каждая функция $f(g) \in \Phi$ удовлетворяет условию*

$$f(kg) = \alpha(k)\, f(g). \tag{2.2.2}$$

Доказательство. По определению Φ,

$$\begin{aligned} f_x(kg) &= (T(kg)\,x,\, y_0') = (T(k)\,T(g)\,x,\, y_0') = \\ &= (T(g)\,x,\, T'(k)\,y_0') = (T(g)\,x,\, \widehat{T}^{-1}(k)\,y_0') = \\ &= (T(g)\,x,\, \widehat{\mu}(k^{-1})\,y_0') = \widehat{\mu}(k^{-1})(T(g)\,x,\, y_0') = \\ &= \alpha(k)\, f_x(g). \end{aligned}$$

V. *Если $f(g) \in \Phi$, то также $f(gg_0) \in \Phi$.*

Доказательство. Пусть $f(g) = f_x(g) \in \Phi$. Тогда также

$$\begin{aligned} f(gg_0) = f_x(gg_0) = (T(gg_0)\,x,\, y_0') = \\ = (T(g)\,T(g_0)\,x,\, y_0') = f_{T(g_0)\,x}(g) \in \Phi. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Одновременно мы видим:

VI. *При изоморфизме $x \to f_x(g)$ операторы $T(g_0)$ переходят в операторы правого сдвига в Φ:*

$$T(g_0)\, f(g) = f(gg_0). \tag{2.2.4}$$

Действительно, при переходе от x к $T(g_0)\,x$ функция $f_x(g) = (T(g)\,x,\, y_0')$ переходит в $(T(g)\,T(g_0)\,x,\, y_0') = (T(gg_0)\,x,\, y_0') = f_x(gg_0)$.

Объединяя предложения III–VI, заключаем:

VII. *Изоморфизм $x \to f_x(g)$ определяет эквивалентность представления T в X и представления T в Φ, определенного формулой*

$$\widehat{T}(g_0)\, f(g) = f(gg_0), \quad f \in \Phi. \tag{2.2.5}$$

Итак, каждое неприводимое представление T группы G эквивалентно ее представлению в некотором пространстве Φ, определенному формулой в (2.2.5).

VIII. *Пусть Φ — произвольное конечномерное линейное пространство непрерывных функций $f(g)$ на G, удовлетворяющее условиям:*

1) *$f(kg) = \alpha(k)\, f(g)$, где $k \to \alpha(k)$ — одномерное представление группы K;*
2) *если $f(g) \in \Phi$, то $f(gg_0) \in \Phi$; и пусть T — представление группы G в Φ, определенное формулой*

$$T(g_0)\, f(g) = f(gg_0). \tag{2.2.6}$$

Тогда в Φ есть только один, с точностью до числового множителя, вектор $f_0(g)$ старшего веса, определенный формулой

$$f_0(\delta\zeta z) = c\alpha(\delta) \quad \textit{при} \quad g = \delta\zeta z \in G_{\mathrm{reg}}. \tag{2.2.7}$$

Доказательство. Пусть $f_0(g)$ — вектор старшего веса представления T. В силу 1)

$$f_0(\delta\zeta z) = \alpha(\delta\zeta)\, f_0(z) = \alpha(\delta)\,\alpha(\zeta)\, f_0(z) = \alpha(\delta)\, f_0(z). \tag{2.2.8}$$

С другой стороны (см. (2. 1.2) и (2.2.9)), $f_0(gz_0) = T(z_0)\, f_0(g) = f_0(g)$, и потому из (2.2.8) заключаем, что

$$f_0(\delta\zeta z) = f_0(\delta\zeta) = \alpha(\delta)\, f_0(e), \tag{2.2.9}$$

т. е. $f_0(g) = f_0(\delta\zeta z) = C\alpha(\delta)$ при $g = \delta\zeta z \in G_{\text{reg}}$, где $G = f(e) \neq 0$. Действительно, если $C = 0$, то $f_0 = 0$, а это противоречит условию $f_0 \neq 0$.

Если $f_1(g)$ — другой вектор веса α, то $f_1(g) = C_1\alpha(\delta)$; следовательно, $f_1(g) = \dfrac{C_1}{C}\, f_0(g)$ при $g = \delta\zeta z \in G_{\text{reg}}$, а значит, и для каждого $g \in G$, и предложение VIII доказано.

Из предложений VII и VIII получается другое доказательство утверждения теоремы 1 п. 2.1 о векторе старшего веса. Меняя ролями K и H, можно получить другое доказательство утверждения о векторе младшего веса.

Характер $\alpha(\delta)$ группы D назовем *индуктивным* относительно $G = GL(n, \mathbf{C})$, если:

1) формула (2.2.9) определяет непрерывную функцию $f_0(g)$ на всей группе G;
2) линейная оболочка, — обозначим ее Φ_α, — всех правых сдвигов $f_0(gg_0)$, $g_0 \in G$, конечномерна.

IX. *Все функции из Φ_α удовлетворяют условию $f(kg) = \alpha(k)\, f(g)$.*

Действительно, если $f(g) = f_0(gg_0)$, то $f(kg) = f_0(kgg_0)$; положив $k = \delta\zeta$, $gg_0 = \delta_1\zeta_1 z_1$, получаем

$$\begin{aligned} f(kg) = f_0(\delta\zeta\delta_1\zeta_1 z_1) = C\alpha(\delta\zeta\delta_1\zeta_1) = \\ = C\alpha(\delta\zeta)\,\alpha(\delta_1\zeta_1) = \alpha(k)\, f_0(gg_0) \end{aligned}$$

для $gg_0 \in G_{\text{reg}}$, а значит, и для всех $g, g_0 \in G$.

Пусть α — индуктивный характер группы G. Обозначим через T^α: $g \to T^\alpha(g)$ представление группы G в пространстве Φ_α, определенное формулой

$$T_\alpha(g_0)\, f(g) = f(gg_0) \quad \text{при} \quad f \in \Phi_\alpha.$$

Теорема 2. 1). *Если α — индуктивный характер группы D, то T^α — неприводимое представление группы $GL(n, \mathbf{C})$ со старшим весом α.*

2). *Старший вес α всякого конечномерного неприводимого представления группы $GL(n, \mathbf{C})$ индуктивен и всякое конечномерное неприводимое представление группы $GL(n, \mathbf{C})$ со старшим весом α эквивалентно представлению T^α.*

3). *Два конечномерных неприводимых представления группы $GL(n, \mathbf{C})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их старшие веса совпадают.*

Доказательство. 1). Пусть α индуктивен и пусть $f_0(g)$ — вектор старшего веса представления T^α. В силу 2) линейная оболочка всех $T^\alpha(g_0)\, f_0$ совпадает с Φ_α и в силу VIII $f_0(g)$ — единственный, с точностью до числового множителя, вектор старшего веса в Φ_α; поэтому T^α неприводимо на основании следствия 2 п. 2.1.

2). Пусть T — конечномерное неприводимое представление группы $GL(n, \mathbf{C})$ и α — его старший вес. В силу VII T эквивалентно представлению $\widetilde{T}$ в Φ. На основании предложения VIII в Φ есть единственный, с точностью до числового множителя, вектор $f_0(g) = C\alpha(\delta)$ при $g = \delta\zeta z$ веса α. Поскольку T неприводимо, то и $\widetilde{T}$ неприводимо и потому линейная оболочка всех $\widetilde{T}(g_0)\, f(g) = f(gg_0)$ совпадает с Φ, т. е. $\Phi = \Phi_\alpha$ и $\widetilde{T} = T^\alpha$. Этим доказано, что α индуктивен и что T эквивалентно T^α.

3). Два конечномерных неприводимых представления с одним и тем же старшим весом α эквивалентны T^α, а значит, эквивалентны между собой. Обратное утверждение очевидно.

Ввиду утверждения 2) теоремы 2 представление T^α называется *канонической реализацией* неприводимых конечномерных представлений группы $GL(n, \mathbf{C})$ со старшим весом α.

В силу этого утверждения 2) для полного перечисления всех с точностью до эквивалентности конечномерных неприводимых представлений группы $GL(n, \mathbf{C})$ остается из всех непрерывных характеров $\alpha(\delta)$ группы D отобрать индуктивные характеры. Эта задача будет решена ниже в п. 2.5.

Отметим еще, что T_α действует в пространстве функций на однородном пространстве G с группой преобразований, состоящей из правых сдвигов $g \to gg_0$.

Всюду в дальнейшем T_α обозначает неприводимое конечномерное представление группы G со старшим весом α; ниже приводятся различные реализации представления T^α.

2.3. Реализация конечномерных неприводимых представлений группы G в пространстве функций на Z_+. Согласно теореме 2 п. 2.2 всякое конечномерное неприводимое представление группы G эквивалентно некоторому представлению T^α, действующему в Φ_α. Все функции $f(g)$ пространства Φ_α непрерывны на G и удовлетворяют условию $f(kg) = \alpha(k)\, f(g)$. В частности,

$$f(g) = f(kz) = \alpha(k)\, f(z) \quad \text{при} \quad k \in K, \quad z \in Z_+, \quad g \in G_{\text{reg}}; \qquad (2.3.1)$$

функция $f(z)$ непрерывна на Z_+ как сужение на Z_+ функции $f(g)$, непрерывной на G. С другой стороны, формула (2.3.1) определяет $f(g)$ однозначно на G_{reg}, а значит, по непрерывности и на G, ибо G_{reg} плотно в G. Соответствие $f(g) \to f(z)$ по формуле (2.3.1), очевидно, линейно. Кроме того, оно взаимно однозначно. Действительно, если $f(z) \equiv 0$, то $f(g) = 0$ на G_{reg}, а значит, и на всей G. Обозначим через F_α образ пространства Φ_α при отображении $f(g) \to f(z)$ по формуле (2.3.1). При этом отображении операторы $T^\alpha(g)$ перейдут в операторы $\dot{T}^\alpha(g)$ в F_α.

Найдем явное выражение для $\dot{T}_\alpha(g)$. По определению $\dot{T}^\alpha(g)$,

$$T_\alpha(g_0)\, f(g) = f(gg_0) = \alpha(k)\dot{T}_\alpha(g_0)\, f(z) \text{ при } g = kz,\ \ k \in K,\ \ z \in Z_+. \tag{2.3.2}$$

Положим $\alpha(g) = f_0(g)$ при $g \in G_{\text{reg}}$ и

$$zg_0 = k_1 z_1; \tag{2.3.3}$$

тогда

$$\begin{aligned} f(gg_0) = f(kzg_0) = f(kk_1z_1) &= \\ = \alpha(kk_1)\, f(z_1) &= \alpha(k)\,\alpha(k_1)\, f(z_1). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Отсюда и из (2.3.2) заключаем, что

$$T_\alpha(g_0)\, f(z) = \alpha(k_1)\, f(z_1) \quad \text{при} \quad zg_0 = k_1 z_1. \tag{2.3.5}$$

Соответствие $z \to z_1$, заданное формулой (2.3.3), есть отображение пространства Z_+ в Z_+; обозначим через $\overline{g}_0$ это отображение [1] и положим $z_1 = z\overline{g}_0$. Кроме того, из (2.3.3) следует, что $\alpha(zg_0) = \alpha(k_1)\,\alpha(z_1) = \alpha(k_1)$. Поэтому формула (2.3.5) примет вид

$$\dot{T}_\alpha(g_0)\, f(z) = \alpha(zg_0)\, f(z\overline{g}_0). \tag{2.3.6}$$

Дадим теперь явное описание пространства F_α. По определению, Φ_α есть линейная оболочка всех $T(g_0)\, f_0(g) = f_\alpha(gg_0)$, $g_0 \in G$; поэтому ее образ F_α есть линейная оболочка всех $T(g_0)\, f_0(z)$, $g_0 \in G$. Но в силу (2.2.11) и (2.3.1) $f_0(g)$ переходит в $f_0(z) \equiv C$ при отображении $f(g) \to f(z)$, и не нарушая общности, можно считать $C = 1$, следовательно, $f_0(z) \equiv 1$. Поэтому, применяя формулу (2.3.6), заключаем: F_α есть линейная оболочка всех $\alpha(zg)$, $g \in G$.

Комбинируя эти результаты с теоремой 2 п. 2.2, мы приходим к следующей теореме:

Т е о р е м а 3. *Всякое конечномерное неприводимое представление T группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ эквивалентно представлению $\dot{T}^\alpha$, где α — старший вес представления T, определенному следующим образом. Пространство F_α представления $\dot{T}^\alpha$ есть линейная оболочка*

[1] Строго говоря, отображение $z \to z\overline{g}_0$ определено лишь для тех z и g_0, для которых $zg_0 \in G_{\text{reg}}$. Это, однако, несущественно, поскольку функции $f(z) \in F_\alpha$ доопределяются по непрерывности на нерегулярных матрицах.

всех $\alpha(zg)$, $g \in G$, *а операторы представления задаются формулой*

$$\dot{T}_\alpha(g)\, f(z) = \alpha(zg)\, f(z\overline{g}), \tag{2.3.7}$$

где $z_1 = z\overline{g}$ *определяется из условия* $zg = k_1 z_1$.

2.4. Случай $n = 2$**.** Рассмотрим подробнее случай $G = GL(2, \mathbf{C})$. Нам удобно будет при этом считать, что K и Z_+ состоят соответственно из матриц вида

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{Vmatrix}, \quad z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.4.1}$$

(см. замечание в п. 1.8); кроме того, при $\delta \in D$ положим, как обычно,

$$\delta = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Мы видим, что z задается одним комплексным параметром $x = z_{21}$, и мы можем положить

$$f(z) = f(x) \quad \text{при} \quad z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.4.2}$$

Найдем соответствующий параметр x_1 в матрице $z_g = z\overline{g}$ при

$$zg = kz_g. \tag{2.4.3}$$

Перемножая матрицы z и g, получаем

$$zg = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{11}x + g_{21} & g_{12}x + g_{22} \end{Vmatrix}.$$

Отсюда в силу (1.8.20)

$$x_1 = \frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{12}x + g_{22}}; \tag{2.4.4}$$

следовательно [1]),

$$f(z\overline{g}) = f\left(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{12}x + g_{22}}\right). \tag{2.4.5}$$

Далее из (1.8.20) заключаем, что при $zg = kz_k$, $k = \zeta\delta$,

$$\lambda_2 = k_{22} = g_{12}x + g_{22}, \quad \lambda_1 = k_{11} = \frac{\det(zg)}{g_{12}x + g_{22}} = \frac{\det g}{g_{12}x + g_{22}}. \tag{2.4.6}$$

[1]) Таким образом, при $n = 2$ преобразование $z \to z\overline{g}$ сводится к дробно-линейному преобразованию переменной x. При $n > 2$ элементы матрицы $z\overline{g}$ являются рациональными функциями элементов матриц z и g; это непосредственно следует из формулы (1.8.15), так что мы можем рассматривать преобразование $z \to z\overline{g}$ в общем случае как обобщение дробно-линейного преобразования.

Характер $\alpha(\delta)$ есть непрерывный характер группы D, изоморфной прямому произведению двух экземпляров группы $\mathbf{C}_0^1$; поэтому

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1} \overline{\lambda}_1^{q_1} \lambda_2^{p_2} \overline{\lambda}_2^{q_2}, \tag{2.4.7}$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 — произвольные комплексные числа, для которых $p_1 - q_1$ и $p_2 - q_2$ — целые числа. Подставляя в формулу (2.4.7) выражения для λ_1 и λ_2 из (2.4.6), получаем

$$\alpha(zg) = \left(\frac{\det g}{g_{12}x + g_{22}}\right)^{p_1} \left(\frac{\overline{\det g}}{\overline{g}_{11}\overline{x} + \overline{g}_{22}}\right)^{q_1} (g_{11}x + g_{22})^{p_2} (\overline{g}_{12}\overline{x} + \overline{g}_{22})^{q_1},$$

т. е.

$$\alpha(zg) = \Delta^{p_1} \overline{\Delta}^{q_1} (g_{12}x + g_{22})^{p_2 - p_1} (\overline{g}_{12}\overline{x} + \overline{g}_{22})^{q_2 - q_1}, \tag{2.4.8}$$

где $\Delta = \det g$, и формула (2.3.7) примет вид

$$\dot{T}_\alpha(g)\, f(z) = \\ = \Delta^{p_1} \overline{\Delta}^{q_1} (g_{12}x + g_{22})^{p_2 - p_1} (\overline{g}_{12}\overline{x} + \overline{g}_{22})^{q_2 - q_1} f\left(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{11}x + g_{22}}\right). \tag{2.4.9}$$

Остается выяснить, при каких условиях $\alpha(\delta)$ индуктивен. Пусть $\alpha(\delta)$ индуктивен, так что линейная оболочка всех $\alpha(z)$ конечномерна (пусть $k - 1$-мерна). Тогда для каждых $g_1, \ldots, g_k \in G$ существуют такие постоянные $C_1, \ldots, C_k$, не все равные нулю (вообще говоря, зависящие от $g_1, \ldots, g_k$, но не зависящие от z), что

$$C_1 \alpha(zg_1) + C_2 \alpha(zg_2) + \ldots + C_k \alpha(zg_k) = 0 \tag{2.4.10}$$

для всех $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$ и всех $z \in Z_+$.

Положим в (2.4.10)

$$g_j = \begin{pmatrix} x_l^{-1} & 1 \\ 0 & x_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

где x_j — произвольные комплексные числа. Тогда $\Delta_j = 1$ и в силу (2.4.8)

$$\alpha(zg_j) = (x + x_j)^r (\overline{x} + \overline{x}_j)^s, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.4.11}$$

где

$$r = p_2 - p_1, \quad s = q_2 - q_1. \tag{2.4.12}$$

Подставляя в (2.4.10), получим, что

$$C_1(x + x_1)^r (\overline{x} + \overline{x}_1)^s + \ldots + C_k (x + x_k)^r (\overline{x} + \overline{x}_k)^s = 0 \tag{2.4.13}$$

при произвольных комплексных x, x_1, …, x_k. Дифференцируя равенства (2.4.13) $k-1$ раз по [1] x и полагая затем $x=0$, получим систему k равенств:

$$\begin{gathered}
C_1 x_1' \overline{x}_1^2 + \ldots + C_k x_k^r \overline{x}_k^s = 0,\\
r C_1 x_1^{r-1} \overline{x}_1^s + \ldots + r C_k x_k^{r-1} \overline{x}_k^s = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k+1) C_1 \overline{x}_1^s + \ldots\\
+ r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k+1) C_k \overline{x}_k^s = 0.
\end{gathered} \tag{2.4.14}$$

По условию, система (2.4.14) удовлетворяется при C_j, не всех равных нулю. Следовательно, должен обращаться в нуль определитель этой системы, равный $r^k(r-1)^{k-1}\ldots(r-k+1)\,\overline{x}_1^s\ldots\overline{x}_k^s w(x_1, \ldots, x_k)$, где $w(x_1, \ldots, x_k)$ — определитель Вандермонда чисел $x_1, \ldots, x_k$. Но эти числа могут быть выбраны произвольно; их можно выбрать отличными от нуля и различными, так что должно обращаться в нуль одно из чисел r, $r-1$, …, $r-k+1$. Это означает, что r должно быть целым неотрицательным числом. Аналогично, дифференцируя по $\overline{x}$ $(k-1)$ раз равенство (2.4.13) и полагая затем $x=0$, получим, что s должно быть целым неотрицательным числом. Таким образом,

I. *Если характер $\alpha(\delta)$ индуктивен, то $r = p_2 - p_1$ и $s = q_2 - q_1$ — целые неотрицательные числа.*

Обратно, пусть r и s — целые неотрицательные числа. Тогда из (2.4.8) заключаем, что

$$\alpha(zg) = \Delta^{p_1}\overline{\Delta}^{q_1}(g_{12}x + g_{22})^r(\overline{g}_{12}\overline{x} + \overline{g}_{22})^s \tag{2.4.15}$$

есть многочлен от x степени не выше r и от $\overline{x}$ степени не выше s. Очевидно, то же верно относительно любой линейной комбинации функций $\alpha(zg)$. Следовательно,

II. *Если $r = p_2 - p_1$ и $s = q_2 - q_1$ — целые неотрицательные числа, то характер $\alpha(\delta)$ индуктивен.*

В этом случае F_α есть пространство многочленов от x степени $\leqslant r$ и от $\overline{x}$ степени $\leqslant s$. Докажем, что F_α состоит из всех таких многочленов. Пространство F_α содержит все функции вида (2.4.15). Полагая $g_{12}=1$, $g_{22}=0$, $g_{11}=0$, $g_{21}=-1$, заключаем, что F_α содержит $x^r\overline{x}^s$. Теперь заметим, что если некоторый многочлен $\rho(x) = \rho(\xi + i\eta)$, $\xi = \operatorname{Re} x$, $\eta = \operatorname{Im} x$, принадлежит F_α, то также $f(x+h) \in F_\alpha$. Действительно, положим $g_0 = \begin{Vmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, где $h \in \mathbf{R}^1$.

[1] Здесь мы полагаем $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} - i\dfrac{\partial}{\partial \eta}\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial \overline{x}} = \dfrac{1}{2}\lambda\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi} + i\dfrac{\partial}{\partial \eta}\right)$, где $\xi = \operatorname{Re} x$, $\eta = \operatorname{Im} x$; читатель легко проверит, что тогда $\partial\overline{x}/\partial x = 0$, $\partial x/\partial\overline{x} = 0$, так что при таком дифференцировании x и $\overline{x}$ можно рассматривать как независимые переменные.

Если $f(x) \in F_\alpha$, то в силу (2.4.9) $T^\alpha(g_0)\,f(x) = f(x+h) \in F_\alpha$. Поэтому также $\dfrac{1}{h}\,(f(x+h) - f(x)) \in F_\alpha$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \xi} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\,(f(x+h) - f(x)) \in F_\alpha$. Аналогично, беря ih вместо h, $h \in \mathbf{R}^1$, получим, что $\dfrac{\partial f}{\partial \eta} \in F_\alpha$. Отсюда следует, что $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\right) \in F_\alpha$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{x}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi} + i\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\right) \in F_\alpha$. Поэтому F_α содержит производные всех порядков $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^l}{\partial \overline{x}^l}$ функции $x^r\overline{x}^s$, т. е. все степенные функции $x^{r_1}\overline{x}^{s_1}$, $0 \leqslant r_1 \leqslant r$, $0 \leqslant s_1 \leqslant s$, и потому F_α совпадает с совокупностью всех многочленов $f(z, \overline{z})$ степени $\leqslant r$ по x и степени $\leqslant s$ по $\overline{x}$. Мы приходим к следующему результату:

Теорема 4. *Всякое конечномерное неприводимое представление группы $GL(2, \mathbf{C})$ задается двумя целыми неотрицательными числами r, s и двумя комплексными числами p, q, разность $p - q$ которых — целое число. Представление, заданное этими числами, эквивалентно представлению $\dot{T}^\alpha$, действующему в пространстве F_α многочленов $f(x, \overline{x})$ от x и $\overline{x}$ степени $\leqslant r$ по x и степени $\leqslant s$ по $\overline{x}$, а операторы $\dot{T}^\alpha(g)$ задаются формулой*

$$\dot{T}_\alpha(g)\,f(x, \overline{x}) = (\det g)^p(\overline{\det g})^q(g_{12}x + g_{22})^r(\overline{g}_{12}\overline{x} + \overline{g}_{22})^s \times \\ \times f\left(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{11}x + g_{22}}, \frac{\overline{g}_{11}\overline{x} + \overline{g}_{21}}{\overline{g}_{12}\overline{x} + \overline{g}_{22}}\right). \quad (2.4.16)$$

Размерность этого представления равна $(r+1)(s+1)$.

Если $s = 0$ и $q = 0$, то p — целое число и F_α состоит из многочленов только от x, следовательно, из аналитических функций от x; в этом случае представление называется *аналитическим*. Если же $r = 0$ и $p = 0$, то q — целое число и F_α состоит из многочленов только от $\overline{x}$; в этом случае представление называется *антианалитическим*.

Замечание 1. Часто система чисел r, s, определяющая представление, также называется его *старшим весом*. Аналогично, если $f(x)$ — весовой вектор представления $\dot{T}^\alpha$ с весом вида $\lambda_1^{m_1}\overline{\lambda}_2^{m_2}$, то пара m_1, m_2 также называется *весом вектора* $f(x)$.

III. *Каждый одночлен $f = x^{r_1}\overline{x}^{s_1}$, $0 \leqslant r_1 \leqslant r$, $0 \leqslant s_1 \leqslant s$ является весовым вектором представления T^α веса $r - 2r_1$, $s - 2s_1$.*

Доказательство. Подставляя $f = x^{r_1}\overline{x}^{s_1}$ в формулу (2.4.16) при $g = \delta$, получаем

$$\dot{T}_\alpha(\delta)\,x^{r_1}\overline{x}^{s_1} = (\det g)^p(\overline{\det g})^q\lambda_2^r\overline{\lambda}_2^s\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,x\right)^{r_1}\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{\overline{\lambda}_2}\,\overline{x}\right)^{s_1} = \\ = (\det g)^{p-2r_1}(\overline{\det g})^{q-2s_2}\lambda_2^{r-2r_1}\overline{\lambda}_2^{s-2s_1}x^{r_1}\overline{x}^{s_1};$$

отсюда следует утверждение.

Наибольшие компоненты веса получаются при $r_1 = s_1 = 0$, т. е. при $f \equiv 1$. Тогда в III соответствующий вес равен r, s. В остальных случаях компоненты меньше. Отсюда и название старший вес. Аналогичная ситуация имеет место и при $n > 2$ (см., например, Желобенко [1]).

Замечание 2. Если исходить из обычного определения групп K и Z_+ как групп матриц

$$k = \begin{Vmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{21} & k_{22} \end{Vmatrix}, \quad z = \begin{Vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

соответственно, то, производя аналогичные вычисления, мы вместо формулы (2.4.16) получим формулу

$$\dot{T}_\alpha(g)\, f(x) =$$
$$= (\det g)^p (\overline{\det g})^q (g_{11} + g_{21}x)^r (\overline{g}_{11} + \overline{g}_{21}\overline{x})^s f\left(\frac{g_{12} + g_{22}x}{g_{11} + g_{21}x}, \frac{\overline{g}_{12} + \overline{g}_{22}\overline{x}}{\overline{g}_{11} + \overline{g}_{21}\overline{x}}\right),$$

где p, q — комплексные числа, для которых $p - q$ — целое число, r, s — целые неотрицательные числа, а F_α остается тем же. Обычно в приложениях при $n = 2$ предпочитают формулу (2.4.16). Отметим, что в данном случае характер $\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1}\overline{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\overline{\lambda}_2^{q_2}$ индуктивен тогда и только тогда, когда

$$r_1 = p_1 - p_2, \quad s = q_1 - q_2$$

— целые неотрицательные числа, а p_2, q_2 — произвольные комплексные числа, разность которых — целое число.

2.5. Индуктивные характеры группы D в общем случае. Пусть G^0 — подгруппа группы $G = GL(n, \mathbf{C})$. Положим

$$Z_+^0 = Z_+ \cap G^0, \quad Z_-^0 = Z_- \cap G^0, \quad D^0 = D \cap G^0. \tag{2.5.1}$$

Будем говорить, что разложение Гаусса группы G *индуцирует* разложение Гаусса группы G^0, если в разложении Гаусса каждого регулярного элемента $g^0 \in G^0$

$$g^0 = \delta\zeta z \tag{2.5.2}$$

имеют место соотношения

$$\delta = \delta^0 \in D^0, \quad \zeta = \zeta^0 \in Z_+^0, \quad z = z^0 \in Z_+^0,$$

и если $G^0 \cap G_{\text{reg}}$ плотно в G^0.

Лемма. *Пусть разложение Гаусса группы G индуцирует разложение Гаусса группы G^0. Если характер $\alpha(\delta)$ группы D индуктивен относительно G, то его сужение $\alpha_0(\delta^0)$ на D_0 индуктивно относительно G^0.*

Доказательство. Пусть $\alpha(\delta)$ индуктивен относительно G. Это означает, что линейная оболочка всех $\alpha(zg)$, $g \in G$, конечномерна, например, $(k-1)$-мерна. Тогда для каждых $g_1, g_2, \ldots, g_k$ существуют такие постоянные $C_1, \ldots, C_k$, что

$$C_1\alpha(zg_1) + \ldots + C_k\alpha(zg_k) = 0. \tag{2.5.3}$$

В частности, (2.5.3) должно иметь место при $g_1 = g_1^0 \in G^0, \ldots, g_k = g_k^0 \in G^0$ для всех $z \in Z_+$, в частности, для $z = z^0 \in Z_+$. Но поскольку разложение Гаусса группы G индуцирует разложение Гаусса группы G^0, то $\alpha(z^0 g_j^0) = \alpha_0(z^0 g_j)$, и (2.5.3) перейдет в равенство

$$C_1\alpha_0(z^0 g_1^0) + \ldots + C_k\alpha_0(z^0 g_k^0) = 0,$$

означающее, что α_0 индуктивен.

Теперь заметим, что D есть прямое произведение n экземпляров группы $\mathbf{C}_0$, поэтому (см. к) п. 3.3 гл. III) произвольный характер $\alpha(\delta)$ группы D имеет вид

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1}\overline{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\overline{\lambda}_2^{q_2}\ldots\lambda_n^{p_n}\overline{\lambda}_n^{q_n}. \tag{2.5.4}$$

Предположим теперь, что $\alpha(\delta)$ индуктивен относительно G, и применим предыдущую лемму к группе G^0 матриц g^0 вида

$$g^0 = \begin{Vmatrix} a & b & & & \\ c & d & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.5.5}$$

где на всех не указанных местах стоят нули, а $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда Z_+^0, Z_-^0, D^0 состоят соответственно из всех матриц

$$z^0 = \begin{Vmatrix} 1 & z_{12} & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}, \quad \zeta^0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & & & \\ \zeta_{21} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\delta^0 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что G^0, Z_+^0, Z_-^0, D^0 изоморфны группе $GL(2, \mathbf{C})$ и соответствующим подгруппам Z_+, Z_-, D в ней, поэтому разложение Гаусса в $GL(n, \mathbf{C})$ индуцирует разложение Гаусса в $GL(2, \mathbf{C})$. На основании леммы индуктивный характер $\alpha(\delta)$ группы D относительно G переходит в индуктивный характер

$$\alpha_0(\delta^0) = \lambda_1^{p_1}\overline{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\overline{\lambda}_2^{q_2}$$

группы D_0 относительно G^0. В силу замечания 2 в п. 2.4 последнее имеет место тогда и только тогда, когда $r_1 = p_1 - p_2$ и $s_1 = q_1 - q_2$ — целые неотрицательные числа. Передвигая теперь матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ вниз вдоль главной диагонали и повторяя предыдущее рассуждение, заключаем, что также $r_2 = p_2 - p_3$, $s_2 = q_2 - q_3$, $\ldots$, $r_{n-1} = p_{n-1} - p_n$, $s_{n-1} = q_{n-1} - q_n$ — целые неотрицательные числа. Мы приходим к следующему результату:

I. *Если характер*

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1}\overline{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\overline{\lambda}_2^{q_2}\ldots\lambda_n^{p_n}\overline{\lambda}_n^{q_n}$$

группы D индуктивен относительно $GL(n, \mathbf{C})$, то

$$r_1 = p_1 - p_2, \quad s_1 = q_1 - q_2, \;\ldots,\; r_{n-1} = p_{n-1} - p_n, \quad s_n = q_{n-1} - q_n \tag{2.5.6}$$

— *целые неотрицательные числа.*

Докажем, что имеет место обратное утверждение:

II. *Если числа* (2.5.6) — *целые неотрицательные, то характер $\alpha(\delta)$ индуктивен относительно $GL(n, \mathbf{C})$.*

Доказательство. Обозначим через $\Delta_1(g), \Delta_2(g), \ldots, \Delta_n(g)$ последовательные главные миноры матрицы $g \in GL(n, \mathbf{C})$. В силу формул (1.8.13) и (2.5.4)

$$\alpha(zg) = \Delta_1(zg)^{p_1}\left(\frac{\Delta_2(zg)}{\Delta_1(zg)}\right)^{p_2}\overline{\Delta_1(zg)}^{q_1}\left(\frac{\overline{\Delta_2(zg)}}{\overline{\Delta_1(zg)}}\right)^{q_2}\ldots$$
$$\ldots\left(\frac{\Delta_n(zg)}{\Delta_{n-1}(zg)}\right)^{p_n}\left(\frac{\overline{\Delta_n(zg)}}{\overline{\Delta_{n-1}(zg)}}\right)^{q_n} =$$
$$= \Delta_1(zg)^{r_1}\overline{\Delta_1(zg)}^{s_1}\ldots\Delta_{n-1}(zg)^{r_{n-1}}\overline{\Delta_{n-1}(zg)}^{s_{n-1}}\Delta_n(g)^{p_n}\overline{\Delta_n(g)}^{q_n},$$

ибо $\Delta_n(zg) = \det zg = \det z \det g = \Delta(g)$.

Из I, II и теоремы 3 п. 2.3 следует

Теорема 5. *Всякое конечномерное неприводимое представление T группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ задается целыми неотрицательными числами $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ и комплексными числами p, q, разность которых — целое число. Представление T, заданное числами $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ и p, q, эквивалентно представлению T^α, действующему в некотором пространстве F_α*

многочленов $f(z, \overline{z})$ от z_{jl} степени не выше $r_1 + \ldots + r_{n-1}$ и от $\overline{z}_{jl}$ степени не выше $s_1 + \ldots + s_{n-1}$, и операторы $\dot{T}^\alpha(g)$ задаются формулой

$$\dot{T}_\alpha(g)\, f(z, \overline{z}) = \\ = \Delta_1(zg)^{r_1}\Delta_1\overline{(zg)}^{s_1}\ldots\Delta_{n-1}(zg)^{r_{n-1}}\Delta_{n-1}\overline{(zg)}^{s_{n-1}}\Delta_n^p\,\overline{\Delta}_n^q f(zg, \overline{zg}), \tag{2.5.7}$$

где $\Delta_j(g)$ — j-й главный минор матрицы g. Пространство F_α есть линейная оболочка функций

$$\Delta_1(zg)^{r_1}\overline{\Delta_1(zg)}^{s_1}\ldots\Delta_{n-1}(zg)^{r_{n-1}}\overline{\Delta_{n-1}(zg)}^{s_{n-1}}.$$

Таким образом, всякое конечномерное неприводимое представление T группы $GL(n, \mathbf{C})$ задается набором чисел $\{p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, где $p_n - q_n$ — целое число, а $r_1 = p_1 - p_2, \ldots, r_{n-1} = p_{n-1} - p_n$, $s_1 = q_1 - q_2, \ldots, s_{n-1} = q_{n-1} - q_n$ — целые неотрицательные числа. Этот набор называется *сигнатурой* представления T и обозначается α:

$$\alpha = \{p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n\}.$$

Часто сигнатурой называют также набор $\{r_1, \ldots, r_{n-1}, p_n; s_1, \ldots, s_{n-1}, q_n\}$ и пишут

$$\alpha = \{r_1, \ldots, r_{n-1}, p_n; s_1, \ldots, s_{n-1}, q_n\}.$$

Неприводимое представление T группы $GL(n, \mathbf{C})$ с сигнатурой α обозначают T_α.

Если $s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-1} = q = 0$, то p — целое число и F_α состоит из многочленов только от z_{jl}; представление называется в этом случае *аналитическим*. Если же $r_1 = r_2 = \ldots = r_{n-2} = p = 0$, то q — целое число и F_α состоит из многочленов только от $\overline{z}_{jl}$; представление называется в этом случае *антианалитическим*. Очевидно, $\dot{T}^\alpha$ одновременно аналитично и антианалитично тогда и только тогда, когда оно — одномерное единичное представление.

Из (2.5.7) непосредственно следует:

III. *Всякое конечномерное неприводимое представление T группы $GL(n, \mathbf{C})$ эквивалентно тензорному произведению ее аналитического и антианалитического неприводимых представлений; обратно, всякое такое тензорное произведение есть неприводимое представление группы $GL(n, \mathbf{C})$.*

При $n > 2$ пространство F_α уже состоит не из всех многочленов от z_{jl} степени не выше $r_1 + \ldots + r_{N-1}$ и от $\overline{z}_{jl}$ степени не выше $s_1 + \ldots + s_{n-1}$ (как это имеет место при $n = 2$), и определение F_α

довольно сложно. Приведем без доказательства [1] один из способов определения F_α. Определим дифференциальные операторы в пространстве всех многочленов от z_{jl}, $\overline{z}_{jl}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\partial}{\partial z_{12}} + z_{23}\frac{\partial}{\partial z_{13}} + \ldots + z_{2n}\frac{\partial}{\partial z_{1n}},\\
D_2 &= \frac{\partial}{\partial z_{23}} + \ldots + z_{3n}\frac{\partial}{\partial z_{2n}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
D_{n-1} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-1,n}},\\
\overline{D}_1 &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{12}} + \overline{z}_{23}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{13}} + \ldots + \overline{z}_{2n}\frac{\partial}{\partial z_{1n}},\\
\overline{D}_2 &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{23}} + \ldots + \overline{z}_{3n}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{2n}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overline{D}_{n-1} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{n-1,n}}.
\end{aligned}
\tag{2.5.8}
$$

IV. *Пространство F_α есть совокупность всех многочленов от z_{jl}, $\overline{z}_{jl}$, удовлетворяющих условиям*

$$
\begin{aligned}
&D_1^{r_1+1} f = , \quad D_2^{r_2+1} f = 0, \ \ldots, \ D_{n-1}^{r_{n-1}+1} f = 0,\\
&\overline{D}_1^{s_1+1} f = 0, \quad \overline{D}_2^{s_2+1} f = 0, \ \ldots, \ \overline{D}_{n-1}^{s_{n-1}+1} f = 0.
\end{aligned}
\tag{2.5.9}
$$

В действительности f можно считать произвольной достаточно много раз дифференцируемой функцией. Оказывается, что и в этом случае совокупность всех таких функций, удовлетворяющих системе (2.5.9), совпадает с F_α.

Другое описание пространства F_α мы дадим ниже в § 3.

З а м е ч а н и е. Преобразование $z \to z\overline{g}$ определено лишь при $zg \in G_{\mathrm{reg}}$. Это неудобство можно устранить, если вместо функций $f(z)$, $z \in Z_+$, рассмотреть функции $f(\widetilde{z})$, где $\widetilde{z}$ — правый смежный класс: $\widetilde{z} \in \widetilde{Z} = G/K$. Смежный класс $\widetilde{z}$ называется *регулярным*, если он содержит регулярные матрицы g (в этом случае, как легко видеть, все матрицы из $\widetilde{z}$ регулярны), и *нерегулярным* в противном случае. Из разложения Гаусса (1.8.3) сразу следует, что:

V. *Каждый регулярный класс $\widetilde{z}$ содержит в точности один элемент $z \in Z_+$; обратно, каждый элемент $z \in Z_+$ содержится точно в одном регулярном классе $\widetilde{z}$.*

---

[1] Доказательство см., например, в книге Ж е л о б е н к о [1] гл. X или в статье Ж е л о б е н к о [1*].

Отождествив каждую матрицу $z \in Z_+$ с содержащим ее регулярным классом, мы тем самым вложим Z_+ в $\widetilde{Z}$. Очевидно, $\widetilde{Z}_+$ — однородное пространство относительно группы G, действующей по формуле

$$\widetilde{z}\overline{g}_0 = \{g\}\overline{g}_0 = \{gg_0\} \tag{2.5.10}$$

(см. п. 2.6 гл. III), и преобразование (2.5.10) определено для всех $\widetilde{z} \in \widetilde{Z}$. Нерегулярные элементы из $\widetilde{Z}$ можно при этом рассматривать как присоединенные к Z_+ бесконечно удаленные точки.

Упражнение. Найти все нерегулярные элементы в $\widetilde{Z}$ при $G = GL(2, \mathbf{C})$.

2.6. Реализация представлений в пространстве функций на U. Воспользуемся теперь разложением Грама (1.9.7) вместо разложения Гаусса. Если $f \in \Phi_\alpha$, то в силу IV п. 2.2 и (1.9.7)

$$f(g) = f(\zeta\varepsilon u) = \alpha(\zeta\varepsilon)\, f(u) = \alpha(\varepsilon)\, f(u). \tag{2.6.1}$$

Очевидно, $f(u)$, как сужение f на U, непрерывна на U, и соответствие

$$f(g) \to f(u), \tag{2.6.2}$$

устанавливаемое формулой (2.6.1), линейно и взаимно однозначно. Обозначим через $\dot{F}_\alpha$ образ Φ_α при отображении (2.6.2). При этом отображении представление $\dot{T}^\alpha$ перейдет в эквивалентное ему представление в $\dot{F}_\alpha$. Обозначим снова через $\dot{T}^\alpha$ это представление, а через $\dot{T}^\alpha(g)$ — оператор представления $\dot{T}^\alpha$. Повторяя рассуждения при выводе формулы (2.3.5), легко находим:

I. *Операторы $\dot{T}^\alpha(g)$ представления $\dot{T}^\alpha$ задаются формулой*

$$T_\alpha(g_0)\, f(u) = \alpha(\varepsilon')\, f(u_{g_0}) \quad \textit{при} \quad ug_0 = \zeta_1\varepsilon' u_{g_0}. \tag{2.6.3}$$

Кроме того, поскольку $\Gamma = K \cap U$, то в силу IV п. 2.2:
II. *Функции $f \in \dot{F}_\alpha$ удовлетворяют соотношению*

$$f(\gamma u) = \alpha(\gamma)\, f(u). \tag{2.6.4}$$

Формула (2.6.3) называется *реализацией неприводимого представления группы $GL(n, \mathbf{C})$ в пространстве функций на U*. Поскольку U компактна, то эта реализация оказывается удобной в ряде случаев при теоретическом исследовании свойств представлений $\dot{T}^\alpha$. С другой стороны, для практического использования удобнее реализации на Z_+, поскольку элементы матрицы u сложно выражаются через независимые параметры.

§ 3. Разложение конечномерного представления группы $GL(n, \mathbf{C})$ на неприводимые представления

3.1. Метод Z-инвариантов. Пусть $T\colon g \to T\,(g)$ — представление группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ в конечномерном пространстве X. Вектор $x \in Z$ называется *Z-инвариантом* представления T, если

$$T(z)\,x = x \quad \text{для всех} \quad z \in Z. \tag{3.1.1}$$

Очевидно, Z-инварианты образуют подпространство в X, обозначим его Ω_T. Согласно определению в п. 2.1 (см. (2.1.2)), Z-инвариант $x \neq 0$ есть *вектор старшего веса*, *если*

$$T(\delta)\,x = \alpha(\delta)\,x \quad \text{для всех} \quad \delta \in D, \tag{3.1.2}$$

где $\alpha(\delta)$ — старший вес. Обозначим через $M(T)$ совокупность всех векторов x из Ω_T, удовлетворяющих условию (3.1.2). Очевидно, $M_\alpha(T)$ — подпространство в Ω_T; его размерность $\dim M_\alpha(T)$ называется *кратностью* старшего веса α в представлении T. Если, в частности, в X вообще нет старшего вектора веса α, то (и только в этом случае) $\dim M_\alpha(T) = 0$.

I. *Пусть T — представление группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ в конечномерном пространстве X. Если T вполне приводимо, то кратность вхождения в T неприводимого представления T_α совпадает с кратностью старшего веса α в представлении T.*

Доказательство. По условию T вполне приводимо; поэтому существует разложение

$$X = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \ldots \dotplus X_n, \tag{3.1.3}$$

в котором каждое X_j инвариантно относительно T и сужение $T_j = T|_{X_j}$ неприводимо. Пусть α_j — старший вес представления T_j, так что $T_j \sim T_{\alpha_j}$. Пусть $\alpha_j = \alpha$ при $j = 1, \ldots, k$ и $\alpha_j \neq \alpha$ при $j < k$. Тогда кратность вхождения T_α в T равна k.

Согласно теореме 1 п. 2.1 в каждом X_j, $j = 1, \ldots, k$, есть только один с точностью до числового множителя вектор x_j веса α. Очевидно, все $x_j \in M_\alpha(T)$ линейно независимы, ибо $x_j \in X_j$, а X_j, $j = 1, \ldots, k$, линейно независимы. Докажем, что x_j, $j = 1, \ldots, k$, образуют базис в $M_\alpha(T)$. Это будет означать, что также $\dim M_\alpha(T) = k$, и предложение I будет доказано.

Пусть $x' \in M_\alpha(T)$. Тогда в силу (3.1.2) и (3.1.1)

$$T(\delta)\,x' = \alpha(\delta)\,x', \quad T(z)\,x' = x'. \tag{3.1.4}$$

С другой стороны, из (3.1.3) следует, что

$$x' = \sum_{j=1}^{m} x'_j, \tag{3.1.5}$$

где $x'_j \in X_j$. Подставляя в (3.1.4), получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha(\delta)\, x'_j = \alpha(\delta)\, x' = \sum_{j=1}^{m} T(\delta)\, x'_j,$$
$$\sum_{j=1}^{m} x'_j = x' = T(z)\, x' = \sum_{j=1}^{m} T(z)\, x'_j.$$

Отсюда

$$T(\delta)\, x'_j = \alpha(\delta)\, x'_j, \quad T(z)\, x'_j = x'_j; \tag{3.1.6}$$

следовательно, если $x'_j \neq 0$, то x'_j — вектор старшего веса $\alpha(\delta)$ представления T_j в X_j. Но T_j имеет в X_j с точностью до числового множителя только один вектор старшего веса, и притом веса $\alpha_j(\delta)$. Следовательно, $x'_j = 0$ при $\alpha_j \neq \alpha$, т. е. при $j > k$, и $x'_j = c_j x_j$ при $j = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому из (3.1.5) получаем: $x' = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$; следовательно, $\dim M_\alpha(T) = k$, и предложение I доказано. Из предложения I непосредственно следует:

II. *Вполне приводимое представление T группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ неприводимо тогда и только тогда, когда в пространстве X этого представления имеется только один с точностью до числового множителя вектор старшего веса.*

Действительно, необходимость следует из теоремы 1 п. 2.1; обратно, если в X есть только один вектор старшего веса α, то $\dim M_\alpha(T) = 1$; следовательно, T содержит только T_α и притом однократно, т. е. $T \sim T_\alpha$.

III. *Набор неприводимых представлений T_α, входящих во вполне приводимое представление T группы $GL(n, \mathbf{C})$, и кратность их вхождения в T не зависят от способа разложения T на неприводимые представления.*

Действительно, вхождение T_α в T определяется условием $M_\alpha(T) \neq \neq (0)$, а кратность вхождения T_α в T совпадает с $\dim M_\alpha(T)$ (предложение I); с другой стороны, $M_\alpha(T)$ не зависит от способа разложения T на неприводимые представления.

Таким образом, предложение I дает практический метод определения набора T_α, входящих в разложение представления T, и их кратностей в T, называемый *методом Z-инвариантов*. Этот метод состоит в том, что сначала находится пространство Ω_T всех Z-инвариантов представления T, а затем в Ω_T отыскиваются все подпространства $M_\alpha(T) \neq 0$.

Значительно сложнее задача фактического разложения представления T группы G, которая, как и всегда, решается неоднозначно, если кратность вхождения в T неприводимых представлений, содержащихся в T, больше единицы. Мы только проиллюстрируем ниже решение этой задачи на отдельных примерах.

3.2. Аналитические представления группы $GL(n, \mathbf{C})$.

Л е м м а. *Пусть V — окрестность единицы группы $G = GL(n, \mathbf{C})$, определенная условиями*

$$\sum_{j,\,l=1}^{n} |g_{jl} - \delta_{jl}|^2 < \varepsilon < 1, \tag{3.2.1}$$

где

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = l, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq l; \end{cases}$$

и пусть A — совокупность всех комплексных матриц $a = (a_{jl})_{j.l=1}^{n}$. Тогда образ множества A при отображении $a \to e^a$ содержит V.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд

$$a = (g - e) - \frac{1}{2}\,(g - e)^2 + \frac{1}{3}\,(g - e)^3 - \ldots. \tag{3.2.2}$$

В силу условия (3.2.1) $|g - e| < \sqrt{\varepsilon}$; следовательно, этот ряд сходится абсолютно и по норме при $g \in V$; его сумму обозначим $\ln g$. В силу абсолютной сходимости соответствующих рядов действия с ними можно производить так же, как и действия с числовыми рядами, поэтому $e^a = e^{\ln g} = g$ при $a = \ln g$.

Отметим, что при условии (3.2.1)

$$|a| \leqslant |g - e| + \frac{1}{2}\,|g - e|^2 + \frac{1}{3}\,|g - e|^3 + \ldots \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{2/2} + \varepsilon^{3/2} + \ldots = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{\varepsilon}}. \tag{3.2.3}$$

Представление T: $g \to T(g)$ группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ в конечномерном пространстве X называется *аналитическим*, если матричные элементы представления T в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе являются регулярными аналитическими функциями матричных элементов g_{jl}. Легко видеть, что это определение согласуется с определением аналитического неприводимого представления, данного в п. 2.5.

Т е о р е м а 1. 1). *Всякое конечномерное аналитическое представление T группы $GL(n, \mathbf{C})$ вполне приводимо.*

2). *Сужение на группу $U = U(n)$ конечномерного аналитического неприводимого представления T группы $GL(n, \mathbf{C})$ неприводимо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а). Пусть T — аналитическое представление группы G в конечномерном пространстве X, а Y — конечномерное пространство, находящееся в двойственности с X относительно невырожденной билинейной формы (x, y), $x \in M$, $y \in Y$.

Пусть M — подпространство в X, инвариантное относительно всех $T(u)$, $u \in U$. Докажем, что M инвариантно также относительно всех $T(g)$, $g \in G$.

Пусть $N = M^\perp$ — ортогональное дополнение к M в Y относительно формы (x, y); тогда $M = N^\perp$ и

$$(T(u)\,x, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in M, \quad y \in N, \tag{3.2.4}$$

ибо M инвариантно относительно операторов $T(u)$, $u \in U$. Теперь заметим, что матрицу $u \in U$ можно представить в виде $u = e^{ih}$, где h — эрмитова матрица.

Выберем в качестве независимых вещественных параметров, определяющих матрицу u, числа h_{jj}, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $b_{jl} = \operatorname{Re} h_{jl}$, $c_{jl} = \operatorname{Re} h_{jl}$ при $j < l$, $1 \leqslant l = 2, \ldots, n$. Этими параметрами матрица h, а значит и u, полностью определена. Действительно,

$$\begin{aligned} h_{jl} &= b_{jl} + ic_{jl} && \text{при} \quad j < l, \\ h_{jl} &= \overline{h}_{lj} = b_{lj} - ic_{lj} && \text{при} \quad j > l. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

При комплексных значениях h_{jl}, b_{jl} и c_{jl} матрица $a = ih$, определенная формулами (3.2.5), есть произвольная матрица из A, следовательно, матрицы вида $y = e^{ih}$ заполняют всю окрестность V (см. лемму); $(T(g)\,x, y)$ есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами матричных элементов оператора $T(g)$, следовательно, по условию, она — регулярная аналитическая функция элементов g_{jl}, а значит, и комплексных параметров h_{jl}, b_{jl}, c_{jl}. Но для вещественных значений этих параметров $g = u$ и в силу (3.2.4)

$$(T(g), y) = (T(u)\,x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in M, \quad y \in N.$$

Согласно принципу единственности аналитической функции отсюда следует, что также

$$(T(g)\,x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x \in M, \quad y \in N \tag{3.2.6}$$

и для всех комплексных значений аналитической функции, а значит, по крайней мере для всех $g \in V$. Из (3.2.6) заключаем, что

$$T(g)M \subset M \quad \text{для всех} \quad g \in V.$$

Но тогда

$$T(g_1 g_2)M = T(g_1)\,T(g_2)M \subset T(g_1)M \quad \text{для всех} \quad g_1, g_2 \in V,$$

т. е.

$$T(g)M \subset M \quad \text{для всех} \quad g \in V^2.$$

Повторяя это рассуждение, заключаем, что $T(g)M \subset M$ для всех $g \in V^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, а значит, и для всех $g \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$. Но $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n = G$, ибо $G = GL(n, \mathbf{C})$ связна; следовательно, M инвариантно также относительно всех $g \in G$.

б). Пусть снова T — аналитическое представление группы G в конечномерном пространстве X. Его сужение $u \to T(u)$ есть представление компактной группы U и потому вполне приводимо. Следовательно, существует такое разложение $X = X_1 \dotplus \ldots \dotplus X_m$, что каждое X_j инвариантно относительно всех $T(u)$ и сужение $T(u)$ на X_j неприводимо. По доказанному в п. а) X_j инвариантно также относительно всех $T(g)$, $g \in G$, и сужение $T(g)$ на X_j неприводимо, ибо уже сужение $T(u)$ на X_j неприводимо. Этим доказано утверждение I).

в). Предположим теперь, что T неприводимо. Допустим, что его сужение $u \to T(u)$, $u \in U$, приводимо. Тогда в X существует подпространство $M \neq (0)$, $M \neq X$, инвариантное относительно всех $T(u)$, $u \in U$. По доказанному в а) M инвариантно также относительно всех $T(g)$, $g \in G$, что противоречит неприводимости T: $g \to T(g)$. Этим доказано утверждение 2).

Изложенное в доказательстве рассуждение является применением к рассматриваемому случаю общего приема (этот прием будет изложен ниже в гл. XI), который называется «унитарным приемом Г. Вейля».

Из теоремы 1 следует, что для аналитического представления группы $GL(n, \mathbf{C})$ справедливы все утверждения предложений I–III п. 3.1. В частности,

I. *Аналитическое представление T группы $GL(n, \mathbf{C})$ в конечномерном пространстве X неприводимо тогда и только тогда, когда в X существует только один с точностью до числового множителя вектор старшего веса представления T.*

II. *Всякое тензорное представление группы $GL(n, \mathbf{C})$ аналитично, следовательно, вполне приводимо.*

Утверждение непосредственно вытекает из формул для матричных элементов тензорного представления (см. п. 2.6 гл. I) и теоремы 1.

Из II заключаем, что для тензорных представлений группы $GL(n, \mathbf{C})$ справедливы все утверждения предложений I–III п. 3.1.

Замечание 1. Условие аналитичности является весьма существенным. Например, представление

$$g \to \begin{Vmatrix} 1 & \ln|\det g| \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

не является вполне приводимым. С другой стороны, представление

$$g \to \begin{Vmatrix} 1 & \ln\det g \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

аналитично, но неоднозначно из-за неоднозначности функции $\ln\det g$. Функция $\det g$ заполняет комплексную плоскость с выколотой точкой 0 (т. е. неодносвязное множество $\mathbf{C}_0^1$); поэтому невозможно выделить однозначную непрерывную ветвь функции $\ln\det g$.

Замечание 2. В силу соотношения $GL(n, \mathbf{C}) \sim \mathbf{C}_0^1 SL(n, \mathbf{C})$ всякое конечномерное представление T: $g \to T(g)$ группы $GL(n, \mathbf{C})$ можно представить в виде $T(g) = T_0(\tau)\, T_1(g)$ при $g = \tau g_1$, $\tau \in \mathbf{C}_0^1$, $g_1 \in SL(n, \mathbf{C})$. Как мы увидим ниже (см. § 3 гл. X и п. 7.2 гл. XI) всякое конечномерное представление группы $SL(n, \mathbf{C})$ вполне приводимо; поэтому неполная приводимость представления группы $GL(n, \mathbf{C})$ может возникнуть только из-за множителя $\mathbf{C}_0^1$.

Замечание 3. Функция $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, заданная в области V в $\mathbf{C}^n$, называется *антианалитической* в V, если для каждой точки $(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ этой области существует такая ее окрестность, в которой

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1} a_{k_1, \ldots, k_n} (\overline{\xi}_1 - \overline{\xi}_1^0)^{k_1} \ldots (\overline{\xi}_n - \overline{\xi}_n^0)^{k_n},$$

где ряд в правой части сходится абсолютно. Представление T: $g \to T(g)$ группы $GL(n, \mathbf{C})$ в конечномерном пространстве X называется *антианалитическим*, если матричные элементы оператора $T(g)$ в каком-либо (а значит, и в любом другом) базисе в X являются антианалитическими функциями на $GL(n, \mathbf{C})$ от элементов g_{jl} матрицы g. Очевидно, что это определение согласуется с определением антианалитического неприводимого представления, данного выше в п. 2.5. Очевидно также, что теорема единственности справедлива и для антианалитических функций, поэтому утверждения теоремы 1 и предложений I и II остаются справедливыми для аналитических представлений.

3.3. Произведение Юнга. Применим теперь результаты п. 3.2 к неприводимым представлениям группы $GL(n, \mathbf{C})$. Из предложений I и II п. 2.5 непосредственно следует:

I. *Произведение $\alpha_1\alpha_2$ двух индуктивных характеров α_1, α_2 группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ есть также индуктивный характер этой группы.*

Следовательно, $\alpha_1\alpha_2$ также определяет конечномерное неприводимое представление $T_{\alpha_1\alpha_2}$ группы G; оно называется *произведением Юнга* представлений T_{α_1}, T_{α_2}, и обозначается $T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}$. Оказывается, что во многих реализациях пространство представления $T_{\alpha_1\alpha_2}$ легко построить по пространствам представлений T_{α_1}, T_{α_2}. Рассмотрим, например, реализацию в пространстве Φ_α (п. 2.3); тогда:

II. $$\Phi_{\alpha_1\alpha_2} = \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}, \tag{3.3.1}$$

где $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ обозначает линейную оболочку всевозможных произведений $f_1(g)\, f_2(g)$, $f_1(g) \in \Phi_{\alpha_1}$, $f_2(g) \in \Phi_{\alpha_2}$.

Доказательство. Предположим сначала, что T_{α_1} и T_{α_2} аналитичны. Пространство $\Phi_{\alpha_1\alpha_2}$ есть линейная оболочка всех функций $\alpha_1(gg_0)\, \alpha_2(gg_0)$, $g_0 \in G$, а $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ — линейная оболочка всех функций $\alpha_1(gg_1)\, \alpha_2(gg_2)$, $g_1, g_2 \in G$; следовательно,

$$\Phi_{\alpha_1\alpha_2} \subset \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}. \tag{3.3.2}$$

Полагая $\alpha_1\alpha_2 = \alpha$, мы видим, что каждая функция $f(g) = \alpha_1(gg_1)\,\alpha_2(gg_2)$ удовлетворяет условию

$$f(kg) = \alpha_1(kgg_1)\,\alpha_2(kgg_2) = \alpha_1(k)\,\alpha_2(k)\,\alpha_1(gg_1)\,\alpha_2(gg_2) = \alpha(k)\,f(g); \quad (3.3.3)$$

следовательно, этому условию удовлетворяет также каждая функция $f(g) = \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$.

Кроме того, очевидно, что $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ инвариантно относительно правых сдвигов $g \to gg_0$ и конечномерно. Определим представление T: $g \to T(g)$ группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ в $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ по формуле

$$T(g_0)\,f(g) = f(gg_0) \quad \text{при} \quad f(g) \in \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}. \quad (3.3.4)$$

Очевидно, что T — аналитическое представление в $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$, а в силу VIII п. 2.2 в $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ есть только один вектор старшего веса; поэтому (I п. 3.2) T неприводимо. Но в силу (3.3.2) $\Phi_{\alpha_1\alpha_2}$ — подпространство в $\Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ и $\Phi_{\alpha_1\alpha_2} \neq (0)$; следовательно, $\Phi_{\alpha_1\alpha_2} = \Phi_{\alpha_1}\Phi_{\alpha_2}$ и (3.3.1) доказано для аналитических представлений; аналогично оно доказывается и для антианалитических представлений. Если же, например, T_{α_1} аналитично, а T_{α_2} антианалитично, то соотношение (3.3.1) очевидно, ибо тогда $T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}$ совпадает с тензорным произведением $T_{\alpha_1} \otimes T_{\alpha_2}$ (см. II и III п. 2.5). Очевидно также, что общий случай легко сводится к уже рассмотренным и предложение II доказано.

Упражнение. Доказать, что соотношение, аналогичное (3.3.1), имеет также место в Z-реализации и в U-реализации неприводимых представлений группы $GL(n, \mathbf{C})$.

3.4. Базисные представления и их реализация в пространствах тензоров. Неприводимое представление T_α называется *базисным*, если в его сигнатуре одно из чисел, r_i или s_i, равно единице, а все остальные числа равны 0. Базисное представление, для которого $r_i = 1$, обозначается d_i, а базисное представление, для которого $s_i = 1$, обозначается $\overline{d}_i$. Условимся еще обозначать через T_α^k произведение Юнга k одинаковых множителей T_α. При умножении характеров сигнатуры складываются, поэтому для T_α с сигнатурой $\{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, 0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 0\}$ мы получаем формулу

$$T_\alpha = d_1^{r_1} d_2^{r_2} \ldots d_{n-1}^{r_{n-1}} \overline{d}_1^{s_1} \overline{d}_2^{s_2} \ldots \overline{d}_{n-1}^{s_{n-1}}. \quad (3.4.1)$$

В общем случае надо еще приписать числовой множитель $(\det g)^{p_n} \overline{(\det g)}^{q_n}$ (см. теорему 5 п. 2.5), так что в общем случае

$$T_\alpha = (\det g)^{p_n} \overline{(\det g)}^{q_n} d_1^{r_1} d_2^{r_2} \ldots d_{n-1}^{r_{n-1}} \overline{d}_1^{s_1} \overline{d}_2^{s_2} \ldots \overline{d}_{n-1}^{s_{n-1}}. \quad (3.4.2)$$

Покажем теперь, как реализуются базисные представления в пространстве тензоров. Рассмотрим ковариантные тензоры ранга p. Каждый такой тензор можно рассматривать как полилинейную форму $f(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ от p независимых переменных $\chi_j \in \mathbf{C}^n$, $j = 1, \ldots, p$;

соответствующее тензорное представление (обозначим его T_p) задается формулой

$$T_p(g)\, f(\xi_1, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1 g, \ldots, \xi_p g), \tag{3.4.3}$$

где $\xi_j g$ — произведение строки $\xi_j = (\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jn})$ на матрицу g. Тензор f называется *симметричным*, если он не изменяется при перестановке каждых двух своих аргументов, и *антисимметричным*, если он при каждой такой перестановке меняет знак. Антисимметричные тензоры называются *поливекторами*. Обозначим через X_p пространство всех поливекторов ранга p. Очевидно, что X_p — конечномерное линейное пространство. Если задан один из коэффициентов $c_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ поливектора f, то в силу свойства антисимметричности заданы также все коэффициенты, которые получаются из $c_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ подстановкой индексов. Поэтому, чтобы задать поливектор, достаточно задать его коэффициенты $c_{j_1 \ldots j_p}$ при $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$. Отсюда заключаем: *поливекторы* $e_{j_1 j_2 \ldots j_p}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, *для которых* $c_{j_1 \ldots j_p} = 1$ *и* $c_{j'_1 \ldots j'_p} = 0$ *для* $\{j'_1, \ldots, j'_p\}$, *не получаемых из* $\{j_1, \ldots, j_p\}$ *подстановкой, образуют базис в* X_p. Очевидно,

$$e_{j_1 j_2 \ldots j_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \begin{vmatrix} \xi_{1j_1} & \ldots & \xi_{1j_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{pj_1} & \ldots & \xi_{pj_p} \end{vmatrix}. \tag{3.4.4}$$

В силу (3.4.3) каждый базисный вектор есть весовой, именно,

$$T_n(\delta)\, e_{j_1 j_2 \ldots j_p} = \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_p} e_{j_1 j_2 \ldots j_p}, \tag{3.4.5}$$

и веса $\lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_p}$ различны для различных базисных векторов. Поэтому в X_p нет других, с точностью до множителя, весовых векторов. Но из этих весовых векторов, очевидно, только

$$e_{12\ldots p} = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{p1} & \ldots & \xi_{pp} \end{vmatrix}$$

есть Z-инвариант, так что в X_p есть только один с точностью до множителя вектор старшего веса; следовательно, T_p неприводимо (II п. 3.2; II п. 3.1). Соответствующий старший вес $\alpha_p(\delta) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p = \Delta_p(g)$; это означает, что в сигнатуре представления T_p $r_p = 1$, а все остальные r_j, а также все s_j, p_n, q_n равны нулю. Таким образом, старшие веса представлений d_p и T_p совпадают; следовательно, эти представления эквивалентны. Мы доказали, что:

I. *Базисное представление d_p группы $G = GL(n, \mathbf{C})$ эквивалентно ее представлению T в пространстве X_p поливекторов ранга p, действующему по формуле*

$$T_p(g)\, f(\xi_1, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1 g, \ldots, \xi_p g), \quad f \in X_p. \tag{3.4.6}$$

Представление $\overline{d}_p$ есть произведение отображений $g \to \overline{g}$ и $\overline{g} \to d_p(\overline{g})$. Поэтому

II. *Базисное представление* $\overline{d}_p$ *группы* $G = GL(n, \mathbf{C})$ *эквивалентно ее представлению* $\overline{T}_p$ *в пространстве* X_p *поливекторов ранга* p, *действующему по формуле*

$$\overline{T}_p(g)\, f(\xi_1, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1 \overline{g}, \ldots, \xi_p \overline{g}), \quad f \in X_p. \tag{3.4.7}$$

3.5. Разложение тензорного представления группы G на неприводимые представления. Пусть T — тензорное представление группы $G = GL(n, \mathbf{C})$, т. е. T — тензорное произведение m экземпляров тождественного представления $g \to g$ группы G, где $m = 1, 2, \ldots$. Как мы отметили в II п. 3.2, представление T аналитично и вполне приводимо, т. е. разлагается в прямую сумму неприводимых аналитических представлений. Сигнатура любого неприводимого аналитического представления S имеет вид $\{r_1, \ldots, r_{n-1}, p_n, 0, \ldots, 0\}$; обозначим ее кратко через $[r_1, \ldots, r_{n-1}, p_n]$; здесь $r_1, \ldots, r_n$ — неотрицательные целые числа, p_n — целое число. Положим $m_n = p_n$, $m_k = r_k + m_{k+1}$ при $k = n-1, n-2, \ldots, 1$. Тогда набор чисел $\beta = (m_1, \ldots, m_n)$ удовлетворяет условию $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_n$. Обозначим в этом случае неприводимое аналитическое представление S группы G через $d(\beta)$. Пусть H — пространство представления T; очевидно, пространство H естественно отождествляется с тензорным произведением m экземпляров пространства $\mathbf{C}^n$. Пусть $S(m)$ — симметрическая группа степени m. Очевидно, что операторы представления T перестановочны с любым линейным оператором $\widetilde{\sigma}$ в H, определяемым на элементах вида $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ формулой $\widetilde{\sigma}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$, где σ — некоторый элемент $S(m)$, и продолженным по непрерывности на все пространство H. Продолжим представление $\sigma \to \overline{\sigma}$ до представления групповой алгебры $A = A_{S(m)}$ группы $S(m)$ в пространстве H; это представление алгебры A мы обозначим через π.

Пусть $m = m_1 + \ldots + m_h$ — разбиение числа m в сумму h натуральных слагаемых, удовлетворяющих условию $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_h$. Пусть $\alpha = (m_1, \ldots, m_h)$ и Σ_α — соответствующая диаграмма Юнга (см. п. 3.2 гл. II). Пусть ε_α — элемент групповой алгебры, отвечающий диаграмме Σ_α (см. п. 3.7 гл. II). Обозначим через $\varepsilon(\alpha)$ оператор в пространстве H, являющийся образом элемента $\varepsilon_\alpha \in A$, т. е. $\varepsilon(\alpha) = \pi(\varepsilon_\alpha)$.

Теорема. *Если сигнатура* $\alpha = (m_1, \ldots, m_h)$ *имеет более* n *ненулевых координат, то* $\varepsilon(\alpha) = 0$. *Если* $h \leqslant n$, *то подпространство* $H_\alpha = \varepsilon(\alpha)H$ *является максимальным подпространством в* H, *где представление кратно неприводимому представлению* $d(\widetilde{\alpha})$; *здесь* $\widetilde{\alpha} = (m_1, \ldots, m_h, 0, \ldots, 0)$ [1]. *Соответствующая кратность* $k(\widetilde{\alpha})$

[1] $\widetilde{\alpha}$ есть строка из n чисел, и при $h < n$ набор $(m_1, \ldots, m_h)$ дополняется нулями.

удовлетворяет условию $\mu(\widetilde{\alpha})\,k(\widetilde{\alpha}) = m!$, *где число* $\mu(\widetilde{\alpha})$ *определено в* (3.6.2) *гл.* II.

Доказательство и дополнительную информацию см. в книгах Г. Вейля [1] и Желобенко [1].

Замечание. Согласно теореме 1 п. 3.2, представление S_T группы $U(n)$, являющееся ограничением на группу $U = U(n)$ конечномерного аналитического неприводимого представления T группы $G = GL(n, \mathbf{C})$, неприводимо. Оказывается, таким образом могут быть получены все конечномерные неприводимые непрерывные представления группы U [1]. Действительно, рассмотрим множество A конечных линейных комбинаций матричных элементов ограничений тензорных представлений группы G на подгруппу U. Так как тождественное представление группы G является частным случаем тензорного представления, а ограничение тождественного представления на G разделяет элементы группы U, то множество A разделяет элементы группы U. Кроме того, тензорное произведение тензорных представлений группы G является тензорным представлением группы G, откуда легко следует, что A — алгебра функций на U. Наконец, читатель легко проверит, что ограничение базисного представления d_{n-1} на подгруппу U эквивалентно представлению $u \to \overline{u}$, где $\overline{u}$ — матрица, элементы которой комплексно сопряжены соответствующим элементам матрицы u. Отсюда следует, согласно теореме Стоуна, что алгебра A плотна в $C(U)$; тогда из теоремы п. 2.8 гл. IV заключаем, что множество неприводимых подпредставлений представлений S_T, где T пробегает множество тензорных представлений группы G, образует полное семейство неприводимых унитарных представлений группы U.

Аналогичное рассуждение показывает, что всякая компактная линейная группа имеет полную систему неприводимых непрерывных унитарных представлений, являющихся подпредставлениями тензорных степеней тождественного представления этой группы.

[1]) В дальнейшем мы получим аналогичный результат для всех комплексных полупростых групп Ли (см. IV п. 8.2 гл. XI).

Глава VII

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

§ 1. Комплексные классические группы

1.1. Определение комплексных классических групп. *Комплексными классическими группами* называются следующие четыре семейства групп:

1). Группа всех комплексных унимодулярных (т. е. с определителем, равным 1) линейных преобразований $n+1$-мерного комплексного линейного пространства X_{n+1}, $n = 1, 2, 3, \ldots$; она обозначается A_n. Очевидно, A_n изоморфна $SL(n+1, \mathbf{C})$, и мы просто отождествим [1] A_n с $SL(n+1, \mathbf{C})$; A_n называется *комплексной унимодулярной группой* $n+1$*-порядка*.

2). Группа всех комплексных унимодулярных линейных преобразований нечетномерного комплексного линейного пространства X_{2n+1}, $n = 2, 3, \ldots$, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную симметричную билинейную форму φ на X_{2n+1}; эта группа обозначается B_n, а также $SO(2n+1, \mathbf{C})$; она называется *комплексной унимодулярной ортогональной группой порядка* $2n+1$.

3). Группа всех комплексных унимодулярных линейных преобразований четномерного комплексного линейного пространства X_{2n}, $n = 3, 4, \ldots$, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную симметричную билинейную форму φ на X_{2n}; эта группа обозначается D_n, а также $SO(2n, \mathbf{C})$; она называется *комплексной унимодулярной ортогональной группой порядка* $2n$.

4). Группа всех комплексных унимодулярных линейных преобразований четномерного комплексного линейного пространства X_{2n}, $n = 2, 3, 4, \ldots$, оставляющих инвариантной некоторую кососимметричную билинейную форму φ на X_n. Эта группа обозначается C_n, а также $Sp(2n, \mathbf{C})$; она называется *комплексной симплектической группой порядка* $2n$.

---

[1] Как и выше (см. примеры п. 1.2, гл. V), мы обозначаем одной и той же буквой g матрицу $g \in GL(n, \mathbf{C})$ и линейное преобразование в X_n с матрицей g в фиксированном базисе.

Как увидим ниже (см. § 10 гл. X), эти группы и их представления играют важную роль во многих приложениях, а также при исследовании весьма широких классов групп.

В любом фиксированном базисе матрицы в группах B_n, D_n, C_n унимодулярны и потому можно считать, что

$$B_n \subset SL(2n+1, \mathbf{C}), \quad D_n \subset SL(2n, \mathbf{C}), \quad C_n \subset SL(2n, \mathbf{C}). \tag{1.1.1}$$

1.2. Выбор базиса. Положим для краткости $m = 2n$ в случае групп C_n, D_n и $m = 2n+1$ в случае группы B_n. Выберем базис в X_m так, чтобы матрицы групп B_n, C_n, D_n имели наиболее простой вид. Обозначим через s_0 матрицу формы φ в каком-либо базисе. В случае симметрической формы φ выберем базис $c_1, \ldots, c_m$ так, чтобы $\varphi(x, y) = x_1 y_m + x_2 y_{m-1} + \ldots + x_m y_1$, следовательно, чтобы матрица s_0 имела при $m = 2n$ вид

$$s_0 = \begin{Vmatrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

где s_1 — матрица n-го порядка:

$$s_1 = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \tag{1.2.1}$$

в случае же кососимметрической формы φ, чтобы

$$\varphi(x, y) = x_1 y_m + x_2 y_{m-1} + \ldots + x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n - \ldots - x_m y_q,$$

следовательно, чтобы

$$s_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.2.2}$$

(см. Бурбаки [1]); при этом в формуле (1.2.1) 1 содержится по одному разу в каждой строке и каждом столбце.

Тогда, положив $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k y_k$, имеем

$$\varphi(\xi, \eta) = (s_0 x, y). \tag{1.2.3}$$

Форма φ должна быть инвариантной относительно преобразований g рассматриваемой группы; это означает, что

$$(s_0 g x, g y) = (s_0 x, y). \tag{1.2.4}$$

Отсюда следует, что $g' s_0 g = s_0$, т. е.

$$g'^{-1} = s_0 g s_0^{-1}, \tag{1.2.5}$$

где g' — транспонированная к g матрица.

Очевидно, условие (1.2.5) эквивалентно каждому из условий:

$$g' s_0 g_0 s_0^{-1} = e, \tag{1.2.6}$$

$$g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0. \tag{1.2.7}$$

1.3. Основные подгруппы. Всюду в этой главе мы будем обозначать буквой G одну из комплексных классических групп, а через m — размерность пространства, в котором действуют преобразования группы G. Положим для краткости

$$G_m = GL(m, \mathbf{C})$$

и обозначим через H_m, Z_m^+, D_m, E_m, Z_m^-, K_m, U_m, Γ_m подгруппы H, Z^+, D, E, Z^-, K, U, Γ, построенные в § 1 гл. VI для группы G_m. Положим

$$\begin{array}{llll} H = G \cap H_m & Z^+ = G \cap Z_m^+, & D = G \cap D_m, & Z^- = G \cap Z_m^-, \\ K = G \cap K_m, & U = G \cap U_m, & E = G \cap E_m, & \Gamma = G \cap \Gamma_m. \end{array}$$

Мы покажем, что для этих подгрупп и группы G имеют место соотношения, аналогичные тем, которые мы доказали в § 1 гл. VI.

1.4. Разложение элементов группы H.

I. *Каждый элемент $h \in H$ представляется и притом единственным образом в виде*

$$h = \delta z, \quad \delta \in D, \quad z \in Z^+, \tag{1.4.1}$$

а также в виде

$$h = z\delta, \quad \delta \in D, \quad z \in Z^+. \tag{1.4.2}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $G = SL(m, \mathbf{C})$. Тогда G состоит из тех и только тех элементов $g \in G_m$, для которых $\det g = 1$. Поскольку $h \in H_m$, то в силу I, п. 1.7 гл. VI $h = \delta z$, $\delta \in D_m$, $z \in Z^+$, и это разложение единственно; нам надо только показать, что δ, $z \in G$. Но, очевидно, $\det z = 1$, следовательно, $z \in G$. Кроме того, по условию, $h \in G$. Поэтому $1 = \det h = \det \delta \det z = \det \delta$ и $\delta \in G$. Этим доказано (1.4.1); соотношение (1.4.2) доказывается аналогично.

Предположим теперь, что G — ортогональная или симплектическая группа. Тогда $G \subset SL(m, \mathbf{C})$; следовательно, в формуле (1.4.1) $h \in SL(m, \mathbf{C})$ и, как было доказано только что, δ, $z \in SL(m, \mathbf{C})$. Кроме того, $h = s_0^{-1} h'^{-1} s_0$; подставляя сюда δz вместо h, получаем

$$\delta z = s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 s_0^{-1} z'^{-1} s_0. \tag{1.4.3}$$

Но, как легко проверить, $s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0 \in D_m$, $s_0^{-1} z'^{-1} s_0 \in Z_m^+$. В силу единственности разложения $h = \delta z$, $\delta \in D_m$, $z \in Z_m^+$, отсюда заключаем, что $\delta = s_0^{-1} \delta'^{-1} s_0$, $z = s_0^{-1} z'^{-1} \delta_0$. Следовательно, $\delta \in D$, $z \in Z^+$ и (1.4.1) доказано. Соотношение (1.4.2) доказывается аналогично.

1.5. Разложение элементов группы K.

I. *Каждый элемент k группы K представляется, и притом единственным образом, в виде*

$$k = \delta\zeta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z^-, \tag{1.5.1}$$

а также в виде

$$k = \zeta\delta, \quad \delta \in D, \quad \zeta \in Z^-. \tag{1.5.2}$$

Доказательство аналогично доказательству предложения I п. 1.4.

1.6. Разложение Гаусса. Обозначим через $\Delta_p(g)$ минор матрицы g, образованный из элементов на пересечении ее первых p строк и первых p столбцов, а через G_{reg} — совокупность всех $g \in G$, для которых

$$\Delta_p(g) \neq 0, \quad p = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.6.1}$$

Очевидно,

$$G_{\mathrm{reg}} = G \cap G_{m\ \mathrm{reg}}; \tag{1.6.2}$$

матрицы $g \in G_{\mathrm{reg}}$ называются *регулярными.*

I. *Множество G_{reg} открыто в G и*

$$\overline{G}_{\mathrm{reg}} = G. \tag{1.6.3}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение; заметим прежде всего, что оно очевидно при $G = A_n$.

Пусть теперь $G = B_n$, C_n, D_n. Положим для $g \in G$

$$\Delta(g) = \Delta_1(g)\Delta_2(g)\ldots\Delta_n(g),$$
$$G_\Delta = \{g : g \in G,\ \Delta(g) = 0\}.$$

Ясно, что $G_{\mathrm{reg}} \supset G \diagdown G_\Delta$; поэтому достаточно доказать, что $\overline{G \diagdown G_\Delta} = G$. Для этого заметим, что $e \in G - G_\Delta$. С другой стороны, если $\overline{G \diagdown G_\Delta} \not\supset G$, то существует непустое открытое множество $U \subset G_\Delta$. Поскольку Δ — многочлен, то тогда $\Delta \equiv 0$ на G, т. е. $G = G_\Delta$, а это противоречит соотношению $e \in G - G_\Delta$.

II. *Каждая матрица $g \in G_{\mathrm{reg}}$ представляется, и притом единственным образом, в виде*

$$g = kz, \qquad k \in K, \quad z \in Z^+. \tag{1.6.4}$$

Доказательство. Согласно I п. 1.8 гл. VI каждая матрица $g \in G_{\mathrm{reg}}$ представляется, и притом единственным образом, в виде

$$g = kz, \qquad k \in K_m, \quad z \in Z_m^+, \tag{1.6.5}$$

и нам надо только доказать, что $k \in G$, $z \in G$. В случае $G = A_n$ это очевидно. Действительно, если $g \in A_n$, то $1 = \det g = \det k \cdot \det z = \det k$.

Пусть теперь G — симплектическая или ортогональная группа и $g \in G$; тогда в силу (1.2.7) $g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0$. Подставляя в (1.6.5), получаем

$$g = kz = s_0^{-1}k'^{-1}s_0 \cdot s_0^{-1}z'^{-1}s_0.$$

Но, как легко проверить, $s_0^{-1}k'^{-1}s_0 \in K_m$ и $s_0^{-1}z'^{-1}s_0 \in Z_m$. В силу единственности разложения (1.6.5) отсюда следует, что $k = s_0^{-1}k'^{-1}s_0$, $z = s_0^{-1}z'^{-1}s_0$, т. е. $k \in K$, $z \in Z$.

Комбинируя II п. 1.6 с I п. 1.5, заключаем:

III. *Каждая матрица $g \in G_{\mathrm{reg}}$ представляется, и притом единственным образом, в виде*

$$g = \delta\zeta z, \qquad \delta \in D, \quad \zeta \in Z^-, \quad z \in Z^+, \tag{1.6.6}$$

а также в виде

$$g = \zeta\delta z, \qquad \zeta \in Z^-, \quad \delta \in D, \quad z \in Z^+. \tag{1.6.7}$$

Каждое из разложений (1.6.4), (1.6.6), (1.6.7) называется *разложением Гаусса в G*.

Каждое из разложений Гаусса в G является также разложением Гаусса в G_m и потому элементы матриц k, z, δ, ζ в этих разложениях вычисляются по формулам (1.8.10)–(1.8.15) гл. VI.

1.7. Разложение Грама.

I. *Каждый элемент $g \in G$ можно представить в виде*

$$g = ku, \qquad k \in K, \quad u \in U. \tag{1.7.1}$$

Если $g = k_1u_1$ — другое такое разложение, то

$$k_1 = k\gamma, \quad u_1 = \gamma^{-1}u, \qquad \gamma \in \Gamma. \tag{1.7.2}$$

Доказательство. Согласно II п. 1.9 гл. VI

$$g = ku, \qquad k \in K_m, \quad u \in U_m, \tag{1.7.3}$$

и если $g = k_1u_1$ — другое такое разложение, то

$$k_1 = k\gamma, \quad u_1 = \gamma^{-1}u, \qquad \gamma \in \Gamma_m.$$

Поэтому нам надо только доказать, что можно выбрать $k, u \in G$, и тогда также $\gamma \in G$.

Прежде всего отметим, что путем надлежащего подбора γ в (1.7.2) можно k выбрать так, что

$$k_{pp} > 0 \tag{1.7.4}$$

и, очевидно, этим условием и определяется однозначно. Полагая $r = \det g$, мы видим, что тогда

$$r = \prod_p k_{pp} > 0.$$

Кроме того, $|\det u| = 1$, так что $\det u = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}^1$.

Предположим сначала, что $G = A_n$ и $g \in G$. Тогда в силу (1.7.3)

$$1 = \det g = \det k \cdot \det u = re^{i\varphi},$$

а это возможно лишь при $r = 1$, $\varphi = 0$, т. е. $\det k = 1$, $\det u = 1$, т. е. при $k, u \in A_n$.

Предположим теперь, что G — ортогональная или симплектическая группа и $g \in G$. Тогда $g = s_0^{-1} g'^{-1} s_0$ (см. (1.2.7)); подставив в (1.7.3), получаем

$$ku = s_0^{-1} k'^{-1} s_0 s_0^{-1} u'^{-1} s_0. \tag{1.7.5}$$

Будем считать, что k удовлетворяет условию (1.7.4). Тогда, как легко проверить, $s_0^{-1} k'^{-1} s_0 \in K$ и также удовлетворяет условию (1.7.4). Но это условие определяет k в (1.7.3) однозначно. Поэтому $k = s_0^{-1} k'^{-1} s_0$, а значит, $u = s_0^{-1} u'^{-1} s_0$, т. е. $k, u \in G$. Если также $g = k_1 u_1$, $k_1 \in K$, $u_1 \in U$, то выполняется (1.7.2). Но тогда $\gamma = k_1^{-1} k \in G$, следовательно, $\gamma \in \Gamma_m \cap G = \Gamma$.

II. *Каждый элемент $g \in G$ можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$g = \varepsilon \zeta u, \qquad \varepsilon \in E, \quad \zeta \in Z^-, \quad u \in U. \tag{1.7.6}$$

Доказательство. В силу I имеет место (1.7.1), причем существует матрица k и только одна, удовлетворяющая условиям (1.7.1) и (1.7.4). В силу I п. 1.5

$$k = \delta \zeta, \qquad \delta \in D, \quad \zeta \in Z^-, \tag{1.7.7}$$

где $\delta_{pp} = k_{pp} > 0$, следовательно, $\delta \in E_M$ и можно положить $\delta = \varepsilon$. Но тогда $\varepsilon \in E_M \cap D \subset E_M \cap G = E$ и предложение II доказано.

1.8. Независимые параметры в группе Z^+. а). Унимодулярная группа ($G = SL(m, \mathbf{C})$). В этом случае $Z^+ = Z_m^+$, так что независимыми параметрами будут z_{pq}, $p < q$. Следовательно, Z^+ гомеоморфна $\mathbf{C}^N$, где $N = \sum\limits_{1 \leqslant p < q < m} 1$, и потому *группа $Z^+ = Z_m^+$ связна.*

б). Ортогональная группа четного порядка ($m = 2n$, $G = D_n$). Запишем каждую матрицу $z \in Z^+$ в виде

$$z = \begin{Vmatrix} \eta & a \\ 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix}, \tag{1.8.1}$$

где η_{-1}, η, a — квадратные матрицы n-го порядка и $\eta, \eta_{-1} \in Z^+_{A_{n-1}}$.

Далее, рассмотрим матрицы вида

$$x = \begin{Vmatrix} 1_n & \xi \\ 0 & 1_n \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix}, \tag{1.8.2}$$

где ξ — квадратная матрица n-го порядка, а 1_n — единичная матрица n-го порядка.

I. *Каждая матрица $z \in Z^+$ представляется, и притом единственным образом, в виде*

$$z = xy, \tag{1.8.3}$$

где также $x, y \in Z^+$.

Доказательство. Перемножая матрицы в (1.8.2), получаем

$$xy = \left\| \begin{matrix} \eta & \xi\eta_{-1} \\ 0 & \eta_{-1} \end{matrix} \right\|. \tag{1.8.4}$$

Эта матрица совпадает с z в (1.8.1) при $\xi\eta_{-1} = a$, т. е. при $\xi = a\eta_{-1}^{-1}$. Отсюда следует существование и единственность разложения (1.8.3). Остается доказать, что $x, y \in G$.

Поскольку $z = xy \in G$, то в силу (1.2.7)

$$z = xy = s_0^{-1} x'^{-1} s_0 s_0^{-1} y'^{-1} s_0. \tag{1.8.5}$$

Но легко проверить, что $s_0^{-1} x'^{-1} x_0$ и $s_0^{-1} y'^{-1} s_0$ также являются матрицами вида x и y. Поэтому из (1.8.5) и единственности разложения (1.8.3) следует, что

$$s_0^{-1} x'^{-1} s_0 = x, \quad s_0^{-1} y'^{-1} s_0 = y, \tag{1.8.6}$$

т. е. $x, y \in G$.

Выясним теперь, при каких условиях матрицы вида x и y принадлежат G. Напомним, что

$$s_0 = \left\| \begin{matrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{1.8.7}$$

где s_1 — матрица n-го порядка

$$s_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{1.8.8}$$

Подставляя в условия (1.8.6) вместо x, y и s_0 их выражения из (1.8.2) и (1.8.7) и перемножая матрицы в левой части полученных равенств, заключаем, что условия (1.8.6) эквивалентны системе равенств:

$$\xi = -s_1^{-1} \xi' s_1, \tag{1.8.9}$$

$$\eta = s_1^{-1} \eta_{-1}'^{-1} s_1, \tag{1.8.10}$$

$$\eta_{-1} = s_1^{-1} \eta'^{-1} s_1. \tag{1.8.11}$$

Легко видеть, что условие (1.8. 11) эквивалентно условию (1.8.10).

Из условия (1.8.11) следует, что матрицы η и η_{-1} не являются независимыми. Именно, формула (1.8.11) определяет однозначно η_{-1} по заданной матрице $\eta \in Z^+_{A_{n-1}}$. Условие (1.8.9) можно записать удобнее, если положить $\widehat{\xi} = s_1\xi$. Подставляя в условие (1.8.9), мы видим, что это условие эквивалентно условию $\widehat{\xi}' = -\widehat{\xi}$, т. е. $\widehat{\xi}$ — кососимметричная матрица. Таким образом,

II. *Независимыми «параметрами» в Z^+ являются*:

а) *матрица* $\eta \in Z^+_{A_{n-1}}$;

б) *кососимметричная матрица* ξ *порядка* n.

Матрица $z \in Z^+$ *выражается через параметры по формуле*

$$z = \begin{Vmatrix} \eta_1 & s_1^{-1}\widehat{\xi}\eta \\ 0 & \eta \end{Vmatrix}, \quad \text{где} \quad \eta_1 = s_1^{-1}\eta'^{-1}s_1. \tag{1.8.12}$$

Пусть $\widehat{X}$ — совокупность всех кососимметричных матриц n-го порядка. Очевидно, формулы (1.8.12) задают взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение, т. е. гомеоморфизм, пространства $Z^+_{A_{n-1}} \times \widehat{X}$ на пространство Z^+; следовательно,

III. *Пространство* Z^+ *гомеоморфно пространству* $Z^+_{A_{n-1}} \times \widehat{X}$.

Кососимметричность матрицы $\widehat{\xi}$ означает, что

$$\widehat{\xi}_{pq} = -\widehat{\xi}_{qp}. \tag{1.8.13}$$

Отсюда видно, что $\widehat{\xi}_{pp} = 0$ и, например, $\widehat{\xi}_{pq}$, $p < q$ можно задать произвольно; тогда ξ_{pq} при $p > q$ определяется из условия (1.8.13). Поэтому $\widehat{X}$ гомеоморфно $\mathbf{C}^N$, где $N = \sum\limits_{1 \leqslant p < q < n} 1$ и, следовательно, X связно. Поскольку также $Z^+_{A_{n-1}}$ связна, то в силу III имеет место

IV. *В случае* $G = D_n$ *группа* Z^+ *связна.*

в). Симплектическая группа ($G = C_n$). В случае симплектической группы все предыдущие рассуждения повторяются почти дословно. Разница состоит лишь в том, что теперь

$$s_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

где s_1 снова задается формулой (1.8.8); поэтому теперь $\widehat{\xi}$ симметрична. Отсюда заключаем:

V. *При* $G = C_n$ *группа* Z^+ *связна.*

г). Ортогональная группа нечетного порядка ($G = B_n$, $m = 2n + 1$). В этом случае запишем матрицы $z \in Z$ в виде

$$z = \begin{Vmatrix} \eta & \lambda & a \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix},$$

где η, η_{-1}, a — те же, что и в п. б), а μ и λ — строка и столбец из n чисел. Рассуждая аналогично тому, как это сделано в п. б), заключаем, что для $z \in Z^+$ имеет место разложение

$$z = xy, \tag{1.8.14}$$

где x и y — матрицы из Z^+ вида

$$x = \begin{Vmatrix} 1_n & \eta_0 & \xi \\ 0 & 1 & \xi_0 \\ 0 & 0 & 1_n \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{-1} \end{Vmatrix}. \tag{1.8.15}$$

Далее, матрицу s_0 можно представить в виде

$$s_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{1.8.16}$$

где s_1 снова задается формулой (1.8.8). Тогда из условия $x, y \in Z^+$ после перемножения матриц получаем

$$\eta = s_1^{-1} \eta_{-1}'^{-1} s_1; \quad \eta_0 = -s_1 \xi_0', \quad s_1 \xi' + \xi s_1 + \eta_0 \eta_0' = 0. \tag{1.8.17}$$

Последнее из равенств (1.8.17) означает, что матрица $\widehat{\xi} = \xi s_1 + (1/2)\,\eta_0 \eta_0'$ кососимметрична. Следовательно,

VI. *В случае $G = B_n$ каждая матрица $z \in Z^+$ задается следующими независимыми «параметрами»: матрицей $\eta \in Z_{A_{n-1}}$, кососимметрической матрицей $\widehat{\xi}$ порядка n и строкой ξ_0 из n чисел.*

Отсюда заключаем:

VII. *При $G = B_n$ группа Z^+ связна.*

Объединяя предложения в п. 1.8 а), IV, V и VII, мы видим, что имеет место:

VIII. *Для каждой комплексной классической группы G группа Z^+ связна.*

1.9. Группа Z^-. Эта группа есть образ группы Z^+ при гомеоморфизме $g \to g'$. Отсюда из результатов п. 1.8 следует:

I. *Для каждой комплексной классической группы O группа Z^- связна.*

1.10. Независимые параметры в группе D. а). Унимодулярная группа ($G = SL(n, \mathbf{C})$). В этом случае матрица

$$\delta = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет единственному условию $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1$, так, что независимыми параметрами будут, например, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, где каждое $\lambda_j \in \mathbf{C}_0^1$, $j = 1, \dots, n-1$. При умножении двух матриц δ соответствующие параметры перемножаются, поэтому

I. *В случае* $G = SL(n, \mathbf{C})$ *группа* D *топологически изоморфна группе* $\mathbf{C}_0^{n-1}$ *и потому связна.*

б). Для остальных комплексных классических групп условие $\delta'^{-1} = s_0 \delta s_0^{-1}$ означает, что

$$\lambda_{m-\nu} = \lambda_{\nu+1}^{-1}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{1.10.1}$$

В случае ортогональной группы нечетного порядка из (1.10.1), в частности, следует, что $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}^{-1}$; следовательно, $\lambda_{n+1} = \pm 1$. Но из условия $\det \delta = 1$ и остальных условий (1.10.1) вытекает, что $\lambda_{n+1} = 1$. Таким образом, имеет место

II. *Для групп* B_n, C_n, D_n *независимыми параметрами в группе* D *являются диагональные элементы* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}_0^1$.

При умножении элементов группы D их соответствующие диагональные элементы перемножаются; поэтому

III. *Для групп* B_n, C_n, D_n *группа* D *топологически изоморфна группе* $\mathbf{C}_0^n$, *следовательно, связна.*

Объединяя предложения I и III, получаем:

IV. *Для каждой из комплексных классических групп группа* D *связна.*

1.11. Связность группы K.

I. *Для каждой комплексной классической группы* G *группа* K *связна.*

Утверждение непосредственно следует из соотношения $K = DZ^-$ (см. (1.5.1)) и связности групп G и Z^- (II п. 1, 2 гл. V).

1.12. Связность группы H.

Группа H есть образ группы K при отображении $g \to g'$; поскольку это отображение — гомеоморфизм, то:

I. *Группа* H *связна.*

1.13. Связность комплексных классических групп.

I. *Каждая комплексная классическая группа* G *связна.*

Доказательство. В силу разложения Гаусса $G_{\text{reg}} = KZ^+$, но K и Z^+ связны, поэтому G_{reg} связно (II п. 1.2 гл. V); следовательно, и $G = \overline{G}_{\text{reg}}$ связна (IV п. 1.1 гл. V).

1.14. Связность группы U.

I. *Для каждой комплексной классической группы* G *группа* U *связна.*

Доказательство. В силу разложения Крамера (1.7.6) соответствие $\varepsilon \times \zeta \times u \to \varepsilon\zeta u = g$ есть взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства $E \times Z^- \times U$ на G. Обратное отображение также непрерывно; это следует из формул для ε, ζ, u, вытекающих из процесса ортогонализации (см. вывод разложения Крамера в примере 10 п. 1.2 гл. V). Поэтому отображение $\varepsilon \times \zeta \times u \to \varepsilon\zeta u$ есть гомеоморфизм пространства $E \times Z^- \times U$ на G. Но G связна (I п. 1.13); следовательно, $E \times Z^- \times U$, а значит, и U (XII п. 1.1 гл. V) связно.

§ 2. Конечномерные непрерывные представления комплексных классических групп

2.1. Весовые векторы и веса представления. При изучении конечномерных представлений полной линейной группы (см. гл. VI) было в основном использовано разложение Гаусса для этой группы. Поскольку разложение Гаусса имеет место для каждой из комплексных классических групп G (см. II и III п. 1.6), то на эти группы переносятся все результаты об описании конечномерных неприводимых представлений группы $GL(n, \mathbf{C})$ при помощи ее индуктивных характеров. Поэтому мы приведем формулировки этих результатов без доказательства, и остановимся подробнее лишь на нахождении индуктивных характеров для групп каждого класса, поскольку только в этом вопросе проявляется специфика данной группы.

Пусть T — представление группы G в конечномерном пространстве X. Вектор $x \in X$, $x \neq 0$, называется *весовым вектором* представления T, а функция $\nu(\delta)$ — *весом* вектора x, если

$$T(\delta)\, x = \nu(\delta) \quad \text{для всех} \quad \delta \in D. \tag{2.1.1}$$

Очевидно, $\nu(\delta)$ — характер группы D. Весовой вектор x представления T называется *вектором старшего веса*, если

$$T(z)\, x = x \quad \text{для всех} \quad z \in Z^{+}, \tag{2.1.2}$$

и весовым вектором *младшего веса*, если

$$T(\zeta)\, x = x \quad \text{для всех} \quad \zeta \in Z^{-}. \tag{2.1.3}$$

Теорема 1. 1). *В пространстве X каждого конечномерного неприводимого представления T группы G существует вектор старшего веса и вектор младшего веса.*

2). *Если, кроме того, T неприводимо, то в X существует с точностью до множителя только один вектор старшего веса и с точностью до множителя только один вектор младшего веса.*

Утверждение 1) непосредственно следует из теоремы Ли (см. п. 3.1 гл. V), примененной к представлениям $T|_K$, $T|_H$, ибо K и H — подгруппы разрешимых групп K_m и H_m и потому разрешимы и, кроме того, связны (I п. 1.11; I п. 1.12).

Доказательство утверждения 2) совпадает с доказательством аналогичного утверждения в теореме I в п. 2.1 гл. VI. Вес вектора старшего веса неприводимого представления называется *старшим весом* этого представления.

Характер $\alpha(\delta)$ группы D называется *индуктивным относительно G*, если:

1) функция $\alpha(g) = \alpha(\delta\zeta z) = \alpha(\delta)$, определенная при $g = \delta\zeta z \in G_{\mathrm{reg}}$, продолжается до непрерывной функции $\alpha(g)$ на всей группе G;
2) линейная оболочка всех функций $\alpha(gg_0)$, $g \in G$, конечномерна.

Теорема 2. 1). *Характер* $\alpha(\delta)$ *группы* D *есть старший вес некоторого неприводимого представления группы* G *тогда и только тогда*, *когда* $\alpha(\delta)$ *индуктивен относительно* G.

2). *Два конечномерных неприводимых представления группы* G *эквивалентны тогда и только тогда*, *когда их старшие веса совпадают*.

3). *Конечномерное неприводимое представление* T *группы* G *со старшим весом* α *эквивалентно ее представлению* T_α, *которое строится следующим образом*:

а) *пространство* X *представления* T_α *есть линейная оболочка всех функций* $\alpha(gg_0)$, $g_0 \in G$;

б) *для* $f(g) \in X$
$$T_\alpha(g_0)\, f(g) = f(gg_0). \tag{2.1.4}$$

Представление T_α называется *канонической реализацией неприводимого представления со старшим весом* α, а функция $\alpha(g)$, построенная по индуктивному характеру $\alpha(\delta)$, — *производящей функцией* представления T_α.

Применяя теперь разложение Гаусса (см. п. 1.6) и повторяя рассуждения в п. 2.3 гл. VI, мы приходим к следующей реализации представления T_α в пространстве функций на группе Z^+:

Теорема 3. *Всякое конечномерное неприводимое представление* T *группы* G *эквивалентно представлению* T_α, *определенному следующим образом*:

1). *Пространство* X_α *представления* T_α *есть линейная оболочка функций* $\alpha(zg)$, $g \in G$, *где* $\alpha(g)$ — *порождающая функция*, *определенная старшим весом* α *представления* T.

2). *Операторы представления* T_α *задаются формулой*
$$(T_\alpha(g)\, f)(z) = \alpha(zg)\, f(z\overline{g}).$$

Наконец, используя разложение Грама, получаем следующую реализацию представления T_α в пространстве функций на группе U.

Пространство X_α *представления* T_α *есть линейная оболочка всех функций* $\alpha(ug)$, $g \in G$, *и операторы представления задаются формулой*
$$(T_\alpha(g)\, f)(u) = \alpha(\varepsilon')\, f(u_g) \quad \textit{при} \quad ug = \varepsilon' \zeta u_g,$$
$$\varepsilon' \in E, \quad \zeta \in Z^-, \quad u_g \in U.$$

Для окончательного описания представлений T_α остается определить все индуктивные характеры рассматриваемой группы G.

Матрицы δ группы D задаются своими диагональными элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и отображение $\delta \to (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ есть топологический изоморфизм группы D на $\mathbf{C}_0^n$ (I п. 1.10). Поэтому каждый характер $\alpha(\delta)$ группы D имеет вид
$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{p_1} \overline{\lambda}_1^{q_1} \lambda_2^{p_2} \overline{\lambda}_2^{q_2} \ldots \lambda_n^{p_n} \overline{\lambda}_n^{q_n}, \tag{2.1.5}$$

где $p_1 - q_1,\ p_2 - q_2,\ \ldots, p_n - q_n$ — целые числа; набор $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ называется *сигнатурой* характера α. Если $\alpha(\delta)$ индуктивен, то сигнатура характера $\alpha(\delta)$ называется также сигнатурой определяемого характером $\alpha(\delta)$ представления T_α.

Нам остается выяснить для каждой из классических групп, при каких сигнатурах характер $\alpha(\delta)$ индуктивен.

2.2. Унимодулярная группа ($G = A_n$). Повторяя рассуждение в п. 2.5 гл. VI, заключаем:

I. *Характер $\alpha(\delta)$ группы $D \in A_n$ индуктивен тогда и только тогда, когда его сигнатура $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ удовлетворяет условию*:

$$p_1 - p_2, \quad p_2 - p_3, \ \ldots, p_n, \quad q_1 - q_2, \quad q_2 - q_3, \ \ldots, q_n \tag{2.2.3}$$

— *целые неотрицательные числа.*

Согласно формулам (1.6.4), (1.8.10) гл. VI и (2.1.5) при $g = \delta\zeta z$

$$\begin{aligned}\alpha(g) = \alpha(\delta) = \\ &= \Delta_1(g)^{p_1}\overline{\Delta_1(g)}^{q_1}\left(\frac{\Delta_2(g)}{\Delta_1(g)}\right)^{p_2}\left(\frac{\overline{\Delta_2(g)}}{\overline{\Delta_1(g)}}\right)^{q_2}\ldots\Delta_n(g)^{p_n}(\Delta_n(g))^{q_n} = \\ &= \Delta_1(g)^{r_1}\overline{\Delta_1(g)}^{s_1}\Delta_2(g)^{r_2}\overline{\Delta(g))}^{s_2}\ldots(\Delta_n(g))^{r_n}(\Delta_n(g))^{s_n},\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

где обозначено

$$r_1 = p_1 - p_2, \quad s_1 = q_1 - q_2, \ \ldots, r_n = p_n, \quad s_n = q_n. \tag{2.2.5}$$

Но в силу предложения 1 $r_1, s_1, \ldots, r_n, s_n$ — целые неотрицательные числа, поэтому из (2.2.4) заключаем:

II. *Индуктивный характер $\alpha(g)$ группы A_n есть многочлен от g_{jl} степени не выше $r_1 + \ldots + r_n = p_1$, и от $\overline{g}_{jl}$ степени не выше $s_1 + \ldots + s_n = q_1$.*

Комбинируя теорему 2 п. 2.1 с предложением I, приходим к следующему результату:

Теорема 1. *Каждое конечномерное неприводимое представление группы $A_n = SL(n+1, \mathbf{C})$ определяется системой целых чисел*

$$p_1, \ \ldots, p_n, \quad q_1, \ \ldots, q_n, \tag{2.2.6}$$

удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 \geqslant 0, \quad p_2 - p_3 \geqslant 0, \ \ldots, p_n \geqslant 0, \\ q_1 - q_2 \geqslant 0, \quad q_2 - q_3 \geqslant 0, \ \ldots, q_n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Представление T_α с данной системой (2.2.6) реализуется (с точностью до эквивалентности) следующим образом. Пространство X

представления T есть линейная оболочка всех функций $\alpha(gg_1)$, $g_2 \in A_n$, где

$$\alpha(g) = \Delta_1(g)^{p_1-p_2}\overline{\Delta_1(g)}^{q_1-q_2}\Delta_2(g)^{p_2-p_3}\overline{\Delta_2(g)}^{q_2-q_3}\ldots$$
$$\ldots\Delta_n(g)^{p_n}\overline{\Delta_n(g)}^{q_n} \quad (2.2.8)$$

— производящая функция представления T_α, а операторы $T_\alpha(g)$ задаются формулой

$$T_\alpha(g_0)\,f(g) = f(gg_0). \quad (2.2.9)$$

Используя разложение Гаусса, мы получаем следующую реализацию представления T_α в пространстве функций по Z^+:

III. *Пространство X_α представления T_α есть линейная оболочка всех функций $\alpha(zg)$, $g \in G$, а операторы представления задаются формулой*

$$T_\alpha(g)\,f(z) = \Delta_1(zg)^{p_1-p_2}\overline{\Delta_1(zg)}^{q_1-q_2}\Delta_2(zg)^{p_2-p_3}\overline{\Delta_2(zg)}^{q_2-q_3}\ldots$$
$$\ldots\Delta_n(zg)^{p_n}\overline{\Delta_n(zg)}^{q_n} f(z\overline{g}), \quad (2.2.10)$$

где $z\overline{g} \in Z^+$ определяется из разложения Гаусса $zg = kz\overline{g}$. Аналогично, используя разложение Грама, мы получаем реализацию T_α в пространстве функций на группе V.

Сравнивая теорему 1 п. 2.1 с теоремой 5 п. 2.5 гл. VI, заключаем:

IV. *Каждое неприводимое представление группы $SL(n+1, \mathbf{C})$ есть сужение на эту группу некоторого неприводимого представления группы $GL(n+1, \mathbf{C})$.*

2.3. Симплектическая группа ($G = C_n$).

I. *Характер $\alpha(\delta)$ группы $D \subset C_n$ индуктивен относительно C_n тогда и только тогда, когда его сигнатура удовлетворяет условиям:*

$$\left.\begin{array}{r} p_1-p_2,\quad p_2-p_3,\ \ldots,\ p_n,\quad q_1-q_2,\quad q_2-q_3,\ \ldots,\ q_n \\ \text{— целые неотрицательные числа.} \end{array}\right\} \quad (2.3.1)$$

Доказательство. Положим $G = C_n$ и обозначим через G_0 совокупность матриц g_0 вида

$$g_0 = \left\| \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & s_1^{-1}a'^{-1}s_1 \end{matrix} \right\|, \quad (2.3.2)$$

где $a \in A_{n-1} = GL(n, \mathbf{C})$, а s_1 определено формулой (1.2.1). Положим далее $D_0 = G_0 \cap D$. Непосредственным перемножением матриц легко убедиться, что группа $G_0 \subset C_n$ и что соответствие $g_0 \to a$ есть топологический изоморфизм группы G_0 на $GL(n, \mathbf{C})$, отображающий D_0 на группу D_n для $GL(n, \mathbf{C})$. Пусть характер $\alpha(\delta)$ группы D индуктивен относительно G; согласно лемме п. 2.5 гл. VI его сужение $\alpha_0(\delta_0)$ на D_0 есть индуктивный характер относительно G_0. В силу отмеченного выше изоморфизма $\alpha_0(\delta_0)$ есть индуктивный характер группы D_n для $GL(n, \mathbf{C})$. Но это сужение имеет вид

$$\alpha_0(\delta_0) = \lambda_1^{p_1}\overline{\lambda}_1^{q_1}\lambda_2^{p_2}\overline{\lambda}_2^{q_2}\dots\lambda_n^{p_n}\overline{\lambda}_n^{q_n}$$

при

$$\delta = \left\| \begin{matrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & s_1^{-1}\delta_0'^{-1}s_1 \end{matrix} \right\|, \quad \delta = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & \lambda_n^{-1} & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_1^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда согласно I п. 2.5 гл. VI заключаем, что

$$p_1 - p_2, \quad p_2 - p_3, \ \dots, p_{n-1} - p_n, \quad q_1 - q_2, \quad q_2 - q_3, \ \dots, q_{n-1} - q_n$$

— целые неотрицательные числа.

Обозначим теперь через G_0 совокупность всех матриц

$$g_1 = \left\| \begin{matrix} 1_{n-1} & & \\ & a & \\ & & 1_{n-1} \end{matrix} \right\|,$$

где $a \in SL(2, \mathbf{C})$ и на не указанных местах стоят нули; далее, запишем s_0 в виде

$$s_0 = \left\| \begin{matrix} & & -s \\ & \sigma & \\ s & & \end{matrix} \right\|, \tag{2.3.3}$$

где

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad s = \left\| \begin{matrix} 0 & -1_{n-1} \\ 1_{n-1} & 0 \end{matrix} \right\| \tag{2.3.4}$$

и на не занятых местах в (2.3.3) стоят нули. Положим $D_0 = D \cap G_0$. Непосредственно перемножая матрицы, убеждаемся, что:

1) $g_1'^{-1} = s_0 g_1 s_0^{-1}$, т. е. $g_1 \in C_n$;
2) G_0 — подгруппа группы C_n;
3) отображение $g_1 \to a$ есть топологический изоморфизм группы G_0 на $SL(2, \mathbf{C})$, переводящий D_0 в группу D для $SL(2, \mathbf{C})$.

Согласно лемме п. 2.5 гл. VI сужение $\alpha_0(\delta_0)$ индуктивного характера $\alpha(\delta)$ группы D относительно G есть индуктивный характер относительно $SL(2, \mathbf{C})$. Но это сужение имеет вид

$$\alpha_0(\delta_0) = \lambda_n^{p_n}\overline{\lambda}_n^{-q_n};$$

отсюда в силу I п. 2.2 заключаем, что p_n, q_n — также целые неотрицательные числа. Окончательно получаем, что

$$p_1 - p_2, \quad p_2 - p_3, \ \ldots, p_n, \quad q_1 - q_2, \ \ldots q_2 - q_3, \ \ldots, q_n$$

— целые неотрицательные числа. Этим доказана необходимость условия (2.3.1), Обратно, если (2.3.1) выполнено, то

$$\alpha(g) = \Delta_1(g)^{p_1-p_2}\overline{\Delta_1(g)}^{q_1-q_2}\Delta_2(g)^{p_2-p_3}\overline{\Delta_2(g)}^{q_2-q_3}\ldots\Delta_n(g)^{p_n}\overline{\Delta_n(g)}^{q_n}$$

есть многочлен степени не выше p_1 относительно g_{jl} и степени не выше q_1 относительно $\overline{g}_{jl}$. Отсюда следует индуктивность характера $\alpha(\delta)$ относительно C_n. Из предложения I и теоремы 2 п. 2.1 заключаем, что имеет место

Теорема 2. *Каждое конечномерное неприводимое представление группы $C_n = Sp(2n, \mathbf{C})$ определяется системой целых чисел*

$$p_1, p_2, \ \ldots, p_n, \quad q_1, q_2, \ \ldots, q_n, \tag{2.3.5}$$

удовлетворяющих условиям

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 0, \quad q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0.$$

Представление T_α с данной системой (2.3.5) реализуется, с точностью до эквивалентности, следующим образом: пространство X представления есть линейная оболочка функций $\alpha(gg_1)$, $g_1 \in C_n$, где

$$\alpha(g) = \Delta_1(g)^{p_1-p_2}\overline{\Delta_1(g)}^{q_1-q_2}\Delta_2(g)^{p_2-p_3}\overline{\Delta_2(g)}^{q_2-q_3}\ldots \\ \ldots\Delta_n(g)^{p_n}\overline{\Delta_n(g)}^{q_n} \tag{2.3.6}$$

— производящая функций представления, а операторы $T_\alpha(g)$ представления задаются формулой

$$T_\alpha(g_0)\, f(g) = f(gg_0). \tag{2.3.7}$$

Применяя разложение Гаусса, мы получаем следующую реализацию представления T_α в пространстве функций на Z^+.

II. *Пространство X представления есть линейная оболочка всех функций $\alpha(zg)$, $g \in C_n$, а операторы представления задаются формулой*

$$T_\alpha(g)\, f(z) = \alpha(zg)\, f(z\overline{g}), \tag{2.3.8}$$

где $z\overline{g} \in Z^+$ определяется из разложения Гаусса $zg = kz\overline{g}$.

Аналогично, используя разложение Грама, мы получаем реализацию представления T_α в пространстве функций на группе U.

2.4. Ортогональная группа. а). $G = D_n$, т. е. $G = SO(2n, \mathbf{C})$. Рассуждая, как в предыдущем параграфе, получаем:

I. *Характер $\alpha(\delta)$ группы $D \subset D_n$ индуктивен относительно D_n тогда и только тогда, когда все числа $p_1 - p_2, \ \ldots, p_{n-1} - |p_n|$, $q_1 - q_2, \ \ldots, q_{n-2} - q_{n-1}, q_{n-1} - |q_n|$ являются неотрицательным целыми.*

Из предложения I и теоремы 2 п. 2.1 заключаем, что имеет место

Теорема 3. *Каждое конечномерное неприводимое представление группы $G = SO(2n, \mathbf{C})$ определяется системой целых чисел $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, удовлетворяющих условиям $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant p_{n-1} \geqslant |p_n|$, $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_{n-1} \geqslant |q_n|$.*

Применяя разложение Гаусса, мы можем описать соответствующее представление аналогично предложению II п. 2.3.

б). $G = B_n$, т. е. $G = SO(2n+1, \mathbf{C})$. Рассуждая, как в предыдущем примере, или применяя а) и используя операцию ограничения на подгруппу, получаем:

II. *Характер $\alpha(\delta)$ группы $D \subset B_n$ индуктивен относительно B_n тогда и только тогда, когда его сигнатура удовлетворяет условию: все числа $p_1 - p_2, \ldots, p_{n-1} - p_n$, $q_1 - q_2, \ldots, q_{n-1} - q_n$, q_n являются целыми неотрицательными.*

Из предложения II и теоремы 2 п. 2.1 следует

Теорема 4. *Каждое конечномерное неприводимое представление группы $G = SO(2n+1, \mathbf{C})$ определяется системой целых чисел $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, удовлетворяющих условиям $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant p_n \geqslant 0$, $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0$.*

Подробности см. в книге Желобенко [1].

Пусть G — группа $SO(n, \mathbf{C})$. Существует такая группа $\widetilde{G}$, что G изоморфна фактор-группе группы $\widetilde{G}$ по двухэлементному нормальному делителю N группы $\widetilde{G}$. Группа $\widetilde{G}$ называется *спинорной группой*, а неприводимые представления группы $\widetilde{G}$, нетривиальные на N, называются *двузначными представлениями* группы G. См. Желобенко [1], Шевалле [1].

Глава VIII

НАКРЫВАЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА И ОДНОСВЯЗНЫЕ ГРУППЫ

§ 1. Накрывающие пространства

Отделимое топологическое пространство X называется *локально связным*, если для любой точки $x \in X$ любая окрестность точки x содержит некоторую связную окрестность точки x.

I. *Пусть X — локально связное пространство, U — открытое множество в X. Объединение всех связных подмножеств множества U, содержащих точку x, является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть $K(x)$ — объединение всех связных подмножеств множества U, содержащих точку $x \in X$. Если $y \in K(x)$ и $V \subset U$ — некоторая связная окрестность точки y, то объединение $K(x) \cup V$ связно и содержит элемент x, поэтому $V \subset K(x)$. Следовательно, любая точка $y \in K(x)$ является внутренней точкой в $K(x)$.

Напомним (см. § 1 гл. V), что объединение всех связных подмножеств данного множества M, содержащих некоторую точку x множества M, называется (*связной*) *компонентой* точки x в M, или просто *компонентой* множества M. Предложение I означает, что в локально связном пространстве каждая компонента открытого множества является открытым множеством.

Пусть X, Y — топологические пространства, f — непрерывное отображение Y на X. Говорят, что Y является *накрывающим пространством* для X (относительно отображения f), если Y связно и локально связно и любая точка $x \in X$ имеет окрестность $U \subset X$ такую, что каждая компонента открытого множества $f^{-1}(U)$ гомеоморфно отображается под действием f на все множество U. Заметим, что окрестность U необходимо связна.

Очевидно, что если X имеет накрывающее пространство, то X связно и локально связно. Обратно, если X связно и локально связно, то X является накрывающим пространством для X относительно тождественного отображения. Это накрывающее пространство называется *тривиальным*.

II. *Если Y — накрывающее пространство для X относительно отображения f, G — открытое множество в Y, то $f(G)$ открыто в X.*

Доказательство. Пусть $y \in G$, $x = f(y)$. Пусть $U \subset X$ — окрестность точки x, такая, что каждая компонента множества $f^{-1}(U)$ гомеоморфно отображается на U под действием f. Пусть V — компонента точки y в $f^{-1}(U)$. Множество $V \cap G$ открыто, в частности, $V \cap G$ открыто в V. Так как f гомеоморфно отображает V на U, то множество $f(V \cap G)$ открыто в U; но $f(V \cap G)$ содержит точку x и поэтому является окрестностью точки x. С другой стороны, $f(V \cap G) \subset f(G)$, поэтому $f(G)$ содержит окрестность любой своей точки x.

III. *Пусть Y локально связно, f — непрерывное отображение пространства Y в некоторое пространство X. Пусть $y \in Y$, U — окрестность точки $x = f(y)$ в X. Компонента V точки y в $f^{-1}(U)$ есть окрестность точки y.*

Доказательство. Множество $f^{-1}(U)$ открыто, поэтому V открыто вследствие I.

IV. *Если Y — накрывающее пространство для X относительно отображения f, то f — локальный гомеоморфизм, т.е. каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность, гомеоморфно отображаемую в X под действием f.*

Доказательство сразу следует из III и определения накрывающего пространства.

V. *Пусть f — непрерывное отображение пространства Y в X, G — такое подмножество X, что каждая компонента множества $f^{-1}(G)$ гомеоморфно отображается на G под действием f. Тогда для любого связного подмножества $F \subset G$ каждая компонента множества $f^{-1}(F)$ гомеоморфно отображается на F под действием f, причем компоненты $f^{-1}(F)$ суть пересечения компонент множества $f^{-1}(G)$ с множеством $f^{-1}(F)$.*

Доказательство. Пусть $\{H_\alpha\}$ — семейство компонент множества $f^{-1}(G)$; положим $\Phi_\alpha = H_\alpha \cap f^{-1}(F)$. Так как $\Phi_\alpha \subset H_\alpha$ и f гомеоморфно отображает H_α на G, то f гомеоморфно отображает Φ_α на F. Следовательно, Φ_α — связные множества. С другой стороны, каждое связное подмножество множества $f^{-1}(F)$ содержится в некоторой компоненте H_α множества $f^{-1}(G)$. Следовательно, Φ_α суть компоненты множества $f^{-1}(F)$, что завершает доказательство предложения V.

VI. *Пусть φ — непрерывное отображение локально связного пространства Z в связное пространство X. Пусть для любой точки $x \in X$ существует такая окрестность U, что любая компонента множества $\varphi^{-1}(U)$ гомеоморфно отображается на U под действием φ. Пусть Y — какая-нибудь компонента пространства Z, f — отображение Y в X, определяемое ограничением отображения φ на Y. Тогда Y открыто в Z и Y является накрывающим пространством для X относительно отображения f.*

Доказательство. Покажем сначала, что $f(Y) = X$. Пусть $x \in X$ и U — окрестность этой точки, такая, что отображение φ гомеоморфно отображает компоненты V_α множества $\varphi^{-1}(U)$ на U. Если некоторая компонента V_α множества $\varphi^{-1}(U)$ пересекает Y, то $V_\alpha \subset Y$, поскольку Y — компонента в пространстве Z. Следовательно, $Y \cap \varphi^{-1}(U)$ есть объединение компонент V_α множества $\varphi^{-1}(U)$ по таким индексам α, для которых $V_\alpha \cap Y$ непусто. Поэтому если U пересекает $f(Y)$, то $Y \cap \varphi^{-1}(U)$ есть непустое объединение некоторых компонент V_α. С другой стороны, $\varphi(V_\alpha) = U$, поэтому $U \subset f(Y)$. В частности, если $s \in \overline{f(Y)}$, то любая окрестность точки x пересекает $f(Y)$, откуда следует, что $U \cap f(Y) \neq \varnothing$; поэтому $U \subset f(Y)$ и любая точка $x \in \overline{f(Y)}$ есть внутренняя точка множества $f(Y)$. Следовательно, $f(Y)$ открыто и замкнуто в X; но X связно, поэтому $f(Y) = X$.

Множества V_α суть максимальные связные подмножества множества $\varphi^{-1}(U)$, причем $f^{-1}(U) = Y \cap \varphi^{-1}(U)$ есть объединение некоторых V_α, поэтому компонентами множества $f^{-1}(U)$ являются эти множества V_α. Отсюда следует, что Y — накрывающее пространство для X относительно f. Множество Y открыто в Z вследствие I.

VII. *Пусть Y — накрывающее пространство для X относительно отображения f. Пусть Z — связное локально связное подпространство в X. Каждая компонента W множества $f^{-1}(Z)$ относительно открыта в $f^{-1}(Z)$ и W есть накрывающее пространство для Z относительно ограничения отображения f на W.*

Доказательство. Пусть $x \in Z$ и пусть U — такая окрестность точки x в X, что любая компонента множества $f^{-1}(U)$ гомеоморфно отображается на U под действием f. Так как пространство Z локально связно, то существует связная окрестность V точки x в Z, содержащаяся в U. Пусть W_α — компоненты множества $f^{-1}(V)$. Согласно V каждое множество W_α есть пересечение $f^{-1}(V)$ с некоторой компонентой H_α множества $f^{-1}(U)$. Если y_α — такая точка из W_α, что $f(y_\alpha) = x$, то W_α — окрестность точки y_α относительно $f^{-1}(Z)$, поэтому $f^{-1}(Z)$ локально связно и любая точка $x \in Z$ имеет окрестность V такую, что любая компонента множества $f^{-1}(V)$ гомеоморфно отображается на V под действием ограничения отображения f на $f^{-1}(Z)$. Тогда VII сразу следует из VI.

Пример. Пусть X — единичная окружность Γ_1, т. е. $\widetilde{X} = \{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbf{R}\}$. Пусть $Y = \mathbf{R}$ — числовая прямая. Тогда Y связно (см. пример 1 § 1 гл. V) и локально связно (так как любая окрестность точки $y \in Y$ содержит связный интервал $(y-\delta, y+\delta)$ для некоторого $\delta > 0$). Пусть f — отображение Y в X, определяемое формулой $f(y) = e^{i\varphi}$, $y \in Y = \mathbf{R}$. Тогда f — отображение Y на X, и любая точка $x = e^{i\varphi} \in X$ имеет окрестность $U = \{e^{iy}, e^{iy} \neq -e^{i\varphi}\}$, полный прообраз которой $f^{-1}(U) = \{(\varphi + (2k-1)\,\pi, \varphi + (2k+1)\,\pi),\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$ есть объединение счетного числа компонент $Y_k = (\varphi + (2k-1)\,\pi, \varphi + (2k+1)\,\pi)$, $k \in Z$, каждая из которых гомеоморфно отображается на U под действием f. Действительно, отображение f непрерывно, и обратное к $f|_{Y_k}$ непрерывное отображение ψ_k: $U \to Y_k$ определяется формулой $\psi_k(e^{iy}) = \varphi + 2k\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{e^{iy}e^{-i\varphi} - e^{-iy}e^{i\varphi}}{i(2 + e^{iy}e^{-i\varphi} + e^{-iy}e^{i\varphi})}$, $e^{iy} \neq -e^{i\varphi}$. Таким образом, $\mathbf{R}$ является накрывающим пространством для Γ^1 относительно отображения $y \to e^{iy}$, $y \in \mathbf{R}$.

§ 2. Односвязные пространства и принцип монодромии

2.1. Односвязные пространства. Пусть X — топологическое пространство, Y и Z — накрывающие пространства для X относительно отображений f и g соответственно. Накрывающие пространства Y и Z называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм φ пространства Y на Z, такой, что $f = g \circ \varphi$. Пространство X называется *односвязным*, если X — такое связное и локально связное пространство, что любое его накрывающее пространство изоморфно тривиальному накрывающему пространству. Таким образом, если X односвязно и Y — накрывающее пространство для X относительно отображения f, то f есть гомеоморфизм Y на X. Очевидно, что пространство, гомеоморфное односвязному пространству, односвязно.

Пространство Γ^1 является примером неодносвязного пространства. Действительно, пример § 1 показывает, что существует накрывающее пространство для пространства Γ^1, а именно, пространство $\mathbf{R}$, не гомеоморфное Γ^1. В дальнейшем мы приведем примеры односвязных пространств (см. § 4), в частности, мы покажем, что пространство $\mathbf{R}$ односвязно.

Изучим некоторые общие свойства односвязных пространств.

I. *Пусть Y — накрывающее пространство для X относительно отображения f. Если G — открытое подмножество в Y и отображение f взаимно однозначно отображает множество G на X, то отображение f есть гомеоморфизм Y и X, т.е. Y изоморфно тривиальному накрывающему пространству.*

Доказательство. Отображение f непрерывно по условию. Из предложения II § 1 следует, что f переводит открытые множества в открытые. Следовательно, f гомеоморфно отображает множество G на X. Докажем, что $G = Y$. Так как Y связно, то достаточно доказать, что G замкнуто в Y.

Пусть $y \in \overline{G}$, и пусть U — такая связная окрестность точки $x = f(y)$, что каждая компонента множества $f^{-1}(U)$ гомеоморфно отображается на U под действием f. Пусть V — компонента множества $f^{-1}(U)$, содержащая точку y. Под действием отображения f и множество V, и множество $V_1 = G \cap f^{-1}(U)$ гомеоморфно отображаются на U. С другой стороны, V есть окрестность точки y согласно I § 1, поэтому V пересекается с G. Следовательно, V пересекается с V_1. Так как V_1 гомеоморфно U, то V_1 связно, следовательно, $V_1 \subset V$.

Так как ограничение f на V взаимно однозначно и $f(V_1) = f(V) = U$, то $V_1 = V$. Следовательно, $y \in G$, что завершает доказательство предложения I.

II. *Если X_1 и X_2 — односвязные пространства, то их произведение $X_1 \times X_2$ также односвязно.*

Доказательство. Очевидно, что пространство $X_1 \times X_2$ связно и локально связно. Пусть X — накрывающее пространство для $X_1 \times X_2$ относительно отображения f. Для любого $x_2 \in X_2$ любая компонента множества $f^{-1}(X_1 \times \{x_2\})$ является накрывающим пространством для X_1 (относительно ограничения отображения f на эту компоненту) согласно VII § 1. Так как пространство X_1 односвязно, то любая компонента множества $f^{-1}(X_1 \times \{x_2\})$ гомеоморфно отображается на X_1 под действием f. Пусть $Z_2^0(x_1^0)$ — некоторая фиксированная компонента множества $f^{-1}(\{x_1^0\} \times X_2)$, где $x_1^0 \in X_1$. Пусть G — объединение пересекающихся с множеством $Z_2^0(x_1^0)$ компонент $Z_1(x_2)$ множеств вида $f^{-1}(X_1 \times \{x_2\})$, где $x_2 \in X_2$. Очевидно, что под действием f множество G взаимно однозначно отображается на $X_1 \times X_2$. Покажем, что множество G открыто, тогда II будет следовать из I.

Пусть M — совокупность внутренних точек множества G, принадлежащих данному подмножеству $Z_1(x_2) \subset G$. Множество M относительно открыто в $Z_1(x_2)$. Покажем, что M замкнуто и непусто.

Пусть $z \in Z_1(x_2)$ и пусть $f(z) = (x_1, x_2)$. Пусть U_1, U_2 — такие связные окрестности точек x_1 и x_2 в X_1 и X_2, что любая компонента множества $f^{-1}(U_1 \times U_2)$ гомеоморфно отображается на $U_1 \times U_2$ под действием f. Пусть V — компонента точки z в $f^{-1}(U_1 \times U_2)$. Пусть $(y_1, y_2) \in U_1 \times U_2$; положим $V_1(y_2) = V \cap f^{-1}(U_1 \times \{y_2\})$, $V_2(y_1) = V \cap f^{-1}(\{y_1\} \times U_2)$. Тогда f гомеоморфно отображает $V_1(y_2)$ на $U_2 \times \{y_2\}$ и $V_2(y_1)$ на $\{y_1\} \times U_2$. Следовательно, $V_1(y_2)$ содержится в некоторой компоненте $Z_1(y_2)$, а $V_2(y_1)$ содержится в некоторой компоненте $Z_2(y_1)$. Эти компоненты имеют по крайней мере одну общую точку w из V, такую, что $f(w) = (y_1, y_2)$. Если в качестве z выбрать точку, в которой $Z_1(x_2)$ пересекается с $Z_2^0(x_1^0)$, то $Z_2(x_1)$ совпадает с $Z_2^0(x_1^0)$ и $Z_1(y_2) \subset G$ для всех $y_2 \in U_2$. Из соотношения $V = \bigcup\limits_{y_2 \in U_2} V_1(y_2)$ следует тогда, что $V \subset G$, следовательно, $z \in M$. Таким образом, M непусто.

Если $z \in \overline{M}$, то $V_1(x_2)$ имеет с M некоторую общую точку w^*. Пусть $f(w^*) = (x_1^*, x_2)$. Пусть U_2^* — такая окрестность точки x_2 в X_2, что $U_2^* \subset U_2$ и $V \cap f^{-1}(\{x_1^*\} \times U_2^*)$ содержится в G. При $x_2^* = U_2^*$ некоторая компонента $Z_1(x_2^*)$ имеет непустое пересечение с G, поэтому $Z_1(x_2^*) \subset G$. Кроме того, множество $V \cap f^{-1}(U_1 \times U_2^*)$ есть объединение множеств $Z_1(x_2^*)$ по всем $x_2^* \in U_2^*$. Следовательно, $V \cap f^{-1}(U_1 \times U_2^*) \subset G$. Но множество $V \cap f^{-1}(U_1 \times U_2^*)$ открыто и поэтому является окрестностью точки z. Итак, $z \in M$ и M замкнуто.

Так как $M \subset Z_1(x_2)$ непусто, замкнуто и открыто в $Z_1(x_2)$ и $Z_1(x_2)$ гомеоморфно связному пространству X_1, то $M = Z_1(x_2)$. Следовательно, все точки множества G — внутренние, что завершает доказательство утверждения II.

2.2. Принцип монодромии. Следующая теорема посвящена основному свойству односвязных пространств, называемому *принципом монодромии*.

Теорема 1. *Пусть X — односвязное пространство. Пусть каждому $x \in X$ сопоставлено некоторое непустое множество M_x и для каждой точки (x, y) некоторого подмножества $D \subset X \times X$ определено отображение φ_{xy} множества M_x на множество M_y, так что выполняются следующие условия*:

1) *D — связное открытое подмножество в $X \times X$, содержащее диагональ (т.е. содержащее все точки вида (x, x), $x \in Y$)*;
2) *отображение φ_{xy} взаимно однозначно для всех $(x, y) \in D$; φ_{xx} есть тождественное отображение для всех $x \in X$*;
3) *если (x, y), (y, z), $(x, z) \in D$, то $\varphi_{xz} = \varphi_{yz} \circ \varphi_{xy}$.*

Тогда существует отображение ψ, сопоставляющее каждому $x \in X$ элемент $\psi(x)$ множества M_x так, что $\psi(y) = \varphi_{xy}(\psi(x))$ для всех $(x, y) \in D$. Кроме того, отображение ψ можно выбрать так, чтобы в данной точке $x_0 \in X$ имело место равенство $\psi(x_0) = w^0_{x_0}$, где $w^0_{x_0}$ — фиксированный элемент множества M_{x_0}; этим дополнительным условием отображение ψ определяется однозначно.

Доказательство. Пусть $Y = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\} \times M_x$. Пусть O — семейство таких подмножеств $G \subset Y$, что для любой точки $(x, w_x) \in G$ существует такая окрестность U точки x в пространстве X, что $U \times U \subset D$ и $(y, \varphi_{xy}(w_x)) \in G$ для всех $y \in U$. Очевидно, что Y и $\varnothing$ принадлежат семейству O. Читатель легко проверит, что объединение любого семейства множеств из O и пересечение конечного числа множеств из O также принадлежат O. Семейство O, рассматриваемое как семейство открытых множеств, превращает Y в топологическое пространство.

Определим отображение π пространства Y на X, полагая $\pi(x, w_x) = x$. Из определения семейства O непосредственно следует, что $\pi^{-1}(Y) \in O$ для любого открытого множества $U \subset X$, т.е. π — непрерывное отображение Y на X, и для любого $G \in O$ множество $\pi(G)$ открыто в X.

Пусть U — такое открытое множество в X, что $U \times U \subset D$. Пусть $x \in U$ и $w_x \in M_x$. Обозначим через $G(x, U, w_x)$ множество, образованное элементами вида $(y, \varphi_{xy}(w_x))$ для всех $y \in U$. Докажем, что $G(x, U, w_x) \in O$. Действительно, пусть $(y, \varphi_{xy}(w_x))$ — некоторый элемент множества $G(x, U, w_x)$; тогда из соотношения $U \times U \subset D$ следует, что для любого $z \in U$ отображения φ_{xy}, φ_{yz} и φ_{xz} определены, и из условия 3) вытекает, что $(z, \varphi_{yz}(\varphi_{xy}(w_x))) = (z, \varphi_{xz}(w_x)) \in G(x, U, w_x)$. Следовательно, $G(x, U, w_x) \in O$.

Пусть (x, w_x) и (y, w_y) — различные точки из Y. Если $x \neq y$, то в X существуют непересекающиеся окрестности U, V точек x и y соответственно. Тогда $(x, w_x) \in \pi^{-1}(U)$, $(y, w_y) \in \pi^{-1}(V)$, где $\pi^{-1}(U)$, $\pi^{-1}(V)$ принадлежат семейству O и не пересекаются. Если же $x = y$, то $w_x \neq w_y$. Пусть U — окрестность точки x в X такая, что $U \times U \subset D$; тогда множества $G(x, U, w_x)$ и $G(x, U, w_y)$ принадлежат семейству O и не пересекаются, так как отображения φ_{xy} взаимно однозначны. Следовательно, топологическое пространство Y отделимо.

Для любой точки $x \in X$ существует связная окрестность U в X такая, что $U \times U \subset D$. Так как каждое из отображений φ_{xy}, $x, y \in U$, отображает множество M_x на M_y взаимно однозначно, то множество $\pi^{-1}(U)$ можно представить в виде объединения множеств вида $G(x, U, w_x)$ по всем $w_x \in M_x$. Все множества $G(x, U, w_x)$, $w_x \in M_x$, открыты в Y и взаимно однозначно отображаются на U под действием π. Так как π непрерывно и переводит открытые множества в открытые, то π гомеоморфно отображает каждое из множеств $G(x, U, w_x)$, $w_x \in M_x$, на U. Но множество U связно, поэтому попарно непересекающиеся множества $G(x, U, w_x)$ суть компоненты множества $\pi^{-1}(U)$. Итак, каждая точка $x \in X$ имеет окрестность U такую, что каждая компонента множества $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфно отображается на U под действием π. Так как U связно, то $G(x, U, w_x)$ — связные открытые множества в Y. Следовательно, Y — локально связное пространство.

Пусть Y_0 — компонента точки $(x_0, w^0_{x_0})$ в пространстве Y и пусть ω — ограничение отображения π на Y_0. Из предложения VI § 1 следует, что Y_0 есть накрывающее пространство для пространства X относительно отображения ω. Так как X односвязно, то ω есть гомеоморфизм пространства Y_0 на X. Определим отображение ψ формулой

$$\omega^{-1}(x) = (x, \psi(x)). \tag{2.2.1}$$

Обозначим через D^* совокупность всех точек $(x, y) \in D$, удовлетворяющих условию $\psi(y) = \varphi_{xy}(\psi(x))$. Пусть (x_1, y_1) — некоторая точка множества D. Пусть U_1, V_1 — такие связные окрестности точек x_1 и y_1 в пространстве X, что $U_1 \times U_1 \subset D$, $V_1 \times V_1 \subset D$ и $U_1 \times V_1 \subset D$. Пусть $U_1 \times V_1$ пересекается с D^* и пусть $(x_2, y_2) \in D^* \cap (U_1 \times V_1)$. Тогда

$$\psi(y_2) = \varphi_{x_1 y_1}(\psi(x_2)) \tag{2.2.2}$$

ввиду условия $(x_2, y_2) \in D^*$. Множество $G(x_1, U_1, \psi(x_1))$ связно и содержит точку $(x_1, \psi(x_1)) \in Y_0$; но Y_0 есть компонента в Y, поэтому $G(x_1, U_1, \psi(x_1)) \subset Y_0$. Следовательно, по определению $G(x_1, U_1, \psi(x_1))$, для точки $x_2 \in U_1$ имеем

$$\psi(x_2) = \varphi_{x_1 x_2}(\psi(x_1)). \tag{2.2.3}$$

Аналогично получаем

$$\psi(y_2) = \varphi_{y_1 y_2}(\psi(y_1)). \tag{2.2.4}$$

С другой стороны, все отображения $\varphi_{x_1x_2}, \varphi_{x_2y_1}, \varphi_{x_1y_2}, \varphi_{x_2y_2}, \varphi_{y_1y_2}$ определены, поэтому из условия 3) теоремы 1 и равенств (2.2.2) и (2.2.3) следует, что

$$\psi(y_1) = \varphi_{x_2y_2}(\psi(x_2)) = \varphi_{x_2y_2}(\varphi_{x_1x_2}(\psi(x_1))) = \\ = \varphi_{x_1y_2}(\psi(x_1)) = \varphi_{y_1y_2}(\varphi_{x_1y_1}(\psi(x_1))). \quad (2.2.5)$$

Но, по условию, $\varphi_{x_1y_1}$ есть взаимно однозначное отображение M_{x_1} на M_{y_1}, поэтому из сравнения правых частей формул (2.2.4) и (2.2.5) следует, что

$$\varphi_{x_1y_1}(\psi(x_1)) = \psi(y_1), \quad (2.2.6)$$

т. е. $(x_1, y_1) \in D^*$. Итак, если $(x_1, y_1) \in \overline{D^*}$, то $(x_1, y_1) \in D^*$, т. е. D^* относительно замкнуто в D. Обратно, если $(x_1, y_1) \in D^*$, то имеет место равенство (2.2.6), и из соотношений (2.2.3), (2.2.4), (2.2.6) и условия 3) доказываемой теоремы получаем, что

$$\psi(y_2) = \varphi_{y_1y_2}(\psi_1(y_1)) = \varphi_{y_1y_2}(\varphi_{x_1y_1}(\psi(x_1))) = \varphi_{x_1y_2}(\psi(x_1)) = \\ = \varphi_{x_2y_2} \circ \varphi_{x_1x_2}(\psi(x_1)) = \varphi_{x_2y_2}(\varphi_{x_1x_2}(\psi(x_1))) = \varphi_{x_2y_2}(\psi(x_2))$$

для всех $x_2 \in U_1$, $y_2 \in V_1$, т. е. $(x_2, y_2) \in D^*$ при $(x_2, y_2) \in U_1 \times V_1$ и D^* относительно открыто в D. Наконец, $(x, x) \in D^*$ для всех $x \in X$, поэтому D^* непусто. Так как D связно, то $D^* = D$, т. е. равенство (2.2.6) имеет место для всех $(x_1, y_1) \in D$.

Докажем теперь единственность отображения ψ. Пусть χ — отображение, удовлетворяющее всем требованиям теоремы 1, включая условие $\chi(x_0) = w^0_{x_0}$. Пусть U — совокупность всех точек $x \in X$, таких, что $\chi(x) = \psi(x)$; так как $x_0 \in U$, то U непусто. Пусть y — некоторая точка в X и V — такая окрестность точки y, что $V \times V \subset D$. Если V и U имеют общую точку y_1, то

$$\varphi_{y_1y}(\chi(y)) = \chi(y_1) = \psi(y_1) = \varphi_{y_1y}(\psi(y));$$

следовательно, $\psi(y) = \chi(y)$, поэтому U замкнуто в X. Обратно, если $\psi(y) = \chi(y)$, то $\varphi_{y_1y}(\chi(y)) = \varphi_{y_1y}(\psi(y))$, следовательно, $\chi(y_1) = \psi(y_1)$ для $y_1 \in V$, поэтому U открыто в X. Так как X связно, то $U = X$, что завершает доказательство теоремы 1.

2.3. Некоторые применения принципа монодромии к теории топогических групп. Пусть G — топологическая группа. Отображение f некоторой окрестности U единичного элемента e группы G в некоторую группу H называется *локальным гомоморфизмом*, если для любых $g, h \in U$ таких, что $gh \in U$, имеет место равенство $f(gh) = f(g)\,f(h)$.

I. *Пусть G — односвязная топологическая группа, f — локальный гомоморфизм группы G в группу H. Если область определения отображения f есть связная окрестность U элемента $e \in G$, то существует гомоморфизм ψ группы G в H, совпадающий с f на U. Отображение ψ определено однозначно.*

Доказательство. Пусть $D \subset G \times G$ есть множество таких пар (g, h), что $hg^{-1} \in U$. Очевидно, что множество D есть открытое множество в $G \times G$, содержащее все элементы вида (g, g), $g \in G$. Множество D можно представить как объединение множеств вида $\{g\} \times Ug$, $g \in G$. Так как U связно, то каждое из множеств $\{g\} \times Ug$ связно; все эти множества пересекают связное множество, образованное парами (g, g), $g \in G$. Следовательно, множество D связно.

Пусть $(g, h) \in D$. Обозначим через φ_{gh} отображение $x \to f(hg^{-1})\, x$ группы H на себя. Если (g, h), (h, k) и (g, k) лежат в D, то kh^{-1}, hg^{-1} и $kg^{-1} = kh^{-1} \cdot hg^{-1}$ лежат в U, поэтому

$$\varphi_{gk}(x) = f(kg^{-1})\, x = f(kh^{-1})\, f(hg^{-1})\, x = \varphi_{hk}(\varphi_{gh}(x))$$

для всех $x \in H$. Следовательно, можно применить принцип монодромии (полагая $M_g = H$ для всех $g \in G$); получаем, что существует отображение ψ группы G в H, такое, что $\psi(e)$ есть единичный элемент группы H и $\psi(h) = f(hg^{-1})\, \psi(g)$ для всех $g, h \in G$, таких, что $hg^{-1} \in V$. Полагая $g = e$, видим, что на множестве U отображение ψ совпадает с f. Если $k \in U$, то $\psi(kg) = f(kg \cdot g^{-1})\, \psi(g) = f(k)\, \psi(g) = \psi(k)\, \psi(g)$. С другой стороны, если $V = U \cap U^{-1}$, то ввиду связности группы G, $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$. Поэтому любой элемент $g \in G$ можно записать в виде $k_1 \ldots k_n$, где $k_i \in U \cap U^{-1}$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Индукцией по n получаем, что $\psi(k_1 \ldots k_n h) = \psi(k_1) \ldots \psi(k_n)\, \psi(h)$. При $h = e$ получаем, что $\psi(k_1 \ldots k_n) = \psi(k_1) \ldots \psi(k_n)$, поэтому $\psi(gh) = \psi(g)\, \psi(h)$ при всех $g, h \in G$, т. е. ψ есть гомоморфизм G в H. Единственность гомоморфизма следует из равенства $\psi(g) = \psi(k_1) \ldots \psi(k_n)$ при $g = k_1 \ldots k_n$, $k_i \in V$.

Пусть G, H — топологические группы, U и V — окрестности единичных элементов в группах G и H соответственно. Гомеоморфное отображение f окрестности U на окрестность V называется *локальным изоморфизмом* групп G и H, если выполняются следующие условия:

1) если $g \in U$, $g_1 \in U$ и $gg_1 \in U$, то $f(gg_1) = f(g)\, f(g_1)$,

2) если $g \in U$, $g_1 \in U$ и $f(g)\, f(g_1) \in V$, то $gg_1 \in U$.

II. *Пусть G — односвязная топологическая группа, H — связная топологическая группа, локально изоморфная группе G. Тогда группа H изоморфна фактор-группе группы G по некоторой дискретной подгруппе центра группы G.*

Доказательство. Пусть U, V — окрестности единичных элементов групп G и H соответственно, f — гомеоморфизм U на V, удовлетворяющий условиям 1) и 2) предыдущего определения. Согласно I отображение f можно продолжить до гомоморфизма ψ группы G в H, совпадающего на U с отображением f. Гомоморфизм ψ непрерывен в единичном элементе группы G, следовательно, ψ непрерывен всюду. Множество $\psi(G)$ есть подгруппа группы H, но $\psi(G)$ содержит $\psi(U) = f(U) = V$, поэтому $\psi(G)$ содержит $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$. Так как H связна, то $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, поэтому $\psi(G) = H$. Так как образ окрестности U есть открытое в H множество V, то образ любого открытого множества в группе G открыт в H. Таким образом, подмножество группы H тогда и только тогда открыто, когда его полный прообраз в G открыт, следовательно, группа H изоморфна как топологическая группа фактор-группе группы G по ядру N гомоморфизма ψ. Так как ψ гомеоморфно отображает U на V, то $U \cap N$ состоит лишь из единичного элемента. Следовательно, N — дискретная группа. Наконец, N принадлежит центру группы G согласно VI п. 1.2 гл. V.

§ 3. Накрывающие группы

3.1. Некоторые свойства накрывающих пространств.

I. *Пусть Y — накрывающее пространство для пространства X относительно отображения f; φ, φ' — непрерывные отображения связного пространства Z в Y, удовлетворяющие условию $f \circ \varphi = f \circ \varphi'$. Если отображения φ и φ' совпадают хотя бы в одной точке пространства Z, то $\varphi = \varphi'$.*

Доказательство. Пусть F — множество всех тех точек $z \in Z$, для которых $\varphi(z) = \varphi'(z)$. Множество F очевидным образом замкнуто; по условию, F непусто. Покажем, что F открыто. Пусть $z \in F$. Точка $x = f(\varphi(z))$ имеет такую окрестность U, что каждая компонента множества $f^{-1}(U)$ гомеоморфно отображается на U под действием f. Пусть V — компонента точки $\varphi(z) = \varphi'(z)$ в множестве $f^{-1}(U)$. Согласно I п. 1.1 множество V есть окрестность точки $\varphi(z) = \varphi'(z)$. Следовательно, в Z существует окрестность W точки z такая, что $\varphi(W) \subset V$, $\varphi'(W) \subset V$. Так как f гомеоморфно отображает V на U, то $\varphi(w) = \varphi'(w)$ для всех $w \in W$. Следовательно, $W \subset F$ и F открыто. Так как пространство Z связно, то $F = Z$, т. е. $\varphi(z) = \varphi'(z)$ для всех $z \in Z$.

II. *Пусть Z — односвязное пространство, Y — накрывающее пространство для пространства X относительно отображения f. Если φ — непрерывное отображение Z в X, то существует непрерывное отображение ψ пространства Z в Y, такое, что $f \circ \psi = \varphi$. Если $z_0 \in Z$ и $y_0 \in Y$ — такие точки, что $f(y_0) = \varphi(z_0)$, то отображение ψ можно выбрать так, чтобы $\psi(z_0) = y_0$; этим условием отображение ψ определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть W — подмножество произведения $Z \times Y$, образованное такими парами (z, y), что $\varphi(z) = f(y)$. Положим $\chi(z, y) = z$ для всех $(z, y) \in W$. Для любой точки $z \in Z$ существует связная окрестность U точки $\varphi(z)$ в пространстве X, такая, что любая компонента V_α множества $f^{-1}(U)$ гомеоморфно отображается на U под действием f. Пусть G — связная окрестность точки z_0 в Z, такая, что $\varphi(G) \subset U$. Пусть $z \in G$ и y_α — такой элемент из V_α, что $f(y_\alpha) = \varphi(z)$; тогда соответствие $z \to (z, y_\alpha)$ непрерывно отображает окрестность G на некоторое подмножество $G_\alpha \subset W$ и $\chi(z, y_\alpha) = z$. Следовательно, χ гомеоморфно отображает открытое множество $G_\alpha \subset W$ на $G \subset Z$. Множество $\chi^{-1}(G)$ есть объединение множеств G_α. При отображении $(z, y) \to y$ пространства W в Y любое связное подмножество $F \subset \chi^{-1}(G)$ отображается на связное подмножество множества $f^{-1}(U)$; следовательно, образ F содержится в некоторой компоненте V_α множества $f^{-1}(U)$. Следовательно, множества G_α суть компоненты множества $\chi^{-1}(G)$, и каждая из этих компонент гомеоморфно отображается на G под действием χ.

Пусть W_0 — компонента точки (z_0, y_0) в пространстве W. Согласно VII п. 1.1 пространство W_0 есть накрывающее пространство для Z относительно ограничения χ_0 отображения χ на W_0. Но пространство Z односвязно, поэтому отображение χ_0 есть гомеоморфизм. Определим отображение ψ формулой $\chi_0^{-1}(z) = (z, \psi(z))$, $z \in Z$. Очевидно, что отображение ψ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к нему в предложении II. Единственность отображения ψ следует из I.

III. *Пусть Y_1, Y_2 — накрывающие пространства для пространства X (относительно отображений f_1 и f_2 соответственно). Если пространства Y_1 и Y_2 односвязны, то Y_1 и Y_2 гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ — такие точки, что $f_1(y_1) = f_2(y_2)$. Согласно предложению II существуют непрерывные отображения $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$ и $\psi\colon Y_2 \to Y_1$ такие, что $\varphi(y_1) = y_2$, $\psi(y_2) = y_1$, $f_2 \circ \varphi = f_1$, $f_1 \circ \psi = f_2$. Тогда $\theta = \psi \circ \varphi$ есть непрерывное отображение пространства Y_1 в себя, такое, что $f_1 \circ \theta = f_1$ и $\theta(y_1) = y_2$. Согласно II отображение θ есть тождественное отображение пространства Y_1 на себя. Аналогично, отображение $\varphi \circ \psi$ есть тождественное отображение пространства Y_2 на себя. Следовательно, φ и ψ — гомеоморфизмы, причем $\varphi = \psi^{-1}$.

Предложение III показывает, что если данное связное локально связное топологическое пространство X имеет односвязное накрывающее пространство Y, то пространство Y определено однозначно с точностью до изоморфизма. Таким образом, предложение III является «теоремой единственности» односвязного накрывающего пространства.

Пространство X называется *локально односвязным*, если каждая точка пространства X имеет по крайней мере одну односвязную окрестность. Следующее предложение дает достаточные условия существования односвязного накрывающего пространства.

IV. *Любое связное локально односвязное пространство имеет односвязное накрывающее пространство.*

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книгах Понтрягина [1] и Шевалле [1].

3.2. Накрывающие группы. Пусть G — топологическая группа. Топологическая группа $\widetilde{G}$ называется накрывающей группой для G (относительно отображения f), если:

1) $\widetilde{G}$ — накрывающее пространство для G относительно отображения f;
2) f — гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ в G.

I. *Пусть G — топологическая группа, $\widetilde{G}$ — односвязное накрывающее пространство для G (относительно отображения f). Тогда в $\widetilde{G}$ можно определить умножение так, что $\widetilde{G}$ станет топологической группой, а отображение f — гомоморфизмом группы $\widetilde{G}$ в G.*

Доказательство. Пусть e — единичный элемент группы G. Обозначим через $\widetilde{e}$ некоторый элемент пространства $\widetilde{G}$ такой, что $f(\widetilde{e}) = e$.

Согласно предложению II п. 2.1 пространство $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ односвязно. В силу предложения II п. 3.1 существует непрерывное отображение φ пространства $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ в $\widetilde{G}$, такое, что

$$f(\varphi(\widetilde{g}, \widetilde{h})) = f(\widetilde{g})(f(\widetilde{h}))^{-1} \tag{3.2.1}$$

для всех $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \widetilde{G}$, причем

$$\varphi(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}. \tag{3.2.2}$$

Если $\widetilde{h} = \widetilde{e}$, то $f(\widetilde{h}) = e$, поэтому

$$f(\varphi(\widetilde{g}, \widetilde{e})) = f(\widetilde{g}) \tag{3.2.3}$$

для всех $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Таким образом, согласно (3.2.3) отображение ψ пространства $\widetilde{G}$ в $\widetilde{G}$, определяемое формулой $\psi(\widetilde{(g}) = \varphi(\widetilde{g}, \widetilde{e})$, удовлетворяет условию $f \circ \psi = f$, причем из (3.2.2) следует, что $\psi(\widetilde{e}) = \widetilde{e}$. Согласно утверждению единственности в предложении II п. 3.1 отображение ψ тождественно, поэтому

$$\varphi(\widetilde{g}, \widetilde{e}) = \widetilde{g} \tag{3.2.4}$$

для всех $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Положим

$$\widetilde{h}^{-1} = \varphi(\widetilde{e}, \widetilde{h}), \quad \widetilde{g}\widetilde{h} = \varphi(\widetilde{g}, \widetilde{h}^{-1}). \tag{3.2.5}$$

Тогда из (3.2.1) и (3.2.5) следует, что

$$\begin{gathered} f(\widetilde{h}^{-1}) = f(\varphi(\widetilde{e}, \widetilde{h})) = (f(\widetilde{h}))^{-1}; \\ f(\widetilde{g}\widetilde{h}) = f(\varphi(\widetilde{g}, \widetilde{h}^{-1})) = f(\widetilde{g})(f(\widetilde{h}^{-1}))^{-1} = f(\widetilde{g})\, f(\widetilde{h}). \end{gathered} \tag{3.2.6}$$

Снова, применяя утверждение единственности в предложении II п. 3.1 к отображениям $\widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G}$ в $\widetilde{G}$, определяемым формулами $(\widetilde{g}, \widetilde{h}, \widetilde{k}) \to$ $\to (\widetilde{g}\widetilde{h})\,\widetilde{k}$ и $(\widetilde{g}, \widetilde{h}, \widetilde{k}) \to \widetilde{g}(\widetilde{h}\,\widetilde{k})$, получаем из (3.2.6), что

$$\widetilde{g}(\widetilde{h}\,\widetilde{k}) = (\widetilde{g}\widetilde{h})\,\widetilde{k} \tag{3.2.7}$$

для всех $\widetilde{g}, \widetilde{h}, \widetilde{k} \in \widetilde{G}$. Аналогично,

$$\widetilde{g}\,\widetilde{e} = \widetilde{e}\,\widetilde{g} = \widetilde{g}. \tag{3.2.8}$$

Рассмотрим теперь отображение $\widetilde{g} \to \widetilde{g}\,\widetilde{g}^{-1}$. Это отображение переводит связное пространство $\widetilde{G}$ в дискретное пространство $f^{-1}(e)$. Так как $\widetilde{e}$ переходит в $\widetilde{e}$, то

$$\widetilde{g}\,\widetilde{g}^{-1} = \widetilde{e} \tag{3.2.9}$$

для всех $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Аналогично,

$$\widetilde{g}^{-1}\widetilde{g} = \widetilde{e} \tag{3.2.10}$$

для всех $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$.

Соотношения (3.2.7)–(3.2.10) означают, что $\widetilde{G}$ есть группа относительно определенной в (3.2.5) операции умножения, а $\widetilde{e}$ — единичный элемент этой группы. Так как отображение φ непрерывно, то из формул (3.2.5) следует, что $\widetilde{G}$ — топологическая группа. Наконец, из (3.2.5) и (3.2.1) следует, что $f(\widetilde{g}\widetilde{h}^{-1}) = f(\widetilde{g})(f(\widetilde{h}))^{-1}$ для всех $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \widetilde{G}$, поэтому f есть гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ в группу G.

Только что доказанное предложение означает, что *всякая топологическая группа, имеющая односвязное накрывающее пространство, имеет односвязную накрывающую группу*. Следующее предложение показывает, что эта группа определена однозначно с точностью до изоморфизма.

II. *Пусть G — топологическая группа, G_1 и G_2 — односвязные накрывающие группы для группы G (относительно отображений f_1 и f_2 соответственно). Тогда существует такое изоморфное отображение θ_1 топологической группы G_1 на G_2, что $f = f_2 \circ \theta_1$.*

Доказательство. Пусть e, e_1, e_2 — единичные элементы групп G, G_1, G_2 соответственно. Существуют такие окрестности U, U_1, U_2 точек e, e_1, e_2 соответственно, что отображение f_i

определяет локально изоморфное отображение φ_i группы G_i на G ($i = 1, 2$), при котором окрестности U_i и U удовлетворяют условиям 1) и 2) определения локально изоморфного отображения, причем φ_i есть ограничение отображения f_i на U_i. Тогда существуют отображения ψ_1: $U_1 \to U_2$ и ψ_2: $U_2 \to U_1$ (определяемые формулами $\psi_1(g_1) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(g_1))$, $\psi_2(g_2) = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(g_2))$ для $g_1 \in U_1$, $g_2 \in U_2$), определяющие локально изоморфные отображения G_1 в G_2 и G_2 в G_1 соответственно, причем $\psi_2 \circ \psi_1$ и $\psi_1 \circ \psi_2$ суть тождественные отображения U_1 и U_2 на себя, и $f_2 \circ \psi_1$ совпадает на U_1 с отображением f_1. Согласно предложению I п. 2.3 существуют гомоморфизмы θ_1 и θ_2 группы G_1 в G_2 и группы G_2 в G_1 соответственно, продолжающие отображения ψ_1 и ψ_2; так как $\psi_2 \circ \psi_1$ и $\psi_1 \circ \psi_2$ суть тождественные отобрания, то из утверждения единственности того же предложения I п. 2.3 следует, что $\theta_1 \circ \theta_2$ и $\theta_2 \circ \theta_1$ суть тождественные отображения групп G_2 и G_1 соответственно. Следовательно, отображения θ_1 и θ_2 суть изоморфизмы топологических групп. Так как f_1 и $f_2 \circ \theta_1$ — гомоморфизмы связной группы G_1 в G_2, совпадающие на окрестности U_1, то $f_1 = f_2 \circ \theta_1$.

§ 4. Односвязность некоторых групп

4.1. Односвязность группы R.

I. *Группа* $\mathbf{R}$ *односвязна.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{R}$ связно и локально связно. Пусть Y — накрывающее пространство для $\mathbf{R}$ относительно отображения f. Согласно III § 1, каждая точка $x \in \mathbf{R}$ имеет такую окрестность $U_x \subset \mathbf{R}$, что каждая компонента открытого множества $f^{-1}(U_x)$ открыта в Y и гомеоморфно отображается на U_x под действием отображения f. Пусть n — целое число. Из покрытия отрезка $[n, n+1]$ окрестностями U_x можно выделить некоторое конечное подпокрытие $V_1^{(n)}, \ldots, V_m^{(n)}$; объединяя эти конечные покрытия, мы получим счетное покрытие $\mathscr{V}$ прямой $\mathbf{R}$, конечное на каждом отрезке. Уменьшая при необходимости открытые множества $V_k^{(n)}$, мы вправе считать, что каждая точка $x \in \mathbf{R}$ принадлежит не более чем двум интервалам покрытия $\mathscr{V}$, т. е. каждый интервал из покрытия $\mathscr{V}$ пересекается в точности с двумя интервалами покрытия $\mathscr{V}$, которые не пересекаются между собой. Тогда интервалы V покрытия $\mathscr{V}$ естественным образом нумеруются целыми числами p, причем выполняются следующие условия: 1) V_0 содержит 0; 2) если $V_p = (a_p, b_p)$, то $a_p < b_{p-1} < a_{p+1} < b_p$ для всех целых p.

Пусть W_0 — некоторая фиксированная компонента открытого множества $f^{-1}(V_0)$. Пусть уже построены такие открытые множества W_r, $r = p, p+1, \ldots, q$, $p \leqslant 0 \leqslant q$, что W_r есть компонента открытого множества $f^{-1}(V_r)$ для всех $r = p, p+1, \ldots, q$, причем объединение $\bigcup\limits_{r=p}^{q} W_r$ связно. Так как $V_{p-1} \cap V_p \neq \varnothing$, то существуют однозначно определенные компоненты открытых множеств $f^{-1}(V_{p-1})$ и $f^{-1}(V_{q+1})$, пересекающиеся с W_p и W_q соответственно. Обозначим эти компоненты через W_{p-1} и W_{q+1} соответственно; очевидно, что $\bigcup\limits_{r=p-1}^{q+1} W_r$ связно. Таким образом, множества W_r индуктивно определяются для всех целых r. Пусть $G = \bigcup\limits_{r=-\infty}^{+\infty} W_r$. Из построения множества G следует, что ограничение φ отображения f на G взаимно однозначно отображает G на $\mathbf{R}$. С другой стороны, отображение φ по построению является локальным гомеоморфизмом, поэтому φ — гомеоморфизм G на $\mathbf{R}$. Покажем, что $G = Y$. Из построения множества G очевидно, что G непусто и открыто. Покажем, что G замкнуто. Пусть $y \in \overline{G}$; тогда любая окрестность $W(y)$ точки y пересекается с G, т.е. $W(y) \cap W_p \neq \varnothing$ для некоторого p. Пусть $x = f(y)$ и пусть $x \in V_r$. Выберем окрестность $W(y)$ так, чтобы $f(W(y)) \subset V_r$; тогда $\varnothing \neq f(W(y) \cap W_p) \subset f(W(y)) \cap f(W_p) \subset V_r \cap V_p$. Кроме того, ограничение отображения f на W_p есть гомеоморфизм, поэтому из соотношения $f(W(y) \cap W_p) \subset V_r \cap V_p$ следует, что $W(y) \cap W_p \subset f^{-1}(V_r) \cap W_p$, а из построения множеств W_r следует, что $f^{-1}(V_r) \cap W_p = W_r \cap W_p$. Итак, $W(y) \cap W_p \subset W_r \cap W_p$, поэтому $W(y) \cap W_r \supset W(y) \cap W_p \cap W_r = W(y) \cap W_p \neq \varnothing$ и $W(y) \cap W_r$ непусто. Если $W(y)$ связна, то из соотношений $f(W(y)) \subset V_r$, $W(y) \cap W_r \neq \varnothing$, следует, что $W(y) \subset W_r$ (см. V § 1); в частности, $y \in W_r \subset G$, т.е. $\overline{G} = G$ и G замкнуто. Так как Y связно, то $G = Y$, поэтому f — гомеоморфизм Y на $\mathbf{R}$, и любое накрывающее пространство для $\mathbf{R}$ изоморфно тривиальному.

Упражнение. Пусть X — односвязное пространство, Y — связное локально связное локально компактное пространство, f — взаимно однозначное непрерывное отображение Y на X. Доказать, что f — гомеоморфизм.

4.2. Односвязность отрезка и сферы.

I. *Пусть Y — накрывающее пространство для X относительно отображения f. Пусть M, N — замкнутые локально связные подмножества X и пусть каждая компонента множеств $f^{-1}(M)$, $f^{-1}(N)$ гомеоморфно отображается на M, N соответственно под действием отображения f. Если $M \cap N$ — непустое связное множество, то каждая компонента множества $f^{-1}(M \cup N)$ гомеоморфно отображается на $M \cup N$ под действием f.*

Доказательство. Пусть M_α — компоненты множества $f^{-1}(M)$ ($M_{\alpha_1} \neq M_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Положим $F = M \cap N$, $M_\alpha \cap f^{-1}(F) = F_\alpha$. По условию, f гомеоморфно отображает M_α на M, следовательно, f гомеоморфно отображает F_α на F. В частности, так как F связно, то F_α связно, поэтому F_α принадлежит однозначно определенной компоненте N_α множества $f^{-1}(N)$. Положим $S_\alpha = M_\alpha \cup N_\alpha$, $T_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha'\neq\alpha} S_{\alpha'}$. Очевидно, что множество S_α замкнуто (так как оно замкнуто в $f^{-1}(M \cup N)$). Так как $T_\alpha = \big(\bigcup\limits_{\alpha'\neq\alpha} M_{\alpha'}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{\alpha'\neq\alpha} N_{\alpha'}\big)$, причем M_α относительно открыто в $f^{-1}(M)$, а N_α относительно открыто в $f^{-1}(N)$ (см. VII § 1), то множества $\bigcup\limits_{\alpha'\neq\alpha} M_{\alpha'}$, $\bigcup\limits_{\alpha'\neq\alpha} N_{\alpha'}$ замкнуты в $f^{-1}(M)$, $f^{-1}(N)$ соответственно, т. е. замкнуты в Y. Следовательно, множество T_α замкнуто. Так как $S_\alpha \cup T_\alpha = f^{-1}(M \cup N)$ — замкнутое множество, то множество S_α не только замкнуто, но и открыто в $f^{-1}(M \cup N)$. Но M_α и N_α связны и имеют общие точки ($M_\alpha \cap N_\alpha \supset F_\alpha$), поэтому S_α суть компоненты множества $f^{-1}(M \cup N)$. Пусть f_α — ограничение отображения f на S_α. Согласно VII § 1 пространство S_α является накрывающим пространством для $M \cup N$ относительно отображения f_α. Покажем, что отображение f_α взаимно однозначно. Действительно, если $f(y_1) = f(y_2)$ для $y_1, y_2 \in S_\alpha$, то либо y_1, y_2 одновременно принадлежат одному из множеств M_α или N_α и тогда, очевидно, $y_1 = y_2$, либо $f(y_1) = f(y_2) \in f(M_\alpha) \cap f(N_\alpha) = M \cap N = F$ и снова $y_1 = y_2$, так как отображение f_α гомеоморфно на M_α и N_α. Таким образом, f_α взаимно однозначно; так как оно локально гомеоморфно, то f_α гомеоморфно отображает S_α на $M \cup N$, что завершает доказательство предложения I.

II. *Всякий интервал на числовой прямой односвязен.*

Доказательство. Интервал вида (a, b) гомеоморфен $\mathbf{R}$ и поэтому односвязен. Рассмотрим полуинтервал вида $(a, b]$. Пусть Y — накрывающее пространство для $X = (a, b]$ относительно отображения f. Согласно VII § 1 каждая компонента множества $f^{-1}((a, b))$ является накрывающим пространством для (a, b) относительно ограничения отображения f. Но (a, b) односвязен, поэтому каждая компонента множества $f^{-1}((a, b))$ отображается на (a, b) под действием f гомеоморфно. С другой стороны, точка b имеет окрестность вида $(b-\delta, b]$, $\delta > 0$, обладающую тем свойством, что каждая компонента множества $f^{-1}((b-\delta, b])$ гомеоморфно отображается на $(b-\delta, b]$ под действием f. Тогда множества $M = (a, b-\delta/4]$ и $N = [b-\delta/2, b]$ удовлетворяют условиям предложения I. Следовательно, каждая компонента множества $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}((a, b)] = Y$ гомеоморфно отображается на $(a, b]$ под действием f. Но Y связно, поэтому f — гомеоморфизм Y на $(a, b]$. Следовательно, $(a, b]$ — односвязное пространство. Аналогичное рассуждение показывает теперь, что отрезок $[a, b]$ также односвязен.

III. *Произведение конечного числа интервалов односвязно.*

Доказательство сразу следует из II и из II п. 2.1.

IV. *Сфера* $S^{n-1} = \Big\{(x_1, \ldots, x_n),\ x_k \in \mathbf{R},\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1\Big\}$ *односвязна при* > 2.

Доказательство. Пусть Y — накрывающее пространство для S^{n-1} относительно отображения f. Пусть $M = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_n \geqslant 0, (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}\}$; $N = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_n \leqslant 0, (x_1, \ldots, x_n) \in \in S^{n-1}\}$. Отображение $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{n-1})$ гомеоморфно отображает M и N на шар $\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2 \leqslant 1$ в $\mathbf{R}^{n-1}$. Так как этот шар гомеоморфен $(n-1)$-мерному кубу, то из III следует, что M и N односвязны. Множество $M \cap N = \left\{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_n = 0, \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2 = 1\right\}$ гомеоморфно сфере S^{n-2}. Легко проверить, что сфера S^{n-2} связна при $n > 2$. Тогда множества M и N удовлетворяют условиям предложения I. Следовательно, каждая компонента множества $Y = f^{-1}(M \cup N)$ гомеоморфно отображается на $M \cup N = S^{n-1}$ под действием f. Но Y связно, поэтому f — гомеоморфизм Y на S^n. Следовательно, S^n односвязна.

4.3. Вспомогательные предложения.

I. *Пусть G — связная локально связная топологическая группа, H — ее замкнутая локально связная подгруппа, H_0 — компонента единицы в H. Существует такое отображение f пространства G/H_0 на G/H, что G/H_0 есть накрывающее пространство для G/H относительно отображения f. В частности, если H — нормальный делитель, то G/H_0 — накрывающая группа для G/H относительно гомоморфизма f.*

Доказательство. Так как H локально связна, то H_0 относительно открыто в H (см. I § 1). Следовательно, в H существует такая окрестность V единичного элемента, что $V^{-1}V \cap H \subset H_0$. Выбирая при необходимости связную окрестность, содержащуюся в V, мы можем считать, что V связно. Пусть π и π_0 — канонические отображения группы G на пространства смежных классов G/H и G/H_0 соответственно. Каждый элемент ξ пространства G/H_0 является некоторым смежным классом по подгруппе H_0; следовательно, ξ целиком содержится в некотором смежном классе по H: если $g \in G$ и $\xi = gH_0$, то $\xi \subset \eta$, где $\eta = gH$. Положим $\eta = f(\xi)$; это соотношение определяет отображение пространства G/H_0 на G/H. Так как отображения π и π_0 непрерывны и открыты, то отображение f, как легко проверить, непрерывно и открыто.

Пусть $g \in G$. Положим $W(g) = \pi(gV)$, множество $W(g)$ есть окрестность элемента $\pi(g)$ в G/H. Выберем в G для каждого смежного класса hH_0, $h \in H$, по одному представителю; пусть A — множество этих представителей. Тогда $H = \bigcup\limits_{a \in A} aH_0$. Рассмотрим множество $f^{-1}(W(g))$, это множество совпадает с $gVH = \bigcup\limits_{a \in A} gVaH_0$. Положим $W_a(g) = \pi_0(gVa)$, тогда очевидно, что $f^{-1}(W(g)) = \bigcup\limits_{a \in A} W_a(g)$. Покажем, что каждое из множеств $W_a(g)$ отображается под действием f взаимно однозначно на $W(g)$, причем множества $W_a(g)$ попарно не пересекаются. Действительно, $f(W_a(g)) = f(\pi_0(gVa)) = gVaH = gVH = \pi(gV) = W(g)$; если $f(y_1) = f(y_2)$ для $y_1 \in W_a(y)$, $y_2 \in W_{a'}(g)$, то $y_1 = \pi(gx_1a)$, $y_2 = \pi_0(gx_2a')$ для некоторых $x_1, x_2 \in V$, причем $\pi(gx_1a) = f(\pi_0(gx_1a)) = f(\pi_0(gx_2a')) = \pi(gx_2a')$, откуда $gx_1 = gx_2a'h$ для некоторого $h \in H$. Следовательно,

$$x_2^{-1}x_1 = a'ha^{-1}. \tag{4.3.1}$$

Но a', h, $a \in H$, поэтому $a'ha^{-1} \in H$ и $x_2^{-1}x_1 \in V^{-1}V \cap H \subset H_0$. Если мы предположим, что $a' = a$ (т. е. $y_1, y_2 \in W_a(g)$), то из равенства (4.3.1) следует, что

$$h = a^{-1}(x_2^{-1}x_1)\,a \in a^{-1}H_0a. \tag{4.3.2}$$

Но подгруппа H_0 является нормальным делителем в H (см. III п. 1.2 гл. V), поэтому из (4.3.2) следует, что $h \in H_0$, т. е. $\pi_0(gx_1a) = \pi_0(gx_2a)$ и $y_1 = y_2$. Таким образом, f взаимно однозначно отображает $W_a(g)$ на $W(g)$. Если, наконец, $W_a(g)$ и $W_{a'}(g)$ пересекаются, т. е. $\pi_0(gx_1a) = \pi_0(gx_2a')$ для некоторых x_1, $x_2 \in V$, то $gx_1a = gx_2a'h$, где $h \in H_0$; следовательно,

$$a'ha^{-1} \in a'H_0a^{-1} = (a'H_0a'^{-1})\,a'a^{-1} \subset U_0a'a^{-1},$$

и одновременно $a'ha^{-1} = x_2^{-1}x_1 \in H_0$, т. е. пересечение $H_0 \cap H_0a'a^{-1}$ непусто, откуда следует, что $H_0a \cap H_0a'$ непусто. Но a и a' — представители попарно не пересекающихся классов, поэтому $a = a'$ и множества $W_a(g)$ попарно не пересекаются.

Каждое из множеств $W_a(g)$ открыто в G/H_0. Так как f непрерывно, открыто и отображает $W_a(g)$ на $W(g)$ взаимно однозначно, то f гомеоморфно отображает $W_a(g)$ на $W(g)$. Каждое из множеств $W_a(g)$ связно как непрерывный образ связного множества gVa. Следовательно, попарно не пересекающиеся множества $W_a(g)$ суть компоненты множества $f^{-1}(W(g))$. Но тем самым доказано, что пространство G/H_0 есть накрывающее пространство для G/H относительно отображения f.

Если H — нормальный делитель в G, то H_0 — также нормальный делитель в G. Действительно, для любого $g \in G$ множество gH_0g^{-1} связно, содержит единичный элемент и содержится в $gHg^{-1} = H$, т. е. $gH_0g^{-1} \subset H_0$ для всех $g \in G$ и H_0 — нормальный делитель в G. В этом случае построенное нами отображение f есть гомоморфизм группы G/H_0 на группу G/H, ядро которого совпадает с H/H_0. Таким образом, G/H_0 является в этом случае накрывающей группой для G/H относительно гомоморфизма f.

II. *Пусть выполнены условия предложения* I. *Если пространство G/H односвязно, то группа H связна.*

Доказательство. Если G/H односвязно, то отображение f: $G/H_0 \to G/H$ есть гомеоморфизм. Следовательно, $H = H_0$, т. е. H связна.

III. *Пусть G — связная локально связная топологическая группа, H — дискретный нормальный делитель группы G, π — канонический гомоморфизм группы G на G/H. Тогда G — накрывающая группа для G/H относительно отображения π.*

Доказательство сразу следует из I, так как из дискретности группы H следует, что $H_0 = \{e\}$ и $G/H_0 = G$.

IV. *Пусть G — связная локально связная топологическая группа, H — ее замкнутая локально связная подгруппа. Пусть G локально односвязна, а H и G/H односвязны. Тогда группа G также односвязна.*

Доказательство. Так как G связна и локально односвязна, то она имеет универсальную накрывающую группу. Пусть $\widetilde{G}$ — накрывающая группа для G относительно отображения π. Пусть $\widetilde{H} = \pi^{-1}(H)$. Если $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ и $\pi(\widetilde{g}) = g$, то $\pi(\widetilde{g}\widetilde{H}) = \pi(\widetilde{g})\,\pi(\widetilde{H}) = gH$, т.е. π отображает смежные классы группы $\widetilde{G}$ по подгруппе $\widetilde{H}$ на смежные классы группы G по H, и если $\pi(\widetilde{g}_1\widetilde{H}) = \pi(\widetilde{g}_2H)$, то $\pi(\widetilde{g}_1)H = \pi(\widetilde{g}_2(H)$, т.е. $\pi(\widetilde{g}_2^{-1}\widetilde{g}_1) \in H$, $\widetilde{g}_2^{-1}\widetilde{g}_1 \in \widetilde{H}$, $\widetilde{g}_1 \in \widetilde{g}_2\widetilde{H}$ и $\widetilde{g}_1\widetilde{H} = \widetilde{g}_2H$. Таким образом, отображение π^*: $\widetilde{G}/\widetilde{H} \to G/H$, определяемое формулой $\pi^*(\widetilde{g}\widetilde{H}) = \pi(\widetilde{g})H$, взаимно однозначно. Так как канонические отображения ρ: $G \to G/H$ и ρ: $\widetilde{G} \to \widetilde{G}/\widetilde{H}$ непрерывны и открыты, причем $\pi^* \circ \widetilde{\rho} = \rho \circ \pi$, то отображение π^* непрерывно и открыто. Следовательно, π^* — гомеоморфизм $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ на G/H. Так как G/H односвязно по условию, то $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ односвязно. Заметим теперь, что $\widetilde{H}$ замкнута в $\widetilde{G}$ (как полный прообраз замкнутой группы H), а из связности и локальной связности группы H и предложения VII § 1 следует локальная связность группы $\widetilde{H}$. Тогда из односвязности $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ и предложения II следует, что группа $\widetilde{H}$ связна. Снова применяя предложение VII § 1, видим, что $\widetilde{H}$ — накрывающее пространство для H относительно отображения π. Но H односвязна, следовательно, отображение π является изоморфизмом $\widetilde{H}$ на H. В частности, ядро отображения π состоит лишь из единичного элемента, поэтому π — изоморфизм $\widetilde{G}$ на G; следовательно, G односвязна.

4.4. Односвязность некоторых классических групп.

I. *Пусть $G = SU(n)$, H — подгруппа группы G, образованная матрицами вида $h = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{Vmatrix}$, где g — матрица порядка $n-1$. Тогда подгруппа H изоморфна группе $SU(n-1)$, и фактор-пространство G/H гомеоморфно сфере S^{2n-1}.*

Доказательство. Пусть $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, где u — квадратная матрица порядка $n-1$. Соотношение $h \in G$ равносильно условию $h^*h = 1_n$, т.е. условию $u^*u = 1_{n-1}$, где 1_k — единичная матрица порядка k. Таким образом, $u \in SU(n-1)$, т.е. $H \approx SU(n-1)$. Покажем, что $G/H \approx S^{2n-1}$. Заметим, что единичная сфера S в комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$ гомеоморфна единичной сфере S^{2n-1}. Покажем, что S является однородным пространством относительно действия группы G. Действительно, если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$, т. е. $(x, x) = 1$, то $(xg, xg) = 1$ для всех $g \in G$, где $xg = (x_1, \ldots, x_n) \begin{Vmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{Vmatrix}$. С другой стороны, положим $x_0 = (1, \ldots, 0) \in S$, если x — некоторый элемент S, то существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbf{C}^n$, первым вектором которого является $x : e_1 = x$. Матрица g перехода от базиса $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots 0, 1)$ к базису $e_1, \ldots, e_n$ принадлежит группе G, и $x = x_0 g$, так что S однородно относительно G. Наконец, читатель легко проверит, что отображение $g \to x_0 g$ непрерывно и открыто. Согласно III п. 2.6 гл. III пространство S гомеоморфно пространству смежных классов $G/\widetilde{H}$, где $\widetilde{H}$ — стационарная подгруппа точки x_0. Найдем подгруппу $\widetilde{H}$. Условие $x_0 g = x_0$ равносильно условию, что $g_{11} = 1$, $g_{12} = \ldots = g_{1n} = 0$. Так как строки матрицы g ортогональны, то $g_{21} = \ldots = g_{n1} = 0$ для $g \in \widetilde{H}$, следовательно, $\widetilde{H} = H$. Итак, $G/H \approx S \approx S^{2n-1}$.

Обозначим через $Sp\,(2n)$ группу всех унитарных матриц g порядка $2n$, удовлетворяющих условию

$$g' J_n g = J_n, \tag{4.4.1}$$

где g' — матрица, транспонированная g, а $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$. Группа $Sp\,(2n)$ является замкнутой подгруппой группы $U(2n)$, поэтому $Sp\,(2n)$ — компактная группа.

II. *Пусть $S = Sp\,(2n)$, σ — квадратная матрица порядка $2n$ вида*

$$\sigma = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & 1 \\ & \mathbf{0} & & 1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

H — подгруппа группы G, образованная матрицами вида

$$h = \sigma \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & \ldots & h_{2,\,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & h_{n-1,\,2} & \ldots & h_{n-1,\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sigma^{-1}. \tag{4.4.2}$$

Тогда подгруппа H изоморфна группе $Sp\,(2n-2)$ при $n>2$ и $H=\{e\}$ при $n=2$, а фактор-пространство G/H гомеоморфно сфере S^{4n-1}.

Доказательство. Если $n=2$, то, очевидно, $H=\{e\}$. Пусть $n>2$ и

$$h=\sigma\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\sigma^{-1}, \tag{4.4.3}$$

где u — квадратная матрица порядка $2n-2$. Условие $h\in G$ равносильно условиям $h^*h=1_{2n}$ и $h'J_nh=J_n$. Так как $\sigma=\sigma^{*-1}=\sigma'^{-1}$, то условие $h^*h=1_{2n}$ равносильно условию $u^*u=1_{2n-2}$, т. е. равносильно унитарности u. С другой стороны, непосредственное вычисление показывает, что

$$\sigma^{-1}J_n\sigma=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & J_{n-1} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{Vmatrix}; \tag{4.4.4}$$

из (4.4.4) следует, что для $g=\sigma\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ равенство (4.4.1) равносильно соотношению $u'J_{n-1}u=J_{n-1}$. Следовательно, для элемента g вида (4.4.3) соотношения $g\in Sp\,(2n)$ и $u\in Sp\,(2n-2)$ равносильны, т. е. H изоморфна $Sp\,(2n-2)$.

Покажем, что $G/H=S^{4n-1}$. Заметим, что единичная сфера S в комплексном пространстве $\mathbf{C}^{2n}$ гомеоморфна единичной сфере S^{4n-1}. Покажем, что S является однородным пространством относительно действия группы G. Так как $G\subset SU(2n)$, то $xg\in S$ для всех $x\in S$, $g\in G$. Положим теперь $x_0=(1,0,\ldots,0)$ и покажем, что для любого $x\in S$ существует такой элемент $g\in G$, что $x_0g\in x$. Положим $e_1=x$. Пусть $e_{n+1}=\overline{x}J_n$, где $\overline{x}=(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{2n})$ при $x=(x_1,\ldots,x_{2n})$. Очевидно, что $e_{n+1}\in S$ и $(e_1,e_{n+1})=0$. Пусть уже построен такой набор ортонормированных векторов $e_1,\ldots,e_k,e_{n+1},\ldots,e_{n+k}$, что $e_{n+j}=\overline{e}_jJ_n$ для всех $j=1,\ldots,k$. Возьмем в качестве e_{k+1} любой вектор единичной длины, ортогональный всем векторам $e_1,\ldots,e_k,e_{n+1},\ldots,e_{n+k}$; пусть $e_{n+k+1}=\overline{e}_{k+1}J_n$. Тогда

$$(e_{n+k+1},e_j)=(\overline{e}_{k+1}J_n-\overline{e}_{n+j}J_n)=-(\overline{e}_{k+1},\overline{e}_{n+j})=-\overline{(e_{k+1},e_{n+j})}=0$$

и

$$(e_{n+k+1},e_{n+j})=(\overline{e}_{k+1}J_n,\overline{e}_jJ_n)=(\overline{e}_{k+1},\overline{e}_j)=\overline{(e_{k+1},e_j)}=0,$$

т. е. индукцией по k можно построить такой ортонормированный базис $e_1,\ldots,e_{2n}$ в $\mathbf{C}^{2n}$, что $x=e_1$ и $e_{n+k}=\overline{e}_kJ_n$ при $k=1,\ldots,n$. Пусть g — матрица перехода от базиса $(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$ к базису $e_1,\ldots,e_{2n}$. Тогда g — унитарная матрица, а соотношение $e_{n+k}=\overline{e}_kJ_n$

означает, что $J_n g = \overline{g} J_n$, где $\overline{g}$ — матрица, элементы которой комплексно сопряжены соответствующим элементам матрицы g. Но ввиду унитарности g соотношение

$$J_n g = \overline{g} J_n \tag{4.4.5}$$

равносильно соотношению (4.4.1), т.е. $g \in G$ и $x_0 g = x$.

Покажем теперь, что стационарная подгруппа элемента $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ совпадает с H. Условие $x_0 g = x_0$ означает, что $g = \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & v \end{pmatrix}$ для некоторой строчки w и матрицы v; так как g унитарна, то $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. Условие (4.4.5), как легко проверить непосредственно, равносильно условию, что $(n+1)$-я строчка матрицы g равна $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где единица стоит на $(n+1)$-м месте; это условие в свою очередь равносильно условию, что последняя строка матрицы $\sigma^{-1} g \sigma$ равна $(0, \ldots, 0, 1)$, и ввиду унитарности g и σ мы получаем, что h тогда и только тогда удовлетворяет условию (4.4.2), когда h принадлежит стационарной подгруппе элемента x_0. Читатель легко проверит, что отображение $g \to x_0 g$ непрерывно и открыто. Применяя III п. 2.6 гл. III, получаем, что G/H гомеоморфно S^{4n-1}.

III. *Группы $SU(n)$ и $Sp\,(2n)$ односвязны при всех $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Группа $SU(1)$ равна $\{e\}$ и потому односвязна. Группа $Sp\,(2)$ гомеоморфна S^3 (см. II) и потому односвязна (см. IV п. 4.2). Позже (см. § 3 гл. IX и § 2 гл. XI) будет доказано, что группы $SU(n)$ и $Sp\,(2n)$ локально односвязны (а именно, будет доказано, что $SU(n)$ и $Sp\,(2n)$ — группы Ли, а любой элемент группы Ли имеет окрестность, гомеоморфную шару в евклидовом пространстве и потому односвязную). Тогда предложение III доказывается индукцией по n с помощью IV п. 4.2, IV п. 4.3, I и II.

IV. *Группа $SO(3, \mathbf{R})$ неодносвязна.*

Доказательство. Гомоморфизм π: $SU(2) \to SO(3)$, построенный в упражнении п. 1.2 гл. IV, имеет дискретное ядро, равное $\{e, -e\}$, поэтому группа $SU(2)$ является накрывающей для $SO(3)$ (см. III п. 4.3). Так как π не является гомеоморфизмом, то $SO(3, \mathbf{R})$ неодносвязна.

В дальнейшем (см. III п. 7.2 гл. XI) мы покажем, что группы $SO(n, \mathbf{R})$ и $SO(n, \mathbf{C})$ неодносвязны для всех $n \geqslant 3$. Универсальная накрывающая группа для группы $SO(n, \mathbf{C})$ или $SO(n, \mathbf{R})$ называется *спинорной группой*, она построена, например, в книгах Желобенко [1] и Шевалле [1].

Глава IX

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ

§ 1. Аналитические многообразия

1.1. Определение аналитического многообразия. Пусть M — отделимое топологическое пространство со счетной базой открытых множеств. Пространство M называется вещественным (соответственно комплексным) *аналитическим многообразием*, если каждому открытому подмножеству $U \subset M$ сопоставлена алгебра $D(U)$ комплекснозначных функций на U, содержащая единичную функцию, так что выполняются следующие условия:

а) если V, U — открытые подмножества M, $V \subset U$, то ограничение всякой функции $f \in D(U)$ на множество V содержится в $D(V)$;

б) если V и V_i $(i \in I)$ — открытые подмножества M, $V = \bigcup\limits_i V_i$, и f — комплекснозначная функция на V такая, что $f \mid V_i \in D(V_i)$ для всех $i \in I$, то $f \in D(V)$;

в) существует такое целое $m > 0$, что для любого $x \in M$ существуют: открытое множество $U \subset M$, содержащее x, и m вещественных (соответственно комплексных) функций $x_1, \ldots, x_m \in D(U)$, удовлетворяющих условиям:

1) отображение ξ: $y \in (x_1(y), \ldots, x_n(y))$ есть гомеоморфизм множества U на открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^m$ (соответственно $\mathbf{C}^m$);

2) для любого открытого множества $W \subset U$ алгебра $D(W)$ состоит из тех и только тех функций на W, которые представимы в виде $F \circ \xi$, где F — вещественно (соответственно комплексно) аналитическая функция на $\xi(W)$.

Элементы алгебры $D(U)$ называются *аналитическими функциями* на U. Любое открытое множество U, удовлетворяющее условию в), называется *координатной окрестностью* в M, а функции $x_1, \ldots, x_m$ — *аналитическими координатами* на U. Число m называется *размерностью* многообразия M.

I. *Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — аналитические координаты на U, $y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$ — конечное число функций из $D(U)$. Набор $y_1, \ldots, y_n$ тогда* *и только тогда удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *п.* в) *в некотором открытом подмножестве* $V \subset U$, *когда* 1) $m = n$, 2) *если* $y_i = F_i \circ \xi$, *где* F_i — *аналитическая функция переменных* $x_1, \ldots, x_m$, *то функциональный определитель* $\dfrac{D(f_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$ *отличен от нуля в некоторой точке множества* $\xi(U)$.

Доказательство. Пусть набор $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяет условиям 1) и 2) п. в) в открытом подмножестве $V \subset U$. Докажем, что $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяет условиям 1) и 2) предложения I. Пусть $y_i = F_i \circ \xi$, где F_i $(i = 1, \ldots, n)$ — аналитическая функция переменных $x_1, \ldots, x_m$ на множестве $\xi(V)$. С другой стороны, по условию, отображение η: $z \to (y_1(z), \ldots, y_n(z))$ есть гомеоморфизм множества V на открытое множество $\eta(V)$ соответствующего координатного пространства, причем $x_k = G_k \circ \eta$, где G_k $(k = 1, \ldots, m)$ — аналитическая функция переменных $y_1, \ldots, y_n$. Следовательно,

$$F_i(G_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, G_m(y_1, \ldots, y_n)) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1.1}$$

$$G_k(F_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_m)) = x_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.1.2}$$

где $(x_1, \ldots, x_m) \in \xi(V)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \eta(V)$. Дифференцируя (1.1.1) и (1.1.2), получаем, что на $\xi(V)$ и $\eta(V)$ соответственно имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial G_k}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial y_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_l} = \delta_{kl}. \tag{1.1.3}$$

Первое из соотношений (1.1.3) можно рассматривать как набор систем линейных уравнений с матрицей $(\partial F_i / \partial x_k)$ относительно неизвестных $\partial G_k / \partial y_l$ $(k = 1, \ldots, m$, j фиксировано). Разрешимость этих систем уравнений с правой частью δ_{ij} означает разрешимость системы уравнений с матрицей $(\partial F_i / \partial x_k)$ при любой правой части. Следовательно, $m \geqslant n$ и ранг матрицы $\partial F_i / \partial x_k$ равен n. Аналогично, рассматривая второе из соотношений (1.1.3) как набор систем линейных уравнений с матрицей $(\partial F_i / \partial x_l)$ относительно неизвестных $\partial G_k / \partial y_i$ $(i = 1, \ldots, n$; k фиксировано), получаем, что $n \geqslant m$. Следовательно, $(\partial F_i / \partial x_k)$ — квадратная матрица с ненулевым определителем, т. е. набор $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяет условиям 1) и 2) предложения I.

Обратно, пусть набор $y_1, \ldots, y_n \in D(U)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) предложения I. Пусть $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. По теореме о неявных функциях, существует окрестность W точки $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ в множестве $\xi(U)$ такая, что для любой точки $(y_1, \ldots$ $\ldots, y_m) \in W$ система уравнений

$$F_i(x_1, \ldots, x_m) = y_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.1.4}$$

имеет одно и только одно решение $(x_1, \ldots, x_m)$, которое определяется равенствами вида

$$x_k = G_k(y_1, \ldots, y_m), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.1.5}$$

причем функции G_k, $k = 1, \ldots, m$, аналитичны на множестве W. Пусть V — полный прообраз множества W при отображении ξ. По условию, V и W гомеоморфны. Пусть $\eta(z) = (y_1(z), \ldots, y_m(z))$. Формулы (1.1.4) и (1.1.5) показывают, что отображение Φ: $(x_1, \ldots, x_m) \to (F_1(x_1, \ldots \ldots, x_m), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_m))$ есть гомеоморфизм множества W на множество $\eta(V)$, причем из соотношения $\eta = \Phi \circ \xi$ следует, что η есть гомеоморфизм открытого множества $V \subset M$ на открытое подмножество $\eta(V)$ координатного пространства, т.е. выполнено условие 1) п. в). Если $z \in D(V)$, то $z = H \circ \xi$, где H — аналитическая функция; тогда $z = H \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \xi = (H \circ \Phi^{-1}) \circ \eta$, где Φ^{-1} есть отображение $(y_1, \ldots, y_m) \to (G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_m(y_1, \ldots, y_m))$. Из аналитичности функций G_k следует, что $z = H_1 \circ \eta$, где $H_1 = H \circ \Phi^{-1}$ — аналитическая функция на $\eta(V)$. Обратно, если $z = H_1 \circ \eta$, где H_1 аналитична, то $z = (H_1 \circ \Phi) \circ \xi$, где $H_1 \circ \Phi$ — аналитическая функция, т.е. выполнено условие 2) п. в).

1.2. Примеры многообразий. 1. Пусть M — пространство $\mathbf{R}^m$ и пусть каждому открытому подмножеству $U \subset M$ сопоставлена алгебра $D(U)$ всех комплексных аналитических функций на множестве U. Читатель легко проверит, что условия а)–в) выполняются; в частности, в качестве функций $x_1, \ldots, x_m$ можно взять координатные функции, определяемые формулами $x_k(y_1, \ldots, y_m) = y_k$, $k = 1, \ldots, m$, $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$. Таким образом, пространство $\mathbf{R}^m$ можно рассматривать как (вещественное) аналитическое многообразие. Аналогично, пространство $\mathbf{C}^m$ можно рассматривать как комплексное аналитическое многообразие.

2. Пусть T^1 — единичная окружность иа комплексной плоскости, т.е. $T^1 = \{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbf{R}\}$. Если f — функция на T^1, то $f(e^{i\varphi})$ есть функция вещественного переменного φ. Сопоставим всякому открытому подмножеству $U \subset T^1$ алгебру $D(U)$, образованную всеми комплекснозначными функциями f на U такими, что $f(e^{i\varphi})$ — аналитическая функция от φ на области своего определения. Справедливость условий а) и б) очевидна. Для доказательства справедливости условия в), очевидно, достаточно заметить, что для всякой точки $x \in T^1$, $x \neq \pm 1$, можно положить $x_1(\varphi) = \cos\varphi = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + \dfrac{1}{e^{i\varphi}}\right)$ и $U = \left\{\varphi\colon |x - \varphi| < \min\left(\dfrac{|1-x|}{2}, \dfrac{|1+x|}{2}\right)\right\}$, а для всякой точки $x \neq \pm i$ можно положить $x_1(\varphi) = \sin\varphi = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - \dfrac{1}{e^{i\varphi}}\right)$ и $U = \left\{\varphi\colon |x - \varphi < \min \dfrac{|x-i|}{2}, \dfrac{|x+i|}{2}\right\}$. Таким образом, T^1 можно

рассматривать как (вещественное) аналитическое многообразие размерности 1.

3. Пусть M — аналитическое многообразие, U — открытое подмножество в M. Очевидно, что соответствие $V \to D(V)$, где V — открытое подмножество в U, удовлетворяет условиям а)–в), поэтому U есть аналитическое многообразие; оно называется *открытым подмногообразием* многообразия M.

4. Пусть M — комплексное аналитическое многообразие. Заменим для каждой координатной окрестности $U \subset M$ набор функций $x_1, \ldots, x_m \in D(U)$ набором из $2m$ функций $(y_1, \ldots, y_{2m}) = (\operatorname{Re} x_1, \operatorname{Im} x_1, \ldots, \operatorname{Re} x_m, \operatorname{Im} x_m)$ и заменим каждую из алгебр $D(U)$ алгеброй $D_r(U)$, определяемой следующим образом: вещественная функция f на U тогда и только тогда принадлежит $D_r(U)$, когда для любой координатной окрестности $V \subset U$ ограничение функции f на V есть вещественно аналитическая функция от $y_1, \ldots, y_{2m}$. Читатель легко проверит, что таким образом многообразие M можно рассматривать как *вещественное* аналитическое многообразие.

1.3. Отображения многообразий. Произведение многообразий. Пусть M, N — многообразия и φ — отображение M в N. Отображение φ называется *аналитическим*, если для любого открытого множества $W \subset N$, пересекающего $\varphi(M)$, и любой функции $f \in D(W)$ функция $f \circ \varphi$ принадлежит $D(\varphi^{-1}(W))$.

Если φ — гомеоморфное отображение многообразия M на N и если отображения φ и φ^{-1} аналитичны на M и N соответственно, то отображение φ называется *аналитическим изоморфизмом* многообразий M и N.

Пусть M_1 и M_2 — многообразия размерностей m_1 и m_2 соответственно. Пусть $M = M_1 \times M_2$ — произведение топологических пространств M_1 и M_2; тогда M — отделимое пространство со счетной базой. Пусть $U \subset M$ — открытое множество, f — комплекснозначная функция на U. Будем считать, что $f \in D(U)$ в том и только том случае, когда для любой точки $(y_1, y_2) \in U$ существуют координатные окрестности V_1, V_2 точек y_1 и y_2 в M_1 и M_2 соответственно и аналитические координаты $x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}$ и $x_1^{(2)}, \ldots, x_{m_2}^{(2)}$ на V_1, V_2 соответственно, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $V_1 \times V_2 \subset U$; 2) если $\widetilde{V}_i$ — образ V_i при отображении $y \to (x_1^{(i)}(y), \ldots, x_{m_i}^{(i)}(y))$, $i = 1, 2$, то существует аналитическая функция g на $\widetilde{V}_1 \times \widetilde{V}_2$, такая, что $f(z_1, z_2) = \varphi(x_1^{(1)}(z_1), \ldots, x_{m_1}^{(1)}(z_1), x_1^{(2)}(z_2), \ldots, x_{m_2}^{(2)}(z_2))$ для всех $(z_1, z_2) \in V_1 \times V_2$. Читатель легко проверит, что отображение $U \to D(U)$ удовлетворяет условиям а)–в); таким образом, $M_1 \times M_2$ можно рассматривать как аналитическое многообразие; оно называется *произведением* многообразий M_1 и M_2. Очевидно, что отображения φ_i: $M \to M_i$, $i = 1, 2$, определенные формулами $\varphi_i(x_1, x_2) = x_i$, являются аналитическими отображениями. Отображение φ_i называется *проекцией* многообразия M на M_i, $i = 1, 2$.

1.4. Касательные векторы; касательные пространства. Пусть M — вещественное (соответственно комплексное) аналитическое многообразие размерности m, x — некоторая точка из M. Обозначим через $A(x)$ объединение алгебр $D(U)$ для всех открытых множеств U, содержащих x. Если $f, g \in A(x)$ и $f \in D(U_1)$, $g \in D(U_2)$, то $\lambda f + \mu g$ и fg содержатся в $D(U_1 \cap U_2)$, поэтому в классе функций $A(x)$ определены линейные операции и произведение любых двух элементов.

Касательным вектором к многообразию M в точке x назовем отображение v класса $A(x)$ в поле вещественных (соответственно комплексных) чисел, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) $$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \tag{1.4.1}$$

для всех $f, g \in A(x)$ и всех вещественных (соответственно комплексных) λ и μ;

2) $$v(fg) = v(f)\, g(x) + f(x)\, v(g) \tag{1.4.2}$$

для всех $f, g \in A(x)$.

Если v — касательный вектор, f — функция из $A(x)$, то число $v(f)$ называется *производной функции f по направлению v*.

Пусть v, v' — касательные векторы к многообразию M в точке x. Очевидно, что отображение $\lambda v + \mu v'$, определенное формулой $(\lambda v + \mu v')(f) = \lambda v(f) + \mu v'(f)$, удовлетворяет условиям 1) и 2) для любых вещественных (соответственно комплексных) чисел λ и μ. Следовательно, касательные векторы в точке x образуют линейное пространство; это пространство называется *касательным пространством* к многообразию M в точке x и обозначается $T_x(M)$.

Пусть U — некоторая координатная окрестность точки $x \in M$ и пусть $x_1, \ldots, x_m$ — система аналитических координат в U. Пусть $f \in A(x)$; тогда $f \in D(V)$, где V — некоторое открытое множество в M, содержащее x. Так как $U \cap V$ открыто и содержит x, то можно считать, что $V \subset U$. Согласно условию в) существует аналитическая на множестве $\xi(V)$ функция F такая, что $f = F \circ \xi$. Очевидно, что формула

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_{x_k = x_k(x)} \tag{1.4.1}$$

определяет касательный вектор к многообразию M в точке x при любом выборе вещественных (соответственно комплексных) коэффициентов c_i. Покажем, что формула (1.4.3) определяет общий вид касательного вектора к многообразию M в точке x.

I. *Пусть* $x_1, \ldots, x_m$ — *система аналитических координат в некоторой координатной окрестности* U *точки* $x \in M$, v — *касательный вектор к многообразию* M *в точке* x. *Для любой функции* $f \in A(x)$ *имеет место равенство*

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{x_k = x_k(x)}. \tag{1.4.2}$$

В частности, касательный вектор однозначно определяется своими значениями на элементах системы аналитических координат.

Доказательство. Если $f = g$ — функция, тождественно равная единице в некоторой окрестности V точки x, то из соотношения (1.4.2) получаем, что $v(f) = 2v(f)$, т. е. $v(f) = 0$. Следовательно, $v(c) = 0$ для любой постоянной функции c. Пусть теперь f — произвольная функция из $A(x)$, F — соответствующий ей аналитическая функция от $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$ такая, что $f = F \circ \xi$. Используя формулу Тейлора для функции F в окрестности точки $(y_1^0, \ldots, y_m^0) = (x_1(x), \ldots, x_m(x))$, получаем, что

$$F(y_1, \ldots, y_m) = a_0 + a_1(y_1 - y_1^0) + \ldots + a_m(y_m - y_m^0) + \\ + \sum_{i,j=1}^{m} (y_i - y_i^0)(y_j - y_j^0) G_{ij}, \tag{1.4.3}$$

где G_{ij} — некоторые аналитические в окрестности точки $(y_1^0, \ldots, y_m^0)$ функции переменных $y_1, \ldots, y_m$. Из формулы (1.4.5) следует, что $f = $ $= F \circ \xi$ представима в виде

$$f = a_0 + a_1(x - y_1^0) + \ldots + a_m(x_m - y_m^0) + \\ + \sum_{i,j=1}^{m} (x_i - y_i)(x_j - y_j^0)\, g_{ij}, \tag{1.4.4}$$

где g_{ij} — некоторые функции из $A(x)$. Применяя касательный вектор v к обеим частям равенства (1.4.6) и пользуясь равенствами (1.4.1), (1.4.2) и соотношением $v(c) = 0$, получаем, что

$$v(f) = a_1 v(x_1 - y_1^0) + \ldots + a_m v(x_m - y_m^0) + \\ + v\Big(\sum_{i,j=1}^{m} (x_i - y_i^0)(x_j - y_j^0)\, g_{ij}\Big) = a_1 v(x_1) + \ldots + a_m(v)(x_m) + \\ + \sum_{i,j=1}^{m} \Big\{ \Big[(x_i(x) - y_i^0)\, v(x_j - y_j^0) + (x_j(x) - y_j^0)\, v(x_i - y_i^0) \Big]\, g_{ij}(x) + \\ + v(g_{ij}(x_i(x) - y_i^0)(x_j(x) - y_j^0) \Big\} = a_1 v(x_1) + \ldots + a_m v(x_m), \tag{1.4.5}$$

так как $x_i(x) = y_i^0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Так как $a_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(y_1^0, \ldots, y_m^0)$, то формула (1.4.4) следует из (1.4.7).

II. *Касательное пространство $T_x(M)$ имеет базис из m векторов v_i, определяемых формулами $v_i(f) = \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{x_k = x_k(x)}$.*

Доказательство непосредственно следует из (1.4.4). Действительно, достаточно показать, что векторы v_i линейно независимы; это сразу следует из соотношения $v_i(x_j) = \delta_{ij}$.

1.5. Дифференциал аналитического отображения. Пусть M, N — аналитические многообразия, φ — аналитическое отображение многообразия M в многообразие N. Пусть v — касательный вектор к многообразию M в точке x. Пусть $y = \varphi(x)$. Положим для любой функции $g \in A(y)$

$$w(g) = v(g \circ \varphi); \tag{1.5.1}$$

формула (1.5.1), очевидно, определяет касательный вектор w к многообразию N в точке y. Обозначим $w = \varphi_*(v)$. Определяемое формулой (1.5.1) отображение φ_* касательного пространства $T_x(M)$ в касательное пространство $T_y(N)$ есть, очевидно, линейное отображение. Оно называется *дифференциалом* отображения φ в точке x и иногда обозначается $d\varphi$ или $d\varphi_x$.

I. *Пусть M и N — многообразия, φ — аналитическое отображение многообразия M в N, x — некоторая точка в M. Пусть отображение $d\varphi_x$ удовлетворяет следующему условию: если $v \in T_x(M)$ и $d\varphi_x(v) = 0$, то $v = 0$. Тогда для любой координатной окрестности W точки $\varphi(x)$ в N и любой системы аналитических координат $y_1, \ldots, y_n$ в W среди функций $y_1 \circ \varphi, \ldots, y_n \circ \varphi$ можно выбрать m функций, образующих систему координат в некоторой окрестности $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x на M. Обратно, если U — координатная окрестность точки x в M и $x_1, \ldots, x_m$ — система аналитических координат в U, то существует координатная окрестность W точки $\varphi(x)$ и система аналитических координат $z_1, \ldots, z_n$ в W, удовлетворяющая условию $x_j = z_j \circ \varphi$ при всех $j = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Пусть $V \subset \varphi^{-1}(W)$ — координатная окрестность точки x на M и $x_1, \ldots, x_m$ — система аналитических координат в V. Функции $y_i \circ \varphi$ можно представить в подмножестве V в виде $y_i \circ \varphi = F_i \circ \xi$, где F_i — аналитическая функция на $\xi(V)$. Покажем, что ранг матрицы $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$ равен m, т. е. равен числу переменных $x_1, \ldots, x_m$. Достаточно показать, что из соотношения

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} = 0 \tag{1.5.2}$$

следует, что все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ равны нулю. Введем касательный вектор v к многообразию M в точке x, определенный формулой (1.4.3) при $c_i = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда соотношение (1.5.2) означает, что $v(y_i \circ \varphi) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, т. е. $(d\varphi_x(v))(y_i) = 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Из формулы (1.4.4) следует тогда, что $d\varphi_x(v) = 0$. Отсюда, по условию предложения I, $v = 0$, т. е. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Итак, матрица $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$ имеет ранг m. Следовательно, существуют индексы $i_1, \ldots, i_m$ среди чисел $1, \ldots, n$, для которых определитель матрицы $\left(\frac{\partial F_{i_p}}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$, $p, j = 1, \ldots, m$, отличен от нуля. Согласно I п. 1.1, функции $y_{i_1} \circ \varphi, \ldots, y_{i_m} \circ \varphi$ образуют систему аналитических координат в некотором открытом подмножестве $U \subset V$.

В свою очередь функции x_j, $j = 1, \ldots, m$, можно представить на множестве U в виде $x_j = G_j(y_{i_1} \circ \varphi, \ldots, y_{i_n} \circ \varphi)$, где G_j — аналитические функции своих аргументов, и определитель $\left(\frac{\partial G_j}{\partial y_{i_p}}\right)_{y_{i_k} = y_{i_k}(\varphi(x))}$ не равен нулю. Пусть $z_j = G_j(y_{i_1}, \ldots, y_{i_m})$, $j = 1, \ldots, m$, а в качестве $z_{m+1}, \ldots, z_n$ возьмем функции y_i, индексы которых не входят в набор $i_1, \ldots, i_m$. Читатель легко проверит, что $z_1, \ldots, z_n$ — система координат в некоторой окрестности W точки $\varphi(x)$, причем $z_j \circ \varphi = x_j$ при $j = 1, \ldots, m$.

II. *Пусть выполнены условия предложения* I. *Существует окрестность U точки x в M такая, что φ гомеоморфно отображает U на $\varphi(U)$.*

Доказательство сразу следует из утверждения предложения I. Действительно, если W и $z_1, \ldots, z_n$ удовлетворяют условиям I и $U \subset \varphi^{-1}(W)$, то отображение φ имеет на $\varphi(U)$ аналитическое обратное отображение, определяемое формулой $\psi(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_m)$, так как согласно I $\psi \circ \varphi$ есть тождественное отображение U на себя.

Назовем отображение φ многообразия M в многообразие N *регулярным* в точке $x \in M$, если отображение φ аналитично и $d\varphi_x$ есть взаимно однозначное отображение $T_x(M)$ в $T_{\varphi(x)}(N)$ (т. е. из условия $d\varphi_x(v) = 0$ для данного $v \in T_x(M)$ следует, что $v = 0$).

III. *Пусть M и N — два многообразия, φ — аналитическое отображение многообразия M в N, x — точка в M. Пусть $d\varphi_x(T_x(M)) = T_{\varphi(x)}(N)$. Если $y_1, \ldots, y_n$ — система аналитических координат в окрестности W точки $\varphi(x)$ в N, то существует такая координатная окрестность U точки x и система аналитических координат $z_1, \ldots, z_m$ в U, что $z_j = y_j \circ \varphi$ при всех $j = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — система аналитических координат в окрестности V точки x, где $V \subset \varphi^{-1}(W)$. Тогда

$y_i \circ \varphi = F_i \circ \xi$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Покажем, что ранг матрицы $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$ равен n. Действительно, пусть имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.5.3}$$

и пусть w_i — касательный вектор к многообразию N в точке $\varphi(x)$, определенный условием $w_i(y_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$. По предположению, существует касательный вектор $v_i \in T_x(M)$ такой, что $d\varphi_x(v_i) = w_i$. Тогда из очевидного равенства

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F_p}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} v_i(x_j) = v_i(y_p \circ \varphi) \tag{1.5.4}$$

(вытекающего из теоремы о производной сложной функции) следует, что

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F_p}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)} v_i(x_j) = \\ = v_i(y_p \circ \varphi) = (d\varphi_x(v_i))(y_p) = w_i(y_p) = \delta_{ip}. \tag{1.5.5}$$

Умножая p-е равенство (1.5.5) на λ_p и суммируя от 1 до n, получаем с учетом (1.5.3), что $\lambda_i = 0$. Таким образом, ранг матрицы $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$ равен n. Можно считать, что определитель матрицы $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, отличен от нуля. Тогда из предложения I п. 1.1 следует, что функции $y_1 \circ \varphi, \ldots, y_n \circ \varphi, x_{n+1}, \ldots, x_m$ образуют систему аналитических координат в некоторой окрестности $U \subset V$ точки x на M.

IV. *Пусть выполнены условия предложения* III. *Существует окрестность U точки x в M такая, что $\varphi(U)$ есть окрестность точки $\varphi(x)$ в N.*

Доказательство сразу следует из утверждения предложения III.

V. *Пусть выполнены условия предложения* I *и пусть, кроме того, $d\varphi_x(T_x(M)) = T_{\varphi(x)}(N)$ (так что $d\varphi_x$ есть линейный изоморфизм пространства $T_x(M)$ на пространство $T_{\varphi(x)}(N)$). Тогда существует окрестность U точки x в M, гомеоморфно отображающаяся под действием φ на некоторую окрестность W точки $\varphi(x)$ в N; при этом отображение φ^{-1} открытого множества W на U аналитично.*

Доказательство сразу следует из предложений I–IV.

Пусть M_1, M_2 — многообразия размерностей m_1 и m_2 соответственно; пусть $M = M_1 \times M_2$ — произведение этих многообразий. Пусть $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, $x = (x_1, x_2) \in M$. Обозначим через φ_i проекцию многообразия M на M_i, $i = 1, 2$. Если $v \in T_x(M)$, то можно определить касательные векторы $v_i = d\varphi_i(v) \in T_{x_i}(M)$, $i = 1, 2$. Пусть $x_1^{(i)}, \ldots, x_{m_i}^{(i)}$ — система аналитических координат в окрестности U_i точки x_i на многообразии M_i, $i = 1, 2$. Тогда функции $x_1^{(1)} \circ \varphi_1, \ldots, x_{m_1}^{(1)} \circ \varphi_1, x_1^{(2)} \circ \varphi_2, \ldots, x_{m_2}^{(2)} \circ \varphi_2$ образуют систему координат в окрестности $U = U_1 \times U_2$ точки x на M. Если $v_i \in T_{x_i}(M_i)$, $i = 1, 2,$ — произвольные касательные векторы, то равенства $v(x_k^{(1)} \circ \varphi_1) = v_1(x_k^{(1)})$, $k = 1, \ldots, m_1$, $v(x_k^{(2)} \circ \varphi_2) = v_2(x_k^{(2)})$, $k = 1, \ldots, m_2$, определяют вектор $v \in T_x(M)$, причем $d\varphi_i(v) = v_i$, $i = 1, 2$. Одновременно мы видим, что равенства $d\varphi_i(v) = v_i$, $i = 1, 2$, определяют вектор $v \in T_x(M)$ однозначно. Таким образом, пространство $T_x(M)$ *можно отождествить с прямой суммой пространств* $T_{x_1}(M_1)$ *и* $T_{x_2}(M_2)$.

Пусть M — вещественное (соответственно комплексное) аналитическое многообразие, f — вещественная (соответственно комплексная) аналитическая функция на f. Тогда f можно рассматривать как отображение многообразия M в многообразие $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) из примера 1 п. 1.2. Дифференциал функции f в точке $x \in M$ есть линейное отображение касательного пространства $T_x(M)$ в касательное пространство $L = T_{f(x)}(\mathbf{R})$ (соответственно $L = T_{f(x)}(\mathbf{C})$). Касательное пространство L одномерно; в качестве единственного базисного вектора в L можно взять вектор w_0, определенный условием $w_0(x) = 1$, где x — тождественное отображение пространства $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) на себя. Отождествим пространство L с пространством $\mathbf{R}(\mathbf{C})$, отождествляя вектор λw_0 с числом λ. Тогда отображение df можно рассматривать как вещественный (соответственно комплексный) линейный функционал на $T_x(M)$. По определению, имеем $df(v) = v(f)$ для всех $v \in T_x(M)$.

1.6. Векторные поля. Пусть M — аналитическое многообразие, U — открытое подмножество M. Отображение X, сопоставляющее каждой точке $x \in U$ касательный вектор $X(x)$ к многообразию M в точке x, называется *векторным полем* на U.

Пусть $U \subset M$, $f \in D(U)$, X — векторное поле на U. Положим

$$g(x) = X(x)\, f \tag{1.6.1}$$

для всех $x \in U$; тогда функция g определена на U. Обозначим функцию g через Xf. Векторное поле X называется *аналитическим*, если для любого $V \subset U$ и имеем $Xf \in D(V)$ для всех $f \in D(V)$.

Пусть U — координатная окрестность в M, $x_1, \ldots, x_m$ — система аналитических координат в U, $V \subset U$, $f \in D(V)$. Тогда $f = F \circ \xi$, где F — аналитическая функция на $\xi(V)$. Положим

$$X_j(x)(f) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad x \in U. \tag{1.6.2}$$

Очевидно, что каждой точке $x \in U$ сопоставлен касательный вектор к многообразию M в точке x, причем отображение $x \to X_i(x)$ есть аналитическое векторное поле на U.

Пусть X — некоторое векторное поле на U. Из предложения I п. 1.4 следует, что X можно представить в виде

$$X(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j(x) X_j(x), \quad x \in U, \tag{1.6.3}$$

где $X_j(x)$ определено равенством (1.6.2), а $a_1, \ldots, a_m$ — некоторые функции, определенные на U. Если векторное поле X аналитично, то и функции $a_j(x)$ аналитичны, так как

$$a_j(x) = X x_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.6.4}$$

где $x_j \in D(U)$; поэтому $a_j(x) \in D(U)$. Обратно, если $a_j(x) \in D(U)$ при $j = 1, \ldots, m$, то формула (1.6.3) определяет, очевидно, аналитическое векторное поле на U. Из (1.6. 2) следует, что соотношение (1.6.3) равносильно равенству

$$(Xf)(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j(x) \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(x)}, \quad f \in D(U); \tag{1.6.5}$$

поэтому иногда мы будем записывать соотношение (1.6.3) в виде формального равенства

$$X = \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.6.6}$$

Пусть X и Y — аналитические векторные поля на многообразии M. Положим

$$Z = X \circ Y - Y \circ X. \tag{1.6.7}$$

Отображение Z есть аналитическое векторное поле на M. Действительно, если $x \in M$, U — координатная окрестность точки x и $x_1, \ldots, x_m$ — система аналитических координат в U, то для любой функции $f \in D(V)$, где $V \subset U$, $x \in V$, имеем

$$\begin{aligned} (Xf)(y) &= \sum_{j=1}^{m} a_j(x_1(y), \ldots, x_m(y)) \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(y)}, \\ (Yf)(y) &= \sum_{j=1}^{m} b_j(x_1(y), \ldots, x_m(y)) \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(y)} \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

для всех $y \in Y$, где a_j, b_j — некоторые аналитические функции на $\xi(V)$. Прямое вычисление показывает, что

$$(Zf)(y) = \sum_{i,j=1}^{m} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_k = x_k(y)}, \quad y \in Y; \tag{1.6.9}$$

соотношение (1.6.9) означает, в частности, что Z есть аналитическое векторное поле на многообразии M. Обозначим векторное поле Z через $[X, Y]$; это векторное поле часто называется *коммутатором* векторных полей X и Y.

Так как векторное поле X принимает в каждой точке $x \in M$ значения в линейном пространстве $T_x(M)$, то во множестве векторных полей на многообразии M определены операции сложения и умножения на число, определенные формулами

$$(X + Y)(x) = X(x) + Y(x), \quad (\alpha X)(x) = \alpha X(x). \tag{1.6.10}$$

Читатель легко проверит, что определение (1.6.10) превращает множество векторных полей на многообразии M в линейное пространство, а множество аналитических векторных полей является линейным подпространством пространства всех векторных полей. Легко непосредственно проверить также, что для любых аналитических векторных полей X, Y, Z на M и любых чисел λ, μ имеют место равенства

$$[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z], \quad [X, \lambda Y + \mu Z] = \\ = \lambda[X, Y] + \mu[X, Z], \tag{1.6.11}$$

$$[X, X] = 0, \tag{1.6.12}$$

$$[[X, Y, Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0. \tag{1.6.13}$$

Равенство (1.6.13) называется *тождеством Якоби*. Из (1.6.11) и (1.6.12) следует, что

$$0 = [X + Y, X + Y] = [X, Y] + [Y, X],$$

поэтому

$$[X, Y] = -[Y, X] \tag{1.6.14}$$

для всех аналитических векторных полей X, Y на M.

Пусть φ — аналитическое отображение многообразия M в некоторое многообразие N, X — векторное поле на M. Векторное поле Y на N называется образом векторного поля X, если $d\varphi_x(X(x)) = Y(\varphi(x))$ для всех $x \in M$; обозначим это векторное поле Y через $d\varphi(X)$. Если отображение φ регулярно в каждой точке $x \in X$ (или, как мы будем говорить, *всюду регулярно*), то на многообразии M может существовать лишь одно векторное поле X, образом которого является заданное векторное поле Y на N; действительно, для регулярного отображения вектор $X(x)$ однозначно определяется своим образом при отображении $d\varphi_x$. Докажем теорему существования такого векторного поля X, что $Y(\varphi(x)) = d\varphi_x(X(x))$ для всех $x \in M$.

I. *Пусть φ — всюду регулярное отображение многообразия M в многообразие N; пусть x — некоторая точка в M. Пусть Y — аналитическое векторное поле на N такое, что $Y(\varphi(x)) \in d\varphi_x(T_x(M))$ для всех $x \in N$; тогда существует единственное аналитическое векторное поле X на M, образом которого является поле Y.*

Доказательство. Из условия следует, что для любого $x \in M$ существует единственный элемент $X(x) \in T_x(M)$ такой, что $d\varphi_x(X(x)) = Y(\varphi(x))$. Нужно доказать, что отображение $X\colon x \to X(x)$ есть аналитическое векторное поле. Из предложения I п. 1.5 следует, что в некоторой окрестности W точки $\varphi(x)$ в N существует такая аналитическая система координат $y_1, \ldots, y_n$, что $y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi$ есть аналитическая система координат в некоторой окрестности $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x на M. Для $y \in U$ соотношение $(d\varphi_y)(X(y)) = Y(\varphi(y))$ означает, что $X(y)(y_i \circ \varphi) = d\varphi_y(X(y))(y_i) = Y(\varphi(y))(y_i) = (Yy_i)(\varphi(y))$, т. е. функция $X(y_i \circ \varphi)$ совпадает на множестве U с функцией $Yy_i \circ \varphi$. Так как Y есть аналитическое векторное поле на N, то Yy_i — аналитическая функция на W; поэтому функция $Yy_i \circ \varphi$ аналитична на U. Следовательно, $X(y_i \circ \varphi)$ — аналитическая функция на U; это доказывает, что X — аналитическое векторное поле.

Если φ не является отображением многообразия M *на* N, то образ векторного поля на M, вообще говоря, определен неоднозначно. Тем не менее справедливо следующее предложение.

II. *Пусть φ — аналитическое отображение многообразия M в многообразие N, X_1 и X_2 — аналитические векторные поля на M, Y_1 и Y_2 — образы полей X_1 и X_2 соответственно. Тогда векторное поле $[Y_1, Y_2]$ является образом векторного поля $[X_1, X_2]$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Пусть V — окрестность точки y_0 в N и $f \in D(V)$. Обозначим через U некоторую окрестность точки x_0 в M, удовлетворяющую условию $\varphi(U) \subset V$. Тогда соотношение $Y_i = d\varphi(X_i)$ означает, что $Y_i(\varphi(x))\,f = d\varphi_x(X_i(x))\,f$, т. е.

$$(U_i f)(\varphi(x)) = (X_i(f \circ \varphi))(x) \tag{1.6.15}$$

для всех $x \in U$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$(Y_i f \circ \varphi)(x) = (X_i(f \circ \varphi))(x) \tag{1.6.16}$$

для всех $x \in U$, $i = 1, 2$. Из (1.6.15) и (1.6.16) непосредственно следует, что

$$(Y_1 Y_2 f)(\varphi(x)) = (X_1(Y_2 f \circ \varphi))(x) = (X_1 X_2(f \circ \varphi))(x)$$

для всех $x \in U$. Аналогичная формула верна для $(Y_2 Y_1 f)(\varphi(x))$. Вычитая, получим равенство

$$([Y_1, Y_2]\,f)(\varphi(x)) = ([X_1, X_2](f \circ \varphi))(x)$$

для всех $x \in U$; следовательно, $([Y_1, Y_2])(\varphi(x)) = d\varphi_x([X_1, X_2](x))$.

1.7. Подмногообразия. Многообразие N называется *подмногообразием* многообразия M, если N — подмножество M и тождественное отображение многообразия N в многообразие M регулярно в каждой точке многообразия N. Очевидно, из этого определения следует, что тождественное отображение M в N непрерывно. Заметим, что открытое подмногообразие N многообразия M есть подмногообразие и в смысле только что данного определения.

Пусть N — подмногообразие многообразия M; пусть φ — тождественное отображение N в M. Пусть $x \in N$, U — открытое подмножество в M, $x \in U$, f — элемент алгебры $D(U)$; тогда функция $f \circ \varphi$ аналитична на открытом подмножестве $U \cap N$ многообразия N. Согласно предложению I п. 1.5 существует такое открытое множество $U \subset M$ и система аналитических координат $x_1, \ldots, x_m$ в окрестности U, что функции $x_1 \circ \varphi, \ldots, x_n \circ \varphi$ (где n — размерность многообразия N) образуют систему координат в открытом множестве $U \cap N$ многообразия N. Пусть $g \in D(U \cap N)$; тогда g можно представить в виде аналитической функции $G(x_1 \circ \varphi, \ldots, x_n \circ \varphi)$. Пусть $F(y) = G(x_1(y), \ldots, x_n(y))$, $y \in M$, — аналитическая функция в U на M, и $F \circ \varphi = g$ на $U \cap N$. Следовательно, любая функция g, аналитическая в некоторой окрестности точки $x \in N$, представима в некоторой окрестности $U \subset M$ точки x в виде $g = f \circ \varphi$, где $f \in D(U)$ на M.

Дифференциал $d\varphi_x$ отображения φ в точке $x \in N$ изоморфно отображает касательное пространство $T_x(N)$ на некоторое векторное подпространство $\widetilde{T_x(N)}$ пространства $T_x(M)$. Иногда пространство $\widetilde{T_x(N)}$ называют *касательным пространством к многообразию N в точке x*.

Пусть X — аналитическое векторное поле на M, такое, что $X(x) \in \widetilde{T_x(N)}$ для всех $x \in N$. Так как отображение φ всюду регулярно, то из предложения I п. 1.6 следует, что существует единственное аналитическое векторное поле Y на N такое, что $X(x) = d\varphi_x(Y(x))$ для всех $x \in N$. Говорят, что векторное поле Y *индуцировано* на N векторным полем X. Легко проверить, что если X_1, X_2 — аналитические векторные поля на M, Y_1, Y_2 — индуцированные ими векторные поля на N, то векторное поле $[Y_1, Y_2]$ индуцировано векторным полем $[X_1, X_2]$.

I. *Пусть M — многообразие, N — подмногообразие M, $x \in N$. Существует окрестность U точки x в N, окрестность V точки x в M, содержащая U, и набор функций $f_1, \ldots, f_k \in D(V)$, удовлетворяющие следующему условию: точка $z \in V$ принадлежит U тогда и только тогда, когда $f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\dim M = m$, $\dim N = n$. Согласно предложению I п. 1.5, существует такая окрестность V' точки x в M и такая система аналитических координат $x_1, \ldots, x_m$ в окрестности V', что ограничения функций $x_1, \ldots, x_n$ на $N \cap V'$ образуют систему аналитических координат в некоторой окрестности U точки x в N. Пусть $\eta(z) = (x_1(z), \ldots, x_n(z))$ для всех $z \in V'$. Обозначим через V подмножество множества V', образованное такими точками $z \in V'$, что $\eta(z) \in \eta(U)$. Очевидно, что V — окрестность точки x в M и ограничения функций $x_1, \ldots, x_m$ на V образуют систему аналитических координат в V. Ограничения функций $x_{n+1}, \ldots, x_m$ на множество U являются аналитическими функциями на U. Следовательно, существуют такие аналитические функции $F_1, \ldots, F_{n-m}$ на $\eta(U)$, что $x_{n+j}(z) = F_j(x_1(z), \ldots, x_n(z))$ для всех $z \in U$, $j = 1, \ldots, m-n$. Положим $f_j = x_{n+j} - F_j(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $j = 1, \ldots, m-n$. Согласно предыдущему, $f_j(z) = 0$ при всех $z \in U$, $j = 1, \ldots, m-n$. Обратно, пусть точка $z \in V$ выбрана так, что $f_j(z) = 0$ при всех $j = 1, \ldots, m-n$. Пусть w — точка в множестве U, определяемая условием $\eta(w) = \eta(z)$ (такая точка w существует, так как $\eta(U) = \eta(V)$). Тогда $x_{n+j}(w) = F_j(x_1(w), \ldots, x_n(w)) = F_j(\eta(w)) = F_j(\eta(z))$. Но $f_1(z) = 0$, т.е. $x_{n+j}(z) - F_j(x_1(z), \ldots, x_n(z)) = 0$. Следовательно, $F_j(\eta(z)) = x_{n+j}(z)$ и координаты точек w и z в окрестности V совпадают. Таким образом, $w = z$; но $w \in U$, поэтому $z \in U$, что завершает доказательство предложения I (причем $k = m - n$).

§ 2. Алгебры Ли

Пусть K — поле вещественных или комплексных чисел. Множество L называется *алгеброй Ли над полем* K, если:

а) L — линейное пространство над K (это означает, что в L определено умножение элементов $x \in L$ на числа из K);

б) каждой паре $x, y \in L$ сопоставлен элемент из L, обозначаемый $[x, y]$, так что выполнены следующие условия:

б$_1$) $[x, y]$ линейно относительно x и относительно y (это означает, что $[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$, $[x, \alpha y] = \alpha[x, y]$ при $\alpha \in K$ и $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$, $[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2]$ для всех $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in L$);

б$_2$)
$$[x, x] = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in L; \tag{2.1.1}$$

б$_3$)
$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \tag{2.1.2}$$

для всех $x, y, z \in L$.

Тождество (2.1.2) называется *тождеством Якоби*. Элемент $[x, y]$ часто называется *коммутатором* элементов $x, y \in L$.

Если K — поле вещественных (соответственно комплексных) чисел, то алгебра Ли L называется *вещественной* (соответственно *комплексной*) алгеброй Ли. В дальнейшем, если явно не оговорено противное, все алгебры Ли L предполагаются конечномерными (как линейные пространства).

I. *В любой алгебре Ли L имеет место равенство*

$$[x, y] = -[y, x] \tag{2.1.3}$$

для всех $x, y \in L$.

Доказательство. В силу условий б$_1$) и б$_2$)

$$0 = [x+y, x+y] = [x, x] + [y, x] + [x, y] + [y, y] = [x, y] + [y, x].$$

Пусть L — алгебра Ли над K, и $e_1, \ldots, e_n$ — базис векторного пространства L. Разлагая элементы $[e_i, e_j]$ алгебры Ли L по базису $e_1, \ldots, e_n$, получаем соотношения

$$[e_i, e_j] = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_{ijk} e_k. \tag{2.1.4}$$

Числа $c_{ijk} \in K$ называются *структурными постоянными* алгебры Ли L относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$. Легко видеть, что соотношения (2.1.2) и (2.1.3) равносильны соотношениям.

$$c_{ijk} = -c_{jik} \tag{2.1.5}$$

для всех $i, j, k = 1, \ldots, n$;

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ijk} c_{klm} + c_{jik} c_{kim} + c_{lik} c_{kjm}) = 0 \tag{2.1.6}$$

для всех $i, j, l, m = 1, \ldots, n$.

Общие определения пп. 2.1–2.3 главы II принимают в случае алгебр Ли следующий вид.

Пусть L — алгебра Ли. Подмножество $M \subset L$ называется *идеалом* в L, если M — линейное подпространство в L и $[x, y] \in M$ для всех $x \in M$, $y \in L$. Подмножество $L' \subset L$ называется *подалгеброй Ли* алгебры Ли L, если L' — линейное подпространство в L и $[x, y] \in L'$ для всех $x, y \in L'$. Ясно, что идеал есть также подалгебра Ли. Пусть L, L_1 — алгебры Ли над полем K, π — линейное отображение L в L_1. Отображение π называется *гомоморфизмом*, если

$$[\pi(x), \pi(y)] = \pi([x, y]) \tag{2.1.7}$$

для всех $x, y \in L$. Если $\operatorname{Ker} \pi = 0$, то π называется *точным*. Взаимно однозначный гомоморфизм L на L_1 называется *изоморфизмом* L и L_1; в этом случае L и L_1 называются *изоморфными*.

II. *Пусть* L, L_1 *— алгебры Ли и* $\pi\colon L \to L_1$ *— гомоморфизм; тогда* $\pi(L)$ *есть подалгебра Ли алгебры Ли* L_1; *ядро отображения* π *является идеалом в* L. *Пусть* L *— алгебра Ли,* M *— идеал в* L, $L' = L/M$ *— фактор-пространство* L *по* M *и* π *— каноническое отображение* L *на* L'. *Положим*

$$[x', y'] = \pi([x, y]) \tag{2.1.8}$$

для $x', y' \in L$ *и* $x' = \pi(x)$, $y' = \pi(y)$, $x, y \in L$. *Тогда* $[x', y']$ *не зависит от выбора представителей* $x \in x'$, $y \in y'$ *и* $[x', y']$ *удовлетворяет условию* б). *Следовательно*, *при таком определении* $[x', y']$ *множество* L' *есть алгебра Ли над* K.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству соответствующих предложений для ассоциативных алгебр (ср. п. 2.2 гл. II).

Алгебра Ли L' называется *фактор-алгеброй* алгебры Ли L по идеалу M.

III. *Пусть* $L_1, \ldots, L_m$ — *алгебры Ли над* K. *Линейное пространство* $L = L_1 \dotplus \ldots \dotplus L_m$, *в котором*

$$[(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)] = ([x_1, y_1], \ldots, [x_m, y_m]), \tag{2.1.9}$$

где $x_i, y_i \in L_i$, $i = 1, \ldots, m$, *является алгеброй Ли над* K.

Проверка этого утверждения предоставляется читателю. Алгебра Ли L называется *прямой суммой* алгебр Ли L_i, $i = 1, \ldots, m$.

Примеры алгебр Ли. 1. Пусть L — конечномерное векторное пространство над K и пусть $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in L$. Очевидно, что L — алгебра Ли над K; она называется *коммутативной*, или *абелевой* алгеброй Ли.

2. Пусть V — конечномерное векторное пространство над K, L — линейное пространство линейных отображений V в V. Для $x, y \in L$ положим

$$[x, y] = xy - yx. \tag{2.1.10}$$

Тогда L становится алгеброй Ли над K; эта алгебра Ли обозначается $gl\,(V)$; если $V = K^n$ [1]), то алгебра Ли $gl\,(V)$ изоморфна алгебре Ли $n \times n$-матриц с элементами из K, где $[\cdot, \cdot]$ определено формулой (2.1.7). Эта алгебра Ли обозначается $gl\,(n, K)$. Отметим важные для дальнейшего подалгебры Ли алгебры Ли $gl\,(n, k)$: подалгебру $sl\,(n, K)$, образованную матрицами с нулевым следом; подалгебру $so\,(n, K)$ всех кососимметрических матриц (т. е. таких матриц A, что $A^t = -A$, где A^t транспонирована к A); и если $n = 2m$ — подалгебру $sp\,(n, K)$, образованную матрицами A такими, что $A^t J + JA = 0$, где $J = \begin{Vmatrix} 0 & J_m \\ -J_m & 0 \end{Vmatrix}$, а I_m — единичная матрица порядка m. Проверка того, что выделенные подмножества действительно являются подалгебрами Ли алгебры Ли $gl\,(n, K)$, предоставляется читателю.

3. Пример 2) допускает некоторое обобщение. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем K; положим $[a, b] = ab - ba$ для всех $a, b \in A$. Эта операция наделяет A структурой алгебры Ли.

[1]) K^n — линейное пространство над полем K, образованное упорядоченными наборами из n элементов поля K с обычными покомпонентными операциями сложения наборов и умножения их на число.

4. Пусть L — трехмерное вещественное евклидово пространство. Для $x, y \in L$ определим $[x, y]$ как векторное произведение векторов x и y. Известные свойства векторного произведения показывают, что L является вещественной алгеброй Ли.

5. Любая комплексная алгебра Ли L может рассматриваться также и как вещественная алгебра Ли, так как в комплексном линейном пространстве определено умножение на вещественные числа, превращающее L в вещественное линейное пространство. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в комплексном линейном пространстве L, то $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ есть базис в вещественном линейном пространстве L; следовательно, размерность вещественной алгебры Ли L равна удвоенной размерности комплексной алгебры Ли L. Если (c_{ijk}) — структурные постоянные комплексной алгебры Ли L относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$, то из равенств (2.1.4) легко следует, что структурные постоянные вещественной алгебры Ли L относительно базиса $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ равны $\pm \operatorname{Re} c_{ijk}$, $\pm \operatorname{Im} c_{ijk}$:

$$\begin{aligned}
[e_k, e_l] = -[ie_k, ie_l] &= \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \operatorname{Re}(c_{klm})\, e_m + \operatorname{Im}(c_{klm})\, ie_m; \\
[ie_k, e_i] = [e_k, ie_l] &= \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \operatorname{Re}(c_{klm})\, ie_m - \operatorname{Im}(c_{klm})\, e_m.
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

В частности, алгебра Ли $gl\,(n, \mathbf{C})$ является также и вещественной алгеброй Ли.

Пусть L — алгебра Ли над K, V — конечномерное комплексное векторное пространство. Гомоморфизм π алгебры Ли L в алгебру $gl\,(V)$ (как алгебру Ли над полем K) называется *конечномерным представлением* алгебры Ли L в пространстве V. Размерность пространства V называется *размерностью* представления π.

Примеры представлений. 1. Пусть π — отображение L в $gl\,(V)$, определяемое формулой: $\pi(x) = 0$ для всех $x \in L$. Тогда π — представление L в V; оно называется *нулевым представлением* размерности n.

2. Пусть L — алгебра Ли. Для любого $x \in L$ обозначим через $\operatorname{ad} x$ линейное преобразование пространства V, определяемое формулой

$$(\operatorname{ad} x)(y) = [x, y] \tag{2.1.12}$$

для всех $y \in L$, Соотношение (2.1.2) можно переписать в виде

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]. \tag{2.1.13}$$

Подставляя соотношение (2.1.12) в (2.1.13), получаем, что

$$(\operatorname{ad}[x, y])\, z = \operatorname{ad} x \operatorname{ad} y(z) - \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x(z) = [\operatorname{ad} x,\ \operatorname{ad} y](z) \tag{2.1.14}$$

для всех $x, y, z \in L$; поэтому

$$\operatorname{ad}[x, y] = [\operatorname{ad} x,\ \operatorname{ad} y], \tag{2.1.15}$$

и формула (2.1.12) определяет гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl\,(L)$. Ядром этого гомоморфизма является идеал элементов $x \in L$ таких, что $[x,\,y] = 0$ для всех $y \in L$; этот идеал называется *центром* L. Если L — комплексная алгебра Ли, то гомоморфизм $x \to \operatorname{ad} x$ определяет представление L в L. Это представление называется *присоединенным представлением* алгебры Ли L.

Для представлений алгебр Ли можно определить понятия прямой суммы и тензорного произведения представлений, эквивалентных представлений, понятие подпредставления, представления в фактор-пространстве и неприводимого представления аналогично определениям соответствующих понятий для представлений групп и ассоциативных алгебр (см. гл. I и II). Подробности предоставляются читателю (см. также п. 1.2 гл. X).

§ 3. Группы Ли

3.1. Определение группы Ли. Множество G называется *группой Ли*, если:

1) G — топологическая группа;
2) G — аналитическое многообразие;
3) отображение $(g,\,h) \to gh^{-1}$ произведения $G \times G$ в G есть аналитическое отображение многообразий.

Если G — вещественное (соответственно комплексное) аналитическое многообразие, то говорят, что G — *вещественная* (соответственно *комплексная*) группа Ли.

Примеры. 1. Конечномерное векторное пространство $\mathbf{R}^n$ (соответственно $\mathbf{C}^n$), рассматриваемое как группа относительно сложения, снабженное обычной топологией и рассматриваемое в соответствии с примером 1 п. 1.2 как вещественное (соответственно комплексное) аналитическое многообразие, есть вещественная (соответственно комплексная) группа Ли.

2. Рассмотрим группу $GL(n,\,\mathbf{C})$. Пусть $g = (x_{ij}(g))$ — матрица из этой группы. Сопоставим матрице $g \in GL(n,\,\mathbf{C})$ точку $\varphi(g)$ пространства $\mathbf{C}^{n^2}$ с координатами $x_{ij}(g)$ (расположенными в каком-нибудь фиксированном порядке). Определенное таким образом отображение φ есть гомеоморфизм пространства $GL(n,\,\mathbf{C})$ на подмножество M тех точек из $\mathbf{C}^{n^2}$, для которых $\det(x_{ij}) \neq 0$. Множество M есть открытое подмножество в $\mathbf{C}^{n^2}$, поэтому M может рассматриваться как открытое подмногообразие в $\mathbf{C}^{n^2}$. Тогда мы можем рассматривать группу $GL(n,\,\mathbf{C})$ как n^2-мерное комплексное аналитическое многообразие, в частности, функции $x_{ij}(g)$ образуют систему аналитических координат на многообразии $GL(n,\,\mathbf{C})$.

Величины $x_{ij}(gh^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g)\, x_{kj}(h^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{ik}(g) A_{jk}(h)}{\det(x_{ij}(h))}$, где $A_{jk}(h)$ — алгебраическое дополнение элемента $x_{jk}(h)$, являются, очевидно, рациональными функциями от $x_{ij}(g)$, $x_{jk}(h)$, причем знаменатель $\det(x_{ij}(h))$ не обращается в нуль на $GL(n, \mathbf{C})$. Следовательно, отображение $(g, h) \to gh^{-1}$ является аналитическим отображением $GL(n, \mathbf{C}) \times GL(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})$. Таким образом, $GL(n, \mathbf{C})$ — комплексная группа Ли.

3. Рассмотрим группу T^1. Как нам известно из примера 2 п. 1.2, T^1 есть одномерное вещественное многообразие, причем функции $\cos\varphi = (1/2)(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$ и $\sin\varphi = (1/2i)(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$ являются аналитическими функциями на T^1. С другой стороны, у каждой точки многообразия T^1 существует окрестность, в которой по крайней мере одна из функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ образует систему аналитических координат. Поэтому формулы

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi,$$
$$\sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi$$

означают, что T^1 может рассматриваться как вещественная группа Ли.

4. Пусть G — комплексная группа Ли. Рассматривая комплексное аналитическое многообразие G как вещественное аналитическое многообразие (см. пример 4 п. 1.2), мы, очевидно, получаем вещественную группу Ли; таким образом, *всякая комплексная группа Ли может рассматриваться так же, как вещественная группа Ли*.

5. Пусть G, H — две группы Ли. Произведение $G \times H$ есть топологическая группа и аналитическое многообразие. Читатель легко проверит, что отображение φ многообразия $(G \times H) \times (G \times H)$ в $G \times H$, определенное формулой $\varphi((g, h), (g_1, h_1)) = (gg_1^{-1}, hh_1^{-1})$, есть аналитическое отображение. Следовательно, $G \times H$ есть группа Ли, она называется *произведением групп Ли G и H*.

3.2. Алгебра Ли группы Ли. Пусть G — группа Ли. Из определения следует, что отображение $g \to g^{-1}$ многообразия G на G аналитично, следовательно, при любом $h \in G$ отображение φ_h: $g \to \to hg = h(g^{-1})^{-1}$ многообразия G на G аналитично. Пусть $d\varphi_h$ — дифференциал отображения φ_h (см. п. 1.5). Векторное поле X на многообразии G называется *левоинвариантным*, если

$$(d\varphi_{gh^{-1}})_h X(h) = X(g) \quad \text{для всех} \quad g, h \in G. \tag{3.2.1}$$

I. *Векторное поле X на G тогда и только тогда левоинвариантно, когда $(d\varphi_g)_e X(e) = X(g)$ для всех $g \in G$.*

Доказательство. Если X левоинвариантно, то из (3.2.1) получаем при $h = e$, что $(d\varphi_g)_e X(e) = X(g)$ для всех $g \in G$. Обратно, пусть это условие выполнено. Отображения $\varphi_{h^{-1}}$ и φ_h обратны друг другу, поэтому $d\varphi_{h^{-1}}$ и $d\varphi_h$ обратны друг другу. Следовательно, $X(e) = (d\varphi_{h^{-1}})_h X(h)$; поэтому

$$X(g) = (d\varphi_g)_e (d\varphi_{h^{-1}})_h X(h) = (d(\varphi_g \circ \varphi_{h^{-1}}))_h X(h) = (d\varphi_{gh^{-1}})_h X(h).$$

II. *Для любого элемента* $X(e) \in T_e(G)$ (см. п. 1.4) *существует единственное левоинвариантное векторное поле* X *на* G, *принимающее в точке* e *значение* $X(e)$.

Доказательство сразу следует из I.

III. *Каждое левоинвариантное векторное поле на* G *аналитично.*

Доказательство. Пусть g_0 — некоторый элемент в G, U — координатная окрестность элемента g_0, $x_1, \ldots, x_m$ — система аналитических координат в U. Существует открытое множество $V \subset U$, содержащее элемент g_0, такое, что $gg_0^{-1}h \in U$ для всех $g, h \in V$. Пусть g — любой элемент из V; по определению дифференциала отображения имеем

$$X(g)\, x_i = ((d\varphi_{gg_0^{-1}})_{g_0} X(g_0))\, x_i = X(g_0)(x_i \circ \varphi_{gg_0^{-1}}).$$

Функции $x_i(gg_0^{-1}h)$ определены и аналитичны по g, h на $V \times V$; поэтому

$$x_i(gg_0^{-1}h) = F_i(x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots, x_m(h)),$$

где функции $F_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ аналитичны по своим аргументам в $\xi(V) \times \xi(V)$. Таким образом,

$$X(g)\, x_i = \sum_{j=1}^{m} (X(g_0)\, x_j) \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right)_{y_k = x_k(g),\, z_k = x_k(g_0)}. \tag{3.2.2}$$

В правой части формулы (3.2.2) величины $X(g_0)\, x_j$ постоянны, а из аналитичности функций $\partial F_i/\partial z$ следует, что функции $X(g)\, x_i$ аналитичны в V, что доказывает аналитичность преобразования X.

IV. *Если* X, Y — *левоинвариантные векторные поля, то поля* $X + Y$, λx, $[X, Y]$ *левоинвариантны.*

Доказательство очевидно для $X + Y$ и λX. Кроме того, из II п. 1.6 следует, что

$$(d\varphi_{gh^{-1}})_h([X, Y](g)) = [(d\varphi_{gh^{-1}})_h(X), (D\varphi_{gh^{-1}})_h(Y)](g) = [X, Y](g),$$

поэтому $[X, Y]$ также левоинвариантно.

V. *Совокупность левоинвариантных векторных полей на вещественной* (*соответственно комплексной*) *группе Ли* G *образует вещественную* (*соответственно комплексную*) *алгебру Ли относительно операций сложения, умножения на число и коммутирования векторных полей. Размерность этой алгебры Ли равна размерности многообразия* G.

Доказательство сразу следует из предложений II–IV и предложения II п. 1.4.

Можно аналогично определить алгебру Ли с помощью правоинвариантных векторных полей; подробности предоставляются читателю.

Примеры. 1. Пусть $\mathbf{R}$ — аддитивная группа вещественных чисел, x — координатная функция на $\mathbf{R}$, определяемая тождественным отображением $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}$. Пусть X — векторное поле на $\mathbf{R}$, определенное формулой $X(a) = 1$ для всех $a \in \mathbf{R}$. Векторное поле X левоинвариантно. Действительно, если φ_a — сдвиг на $a \in \mathbf{R}$, то $\varphi_a(b) = b + a$, $((d\varphi_a)_0 X(0))\, x = X(0)(x \circ \varphi_a) = X(0)(x + a) = 1 = X(a)\, x$. Таким образом, X — базисный элемент в алгебре Ли группы $\mathbf{R}$, сама же эта алгебра Ли состоит из всех вещественных кратных элемента X и является одномерной (абелевой) вещественной алгеброй Ли, изоморфной $\mathbf{R}$. Аналогично, алгебра Ли аддитивной группы $\mathbf{C}$, рассматриваемой как комплексная группа Ли, изоморфна $\mathbf{C}$.

2. Так как группа T^1 одномерна, то алгебра Ли группы T^1 также одномерна и поэтому изоморфна абелевой алгебре Ли $\mathbf{R}$.

3. Пусть $G = GL(n, \mathbf{C})$ — комплексная группа Ли. Для любого аналитического векторного поля X обозначим через Xx_{ij} результат применения векторного поля X к аналитической функции x_{ij} на группе G. Положим $a_{ij}(X) = X(e)\, x_{ij}$. Отображение $X \to a_{ij}(X)$ есть линейное отображение алгебры Ли L группы G в комплексное векторное пространство $M_n(\mathbf{C})$ комплексных квадратных матриц n-го порядка. Если $a_{ij}(X) = 0$ для всех i, j, то $X(e) = 0$ (так как x_{ij} образуют систему аналитических координат на G), и из предложения I следует тогда, что $X = 0$. Следовательно, отображение $X \to a_{ij}(X)$ есть линейный изоморфизм пространства L на некоторое подпространство пространства $M_n(\mathbf{C})$. Но

$$\dim L = \dim G = n^2 = \dim M_n(\mathbf{C});$$

следовательно, образ алгебры Ли L при отображении $X \to a_{ij}(X)$ есть все пространство $M_n(\mathbf{C})$.

Пусть X, Y — левоинвариантные векторные поля на G; найдем матрицу $a_{ij}([X, Y])$. Из формулы

$$X(g)\, x_{ij} = d\varphi_g X(e)\, x_{ij} = X(e)(x_{ij} \circ \varphi_g), \quad g \in G,$$

следует, что

$$X(g)\, x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}(g)(X(e)\, x_{kj}) = \sum_{k} x_{ik}(g)\, a_{kj}(X). \tag{3.2.3}$$

Рассмотрим $X(g)\, x_{ij}$ как функцию от g; тогда из соотношения (3.2.3) следует, что

$$Y(e)(X(g)\, x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(Y)\, a_{kj}(X). \tag{3.2.4}$$

Аналогично,

$$X(e)(Y(g)\,x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(X)\,a_{kj}(Y). \tag{3.2.5}$$

Пусть $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ — матрицы $(a_{ij}(X))$, $(a_{ij}(Y))$ соответственно; тогда из (3.2.4) и (3.2.5) следует, что матрица $(a_{ij}([X, Y]))$ есть матрица $\widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X}$. Таким образом, мы доказали следующее предложение:

VI. *Алгебра Ли группы* $GL(n, \mathbf{C})$ *изоморфна алгебре Ли* $gl\,(n, \mathbf{C})$ *всех комплексных матриц порядка* n, *в которой операция коммутирования определена формулой* $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X}$.

Аналогичное рассуждение показывает, что алгебра Ли группы $GL(n, \mathbf{R})$ изоморфна алгебре Ли $gl\,(n, \mathbf{R})$.

4. Пусть G, H — группы Ли, L, M — их алгебры Ли. Нам известно, что касательное пространство $T_{(g,\,h)}(G \times H)$ изоморфно произведению $T_g(G) \times T_h(H)$ для всех $g \in G$, $h \in H$. Пусть X, Y — левоинвариантные векторные поля на G и H соответственно. Пусть $Z(g, h) = (X(g), Y(h)) \in T_{(g,\,h)}(G \times H)$; тогда Z — векторное поле на $G \times H$. Читатель легко проверит, что векторное поле Z левоинвариантно, и если X_1, Y_1 — также левоинвариантные векторные поля на G и H и $Z_1(g, h) = (X_1(g), Y_1(h))$, то $[Z, Z_1](g, h) = ([X, X_1](g), [Y, Y_1](h))$, т. е. *алгебра Ли группы* $G \times H$ *изоморфна прямой сумме алгебр Ли групп* G *и* H.

В частности, алгебра Ли группы $\mathbf{C}$ изоморфна $\mathbf{C}^n$, алгебры Ли групп $\mathbf{R}^n$ и T_n изоморфны $\mathbf{R}^n$ (см. примеры 1 и 2 п. 3.2).

3.3. Подгруппы, гомоморфизмы и фактор-группы групп Ли. Пусть G — группа Ли, H — подгруппа в группе G (вообще говоря, не замкнутая), тогда H называется *подгруппой Ли* группы Ли G, если:

1) H — группа Ли,

2) H — подмногообразие аналитического многообразия G.

Связная подгруппа Ли в группе G называется *аналитической подгруппой* в G.

I. *Пусть* G — *группа Ли*, L — *алгебра Ли группы* G, H — *подгруппа Ли в* G, M — *совокупность элементов* $X \in L$ *таких*, *что* $X(e) \in \widetilde{T_e(H)}$ (пространство $\widetilde{T_e(H)}$ определено в п. 1.7). *Тогда* M — *подалгебра Ли в алгебре Ли* L, *причем*, M *изоморфна алгебре Ли группы* H.

Доказательство. Пусть $h \in H$. Левый сдвиг φ_h определяет изоморфное отображение H на H, поэтому $(d\varphi_h)(\widetilde{T_e(H)}) = \widetilde{T_h(H)}$, $(d\varphi_h)(T_e(H)) = T_h(H)$. Если $X \in M$, то $X(h) \in \widetilde{T_h(H)}$ для всех $h \in H$; следовательно, поле X определяет некоторое аналитическое векторное поле в подмногообразии H; это векторное поле на H левоинвариантно. Если $X, Y \in M$, то поля X и Y определяют аналитические векторные поля на H, поэтому и коммутатор $[X, Y]$ определяет аналитическое векторное поле на H. В частности, $[X, Y] \in M$; отсюда следует, что M — подалгебра Ли в L. Сопоставляя каждому элементу $X \in M$ определяемое им векторное поле на H, получаем изоморфизм алгебры Ли M на алгебру Ли группы H.

II. *Пусть G — группа Ли, L — ее алгебра Ли, M — подалгебра Ли в группе G. Существует однозначно определенная аналитическая подгруппа H в G, удовлетворяющая следующему условию: подалгебра Ли M есть совокупность всех элементов $X \in L$, удовлетворяющих условию $X(e) \in T_e(H)$.*

Доказательство этой теоремы приведено, например, в книгах Понтрягина [1], Серра [1], Хелгасона [1], Шевалле [1].

Таким образом, соответствие между аналитическими подгруппами в G и подалгебрами Ли в L, установленное в предложении I, является взаимно однозначным. В дальнейшем будем называть аналитическую подгруппу H и подалгебру Ли M, определенную подгруппой H в предложении I, *соответствующими* друг другу.

Ниже (см. § 2 гл. XI) мы покажем, что всякая замкнутая подгруппа группы Ли является группой Ли. В частности, *классические группы*

$$SL(n, \mathbf{C}), \quad SL(n, \mathbf{R}), \quad U(n), \quad SU(n), \quad Sp(2n),$$
$$O(n, \mathbf{C}), \quad O(n, \mathbf{R}), \quad SO(n, \mathbf{C}), \quad SO(n, \mathbf{R}), \quad Sp(2n, \mathbf{R}),$$

являющиеся замкнутыми подгруппами группы Ли $GL(n, \mathbf{C})$, *являются группами Ли.*

Гомоморфизм φ группы Ли G в группу Ли H называется *аналитическим гомоморфизмом*, если φ — аналитическое отображение многообразия G в многообразие H.

Пусть φ — аналитический гомоморфизм G в H, X — некоторое левоинвариантное векторное поле на G. Тогда $d\varphi_{e_G} X(e_G)$ есть касательный вектор к H в точке e_H, где e_G, e_H — единичные элементы групп G и H соответственно. Пусть Y — левоинвариантное векторное поле на H, для которого $Y_{e_H} = d\varphi_{e_H} X(e_G)$. Покажем, что

$$Y(\varphi(g)) = d\varphi_g X(g) \tag{3.3.1}$$

для всех $g \in G$. Пусть ψ_g — левый сдвиг в G на элемент g, $\chi_{\varphi(g)}$ — левый сдвиг в H на элемент $\varphi(g)$. Так как φ — гомоморфизм, то $\varphi \circ \psi_g = \chi_{\varphi(g)} \circ \varphi$, поэтому

$$d\varphi_g X(g) = d(\varphi \circ \psi_g) X(e_G) = d(\chi_{\varphi(g} \circ \varphi) X(e_G) =$$
$$= d\chi_{\varphi(g)}(d\varphi_{e_G} X(e_G)) = d\chi_{\varphi(g)} Y(e_H) = Y(\varphi(g)),$$

что доказывает формулу (3.3.1). В свою очередь формула (3.3.1) означает, что векторное поле Y есть образ векторного поля X. Обозначим Y через $d\varphi(X)$. Линейность отображения $d\varphi$ очевидна. Из предложения II п. 1.6 следует, что для любых X_1, X_2 из алгебры Ли группы G имеем

$$d\varphi([X_1, X_2]) = [d\varphi(X_1), d\varphi(X_2)].$$

Следовательно, справедливо следующее предложение.

III. *Пусть G, H — группы Ли, L, M — их алгебры Ли, φ — аналитический гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H. Пусть $d\varphi$ — такое отображение L в M, что для любого $X \in L$ элемент $d\varphi(X) \in M$ определяется равенством $d\varphi(X)(e_H) = d\varphi_{e_G} X(e_G)$. Тогда $d\varphi$ — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли M.*

IV. *Пусть выполнены условия предложения* III. *Пусть $N_1 \subset L$ — ядро гомоморфизма $d\varphi$; $N_2 = d\varphi(L)$; K_1, K_2 — аналитические подгруппы групп Ли G, H соответствующие подалгебрам Ли N_1, N_2 алгебр Ли L, M. Тогда*:

1) *$\varphi(G)$ — подгруппа Ли в H; φ — аналитическое отображение G на $\varphi(G)$;*

2) *подгруппа K_2 есть образ компоненты единицы группы G; кроме того, K_2 совпадает с компонентой единицы группы $\varphi(G)$;*

3) *K_1 — замкнутая аналитическая подгруппа в G, совпадающая с компонентой единицы ядра отображения φ.*

Доказательство этого утверждения приведено, например, в книгах Варадараджана [1], Понтрягина [1] и Серра [1].

V. *Пусть выполнены условия предложения* III. *Отображение $d\varphi$ тогда и только тогда является отображением L на M, когда компонента единицы группы G отображается под действием отображения φ на компоненту единицы группы H. Отображение $d\varphi$ тогда и только тогда является вложением* (*т.е. имеет нулевое ядро*), *когда ядро гомоморфизма φ дискретно.*

Доказательство сразу следует из IV.

VI. *Пусть G, H — связные локально односвязные топологические группы, φ: $G \to H$ — непрерывный гомоморфизм G на H с дискретным ядром. Если G* (*соответственно H*) *— группа Ли, то группу H* (*соответственно G*) *можно единственным образом превратить в аналитическое многообразие так, что группа H* (*соответственно G*) *становится при этом группой Ли, а гомоморфизм φ становится аналитическим гомоморфизмом группы Ли G в группу Ли H.*

Доказательство этой теоремы приведено, например, в книгах Варадараджана [1] и Понтрягина [1].

VII. *Если G — связная группа Ли, то G имеет универсальную накрывающую группу $\widetilde{G}$; $\widetilde{G}$ является группой Ли и алгебры Ли групп Ли G и $\widetilde{G}$ изоморфны.*

Доказательство. Существование универсальной накрывающей группы следует из IV п. 3.1 и I п. 3.2 гл. VIII, так как любая группа Ли очевидным образом локально связна и локально односвязна. Ядро гомоморфизма π группы $\widetilde{G}$ в G дискретно, так как $\widetilde{G}$ и G локально изоморфны. Согласно VI группу $\widetilde{G}$ можно рассматривать как группу Ли. Согласно V $d\pi$ отображает алгебру Ли группы Ли $\widetilde{G}$ на алгебру Ли группы G с нулевым ядром, т. е. $d\pi$ есть изоморфизм алгебр Ли групп Ли $\widetilde{G}$ и G.

VIII. *Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа Ли. Тогда пространство смежных классов G/H можно единственным образом превратить в аналитическое многообразие так, что каноническое отображение π: $G \to G/H$ является аналитическим отображением многообразий. Если H — замкнутый нормальный делитель в G, то топологическая группа G/H, снабженная структурой аналитического многообразия так, что отображение π: $G \to G/H$ есть аналитическое отображение многообразий, является группой Ли. Отображение π есть аналитический гомоморфизм группы Ли G на группу Ли G/H.*

Доказательство этого утверждения приведено, например, в книгах Варадараджана [1], Понтрягина [1] и Серра [1]. Группа Ли G/H, определенная в VII, называется *фактор-группой Ли* группы Ли G по замкнутому нормальному делителю H.

Пусть G — вещественная (соответственно комплексная) группа Ли, V — конечномерное комплексное линейное пространство. Если $\dim V = n$, то группа G_V (см. пример 4 п. 1.1 гл. I) изоморфна $GL(n, \mathbf{C})$ и может рассматриваться и как вещественная, и как комплексная группа Ли. Согласно VI п. 3.2 алгебра Ли группы Ли G_V отождествляется с алгеброй Ли $gl\,(V)$ (см. пример 3 п. 3.2). Назовем *вещественно* (соответственно *комплексно*) аналитическим представлением группы Ли G в пространстве V аналитический гомоморфизм группы Ли G в группу Ли G_V, рассматриваемую как вещественную (соответственно комплексную) группу Ли. Из предложения III непосредственно следует

IX. *Если π — вещественно (соответственно комплексно) аналитическое представление группы Ли G в пространстве V, то $d\pi$ — представление вещественной (соответственно комплексной) алгебры Ли L группы G в пространстве V.*

В дальнейшем (см. § 2 гл. XI) мы покажем, что любое непрерывное конечномерное представление группы Ли является аналитическим; кроме того, мы получим результат, до некоторой степени обратный предложению III, а именно, позволяющий строить представление группы Ли по представлению ее алгебры Ли (см. п. 1.4 гл. XI).

3.4. Однопараметрические подгруппы. Пусть G — группа Ли, U — координатная окрестность точки e, $x_1, \ldots, x_m$ — система аналитических координат в U. Заменяя функции $x_1, \ldots, x_m$ функциями $x_1 - x_1(e), \ldots, x_m - x_m(e)$ и уменьшая при необходимости окрестность U, мы вправе считать, что $\xi(U)$ есть множество всех $(y_1, \ldots, y_m)$, таких, что $|y_i| < a$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и некоторого a, причем $(x_1(e), \ldots, x_m(e)) = (0, \ldots, 0)$. Так как отображение $G \times G$ в G, определенное формулой $(g, h) \to g(h^{-1})^{-1} = gh$, аналитично, то в некоторой окрестности V точки e (можно считать, что $\xi(V)$ есть множество всех $(y_1, \ldots, y_m)$ таких, что $|y_i| < b$ при некотором $b < a$) имеем

$$x_k(gh) = F_k(x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots, x_m(h)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{3.4.1}$$

где $F_k(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ — аналитическая в $\xi(V) \times \xi(V)$ функция. Положим

$$u_{ij}(y_1, \ldots, y_m) = \frac{\partial}{\partial z_j} F_i(y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots, 0) \tag{3.4.2}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, m$.

I. *Пусть G — вещественная (соответственно комплексная) группа Ли, $a \in T_e(G)$. Существует единственный аналитический гомоморфизм $\widetilde{a}$: $t \to \widetilde{a}(t)$ аддитивной группы* $\mathbf{R}$ (*соответственно* $\mathbf{C}$) *в группу G такой, что в некоторой окрестности точки $t = 0$ выполняется условие*

$$(d/dt)\, x_i(\widetilde{a}(t)) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(x_1(\widetilde{a}(t)), \ldots, x_m(\widetilde{a}(t)))\, a_j, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.4.3}$$

где $a_j = a(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$, а $x_1, \ldots, x_m$ — аналитическая система координат в некоторой окрестности V точки e, такая, что $(x_1(e), \ldots, x_m(e)) = (0, \ldots, 0)$ и $\xi(V) = \{(y_1, \ldots, y_m)$: $|y_i| < b\}$.

Доказательство. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(dy_i(t)/dt) = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(y_1(t), \ldots, y_m(t))\, a_j \tag{3.4.4}$$

с начальным условием

$$y_i(0) = 0 \tag{3.4.5}$$

в области $\xi(V) = \{(y_1, \ldots, y_m)$: $|y_i| < b\}$. Согласно теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для некоторого $\delta > 0$ в области $|t| < \delta$ существует единственное решение задачи (3.4.4)–(3.4.5), т. е. удовлетворяющий обоим соотношениям набор функций $y_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, причем $(y_1(t), \ldots, y_m(t)) \in \xi(V)$ при $|t| < \delta$. Так как функции u_{ij} аналитичны на $\xi(V)$, то $y_i(t)$ — аналитические функции в области $|t| < \delta$.

Положим $\widetilde{a}(t) = \xi^{-1}(y_1(t), \ldots, y_m(t))$, $|t| < \delta$. Очевидно, что $\widetilde{a}(0) = e$ и $\widetilde{a}(t)$ удовлетворяет соотношению (3.4.4). Покажем, что при $|t| < \delta$, $|s| < \delta$, $|t + s| < \delta$ имеет место $\widetilde{a}(t)\,\widetilde{a}(s) = \widetilde{a}(t + s)$. Положим $b(t, s) = \widetilde{a}(t)\,\widetilde{a}(s)$ и $\xi(b(t, s)) = (z_1(t, s), \ldots, z_m(t, s))$. Тогда

$z_i(t, s) = F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), y_1(s), \ldots, y_m(s))$. Используя соотношение (3.4.2), получаем из формулы Тейлора по переменной s, что

$$z_i(t, s) = y_i(t) + \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(y_1(t), \ldots, y_m(t))\, a_j s + o(s). \tag{3.4.6}$$

С другой стороны, из равенства (3.4.3) следует, что

$$y_i(t+s) = y_i(t) + \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(y_1(t), \ldots, y_m(t))\, a_j s + o(s). \tag{3.4.7}$$

Из (3.4.6) и (3.4.7) заключаем, что

$$z_i(t, s) - y_i(t+s) = o(s) \tag{3.4.8}$$

при $s \to 0$. Покажем теперь, что функции $z_i(t, s)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial z_i(t, s)}{\partial s} = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(z_1(t, s), \ldots, z_m(t, s))\, a_j \tag{3.4.9}$$

и начальным условиям

$$z_i(t, 0) = y_i(t). \tag{3.4.10}$$

Соотношения (3.4.10) непосредственно следуют из определения функций $z_i(t, s)$. Найдем $\dfrac{\partial z_i(t, s)}{\partial s}$. Так как $z_i(t, s+u) = F_i(y_1(t), \ldots$ $\ldots, y_m(t), y_1(s+u), \ldots, y_m(s+u))$, то из соотношения (3.4.8) следует равенство

$$\begin{multline} z_i(t, s+u) = \\ = F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), z_1(s, u), \ldots, z_m(s, u)) + o(u) \end{multline} \tag{3.4.11}$$

при $u \to 0$. Но из ассоциативности умножения в группе G вытекает, что

$$\begin{multline} F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), z_1(s, u), \ldots, z_m(s, u)) = \\ = x_i(\widetilde{a}(t)(\widetilde{a}(s)\, \widetilde{a}(u))) = x_i((\widetilde{a}(t)\, \widetilde{a}(s))\, \widetilde{a}(u)) = \\ = F_i(z_1(t, s), \ldots, z_m(t, s), y_1(u), \ldots, y_m(u)) + o(u). \end{multline} \tag{3.4.12}$$

Подставляя соотношение (3.4.12) в правую часть (3.4.11) и применяя равенство (3.4.2), получаем, что

$$z_i(t, s+u) = z_i(t, s) + \sum_{j=1}^{m} u_{ij}(z_1(t, s), \ldots, z_m(t, s))\, a_j u + o(u). \tag{3.4.13}$$

Из соотношения (3.4.13) непосредственно следует равенство (3.4.9).

Итак, функции $z_i(t,\,s)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (3.4.9) с начальными условиями (3.4.10). С другой стороны, функции $\widetilde{z}_i(t,\,s) = y_i(s+t)$ также удовлетворяют системе уравнений $\dfrac{\partial \widetilde{z}_i(t,\,s)}{\partial s} = \sum\limits_{j=1}^{m} u_{ij}(\widetilde{z}_1(t,\,s),\,\ldots,\,\widetilde{z}_m(t,\,s))\,a_j$, которая является непосредственным следствием системы (3.4.4), и очевидным начальным условием $\widetilde{z}_i(t,\,0) = y_i(t+0) = y_i(t)$. Следовательно, функции $z_i(t+s)$ и $y_i(t+s)$ переменного t (при фиксированном s) удовлетворяют одной и той же системе уравнений (3.4.9) с одними и теми же начальными условиями (3.4.10). Согласно теореме единственности решения этой системы $z_i(t,\,s) = y_i(t+s)$; следовательно,

$$\widetilde{a}(t)\,\widetilde{a}(s) = \widetilde{a}(t+s) \tag{3.4.14}$$

при $|t| < \delta$, $|s| < \delta$, $|t+s| < \delta$. В частности,

$$\widetilde{a}(t)\,\widetilde{a}(s) = \widetilde{a}(s)\,\widetilde{a}(t) \tag{3.4.15}$$

при $|t| < \delta$, $|s| < \delta$, $|t+s| < \delta$.

Пусть теперь t произвольно. Существует натуральное число n, такое, что $|t/n| < \delta$. Положим

$$\widetilde{a}(t) = (\widetilde{a}(t/n))^n. \tag{3.4.16}$$

Покажем, что формула (3.4.16) определяет требуемое аналитическое отображение группы $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) в группу G. Проверим сначала корректность формулы (3.4.16). Если также $|t/m| < \delta$ для некоторого натурального m, то $|t/(mn)| < \delta$. С другой стороны, из соотношения (3.4.14) следует, что

$$(\widetilde{a}(t/(mn)))^m = \widetilde{a}(t/n), \quad (\widetilde{a}(t/(mn)))^n = \widetilde{a}(t/m);$$

следовательно,

$$(\widetilde{a}(t/m))^m = (\widetilde{a}(t/(mn)))^{mn} = (\widetilde{a}(t/n))^n,$$

так что отображение $t \to \widetilde{a}(t)$ определено формулой (3.4.16) корректно. В частности, при $|t| < \delta$ функция $\widetilde{a}(t)$, определенная равенством (3.4.16), совпадает с ранее построенной функцией $\widetilde{a}$. Покажем, что

$$\widetilde{a}(t+s) = \widetilde{a}(t)\,\widetilde{a}(s) \tag{3.4.17}$$

при всех t, s. Существует натуральное n такое, что $|t/n| < \delta$, $|s/n| < \delta$, $|(t+s)/n| < \delta$. Тогда $\widetilde{a}((t+s)/n) = \widetilde{a}(t/n)\,\widetilde{a}(s/n)$; возводя это равенство в n-ю степень и пользуясь соотношениями (3.4.15) и (3.4.16), получаем равенство (3.4.17). Наконец, из формулы (3.4.16) и аналитичности $\widetilde{a}(t)$ при $|t| < \delta$ следует аналитичность $\widetilde{a}(t)$ при всех t.

II. *Пусть G — вещественная (соответственно комплексная) группа Ли, Y — элемент алгебры Ли группы* $\mathbf{R}$ (*соответственно* $\mathbf{C}$), *сопоставляющий функции $f(z) = z$ на* $\mathbf{R}$ (*соответственно* $\mathbf{C}$) *функцию, тождественно равную* 1. *Для любого элемента X алгебры*

Ли L группы G существует единственный аналитический гомоморфизм θ_X: $t \to \theta_X(t)$ группы Ли $\mathbf{R}$ (*соответственно* $\mathbf{C}$) *в группу Ли G, дифференциал которого $d\theta_X$ переводит Y в X.*

Доказательство. Пусть $a = X(e)$ — касательный вектор к многообразию G в точке e, $t \to \widetilde{a}(t)$ — аналитический гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) в группу Ли G, удовлетворяющий условиям предложения I. Из соотношения (3.4.3) и определения элемента Y следует, что

$$X(e)\,x_i = ax_i = a_i = (d/dt)\,x_i(\widetilde{a}(t))|_{t=0} = \\ = Y(0)(x_i \circ \widetilde{a}) = (d\widetilde{a}_0)Y(0)\,x_i \quad (3.4.18)$$

для всех $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, $d\widetilde{a}(X) = Y$. Полагая $\widetilde{a} = \theta_X$, получаем существование гомоморфизма θ_X. С другой стороны, если $\widetilde{\theta}_X$ — другой аналитический гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) в группу G такой, что $(d\widetilde{\theta}_X)Y = X$, то $\widetilde{\theta}_X(t+s) = \widetilde{\theta}_X(t)\,\widetilde{\theta}_X(s)$ при всех t, s, причем обе части этого равенства — аналитические функции от s при фиксированном t. Полагая $x_i(\widetilde{\theta}_X(t)) = y_i(t)$, получаем, .что при достаточно малых t, s имеет место равенство

$$y_i(t+s) = F_i(y_1(t), \ldots, y_m(t), y_1(s), \ldots, y_m(s)); \quad i = 1, \ldots, m. \quad (3.4.19)$$

Дифференцируя равенство (3.4.19) по s и подставляя затем $s = 0$, видим из формул (3.4.2), что функции $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ удовлетворяют системе (3.4.4), где $a_j = (dy_j(s)/ds)|_{s=0} = X(e)\,x_j$. Следовательно, применяя I, получаем, что $\widetilde{\theta}_X = \widetilde{a}$, где $a = X(e)$, т.е. касательный вектор $X(e)$ однозначно определяет соответствующий аналитический гомоморфизм θ_X.

Элемент $\theta_X(1) \in G$ обозначается через $\exp(X)$. Отображение $\exp$: $L \to G$, определенное формулой $X \to \exp(X)$, называется *экспоненциальным отображением* алгебры Ли L в группу Ли G.

III. $\exp(\lambda x) = \theta_X(\lambda)$ *для всех $X \in L$ и всех $\lambda \in \mathbf{R}$* (*соответственно* $\lambda \in \mathbf{C}$).

Доказательство. Рассмотрим отображение π: $t \to \theta_X(\lambda t)$ группы $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) в G. Из аналитичности отображения θ_X следует аналитичность отображения π. Кроме того, $\pi(t)\,\pi(s) = \theta_X(\lambda t)\,\theta_X(\lambda s) = \theta_X(\lambda t + \lambda s) = \pi(t+s)$ для всех t, s, поэтому π — аналитический гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) в группу G. Очевидно, что $(d\pi_0)Y(0)\,x_i = (d/dt)\,x_i(\theta_X(\lambda t))|_{t=0} = \lambda X(e)\,x_i$. Согласно предложению II, имеем $\pi = \theta_{\lambda X}$. Следовательно, $\theta_{\lambda X}(1) = \theta_X(\lambda)$.

Из предложения III сразу следует, что

$$\exp((t_1 + t_2)X) = \exp(t_1 X)\exp(t_2 X), \quad (3.4.20а)$$

$$\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1} \quad (3.4.20б)$$

для всех t_1, t_2 и всех $X \in L$.

Пространство L изоморфно пространству $\mathbf{R}^m$ (соответственно $\mathbf{C}^m$) и поэтому может рассматриваться как аналитическое многообразие. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — базис в алгебре Ли L, такой, что $X_i(e)(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Если $X \in L$ и $X(e)\, x_j = a_j$, то $X = a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$. Функции $a_j(X) = a_j$ при $X = a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$ образуют систему аналитических координат на L.

IV. *Отображение* exp: $L \to G$ *есть аналитическое отображение многообразий, регулярное в точке* $0 \in L$.

Доказательство. Обозначим решение (y_i) системы (3.4.4) с начальными условиями (3.4.5) через $(\Phi_i(t, a_1, \ldots, a_m))$. Так как правые части уравнений (3.4.4) аналитичны по всем переменным $y_1, \ldots, y_m$, $a_1, \ldots, a_m$, то функции $\Phi_i(t, a_1, \ldots, a_m)$ аналитичны в некоторой области вида $|t| < \delta$, $|a_j| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, m$. Можно считать, что $|\Phi_i| \leqslant c$ при $|t| < \delta$, $|a_j| < \varepsilon$, где C — некоторое число.

По определению отображения θ_X, имеем

$$\theta_X(t) = \xi^{-1}(\Phi_1(t, a_1, \ldots, a_m), \ldots, \Phi_m(t, a_1, \ldots, a_m))$$

при $|t| < \delta$, $|a_j| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, m$, где $X = a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$. Используя III, видим, что при $|t| < 2$, $|a_j| < (\varepsilon\delta)/2$ имеет место равенство

$$\theta_X(t) = \xi^{-1}(\Phi_1((\delta t)/2, (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta), \ldots \\ \ldots, \Phi_m((\delta t)/2, (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta)),$$

откуда

$$\exp(X) = \xi^{-1}(\Phi_1(\delta/2, (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta), \ldots \\ \ldots, \Phi_m(\delta/2, (2a_1)/\delta, \ldots, (2a_m)/\delta)). \quad (3.4.21)$$

Из формулы (3.4.21) ввиду аналитичности функций Φ_i следует аналитичность отображения exp в некоторой окрестности V нулевого элемента 0 многообразия L. Кроме того, для любого элемента $X \in L$ существует натуральное число n такое, что $X/n \in V$. Из (3.4.20) следует, что $\exp(X) = (\exp(X/n))^n$; следовательно, экспоненциальное отображение аналитично всюду.

Покажем теперь, что экспоненциальное отображение регулярно в точке $0 \in L$. Убедимся для этого, что дифференциал экспоненциального отображения переводит базис касательного пространства $T_0(L)$ в базис касательного пространства $T_e(G)$. Пусть $\widetilde{X}_i$ — касательный вектор к L в точке 0, определенный равенством

$$\widetilde{X}_i a_i = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Пусть $\eta(X) = (a_1, \ldots, a_m)$ при $X = a_1X_1 + \ldots + a_mX_m$. Покажем, что $d(\exp)_0\widetilde{X}_i = X_i(e)$. Вектор $\widetilde{X}_i$ переводит функцию f, определенную и аналитическую в некоторой окрестности W нулевого элемента многообразия L, в число $\widetilde{X}_i f$ такое, что

$$\widetilde{X}_i(f) = \sum_{j=1}^{m} (\partial F/\partial a_j)_{0,\,\ldots,\,0} \widetilde{X}_i a_i = (\partial F/\partial a_i)_{0,\,\ldots,\,0}, \tag{3.4.22}$$

где F — аналитическая функция от $(a_1, \ldots, a_m)$ такая, что $f = F \circ \eta$. Пусть $v_i = d(\exp)_0 \widetilde{X}_i$ — касательный вектор к многообразию G в точке e. Тогда для любой функции $\varphi \in D(V)$, где V — некоторая окрестность единичного элемента e в G,

$$v_i(\varphi) = \widetilde{X}_i(\Pi \circ \exp);$$

если $\varphi = \Phi \circ \xi$, то из (3.4.21), (3.4.22) и (3.4.18) следует, что

$$\begin{aligned} v_i(\varphi) = (\partial/\partial a_i)\, \Phi(\Phi_1(\delta/2,\, (2a_1)/\delta,\, \ldots,\, (2a_m)/\delta),\, \ldots \\ \ldots,\, \Phi_m(\delta/2,\, (2a_1)/\delta,\, \ldots,\, (2a_m/\delta)))|_{0,\,\ldots,\,0} = \\ = (\partial/\partial a_i)\, \Phi(\Phi_1(\delta/2,\, 0,\, \ldots,\, (2a_i)/\delta,\, \ldots,\, 0),\, \ldots \\ \ldots,\, \Phi_m(\delta/2,\, 0,\, \ldots,\, (2a_i)/\delta,\, \ldots,\, 0))|_{a_i=0} = \\ = (d/da_i)(\Pi \circ \exp(a_i X_i))|_{a_i=0} = (d\theta_{X_i})_0 Y(0)\, \varphi = X_i(e)\, \varphi. \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Следовательно, $v_i = X_i(e)$, т. е. $d(\exp)_0$ переводит базис Y_i в пространстве $T_0(L)$ в базис $X_i(e)$ в $T_e(G)$, что доказывает регулярность отображения exp в точке $0 \in L$.

V. *Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — базис в алгебре Ли L группы Ли G. Существует окрестность U единичного элемента e на G, система аналитических координат $x_1, \ldots, x_m$ в окрестности U и число $\delta > 0$, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$x_i\Big(\exp\Big(\sum_{k=1}^{m} u_k X_k\Big)\Big) = u_i \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, m \tag{3.4.24}$$

при всех $(u_1, \ldots, u_m) \in V$, где V есть множество $(u_1, \ldots, u_m)$ таких, что $|u_k| < \delta$, $k = 1, \ldots, m$.

Доказательство сразу следует из IV и из предложений I п. 1.1 и V п. 1.5.

Система аналитических координат, удовлетворяющая условию (3.4.24), называется *канонической системой координат* на группе (или *канонической системой координат первого рода*), а множество $W = \xi^{-1}(V)$ называется *канонической окрестностью* элемента $e \in G$.

VI. *Пусть π — аналитический гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H. Тогда для любого элемента X алгебры Ли L группы G*

$$\pi(\exp(X)) = \exp(d\pi(X)). \tag{3.4.25}$$

Доказательство. Пусть Y — векторное поле на группе $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$, если G и H — комплексные группы Ли), определенное формулой $Y\psi = 1$, где ψ — тождественное отображение $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$). Пусть X — элемент алгебры Ли L группы G, и пусть θ_X — аналитический гомоморфизм $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) в G, определенный в предложении II. Тогда $d\theta_X(Y) = x$, поэтому $d(\pi \circ \theta_X)(Y) = d\pi(X)$. Но $d(\theta_{d\pi(X)})(Y)$ также равно $d\pi(X)$; таким образом, согласно II гомоморфизмы $\pi \circ \theta_X$ и $\theta_{d\pi(X)}$ должны совпадать. В частности, $(\pi \circ \theta_X)(1) = \theta_{d\pi(X)}(1)$, что доказывает формулу (3.4.25).

VII. *Пусть π — аналитический гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H. Если отображение π взаимно однозначно, то оно также всюду регулярно.*

Доказательство. Пусть L — алгебра Ли группы G. Если $d\pi(X) = 0$ для некоторого $X \in L$, то $\pi(\theta_X(t)) = \pi(\exp(tX)) = \exp(d\pi(tX)) = \exp(t\, d\pi(X)) = e$ для всех t. Так как π взаимно однозначно, то $\exp(tX) = e$, поэтому $X = 0$. Следовательно, $d\pi$ взаимно однозначно.

VIII. *Пусть H — подгруппа Ли группы Ли G, M — алгебра Ли группы H. Если U — окрестность нулевого элемента в M, то множество элементов $\exp(X)$, $X \in U$, содержит окрестность элемента e в H.*

Доказательство сразу следует из предложения VI, примененного к тождественному отображению группы H в G.

Пример. Пусть G — группа Ли $GL(n, \mathbf{R})$. Как нам известно из примера 3 п. 3.2, алгебру Ли L группы Ли G можно отождествить с алгеброй Ли $gl\,(n, \mathbf{R})$, причем изоморфизм устанавливается формулой

$$X \to (X(e)\, x_{ij}). \tag{3.4.26}$$

Этот изоморфизм мы будем в дальнейшем называть *каноническим*. Обозначим матрицу $(X(e)\, x_{ij})$ через $a(X)$. Согласно I п. 3.2 и правилу умножения матриц

$$\begin{aligned} X(g_0)(x_{ij})(g) = (d\varphi_{g_0})\, eX(e)(x_{ij})(g) = X(e)(x_{ij})(g_0 g) = \\ = g_0 X(e)(x_{ij})(g) = (g_0 a(X))_{ij} \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

для любых $i, j = 1, \ldots, n$ и всех $t_0 \in G$, $X \in L$. Пусть θ_X — аналитический гомоморфизм группы Ли $\mathbf{R}$ в группу Ли G, удовлетворяющий условиям предложения II. Тогда должно выполняться соотношение $d\theta_X(Y) = X$. Но соотношение $d\theta_X(Y) = X$ равносильно соотношению

$$Y(t)(x_{ij} \circ \theta_X) = X(\theta_X(t))\, x_{ij} \tag{3.4.28}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Объединяя (3.4.27) и (3.4.28), видим, что

$$(d/dt)\, x_{ij}(\theta_X(t)) = (\theta_X(t)\, a(X))_{ij}. \tag{3.4.29}$$

Из (3.4.29) следует, что матрица $\theta_X(t)$ удовлетворяет соотношению

$$(d/dt)\, \theta_X(t) = \theta_X(t)\, a(X), \tag{3.4.30}$$

где производная от матрицы есть матрица, образованная производными матричных элементов. Матричная функция $\theta_X(t)$ удовлетворяет не только уравнению (3.4.31), но и начальному условию

$$\theta_X(0) = 1_n, \tag{3.4.31}$$

где 1_n — единичная матрица порядка n. Но решением дифференциального уравнения (3.4.30) с начальным условием (3.4.31) является обычная матричная экспонента

$$\theta_X(t) = e^{ta(X)} = \\ = 1_n + ta(X) + \frac{t^2}{2!}a(X)^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}a(X)^n + \ldots, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{3.4.32}$$

и ряд в правой части равенства (3.4.32) сходится абсолютно при любом $t \in \mathbf{R}$ по каждой координате. Таким образом, *в группе $GL(n, \mathbf{R})$ экспоненциальное отображение совпадает с обычной матричной экспонентой*:

$$\exp(X) = e^{a(X)} \quad \text{для всех} \quad X \in L. \tag{3.4.33}$$

Аналогичное рассуждение показывает, что экспоненциальное отображение в группе $GL(n, \mathbf{C})$ также совпадает с обычной матричной экспонентой.

Пусть G — аналитическая подгруппа в группе Ли $GL(n, \mathbf{R})$, π — тождественное отображение группы G в группу $GL(n, \mathbf{R})$. Из предложения VI следует, что если отождествить алгебру Ли группы Ли G с подалгеброй Ли в алгебре Ли $gl\,(n, \mathbf{R})$ в соответствии с I п. 3.3, то экспоненциальное отображение в группе G совпадает с обычной матричной экспонентой (см. (3.4.25)).

Разобранный нами пример экспоненциального отображения в группах $GL(n, \mathbf{C})$ и $GL(n, \mathbf{R})$ позволяет доказать важную теорему о соотношении между представлением группы Ли и соответствующим ему (см. IX п. 3.3) представлением алгебры Ли.

Теорема. *Пусть G — связная группа Ли, L — ее алгебра Ли, T — конечномерное аналитическое представление группы Ли G в векторном пространстве E, dT — соответствующее представление алгебры Ли L в пространстве E. Тогда*:

а) *векторное подпространство $V \in E$ инвариантно относительно представления T тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно представления dT*;

б) *представление T неприводимо (соответственно приводимо, вполне приводимо) тогда и только тогда, когда представление dT неприводимо (соответственно приводимо, вполне приводимо)*.

Доказательство. Очевидно, что б) следует из а). Докажем а). Рассмотрим представление T как аналитический гомоморфизм группы

Ли G в группу Ли G_E (рассматриваемую как вещественная группа Ли). Согласно (3.4.25) имеем

$$T(\exp(X)) = \exp(dT(X)) \tag{3.4.34}$$

для всех $X \in L$. Но

$$\exp(a) = e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}\,a^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\,a^n + \ldots \tag{3.4.35}$$

для всех $a \in gl\,(E)$. Из (3.4.34) и (3.4.35) следует, что

$$T(\exp(X)) = 1 + dT(X) + \frac{1}{2!}\,(dT(X))^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\,(dT(X))^n + \ldots \tag{3.4.36}$$

для всех $X \in L$. Из соотношения (3.4.36) получаем, что всякое векторное подпространство $V \subset E$, инвариантное относительно оператора $dT(X)$, $X \in L$, инвариантно также относительно оператора $T(\exp(X))$, т. е. вследствие VIII и связности группы G всякое подпространство $V \subset E$, инвариантное относительно представления dT алгебры Ли L, инвариантно также относительно представления T группы Ли G. С другой стороны, из (3.4.34) и (3.4.35) следует, что

$$T(\exp(tX)) = e^{t\,dT(X)} \tag{3.4.37}$$

для всех t; дифференцируя обе части равенства (3.4.37) при $t = 0$, видим, что

$$dT(X) = (d/dt)(T\exp(tX)))|_{t=0}. \tag{3.4.38}$$

Соотношение (3.4.38) показывает, что всякое векторное подпространство $V \subset E$, инвариантное относительно операторов $T(\exp(tX))$ для всех t, инвариантно также относительно оператора $dT(X)$. Таким образом, всякое подпространство, инвариантное относительно представления T, инвариантно также относительно представления dT, что завершает доказательство теоремы.

3.5. Присоединенное представление. Пусть G — группа Ли, L — ее алгебра Ли. Если α — аналитический изоморфизм группы Ли G на себя, то $d\alpha$ — гомоморфизм Ли алгебры Ли L группы G в себя. Из соотношения $\alpha^{-1} \circ \alpha = 1_G$ (1_G — тождественное отображение G на G) следует, что отображение $d(\alpha^{-1})$ обратно к $d\alpha$. Следовательно, $d\alpha$ есть *автоморфизм* алгебры Ли L, т. е. $d\alpha$ — такое линейное отображение L на L, что $d\alpha([X, Y]) = [d\alpha(X), d\alpha(Y)]$ для всех $X, Y \in L$. Отображение $\alpha \to d\alpha$ есть линейное представление группы A всех аналитических изоморфизмов группы G на себя. Покажем, что если группа G связна, то это представление — точное. Действительно, если $d\alpha$ — единичный автоморфизм L, т. е. $d\alpha(X) = X$ для всех $X \in L$, то согласно (3.4.25)

$$\alpha(\exp(X)) = \exp(X)$$

для всех $X \in L$. Следовательно, согласно VIII п. 3.4 отображение α оставляет на месте все элементы некоторой окрестности единичного элемента в G. Так как G связна, то $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$, поэтому $\alpha(x) = x$ для всех $x \in G$. Пусть $g \in G$ и α_g — аналитический изоморфизм группы G на себя, определенный формулой $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$ для всех $h \in G$; тогда отображение Ad: $g \to da_g$ называется *присоединенным представлением* группы Ли G. Присоединенное представление есть гомоморфизм группы G в G_L. Так как L изоморфно $\mathbf{R}^m$ или $\mathbf{C}^m$, то G_L изоморфно $BL(m, \mathbf{R})$ или $GL(m, \mathbf{C})$ и поэтому является группой sЛи.

I. *Присоединенное представление группы G есть аналитический гомоморфизм группы G в группу G_L.*

Доказательство. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — базис в L и $(x_1, \ldots, x_m)$ — связанная с этим базисом каноническая система координат в группе G, т. е.

$$x_i\Bigl(\exp\Bigl(\sum_{j=1}^{m} u_j X_j\Bigr)\Bigr) = u_j, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.5.1}$$

Пусть

$$d\alpha_+ g(X_i) = \sum_{J=1}^{m} a_{ij}(g) X_j, \tag{3.5.2}$$

т. е. матрицей линейного преобразования $d\alpha_g$ служит $(a_{ij}(g))$. Если $h = \exp(tX_i)$, то из (3.4.25) следует, что

$$ghg^{-1} = \exp\Bigl(\sum_{j=1}^{n} t a_{ji}(g) X_j\Bigr). \tag{3.5.3}$$

Следовательно, при достаточно малом t величины $ta_{ji}(g)$ являются каноническими координатами элемента ghg^{-1}. Найдем формулу для канонических координат $x_i(gh)$, $x_i(ghg^{-1})$ и $x_i(h^{-1}g^{-1}hg)$.

Пусть U — такая окрестность элемента e, что $\xi(U)$ есть множество всех $(y_1, \ldots, y_m)$, для которых $|y_i| < a$ при некотором $a > 0$ и всех $i = 1, \ldots, m$. Пусть $\xi(W)$ — множество всех таких $(y_1, \ldots, y_m)$, что $|y_i| < b$ при некотором $b > 0$ и всех $i = 1, \ldots, m$, причем b выбрано так, что $WW \subset U$. При $g, h \in W$

$$x_i(gh) = F_i(x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots, x_m(h)), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.5.4}$$

где функции F_i аналитичны в области $\xi(W) \times \xi(W)$. Разложим функцию $F_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m)$ в степенной ряд по переменным $z_1, \ldots, z_m$; тогда F_i можно представить в виде

$$F_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{il}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m), \tag{3.5.5}$$

где P_{il} — однородный многочлен степени l относительно переменных $z_1, \ldots, z_m$, коэффициенты которого являются аналитическими функциями от $y_1, \ldots, y_m$.

Напомним, что

$$g = \exp\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i(g) X_i\Big) \tag{3.5.6}$$

для всех $g \in W$. Пусть

$$g(t) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{m} t x_i(g) X_i\Big), \quad |t| \leqslant 1; \tag{3.5.7}$$

тогда из (3.5.5) следует, что

$$x_i(gh(t)) = \sum_{l=0}^{\infty} p_{il}(x_1(g), \ldots, x_m(g); x_1(h), \ldots, x_m(h))\, t^l \tag{3.5.8}$$

для всех $g, h \in W$, $|t| \leqslant 1$. С другой стороны, для любой функции $f \in D(U)$ имеем $(df(g\theta_X(t))/dt) = (Xf)_{g\theta_X(t)}$ для любой однопараметрической подгруппы θ_X, $X \in L$, если $\theta_X(t) \in U$ (см. (3.4.3)). Из (3.5.7) и предложения I п. 3.4 следует, что $h(t) = \theta_Y(t)$, где $Y = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i(h) X_i$. Следовательно,

$$(df(gh(t))/dt) = \Big(\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i(h) X_i\Big) f\Big)_{gh(t)} \tag{3.5.9}$$

для всех $|t| \leqslant 1$. Пусть $Y = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i(h) X_i$. Применяя формулу (3.5.9) к функциям $Y^n f$, получаем по индукции, что

$$(d^n f(gh(t))/dt^n) = (Y^n f)_{gh(t)} \tag{3.5.10}$$

для всех натуральных n. Следовательно, аналитическая функция $f(gh(t))$ разлагается в ряд Тейлора по переменному t в окрестности точки $t = 0$, коэффициенты которого определяются формулами (3.5.10); поэтому

$$f(gh(t)) = f(g) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (Y^n f)_g \tag{3.5.11}$$

при достаточно малых t. Но если $f = x_i$, то из формулы (3.5.8) следует, что ряд (3.5.11) сходится при $|t| \leqslant 1$ и

$$P_{in}(x_1(g), \ldots, x_m(g), x_1(h), \ldots, x_m(h)) = \frac{1}{n!} (Y^n x_i)_g. \tag{3.5.12}$$

Аналогично, полагая $X = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i(g) X_i$ и $g(t) = \theta_X(t) = \exp(tX)$, получаем, что для любой функции $f \in D(U)$ имеем

$$f(g(t)) = f(e) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (x^k f)_e; \tag{3.5.13}$$

применяя формулу (3.5.13) к функциям $(Y^n x_i)_g$ и подставляя результат в (3.5.11), видим, что

$$x_i(gh) = \sum_{k,\, n=0}^{\infty} \frac{1}{k!\, n!} (X^k Y^n x_i)_e \tag{3.5.14}$$

для всех $g,\, h \in V$. Выражение $(X^k Y^n x_i)_e$ есть однородный многочлен степени $k+n$ от переменных $x_1(g),\, \ldots,\, x_m(g),\, x_1(h),\, \ldots,\, x_m(h)$, поэтому формулы (3.5.14) определяют ряды Тейлора для функций $x_i(gh)$.

Из соотношения (3.5.13) и аналогичного соотношения для $f(h(t))$ следует, что $x_i(g(t)) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (X^k x_i)_e$, $\quad x_i(h(t)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (Y^n x_i)_e$ (напомним, что $x_i(e) = 0$ для всех $i = 1,\, \ldots,\, m$). Тогда из формул (3.5.14) следует, что

$$x_i(gh) = x_i(g) + x_i(h) + (XYx_i)_e + \rho(g,\, h), \tag{3.5.15}$$

где ρ — ряд, не содержащий одночленов от $x_1(g),\, \ldots,\, x_m(h)$ порядка ниже третьего. С другой стороны, разность $y_i(g,\, h) = x_i(gh) - x_i(g) - x_i(h)$ разлагается в ряд, не содержащий слагаемых ниже второй степени, и $y_i(g,\, h) = 0$, если g или h равно e. Следовательно,

$$x_i(gh) - x_i(g) - x_i(h) = \sum_{j,\, k=1}^{m} x_j(g)\, x_k(h)\, f_{ijk}(g,\, h),$$

где $f_{ijk}(g,\, h)$ аналитичны в окрестности точки $(e,\, e)$. Заменим g на gh и h на $h^{-1}g^{-1}hg$; получаем

$$\begin{aligned} &x_i(hg) - x_i(gh) - x_i(h^{-1}g^{-1}hg) = \\ &\qquad = \sum_{j,\, k=1}^{m} x_j(gh)\, x_k(h^{-1}g^{-1}hg)\, f_{ijk}(gh,\, g^{-1}h^{-1}gh). \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

Так как функция $x_k(h^{-1}g^{-1}hg)$ обращается в нуль при $h = e$ или $g = e$, то в ее разложении в ряд по $x_1(g),\, \ldots,\, x_m(h)$ нет слагаемых степени ниже второй, поэтому в разложении функции $x_i(hg) - x_i(gh) - x_i(h^{-1}g^{-1}hg)$ нет слагаемых степени ниже третьей. С другой стороны, из (3.5.15) следует, что

$$x_i(hg) - x_i(gh) = ([Y,\, X]\, x)_e + \rho(g,\, h) - \rho(h,\, g),$$

поэтому
$$x_i(h^{-1}g^{-1}hg) = ([Y,\, X]\, x_i)_e + \rho_1(g,\, h), \tag{3.5.17}$$
где ρ_1 не содержит слагаемых степени ниже третьей. Заменяя в формуле (3.5.16) величину h на $g^{-1}h$ и пользуясь равенством (3.5.17), получаем, что
$$x_i(g^{-1}hg) = x_i(h) + ([Y,\, X]\, x_i)_e + \rho_2(g,\, h), \tag{3.5.18}$$
где $\rho_2(g,\, h)$ не содержит слагаемых степени ниже третьей.

Вернемся к доказательству предложения I. Нам уже известно, что при достаточно малом t величины $ta_{ij}(g)$ являются каноническими координатами элемента ghg^{-1}. Согласно (3.5.18) эти координаты являются аналитическими функциями от g в окрестности элемента e. Следовательно, присоединенное представление аналитично в окрестности точки e. Так как левые сдвиги в группе Ли G являются аналитическими преобразованиями и $d\alpha_{gg_0} = d\alpha_g d\alpha_{g_0}$, то из аналитичности представления $\mathrm{Ad}\colon\, g \to d\alpha_g$ в окрестности точки e следует, что отображение Ad аналитично.

Обозначим оператор $d\alpha_g$ через $\mathrm{ad}(g)$.

II. *Дифференциал присоединенного представления группы Ли G есть присоединенный гомоморфизм $X \to \mathrm{ad}\, X$ алгебры Ли L группы G.*

Доказательство. Отображение $d(\mathrm{Ad})$ есть гомоморфизм алгебры Ли в алгебру Ли $gl\,(L)$. Читатель легко проверит, что из формулы (3.5.18) следует равенство
$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))X_i = X_i + t[X,\, X_i] + \rho(t) \tag{3.5.19}$$
для всех $i = 1,\, \ldots,\, m$ и всех $X \in L$, где $\rho(t)$ — аналитическая в окрестности точки $t = 0$ функция, не содержащая в разложении по формуле Тейлора слагаемых степени ниже двух. Отсюда видим, что
$$(d(\mathrm{Ad}))(X)X_i = [X,\, X_i] \tag{3.5.20}$$
для всех $X \in L$, $i = 1,\, \ldots,\, m$, поэтому
$$((d(\mathrm{Ad}))(X))(Y) = [X,\, Y] = (\mathrm{ad}\, X)(Y) \tag{3.5.21}$$
для всех $X,\, Y \in L$.

III. *Для любого элемента $X \in L$*
$$\mathrm{Ad}(\exp(X)) = e^{\mathrm{ad}\, X}. \tag{3.5.22}$$

Доказательство сразу следует из VI п. 3.4, II и (3.4.33).

IV. *Пусть G — группа Ли, L — ее алгебра Ли, N — подалгебра Ли в L, H — аналитическая подгруппа в G, соответствующая подалгебре Ли N. Условие $[a,\, N] \subset N$, для некоторого $a \in L$, равносильно условию $(\exp ta)H(\exp ta)^{-1} \subset H$, $t \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Пусть $b = \exp(ta)$. Очевидно, что $\mathrm{Ad}(b)H = bHb^{-1}$ есть аналитическая подгруппа группы Ли G, и из (3.5.18) следует, что алгеброй Ли подгруппы bHb^{-1} служит образ алгебры Ли N подгруппы Ли H при отображении $d\alpha_b = \mathrm{Ad}(b)$. Таким образом, $bHb^{-1} \subset H$ в том и только том случае, если $\mathrm{Ad}(b)N \subset N$. Очевидно, что соотношение $\mathrm{Ad}(\exp(ta))N \subset N$ равносильно условию, что подпространство $N \subset L$ инвариантно относительно ограничения на подгруппу $\exp(ta)$ присоединенного представления группы Ли G. Согласно теореме п. 3.4 это условие выполняется тогда и только тогда, когда N инвариантно относительно представления $d(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$ подалгебры Ли $\{ta\} \subset L$, что завершает доказательство.

V. *Пусть G — связная группа Ли, L — ее алгебра Ли, H — аналитическая подгруппа Ли в G, N — подалгебра Ли, соответствующая подгруппе H. Подгруппа H тогда и только тогда является нормальным делителем в G, когда N — идеал в алгебре Ли L.*

Доказательство. Подгруппа H является нормальным делителем тогда и только тогда, когда $gHg^{-1} \subset H$ для всех g из некоторой окрестности U единичного элемента группы G. Действительно, если $gHg^{-1} \subset H$ для всех $g \in H$, то $gHg^{-1} \subset H$ для всех $g \in U^n$, а ввиду связности группы G имеем $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U^n$. С другой стороны, образ алгебры Ли L при экспоненциальном отображении содержит окрестность единицы, поэтому H тогда и только тогда является нормальным делителем в G, когда $\exp(ta)H\exp(ta)^{-1} \subset H$ для всех $a \in L$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда V сразу следует из IV.

Образ группы G при отображении Ad называется *присоединенной группой* группы G. Очевидно, что группа $\mathrm{Ad}(G)$ изоморфна фактор-группе группы G по ядру отображения Ad.

VI. *Ядро присоединенного представления связной группы Ли G совпадает с центром группы G.*

Доказательство. Если $\mathrm{Ad}(g)$, $g \in G$, тождественно на L, то α_g тождественно на G. Действительно, так как группа G связна, то представление π группы Ли G тождественно на всей группе G тогда и только тогда, когда π тождественно на некоторой окрестности единицы в группе G, а из (3.4.25) следует, что π тогда и только тогда тождественно в канонической окрестности элемента e, когда $d\pi$ — тождественное отображение алгебры Ли L на себя. Следовательно, ядро представления $g \to d\alpha_g = \mathrm{Ad}(g)$ совпадает с ядром отображения $g \to \alpha_g$, т. е. с центром группы G.

3.6. Дифференциал экспоненциального отображения. Пусть G — группа Ли, L — ее алгебра Ли. Так как экспоненциальное отображение exp является аналитическим отображением многообразия L в G, то в каждой точке $x \in L$ дифференциал $(d\exp)_x$ является отображением касательного пространства $T_x(L)$ в касательное пространство $T_{\exp(x)}(G)$.

Заметим, что касательное пространство $T_x(L)$ можно канонически отождествить с алгеброй Ли L следующим образом. Пусть $y \in L$; сопоставим элементу у касательный вектор $v_y \in T_x(L)$, полагая

$$v_y(f) = f(y) \tag{3.6.1}$$

для любой линейной функции f на алгебре Ли L. Согласно I и II п. 3.2 формула (3.6.1) однозначно определяет касательный вектор $v_y \in T_x(L)$, причем отображение $y \to v_y$ есть изоморфизм алгебры Ли L на $T_x(L)$.

Отождествим теперь касательное пространство $T_g(G)$, $g \in G$, с алгеброй Ли L следующим образом. Сопоставим любому элементу z алгебры Ли L касательный вектор $w_z(g) \in T_g(G)$, полагая

$$w_z(g) = z(g). \tag{3.6.2}$$

Из I и II п. 3.2 следует, что формула (3.6.2) действительно определяет изоморфное отображение алгебры Ли L на $T_g(G)$.

В дальнейшем мы будем писать y вместо v_y и z вместо w_z. Найдем явную формулу для $(d\exp)_x(y)$.

Рассмотрим отображение

$$\psi\colon t \to \exp(-x)\exp(x+ty), \tag{3.6.3}$$

где $t \in \mathbf{R}$ или $t \in \mathbf{C}$ в зависимости от того, является ли G вещественной или комплексной группой Ли. Из формулы (3.6.3) следует, в частности, что $\psi(0) = e$. Так как элемент $z \in L$ есть левоинвариантное векторное поле на G, то $(d\varphi_g)_e z(e) = z(g)$ согласно (3.2.1), в частности, из соотношения $\varphi_{\exp(x)}\,\psi(t) = \exp(x+ty)$ и формулы (1.5.1) следует, что

$$(d\varphi)_{\exp x} \circ (d\psi/dt)|_{t=0} = ((d(\exp)_x y)(\exp x) = (d\varphi_{\exp x} \circ ((d\exp)_x y))(e),$$

так что

$$(d\exp)_x(y) = ((d/dt)(\exp(-x)\exp(x+ty)))_{t=0}. \tag{3.6.4}$$

Заметим, кроме того, что отображение

$$(t,\, x,\, y) \to \exp(-x)\exp(x+ty)$$

есть аналитическое отображение многообразия $\mathbf{R} \times L \times L$ (соответственно $\mathbf{C} \times L \times L$) в G. Таким образом, из (3.6.4) следует, что соответствие Φ, сопоставляющее паре $(x,\, y) \in L \times L$ элемент $(d\exp)_x(y) \in L$, есть аналитическое отображение $L \times L$ в L.

I. *Пусть A — ассоциативная алгебра, a — элемент A, δ_a — отображение A в A, определенное формулой $\delta_a(x) = ax - xa$, $a \in A$. Для любого целого*

$$(\delta_a)^n(x) = (-1)^n \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k C_n^k a^k x a^{n-k} \tag{3.6.5}$$

для всех $x \in A$.

Доказательство полностью аналогично доказательству обычной формулы бинома индукцией по n, подробности предоставляются читателю.

II. *Пусть G — группа Ли, L — алгебра Ли группы G. Пусть $(d\exp)_x$ — дифференциал экспоненциального отображения в точке $x \in L$. Тогда*

$$(d\exp)_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\operatorname{ad} x)^n. \tag{3.6.6}$$

В частности, отображение $(d\exp)_x$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда собственные значения линейного оператора $\operatorname{ad} x$ не равны $2k\pi i$, где $k \neq 0$ — целое.

Доказательство. Пусть $x, y \in L$. Пусть U — окрестность единицы в группе G, и пусть число $a > 0$ выбрано так, что

$$\exp(ux)\exp(vx + wy) \in U$$

при всех u, v, w таких, что $|u| < a$, $|v| < a$, $|w| < a$. Если $f \in D(U)$, то функция F, определенная формулой

$$F(u, v, w) = f(\exp(ux)\exp(vx + wy)) \tag{3.6.7}$$

аналитична в области I_a, определенной неравенствами $|u| < a$, $|v| < a$, $|w| < a$. Можно считать, что число a выбрано столь малым, что ряд Тейлора для F в окрестности точки $(0, 0, 0)$ сходится абсолютно и равномерно на I_a. Пусть p, q, r — неотрицательные целые числа и

$$F_{p,q,r} = \left(\frac{\partial^{p+q+r} F}{\partial u^p\, \partial v^q\, \partial w^r}\right)(0, 0, 0);$$

тогда

$$F(u, v, w) = \sum_{p,q,r \geqslant 0} \frac{F_{p,q,r}}{p!\,q!\,r!} u^p v^q w^r \quad ((u, v, w) \in I_a). \tag{3.6.8}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial w}(u, v, 0) = \sum -p, q \geqslant 0 \frac{F_{p,q,1}}{p!\,q!} u^p v^q \tag{3.6.9}$$

для всех $|u| < a$, $|v| < a$. В частности, при $u = -t$, $v = t$ получаем из (3.6.9), что

$$\frac{\partial F}{\partial w}(-t, t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n \tag{3.6.10}$$

при $|t| < a$, где коэффициенты c_n определяются формулой

$$c_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k C_n^k F_{k,n-k,1}. \tag{3.6.11}$$

Заметим теперь, что из соотношений (3.6.4) и (3.6.7) следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial w}(-t,\,t,\,0) = ((d\exp)_{tx}(y)\,f)(e) \tag{3.6.12}$$

при $|t| < a$. С другой стороны, из (3.6.7) и (3.6.8) заключаем, что при $(u,\,v,\,w) \in I_a$ имеет место равенство

$$((vx+wy)^k f)(\exp(ux)) = \left(\frac{d^k}{dt^k}\,F(u,\,tv,\,tw)\right)_{t=0} = \\ = k! \sum_{p\geqslant 0,\,0\leqslant q\leqslant k} \frac{F_{p,\,q,\,k-q}}{p!\,q!\,(k-q)!}\,u^p v^q w^{k-q}. \tag{3.6.13}$$

Пусть $k = q+1$. Приравнивая коэффициенты в правой и левой части (3.6.13) при $v^q w$, получаем, что

$$\left(\left(\sum_{0\leqslant s\leqslant q} x^x y x^{q-s}\right) f\right)(\exp ux) = (q+1)! \sum_{p\geqslant 0} \frac{F_{p,\,q,\,1}}{p!\,q!}\,u^p = \\ = (q+1) \sum_{p\geqslant 0} \frac{F_{p,\,q,\,1}}{p!}\,u^p = (q+1)\left(\frac{p^{q+1}F}{\partial v^q\,\partial w}\right)(u,\,0,\,0) \tag{3.6.14}$$

при всех $|u| < a$. Дифференцируя равенство (3.6.14) p раз по u при $u = 0$, получаем (из I п. 3.4), что для всех целых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ имеет место равенство

$$F_{p,\,q,\,1} = \frac{1}{q+1}\left(\left(\sum_{0\leqslant s\leqslant q} x^{p+s} y x^{q-s}\right) f\right)(e). \tag{3.6.15}$$

Подставляя формулу (3.6.15) в соотношение (3.6.11), видим, что

$$c_n = \left(\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{1}{n=k+1} \sum_{s=0}^{n-k} x^{k+s} y x^{n-k-s}\right) f\right)(e) = \\ = \frac{1}{n+1}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{n+1}^k \sum_{k\leqslant m\leqslant n} x^m y x^{n-m}\right) f\right)(e) = \\ = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} (x^m y x^{n-m})(e) \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{n+1}^k\right). \tag{3.6.16}$$

Легко проверить индукцией по m, что

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{n+1}^k = (-1)^m C_n^m. \tag{3.6.17}$$

Подставляя (3.6.17) в (3.6.16), получаем

$$c_n = \frac{1}{n+1}\left(\left(\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m x^m y x^{n-m}\right) f\right)(e). \tag{3.6.18}$$

С другой стороны, из (3.6.5) следует, что в обертывающей алгебре алгебры Ли L имеет место равенство

$$(\operatorname{ad} x)^n(y) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m x^m y x^{n-m}. \tag{3.6.19}$$

Из (3.6.19) и (3.6.18) получаем соотношение

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n+1} (((\operatorname{ad} x)^n y)\, f)(e). \tag{3.6.20}$$

Согласно (3.6.20), (3.6.10) и (3.6.12), имеем тогда

$$((d\exp)_{tx}(y)\, f)(e) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} t^n ((\operatorname{ad} x)^n(y)\, f)(e) \tag{3.6.21}$$

при всех $|t| < a$. В частности, соотношение (3.6.21) справедливо, если U — координатная окрестность элемента e, а f — любая из функций, образующих систему аналитических координат в окрестности U. Тогда из (3.6.21) следует, что

$$(d\exp)_{tx}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(n+1)!} t^n (\operatorname{ad} x)^n(y) \tag{3.6.22}$$

при $|t| < a$. Но обе части равенства (3.6.22) являются целыми аналитическими функциями, поэтому они совпадают всюду. В частности, при $t = 1$ получаем равенство

$$(d\exp)_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\operatorname{ad} x)^n(y). \tag{3.6.23}$$

Так как $y \in L$ произвольно, то из (3.6.23) следует (3.6.6).

Введем функцию $F(z)$ комплексного переменного z, полагая

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n$$

для всех $z \in \mathbf{C}$. Тогда $zF(z) = 1 - e^{-z}$, и $F(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 2k\pi i$ для некоторого ненулевого целого k. Пусть $x \in L$; отображение $(d\exp)_x$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда все собственные значения преобразования отличны от нуля. Но формула (3.6.6) означает, что

$$(d\exp)_x = F(\operatorname{ad} x), \tag{3.6.24}$$

так что собственные значения оператора $(d\exp)_x$ равны $F(\lambda_1), \ldots$ $\ldots, F(\lambda_m)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения оператора $\operatorname{ad} x$. Отсюда следует, что $(d\exp)_x$ есть изоморфизм тогда и только тогда, когда $\lambda_j \neq 2k\pi i$ при всех $j = 1, \ldots, m$, где $k \neq 0$ — целые.

Глава X

АЛГЕБРЫ ЛИ

Основные определения, относящиеся к алгебрам Ли и их представлениям, даны в § 2 гл. IX; там же приведены важнейшие примеры. В этой главе излагается общая теория алгебр Ли.

§ 1. Некоторые определения

1.1. Дифференцирования алгебры Ли. Пусть A — алгебра над полем K (A может быть и алгеброй Ли, и ассоциативной алгеброй). *Дифференцированием* алгебры A называется линейное отображение d алгебры A в себя, удовлетворяющее условию

$$d(xy) = x(dy) + (dx)\,y. \tag{1.1.1}$$

I. *Множество* $\operatorname{Der}(A)$ *всех дифференцирований алгебры* A *является алгеброй Ли относительно обычных линейных операций и операции коммутирования, определенной формулой*

$$[d,\, d_1] = dd_1 - d_1 d$$

для всех $d,\, d_1 \in \operatorname{Der}(A)$. *Если* L *— алгебра Ли, то для любого* $x \in L$ *оператор* $\operatorname{ad} x\colon L \to L$, *определенный формулой* $\operatorname{ad} x(y) = [x,\, y]$, *является дифференцированием алгебры Ли* L. *Отображение* $x \to \operatorname{ad} x$ *есть гомоморфизм алгебры Ли* L *в алгебру Ли* $\operatorname{Der}(L)$, *и образ этого гомоморфизма в* $\operatorname{Der}(L)$ *является идеалом в* $\operatorname{Der}(L)$.

Доказательство. Пусть $d,\, d_1$ — дифференцирования алгебры A. Тот факт, что $[d,\, d_1]$ есть дифференцирование, проверяется прямым вычислением. Действительно,

$$\begin{aligned}
[d,\, d_1](xy) &= dd_1(xy) - d_1 d(xy) = \\
&= d((d_1 x)\,y + x(d_1 y)) - d_1((dx)\,y + x(dy)) = \\
&= ((dd_1)\,x)\,y + (d_1 x)(dy) + (dx)(d_1 y) + x((dd_1)\,y) - \\
&\quad - ((d_1 d)\,x)\,y - (dx)(d_1 y) - (d_1 x)(dy) - x((d_1 d)\,y) = \\
&= (dd_1 x)\,y + x(dd_1 y) - (d_1 dx)\,y - x(dd_1 y) = \\
&= ([d,\, d_1]\,x)\,y + x([d,\, d_1]\,y).
\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Из (1.1.2) и (1.1.1) следует, что $[d, d_1]$ — дифференцирование алгебры A. Если L — алгебра Ли, то для любых $x, y, z \in L$ в силу тождества Якоби:

$$\begin{aligned}\operatorname{ad} x([y, z]) = [x, [y, z]] = -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] = \\ = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [(\operatorname{ad} x)(y), z] + [y, (\operatorname{ad} x)(z)]. \quad (1.1.3)\end{aligned}$$

Сравнивая (1.1.3) с (1.1.1), видим, что отображение ad: $L \to L$ есть дифференцирование алгебры Ли L. Отображение $x \to \operatorname{ad} x$ есть гомоморфизм L в $\operatorname{Der}(L)$ согласно формуле (2.1.15) гл. IX. Наконец, если $x \in L$ и $d \in \operatorname{Der}(L)$, то для любого $y \in L$ имеем

$$\begin{aligned}[d,\ \operatorname{ad} x](y) = d(\operatorname{ad} x(y)) - (\operatorname{ad} x)(dy) = \\ = d([x, y]) - [x, dy] = [dx, y] + [x, dy] - [x, dy] = [dx, y]. \quad (1.1.4)\end{aligned}$$

Соотношение (1.1.4) означает, что имеет место равенство

$$[d,\ \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(dx) \qquad (1.1.5)$$

для всех $x \in L$, $d \in \operatorname{Der}(L)$. Следовательно, линейное пространство дифференцирований вида $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, есть идеал в $\operatorname{Der}(L)$.

Идеал дифференцирований вида $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, в алгебре Ли $\operatorname{Der}(L)$ называется *идеалом внутренних дифференцирований* алгебры Ли L.

1.2. Контрагредиентное представление и тензорное произведение представлений алгебр Ли. Пусть π — представление алгебры Ли L в пространстве V, и пусть пространства V и V^* находятся в двойственности относительно билинейной формы (v, v^*), $v \in V$, $v^* = V^*$. Представление π^* алгебры Ли L в пространстве V^*, определенное формулой

$$(v, \pi^*(x)\, v^*) = -(\pi(x)\, v, v^*) \qquad (1.2.1)$$

для всех $x \in L$, $v \in V$, $v^* \in V^*$, называется представлением, *контрагредиентным* представлению π.

Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — представление алгебры Ли L в пространствах $V_1, \ldots, V_n$ соответственно. Представление π алгебры Ли L в пространстве $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, определяемое формулой

$$\pi(x)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \ldots \otimes \pi_i(x)\, v_i \otimes \ldots \otimes v_n \qquad (1.2.2)$$

для всех $x \in L$, $v_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, называется *тензорным произведением* представлений $\pi_1, \ldots, \pi_n$ и обозначается $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$.

Читатель легко проверит, что π^* и $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$ действительно являются представлениями алгебры Ли L.

1.3. Каноническое отображение $V_1^* \otimes V_2$ на $L(V_1, V_2)$. Пусть V_1, V_2 — конечномерные векторные пространства, V_1^* — пространство, сопряженное к V_1. Рассмотрим отображение τ пространства $V_1^* \otimes V_2$

в пространство $L(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2, определяемое формулой

$$\tau\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes y_i\Big)(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(z)\, y_i, \quad z \in V_1, \quad y_i \in V_2, \quad f_i \in V_1^*. \qquad (1.3.1)$$

Отображение τ, очевидно, линейно. Всякий линейный оператор T из V_1 в V_2 принадлежит образу отображения τ, так как

$$Tz = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z)\, e_j, \quad z \in V_q, \qquad (1.3.2)$$

где (e_j) — фиксированный базис в V_2, а φ_j — некоторые линейные функционалы на V_1. Так как размерности пространств $V_1^* \otimes V_2$ и $L(V_1, V_2)$ равны и образ отображения τ есть все пространство $L(V_1, V_2)$, то τ — изоморфизм $V_1^* \times V_2$ на $L(V_1, V_2)$. Этот изоморфизм τ называется *каноническим изоморфизмом* $V_1^* \times V_2$ *на* $L(V_1, V_2)$.

Пусть L — алгебра Ли; пусть π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$, где V — конечномерное векторное пространство. Определим гомоморфизм π^* алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V^*)$, полагая

$$\pi^*(x) = -(\pi(x))^* \qquad (1.3.3)$$

для всех $x \in L$, где $(\pi(x))^*$ — оператор, сопряженный к $\pi(x)$. Читатель легко проверит, что отображение π^* действительно является гомоморфизмом; этот гомоморфизм называется *сопряженным* к π.

Рассмотрим гомоморфизм $\pi^* \otimes \pi$ алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V^* \times V)$, определяемый формулой

$$(\pi^* \otimes \pi)(x)(v^* \otimes v) = \pi^*(x)(v^* \otimes v) + v^* \otimes \pi(x)\, v = \\ = -(\pi(x))^* v^* \otimes v + v^* \otimes \pi(x)\, v \qquad (1.3.4)$$

для всех $x \in L$, $v \in V$, $v^* \in V^*$. Пусть θ — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(L(V, V))$, соответствующий $\pi^* \otimes \pi$ при изоморфизме τ. Для оператора T вида (1.3.2) имеем:

$$\begin{aligned}(\theta(x)\, T)\, z &= \theta(x)\, \tau\Big(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes e_j\Big) z = \\ &= \tau\Big((\pi^* \otimes \pi)(x)\Big(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes e_j\Big)\Big)(z) = \\ &= \tau\Big(\sum_{j=1}^{m} ((-\pi(x)^*)\, \varphi_j \otimes e_j + \varphi_j \otimes \pi(x)\, e_j)\Big)(z) = \\ &= -\sum_{j=1}^{m} (\pi(x)^* \varphi_j)(z)\, e_j + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z)\, \pi(x)\, e_j = \\ &= -\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\pi(x)\, z)\, e_j + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(z)\, \pi(x)\, e_j = \\ &= -T\pi(x)\, z + \pi(x)\, Tz = [\pi(x), T]\, z. \end{aligned} \qquad (1.3.5)$$

Из (1.3.5) следует, что

$$\theta(x)\,T = [\pi(x),\, T] \tag{1.3.6}$$

для всех $x \in L$, $T \in L(V, V)$.

1.4. Комплексная оболочка вещественной алгебры Ли. Пусть L — вещественная алгебра Ли. Обозначим через $L_{\mathbf{C}}$ вещественное линейное пространство $L + L$. Пусть J — линейный оператор в $L + L$, действующий по формуле $J\{x,\, y\} = \{-y,\, x\}$; положим

$$(\alpha + i\beta)\{x,\, y\} = \alpha\{x,\, y\} + \beta J\{x,\, y\} = \{\alpha x - \beta y,\, \alpha y + \beta x\} \tag{1.4.1}$$

для всех $\alpha,\, \beta \in \mathbf{R}$, $x,\, y \in L$, и

$$[\{x,\, y\},\, \{x_1,\, y_1\}] = \{[x,\, x_1] - [y,\, y_1],\, [y,\, x_1] + [x,\, y_1]\} \tag{1.4.2}$$

для всех $x,\, y,\, x_1,\, y_1 \in L$. Множество $L_{\mathbf{C}}$, снабженное обычной (покомпонентной) операцией сложения, операцией умножения на комплексные числа, определенной формулой (1.4.1), и операцией коммутирования, определенной формулой (1.4.2), является комплексной алгеброй Ли; обозначим эту алгебру Ли снова через $L_{\mathbf{C}}$. Комплексная алгебра Ли $L_{\mathbf{C}}$ называется *комплексификацией* или *комплексной оболочкой* вещественной алгебры Ли L. Очевидно, L можно отождествить с множеством $\widetilde{L}$ элементов алгебры Ли $L_{\mathbf{C}}$ вида $\widetilde{x} = \{x,\, 0\}$, где $x \in L$.

Если $e_1,\, \ldots,\, e_n$ — базис в L, то $\widetilde{e}_1,\, \ldots,\, \widetilde{e}_n$ образуют базис в комплексном линейном пространстве $L_{\mathbf{C}}$. Структурные постоянные комплексной алгебры Ли $L_{\mathbf{C}}$ относительно базиса $\widetilde{e}_1,\, \ldots,\, \widetilde{e}_n$ вещественны, так как совпадают со структурными постоянными вещественной алгебры Ли L относительно базиса $e_1,\, \ldots,\, e_n$.

Пусть V — вещественное линейное пространство. Обозначим через $V_{\mathbf{C}}$ комплексное линейное пространство $V + V$ с обычной операцией сложения и с операцией умножения на комплексные числа, определенной формулой

$$(\alpha + i\beta)\{x,\, y\} = \{\alpha x - \beta y,\, \alpha y + \beta x\}.$$

Если π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$, то формула

$$\begin{aligned}(\pi_{\mathbf{C}}(x,\, y))(\xi,\, \eta) &= \\ &= (\pi(x)\,\xi - \pi(y)\,\eta,\, \pi(x)\,\eta + \pi(y)\,\xi), \quad x,\, y \in L, \quad \xi,\, \eta \in V,\end{aligned}$$

определяет представление алгебры Ли L в пространстве $V_{\mathbf{C}}$. Очевидно, можно считать, что V вложено в $V_{\mathbf{C}}$. Представление $\pi_{\mathbf{C}}$ называется *комплексификацией* представления π.

Легко убедиться, что соответствие $\pi \to \pi_{\mathbf{C}}$ есть взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$ и представлениями $\pi_{\mathbf{C}}$ алгебры Ли $L_{\mathbf{C}}$ в пространстве $V_{\mathbf{C}}$ такими, что $\pi_{\mathbf{C}}(L)V \subset V$. Эго замечание часто позволяет сводить изучение гомоморфизмов π: $L \to gl(V)$ к изучению представлений комплексной алгебры Ли $L_{\mathbf{C}}$.

1.5. Ряд Жордана–Гёльдера. В дальнейшем нам будет полезно следующее предложение.

I. *Пусть* π — *гомоморфизм алгебры Ли* L *в алгебру Ли* $gl(V)$, *где* V — *конечномерное векторное пространство. Существует набор подпространств* $V_0 = (0) \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$ *пространства* V *такой, что* $V_{k-1} \subset V_k$ *для* $k = 1, \ldots, n$, *каждое из подпространств* V_k *инвариантно относительно* $\pi(L)$ *и семейство операторов, индуцируемое семейством* $\pi(L)$ *в* V_k/V_{k-1}, *неприводимо.*

Доказательство. Если семейство $\pi(L)$ неприводимо, то утверждение очевидно. Пусть $\pi(L)$ приводимо. Тогда V содержит ненулевое подпространство V^1, инвариантное относительно $\pi(L)$, такое, что размерность V^1 меньше размерности V. Если ограничение семейства $\pi(L)$ на V^1 приводимо, то V^1 содержит нетривиальное инвариантное подпространство, и т. д. Так как размерность V конечна, то V содержит ненулевое подпространство V_1, на котором сужение семейства $\pi(L)$ неприводимо. Гомоморфизм π определяет тогда гомоморфизм π_1 алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V/V_1)$. Пусть $\widetilde{V}_2$ — подпространство в V/V_1, на котором $\pi_1(L)$ неприводимо; это подпространство существует в силу предыдущего рассуждения. Обозначим через V_2 полный прообраз $\widetilde{V}_2$ в пространстве V. Тогда V_2 инвариантно относительно $\pi(L)$. Продолжая эту конструкцию, получаем конечное семейство подпространств пространства V:

$$(0) = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V, \tag{1.5.1}$$

таких, что каждое V_k инвариантно относительно $\pi(L)$, и семейство операторов, индуцируемых семейством операторов $\pi(L)$ в V_{k+1}/V_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, неприводимо.

Цепочка подпространств (1.5.1) называется *рядом Жордана–Гёльдера* для гомоморфизма π.

1.6. Определение разрешимых и нильпотентных алгебр Ли. Пусть A, B — подмножества алгебры Ли L. Обозначим через $[A, B]$ линейное подпространство в L, порожденное всевозможными элементами вида $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$.

I. *Если* M *и* N — *идеалы в* L, *то* $[M, N]$ — *идеал в* L.

Доказательство. Пусть $a \in M$, $b \in N$. Тогда для любого $x \in L$ имеем

$$[[a, b], x] = [[a, x], b] - [[b, x], a] \tag{1.6.1}$$

согласно тождеству Якоби. Но $[a, x] \in M$ и $[b, x] \in N$, так как M и N — идеалы. Следовательно, правая часть формулы (1.6.1) принадлежит $[M, N]$. Так как любой элемент $y \in [M, N]$ есть конечная линейная комбинация элементов вида $[a, b]$, $a \in M$, $b \in N$, то $[y, x] \in [M, N]$ для всех $y \in [M, N]$, т. е. линейное подпространство $[M, N]$ является идеалом.

Пусть L — алгебра Ли. Положим

$$L = L^{(0)} = L_0; \quad L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]; \quad L_n = [L, L_{n-1}]. \qquad (1.6.2)$$

Из предложения I следует, что $L^{(n)}$ (соответственно L_n) есть идеал в $L^{(r)}$ (соответственно в L_r) при $0 \leqslant r \leqslant n$. Последовательность идеалов L_n называется *убывающим центральным рядом* алгебры Ли L, а последовательность $L^{(n)}$ — *производным рядом* алгебры Ли L. Идеал $L^{(1)}$ называется *производным идеалом* алгебры Ли L. Алгебра Ли L называется *разрешимой* (соответственно *нильпотентной*), если существует такое натуральное n, что $L^{(n)} = (0)$ (соответственно $L_n = (0)$). Наименьшее из таких n называется *высотой*, или *рангом* разрешимой (соответственно нильпотентной) алгебры Ли L.

II. *Всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима.*

Утверждение следует из очевидного соотношения $L^{(n)} \subset L_n$.

III. *Всякая подалгебра M разрешимой (нильпотентной) алгебры Ли L разрешима (соответственно нильпотентна).*

Утверждение следует из соотношений $M^{(n)} \subset L^{(n)}$, $M_n \subset L_n$.

IV. *Гомоморфный образ, в частности, фактор-алгебра разрешимой (нильпотентной) алгебры Ли L есть разрешимая (соответственно нильпотентная) алгебра.*

Доказательство. Пусть π — гомоморфизм алгебры Ли L на алгебру Ли L'. Тогда $L'^{(n)} = \pi(L^{(n)})$, $L'_n = \pi(L_n)$. Отсюда следует утверждение предложения IV.

V. *Каждая фактор-алгебра $L^{(n-1)}/L^{(n)}$ коммутативна.*

Доказательство. Пусть π — канонический гомоморфизм алгебры $L^{(n-1)}$ на $L^{(n-1)}/L^{(n)}$. Очевидно, $[x, y] \in L^{(n)}$ при $x, y \in L^{(n-1)}$ и потому $[\pi(x), \pi(y)] = \pi([x, y]) = 0$.

VI. *Пусть M — такой идеал в $L^{(n-1)}$, что фактор-алгебра $L^{(n-1)}/M$ коммутативна; тогда $M \supset L^{(n)}$.*

Доказательство. Пусть π — канонический гомоморфизм алгебры $L^{(n-1)}$ на $L^{(n-1)}/M$. Тогда при $x, y \in L^{(n-1)}$ $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)] = 0$ и потому $\pi(L^{(n)}) = (0)$; следовательно, $L^{(n)} \subset M$.

§ 2. Представления нильпотентных и разрешимых алгебр Ли

2.1. Нильпотентные алгебры Ли и теорема Энгеля. Основной целью этого пункта является доказательство следующих двух теорем.

Теорема 1. *Алгебра Ли L нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого $x \in L$ линейное преобразование нильпотентно (т. е. существует такое натуральное p, что $(\mathrm{ad}\, x)^p = 0$).*

Теорема 2. *Пусть L — алгебра Ли над полем K, $V \neq (0)$ — конечномерное векторное пространство над K, π — гомоморфизм* *алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$. Если любое линейное преобразование $\pi(x)$, $x \in L$, нильпотентно, то существует ненулевой вектор $v \in V$ такой, что $\pi(x)\,v = 0$ для всех $x \in L$.*

Доказательство теоремы 2. а). Пусть N — ядро представления π. Положим $L' = L/N$ и определим представление π алгебры Ли L', положив $\pi(\widetilde{x}) = \pi(x)$ при $\widetilde{x} \in L'$, $x \in \widetilde{x}$. Очевидно, достаточно доказать утверждение теоремы 2 для представления $\widetilde{\pi}$: $\widetilde{x} \to \pi(\widetilde{x})$ алгебры Ли L'. Из самого построения ясно также, что $\widetilde{\pi}$: $\widetilde{x} \to (\widetilde{x})$ — точное представление алгебры Ли L' и что это представление удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $N = (0)$. Если размерность алгебры Ли L равна единице, то утверждение теоремы очевидно. Действительно, если $\pi(x)$ — ненулевой элемент из $\pi(L)$, то любой элемент из $\pi(L)$ является скалярным кратным элемента $\pi(x)$, поэтому достаточно показать, что ядро оператора $\pi(x)$ ненулевое. По условию, $(\pi(x))^p = 0$ для некоторого натурального p, т. е. ядро оператора $(\pi(x))^p$ равно V и потому ненулевое; тогда и ядро оператора $\pi(x)$ также отлично от нуля. Таким образом, мы можем применить индукцию по размерности алгебры Ли L, доказывая теорему в следующем индуктивном предположении: утверждение теоремы 2 справедливо для любой алгебры Ли M, размерность которой меньше размерности L.

б). Докажем, что в алгебре Ли L существует идеал коразмерности 1. Пусть M — собственная подалгебра в L (например, одномерное подпространство всегда является подалгеброй Ли, и притом абелевой; это следует из соотношения $[x, x] = 0$). Рассмотрим гомоморфизм $x \to \operatorname{ad} x$ алгебры Ли L в $gl(L)$. Семейство операторов $\operatorname{ad} x$, $x \in M$, оставляет подпространство $M \subset L$ инвариантным; переходя к операторам, индуцируемым операторами $\operatorname{ad} x$, $x \in M$, в фактор-пространстве L/M, получаем гомоморфизм ρ алгебры Ли M в алгебру Ли $gl(L/M)$. Так как каждый оператор $\pi(x)$, $x \in L$, нильпотентен, причем представление π является точным, то любой оператор $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, нильпотентен. Действительно, отождествляя алгебру Ли L с подалгеброй Ли $\pi(L) \subset gl(V)$ с помощью точного представления π, видим, что $(\operatorname{ad} x)\, y = xy - yx$ для всех $x, y \in \pi(L)$; отсюда и из легко проверяемой по индукции формулы

$$(\operatorname{ad} x)^n(y) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} C_n^p x^p y x^{n-p}$$

следует, что если $x^q = 0$, то $(\operatorname{ad} x)^{2q} = 0$. Таким образом, операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, ннльпотентны. Тогда и операторы $\rho(x)$, $x \in M$, будучи фактор-операторами нильпотентных операторов, нильпотентны. Так как $\dim M < \dim L$, то можно применить предположение индукции. Пусть S — одномерное подпространство в L/M, аннулируемое операторами $\rho(x)$, $x \in M$. Пусть T — полный прообраз подпространства S при каноническом отображении L на L/M. Очевидно, что $\dim T = \dim M + 1$, причем $[M, T] \subset M$. Таким образом, T — подалгебра Ли алгебры Ли L, такая, что M образует в T идеал коразмерности 1. До сих пор подалгебра M была произвольной собственной подалгеброй в L. Предположим, что M — максимальная подалгебра в L, отличная от L (существование такой подалгебры легко следует из конечномерности L). Подалгебра T, определяемая с помощью предыдущего рассуждения, содержит M как собственную подалгебру. Из максимальности M следует, что $T = L$. Следовательно, M — идеал в L и M имеет коразмерность 1 в L.

в). Пусть y — некоторый элемент в $L \diagdown M$, где M — идеал коразмерности 1 в L. Тогда алгебра L порождается идеалом M и элементом y. Пусть $W \subset V$ — подпространство векторов V, аннулируемых всеми операторами $\pi(x)$, $x \in M$. По предположению индукции, $W \neq (0)$. Покажем, что подпространство W инвариантно относительно всех операторов $\pi(x)$, $x \in L$. В самом деле, пусть $x \in L$, $h \in M$, $v \in W$. Тогда

$$\pi(h)\,\pi(x)\,v = \pi(x)\,\pi(h)\,v + \pi([h, x])\,v = 0, \tag{2.1.1}$$

так как M — идеал. Так как $h \in M$ произволен, то из соотношения (2.1.1) следует, что $\pi(x)\,v$ содержится в W. В частности, W инвариантно относительно $\pi(y)$. С другой стороны, $\pi(y)$ нильпотентен. Следовательно, существует некоторый ненулевой вектор $v_0 \in W$, аннулируемый оператором $\pi(y)$. Тогда вектор v_0 аннулируется всеми операторами $\pi(x)$, $x \in L$, что доказывает теорему 2.

Следствие 1. *Пусть L — алгебра Ли такая, что все операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, нильпотентны. Тогда центр Z алгебры Ли L отличен от нуля.*

Доказательство. Применим теорему 2 к гомоморфизму $x \to \operatorname{ad} x$ алгебры Ли L в $gl(L)$. Ненулевой элемент $x \in L$, аннулируемый всеми операторами $\operatorname{ad} x$, содержится в Z. Следовательно, $Z \neq (0)$.

Следствие 2. *Пусть L — алгебра Ли такая, что все операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, нильпотентны. Тогда существует такая цепочка идеалов*

$$L = A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n = (0), \tag{2.1.2}$$

что A_i/A_{i+1} лежит в центре алгебры L/A_{i+1}.

Доказательство получается последовательным применением следствия 1 к алгебрам Ли L, L/Z (операторы $\operatorname{ad} y$, $y \in L/Z$, являются фактор-операторами нильпотентных операторов и потому нильпотентны), и т. д. В частности, можно взять $A_{n-1} = Z$.

Следствие 3. *Если π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$, удовлетворяющий условиям теоремы 2, то существует такое натуральное число q, что произведение любых q операторов $\pi(x)$, $x \in L$, равно нулю.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство $W_0 \subset W$, образованное векторами, аннулируемыми всеми операторами $\pi(x)$, $x \in L$.

Нам известно, что $W_0 \neq 0$. Если $W_0 \neq V$, положим $V_1 = V/W_0$. Операторы $\pi(x)$, $x \in L$, индуцируют гомоморфизм π_1 алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V_1)$, и гомоморфизм π_1 удовлетворяет условиям теоремы 2. Пусть $W_1' \subset V_1$ — подпространство, образованное векторами, аннулируемыми всеми операторами $\pi_1(x)$, $x \in L$. Пусть W_1 — полный прообраз W_1' при каноническом отображении V на V_1. Очевидно, что W_1 — подпространство, инвариантное относительно всех операторов $\pi(x)$, $x \in L$. Так как $W_1' \neq (0)$, то $W_1 \neq W_0$. Если $W_1 \neq V$, положим $V_2 = V/W_1$, и т. д. Таким образом, по индукции определяются подпространства W_i, $i = 1, 2, \ldots$, причем W_{i+1} состоит из таких векторов $v \in V$, что $\pi(x)\,v \in W_i$ для всех $x \in L$. Согласно теореме 2, если $W_i \neq V$, то $W_i \neq W_{i+1}$. Так как подпространство V конечномерно, то для некоторого натурального p получим $W_p = V$. Тогда для любых $x_0, x_1, \ldots, x_p \in L$ имеем

$$\pi(x_0)\ldots\pi(x_p)W_p \subset \pi(x_0)\ldots\pi(x_{p-1})W_{p-1} \subset \ldots \subset \pi(x_0)W_0 \subset (0),$$

что доказывает следствие 3.

Доказательство теоремы 1. Пусть все операторы $\mathrm{ad}(x)$, $x \in L$, нильпотентны. Тогда согласно следствию 3 существует натуральное число q такое, что произведение любых q операторов $\mathrm{ad}\,x$, $x \in L$, равно нулю. Рассмотрим убывающий центральный ряд алгебры Ли L. Так как $[L, L_n] = P_{n+1}$, то $L_{q+1} = (0)$. Обратно, если $L_{q+1} = (0)$, то из определения $\mathrm{ad}(x)$ и идеалов L_i непосредственно следует, что $(\mathrm{ad}(x))^q = 0$ для любого $x \in L$.

Теорема 1 является критерием нильпотентности алгебры Ли L. Теорема 2 называется *теоремой Энгеля*.

2.2. Некоторые свойства разрешимых алгебр Ли.

I. *Алгебра Ли L разрешима тогда и только тогда, когда существует последовательность вложенных друг в друга подалгебр Ли*

$$L = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_m \supset M_{m+1} = (0),$$

где M_{k+1} — идеал в M_k $(0 \leqslant k \leqslant m)$ и фактор-алгебра M_k/M_{k+1} коммутативна.

Доказательство. Фактор-алгебры $L^{(k)}/L^{(k+1)}$ коммутативны (см. V п. 1.6), и $L^{(k+1)}$ — идеал в $L^{(k)}$ (см. I п. 1.6). Следовательно, если L разрешима, то можно взять $M_k = L^{(k)}$. Обратно, пусть L — алгебра Ли, и существует семейство подалгебр Ли, удовлетворяющее условию предложения I; тогда из коммутативности фактор-алгебр M_k/M_{k+1} следует, что $[M_k, M_k] \subset M_{k+1}$; отсюда по индукции получаем, что $L^{(k)} \subset M_k$ для всех $k = 1, \ldots, m+1$. Так как $M_{m+1} = (0)$, то $L^{(m+1)} = (0)$, т. е. алгебра Ли L разрешима.

II. *Если L — алгебра Ли, M — идеал в L и алгебры Ли M и L/M разрешимы, то L разрешима.*

Доказательство. Пусть $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_p \supset M_{p+1} = (0)$ и $L/M = N_0 \supset N_1 \ldots \supset N_q \supset N_{q+1} = (0)$ — последовательности подалгебр, удовлетворяющие условиям предложения I. Пусть $\widetilde{M_k}$ — полный прообраз N_k в L ($k = 0, \ldots, q+1$), тогда $\widetilde{M_{q+1}} = M = M_0$, $\widetilde{M_{k+1}}$ — идеал в $\widetilde{M_k}$ ($0 \leqslant k \leqslant q$), а фактор-алгебра $\widetilde{M_k}/\widetilde{M_{k+1}}$ изоморфна N_k/N_{k+1} и потому коммутативна. Следовательно, последовательность подалгебр

$$L = \widetilde{M_0} \supset \widetilde{M_1} \supset \ldots \supset \widetilde{M_{q+1}} \supset M_1 \supset \ldots \supset M_p \supset M_{p+1} = (0)$$

удовлетворяет условиям предложения I и потому L — разрешимая алгебра Ли.

2.3. Теорема Ли.

Теорема. *Пусть π — неприводимое линейное представление разрешимой алгебры Ли L в комплексном векторном пространстве $V \neq (0)$. Тогда* $\dim V = 1$.

Доказательство. Достаточно показать, что в пространстве V существует вектор, собственный для всех операторов представления π. Если $\dim L = 1$, то утверждение следует из теоремы о существовании собственных векторов у линейных преобразований комплексных линейных пространств. Докажем теорему индукцией по размерности алгебры Ли L.

Пусть $\dim L > 1$. Рассмотрим какое-нибудь линейное подпространство $M \subset L$ коразмерности 1 такое, что $M \supset L^{(1)}$. (Так как L разрешима, то $L^{(1)} \neq L$; поэтому такое подпространство M существует.) Тогда $[L, M] \subset [L, L] = L^{(1)} \subset M$; следовательно, M — идеал в L коразмерности 1. Пусть $y_0 \notin M$; тогда y_0 и M порождают векторное пространство L. По предположению индукции, существует такой ненулевой вектор $v_0 \in V$, что $\pi(x)\, v_0 = \lambda(x)\, v_0$ для всех $x \in M$, где $\lambda(x)$ — некоторые числа. Очевидно, что λ — линейный функционал на M. Пусть $(\pi(y_0))^n v_0 = v_n$. Так как V конечномерно, то существует такое целое $p \geqslant 0$, что векторы $v_0, v_1, \ldots, v_p$ линейно независимы, а векторы $v_0, v_1, \ldots, v_{p+1}$ линейно зависимы. Рассмотрим подпространство $W \subset V$, порожденное векторами $v_0, v_1, \ldots, v_p$. По построению числа p подпространство W инвариантно относительно оператора $\pi(y_0)$. Докажем, что W инвариантно также относительно операторов вида $\pi(h)$, $h \in M$. Покажем для этого индукцией по q, что вектор $\pi(h)\, v_q$ отличается от $\lambda(h)\, v_q$ на линейную комбинацию векторов $v_0, v_1, \ldots, v_{q-1}$ для всех $h \in M$. При $q = 0$ это последнее утверждение выполнено по условию. Если оно справедливо для некоторого целого $q \geqslant 0$, то

$$\pi(h)\, v_{q+1} = \pi(h)\, \pi(y_0)\, v_q = [\pi(h), \pi(y_0)]\, v_q + \pi(y_0)\, \pi(h)\, v_q = \\ = \pi([h, y_0])\, v_q + \pi(y_0)\, \pi(h)\, v_q.$$

Но M — идеал, поэтому $[h, y_0] \in M$ и, по предположению индукции, $\pi([h, y_0])\, v_q$ есть линейная комбинация $v_0, \ldots, v_q$. Далее, $\pi(h)\, v_q$ отличается от $\lambda(h)\, v_q$ на линейную комбинацию $v_0, v_1, \ldots, v_{q-1}$ (по предположению индукции), поэтому $\pi(y_0)\, \pi(h)\, v_q$ отличается от $\pi(y_0)(\lambda(h)\,v_q) = \lambda(h)\,\pi(y_0)\,v_q = \lambda(h)\,v_{q+1}$ на линейную комбинацию $v_1, v_2, \ldots, v_q$, что завершает доказательство инвариантности подпространства W относительно $\pi(h)$, $h \in M$. Так как W инвариантно и относительно $\pi(y_0)$, то W инвариантно относительно $\pi(L)$.

Пусть $\mathrm{tr}_W(x)(x)$ — след ограничения оператора $\pi(x)$, $x \in L$, на подпространство W. Если $h \in M$, то из представимости $\pi(h)\,v_q$ в виде суммы $\lambda(h)\,v_q$ и линейной комбинации векторов $v_0, v_1, \ldots, v_{q-1}$ следует, что $\mathrm{tr}_W(h) = \lambda(h)\dim W$. С другой стороны, след любого коммутатора равен нулю, поэтому $\mathrm{tr}_W(x) = 0$ для всех $h \in L^{(1)}$, т. е. $\lambda(h) = 0$ при $h \in L^{(1)}$. Покажем, что $\pi(h)\,v_q = \lambda(h)\,v_q$ для всех $h \in M$. Действительно, при $q = 0$ эта формула верна по предположению, а если эта формула верна для некоторого q, то

$$\begin{aligned}\pi(h)\,v_{q+1} = \pi(h)\,\pi(y_0)\,v_q = \pi([h, y_0])\,v_q + \pi(y_0)\,\pi(h)\,v_q = \\ = \lambda([h, y_0])\,v_q + \pi(y_0)\,\lambda(h)\,v_q = \lambda(h)\,v_{q+1},\end{aligned}$$

так как $\lambda([h, y_0]) = 0$ по предыдущему. Итак, любой вектор пространства W является собственным для всех операторов $\pi(h)$, $h \in M$. Пусть $w \in W$ — собственный вектор для оператора $\pi(y_0)$; тогда w — общий собственный вектор для операторов из $\pi(L)$.

С л е д с т в и е 1. *Алгебра Ли разрешима тогда и только тогда, когда ее производная алгебра $L^{(1)}$ нильпотентна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — комплексная алгебра Ли. Легко проверить (см. (1.6.2)), что $L^{(k)} \subset (L^{(1)})_{k-1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, поэтому из нильпотентности алгебры Ли $L^{(1)}$ следует разрешимость алгебры Ли L.

Обратно, пусть алгебра Ли L разрешима. Из доказательства теоремы Ли следует, что элементы $h \in L^{(1)}$ в любом линейном представлении переходят в нильпотентные операторы. В частности, это относится и к присоединенному представлению. Отсюда и из теоремы I п. 2 следует, что алгебра Ли $L^{(1)}$ нильпотентна.

Если L — вещественная алгебра Ли, то утверждение следствия 1 остается справедливым, как легко видеть с помощью перехода к комплексным оболочкам рассматриваемых алгебр Ли. Подробности представляются читателю.

С л е д с т в и е 2. *Пусть L — алгебра Ли, π — представление алгебры Ли L в комплексном линейном пространстве V. В пространстве V можно выбрать базис так, что в этом базисе все операторы $\pi(x)$, $x \in L$, будут иметь верхние треугольные матрицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из доказательства теоремы 1: на инвариантном подпространстве W операторы $\pi(x)$, $x \in L$, записываются в базисе $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ треугольными матрицами (a_{ij}); $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Утверждение следствия 2 получается отсюда с помощью перехода к фактор-пространству V/W и т. д.

2.4. Структура линейных представлений нильпотентных алгебр Ли. Пусть L — алгебра Ли, π — линейное представление алгебры Ли L в пространстве V. Функция λ на алгебре Ли L называется *весом* представления π, если существует такой ненулевой вектор $v \in V$, что $\pi(x)\, v = \lambda(x)\, v$ для всех $x \in L$. Очевидно, что любой вес является линейным функционалом на L.

I. *Если L — разрешимая алгебра Ли, то любое представление алгебры Ли L в ненулевом векторном пространстве имеет хотя бы один вес.*

Доказательство сводится к применению теоремы Ли.

Пусть L — алгебра Ли, π — ее линейное представление в пространстве V. Пусть λ — линейный функционал на V. Обозначим через $V(L, \lambda)$ или через V^λ подпространство пространства V, образованное всеми такими векторами $v \in V$, что при некотором целом $n \geqslant 0$ (зависящем от v)

$$(\pi(x) - \lambda(x)\, 1)^n v = 0 \tag{2.4.1}$$

при всех $x \in L$.

II. *Пусть π — линейное представление нильпотентной алгебры Ли L в пространстве V. Тогда*

1) *подпространства $V(L, \lambda)$ инвариантны относительно $\pi(L)$;*

2) *если $V(L, \lambda) \neq (0)$, то λ — вес представления π, и ограничение представления π на подпространство $V(L, \lambda)$ не имеет других весов;*

3) *пространство V есть прямая сумма подпространств V^λ.*

Доказательство. Пусть A — линейный оператор в V, μ — число. Обозначим через $V(A, \mu)$ подпространство пространства V, образованное такими векторами $v \in V$, что $(A - \mu 1)^n v = 0$ при некотором $n \geqslant 0$ (зависящем от v). Из (2.4.1) следует, что $V(L, \lambda) = \bigcap\limits_{x \in L} V(\pi(x), \lambda(x))$, поэтому для доказательства инвариантности V^λ достаточно показать, что $V(\pi(x), \lambda(x))$ инвариантно относительно $\pi(L)$ при всех $x \in L$. Пусть $y \in L$, $v \in V(\pi(x), \lambda(x))$. По условию, алгебра Ли L нильпотентна, т. е. существует такое $k \geqslant 0$, что $(\operatorname{ad} x)^k y = 0$. *Покажем индукцией по k, что $\pi(y)\, v \in V(\pi(x), \lambda(x))$.* При $k = 0$ утверждение очевидно. Далее,

$$(\pi(x) - \lambda(x))\, \pi(y) = \pi(y)(\pi(x) - \lambda(x)) + \pi([x, y]),$$

поэтому справедливо равенство

$$(\pi(x) - \lambda(x))^n \pi(y) = \pi(y)(\pi(x) - \lambda(x))^n + \\ + \sum_{m=0}^{n-1} (\pi(x) - \lambda(x))^{n-m-1} \pi([x, y])(\pi(x) - \lambda(x))^m \tag{2.4.2}$$

(оно легко проверяется индукцией по n). Заметим теперь, что для любого $v \in V(\pi(x), \lambda(x))$ имеем $(\pi(x) - \lambda(x)\, 1)^{\dim V(\pi(x), \lambda(x))}\, v = 0$.

Действительно, по условию, оператор $A = \pi(x) - \lambda(x)\,1$ нильпотентен в $V(\pi(x),\,\lambda(x))$, и если $p = \dim V(\pi(x),\,\lambda(x))$, то характеристический многочлен оператора A в $V(\pi(x),\,\lambda(x))$ равен λ^p, поэтому $A^p = 0$ вследствие теоремы Гамильтона–Кэли. Положим теперь $n > 2p$. Применим обе части равенства (2.4.2) к вектору $v \in V(\pi(x),\,\lambda(x))$. Очевидно, что $(\pi(x) - \lambda(x)\,1)^m v = 0$ при $m \geqslant p$. С другой стороны, $\pi([x,\,y])\,v \in V(\pi(x),\,\lambda(x))$, так как $(\operatorname{ad} x)^{k-1}[x,\,y] = (\operatorname{ad} x)^k y = 0$ и можно применить предположение индукции. Если $m < p$, то $n - m - 1 \geqslant p$, поэтому после применения (2.4.2) к вектору $v \in V(\pi(x),\,\lambda(x))$ все слагаемые в правой части обратятся в нуль. Следовательно, $(\pi(x) - \lambda(x)\,1)^n \pi(y)\,v = 0$ при $v \in V(\pi(x),\,\lambda(x))$, $n > 2p$, т. е. $\pi(y)\,v \in V(\pi(x),\,\lambda(x))$, что доказывает инвариантность $V(\pi(x),\,\lambda(x))$, а с ней и инвариантность $V(L,\,\lambda)$.

Утверждение (2) сразу следует из теоремы Ли. Действительно, ограничение π на $V(L,\,\lambda)$ имеет вес согласно I. Если этот вес равен μ, то оператор $\pi(x) - \lambda(x)\,1$ нильпотентен в $V(L,\,\lambda)$, в то время как $\pi(x) - \mu(x)\,1$ имеет в $V(L,\,\lambda)$ нулевое собственное значение. Следовательно, $\lambda(x) = \mu(x)$ для всех $x \in L$.

Покажем теперь, что подпространства V^λ линейно независимы. Пусть $\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_r$ — различные веса представления π. Соотношение $\lambda_i(x) = \lambda_j(x)$ выполняется при $i \neq j$ на некотором подпространстве в L коразмерности 1; очевидно, что конечное объединение таких гиперплоскостей не может совпадать с L, поэтому существует такой $x \in L$, что $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$ при $i \neq j$. Если $v_i \in V^{\lambda_i}$, $i = 1,\,\ldots,\,r$, то $(\pi(x) - \lambda_i(x))^n v_i = 0$ для некоторого n. Приводя оператор $\pi(x)$ к жордановой нормальной форме, видим, что векторы v_i лежат в разных корневых подпространствах оператора $\pi(x)$ и поэтому линейно независимы. Таким образом, сумма всех подпространств $V(L,\,\lambda)$ прямая.

Докажем теперь индукцией по размерности пространства V, что $V = \Sigma V^\lambda$. При $V = (0)$ это очевидно. Пусть $\dim V > 0$. Если любой оператор $\pi(x)$, $x \in L$, имеет единственное собственное значение $\lambda(x)$, то, по теореме Ли, функция λ является весом представления π и $V = V^\lambda$. Если же существует $x \in L$ такой, что оператор $\pi(x)$ имеет по крайней мере два различных собственных значения, то пространство V есть прямая сумма подпространств $V(\pi(x),\,\lambda_i(x))$, инвариантных относительно $\pi(L)$ и имеющих размерность, строго меньшую $\dim V$; поэтому можно применить предположение индукции. Следовательно, $V = \Sigma V^\lambda$.

§ 3. Радикалы алгебры Ли

I. *Во всякой алгебре Ли L существует наибольший разрешимый идеал.*

Доказательство. Пусть A и B — разрешимые идеалы в L. Тогда сумма этих идеалов $A + B$ есть идеал в L. Покажем, что идеал $A + B$ разрешим. Очевидно, что B есть идеал в $A + B$. Кроме того, фактор-алгебра $(A+B)/B$ изоморфна алгебре Ли $A/(A \cap B)$. Следовательно, алгебра Ли $A+B$ содержит разрешимый идеал B; фактор-алгебра по этому идеалу изоморфна фактор-алгебре разрешимой алгебры Ли и поэтому разрешима. Следовательно, $A+B$ — разрешимый идеал в L. Так как алгебра Ли L конечномерна, то сумма всех разрешимых идеалов алгебры Ли L совпадает с суммой конечного числа этих идеалов и потому является разрешимым идеалом. Этот идеал и есть наибольший разрешимый идеал в L.

II. *Пусть M — идеал в алгебре Ли L, π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$ в конечномерном пространстве V. Пусть E — алгебра линейных операторов в V, порожденная единичным оператором и операторами $\pi(x)$, $x \in L$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *для любого $x \in M$ оператор $\pi(x)$ нильпотентен*;

2) *существует двусторонний идеал I в ассоциативной алгебре E, обладающий следующими свойствами*:

а) $\pi(h) \in I$ *при* $h \in M$,

б) *идеал I состоит из нильпотентных операторов*;

3) *если* $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ *— ряд Жордана–Гёльдера для гомоморфизма π, то $\pi(M)V_k \subset V_{k-1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Очевидно, что из 2) следует 1). Если выполнено условие 3), то для любого $x \in M$

$$(\pi(x))^n V = (\pi(x))^n V_n =$$
$$= (\pi(x))^{n-1}\pi(x)V_n \subset (\pi(x))^{n-1}V_{n-1} \subset \ldots \subset \pi(x)V_1 \subset V_0 = (0),$$

поэтому выполнено условие 1). Обратно, пусть выполнено условие 1); покажем, что тогда выполняются условия 2) и 3). Пусть $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ — ряд Жордана–Гёльдера для гомоморфизма π (см. I п. 1.5). Пусть $W_k = V_k/V_{k-1}$. Если $x \in M$, то оператор $\pi(x)$ нильпотентен в V, поэтому $\pi(x)$ нильпотентен в V_k. Так как подпространство V_{k-1} инвариантно относительно $\pi(x)$ для всех $x \in L$, то оператор $\pi(x)$, $x \in L$, индуцирует некоторый оператор $\rho(x)$ в $W_k = V_k/V_{k-1}$. При $x \in M$ оператор $\pi(x)|_{V_k}$ нильпотентен, поэтому оператор $\rho(x)$, $x \in M$, в пространстве W_k также нильпотентен. Введем подпространство $H \subset W_k$, образованное векторами $w \in W_k$ такими, что $\rho(x)\,w = 0$ для всех $x \in M$. По теореме Энгеля (теорема 2 п. 2.1) $H \neq (0)$. Покажем, что подпространство H инвариантно относительно семейства операторов, индуцируемого операторами из $\pi(L)$ в пространстве W_k. Действительно, $\rho(x)\,w = 0$ для всех $x \in M$, $w \in H$; с другой стороны, так как M — идеал в алгебре Ли L, то $[x, y] \in M$ при $x \in M$, $y \in L$; поэтому $\rho(x)\,\rho(y)\,w = \rho([x, y])\,w + \rho(y)\,\rho(x)\,w = 0$ для всех $y \in L$. Следовательно, $\rho(y)\,w \in H$ при $w \in H$, $y \in L$. Но семейство операторов, индуцируемых операторами из $\pi(L)$ в пространстве W_k, неприводимо по определению ряда Жордана–Гёльдера; поэтому $H = W_k$. Следовательно, $\pi(M)V_k \subset V_{k-1}$, т. е. выполнено условие 3).

Пусть I — множество таких элементов T ассоциативной алгебры E, что $TV_k \subset V_{k-1}$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Очевидно, что I — линейное подпространство в E. Заметим, что для любого оператора $S \in E$ выполняется соотношение $SV_k \subset V_k$ (так как алгебра E порождена операторами из $\pi(L)$, а для любого $S \in \pi(L)$ условие $SV_k \subset V_k$ выполняется по определению ряда Жордана–Гёльдера). Поэтому при $S \in E$, $T \in I$ имеем $STV_k \subset SV_{k-1} \subset V_{k-1}$ и $TSV_k \subset TV_k \subset V_{k-1}$, т. е. $ST \in I$, $TS \in I$. Таким образом, I — двусторонний идеал в ассоциативной алгебре E. Мы уже доказали, что $\pi(M)V_k \subset V_{k-1}$, т. е. $\pi(M) \subset I$. Кроме того, $T^nV = T^nV_n \subset T^{n-1}(TV_n) \subset T^{n-1}V_{n-1} \subset \ldots \subset TV_1 \subset V_0 = (0)$ для всех $T \in I$, т. е. любой элемент идеала I является нильпотентным оператором в пространстве V.

III. *Пусть E — алгебра линейных операторов на алгебре Ли L, порожденная операторами* $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, *и оператором I. Пусть* $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = L$ — *ряд Жордана–Гёльдера для гомоморфизма* $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in L$. *Множество N таких элементов $x \in L$, что* $(\operatorname{ad} x)V_k \subset V_{k-1}$ *для всех* $k = 1, \ldots, n$, *является наибольшим нильпотентным идеалом алгебры Ли L.*

Доказательство. Так как $(\operatorname{ad} y)V_k \subset V_k$ для всех $y \in L$ и $(\operatorname{ad} x)V_k \subset V_{k-1}$ для всех $x \in N$, то $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)V_k \subset V_{k-1}$ и $(\operatorname{ad} y \operatorname{ad} x)V_k \subset V_{k-1}$, поэтому $\operatorname{ad}([x, y])V_k \subset V_{k-1}$ для всех $k = 1, \ldots, n$, т. е. $[x, y] \in N$ для всех $x \in N$, $y \in L$. Следовательно, N — идеал в алгебре Ли L. Кроме того, очевидно, что $\operatorname{ad} x$ нильпотентен для всех $x \in N$. Согласно теореме 1 п. 2.1, отсюда следует, что N — нильпотентная алгебра Ли. Если N' — какой-нибудь нильпотентный идеал алгебры Ли L, то для всякого $n \in N'$ существует такое k, что $(\operatorname{ad} n)^k(N') = 0$; с другой стороны, $(\operatorname{ad} n)(L) \subset N'$, так как N' — идеал в L. Отсюда следует, что оператор $\operatorname{ad} n$ в пространстве L является нильпотентным. Согласно предложению II $(\operatorname{ad} n)V_k \subset V_{k-1}$ для всех $k = 1, \ldots, n$, т. е. $N' \subset N$.

Наибольший разрешимый идеал алгебры Ли L называется ее *радикалом*. Наибольший нильпотентный идеал называется *нильрадикалом*. Пересечение ядер неприводимых представлений алгебры Ли L называется ее *нильпотентным радикалом*.

Обозначим эти три радикала соответственно через R, N, S. Отметим, что существование R и N доказано в предложениях I и III.

Алгебра Ли называется *полупростой*, если она не содержит ненулевых разрешимых идеалов. Алгебра Ли называется *простой*, если она не одномерна и она не содержит нетривиальных идеалов.

IV. *Всякая простая алгебра Ли полупроста.*

Доказательство. Если простая алгебра Ли L не полупроста, то она содержит ненулевой разрешимый идеал, совпадающий с L, ибо L проста. Следовательно, L разрешима. Но, согласно доказательству теоремы Ли в п. 2.3, любая разрешимая алгебра содержит идеал коразмерности 1; это противоречит простоте алгебры Ли L, так как $\dim L > 1$.

V. *Радикал R алгебры Ли L есть наименьший из тех идеалов A, для которых фактор-алгебра L/A полупроста.*

Доказательство. Пусть A — идеал в L и пусть L/A полупроста. Тогда образ R при каноническом гомоморфизме L на L/A есть разрешимый идеал в L/A; этот идеал должен быть равен нулю, так как L/A полупроста. Следовательно, $R \subset A$. Далее, алгебра Ли L/R не содержит ненулевых разрешимых идеалов. Действительно, если R'/R — ненулевой разрешимый идеал в L/R, то идеал R' в алгебре Ли R является разрешимой алгеброй (так как R и R'/R разрешимы); следовательно, $R' \subset R$, т. е. $R' = R$. Следовательно, L/R — полупростая алгебра Ли.

Отметим важное для дальнейшего свойство дифференцирований алгебры Ли.

VI. *Всякое дифференцирование алгебры Ли L отображает R в N.*

Доказательство. Заметим сначала, что любое дифференцирование d алгебры Ли L отображает R в R. Действительно, d есть линейное преобразование пространства L; рассмотрим линейное преобразование $A_t = e^{td} = 1 + td + \frac{t^2}{2!}d^2 + \ldots$, $t \in \mathbf{R}$. Так как любое линейное преобразование в конечномерном пространстве непрерывно, то функция $\varphi(t) = [A_t x, A_t y] - A_t[x, y]$ аналитична по t, $t \in \mathbf{R}$. Но $(d/dt)A_t = dA_t$; отсюда

$$\varphi'(t) = [dA_t x, A_t y] + [A_t x, dA_t y] - dA_t[x, y] = d\varphi(t),$$

поэтому $\varphi^{(n)}(t) = d^n\varphi(t)$. Но $\varphi(0) = 0$, поэтому $\varphi^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \geqslant 1$, т. е. $\varphi(t) \equiv 0$. Итак, $[A_t x, A_t y] = A_t[x, y]$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Так как $e^{td}e^{-td} = 1_L$, то преобразование A взаимно однозначно. Следовательно, A_t — изоморфизм алгебры Ли L на себя; поэтому A_t переводит идеал в идеал и разрешимый идеал в разрешимый идеал. Но R — наименьший разрешимый идеал, поэтому $A_t R \subset R$, т. е. $A_t x \in R$ при $x \in R$. Тогда $dx = (d/dt)(A_t x)_{t=0} \in R$ при $x \in R$, т. е. $dT \subset R$.

Пусть теперь D — алгебра Ли дифференцирований алгебры Ли L. Пусть Q — прямое произведение векторных пространств D и L. Определим в Q операцию $[(d, x), (d', x')] = ([d, d'], dx' - d'x + [x, x'])$ для $d, d' \in D$, $x, x' \in L$. Тогда Q — алгебра Ли, L изоморфна идеалу $\widetilde{L} = \{(0, x), x \in L\}$ в алгебре Ли Q, D изоморфна подалгебре Ли $\widetilde{D} = \{(d, 0), d \in D\}$ в Q. Если $d \in D$, $x \in L$, то $[(d, 0), (0, x)] = [0, dx]$ в Q. Так как $dx \in R$ для всех $x \in R$, то $\widetilde{R} = \{(0, x), x \in R\}$ есть идеал в алгебре Ли Q, причем $\widetilde{R}$ разрешим. Рассмотрим идеал $I = [Q, \widetilde{R}]$ в алгебре Ли Q. Покажем, что идеал I нильпотентен.

Переходя при необходимости к комплексификациям рассматриваемых алгебр Ли L, R, N, D, Q, мы можем считать эти алгебры Ли комплексными. Пусть $\widetilde{R}_1$ — разрешимая подалгебра Ли в Q. Пусть π — ограничение на $\widetilde{R}_1$ гомоморфизма $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in Q$, и пусть $(0) = V_0 \subset \ldots \subset V_n = Q$ — ряд Жордана–Гёльдера для гомоморфизма π подалгебры Ли $\widetilde{R}_1$ в алгебру Ли $gl(Q)$. Согласно теореме Ли (см. п. 2.3) каждое из пространств V_k/V_{k-1}, $k = 1, \ldots, n$, одномерно. Пусть $h_k(x)$ — линейный функционал на $\widetilde{R}_1$, определяемый гомоморфизмом π в фактор-пространстве V_k/V_{k-1}. Множество $M = \{x \in \widetilde{R}_1, h_k(x) = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n\}$ есть идеал в $\widetilde{R}_1$, так как линейное подпространство $M \subset \widetilde{R}_1$ очевидным образом содержит $[\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_1]$. Из определения идеала M непосредственно следует, что оператор $\pi(x)$ нильпотентен для любого $x \in M$.

Выберем разрешимую подалгебру Ли $\widetilde{R}_1$ специальным образом. А именно, пусть y — некоторый элемент алгебры Ли Q, и пусть $\widetilde{R}_1$ — подалгебра Ли в Q, порожденная $\widetilde{R}$ и элементом y. Так как $\widetilde{R}$ — идеал в Q, то $\widetilde{R}$ — идеал в $\widetilde{R}_1$. Так как $\widetilde{R}$ — разрешимый идеал и фактор-алгебра $\widetilde{R}_1/\widetilde{R}$ коммутативна, то $\widetilde{R}_1$ — разрешимая алгебра Ли согласно II п. 2.2. Применим к $\widetilde{R}_1$ предыдущее построение; пусть M — соответствующий идеал в алгебре Ли $\widetilde{R}_1$. Очевидно, что $[y, \widetilde{R}] \subset [\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_1] \subset M$; таким образом, множество $[y, \widetilde{R}]$ содержится в множестве таких элементов $z \in Q$, что оператор $\pi(z)$ нильпотентен. Из предложения II следует тогда, что идеал $I = [Q, \widetilde{R}]$ есть нильпотентный идеал в алгебре Ли Q.

Пусть $\widetilde{N} = \{(0, n), n \in N\}$. Так как $[Q, \widetilde{R}] \subset [Q, \widetilde{L}] \subset \widetilde{L}$, то идеал $I = [Q, \widetilde{R}]$ есть нильпотентный идеал в $\widetilde{L}$. Следовательно, $[Q, \widetilde{R}] \subset \widetilde{N}$. В частности, любое дифференцирование d алгебры Ли L отображает R в N.

§ 4. Теория реплик

Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство, V^* — пространство, сопряженное к V. Обозначим через $V_{r,s}$ тензорное произведение r экземпляров пространства V и s экземпляров пространства V^*. Линейное представление $x \to x$ алгебры Ли $gl(V)$ в пространстве V определяет представление алгебры Ли $gl(V)$ в пространстве $V_{r,s}$, а именно — тензорное произведение r экземпляров представления $x \to x$ в пространстве V и s экземпляров представления $x \to -x^*$ в пространстве V^*. Образ оператора $x \in gl(V)$ в этом представлении обозначим через $x_{r,s}$. Кроме того, положим $V_{0,0} = \mathbf{C}$ и $x_{0,0} = 0$. Как мы видели в п. 1.3 (см. (1.3.6)), присоединенное представление алгебры Ли $gl(V)$ эквивалентно представлению $x \to x_{1,1}$ при каноническом отображении τ пространства $V \otimes V^*$ на $L(V)$.

Элемент $x' \in gl(V)$ называется *репликой* оператора $x \in gl(V)$, если ядро оператора $x_{r,s}$ содержится в ядре оператора $x'_{r,s}$ для всех неотрицательных целых r, s.

I. *Если x' — реплика x, а x'' — реплика x', то x'' — реплика x.*

Доказательство этого утверждения очевидно.

II. *Если x' — реплика x, то $x'_{r,s}$ — реплика $x_{r,s}$.*

Доказательство. Легко видеть, что пространство $(V_{r,s})_{r',s'}$ канонически изоморфно пространству $V_{rr'+ss',rs'+sr'}$. Кроме того, этот канонический изоморфизм — обозначим его ζ — обладает тем свойством, что для любого линейного оператора x в V имеет место равенство

$$\zeta \circ (x_{r,s})_{r',s'} \circ \zeta^{-1} = x_{rr'+ss',rs'+r's}.$$

Отсюда следует утверждение II.

Напомним теперь одно утверждение из теории матриц.

III. *Пусть x — линейное преобразование пространства V. Любое линейное преобразование y, перестановочное со всеми преобразованиями, перестановочными с x, представимо в виде $y = p(x)$, где p — некоторый многочлен с комплексными коэффициентами.*

Доказательство этого утверждения нетрудно получить, приведя преобразование x к жордановой нормальной форме. Подробное доказательство изложено в книге Ф. Р. Гантмахера [1].

IV. *Оператор x' тогда и только тогда является репликой оператора x, когда для любой пары (r, s) оператор $x'_{r,s}$ представи́м в виде многочлена от $x_{r,s}$ без свободного члена.*

Доказательство. Если $x'_{r,s}$ есть многочлен от $x_{r,s}$ без свободного члена, то ядро $x_{r,s}$ содержится в ядре $x'_{r,s}$ для всех (r, s), т. е. x' — реплика x. Обратно, пусть x' — реплика x. Пусть y коммутирует с x, т. е. $(\mathrm{ad}\, x)\, y = [x, y] = 0$. Используя отмеченный ранее изоморфизм между присоединенным представлением и представлением $x \to x_{1,1}$, видим, что $x_{1,1}(y) = 0$. Так как x' — реплика x, то $x'_{1,1}(y) = 0$, т. е. $(\mathrm{ad}\, x')\, y = 0$ и x' коммутирует с y. Согласно предложению III, имеем $x' = p(x)$, где p — некоторый многочлен. Покажем, что можно выбрать многочлен p так, что $p(0) = 0$. Это очевидно, если оператор x обратим. Действительно, если x обратим, то $\det x \neq 0$ и свободный член $q(0)$ характеристического многочлена q отличен от нуля. По теореме Гамильтона–Кэли $q(x) = 0$, т. е. $q(0)\, 1_V = -q(x) + q(0)\, 1_V = q_1(x)$, где $q(0) \neq 0$ и свободный член многочлена $p(x)$ равен нулю. Тогда свободный член многочлена $p(x)$ можно заменить многочленом, кратным q_1. Пусть теперь x необратим. Тогда $xv = 0$ для некоторого ненулевого вектора $v \in V$. Так как $x'v = p(x)\, v = 0$ и $p(x)\, v = p(0)\, v$, то $p(0)v = 0$, следовательно, $p(0) = 0$. Итак, если x' — реплика x, то $x' = p(x)$, где p — без свободного члена. Но $x'_{r,s}$ есть реплика $x_{r,s}$ по предложению II, поэтому $x'_{r,s} = p_{r,s}(x_{r,s})$, где $p_{r,s}(0) = 0$. Предложение IV доказано.

Отметим еще одно утверждение из теории матриц.

V. *Всякий линейный оператор x в пространстве V можно представить единственным образом в виде $x = y + z$, где y и z коммутируют, z нильпотентен, а y в некотором базисе приводится* *к диагональному виду. Операторы y и z являются многочленами от x, и ядра операторов y и z содержат ядро оператора x.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве V такой, что матрица (a_{ij}) преобразования x в этом базисе имеет жорданову нормальную форму. Пусть y — оператор в V, заданный в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрицей (b_{ij}) такой, что $a_{ii} = b_{ii}$ для всех $i = 1, \ldots, n$; $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Пусть $z = x - y$. Очевидно, что z нильпотентен, причем y и z коммутируют. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — полный набор попарно различных собственных значений преобразования x. Пусть V_i $(i = 1, \ldots, k)$ — корневое подпространство преобразования x, отвечающее собственному значению λ_i, т. е. подпространство, порожденное собственными и присоединенными векторами преобразования x, отвечающими собственному значению λ_i. Тогда V_i есть ядро оператора $(x - \lambda_i 1)^n$. Пусть $x_1 = (x - \lambda_2 1)^n \ldots (x - \lambda_k 1)^n$. Подпространство $V_2 \dotplus \ldots \dotplus V_k$ есть ядро оператора x_1, а подпространство V_1 инвариантно относительно x_1, причем ограничение преобразования x_1 на V_1 невырождено. Применяя к этому ограничению теорему Гамильтона–Кэли, видим, что оператор E_1, проектирующий V на V_1 параллельно $V_2 \dotplus \ldots \dotplus V_k$, является многочленом от x_1, т. е. многочленом от x. Определяя аналогично $E_2, \ldots, E_k$ и замечая, что

$$y = \lambda_1 E_1 + \ldots + \lambda_k E_k,$$

видим, что y есть многочлен от x, поэтому и z есть многочлен от x. Утверждение о ядрах x, y и z непосредственно следует из определения y и z. Докажем единственность разложения $x = y + z$ с указанными свойствами. Действительно, пусть $x = y_1 + z_1$, где y_1 и z_1 коммутируют, z_1 нильпотентен, а y_1 приводится к диагональному виду. Тогда y_1 и z_1 коммутируют с x, поэтому y_1 и z_1 коммутируют с многочленами от x. В частности, y коммутирует с y_1, z коммутирует с z_1. С другой стороны, из соотношения $y + z = y_1 + z_1$ следует, что $y - y_1 = z_1 - z$. Так как y и y_1 диагонализуемы и перестановочны, то $y - y_1$ диагонализуем. Так как z_1 и z нильпотентны и перестановочны, то $z_1 - z$ нильпотентен. Но нильпотентная диагональная матрица равна нулю, поэтому $y - y_1 = z_1 - z = 0$.

Пусть $x = y + z$ — разложение линейного оператора x, определяемое в предложении V. Операторы y и z называются соответственно *полупростой* и *нильпотентной* частью оператора x.

VI. *Пусть x — оператор в V, и пусть y и z — соответственно полупростая и нильпотентная части оператора x. Тогда $y_{r,s}$ и $z_{r,s}$ являются соответственно полупростой и нильпотентной частью оператора $x_{r,s}$.*

Доказательство. Так как y диагонализуем, то $y_{r,s}$ диагонализуем. Кроме того, очевидно, что $z_{r,s}$ нильпотентен. Так как $x \to x_{r,s}$ есть представление алгебры Ли $gl(V)$, то $[y_{r,s}, z_{r,s}] = [y, z]_{r,s} = 0$. Наконец, $x_{r,s} = y_{r,s} + z_{r,s}$, поэтому утверждение предложения VI следует из единственности разложения на полупростую и нильпотентную компоненты.

VII. *Полупростая и нильпотентная компоненты оператора являются его репликами.*

Доказательство. Пусть $x = y + z$ — разложение x на полупростую и нильпотентную части. Согласно предложению VI соотношение $x_{r,s} = y_{r,s} + z_{r,s}$ есть разложение $x_{r,s}$ на полупростую и нильпотентную части, а согласно последнему утверждению предложения V ядра компонент $y_{r,s}$ и $z_{r,s}$ содержат ядро $x_{r,s}$, т. е. y и z суть реплики x.

Теорема. *Оператор x в V нильпотентен тогда и только тогда, когда* $\mathrm{tr}(xx') = 0$ *для всякой его реплики* x'.

Доказательство. Если оператор x нильпотентен и x' — реплика оператора x, то x' коммутирует с x (см. предложение IV). Следовательно, оператор xx' также нильпотентен, поэтому xx' имеет нулевой след.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы, и пусть $x = y + z$ — разложение оператора x на полупростую и нильпотентную части. Мы должны доказать, что $y = 0$. Согласно предложению VII оператор y является репликой оператора x. Следовательно (см. I), любая реплика y' оператора y также является репликой оператора x. Отсюда следует, что y' коммутирует с z, так что оператор $y'z$ нильпотентен, и поэтому $\mathrm{tr}(y'z) = 0$. С другой стороны, по условию теоремы, $\mathrm{tr}(y'x) = 0$, так что $\mathrm{tr}(y'y) = 0$. Таким образом, осталось доказать следующее утверждение: если y — диагонализуемый оператор и $\mathrm{tr}(y'y) = 0$ для любой его реплики y', то $y = 0$. Предположим, что это утверждение неверно. Пусть y — ненулевой диагонализуемый оператор и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V такой, что $ye_i = \lambda_i e_i$. Если y' — реплика y, то y' также диагонален в базисе $e_1, \ldots, e_n$ (это следует, например, из предложения IV). Оператор $y_{r,s}$ диагоналей в базисе пространства $V_{r,s}$, образованном векторами вида $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_s}$, где $\{e^*_j\}$ — базис пространства V^*, биортогональный базису $\{e_i\}$ пространства V. Собственное значение оператора $y_{r,s}$, соответствующее вектору $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_s}$, очевидно, равно $\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_r} - \lambda_{j_1} - \ldots - \lambda_{j_s}$. Ядро оператора $y_{r,s}$ есть подпространство, порождаемое такими базисными векторами, для которых

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} - \sum_{j=1}^{s} \lambda_{j_s} = 0. \tag{4.1.1}$$

Если $y'e_i = \mu_i e_i$ и любое соотношение вида (4.1.1) влечет соответствующее соотношение для чисел $\mu_1, \ldots, \mu_n$, то ядро $y'_{r,s}$ содержит ядро $y_{r,s}$, т. е. y' — реплика оператора y.

Пусть $\mathrm{tr}(yy') = 0$ и $y \neq 0$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ порождают тогда ненулевое подпространство $P \subset \mathbf{C}$ над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. Пусть h — ненулевое $\mathbf{Q}$-линейное отображение линейного пространства P над полем $\mathbf{Q}$ в поле $\mathbf{Q}$. Пусть $\mu_i = h(\lambda_i)$. Тогда всякое целочисленное линейное соотношение между числами λ_i, в частности, соотношение вида (4.1.1), влечет соответствующее соотношение между числами μ_i, поэтому оператор y' такой, что $y'e_i = h(\lambda_i)\,e_i$, является репликой оператора y. Следовательно, $0 = \mathrm{tr}(yy') = \sum \lambda_i h(\lambda_i)$. Так как отображение h является $\mathbf{Q}$-линейным и $h(\lambda_i) \in \mathbf{Q}$, то $\sum h(\lambda_i h(\lambda_i)) = \sum h(\lambda_i)^2 = 0$, т. е. $h(\lambda_i) = 0$, что противоречит предположению, что h — ненулевое отображение. Полученное противоречие доказывает теорему.

VIII. *Пусть A — конечномерная (вообще говоря, не ассоциативная) алгебра. Если D — дифференцирование алгебры A и D' — реплика оператора D, то D' — дифференцирование алгебры A.*

Доказательство. Операция умножения в алгебре A определяет билинейное отображение пространства $A \times A$ в A. Но пространство билинейных отображений $A \times A$ в A канонически отождествляется с пространством $A_{1,2}$. Пусть μ — элемент пространства $A_{1,2}$, определяемый операцией умножения в A при этом каноническом изоморфизме. Пусть x — линейный оператор в A. Тогда

$$x_{1,2}\,\mu = x\mu - \mu(1 \otimes x + x \otimes 1),$$

т. е.

$$x_{1,2}\,\mu(a \otimes b) = x\mu(a \otimes b) - \mu(a \otimes xb + xa \otimes b) = x(ab) - a(xb) - (xa)\,b$$

для всех $a, b \in A$. Следовательно, оператор x тогда и только тогда является дифференцированием A, когда $x_{1,2}\mu = 0$, т. е. μ лежит в ядре оператора $x_{1,2}$. Если x' — реплика оператора x, то из равенства $x_{1,2}\,\mu = 0$ следует, что $x'_{1,2}\,\mu = 0$, поэтому x' — также дифференцирование A.

§ 5. Форма Киллинга. Критерии разрешимости и полупростоты алгебры Ли

5.1. Определение формы Киллинга. Пусть L — алгебра Ли, π_1 и π_2 — гомоморфизмы алгебры Ли L в алгебры Ли $gl(V_1)$ и $gl(V_2)$ соответственно. Билинейная форма B на $V_1 \times V_2$ называется *инвариантной* (относительно π_1 и π_2), если

$$B(\pi_1(x)\,v_1, v_2) + B(v_1, \pi_2(x)\,v_2) = 0 \tag{5.1.1}$$

для всех $x \in L$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

I. *Пусть π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$. Положим $B_\pi(x, y) = \mathrm{tr}(\pi(x)\,\pi(y))$ для всех $x, y \in L$. Билинейная форма B_π на $L \times L$ симметрична и инвариантна относительно присоединенного гомоморфизма $x \to \mathrm{ad}\,x$.*

Доказательство. Симметричность формы B_π следует из соотношения $\mathrm{tr}(\alpha\beta) = \mathrm{tr}(\beta\alpha)$. Докажем инвариантность формы B_π, т. е. покажем, что выражение

$$\mathrm{tr}(\pi([x_1, x_2])\,\pi(x_3)) + \mathrm{tr}(\pi(x_2)\,\pi([x_1, x_3])) = \\ = \mathrm{tr}(\pi(x_1)\,\pi(x_2)\,\pi(x_3) - \pi(x_2)\,\pi(x_3)\,\pi(x_1))$$

равно нулю. Но это сразу следует из соотношения $\mathrm{tr}(\alpha\beta) = \mathrm{tr}(\beta\alpha)$, примененного к $\alpha = \pi(x_1)$ и $\beta = \pi(x_2)\,\pi(x_3)$.

Инвариантная симметрическая билинейная форма $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)$ на алгебре Ли L, соответствующая присоединенному гомоморфизму L в $gl(L)$, называется *формой Киллинга* на L. Обозначим $B(x, y) = (x, y)$.

5.2. Критерий Картана разрешимости алгебры Ли.

Теорема 1 (критерий Картана). *Пусть L — алгебра Ли; L разрешима тогда и только тогда, когда*

$$(x, [y, z]) = 0 \quad \text{для всех} \quad x, y, z \in L. \tag{5.2.1}$$

В частности, если $(x, y) = 0$ для всех $x, y \in L$, то алгебра Ли L разрешима.

Доказательство. а). Пусть L разрешима. Пусть $(0) = V_0 \subset \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = L$ — ряд Жордана–Гёльдера для гомоморфизма $x \to \mathrm{ad}\,x$. Согласно следствию 1 п. 2.3 производная алгебра $L^{(1)}$ алгебры Ли L нильпотентна; следовательно, $L^{(1)}$ — нильпотентный идеал в L. Согласно III § 3, $L^{(1)}$ содержится в нильпотентном идеале N, образованном такими $x \in L$, что $(\mathrm{ad}\,x)V_k \subset V_{k-1}$ для всех $k = 1, \ldots, n$. В частности $\mathrm{ad}([y, z])V_k \subset V_{k-1}$, следовательно,

$$\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}([y, z])V_k \subset V_{k-1} \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}([y, z])) = 0$ для всех $x, y, z \in L$, что равносильно соотношению (5.2.1).

б). Пусть соотношение (5.2.1) выполняется для всех $x, y, z \in L$. Для доказательства разрешимости L достаточно доказать, что алгебра Ли $L^{(1)}$ разрешима. С другой стороны, из соотношения (5.2.1) следует, что $(x, y) = 0$ при $x, y \in L^{(1)}$, так как $y \in L^{(1)}$ является линейной комбинацией элементов вида $[u, v]$. Таким образом, мы можем в дальнейшем предполагать, что форма (x, y) тождественно равна нулю на данной алгебре Ли L. *Покажем, что в этом предположении алгебра Ли $L^{(1)}$ нильпотентна*, т. е. (см. теорему 1 п. 2.1) образ присоединенного гомоморфизма алгебры Ли $L^{(1)}$ в алгебру Ли $gl(L^{(1)})$ состоит из нильпотентных операторов. Очевидно, достаточно показать, что ограничение присоединенного гомоморфизма $x \to \mathrm{ad}\,x$ алгебры Ли L на идеал $L^{(1)}$ отображает элементы алгебры Ли $L^{(1)}$ в нильпотентные операторы (ср. II § 3). Пусть $x \in L^{(1)}$. Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{r} [y_i, z_i]$ для некоторых $y_i, z_i \in L$. Мы должны показать, что оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Согласно теореме § 4 достаточно показать, что $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} xZ) = 0$ для всякой реплики Z оператора $\operatorname{ad} x$. Но согласно 1 п. 1.1 оператор $\operatorname{ad} x$ есть дифференцирование алгебры Ли L, а согласно VIII § 4 любая реплика оператора дифференцирования сама является дифференцированием алгебры Ли L. Поэтому достаточно показать, что $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \cdot d) = 0$ для любого дифференцирования d алгебры Ли L.

Но

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \cdot d) &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}([\operatorname{ad} y_i,\ \operatorname{ad} z_i]\, d) = \\ &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y_i \operatorname{ad} z_i d - \operatorname{ad} z_i \operatorname{ad} y_i d) = \\ &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_i d \operatorname{ad} y_i - \operatorname{ad} z_i \operatorname{ad} y_i d), \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

ибо $\operatorname{tr}(\alpha\beta) = \operatorname{tr}(\beta\alpha)$ для любых линейных операторов α, β в L. Правую часть формулы (5.2.2) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_i [d,\ \operatorname{ad} y_i]). \tag{5.2.3}$$

Так как d —дифференцирование алгебры Ли L, то имеет место равенство (1.1.5), поэтому из (5.2.2) и (5.2.3) получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \cdot d) &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_i [d,\ \operatorname{ad} y_i]) = \\ &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} z_i \operatorname{ad}(dy_i)) = \sum_{i=1}^{r} (z_i, dy_i). \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

По предположению, форма Киллинга тождественно равна нулю на алгебре Ли L. Следовательно, правая часть формулы (5.2.4) равна нулю, т. е. $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \cdot d) = 0$ для всех $d \in \operatorname{Der}(L)$, и $\operatorname{ad} x$ нильпотентен в L для всех $x \in L^{(1)}$.

Рассуждение, примененное в доказательстве теоремы 1, может быть применено в следующей более общей ситуации:

I. *Пусть L — алгебра Ли над полем K, π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$. Пусть P — множество $x \in L$ таких, что $B_\pi(x, y) = 0$ для всех $y \in L$. Тогда P — идеал в L и оператор $\pi(x)$ нильпотентен для всех $x \in [P, L]$.*

Доказательство. Инвариантность формы B_π означает, что

$$B_\pi([x, y], z) + B_\pi(y, [x, z]) = 0 \tag{5.2.5}$$

для всех $x, y, z \in L$. В частности, если $y \in P$, то $B_\pi(y, [x, z]) = 0$ для всех $x, z \in L$; отсюда и из (5.2.5) следует, что $[x, y] \in P$ для всех $x \in L$, т. е. P — идеал. Пусть $x \in [P, L]$; тогда $x = \sum_{i=1}^{r} [y_i, z_i]$, где $y_i \in P$, $z_i \in L$. Для доказательства нильпотентности оператора $\pi(x)$ достаточно показать, что $\operatorname{tr}(\pi(x)R) = 0$ для любой реплики R оператора $\pi(x)$. Если R — реплика оператора $\pi(x)$, то $\operatorname{ad} R$ есть реплика оператора $\operatorname{ad}\pi(x)$ (см. II § 4). Следовательно (см. IV § 4), оператор $\operatorname{ad} R$ есть многочлен от $\operatorname{ad}\pi(x)$, поэтому $\pi(L)$ инвариантно относительно $\operatorname{ad} R$. Таким образом, существуют $u_i \in L$ такие, что $[\pi(z_i), R] = \pi(u_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\pi(x)R) &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}([\pi(y_i), \pi(z_i)]R) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\pi(y_i)\,\pi(z_i)R - \pi(z_i)\,\pi(y_i)R) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\pi(y_i)\,\pi(z_i)R - \pi(y_i)R\pi(z_i)) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\pi(y_i)\,[\pi(z_i), R]) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{tr}(\pi(y_i)\,\pi(u_i)) = \sum_{i=1}^{r} B_\pi(y_i, u_i) = 0,
\end{aligned}$$

так как $y_i \in P$. Следовательно, $\pi(x)$ нильпотентен.

II. *Пусть выполнены условия предложения* I. *Если* π *— точный гомоморфизм* (*т. е.* $x = 0$ *при* $\pi(x) = 0$), *то* $[P, L]$ *— нильпотентный идеал в* L.

Доказательство. Согласно I, оператор $\pi(x)$ нильпотентеи для всех $x \in [P, L]$, причем $[P, L]$ — идеал в L. Так как π изоморфно отображает алгебру Ли L на $\pi(L)$, то $\pi([P, L]) = [\pi(P), \pi(L)]$ — идеал в $\pi(L)$, все элементы которого являются нильпотентными операторами. Тогда из II § 3 легко следует, что $\pi([P, L])$ — нильпотентный идеал в $\pi(L)$, поэтому $[P, L]$ — нильпотентный идеал в L.

III. *Пусть выполнены условия предложения* II. *Тогда* P *— разрешимый идеал в* L.

Доказательство. Алгебра Ли $[P, L]$ нильпотентна согласно II. Следовательно, алгебра Ли $[P, P] \subset [P, L]$ нильпотентна, так что остается применить следствие 1 п. 2.3.

5.3. Критерий полупростоты.

Теорема 2. *Пусть L — алгебра Ли; L полупроста тогда и только тогда, когда форма Киллинга на L невырождена.*

Доказательство. а). Пусть форма Киллинга на L невырождена. Пусть R — радикал алгебры Ли L. Предположим, что $R \neq (0)$; пусть h — высота R как разрешимой алгебры. Тогда $A = R^{(n-1)}$ — ненулевой коммутативный идеал в L. Если $x, y \in L$, $a \in A$, то $[a, y] \in A$, $[x, [a, y]] \in A$, $[a, [x, [a, y]]] = 0$, т. е. $\mathrm{ad}\, a\, \mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, a = 0$. Тогда и подавно $(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, a)^2 = 0$, откуда $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, a) = 0$, т. е. $(x, a) = 0$ для всех $x \in L$, $a \in A$. Так как $A \neq (0)$, то мы получили противоречие с предположением невырожденности формы Киллинга. Итак, если форма Киллинга на L невырождена, то L полупроста.

б). Пусть L — полупростая алгебра Ли. Элементы $n \in L$ такие, что $(x, n) = 0$ для всех $x \in L$, образуют линейное подпростр.анство $N \subset L$. Так как форма Киллинга инвариантна относительно присоединенного гомоморфизма, то

$$(x, [y, n]) = (x,\ \mathrm{ad}\, y(n)) = -(\mathrm{ad}\, y(x), n) = 0$$

для всех $x, y \in L$, $n \in N$. Следовательно, $[y, n] \in N$. Поэтому N — идеал в алгебре Ли L. По определению N, при $n, n_1 \in N$ $(n, n_1) = 0$. Отсюда, согласно теореме 1, идеал N разрешим. Так как алгебра Ли L полупроста, то $N = (0)$, т. е. форма (x, y) невырождена.

§ 6. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли

6.1. Тензорная алгебра. Пусть V — векторное пространство над полем K. Положим $J_0 = K$, $J_r = V \otimes \ldots \otimes V$ (тензорное произведение r экземпляров пространства V). Элементы пространства J_r называются (однородными) *тензорами* порядка r. Пусть J — прямая сумма всех J_r $(r \geqslant 0)$. Определим билинейное отображение $\{u, v\} \to u \otimes v$ прямого произведения $J \times J$ в J, полагая

$$c \otimes v = cv = v \otimes c \quad \text{для} \quad c \in K = J_0, \quad v \in J; \tag{6.1.1а}$$

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_s) = \\ = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_s \tag{6.1.1б}$$

для любых натуральных r, s и любых $x_1, \ldots, x_r$ и $y_1, \ldots, y_s$, принадлежащих V, и распространяя это отображение линейно на всевозможные суммы выражений в левых частях равенств (6.1.1а), (6.1.1б). Тогда линейное пространство J становится ассоциативной алгеброй над K относительно умножения $\otimes$; единицей этой алгебры является единица поля $K = J_0$. Алгебра J называется *тензорной алгеброй* над V. Пространство V можно отождествить с подпространством $J_1 \subset J$.

I. *Алгебра J порождена (как алгебра) подпространством V. Если A — ассоциативная алгебра и f — линейное отображение пространства V в A, то существует единственный гомоморфизм алгебры J в A, продолжающий f.*

Оба утверждения предложения I очевидны.

6.2. Определение и построение универсальной обертывающей алгебры данной алгебры Ли. Пусть L — алгебра Ли над полем K вещественных или комплексных чисел, J — тензорная алгебра над L. Пусть $x, y \in L$. Обозначим через $u_{x,y}$ элемент $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in J$, и через M — подпространство пространства J, порожденное всевозможными элементами вида $t \otimes u_{x,y} \otimes t'$ $(t, t' \in J;\ x, y \in L)$, т. е.

$$M = \sum_{x, y \in L} J \otimes u_{x,y} \otimes J. \tag{6.2.1}$$

Так как $u_{x,y} \in J_1 + J_2$ для всех $x, y \in L$, то ясно, что $M \subset \sum\limits_{m \geqslant 1} J_m$. Следовательно, M — собственное подпространство в J. Из формулы (6.2.1) очевидно, что M — двусторонний идеал в J. Обозначим через U фактор-алгебру J/M и через γ — канонический гомоморфизм J на U. Так как L и 1 порождают J (см. I п. 6.1), то $\gamma(L)$ и $\gamma(1)$ порождают U. Обозначим единичный элемент ассоциативной алгебры U через 1, произведение элементов $a, b \in U$ через ab и через α — ограничение отображения γ на подпространство $L = J_1$.

Пусть L — алгебра Ли над K, J_1 — ассоциативная алгебра с единицей 1 над K, ρ — линейное отображение L в A. Алгебра A, снабженная отображением ρ, называется *универсальной обертывающей алгеброй* алгебры Ли L, если выполнены следующие условия:

1) алгебра A порождена 1 и $\rho(L)$;
2) $\rho([x, y]) = \rho(x)\,\rho(y) - \rho(y)\,\rho(x)$ для всех $x, y \in L$;
3) для любой ассоциативной алгебры с единицей B и линейного отображения ξ алгебры Ли L в B такого, что $\xi([x, y]) = \xi(x)\,\xi(y) - \xi(y)\,\xi(x)$ для всех $x, y \in L$, существует такой гомоморфизм ξ' ассоциативной алгебры A в B, что $\xi'(1) = 1_B$ и $\xi(x) = \xi'(\rho(x))$ для всех $x \in L$.

I. *Пусть L — алгебра Ли над K. Ассоциативная алгебра U, снабженная отображением α: $L \to U$, есть универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли L. Если (U', α') — другая универсальная обертывающая алгебра для L, то существует единственный изоморфизм ξ алгебры U на U', такой, что $\xi(1) = 1$ и $\xi(\alpha(x)) = \alpha'(x)$ для всех $x \in L$.*

Доказательство. Нам уже известно, что $\alpha(L) = \gamma(L)$ и 1 порождает U. Так как $\gamma(u_{x,y}) = 0$, то

$$\gamma([x, y]) = \gamma(x)\,\gamma(y) - \gamma(y)\,\gamma(x)$$

для всех $x, y \in L$, т. е.

$$\alpha([x, y]) = \alpha(x)\,\alpha(y) - \alpha(y)\,\alpha(x)$$

для всех $x, y \in L$. Пусть A — ассоциативная алгебра и ξ — линейное отображение L в A такое, что $\xi([x, y] = \xi(x)\,\xi(y) - \xi(y)\,\xi(x)$ для всех $x, y \in L$. Пусть η — гомоморфизм алгебры J в A такой, что $\eta(x) = \xi(x)$ для всех $x \in L$ (см. I п. 6.1). Так как $\eta(u_{x,y}) = 0$ для всех $x, y \in L$, то $\eta = 0$ на M. Переходя к фактор-алгебре U, мы получаем гомоморфизм ξ ассоциативной алгебры U в A такой, что $\eta = \zeta \circ \gamma$. Таким образом, (U, α) есть универсальная обертывающая алгебра для L.

Пусть (U', α') — другая универсальная обертывающая алгебра для L. Так как (U, α) — также универсальная обертывающая алгебра для L, то существуют гомоморфизмы $\zeta\colon U \to U'$ и $\zeta'\colon U' \to U$ такие, что $\zeta(\alpha(x)) = \alpha'(x)$ и $\zeta'(\alpha'(x)) = \alpha(x)$ для всех $x \in L$. Следовательно, отображения $\zeta \circ \zeta'$ и $\zeta' \circ \zeta$ тождественны на $\alpha'(L)$ и $\alpha(L)$ соответственно, причем $\zeta(1) = 1$, $\zeta'(1) = 1$. Так как U и U' порождены единичными элементами и $\alpha(L)$, $\alpha'(L)$ соответственно, то $\zeta \circ \zeta'$ и $\zeta' \circ \zeta$ — тождественные отображения. Следовательно, ζ — изоморфизм U на U'.

6.3. Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

Теорема (Пуанкаре–Биркгофа–Витта). *Пусть L — алгебра Ли над K, $x_1, \ldots, x_n$ — базис в L, (U, α) — универсальная обертывающая алгебра для L. Тогда элементы 1 и $\alpha(x_{i_1}) \ldots \alpha(x_{i_s})$ $(s \geqslant 1$, $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_s)$ образуют базис в линейном пространстве U. В частности, отображение α является вложением L в U, т. е. ядро отображения α равно* (0).

Доказательство. Обозначим через J_p^0 линейную оболочку элементов J вида $x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p}$ $(p \geqslant 1$, $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p)$ и положим $J_0^0 = J_0$. Очевидно, что $J_1^0 = J_1$. Обозначим через J^0 прямую сумму линейных пространств J_p^0, $p \geqslant 0$. Пусть $p \geqslant 2$. Обозначим через J_p^d линейную оболочку элементов J вида $x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p}$, у которых число инверсий в строке $(i_1, \ldots, i_p)$ (т. е. число пар (r, s), $1 \leqslant r, s \leqslant p$, таких, что $r < s$, но $i_r > i_s$) равно d. Очевидно, что J_p есть прямая сумма подпространств J_p^d, $d > 0$.

Утверждение теоремы эквивалентно утверждению, что J есть прямая сумма M и J^0. Следовательно, мы должны показать, что $M + J^0 = J$ и $M \cap J^0 = (0)$.

Для доказательства равенства $M + J^0 = J$ заведомо достаточно показать, что для любого $r \geqslant 0$

$$J_r \subset M + \sum_{q=0}^{r} J_q^0. \tag{6.3.1}$$

Соотношение (6.3.1) очевидно при $r = 0$ и 1. Докажем соотношение (6.3.1) при $r \geqslant 2$ по индукции. Пусть $p \geqslant 2$ и пусть (6.3.1) имеет место при всех $r = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Так как $J_p = \sum\limits_{d\geqslant 0} J_p^d$, то достаточно доказать, что

$$J_p^d \subset M + \sum_{q=0}^{p} J_q^0 \tag{6.3.2}$$

для всех $d \geqslant 0$. Докажем соотношение (6.3.2) индукцией по d. При $d = 0$ соотношение (6.3.2) очевидно. Пусть $d \geqslant 1$ и пусть $J_p^e \subset M + \sum\limits_{q=0}^{p} J_q^0$ при всех $e = 0, \ldots, d-1$. Пусть $t = x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p} \in J_p^d$. Так как $d > 1$, то существует такое натуральное $r \leqslant p-1$, что $i_r > i_{r+1}$. Пусть t' — тензор $x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_p}$, где $J_l = i_l$ при $l \neq r$, $l \neq r+1$, $j_r = i_{r+1}$, $j_{r+1} = i_r$. Тогда $t' \in J_p^{d-1}$ и по индуктивному предположению $t' \in M + J^0$. Но $x_{i_r} \otimes x_{i_{r+1}} - x_{i_{r+1}} \otimes x_r = [x_{i_r}, x_{i_{r+1}}] + \lambda$, где λ — некоторый элемент из M. Отсюда следует, что $t - t' \in M + J_{p-1} \subset M + \sum\limits_{q=0}^{p-1} J_q^0$, где мы также воспользовались предположением индукции. Итак, $t \in M + \sum\limits_{q=0}^{p} J_q^0$, поэтому $J_p^d \subset M + \sum\limits_{q=0}^{p} J_q^0$, что завершает индуктивное доказательство.

Докажем теперь, что $M \cap J^0 = (0)$. Для этого построим линейный оператор φ в J такой, что при всех $p \geqslant 0$

$$\varphi(t) = t \quad \text{для всех} \quad t \in J_p^0; \tag{6.3.3}$$

и если $p \geqslant 2$, $1 \leqslant s \leqslant p-1$ и $i_s > i_{s+1}$, то

$$\begin{aligned}\varphi(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_s} \otimes x_{i_{s+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_p}) &= \\ = \varphi(\ldots \otimes x_{i_{s+1}} \otimes x_{i_s} \otimes \ldots) &+ \varphi(\ldots \otimes [x_{i_s}, x_{i_{s+1}}] \otimes \ldots).\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Действительно, если такой линейный оператор построен, то из (6.3.4) сразу следует, что $\varphi(t_1 \otimes u_{x_i, x_j} \otimes t_s) = 0$ для всех $t_1, t_2 \in J$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$. Следовательно, φ обращается в нуль на M. Так как φ тождествен на J^0, то $M \cap J^0 = (0)$.

Пусть φ — тождественное отображение на $J_0 + J_1$. Пусть $r \geqslant 2$, и пусть φ — линейный оператор в подпространстве $\sum\limits_{q=0}^{r-1} J_q$, удовлетворяющий условиям (6.3.3) и (6.3.4) для всех $p \leqslant r-1$. Расширим φ до линейного преобразования пространства $\sum\limits_{q=0}^{r} J_q$, удовлетворяющего соотношениям (6.3.3) и (6.3.4) для всех $p \leqslant r$. Очевидно, что достаточно определить $\varphi(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_q})$ так, чтобы соотношения (6.3.3) и (6.3.4) выполнялись для $p \leqslant r$. Проведем построение таких элементов $\varphi(t)$ для $t = x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_r}$ индукцией по числу d инверсий в строке $(i_1, \ldots, i_r)$. Если $t \in J_r^0$, то $\varphi(t) = t$. Пусть $d \geqslant 1$ и пусть отображение φ определено так, что соотношения (6.3.3) и (6.3.4) выполняются для всех $t \in J_r^0$, где $e = 0, \ldots, d-1$. Пусть q натуральное число $\leqslant r-1$ такое, что $i_q > i_{q+1}$. Положим

$$\varphi(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_q} \otimes x_{i_{q+1}} \otimes \ldots \otimes x_{i_q}) = \\ = \varphi(\ldots \otimes x_{i_{q+1}} \otimes x_{i_q} \otimes \ldots) + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_q}, x_{i_{q+1}}] \otimes \ldots). \quad (6.3.5)$$

Так как число q определено неоднозначно, то нужно доказать корректность определения φ на элементе t с помощью соотношения (6.3.5). Как только корректность определения φ с помощью (6.3.5) будет доказана, индукция по d, а затем по r, завершает построение отображения $\varphi\colon J \to J$, удовлетворяющего условиям (6.3.3) и (6.3.4). Покажем, что формула (6.3.5) определяет отображение φ корректно. Пусть l — другое натуральное число $\leqslant r-1$; такое, что $i_1 > i_{l+1}$. Мы должны показать, используя предположение индукции, что

$$\varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots) + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes) = \\ = \varphi(\ldots \otimes x_{i_{q+1}} \otimes x_{i_q} \otimes \ldots) + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_q}, x_{i_{q+1}}] \otimes \ldots). \quad (6.3.6)$$

Если $|q-l| \geqslant 2$, то можно считать, что $q \geqslant l+2$. Тогда $p \geqslant 4$. Так как аргументы левой и правой части формулы (6.3.6) принадлежат $\sum\limits_{p=0}^{r-1} J_p + \sum\limits_{l=0}^{d-1} J_r^e$, то к обеим частям (6.3.6) можно применить индуктивное предположение. Прямое вычисление показывает тогда, что обе части соотношения (6.3.6) равны одному и тому же выражению

$$(\ldots \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots \otimes x_{i_{q+1}} \otimes x_{i_q} \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes \ldots \otimes x_{i_{q+1}} \otimes x_{i_q} \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots \otimes [x_{i_q}, x_{i_{q+1}}] \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes \ldots \otimes [x_{i_q}, x_{i_{q+1}}] \otimes \ldots). \quad (6.3.7)$$

Если же $|q-l| = 1$, то пусть $q = l+1$. Тогда $i_l > i_{l+1} > i_{l+2}$, и $p \geqslant 3$. Используя предположение индукции, получаем, что левая часть соотношения (6.3.6) равна

$$\varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+2}} \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes x_{i_l} \otimes [x_{i_{l+1}}, x_{i_{l+2}}] \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+2}}] \otimes x_{i_{l+1}} \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+2}} \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}} \otimes \ldots), \quad (6.3.8)$$

а правая часть (6.3.6) приводится к виду

$$\varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+2}} \otimes x_{i_{l+1}} \otimes x_{i_l} \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_{l+1}}, x_{i_{l+2}}] \otimes x_{i_l} \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes x_{i_{l+1}} \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+2}}] \otimes \ldots) + \\ + \varphi(\ldots \otimes [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}] \otimes x_{i_{l+2}} \otimes \ldots). \quad (6.3.9)$$

С другой стороны, по предположению индукции, для любых $x, y \in L$, $t_1 \in J_\alpha$, $t_2 \in J_\beta$, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $\alpha + \beta = p - 3$, имеем

$$\varphi(t_1 \otimes x \otimes y \otimes t_2) - \varphi(t_1 \otimes y \otimes x \otimes t_2) = \varphi(t_1 \otimes [x, y] \otimes t_2). \tag{6.3.10}$$

Сравнивая выражения (6.3.8) и (6.3.9) и применяя соотношение (6.3.10), видим, что для доказательства равенства обеих частей формулы (6.3.6) достаточно показать, что отображение φ обращается в нуль на элементе

$$s_1 \otimes [x_{i_l}, [x_{i_{l+1}}, x_{i_{l+2}}]] \otimes s_2 + s_1 \otimes [x_{i_{l+1}}, [x_{i_{l+2}}, x_{i_l}]] \otimes s_2 + \\ + s_1 \otimes [x_{i_{l+2}}[x_{i_l}, x_{i_{l+1}}]] \otimes s_2, \tag{6.3.11}$$

принадлежащем J_{r-2}. Но элемент (6.3.11) равен нулю вследствие тождества Якоби в алгебре Ли L. Таким образом, отображение φ корректно определено. Это завершает доказательство теоремы.

Замечание. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — базис в алгебре Ли L; пусть c_{ijk} — соответствующие структурные постоянные. Тогда ассоциативная алгебра U порождена как алгебра элементами x_i, удовлетворяющими соотношениям

$$x_i x_j - x_j x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_k \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{6.3.12}$$

I. *Пусть L — алгебра Ли над полем K, U — ее универсальная обертывающая алгебра. Пусть V — векторное пространство и π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$. Тогда существует гомоморфизм π' ассоциативной алгебры U в ассоциативную алгебру $L(V)$ линейных операторов в пространстве V такой, что $\pi(x) = \pi'(x)$ для всех $x \in L$. Гомоморфизм π' определяется гомоморфизмом π однозначно.*

Доказательство следует из определения универсальной обертывающей алгебры, если в качестве A взять алгебру $L(V)$, а в качестве отображения ξ — отображение $x \to \pi(x)$.

Отметим важный частный случай предложения I.

II. *Пусть L — алгебра Ли, π — представление алгебры Ли L в линейном пространстве L. Существует представление π' алгебры U в пространстве V такое, что $\pi(x) = \pi'(x)$ для всех $x \in L$. Представление π' однозначно определяется представлением π.*

6.4. Элемент Казимира. Пусть π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$, где V — конечномерное векторное пространство. Предположим, что на пространстве L задана невырожденная симметричная билинейная форма B_π, инвариантная относительно гомоморфизма ad. Выберем базисы $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ в алгебре Ли L так, чтобы

$$B_\pi(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \tag{6.4.1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть U — универсальная обертывающая алгебра для L. Пусть b — элемент алгебры U, определяемый равенством

$$b = \sum e_i f_i. \tag{6.4.2}$$

Элемент b называется *элементом Казимира*, соответствующим форме B_π.

I. *Элемент b лежит в центре алгебры U и не зависит от выбора базисов $\{e_i\}$, $\{f_j\}$.*

Доказательство. Пусть Φ — линейное отображение тензорного произведения алгебр Ли $L \otimes L$ в алгебру Ли $gl(V)$, определяемое формулой

$$\Phi(x \otimes y)(z) = B_\pi(y, z)\, x \tag{6.4.3}$$

для всех $x, y \in L$. Покажем, что отображение Φ невырождено. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$ — элемент из $L \otimes L$, лежащий в ядре отображения Φ. Мы можем предполагать, что элементы $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы в L. Тогда условие $\Phi\left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i\right) = 0$, равносильное условию

$$\sum_{i=1}^{k} B_\pi(y_i, z)\, x_i = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in L,$$

равносильно также условию

$$B_\pi(y_i, z) = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in L \quad \text{и всех} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Так как форма B_π, по предположению, невырождена, то $y_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0$. Итак, ядро отображения Φ есть (0). Так как размерности конечномерных линейных пространств $L \otimes L$ и $gl(L)$ равны, то отображение Φ есть изоморфизм линейных пространств $L \otimes L$ и $gl(L)$. Легко проверить непосредственно, что равенство

$$\Phi((\operatorname{ad} z)\, x \otimes y + x \otimes (\operatorname{ad} z)\, y) = [\operatorname{ad} z, \Phi(x \otimes y)] \tag{6.4.4}$$

выполняется для всех $x, y, z \in L$. Кроме того, из формулы (6.4.3) следует, что для любого $z \in L$ выполняется равенство

$$\Phi\left(\sum e_i \otimes f_i\right)(z) = \sum_i \Phi(e_i \otimes f_i)\, z = \sum_i B_\pi(f_i, z)\, e_i = z,$$

т. е. при изоморфизме Φ элемент $\sum e_i \otimes f_i$ переходит в единичный оператор в пространстве L; отсюда следует, что элемент $\sum e_i \otimes f_i \in$ $\in L \otimes L$ не зависит от выбора базисов $\{e_i\}$, $\{f_j\}$. Далее, так как $\Phi\left(\sum e_i \otimes f_i\right) = 1$, то $[\operatorname{ad} z, \Phi\,(e_i \otimes f_i)] = 0$ для всех $z \in L$; тогда из (6.4.4) следует, что $\sum_i \{(\operatorname{ad} z)\, e_i \otimes f_i + e_i \otimes (\operatorname{ad} z)\, f_i\} = 0$. Элемент $b \in U$ является образом элемента $\sum_i e_i \otimes f_i \in L \otimes L$ при каноническом отображении тензорной алгебры J на U; так как алгебра U порождается подпространством L, то элемент $b \in U$ лежит в центре алгебры U, что завершает доказательство предложения I.

Согласно I п. 6.3 гомоморфизм π можно продолжить до гомоморфизма алгебры U в $L(V)$. Образ $\pi(b)$ элемента b перестановочен со всеми операторами $\pi(x)$, $x \in L$, так как элемент b лежит в центре алгебры U.

II. *Если форма B_π невырождена, и b — элемент Казимира, соответствующий форме B_π, то $\pi(b) \neq 0$. Если, кроме того, $\pi(L)$ — неприводимое семейство операторов, то $\pi(b)$ — обратимый скалярный оператор.*

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{tr} \pi(b) = \sum \operatorname{tr}(\pi(e_i)\, \pi(f_i)) = \sum_i B_n(e_i, f_i) = \dim L \neq 0$, поэтому $\pi(b) \neq 0$. Если семейство операторов $\pi(L)$ неприводимо, то из леммы Шура следует, что $\pi(b)$ — либо нулевой оператор, либо ненулевой скалярный оператор; но $\pi(b) \neq 0$, так что $\pi(b)$ обратим.

6.5. Универсальная обертывающая алгебра группы Ли. Пусть G — группа Ли, L — алгебра Ли группы G. Напомним, что алгебра Ли L была построена с помощью левоинвариантных векторных полей на G (см. п. 3.2 гл. IX). Назовем *левоинвариантным дифференциальным оператором* на G линейную комбинацию конечных произведений левоинвариантных векторных полей на G, где под произведением векторных полей понимается операция их последовательного применения в соответствии с формулой (1.6.7) гл. IX. Из соотношения (1.6.6) гл. IX следует, что всякий левоинвариантный дифференциальный оператор на G записывается в каждой координатной окрестности с помощью линейного дифференциального выражения с аналитическими коэффициентами, причем применение такого оператора перестановочно с операциями левого сдвига на G. Левоинвариантные дифференциальные операторы на G образуют ассоциативную алгебру относительно естественных линейных операций и умножения, определенного композицией операторов.

Пусть $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли L. Тождественное отображение π алгебры Ли L в алгебру левоинвариантных дифференциальных операторов удовлетворяет условию $\pi([X, Y]) = XY - YX$ по определению алгебры Ли группы G; согласно I п. 6.2, это отображение однозначно продолжается до гомоморфизма π' ассоциативной алгебры $U(L)$ в ассоциативную алгебру левоинвариантных дифференциальных операторов на G. Читатель легко проверит, что ядро гомоморфизма π' состоит из единственного элемента 0, а образ совпадает с алгеброй всех левоинвариантных дифференциальных операторов на G. Таким образом, получаем:

I. *Универсальная обертывающая алгебра* $U(L)$ *изоморфна* (*как ассоциативная алгебра*) *алгебре всех левоинвариантных дифференциальных операторов на* G.

Во многих задачах теории представлений важную роль играет центр $Z(L)$ обертывающей алгебры $U(L)$. Один из элементов центра — элемент Казимира — был введен в п. 6.4; мы используем элемент Казимира ниже в п. 7.2 в доказательстве теоремы Вейля о полной приводимости конечномерных представлений полупростых алгебр Ли. Приведем принадлежащее И. М. Гельфанду [1*] описание элементов центра универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли L данной связной группы Ли G.

Пусть $g \to \mathrm{Ad}\, g$ — присоединенное представление группы G. Оператор $\mathrm{Ad}\, g$ определяет гомоморфизм Ли алгебры Ли L в L. Назовем элемент $a \in U(L)$ *однородным*, если a принадлежит образу одного из подпространств J_r (см. п. 6.1). Пусть $\dim L = m$, $e_1, \ldots, e_m$ — базис в L, $(\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})$ — матрица линейного оператора $\mathrm{Ad}\, g$ в базисе $e_1, \ldots, e_m$, $(\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})'$ — матрица, транспонированная к $(\widetilde{Adg})$, $\varphi(z_1, \ldots, z_m) = \sum c_{i_1, \ldots, i_k} z_{i_1} \ldots z_{i_k}$ — однородный многочлен степени k от переменных $z_1, \ldots, z_m$. Положим

$$a = \sum \frac{c_{i_1 \ldots i_k}}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} e_{i_{\sigma(1)}} \ldots e_{i_{\sigma(k)}} \in U(L), \tag{6.5.1}$$

где S_k — группа всех подстановок индексов $1, \ldots, k$.

II. *Пусть* G — *связная группа Ли*, L — *ее алгебра Ли*, a — *однородный элемент в обертывающей алгебре* $U(L)$. *Тогда* $a \in Z(L)$ *в том и только том случае, если* a *имеет вид* (6.5.1), *где многочлен* φ *удовлетворяет условию* $\varphi(z_1, \ldots, z_m) = \varphi((\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})' z_1, \ldots \ldots, (\widetilde{\mathrm{Ad}\, g})' z_m)$ *для всех* $g \in G$ *и всех* $z_1, \ldots, z_m$.

Доказательство см. также в книгах Желобенко [2] и Кириллова [1].

Пример. Пусть $G = SU(2)$. Алгебра Ли L группы G есть $su(2)$, т. е. алгебра Ли комплексных косоэрмитовых матриц второго порядка с нулевым следом. Очевидно, что L изоморфна (как линейное пространство) пространству $\mathbf{R}^3$. Читатель легко проверит, что присоединенное представление группы $SU(2)$ эквивалентно представлению группы $SU(2)$, построенному в упражнении на с. 189. Таким образом, присоединенная группа группы $SU(2)$ есть группа $SO(3, \mathbf{R})$. Любой многочлен от трех переменных, инвариантный относительно действия группы $SO(3, \mathbf{R})$, постоянен на сферах и поэтому является многочленом от $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Итак, в случае группы $SU(2)$ центр универсальной обертывающей алгебры совпадает с алгеброй многочленов от оператора Казимира, построенного в п. 6.4. Описание идеалов в обертывающей алгебре алгебры Ли $su(2)$ см. в книге Кириллова [1]. Описание центра универсальной обертывающей алгебры для групп $GL(n, \mathbf{C})$, $U(n)$, $SL(n, \mathbf{C})$, $SU(n)$ дано в книге Желобенко [1].

§ 7. Полупростые алгебры Ли

В этом параграфе мы изучим некоторые элементарные свойства полупростых алгебр Ли и докажем теорему Г. Вейля о полной приводимости конечномерных представлений полупростых алгебр Ли.

7.1. Идеалы в полупростых алгебрах Ли. Пусть L — алгебра Ли, A — линейное подпространство L. Множество $x \in L$ таких, что $(x, y) = 0$ для всех $y \in A$, называется *ортогональным дополнением* подпространства A и обозначается $A^{\perp}$.

I. *Если A — идеал в алгебре Ли L, то $A^{\perp}$ — также идеал в L.*

Доказательство. Очевидно, что $A^{\perp}$ — линейное подпространство в L. Инвариантность формы Киллинга означает, что

$$([x, y], z) + (y, [x, z]) = 0$$

для всех $x, y, z \in L$; если $y \in A$, $z \in A^{\perp}$, то $[x, y] \in A$ и $([x, y], z) = 0$, следовательно, $[x, z] \in A^{\perp}$ при $x \in L$, $z \in A^{\perp}$.

II. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, A, B — ее идеалы. Следующие условия эквивалентны*:

а) $A \cap B = (0)$;

б) $[A, B] = (0)$;

в) $(A, B) = 0$.

Доказательство. Так как $[A, B] \subset A \cap B$, то б) следует из а). Пусть выполнено условие б) и пусть $a \in A$, $b \in B$, $x \in L$. Тогда $[b, x] = B$ и $[a, [b, x]] \in [A, B] = 0$. Следовательно, $\operatorname{ad} a \operatorname{ad} b = 0$ и $(a, b) = \operatorname{tr} 0 = 0$, т. е. имеет место в). Если выполнено условие в), то форма Киллинга тождественно обращается в нуль на идеале $A \cap B$. Согласно критерию Картана этот идеал разрешим. Так как L полупроста, то $A \cap B = (0)$, т. е. выполнено условие а). Итак, а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ а).

III. *Пусть M — идеал в полупростой алгебре Ли L. Тогда $[M, M^{\perp}] = (0)$ и алгебра Ли L есть прямая сумма M и $M^{\perp}$. Алгебры Ли M и L/M полупросты.*

Доказательство. По определению, идеалы M и $M^{\perp}$ удовлетворяют условию $(M, M^{\perp}) = (0)$. Из предложения II следует, что $M \cap M^{\perp} = (0)$ и $[M, M^{\perp}] = 0$. С другой стороны, из невырожденности формы Киллинга на полупростой алгебре Ли L и из определения $M^{\perp}$ следует, что $\dim L = \dim M + \dim M^{\perp}$. Объединяя это соотношение с равенством $M \cap M^{\perp} = (0)$, видим, что L есть прямая сумма M и $M^{\perp}$. Если $x \in M$, то ограничение операторов $\operatorname{ad} x$ на M определяет присоединенный гомоморфизм алгебры Ли M, а ограничение $\operatorname{ad} x$ на $M^{\perp}$ равно нулю. Отсюда следует, что ограничение формы Киллинга на L на идеал M определяет форму Киллинга на M. Допустим, что эта форма на M вырождена, т. е. что существует такой $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, что $(x_0, x) = 0$ для всех $x \in M$; тогда из ортогональности M и $M^\perp$ и равенства $L = M + M^\perp$ следует, что $(x_0, x) = 0$ для всех $x \in L$. Так как L полупроста, то форма $(\cdot, \cdot)$ невырождена, поэтому $x_0 = 0$. Следовательно, форма Киллинга на M невырождена, поэтому M — полупростая алгебра Ли. Аналогично, M_1 полупроста. Так как L/M изоморфна $M^\perp$, то L/M — также полупростая алгебра Ли.

IV. *Если L полупроста, то $L = [L, L]$.*

Доказательство. Если $L \neq [L, L]$, то $L/[L, L]$ — ненулевая абелева алгебра Ли, полупростая согласно III, а это невозможно.

V. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, M — идеал в L, N — идеал в M. Тогда N — идеал в L. В частности, если M — минимальный идеал в L, то M — простая алгебра Ли.*

Доказательство. В силу III и II $L = M + M^\perp$ и $[M, M^\perp] = (0)$, поэтому $[N, L] = [N, M] \subset N$. С другой стороны, минимальный идеал в полупростой алгебре не коммутативен; поэтому его размерность больше единицы.

VI. *Алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда, когда она разложима в прямую сумму простых алгебр Ли L_i. В этом случае всякий идеал M алгебры Ли L есть прямая сумма некоторых L_i. Указанное разложение полупростой алгебры Ли единственно.*

Доказательство. Пусть алгебра Ли L полупроста. Так как каждый идеал $H \subset L$ имеет дополнительный идеал $H^\perp$, то, используя V, получаем, что L есть прямая сумма некоторого числа минимальных идеалов L_i. Всякий минимальный идеал есть простая алгебра Ли в силу V. Пусть M — какой-нибудь идеал в L. Если N — идеал в M, то $N^\perp \cap M$ — также идеал в M, и предыдущее рассуждение показывает, что M есть прямая сумма своих минимальных идеалов M_i. Согласно предложению V каждый из идеалов M_i есть идеал в L. Поэтому достаточно показать, что всякий минимальный идеал A алгебры Ли L совпадает с одним из идеалов L_i. Так как форма Киллинга невырождена, а прямая сумма идеалов L_i есть вся алгебра L, то существует такое i_0, что A не ортогонален L_{i_0}. Тогда из предложения II следует, что $A \cap L_{i_0} \neq (0)$. Но идеалы A и L_{i_0} минимальны, поэтому $A \cap L_{i_0} = A = L_{i_0}$. Единственность разложения $L = \Sigma \dotplus L_i$ следует теперь из того, что L_i образуют множество всех минимальных идеалов алгебры Ли L; тем самым множество идеалов L_i однозначно определено.

Обратно, если L есть прямая сумма простых алгебр L_i, то идеалы L_i попарно ортогональны в смысле формы Киллинга и на каждом из них форма Киллинга невырождена. Поэтому форма Киллинга невырождена на алгебре Ли L, т. е. L полупроста.

7.2. Полная приводимость представлений полупростых алгебр Ли.

Теорема (Г. Вейль). *Пусть L — полупростая алгебра Ли над полем K, π — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$, где V — конечномерное пространство над K. Тогда для любого подпространства $V_1 \subset V$, инвариантного относительно $\pi(L)$, существует инвариантное относительно $\pi(L)$ подпространство $V_2 \subset V$ такое, что $V_1 \cap V_0 = (0)$ и $V_1 + V_2 = V$.*

Пусть N — ядро гомоморфизма π. Тогда можно рассматривать π как гомоморфизм алгебры Ли L/N с нулевым ядром. Так как L/N полупроста согласно III, то к остальным предположениям теоремы можно присоединить предположение, что ядро гомоморфизма π состоит лишь из нуля.

Рассмотрим множество A тех элементов $x \in L$, для которых $B_\pi(x, y) = 0$ для всех $y \in L$. Согласно I п. 5.2, множество A есть идеал в L. Этот идеал разрешим согласно III п. 5.2. Так как L полупроста, то $A = (0)$, т. е. форма B_π невырождена на L. Пусть $b \in U$ — элемент Казимира, соответствующий форме B_π (см. п. 6.4). Продолжим гомоморфизм π на обертывающую алгебру U алгебры Ли L (см. I п. 6.3). Согласно II п. 6.4 оператор $\pi(L)$ — ненулевой, а если $\pi(L)$ — неприводимое семейство операторов в V, то оператор $\pi(L)$ обратим.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы. Предположим сначала, что V_1 — инвариантное подпространство в V коразмерности 1. Тогда для одномерного фактор-пространства $W = V/V_1$ определен гомоморфизм $\widetilde{\pi}$ алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(W)$. Поскольку W изоморфно K, то $gl(W)$ есть одномерная абелева алгебра Ли. Но L полупроста, поэтому L не имеет абелевых фактор-алгебр Ли (см. III п. 7.1); следовательно, $\widetilde{\pi}(L) = 0$. Покажем, что *в пространстве V существует одномерное подпространство, инвариантное относительно $\pi(L)$ и дополнительное к V_1.*

Мы можем предполагать дополнительно, что подпространство V_1 неприводимо относительно $\pi(L)$. Действительно, если утверждение справедливо во всех случаях, когда VI неприводимо относительно $\pi(L)$, то можно показать справедливость нашего утверждения индукцией по размерности пространства V_1. Если V_1 приводимо относительно $\pi(L)$, то существует $\pi(l)$-инвариантное подпространство $V' \subset V_1$ такое, что $V' \neq (0)$, $V' \neq V_1$. Рассмотрим гомоморфизм $\widetilde{\pi}$ алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V/V')$, определяемый переходом к фактор-операторам. Пространство V_1/V' инвариантно относительно $\widetilde{\pi}(L)$ и имеет единичную коразмерность в V/V'; по предположению индукции, существует прямая V''/V', дополнительная к V_1/V' и инвариантная относительно $\widetilde{\pi}(L)$. Тогда V'' инвариантно относительно $\pi(L)$ и содержит инвариантное подпространство V' коразмерности 1 в V''; снова применяя предположение индукции, получаем $\pi(L)$-инвариантную прямую V_2, дополнительную к V' в V''. Тогда V_2 дополняет V_1 в V. Действительно,

$V' \subset V_1$ и $V_2 + V' = V''$, поэтому $V_2 + V_1 = V_2 + V' + V_1 = V'' + V_1 = V$; с другой стороны, если $V_2 \cap V_1 \neq (0)$, то $V_2 \subset V_1$ вследствие одномерности V_2. Тогда $V' \subset V_1$ и $V_2 \subset V_1$, т. е. $V'' = V' + V_2 \subset V_1$, но V''/V' дополняет V_1/V' в V/V', поэтому $V'' \not\subset V_1$. Полученное противоречие показывает, что $V_2 \cap V_1 = (0)$, т. е. V_2 дополняет V_1 в V.

Итак, *предположим дополнительно*, что $\pi(L)$ — *неприводимое семейство операторов в* V_1. По доказанному выше, билинейная форма B_π невырождена. Если b — соответствующей форме B_π элемент Казимира, то $\pi(b)V \subset V_1$. Действительно, образ алгебры Ли L в алгебре Ли $gl(V/V_1) \approx gl(K)$ есть одномерная алгебра Ли, поэтому абелева, т. е. $\pi(x)V \subset V_1$ для всех $x \in L$ и $\pi(b)V \subset V_1$. С другой стороны, семейство операторов $\pi(L)$ неприводимо в V_1, поэтому $\pi(b)$ — ненулевой скалярный оператор на пространстве V_1. Пусть V_2 — ядро оператора $\pi(b)$ в V. Тогда V_2 — одномерное подпространство, дополнительное к V_1. Так как $\pi(b)$ перестановочен с операторами $\pi(x)$, $x \in L$, то для любого $v \in V_2$ имеем $\pi(b)(\pi(x)\,v) = \pi(x)(\pi(b)) = \pi(x)\,0 = 0$, т. е. $\pi(x)\,v \in V_2$, и V_2 инвариантно относительно $\pi(L)$. Заметим, что

$$\pi(L)V_2 = (0), \tag{7.2.1}$$

так как $\pi(L)|_{V_2}$ абелева, как и всякая одномерная алгебра Ли.

Перейдем теперь к доказательству утверждения теоремы в общем случае. Пусть $\widetilde{V}$ — линейное пространство линейных отображений пространства V в пространство V_1, ограничение которых на V_1 является скалярным оператором, т. е. оператором умножения на элемент поля. Пусть $\widetilde{V}_1$ — множество линейных операторов из пространства V в V_1, ограничение которых на V_1 равно нулю. Если V_1 — ненулевое подпространство, то пространство $\widetilde{V}_1$ имеет в $\widetilde{V}$ коразмерность 1. Определим гомоморфизм $\widetilde{\pi}$ алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(\widetilde{V})$, полагая

$$\widetilde{\pi}(x)\,\widetilde{v} = [\pi(x), \widetilde{v}] \quad \text{для всех} \quad x \in L, \quad \widetilde{v} \in \widetilde{V}.$$

Очевидно, что $\widetilde{V}_1$ инвариантно относительно $\widetilde{\pi}(L)$. Согласно только что доказанному утверждению существует одномерное подпространство $\widetilde{V}_2 \subset \widetilde{V}$, инвариантное относительно $\widetilde{\pi}(L)$ и дополнительное к $\widetilde{V}_1$. Пусть ψ — ненулевой элемент из $\widetilde{V}_2$; по определению $\widetilde{V}$, ограничение ψ на V_1 есть умножение на ненулевой скаляр. Умножая ψ на число, мы можем считать, что ψ действует на V_1 тождественно. В силу (7.2.1) $\widetilde{\pi}(L)\,\widetilde{V}_2 = (0)$, поэтому $\pi(x)\,\psi = [\pi(x), \psi] = 0$ при $x \in L$, т. е. ψ — отображение пространства V в V_1, тождественное на V_1 и перестановочное с $\pi(x)$, $x \in L$. Ядро отображения ψ дает требуемое подпространство V_2.

7.3. Следствия теоремы Г. Вейля.

I. *Алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда*, *когда для любого гомоморфизма* π *алгебры Ли L в алгебру Ли* $gl(V)$ *семейство операторов* $\pi(L)$ *вполне приводимо* (*т. е. любое* $\pi(L)$*-инвариантное подпространство имеет* $\pi(L)$*-инвариантное дополнительное подпространство*).

Доказательство. Если L полупроста, то $\pi(L)$ вполне приводимо в силу теоремы Г. Вейля. Обратно, пусть для некоторой алгебры Ли L семейство $\pi(L)$ вполне приводимо для любого гомоморфизма $\pi\colon L \to gl(V)$; тогда, в частности, это условие выполнено для присоединенного гомоморфизма. Следовательно, любой идеал алгебры Ли L имеет дополнительный идеал. Пусть алгебра Ли L не полупроста. Пусть $R \neq (0)$ — радикал алгебры Ли L; пусть n — высота R как разрешимой алгебры. Тогда $n \geqslant 1$ и $A = R^{(n-1)}$ есть ненулевой коммутативный идеал в L. Пусть B — дополнительный к A идеал алгебры Ли L. Тогда алгебра Ли L изоморфна прямой сумме A и B, поэтому любой гомоморфизм алгебры Ли A в $gl(V)$ продолжается до гомоморфизма алгебры Ли L в $gl(V)$, равного нулю на B. Но коммутативная алгебра Ли A имеет гомоморфизм π в $gl(K^2)$ такой, что $\pi(A)$ не вполне приводимо. Действительно, пусть f — ненулевая линейная функция на A; гомоморфизм π определяется, например, формулой

$$\pi(a) = \left\| \begin{matrix} 0 & f(a) \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad a \in A.$$

II. *Всякое дифференцирование d полупростой алгебры Ли L имеет вид $\operatorname{ad} x$ для некоторого $x \in L$.*

Доказательство. Пусть D — алгебра Ли дифференцирований алгебры Ли L. Пусть J — множество дифференцирований алгебры Ли L вида $\operatorname{ad} x$, $x \in L$ (см. I п. 1.1). Согласно предложению I п. 1.1 множество J есть идеал в D. Отображение $x \to \operatorname{ad} x$ есть изоморфизм алгебры Ли L на J. Действительно, центр алгебры Ли L есть коммутативный идеал в полупростой алгебре Ли L и потому равен нулю; с другой стороны, ядро отображения $x \to \operatorname{ad} x$ совпадает с центром L. Итак, *L и J изоморфны*, поэтому J — полупростая алгебра Ли. Ограничение присоединенного гомоморфизма алгебры Ли D на идеал J определяет вполне приводимое семейство операторов в D, поэтому D есть прямая сумма подпространства $[D, J]$ и подпространства D_0 элементов, ортогональных $[D, J]$:

$$D = [D, J] + D. \tag{7.3.1}$$

Если $a \in J$, $d \in D$, $d_0 \in D_0$, то $([a, d], d_0) = 0$, поэтому $(d, [a, d_0]) = 0$ для всех $d \in D$, $a \in J$, $d_0 \in D_0$. Следовательно, $[a, d_0] = 0$. Обратно, если $[a, d_0] = 0$, то, очевидно, $d_0 \in D_0$. Поэтому D_0 состоит из элементов $d_0 \in D$, перестановочных со всеми элементами из J. Таким образом, если $d_0 \in D_0$, то $\operatorname{ad}(d_0 x) = [d_0, \operatorname{ad} x] = 0$ для всех $x \in L$, но тогда $d_0 x = 0$ для всех $x \in L$ и $d_0 = 0$, так что $D_0 = (0)$ и $D = [D, J] \dotplus D_0 = [D, J]$ в силу (7.3.1). Но J — идеал в D, поэтому $D = [J, D] \subset J$, т. е. $D = J$.

III. *Пусть L — алгебра Ли, M — идеал в L, являющийся полупростой алгеброй Ли. Существует единственный идеал N в L такой, что L есть прямая сумма M и N.*

Доказательство. Рассмотрим ограничение присоединенного гомоморфизма алгебры Ли L на идеал M. Очевидно, что подпространство $M \subset L$ инвариантно относительно семейства операторов $\operatorname{ad} x$, $x \in M$. Согласно теореме Г. Вейля существует подпространство $N \subset L$, дополнительное к M и инвариантное относительно операторов $\operatorname{ad} x$, $x \in M$. Покажем, что $[M, N] = (0)$. Действительно, так как M — идеал, то $[M, N] \subset M$; так как N инвариантно относительно $\operatorname{ad} x$, $x \in M$, то $[M, N] \subset N$, поэтому $[M, N] \subset M \cap N = (0)$. Покажем, что $N = M'$, где M' — множество таких элементов $x \in L$, что $[x, M] = 0$. Пусть $x \in L$; тогда $x = m + n$, где $m \in M$, $n \in N$. Следовательно, $[M, x] = [M, m]$. Если $[M, x] = (0)$, то $[M, m] = 0$, т. е. m лежит в центре M. Но M полупроста, поэтому $m = 0$. Итак, если $x \in M'$, то $x \in N$, т. е. $M' \subset N$. Так как $[M, N] = 0$, то $M' \supset N$, поэтому $M' = N$. Следовательно, N однозначно определен (а именно, $N = M'$), и N является идеалом в L согласно I п. 7.1.

§ 8. Подалгебры Картана

Пусть L — комплексная алгебра Ли, H — ее нильпотентная подалгебра Ли. Пусть π — ограничение присоединенного представления алгебры Ли на подалгебру H. Согласно II п. 2.4 пространство L разлагается в прямую сумму подпространств L^α, соответствующих различным весам α представления π. Всякий вес представления π называется *корнем алгебры Ли L относительно подалгебры Ли H*.

Иначе говоря, линейный функционал α на H называется *корнем* алгебры Ли L относительно H, если существует такой элемент $x \in L$, $x \neq 0$, что для любого $h \in H$ имеем

$$[h, x] = \alpha(h)\, x. \tag{8.1.1}$$

Подпространство L^α называется *корневым подпространством, соответствующим корню α*. Отметим некоторые свойства разложения $L = \sum L^\alpha$.

I. $H \subset L^0$; *более того, любая нильпотентная подалгебра Ли $M \subset L$, содержащая H, содержится в L^0*.

Доказательство. Присоединенное представление алгебры Ли M есть представление нильпотентными операторами (см. теорему 1 п. 2.1); следовательно, ограничение этого представления на H может иметь лишь нулевой вес, поэтому $M \subset L^0$.

II. $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$.

Доказательство. Пусть $x \in L^\alpha$, $y \in L^\beta$. Покажем, что $[x, y] \in$ $\in L^{\alpha+\beta}$. Из очевидного тождества

$$(\operatorname{ad}(h) - \alpha(h) - \beta(h))\,[x, y] = [(\operatorname{ad}(h) - \alpha(h))\,x, y] + [x, (\operatorname{ad}(h) - \beta(h))\,y]$$

следует по индукции аналог формулы Лейбница:

$$(\operatorname{ad}(h)-\alpha(h)-\beta(h))^n[x,\,y] = \\ = \sum_{p=0}^{n} C_n^p[(\operatorname{ad}(h)-\alpha(h))^p x,\,(\operatorname{ad}(h)-\beta(h))^{n-p}y]. \quad (8.1.2)$$

Если $n > \dim L^\alpha + \dim L^\beta$, то все слагаемые в правой части (8.1.2) обращаются в нуль, откуда следует, что $[x,\,y] \in L^{\alpha+\beta}$.

Из II следует, что $[L^\alpha,\,L^\beta] = (0)$, если $\alpha+\beta$ — не корень.

III. L^0 — *подалгебра алгебры Ли* L.

Доказательство. Из II следует, что $[L^0,\,L^0] \subset L^0$.

Нильпотентная подалгебра Ли H алгебры Ли L называется *подалгеброй Картана*, если $L^0 = H$.

Очевидно, что всякая подалгебра Картана является максимальной (т. е. нерасширяемой) нильпотентной подалгеброй в L.

Пусть L — алгебра Ли, $x \in L$. Пусть $L(\operatorname{ad}x, 0)$ — подпространство в L, образованное такими элементами $y \in L$, что $(\operatorname{ad}x)^k y = 0$ при некотором $k \geqslant 0$. Очевидно, что $x \in L(\operatorname{ad}x, 0)$; следовательно, $L(\operatorname{ad}x, 0) = 0$ при $x \neq 0$. Число $r = \min\dim L(\operatorname{ad}x, 0)$ называется *рангом* алгебры Ли L. Если $x \in L$ и $\dim L(\operatorname{ad}x, 0) = r$, то элемент x называется *регулярным* элементом алгебры Ли L.

Легко видеть, что любая ненулевая алгебра Ли содержит хотя бы один регулярный элемент. Действительно, пусть $x_0 \neq 0$ — произвольный элемент из L. Если $\dim L(\operatorname{ad}x_1, 0)$ не минимальна, то существует такой элемент $x_2 \in L$, $x_2 \neq 0$, для которого $\dim L(\operatorname{ad}x_2, 0) < \dim L(\operatorname{ad}x_1, 0)$. Поскольку $\dim L$ конечна, то, повторяя это рассуждение, мы придем к элементу x_k, для которого $\dim L(\operatorname{ad}x_k, 0)$ минимальна.

IV. *Пусть* H — *нильпотентная подалгебра Ли алгебры Ли* L, *содержащая регулярный элемент* h. *Тогда алгебра Ли* L^0 *является подалгеброй Картана в* L, *причем* $L^0 = L(\operatorname{ad}h, 0)$.

Доказательство. Пусть $L = L^0 + \sum\limits_{\alpha\neq 0} L^\alpha$ — разложение пространства L относительно нильпотентной подалгебры Ли H; пусть $\widetilde{L} = \sum\limits_{\alpha\neq 0} L^\alpha$. Согласно II подпространства L^α инвариантны относительно всех операторов $\operatorname{ad}x$, $x \in L^0$; следовательно, подпространство $\widetilde{L}$ также инвариантно относительно этих операторов. Пусть $\det(x)$ — определитель преобразования $\operatorname{ad}x$, $x \in L^0$, ограниченного на подпространство $\widetilde{L}$. Множество таких векторов $h \in H$, что $\alpha(h) = 0$ при некотором $\alpha \neq 0$, есть конечное объединение гиперплоскостей в H; это объединение не исчерпывает всего пространства H, поэтому существует такой вектор $h_0 \in H$, что $\alpha(h_0) \neq 0$ при всех $\alpha \neq 0$. Так как $H \subset L^0$, то $\det h = \prod\limits_{\alpha\neq 0} \alpha(h) \neq 0$ при некоторых $h_0 \in L^0$. С другой стороны, если $\det(x) \neq 0$ для некоторого элемента $x \in L^0$, то ограничение оператора $\operatorname{ad} x$ на подпространство $\widetilde{L}$ имеет только ненулевые собственные значения; следовательно, $L(\operatorname{ad} x, 0) \subset L^0$. Пусть h — регулярный элемент, содержащийся в H. Так как $h \in H$, то $L(\operatorname{ad} h, 0) \supset L^0$; поэтому

$$L(\operatorname{ad} x, 0) \subset L^0 \subset L(\operatorname{ad} h, 0). \tag{8.1.3}$$

Но размерность $L(\operatorname{ad} h, 0)$ минимальна, поэтому из (8.1.3) заключаем, что

$$L(\operatorname{ad} x, 0) = L^0 = L(\operatorname{ad} h, 0). \tag{8.1.4}$$

Докажем, что подалгебра Ли L^0 нильпотентна. В силу (8.1.4) оператор $\operatorname{ad}(x)$ нильпотентен на L^0, откуда следует, что

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)|_{L^0})^p = 0 \quad \text{при всех} \quad p \geqslant q. \tag{8.1.5}$$

В левой части формулы (8.1.5) стоит многочлен от координат вектора $x \in L^0$. Мы уже доказали, что соотношение (8.1.5) выполняется для всех $x \in L^0$ таких, что $\det(x) \neq 0$; это множество непусто и открыто в L^0, поэтому равенство (8.1.5) имеет место для всех $x \in L^0$. В свою очередь, приводя $\operatorname{ad}(x)|_{L^0}$ к жордановой нормальной форме, видим, что из соотношения (8.1.5) следует равенство нулю всех симметрических многочленов от собственных значений оператора $\operatorname{ad}(x)|_{L^0}$. Тогда характеристический многочлен оператора $\operatorname{ad}(x)|_{L^0}$ имеет лишь нулевые корни, т. е. оператор $\operatorname{ad}(x)|_{L^0}$ нильпотентен. Таким образом, операторы $\operatorname{ad}(x)|_{L^0}$ нильпотентны при всех $x \in L^0$; следовательно, алгебра Ли L^0 нильпотентна. Наконец, подалгебра Ли H содержится в L^0 и $L(L^0, 0) \subset L(H, 0) = L^0$. Отсюда следует, что $L(L^0, 0) = L^0$, т. е. L^0 — подалгебра Картана в L.

V. *Алгебра Ли L содержит по крайней мере одну подалгебру Картана.*

Доказательство. Пусть h — регулярный элемент в L, H — одномерная подалгебра Ли, порожденная элементом h. Применяя IV, получаем подалгебру Картана L^0 в L.

Зафиксируем некоторую подалгебру Картана H в алгебре Ли L. Тогда

$$L = H + \sum_{\alpha\neq 0} L^\alpha. \tag{8.1.6}$$

Положим

$$\nu(\alpha) = \dim L^\alpha \tag{8.1.7}$$

для $\alpha \neq 0$.

VI. *Пусть* $h,\, h' \in H$; *тогда*

$$(h,\, h') = \sum_{\alpha} \nu(\alpha)\, \alpha(h)\, \alpha(h'), \tag{8.1.8}$$

где $\nu(\alpha)$ *определены соотношением* (8.1.7).

Доказательство. Ввиду очевидного соотношения $(h,\, h') = (1/4)\{(h + h',\, h"h') - (h - h',\, h - h')\}$ достаточно доказать соотношение (8.1.8) при $h = h'$. Оператор $\operatorname{ad} h$ имеет в подпространстве L^{α} единственное собственное значение $\alpha(h)$, поэтому $\operatorname{tr}((\operatorname{ad} h)^2) = \sum\limits_{\alpha} \nu(\alpha)\, \alpha(h)^2$.

VII. *Пусть* α *и* β — *корни алгебры Ли* L *относительно* H *и пусть* $\alpha \neq 0$. *Существуют такое наибольшее целое неположительное число* $p = p_{\beta\alpha}$ *и такое наименьшее целое неотрицательное число* $q = q_{\beta\alpha}$, *что*

$$[L^{-\alpha},\, L^{\beta+p\alpha}] = 0 \quad \textit{и} \quad [L^{\alpha},\, L^{\beta+q\alpha}] = 0. \tag{8.1.9}$$

Доказательство. Если

$$[L^{\alpha},\, L^{\beta}] \neq (0), \quad [L^{\alpha},\, L^{\beta+\alpha}] \neq (0),\ \ldots,\, [L^{\alpha},\, L^{\beta+q\alpha}] \neq (0),$$

то в силу II, $\beta,\ \beta + \alpha,\ \ldots,\, \beta + (q+1)\,\alpha$ — корни. Поскольку число корней конечно, то $[L^{\alpha},\, L^{\beta+q\alpha}] = (0)$ при некотором $q \geqslant 0$; пусть $q_{\beta\alpha}$ — наименьшее из таких q. Аналогично доказывается существование наибольшего числа $p = p_{\beta\alpha} \leqslant 0$, для которого $[L^{-\alpha},\, L^{\beta+p\alpha}] = (0)$.

VIII. *Пусть* $\alpha,\ \beta,\ p = p_{\beta\alpha},\ q = q_{\beta\alpha}$ — *те же, что в предложении* VII. *Введем рациональное число* $r_{\beta\alpha}$, *полагая*

$$r_{\beta\alpha} = \frac{\sum\limits_{k=p}^{q} k\nu(\beta + k\alpha)}{\sum\limits_{k=p}^{q} \nu(\beta + k\alpha)}. \tag{8.1.10}$$

Тогда $\beta(h) = r_{\beta\alpha}\alpha(h)$ *для всех* $h \in [L^{\alpha},\, L^{-\alpha}]$.

Доказательство. Достаточно проверить утверждение предложения VIII для элементов $h \in H$ вида $[x,\, y]$, $x \in L^{\alpha}$, $y \in L^{-\alpha}$. Пусть $V = \sum\limits_{k=p}^{q} L^{\beta+k\alpha}$. Оператор $\operatorname{ad}(x)$ отображает пространство $L^{\beta+k\alpha}$ в подпространство $L^{\beta+(k+1)\,\alpha}$ и переводит $L^{\beta+q\alpha}$ в нуль по условию, поэтому V инвариантно относительно $\operatorname{ad}(x)$. Аналогично доказывается, что V инвариантно относительно $\operatorname{ad}(y)$. Так как $\operatorname{ad}(h) = [\operatorname{ad}(x),\, \operatorname{ad}(y)]$, то V инвариантно относительно $\operatorname{ad}(h)$ и $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(h)) = 0$. Но единственным собственным значением оператора $\mathrm{ad}(h)$ в подпространстве $\beta + k\alpha$ является число $\beta(h) + k\alpha(h)$, следовательно,

$$\sum_{k=p}^{q} \nu(\beta + k\alpha)(\beta(h) + k\alpha(h)) = 0,$$

что равносильно утверждению предложения VIII.

§ 9. Структура полупростых алгебр Ли

9.1. Подалгебры Картана полупростых алгебр Ли. Пусть L — полупростая алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана. Воспользуемся обозначениями и результатами § 8.

Напомним, что форма Киллинга невырождена на L.

I. *Если* $\alpha + \beta \neq 0$, *то подпространства* L^α *и* L^β *ортогональны.*

Доказательство. Если $x \in L^\alpha$, $y \in L^\beta$, то оператор $\mathrm{ad}\, x \,\mathrm{ad}\, y$ переводит всякое подпространство L^γ в подпространство $L^{\gamma+\alpha+\beta}$. Если $\alpha + \beta \neq 0$, то в базисе пространства L, согласованном с разложением L в прямую сумму подпространств L^γ, все диагональные элементы матрицы оператора $\mathrm{ad}\, x \,\mathrm{ad}\, y$ равны нулю, поэтому $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x \,\mathrm{ad}\, y) = 0$, т. е. $(x, y) = 0$.

II. *Подпространства* L^α *и* $L^{-\alpha}$ *двойственны относительно формы Шиллинга* (*т. е. для любого* $x \in L^\alpha$ *существует* $y \in L^{-\alpha}$ *такой, что* $(x, y) \neq 0$ *и для любого* $y \in L^{-\alpha}$ *существует* $x \in L^\alpha$ *такой, что* $(x, y) \neq 0$).

Доказательство. Если элемент $x \in L^\alpha$ ортогонален к подпространству $L^{-\alpha}$, то согласно I элемент x ортогонален к $L = \sum\limits_\alpha L^\alpha$; так как форма Киллинга невырождена, то $x = 0$.

III. $\dim L^\alpha = \dim L^{-\alpha}$.

Доказательство сразу следует из II.

IV. *Ограничение формы Киллинга алгебры Ли* L *на подпространство* H *невырождено.*

Доказательство. Согласно II подпространство $H = L^0$ двойственно себе относительно формы Киллинга.

V. *Алгебра Ли* H *коммутативна*; *если* $r = \dim H$, *то существует* r *линейно независимых корней алгебры Ли* L *относительно* H.

Доказательство. Если максимальное число линейно независимых корней меньше размерности пространства H, то существует такой ненулевой элемент $h \in H$, что $\alpha(h) = 0$ для всех корней α. Но тогда из (8.1.8) следует, что

$$(h, h') = \sum_\alpha \nu(\alpha)\, \alpha(h)\, \alpha(h') = 0 \tag{9.1.1}$$

для всех $h' \in H$, что противоречит невырожденности формы Киллинга на H.

Заметим теперь, что любой корень α обращается в нуль на $[H, H]$ (так как $\alpha([h_1, h_2])\, h = [[h_1, h_2], h] = [h_1, [h_2, h]] - [h_2, [h_1, h]] = (\alpha(h_1)\,\alpha(h_2) - \alpha(h_2)\,\alpha(h_1))\, h = 0$ для всех $h, h_1, h_2 \in H$). Но, как мы только что видели, из условия, что $\alpha(h) = 0$ для всех корней α, следует, что $h = 0$. Итак, $[H, H] = (0)$ и H коммутативна, чем завершается доказательство предложения V.

9.2. Свойства подпространств L^α. Так как форма (x, y) невырождена на H, то для любого линейного функционала λ на H существует единственный элемент $h'_\lambda \in H$ такой, что $\lambda(h) = (h, h'_\lambda)$ при всех $h \in H$. В пространстве H^* линейных функционалов на H можно ввести скалярное произведение, полагая для $\lambda, \mu \in H^*$

$$(\lambda, \mu) = (h'_\lambda, h'_\mu) = \lambda(h'_1) = \mu(h'_\lambda). \tag{9.2.1}$$

Выберем в каждом подпространстве L^α вектор $e_\alpha \neq 0$, собственный для всех операторов $\operatorname{ad} h$, $h \in H$. Тогда для всех $h \in H$

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h)\, e_\alpha. \tag{9.2.2}$$

I. *Если α — ненулевой корень и $x \in L^\alpha$, то*

$$[e_\alpha, x] = (e_\alpha, x)\, h'_\alpha. \tag{9.2.3}$$

Доказательство. Обе части равенства (9.2.3) принадлежат алгебре Ли H, и для любого $h \in H$

$$(h, [e_\alpha, x]) = ([h, e_\alpha], x) = \alpha(h)(e_\alpha, x) = (e_\alpha, x)(h'_\alpha, h),$$

т. е. скалярные произведения обеих частей соотношения (9.2.3) на любой вектор $h \in H$ равны. Поэтому I следует из IV п. 9.1.

II. *Если α — ненулевой корень, то $(\alpha, \alpha) \neq 0$.*

Доказательство. Согласно II п. 9.1 существует такой элемент $x \in L^{-\alpha}$, что $(e_\alpha, x) = 1$. Применяя соотношение (9.2.3), получаем, что $[e_\alpha, x] = h'_\alpha$. Так как $[e_\alpha, x] \in [L^\alpha, L^{-\alpha}]$, то из VII § 8 следует, что для любого корня β существует такое рациональное число $r_{\beta\alpha}$, что $\beta(h'_\alpha) = r_{\beta\alpha}\alpha(h'_\alpha)$. Если $(\alpha, \alpha) = \alpha(h'_\alpha) = 0$, то $\beta(h'_\alpha) = 0$ для любого корня β. Следовательно, $h'_\alpha = 0$ (ср. доказательство предложения V п. 9.1). Но соотношение $h'_\alpha = 0$ противоречит условию $\alpha \neq 0$. Итак, $(\alpha, \alpha) \neq 0$ для ненулевых корней α.

III. *Если α — ненулевой корень, то подпространство L^α одномерно.*

Доказательство. Пусть элемент $x \in L^{-\alpha}$ выбран так, что $[e_\alpha, x] = h'_\alpha$ (см. (9.2.3) и II п. 9.1). Пусть $y \in L^\alpha$. Покажем, что y пропорционален e_α. Положим $y_k = (\operatorname{ad} e_\alpha)^k y$. Так как $e_\alpha \in L^\alpha$, то из II § 8 следует индукцией по k, что $y_k \in L^{(k+1)\,\alpha}$. Найдем $[x, y_k]$. В силу тождества Якоби

$$[x, y_1] = [x, (\operatorname{ad} e_\alpha)\, y] = -[e_\alpha, [y, x]] - [y, [x, e_\alpha]]. \tag{9.2.4}$$

Положим $[x, y] = h$; элемент h принадлежит H согласно II, § 8. Поскольку $[x, e_\alpha] = -h'_\alpha$, то из (9.2.4) заключаем, что

$$[x, y_1] = -\alpha(h)\, e_\alpha - [h'_\alpha, y]. \tag{9.2.5}$$

Повторяя это рассуждение, индукцией по k получаем, что при $k > 1$

$$[x, y_k] = \frac{k(k-1)}{2}\, \alpha(h'_\alpha)\, y_{k-1} - k[h'_\alpha, y_{k-1}]. \tag{9.2.6}$$

Так как число корней алгебры Ли L конечно, то существует наименьшее целое k_0 такое, что $y_k = 0$ (напомним, что $y_k \in L^{(k+1)\,\alpha}$). Если $k_0 \geqslant 2$ и $y_{k_0-1} \neq 0$, то из соотношения (9.2.6) при $k = k_0$ следует, что y_{k_0-1} — собственный вектор для оператора $\operatorname{ad} h'_\alpha$ с собственным значением $(k_0-1)\,\alpha(h'_\alpha)/2$. С другой стороны, $y_{k_0-1} \in L^{k_0\alpha}$, поэтому собственное значение оператора $\operatorname{ad}(h'_\alpha)$, отвечающее y_{k_0-1}, равно $k_0\alpha(h'_\alpha)$. Так как $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$ согласно II и $(k_0-1)/2 \neq k_0$ при $k_0 \geqslant 2$, то мы получили противоречие. Следовательно, $y_{k_0-1} = 0$. В частности, $y_1 = 0$. Поэтому из формулы (9.2.5) получаем равенство

$$[h'_\alpha, y] = -\alpha(h)\, e_\alpha. \tag{9.2.7}$$

Положим $z = \alpha(h'_\alpha)\, y + \alpha(h)\, e_\alpha$. Соотношение (9.2.7) означает, что $[h'_\alpha, z] = 0$, т. е. при $z \neq 0$ z — собственный вектор для оператора $\operatorname{ad} h'_\alpha$ с собственным значением 0. Так как $z \in L^\alpha$ и $\alpha \neq 0$, то это невозможно. Следовательно, $z = 0$, поэтому $\alpha(h'_\alpha)\, y + \alpha(h)\, e_\alpha = 0$. Но $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$, поэтому y пропорционален e_α.

9.3. Серии корней и связанные с ними подалгебры Ли. Пусть α — ненулевой корень алгебры Ли L. Если β — некоторый корень алгебры Ли L, то множество S всех корней вида $\beta + k\alpha$ (k — целое) называется *α-серией корней*.

I. *Подпространство* $L_S = \sum\limits_{\alpha \in S} L^\alpha$ *инвариантно относительно операторов из* $\operatorname{ad} L^\alpha$, $\operatorname{ad} L^{-\alpha}$ *и* $\operatorname{ad} H$.

Доказательство сразу следует из II § 8.

Предложение I позволяет построить подалгебру Ли алгебры Ли L, изоморфную $sl(2)$. Приступим к построению.

II. *Подпространство* $H^\alpha = [L^\alpha, L^{-\alpha}] \subset H$ *одномерно для любого ненулевого корня* α.

Доказательство сразу следует из III п. 9.2.

III. *Существуют векторы* $x_\alpha \in L^\alpha$, $y_\alpha \in L^\alpha$, $h_\alpha \in [L^\alpha, L^{-\alpha}] \subset H$ *такие, что*

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \quad [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha, \quad [x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha. \tag{9.3.1}$$

Доказательство. Согласно II п. 9.2 $(\alpha, \alpha) = \alpha(h'_\alpha) \neq 0$ и согласно I п. 9.2 $h'_\alpha \in [L^\alpha, L^{-\alpha}]$. Умножая h'_α на подходящий скаляр, получим такой вектор $h_\alpha \in [L^\alpha, L^{-\alpha}]$, что $\alpha(h_\alpha) = 2$. Так как $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha})\, h'_\alpha$ (см. (9.2.3)) и $(e_\alpha, e_{-\alpha}) \neq 0$ ввиду II п. 9.1, то $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \neq 0$ и пропорционален h_α. Умножая $e_{-\alpha}$ на подходящий скаляр k, получим $[e_\alpha, ke_{-\alpha}] = h_\alpha$. Положим $x_\alpha = e_\alpha$, $y_\alpha = ke_{-\alpha}$; тогда $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Применяя (9.2.2), видим, что $[h_\alpha, x_\alpha] = \alpha(h_\alpha)\, x_\alpha = 2x_\alpha$; аналогично, так как $y_\alpha \in L^{-\alpha}$, имеем $[h_\alpha, y_\alpha] = (-\alpha)(h_\alpha)\, y_\alpha) = -2y_\alpha$. Заметим для дальнейшего, что

$$h_\alpha = 2h'_\alpha(\alpha, \alpha), \tag{9.3.2}$$

так как $\alpha(h_\alpha) = (2/(\alpha, \alpha))\, \alpha(h'_\alpha) = 2$.

IV. *Линейная оболочка пространств* L^α, $L^{-\alpha}$ *и* H^α $(\alpha \neq 0)$ *образует подалгебру Ли* $L_\alpha \subset L$; *алгебра Ли* L_α *изоморфна* $sl(2)$.

Доказательство. Из I следует, что подпространство L_α является подалгеброй. Рассмотрим теперь алгебру Ли $sl(2)$, образованную квадратными матрицами второго порядка с нулевым следом. Очевидно, что матрицы

$$x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad h = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{9.3.3}$$

образуют базис в $sl(2)$, причем

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y. \tag{9.3.4}$$

Сравнивая соотношения (9.3.4) с соотношениями (9.3.1), видим, что отображение $\xi x + \eta y + \zeta h \to \xi x_\alpha + \eta y_\alpha + \zeta h_\alpha$ $(\xi, \eta, \zeta \in \mathbf{C})$ определяет изоморфизм алгебр Ли $sl(2)$ и L_α.

9.4. Представления алгебры Ли $sl(2)$. В дальнейшем нам понадобятся сведения о свойствах алгебры Ли $sl(2)$ и ее представлений. Перечислим их в предложениях I–III и следующей за ними теореме.

I. а). *Алгебра Ли $sl(2)$ проста.*

б). *Одномерное подпространство H, порожденное элементом h, является подалгеброй Картана в $sl(2)$.*

Доказательство. Пусть I — идеал алгебры Ли $sl(2)$. Если $z \in I$ и $z \neq H$, то элемент $[h, z] \in I$ согласно (9.3.4) является ненулевой линейной комбинацией векторов x и y. Применяя к этому вектору либо $\operatorname{ad} x$, либо $\operatorname{ad} y$, получим ненулевой элемент идеала I, кратный $[x, y] = h$. Итак, $h \in I$ (если $I \neq (0)$); тогда $x = (1/2)\, [h, x] \in I$ и $y = (-1/2)\, [h, y] \in I$, т. е. $I = sl(2)$.

Так как $[z, z] = 0$ для всех z из данной алгебры Ли L, то $r = \min\limits_{z \in L} L(\operatorname{ad} z, 0) \geqslant 1$. Из соотношений (9.3.4) следует, что $L(\operatorname{ad} h, 0) = H$, т. е. h — регулярный элемент алгебры Ли $L = sl(2)$ и H — картановская подалгебра L (см. IV § 8).

Обозначим через α линейный функционал на H, определяемый равенством

$$\alpha(ch) = 2c \tag{9.4.1}$$

для всех $c \in \mathbf{C}$. Пусть π — линейное представление алгебры Ли $sl(2)$ в конечномерном пространстве V. Для всякого линейного функционала λ на H обозначим через V_λ подпространство в V, образованное такими векторами $v \in V$, что $\pi(h)\,v = \lambda(h)\,v$. Если $v \in V_\lambda$, то

$$\pi(h)\,\pi(x)\,v = \pi(x)\,\pi(h)\,v + 2\pi(x)\,v = (\lambda(h) + 2)\,\pi(x)\,v = \\ = ((\lambda + \alpha)(h))\,\pi(x)\,v,$$

т. е. $\pi(x)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$. Аналогично, $\pi(y)V_\lambda \subset V_{\lambda-\alpha}$.

II. $V = \sum V_\lambda$.

Доказательство. Пусть представление π неприводимо. Из соотношений $\pi(x)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$, $\pi(y)V_\lambda \subset V_{\lambda-\alpha}$ следует, что $\sum\limits_\lambda V_\lambda$ — инвариантное подпространство в V. Так как оператор $\pi(h)$ обладает хотя бы одним собственным вектором, то $\sum\limits_\lambda V_\lambda \neq (0)$. Из неприводимости π следует тогда, что $\sum\limits_\lambda V_\lambda = V$. Если π не является неприводимым, то оно разлагается в прямую сумму неприводимых представлений ввиду простоты $sl(2)$ и теоремы Г. Вейля. Поэтому для любого конечномерного представления π имеем $V = \sum\limits_\lambda V_\lambda$.

Пусть π — неприводимое представление алгебры Ли $sl(2)$. Так как число весов ограничения представления π на H конечно, то существует такой вес λ_0, что $\lambda_0 + \alpha$ уже не является весом ограничения представления π на H.

III. *Множество весов ограничения представления π на H есть набор*

$$-\lambda_0, \quad -\lambda_0 + \alpha, \quad -\lambda_0 + 2\alpha, \; \ldots, \lambda_0 - \alpha, \lambda_0. \tag{9.4.2}$$

Для всякого веса λ число $\lambda(h)$ — целое.

Доказательство. Так как $\lambda_0 + \alpha$ не является весом, то

$$\pi(x)V_{\lambda_0} \subset V_{\lambda_0+\alpha} = (0). \tag{9.4.3}$$

Пусть $e_0 \in V_{\lambda_0}$, $e_0 \neq 0$. Положим $e_k = \pi(y)^k e_0$; докажем, что вектор $\pi(x)\,e_{k+1}$ пропорционален e_k. Полагая $\mathrm{e}_{-1} = 0$, видим, что при $k = -1$ утверждение справедливо в силу (9.4.3). Если $\pi(x)\,e_{k+1} = \mu_k e_k$ для всех $k < r$, то

$$\pi(x)\,e_{r+1} = \pi(x)\,\pi(y)\,e_r = \pi(y)\,\pi(x)\,e_r + \pi(h)\,e_r = \\ = \mu_{r-1}\pi(y)\,e_{r-1} + (\lambda_0 - r\alpha)(h)\,e_r = \mu_r 3_r,$$

где

$$\mu_r = \mu_{r-1} - (r\alpha - \lambda_0)(h), \quad \mu_{-1} = 0.$$

Следовательно, ввиду условия $\alpha(h) = 2$ (см. (9.4.1)), имеем

$$\mu_k = -\sum_{r=0}^{k}(r\alpha - \lambda_0)(h) = -(k+1)(k\alpha(h)/2 - \lambda_0(h)) = \\ = (k+1)(\lambda_0(h) - k). \quad (9.4.4)$$

Так как пространство V конечномерно, то существует такое j, что $e_j \neq 0$, $e_{j+1} = 0$ (иначе $0 \in e_k \in V_{\lambda_0 - k\alpha}$ при всех k, где $V_{\lambda_0 - k\alpha}$ линейно независимы, что противоречит конечномерности V). Тогда $\mu_j e_j = \pi(x)\, e_{j+1} = 0$, поэтому $\mu_j = 0$ и из (9.4.4) следует, что $\lambda_0(h) = j$, так что $\lambda_0(h)$ — целое неотрицательное число; следовательно, в силу (9.4.4)

$$\mu_k = (k+1)(j-k). \quad (9.4.5)$$

Положим

$$f_k = (j-k)!\, e_k, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, j. \quad (9.4.6)$$

Тогда в силу (9.4.5)

$$\left.\begin{aligned} &\pi(x)\, f_k = k f_{k-1}, \quad \pi(y)\, f_k = (j-k)\, f_{k+1}, \\ &\pi(h)\, f_k = (\lambda_0 - k\alpha)(h)\, f_k = (j-2k)\, f_k; \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, j. \end{aligned}\right\} \quad (9.4.7)$$

Из соотношений (9.4.7) следует, что подпространство, натянутое на векторы $f_0, f_1, \ldots, f_j$, инвариантно относительно представления π. Так как π, по условию, неприводимо, то векторы $f_0, f_1, \ldots, f_j$ образуют базис в V. Так как $f_0 \in V_{\lambda_0}$ и $f_k \in V_{\lambda_1 - k\alpha}$, то совокупность весов, связанных с представлением π, есть $\{\lambda_0, \lambda_0 - \alpha, \ldots, \lambda_0 - j\alpha\}$. Но $(\lambda_0 - j\alpha)(h) = \lambda_0(h) - 2j = j - 2j = -j = -\lambda_0(h)$, поэтому

$$\lambda_0 - j\alpha = -\lambda_0. \quad (9.4.8)$$

Наконец, для любого веса $\lambda = \lambda_0 - k\alpha$ число $\lambda(h) = \lambda_0(h) - k\alpha(h) = j - 2k$ есть целое число.

Т е о р е м а. *Пусть π — линейное представление алгебры Ли $sl(2)$ в конечномерном пространстве V. Тогда*

1) $V = \sum\limits_{\lambda} V_\lambda$ *и для всякого веса λ число $\lambda(h)$ — целое*;

2) *для всякого веса λ существует такой вес λ', что $\lambda(h) = -\lambda'(h)$ и* $\dim V_\lambda = \dim V_{\lambda'}$;

3) *если λ и $\lambda + \alpha$ — веса, то $\pi(x)V_\lambda \neq (0)$, если λ и $\lambda - \alpha$ — веса, то $\pi(y)V_\lambda \neq (0)$*;

4) *если представление π неприводимо, $v \in V_\lambda$, s — наименьшее неотрицательное целое число такое, что $\pi(x)^{s+1}v = 0$, а t — наименьшее неотрицательное целое число такое, что $\pi(y)^{t+1}v = 0$, то*

$$\pi(x)\,\pi(y)\, v = (s+1)\, tv; \quad \pi(y)\,\pi(x)\, v = (t+1)\, sv. \quad (9.4.9)$$

Доказательство. Так как всякое представление алгебры Ли $sl(2)$ вполне приводимо, то достаточно доказать теорему для неприводимого представления. Утверждение 1) следует из II и III; утверждение 2) следует из III, если учесть, что подпространства V_λ одномерны и из (9.4.8) следует, что $-(\lambda_0 - k\alpha) = \lambda_0 - (j-k)\,\alpha$, $0 \leqslant k \leqslant j$. Докажем свойство 3). Пусть $\lambda = \lambda_0 - k\alpha$ — вес представления π. Если $\lambda + \alpha$ — вес, то $k \geqslant 1$ и $\pi(x)\,f_k \neq 0$ согласно III. Так как $f_k \in V_\lambda$, то $\pi(x)V_\lambda \neq (0)$. Если $\lambda - \alpha$ — вес, то $k \leqslant j-1$ и $\pi(y)\,f_k \neq 0$.

Докажем свойство 4). Достаточно рассмотреть случай $v = f_k$. Тогда $s = k$ и $t = j-k$ и из формул (9.4.7) следует, что

$$\pi(x)\,\pi(y)\,f_k = (j-k)\,\pi(x)\,f_{k+1} = (k+1)(j-k)\,f_k = (s+1)\,tf_k,$$
$$\pi(y)\,\pi(x)\,f_k = k\pi(y)\,f_{k-1} = k(j+1-k)\,f_k = s(t+1)\,f_k,$$

что доказывает справедливость равенств (9.4.9).

Замечание. При любом неотрицательном целом j формулы (9.4.7) определяют представление π алгебры Ли $sl(2)$ в пространстве V с базисом $f_0, f_1, \ldots, f_j$. Это представление неприводимо. Действительно, если W — инвариантное подпространство представления π, то W инвариантно, в частности, относительно оператора $\pi(h)$, и потому порождено собственными векторами оператора $\pi(h)$, лежащими в W. Но все собственные векторы оператора $\pi(h)$ суть $f_0, f_1, \ldots, f_j$. Если $f_k \in W$, то $f_l \in W$ при любом $l = 0, \ldots, j$, так как f_l кратен $\pi(x)^{k-l}f_k$ при $k \geqslant l$ и f_l кратен $\pi(y)^{l-k}f_k$ при $l \geqslant k$. Следовательно, $W = V$, т. е. π неприводимо.

9.5. Структура α-серий корней. Применим полученные результаты к представлению π алгебры Ли L_α, изоморфной $sl(2)$, где π есть ограничение присоединенного представления алгебры Ли L на подалгебру L_α и подпространство L_S (см. I п. 9.3).

I. *Пусть α, β — корни алгебры Ли L, причем $\alpha \neq 0$. Тогда α-серия S, содержащая β, состоит из всех корней вида $\beta + k\alpha$, где $p \leqslant k \leqslant q$. При этом*

$$-2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) = p + q. \tag{9.5.1}$$

Доказательство. Заметим сначала, что $\alpha(h'_0) \neq 0$, поэтому различные корни из одной α-серии принимают различные значения на элементе h'_α. Пусть H^α — подпространство в H, порожденное вектором h'_α. Каждый корень γ алгебры Ли L определяет при ограничении на H^α некоторый вес представления π алгебры Ли $sl(2)$. Так как корневые подпространства L^α одномерны при $\alpha \neq 0$, то представление π неприводимо либо является суммой неприводимого представления и нулевого представления в некотором подпространстве $W \subset L_S \cap H$ (что возможно лишь в случае, если α-серия S содержит нулевой корень). Тогда вид α-серии S следует из предложения III п. 9.4. Так как ограничения корней $\beta + q\alpha$ и $\beta + p\alpha$

на H^α совпадают с λ_0 и $-\lambda_0$ соответственно, то $(\beta+q\alpha)(h'_\alpha)=\lambda_0(h'_\alpha)$, $(\beta+p\alpha)(h'_\alpha)=-\lambda_0(h'_\alpha)$. Складывая эти равенства, получаем

$$2\beta(h'_\alpha)+(p+q)(\alpha,\alpha)=0;$$

отсюда следует (9.5.1).

II. *Если α, β и $\alpha+\beta$ — ненулевые корни, то* $[L^\alpha, L^\beta]=L^{\alpha+\beta}$.

Доказательство. Нам известно, что $[L^\alpha, L^\beta]\subset L^{\alpha+\beta}$ и $\dim L^{\alpha+\beta}=1$. С другой стороны, из свойства 3) теоремы п. 9.4 следгет, что $\mathrm{ad}(e_\alpha)L^\beta\neq(0)$.

III. *Единственные корни, пропорциональные корню $\alpha\neq 0$, суть* 0, α, $-\alpha$.

Доказательство. Пусть множество $\{m\alpha\}$, где m — целое число, $p\leqslant m\leqslant q$, образует α-серию корней, содержащую α. Так как $[L^\alpha, L^\alpha]=0$ и $[L^{-\alpha}, L^{-\alpha}]=0$, то из II следует, что 2α и -2α не являются корнями. Так как $(-\alpha)$ — корень (см. II п. 9.1), то $p=-1$, $q=1$. Если $\beta=c\alpha$ — корень алгебры Ли, где c — комплексное число, то $(2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)=2c$ должно быть целым числом в силу (9.5.1). Следовательно, если c не целое, то $c=k+1/2$, где k — целое. Согласно (9.5.1) для α-серии корня β имеем $p+q=-2k-1$; так как $p\leqslant 0\leqslant q$, где p и q — целые, то $p\leqslant -k-1$, $q\geqslant -k$. Следовательно, $\alpha/2$ и $-\alpha/2$ являются корнями алгебры Ли L; тогда $\alpha=2(\alpha/2)$ не может быть корнем по доказанному выше. Полученное противоречие показывает, что c — целое число, в противоречии с предположением. Это завершает доказательство предложения III.

9.6. Положительные и простые корни. Обозначим через H_0 множество линейных комбинаций векторов H'_α с вещественными коэффициентами. Тогда H_0 — векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел; очевидно, $H_0\subset H$.

I. *Размерность пространства H_0 над $\mathbf{R}$ равна размерности H над $\mathbf{C}$. Ограничение формы Киллинга на H_0 положительно определено и принимает вещественные значения. Алгебра Ли H равна прямой сумме H_0+iH_0.*

Доказательство. Пусть Δ — множество ненулевых корней алгебры Ли L относительно H. Из VI § 8 и III п. 9.1 следует, что

$$(h, h')=\sum_{\beta\in\Delta}\beta(h)\,\beta(h') \tag{9.6.1}$$

для всех $h, h'\in H$. В частности, $(h'_\alpha, h'_\alpha)=\sum\limits_{\beta\in\Delta}(\beta(h'_\alpha))^2=$ $=\sum\limits_{\beta\in\Delta}r^2_{\beta\alpha}(\alpha,\alpha)^2$. С другой стороны, $(h'_\alpha, h'_\alpha)=(\alpha,\alpha)$, поэтому $(\alpha,\alpha)=\Big(\sum\limits_{\beta\in\Delta}r^2_{\beta\alpha}\Big)^{-1}$. Таким образом, (α,α) — положительное число.

Если $p_{\beta\alpha}$, $q_{\beta\alpha}$ — целые числа, определяемые в условии предложения I п. 9.5, то $(\beta(h'_\alpha))^2 = \frac{(p_{\beta\alpha}+q_{\beta\alpha})^2}{4}(\alpha,\alpha)^2$ согласно формуле (9.5.1). Подставляя это равенство в (9.6.1), получаем после очевидных преобразований, что $(\alpha,\alpha) = 4\Big(\sum\limits_{\beta\in\Delta}(p_{\beta\alpha}+q_{\beta\alpha})^2\Big)^{-1}$. При $\beta\neq\alpha$ имеем

$$(h'_\alpha, h'_\beta) = (\beta,\alpha) = -(p_{\beta\alpha}+q_{\beta\alpha})(\alpha,\alpha)/2;$$

это число вещественно, так как (α,α) вещественно. Если $x\in H_0$, то $x = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} c_\alpha h'_\alpha$, где c_α — вещественные числа. Тогда $\beta(x) = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \beta(h'_\alpha) = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} c_\alpha(\beta,\alpha)$ есть вещественное число, т. е. любой корень принимает на H_0 вещественные значения. Кроме того, при $x\in H_0$ число

$$(x,x) = \sum_{\beta\in\Delta}(\beta(x))^2$$

(см. 9.6.1)) неотрицательно; если $(x,x)=0$, то $\beta(x)=0$ при всех $\beta\in\Delta$, поэтому $x=0$ (см. IV п. 9.1).

Докажем, что $\dim_{\mathbf{R}} H_0 = \dim_{\mathbf{C}} H$. Достаточно показать, что всякая система $\{h'_{\alpha_i}\}$, линейно независимая над $\mathbf{R}$, линейно независима над $\mathbf{C}$. Пусть $\sum\lambda_i h'_{\alpha_i} = 0$ для некоторых $\lambda_i\in\mathbf{C}$, не равных нулю одновременно. Тогда $\sum\lambda_i(h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_j}) = 0$. Это — система однородных линейных уравнений относительно λ_i с вещественными коэффициентами $(h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_j})$. Если такая система имеет комплексное ненулевое решение, то она имеет вещественное ненулевое решение; это невозможно, ибо $\{h'_{\alpha_i}\}$ линейно независима над $\mathbf{R}$.

Очевидно, что $H_0\cap iH_0 = (0)$, с другой стороны, $\dim_{\mathbf{C}}(H_0+iH_0) = \dim_{\mathbf{R}} H_0$, но $\dim_{\mathbf{R}} H_0 = \dim_{\mathbf{C}} H$, поэтому $H_0+iH_0 = H$. Это завершает доказательство предложения I.

Множество M называется *упорядоченным при помощи отношения* $<$, если для любых двух элементов a, b этого множества имеет место одно и только одно из соотношений $a<b$, $b<a$ или $a=b$, причем из соотношений $a<b$ и $b<c$ следует, что $a<c$. Соотношения $a<b$ и $b>a$ равносильны по определению.

Конечномерное вещественное векторное пространство V называется *упорядоченным векторным пространством*, если V является упорядоченным множеством, причем отношение порядка $<$ удовлетворяет следующим условиям:

а) если $x, y\in V$, $x>0$, $y>0$, то $x+y>0$;

б) если $x\in V$, $x>0$, a — положительное вещественное число, то $ax>0$.

Элемент x называется *положительным*, если $x>0$.

Пусть теперь $e_1, \ldots, e_n$ — базис вещественного векторного пространства V. Положим $x > y$ для $x, y \in V$, если $x - y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$ и первое ненулевое число в последовательности $a_1, \ldots, a_n$ положительно. Такое упорядочение называется *лексикографическим упорядочением* пространства V относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$.

II. *Векторное пространство V, снабженное лексикографическим упорядочением относительно некоторого базиса пространства V, является упорядоченным векторным пространством.*

Доказательство этого утверждения элементарно и предоставляется читателю.

Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство, V^* — пространство линейных функционалов на V, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V^*, *биортогональный* $e_1, \ldots, e_n$ $\left(\text{т. е. } f_j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}\right)$. Лексикографическое упорядочение пространства V^* относительно базиса $f_1, \ldots, f_n$ называется *лексикографическим упорядочением относительно базиса* $e_1, \ldots, e_n$.

Таким образом, при лексикографическом упорядочении пространства V^* относительно $e_1, \ldots, e_n$ мы говорим, что $f > g$ для $f, g \in V^*$, если $f(e_i) = g(e_i)$ для $i = 1, \ldots, k$ и $f(e_{k+1}) > g(e_{k+1})$.

Пусть $h_1, \ldots, h_r$ — какой-нибудь базис в пространстве H_0. Введем в пространстве H_0^* линейных функционалов на H_0 лексикографическое упорядочение относительно базиса $h_1, \ldots, h_r$.

Корень называется *положительным*, если он является положительным элементом в H_0^*. Положительный корень называется *простым*, если его нельзя представить в виде суммы двух положительных корней.

Очевидно, что $\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $0 > -\alpha$, поэтому множество всех ненулевых корней Δ есть объединение $\Delta_+ \cup (-\Delta_+)$, где Δ_+ — множество положительных корней.

III. *Если $\dim H = r$, то существует ровно r простых корней $\alpha_1, \ldots, a_r$, которые образуют базис в пространстве H_0^*. Любой корень β представим в виде суммы $\sum m_i \alpha_i$, где m_i — целые числа одного знака.*

Доказательство. Покажем, что простые корни линейно независимы. Заметим сначала, что если α_i, α_j — простые корни, то их разность $\alpha_i - \alpha_j$ не является корнем. Действительно, если $\alpha_i - \alpha_j = \beta \in \Delta$, то либо $\beta > 0$, и тогда равенство $\alpha_i = \alpha_j + \beta$ противоречит простоте α_i, либо $\beta < 0$, и равенство $\alpha_j = \alpha_i - \beta$ противоречит простоте α_j. Тогда из I п. 9.5 следует для $\beta = \alpha_i$, $\alpha = \alpha_j$, что

$$-2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = q \geqslant 0, \tag{9.6.2}$$

так как $p = 0$ по доказанному. Итак, $(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0$.

Предположим теперь, что система простых корней линейно зависима. Тогда для некоторых неотрицательных чисел a_i, b_j должно выполняться соотношение $\sum(a_i - b_i)\,\alpha_i = 0$, следовательно, $\sum\limits_i a_i\alpha_i = \sum\limits_j b_j\alpha_j > 0$, где простые корни, входящие в левую и правую части равенства, различны. Пусть $\gamma = \sum\limits_i a_i\alpha_i$; тогда

$$(\gamma, \gamma) = \left(\sum_i a_i\alpha_i, \sum_j b_j\alpha_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j(\alpha_i, \alpha_j).$$

Так как $(\gamma, \gamma) \geqslant 0$, $a_i b_j \geqslant 0$, $(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0$, то равенство возможно лишь в случае $(\gamma, \gamma) = 0$, откуда $\gamma = 0$.

Покажем, что любой корень $\beta > 0$ можно разложить в сумму простых корней с целыми неотрицательными коэффициентами. Это очевидно для корня, который является минимальным элементом в множестве Δ_+ относительно рассматриваемого упорядочения. Если $\beta > 0$ не минимален, то он либо прост — и тогда утверждение очевидно, либо разлагается в сумму $\beta = \gamma + \delta$, где γ, δ — положительные корни. Очевидно, что $\gamma < \beta$, $\delta < \beta$; поэтому, предположив, что любой положительный корень, строго меньший β, представи́м в виде $\beta = \sum m_i\alpha_i$ с неотрицательными целыми коэффициентами, мы завершим доказательство по индукции.

Наконец, положительные корни порождают пространство H^* (например, ввиду I), поэтому простые корни также порождают это пространство. Обозначим систему простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ через Π. Целые числа

$$n_{ij} = -2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i) \tag{9.6.3}$$

называются *числами Картана*.

IV. *Система* Δ_+ *положительных корней однозначно восстанавливается по системе* Π *простых корней.*

Доказательство. Из III следует, что любой положительный корень β прост или представляется в виде $\beta = \gamma + \alpha_i$, где γ — положительный корень, α_i — простой корень. Действительно, пусть $\beta = \sum m_i\alpha_i$, где m_i — неотрицательные целые числа. Так как $(\beta, \beta) = \sum m_i(\beta, \alpha_i) > 0$ и $m_i \geqslant 0$, то хотя бы при одном i имеем $(\beta, \alpha_i) > 0$. Тогда из I п. 9.5 следует, что

$$p_{\beta\alpha_i} + q_{\beta\alpha_i} = -2(\beta, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) < 0;$$

поэтому $p_{\beta\alpha_i} < 0$; следовательно, $\gamma = \beta - \alpha_i$ является корнем. При этом либо $\gamma = 0$, т. е. $\beta = \alpha_i$ — простой корень, либо $\gamma > 0$, так как если $\gamma < 0$, то корень $\alpha_i = \beta + (-\gamma)$ не является простым.

Найдем теперь те выражения вида $\Sigma m_i\alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа, которые являются корнями. Назовем *порядком* линейной комбинации $\Sigma m_i\alpha_i$ натуральное число $m = \Sigma m_i$. Линейные комбинации порядка 1 суть корни α_i. Пусть уже найдены все корни порядка $\leqslant m$. Каждый корень порядка $m+1$ представи́м в виде $\gamma+\alpha_i$, где γ — корень порядка m. Поэтому достаточно определить, какие из сумм $\gamma+\alpha_i$ являются корнями. Пусть $\gamma \neq \alpha_i$. Покажем, что α_2-серия, содержащая γ, состоит только из положительных корней. Действительно, $\gamma = \sum\limits_{j\neq i} m_j\alpha_j + m_i\alpha_i$, где хотя бы одно из чисел m_j положительно. Поэтому из III следует, что вектор $\gamma + k\alpha_i = \sum\limits_{j\neq i} m_j\alpha_j + (m_i+k)\,\alpha_i$ может являться корнем только в том случае, если $m_i + k \geqslant 0$; тогда $\gamma + k\alpha_i > 0$. Далее, если $k \leqslant 0$, то выражение $\gamma + k\alpha_i$ имеет порядок $m + k \leqslant m$, но все такие корни нам известны по предположению индукции. Следовательно, нам известно число p, определенное в предложении I п. 9.5. Соотношение (9.5.1) принимает вид

$$p + q = -2(\gamma,\, \alpha_i)/(\alpha_i,\, \alpha_i);$$

таким образом, мы можем определить число q. Вектор $\gamma+\alpha_i$ является корнем тогда и только тогда, когда $q \geqslant 1$.

Говорят, что система простых корней Π *распадается*, если $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$, где множества Π' и Π'' не пусты и подпространства H' и H'' пространства H, порожденные векторами $h'_{\alpha'}$, $\alpha' \in \Pi'$, и $h'_{\alpha''}$, $\alpha'' \in \Pi''$, соответственно, ортогональны относительно формы Киллинга.

V. *Пусть L — полупростая алгебра Ли. Алгебра Ли L проста тогда и только тогда, когда система простых корней алгебры Ли L не распадается.*

Доказательство. Пусть $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ и $H' \perp H''$. Обозначим через Δ'_+ множество положительных корней вида $\sum m_i\alpha_i$, где m_i — неотрицательные целые числа, $\alpha_i \in \Pi'$; аналогично определим Δ''_+. Если $\alpha' \in \Delta'_+$, то $h'_{\alpha'} = \sum m_i h'_{\alpha_i} \in H'$; аналогично, если $\alpha'' \in \Delta''_+$, то $h'_{\alpha''} \in H''$, поэтому любые два корня: $\alpha' \in \Delta'_+$, $\alpha'' \in \Delta''_+$, взаимно ортогональны. Разность $\alpha' - \alpha''$ не может быть корнем, так как $\alpha' - \alpha'' = \sum m_i\alpha_i - \sum n_j\beta_j$, где $\alpha_i \in \Delta'_+$, $\beta_j \in \Delta''_+$, $m_i \geqslant 0$, $n_j \geqslant 0$, в то время как всякий корень должен представляться в виде линейной комбинации простых корней с коэффициентами одного знака. С другой стороны, из предложения I п. 9.5 следует, что для α''-серии, содержащей α', имеем $p + q = -2(\alpha',\, \alpha'')/(\alpha'',\, \alpha'') = 0$; так как $p = 0$ по предыдущему, то $q = 0$, т. е. $\alpha' + \alpha''$ — не корень. Следовательно, всякий положительный корень принадлежит либо ${\Delta_+}'$, либо Δ''_+, т. е. $\Delta = \Delta'_+ \cup \Delta''_+$.

Положим $L' = H' + \sum\limits_{\alpha\in\Delta'_+} (L^\alpha + L^{-\alpha})$. Если $\alpha, \beta \in \Delta'_+$, то $\alpha \pm \beta \in \Delta'_+ \cup (-\Delta'_+)$. Кроме того, $[H',\, L^\alpha] \subset L^\alpha$ и $[L^\alpha,\, L^{-\alpha}] = \{\mathbf{C}h'_\alpha\} \subset H'$. Следовательно, L' — подалгебра Ли в L. Определим аналогично подалгебру L''. Поскольку $\pm\alpha' \pm \alpha''$ — не корень, то $[L^{\pm\alpha'},\, L^{\pm\alpha''}] = 0$. Кроме того, $[h'_{\alpha'},\, e_{\alpha''}] = (\alpha',\, \alpha'')\, e_{\alpha''} = 0$, ибо $(\alpha',\, \alpha'') = 0$; поэтому $[H',\, L^{\pm\alpha''}] = 0$; аналогично, $[H'',\, L^{\pm\alpha'}] = 0$. Так как H коммутативна, то $[H', H''] = 0$. Следовательно, $[L', L''] = 0$, т. е. алгебра Ли L разлагается в прямую сумму подалгебр Ли L' и L''; следовательно, L не проста.

Предположим теперь, что L не проста. Тогда $L = L' + L''$, где L' и L'' — идеалы в L. Поэтому вектор $e_\alpha \in L^\alpha$ однозначно представляется в виде суммы $e_\alpha = e'_\alpha + e''_\alpha$, где $e'_\alpha \in L'$, $e''_\alpha \in L''$. Если $h \in H$, то

$$0 = [h, e_\alpha] - \alpha(h)\, e_\alpha = [h, e'_\alpha] - \alpha(h)\, e'_\alpha + [h, e''_\alpha] - \alpha(h)\, e''_\alpha.$$

Так как $[h, e'_\alpha] \in L'$, $[h, e''_\alpha] \in L''$, то $[h, e'_\alpha] - \alpha(h)\, e'_\alpha = 0$, $[h, e''_\alpha] - \alpha(h)\, e''_\alpha = 0$. Отсюда следует, что e'_α и e''_α лежат в L^α. Но $\dim L^\alpha = 1$, а векторы e'_α, e''_α ортогональны; поэтому либо $e'_\alpha = 0$, либо $e''_\alpha = 0$. Если $e''_\alpha = 0$, то $L^\alpha \subset L'$. Так как L' ортогонально L'', то $e_{-\alpha} \notin L''$ согласно II п. 9.1, поэтому $e_{-\alpha} \in L'$ и $L_{-\alpha} \subset L'$. Далее, $h'_\alpha = -[e_\alpha, e_{-\alpha}] \in L'$. Аналогично, если $e'_\alpha = 0$, то $L^\alpha \subset L''$, $L^{-\alpha} \subset L''$, $h'_\alpha \in L''$.

Обозначим через Δ' (соответственно Δ'') множество таких корней α, что $L^\alpha \subset L'$ (соответственно $L^\alpha \subset L''$). Если $\alpha \in \Delta'$, $\beta \in \Delta''$, то $(\alpha, \beta) = (h'_\alpha, h'_\beta) = 0$, так как $(L', L'') = 0$. Тогда $\Pi = (\Pi \cap \Delta') \cup (\Pi \cap \cap \Delta'')$ и подпространства $H' \subset L'$ и $H'' \subset L''$ ортогональны. Очевидно также, что $H = (H \cap L') + (H \cap L'')$. Этим завершается доказательство предложения V.

9.7. Базис Вейля в полупростой алгебре Ли. Пусть $\{h_1, \ldots \ldots, h_r\}$ — базис в H. Дополняя этот базис векторами $e_\alpha \in L^\alpha$ для всех ненулевых корней α алгебры Ли L, получаем базис в L. Можно считать, что векторы e_α выбраны так, что $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$. Тогда справедливы соотношения

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h)\, e_\alpha; \tag{9.7.1}$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = -h'_\alpha; \tag{9.7.2}$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha+\beta \neq 0 \text{ не является корнем},\\ N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \text{— ненулевой корень}; \end{cases} \tag{9.7.3}$$

$$(h, h'_\alpha) = \alpha(h). \tag{9.7.4}$$

Положим $N_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha + \beta \neq 0$ не является корнем. Из формул (9.7.1)–(9.7.4) следует, что структура алгебры Ли L полностью определяется числами $N_{\alpha\beta}$. Укажем некоторые соотношения между этими числами.

I. а). *Для любых корней α, β имеем $N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$.*

б). *Пусть α, β, γ — ненулевые корни, причем $\alpha+\beta+\gamma = 0$. Тогда*

$$N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\gamma} = N_{\gamma,\alpha}. \tag{9.7.5}$$

в). *Пусть α, β, γ, δ — ненулевые корни, причем $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$, но попарные суммы корней α, β, γ, δ не равны нулю. Тогда*

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} + N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta} = 0. \tag{9.7.6}$$

Доказательство. Так как $[e_\alpha, e_\beta] = -[e_\beta, e_\alpha]$, то $N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta} = -N_{\beta\alpha}e_{\alpha+\beta}$. Если $\alpha+\beta \neq 0$ — корень, то $e_{\alpha+\beta} \neq 0$ и $N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha}$. Если $\alpha+\beta \neq 0$ — не корень, то $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = 0$. Это доказывает утверждение а).

Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ — корни, и $\alpha+\beta+\gamma = 0$. Тогда $[e_\beta, e_\gamma] = N_{\beta\gamma}e_{\beta+\gamma} = N_{\beta\gamma}e_{-\alpha}$, поэтому $[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] = N_{\beta\gamma}[e_\alpha, e_{-\alpha}] = -N_{\beta\gamma}h'_\alpha$. Из тождества Якоби для e_α, e_β, e_γ следует, что

$$N_{\beta\gamma}h'_\alpha + N_{\gamma\alpha}h'_\beta + N_{\alpha\beta}h'_\gamma = 0,$$

откуда

$$N_{\beta\gamma}\alpha + N_{\gamma\alpha}\beta + N_{\alpha\beta}\gamma = 0.$$

С другой стороны, $\alpha+\beta+\gamma = 0$. Если соотношение (9.7.5) не выполняется, то корни α, β, γ пропорциональны одному из них; например, α. Тогда либо $\beta = -\alpha$, либо $\gamma = -\alpha$. В любом случае один из корней равен нулю, что противоречит предположению. Следовательно, равенство (9.7.5) выполняется.

Наконец, пусть α, β, γ, δ — ненулевые корни с ненулевыми попарными суммами; пусть $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$. Тогда $[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] = N_{\beta\gamma}[e_\alpha, e_{\beta+\gamma}] = N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\beta+\gamma}e_{-\delta}$, так как $\beta+\gamma \neq 0$ и $\alpha+\beta+\gamma = -\delta$. Если $N_{\beta\gamma} \neq 0$, то $\beta+\gamma$ — корень; применяя (9.7.5), получаем равенство $N_{\alpha,\beta+\gamma} = N_{\delta\alpha} = -N_{\alpha\delta}$. Отсюда следует, что

$$[e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] = -N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}e_{-\delta},$$

и из тождества Якоби для e_α, e_β, e_γ получаем соотношение (9.7.6). Если все попарные суммы корней α, β, γ, δ не являются корнями, то (9.7.6) приобретает вид $0 = 0$.

II. *Пусть α, β — ненулевые корни, причем $\alpha+\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$. Если α-серия, содержащая β, состоит из всех векторов вида $\beta + k\alpha$, $p \leqslant k \leqslant q$, то*

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta} = q(1-p)(\alpha, \alpha)/2. \tag{9.7.7}$$

Доказательство. Так как корень β не кратен корню α, то подпространства $L^{\beta+k\alpha}$ одномерны, поэтому представление подалгебры Ли $L_\alpha = L^\alpha + L^{-\alpha} + H^\alpha$ в пространстве $\sum\limits_{k=p}^{q} L^{\beta+k\alpha}$ неприводимо. Воспользуемся утверждением 4) теоремы п. 9.4, т.е. формулами (9.4.9). Если мы положим $x_\alpha = e_\alpha$, $y_\alpha = -2e_{-\alpha}/(\alpha, \alpha)$, то из (9.7.2) и (9.3.2) следует, что для этих x_α и y_α выполняются все соотношения (9.3.1). Тогда из (9.4.9) следует, что

$$\begin{aligned}[e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_\beta]] = -(\alpha, \alpha)\,[y_\alpha, [x_\alpha, e_\beta]]/2 = \\ = -(\alpha, \alpha)((1-p)\,q/2)\,e_\beta.\end{aligned} \tag{9.7.8}$$

С другой стороны,

$$[e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_\beta]] = N_{\alpha\beta}[e_{-\alpha}, e_{\alpha+\beta}] = N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}e_\beta. \tag{9.7.9}$$

Если $\alpha+\beta$ не является корнем, то $q=0$ и $N_{\alpha\beta}=0$ согласно (9.7.3), поэтому равенство (9.7.7) выполняется. Если $\alpha+\beta$ — корень, то, применяя равенство (9.7.5) к корням $-\alpha$, $\alpha+\beta$, $-\beta$, получаем, что

$$N_{-\alpha,\,\alpha+\beta}=N_{-\beta,\,-\alpha}. \tag{9.7.10}$$

Подставляя (9.7.10) в (9.7.9) и сравнивая с (9.7.8), получаем что

$$N_{\alpha\beta}N_{-\beta,\,-\alpha}=-(\alpha,\,\alpha)(1-p)\,q/2; \tag{9.7.11}$$

так как $N_{-\beta,\,-\alpha}=-N_{-\alpha,\,-\beta}$, то из (9.7.11) следует (9.7.7).

III. *Пусть L, L' — простые алгебры Ли, H и H' — подалгебры Картана алгебр Ли L и L' соответственно. Пусть Δ (соответственно Δ') — множество ненулевых корней алгебры Ли L (соответственно L'). Пусть выбраны векторы $e_\alpha\in L^\alpha$ такие, что выполняются соотношения* (9.7.1)–(9.7.4) *с данным набором постоянных $N_{\alpha,\beta}$. Пусть φ — такое линейное взаимно однозначное отображение пространства H_0 на пространство H_0', что сопряженное к φ отображение φ^* отображает систему Δ' на систему Δ. Положим $\alpha'=(\varphi^*)^{-1}\alpha$ для всех $\alpha\in\Delta$. Существуют векторы $e'_{\alpha'}\in(L')^{\alpha'}$, удовлетворяющие условиям* (9.7.1)–(9.7.4) *с постоянными $N_{\alpha',\beta'}=N_{\alpha\beta}$, т. е.*

$$[e'_{\alpha'},\,e'_{\beta'}]=N_{\alpha\beta}e'_{\alpha'+\beta'} \tag{9.7.12}$$

для всех α', $\beta'\in\Delta'$.

Доказательство. Сужения форм Киллинга алгебр Ли L и L' на H_0 и H_0' — положительно определенные вещественные билинейные формы. Эти формы позволяют отождествить H_0 с H_0^* и H_0' с $H_0'^*$, поэтому формы Киллинга на L и L' определяют на вещественных пространствах H_0^* и $H_0'^*$ скалярные произведения. Покажем, что относительно этих скалярных произведений отображение φ^* пространства $H_0'^*$ на пространство H_0^* изометрично. Согласно предложению I п. 9.5 для любых $\alpha,\beta\in\Delta$ выполняется равенство $-2(\beta,\,\alpha)/(\alpha,\,\alpha)=p+q$, где числа p и q определяются условием, что α-серия, содержащая β, состоит из векторов $\beta+k\alpha$, где $p\leqslant k\leqslant q$. Так как φ^* отображает Δ' взаимно однозначно на систему Δ и сохраняет линейные операции, то $p=p'$, $q=q'$, поэтому $-2(\beta,\,\alpha)/(\alpha,\,\alpha)=-2(\beta',\,\alpha')/(\alpha',\,\alpha')$ для всех $\alpha,\beta\in\Delta$, или

$$(\beta,\,\alpha)/(\alpha,\,\alpha)=(\beta',\,\alpha')/(\alpha',\,\alpha') \tag{9.7.13}$$

для всех $\alpha,\beta\in\Delta$. Меняя α и β местами, получаем

$$(\alpha,\,\beta)/(\beta,\,\beta)=(\alpha',\,\beta')/(\beta',\,\beta'). \tag{9.7.14}$$

Из соотношений (9.7.13) и (9.7.14) следует, что если $(\alpha,\,\beta)\neq 0$, то имеет место равенство

$$(\alpha,\,\alpha)/(\alpha',\,\alpha')=(\beta,\,\beta)/(\beta',\,\beta'). \tag{9.7.15}$$

Согласно V п. 9.6 для любых двух корней $\alpha, \beta \in \Delta$ существует цепочка $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \beta$ ненулевых корней алгебры Ли L, удовлетворяющая условию $(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \neq 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда следует, что соотношение (9.7.15) выполняется для всех $\alpha, \beta \in \Delta$. Пусть $(\beta, \beta)/(\beta', \beta') = k$; тогда для любого $\alpha \in \Delta$ имеем

$$(\alpha, \alpha) = k(\alpha', \alpha'), \tag{9.7.16}$$

где коэффициент k не зависит от α. Подставляя равенство (9.7.16) в соотношение (9.7.13), получаем

$$(\alpha, \beta) = k(\alpha', \beta') \tag{9.7.17}$$

для всех $\alpha, \beta \in \Delta$, где постоянная k не зависит от α и β. С другой стороны, из (9.6.1) следует, что

$$(\alpha, \beta) = (h'_\alpha, h'_\beta) = \sum_\gamma \gamma(h'_\alpha)\,\gamma(h'_\beta) = \sum_\gamma (\gamma, \alpha)(\gamma, \beta); \tag{9.7.18}$$

аналогично,

$$(\alpha', \beta') = \sum_{\gamma'} (\gamma', \alpha')(\gamma', \beta'), \tag{9.7.19}$$

подставляя (9.7.17) в (9.7.19), получаем, что $(\alpha, \beta) = k^2(\alpha', \beta')$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$. Следовательно, $k = k^2$; так как $(\alpha, \alpha) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$, то $k = 1$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству существования векторов, удовлетворяющих равенству (9.7.12). Чтобы иметь возможность провести построение этих векторов по индукции, снабдим пространство H_0^* лексикографическим упорядочением, определенным каким-нибудь фиксированным базисом $h_1, \ldots, h_r$. Пусть ρ — положительный корень алгебры Ли L; обозначим через Δ_ρ совокупность всех ненулевых корней α, удовлетворяющих неравенству $-\rho < \alpha < \rho$. Пусть уже построены векторы $e'_{\alpha'} \in L'^{\alpha'}$ для всех $\alpha \in \Delta_\rho$, причем соотношения (9.7.12) выполняются при $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta_\rho$. Построим вектор $e'_{\rho'}$ следующим образом: если ρ — простой корень, то выберем $e'_{\rho'} \neq 0$ произвольно; если ρ не является простым, то корень ρ представим в виде $\rho = \alpha + \beta$, где $\alpha, \beta \in \Delta_\rho$, и в этом случае мы определим вектор $e'_{\rho'}$ так, чтобы для данного разложения $\rho = \alpha + \beta$ соотношение (9.7.12) было выполнено. Определим затем вектор $e'_{\rho'}$ условием $(e'_\rho, e'_{-\rho'}) = -1$.

Если σ — такой положительный корень, что $\rho < \sigma$ и между корнями ρ и σ нет других положительных корней, то $\Delta_\sigma = \Delta_\rho \cup \{\rho, -\rho\}$; таким образом, после построения векторов $e'_{\rho'}$ и $e'_{-\rho'}$ требуемые векторы $e'_{\alpha'} \in L'^{\alpha'}$ построены для всех $\alpha \in \Delta_\sigma$. Пусть $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Delta_\sigma$; определим число $N'_{\gamma', \delta'}$ соотношением $[e'_{\gamma'}, e'_{\delta'}] = N'_{\gamma', \delta'} e'_{\gamma' + \delta'}$. Докажем, что $N_{\gamma, \delta} = N'_{\gamma', \delta'}$; тем самым соотношение (9.7.12) будет доказано для всех $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Delta_\sigma$.

Если γ, δ и $\gamma+\delta$ содержатся в Δ_ρ, то $N_{\gamma,\delta} = N'_{\gamma'\delta'}$ по предположению индукции. Если γ, $\delta \in \Delta_\rho$ и $\gamma+\delta=\rho$, то можно считать, что разложение $\psi = \gamma+\delta$ не совпадает с разложением $\rho = \alpha+\beta$. Тогда $\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)=0$, причем попарные суммы корней α, β, $-\gamma$, $-\delta$ не равны нулю. Согласно I в) справедливо равенство (9.7.6). Поэтому

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\gamma,-\delta} = -N_{\beta,-\gamma}N_{\alpha,-\delta} - N_{-\gamma,\alpha}N_{\beta,-\delta}. \tag{9.7.20}$$

Аналогично получаем в L' равенство

$$N'_{\alpha',\beta'}N'_{-\gamma',-\delta'} = -N'_{\beta',-\gamma'}N'_{\alpha',-\delta'} - N'_{-\gamma',\alpha'}N'_{\beta',-\delta'}. \tag{9.7.21}$$

Так как корни $\beta-\gamma$, $\alpha-\delta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\delta$ содержатся в Δ_ρ, то, применяя предположение индукции, видим, что правые части равенств (9.7.20) и (9.7.21) одинаковы. Кроме того, $N_{\alpha,\beta} = N'_{\alpha',\beta'}$ по определению вектора $e'_{\rho'}$, причем $N_{\alpha\beta} \neq 0$. Отсюда следует, что $N_{-\gamma,-\delta} = N'_{-\gamma',-\delta'}$. Воспользуемся уже доказанной изометричностью отображения φ^*; мы получим, что $(\gamma,\gamma) = (\gamma',\gamma')$, и из II следует, что $N_{\gamma,\delta}N_{-\gamma,-\delta} = q(1-\rho)(\gamma,\gamma)/2 = N'_{\gamma',\delta'}N'_{-\gamma',-\delta'}$, откуда $N_{\gamma,\delta} = N'_{\gamma',\delta'}$. Итак, если $\gamma+\delta=\rho$, то $N'_{\gamma',\delta'} = N_{\gamma\delta}$ и $N'_{-\gamma',-\delta'} = N_{-\gamma,-\delta}$. Если γ, $\delta \in \Delta_\rho$ и $\gamma+\delta = -\rho$, то $-\gamma$, $-\delta \in \Delta_\rho$ и $(-\gamma)+(-\delta)=\rho$; по предыдущему, $N'_{\gamma',\delta'} = N_{\gamma,\delta}$. Наконец, если γ, δ, $-(\gamma+\delta)$ лежат в Δ_σ, то лишь один из этих корней равен $\pm\rho$. Применяя I б), сводим доказательство равенства $N'_{\gamma',\delta'} = N_{\gamma,\delta}$ к случаю $\gamma+\delta = \pm\rho$. Так как положительных корней лишь конечное число, то проведенное выше рассуждение позволяет доказать предложение III по индукции.

IV. *Пусть L, L' — простые алгебры Ли, H и H' — подалгебры Ли L и L' соответственно. Пусть Δ (соответственно Δ') — множество ненулевых корней алгебры Ли L (соответственно L'). Пусть φ — взаимно однозначное линейное отображение пространства H_0 на пространство H'_0 такое, что сопряженное к φ отображение φ^* отображает систему Δ' на систему Δ. Тогда существует изоморфизм f алгебры Ли L на алгебру Ли L', продолжающий φ.*

Доказательство. Выберем $e_\alpha \in L^\alpha$ так, чтобы выполнялись соотношения (9.7.1)–(9.7.4). Построим систему $e_{\alpha'}$, удовлетворяющую требованиям предложения III. Положим

$$f(h) = \varphi(h) \quad \text{для} \quad h \in H_0, \quad f(e_\alpha) = e_{\alpha'}. \tag{9.7.22}$$

Согласно I п. 9.6 базис в вещественном векторном пространстве H_0 является одновременно базисом в комплексном линейном пространстве H; поэтому отображение f, определенное формулой (9.7.22), можно продолжить до линейного отображения комплексного векторного пространства L в комплексное векторное пространство L'. Очевидно, что f переводит базис L в базис L' и поэтому является изоморфизмом пространства L на пространство L'. Покажем что f — гомоморфизм алгебр Ли Имеем:

$$\begin{aligned} f([h, h']) &= f(0) = 0 = [f(h), f(h')];\\ f([h, e_\alpha]) &= f(\alpha(h)\, e_\alpha) = \alpha(h)\, e'_{\alpha'} = \alpha'(\varphi(h))\, e'_{\alpha'} =\\ &\qquad = [\varphi(h), e'_{\alpha'}] = [f(h), f(e_\alpha)];\\ f([e_\alpha, e_\beta]) &= f(N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha\beta} e'_{\alpha'+\beta'} = [e'_{\alpha'}, e'_{\beta'}] =\\ &\qquad = [f(e_\alpha), f(e_\beta)], \quad \text{если} \quad \alpha+\beta \neq 0;\\ f([e_\alpha, e_{-\alpha}]) &= f(-h'_\alpha) = [e'_{\alpha'}, e'_{-\alpha'}] = [f(e_\alpha), f(e_{-\alpha})], \end{aligned}$$

что завершает доказательство предложения IV.

Из IV непосредственно следует

V. *Простая алгебра Ли L определяется однозначно с точностью до изоморфизма пространством H и системой корней.*

VI. *Выбор векторов* $e_\alpha \in L^\alpha$ *можно провести так, чтобы наряду с равенствами* (9.7.1)–(9.7.4) *выполнялось соотношение*

$$N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}. \tag{9.7.23}$$

Доказательство. Очевидно, что отображение φ_0: $h \to -h$ пространства H_0 сохраняет систему корней, переводя каждый корень α в корень $\alpha' = -\alpha$. Согласно IV существует изоморфизм Φ алгебры Ли L на себя, продолжающий эту симметрию. Выберем векторы $f_\alpha \in L^\alpha$ так, чтобы $(f_\alpha, f_{-\alpha}) = -1$, и пусть $\Phi(f_\alpha) = f'_{-\alpha} = \rho_\alpha f_{-\alpha}$. Тогда $(f'_{-\alpha}, f'_\alpha) = (f_\alpha, f_{-\alpha}) = -1$, поэтому $\rho_\alpha\rho_{-\alpha} = 1$. Пусть $e_\alpha = \rho_\alpha^{-1/2} f_\alpha$, где $\rho_\alpha^{-1/2}$ обозначает какой-нибудь квадратный корень из ρ_α. Пусть $(\rho_{-\alpha})^{-1/2} = (\rho_\alpha)^{1/2}$. Тогда $\Phi(e_\alpha) = \rho_\alpha^{-1/2}\rho_\alpha f_{-\alpha} = \rho_\alpha^{1/2} f_{-\alpha} = \rho_{-\alpha}^{-1/2} f_{-\alpha} = e_{-\alpha}$. Так как Φ — изоморфизм алгебр Ли, то $N_{\alpha,\beta} = N_{\alpha',\beta'} = N_{-\alpha,-\beta}$ для векторов $e_\alpha \in L^\alpha$, что завершает доказательство.

VII. *Если выполнено условие* (9.7.23), *то* $N^2_{\alpha,\beta} = q(1-p) \times (\alpha, \alpha)/2 \geqslant 0$, *т.е.* $N_{\alpha\beta}$ — *вещественные числа.*

Доказательство сразу следует из II и VI. Так как $q \geqslant 0$, $p \leqslant 0$, то $q(1-p)/2 \geqslant 0$.

Базис пространства L, получаемый дополнением некоторого базиса $\{h_1, \ldots, h_r\}$ пространства H такими векторами $e_\alpha \in L^\alpha$, что $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$ и $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$, называется *базисом Вейля* алгебры Ли L.

§ 10. Классификация простых алгебр Ли

10.1. Схемы Дынкина и их классификация. Пусть L — простая комплексная алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана. Обозначим через Π систему простых корней алгебры Ли L относительно H.

Пусть H_0^* — вещественное векторное пространство, образованное линейными комбинациями элементов системы Π.

I. а). *В пространстве H_0^* форма Киллинга принимает вещественные значения и положительно определена*;

б). Π — *линейно независимая система векторов в* H_0^*;

в). *Если α, β — различные элементы из Π, то число* $n_{\alpha,\beta} = -2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ — *целое и неотрицательное*;

г). *Систему Π нельзя представить в виде объединения непустых подмножеств Π' и Π'' так, чтобы всякий вектор из Π' был ортогонален всякому вектору из Π''.*

Доказательство. а) следует из I п. 9.6, б) — из III п. 9.6, в) — из (9.6.2), г) — из V п. 9.6.

II. *Система Π определяет алгебру Ли L однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Согласно IV п. 9.6 система Π однозначно определяет систему Δ ненулевых корней алгебры Ли L. С другой стороны, согласно V п. 9.7, система Δ определяет алгебру Ли L однозначно с точностью до изоморфизма.

Предложения I и II сводят задачу классификации простых комплексных алгебр Ли к нахождению всех систем Π векторов конечномерного евклидова пространства, удовлетворяющих условиям б)–г) предложения I. Заметим, что при умножений всех векторов системы Π на одно и то же число λ свойства б)–г) не нарушаются. Но система Π однозначно определяет систему Δ всех корней алгебры Ли L, а для любых корней $\alpha, \beta \in \Delta$ должно выполняться соотношение $(\alpha, \beta) = \sum\limits_{\gamma\in\Delta} (\gamma, \alpha)(\gamma, \beta)$ (см. (9.6.1)). Таким образом, «коэффициент подобия» λ однозначно определяется условием, что Π — система простых корней алгебры Ли.

Пусть Π — система векторов конечномерного вещественного евклидова пространства, удовлетворяющая условиям б)–г) предложения I. Пусть $\alpha, \beta \in \Pi$; пусть $\alpha \neq \pm\beta$ и α не ортогонален β. Тогда $n_{\alpha,\beta} \neq 0$, $n_{\beta,\alpha} \neq 0$, причем из в) следует, что

$$n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 4(\alpha, \beta)^2/\{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)\} = 4\cos^2\theta, \qquad (10.1.1)$$

где θ — угол между векторами α и β. По условию, $(\alpha, \beta) \neq 0$ и α не пропорционален β. Следовательно, из (10.1.1) получаем, что

$$0 < n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 4\cos^2\theta < 4,$$

где произведение $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha}$ — целое. Тогда $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 1$, 2 или 3. Поэтому меньшее из целых положительных чисел $n_{\alpha,\beta}$ и $n_{\beta,\alpha}$ равно единице. Предположим для определенности, что $(\alpha, \alpha) \geqslant (\beta, \beta)$. Тогда $n_{\alpha,\beta} \leqslant n_{\beta,\alpha}$, поэтому $n_{\alpha,\beta} = 1$, $n_{\beta,\alpha} = 4\cos^2\theta$, и

$$(\alpha, \alpha)/(\beta, \beta) = n_{\beta,\alpha}/n_{\alpha,\beta} = 4\cos^2\theta. \qquad (10.1.2)$$

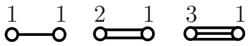
В случаях $n_{\beta,\alpha} = 1,\ 2,\ 3$ получаем соответственно $\cos\theta = -1/2$, $-\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{3}/2$, откуда $\theta = 2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$ соответственно.

Сопоставим каждой системе Π схему Дынкина S, определяемую следующим образом: каждый элемент $\alpha \in \Pi$ изображается точкой на плоскости и снабжается числовым коэффициентом (α, α); две различные точки, α, β, соединяются затем, если α не ортогонален β, одной, двумя или тремя черточками в зависимости от числа $4\cos^2\theta$ (т. е. число черточек равно $4\cos^2\theta$), и не соединяются черточками, если α ортогонален β. В этом случае говорят, что схема S *соответствует* системе корней Π. Число элементов системы Π называется *порядком* схемы Дынкина S. Схема Дынкина называется *допустимой*, если она построена по системе Π, удовлетворяющей условиям б) и в) предложения I. Очевидно, что *система* Π *удовлетворяет условию* г) *тогда и только тогда, когда схема Дынкина* S *системы* Π *связна.*

III. *Если схема Дынкина S допустима, то при стирании в ней некоторых точек (и черточек, исходящих из стертых точек) получается снова допустимая схема Дынкина.*

Доказательство. Пусть схема S соответствует системе Π. Стирание в S некоторого набора точек соответствует выбрасыванию из системы Π некоторых элементов этой системы. Так как свойства б) и в) имеют место для любой подсистемы Π' системы Π, то схема Дынкина, соответствующая системе Π', допустима.

IV. *Всякая допустимая связная схема Дынкина порядка 2 совпадает (с точностью до подобия) с одной из следующих трех схем:*



Доказательство. Так как $(\alpha, \beta) \neq 0$ ввиду связности, то при условии $(\alpha, \alpha) \geqslant (\beta, \beta)$ имеем $4\cos^2\theta = (\alpha, \alpha)/(\beta, \beta) = 1,\ 2$ или 3; рисунки соответствуют этим случаям.

Изучим теперь свойства связей в допустимых схемах Дынкина.

V. *В допустимой схеме Дынкина порядка n имеется не более чем $n-1$ связанных пар точек.*

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{\alpha\in\Pi} \alpha/\sqrt{(\alpha, \alpha)}$. Как нам известно, при различных α, β имеем $(\alpha, \beta) \leqslant 0$, и если $(\alpha, \beta) \neq 0$, то число $4\cos^2\theta$ не меньше единицы, поэтому $2(\alpha, \beta)/\sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} \leqslant -1$. Если в системе Π имеется более $n-1$ не ортогональных пар векторов, то

$$(x, x) = \sum_{\alpha\in\Pi} (\alpha, \alpha)/(\alpha, \alpha) + 2 \sum_{\substack{a,\,\beta\in\Pi \\ \alpha\neq\beta}} (\alpha, \beta)/\sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} \leqslant n - n = 0,$$

откуда $x = 0$, что противоречит линейной независимости системы Π.

VI. *Допустимая схема Дынкина не содержит замкнутых ломаных.*

Доказательство. Если S содержит замкнутую ломаную S', то S' является допустимой схемой согласно III. С другой стороны, все элементы в S' попарно связаны, что невозможно вследствие V.

VII. *Если S' — связная подсхема допустимой схемы Дынкина S, то всякий элемент $\alpha \notin S'$ связан не более чем с одним элементом из S'.*

Доказательство. Пусть элемент α схемы S, не входящий в S', связан с элементами β и γ подсхемы S'. Так как схема S' связна, то существует набор $\beta_0 = \beta$, β_1, ..., $\beta_n = \gamma$ элементов из S', в котором каждые два соседних элемента связаны. Подсхема схемы S, образованная элементом α и элементами β_i, $i = 0, \ldots, n$, содержит $n+2$ элемента, и не менее $n+2$ связанных пар, что невозможно вследствие V.

VIII. *Из каждой точки допустимой схемы исходит не более трех черточек.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Pi$; пусть β_1, ..., β_n — элементы, связанные с α. Если $i \neq j$, то β_i и β_j не связаны (иначе элементы α, β_i, β_j образуют замкнутую ломаную, что невозможно вследствие VI).

Следовательно, если $\beta_i \neq \beta_j$, то β_i и β_j ортогональны. Пусть вектор γ ортогонален всем β_j и лежит в подпространстве, порожденном векторами α и β_j. Пусть θ_0 — угол между α и γ, а θ_j — угол между α и β_j. Так как α разлагается по ортогональному базису, образованному векторами γ и β_j, то $\cos^2\theta_0 + \sum\limits_i \cos^2\theta_i = 1$. Система векторов, образованная α и β_j, линейно независима, поэтому вектор α не ортогонален γ. Поэтому $\cos^2\theta_0 \neq 0$, а значит, $\sum\limits_j \cos^2\theta_j < 1$. Следовательно, $\sum\limits_j 4\cos^2\theta_j < 4$, где $4\cos^2\theta_j$ — число черточек, соединяющих α и β_j.

IX. *Связная допустимая схема Дынкина порядка $n \geqslant 3$ не может иметь тройных связей.*

Доказательство. Пусть α и β связаны тремя черточками. Тогда (см. VIII) ни из элемента α, ни из элемента β не может исходить ни одной черточки. Так как, по условию, схема связна, то всякая связная допустимая схема с тройной связью между α и β исчерпывается элементами α и β, т. е. имеет порядок 2.

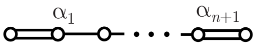
Назовем *цепью* последовательность α_1, ..., α_{n+1} точек схемы Дынкина S, в которой соседние элементы α_k и α_{k+1} связаны при $k = 1, \ldots, n$. Согласно VI других связей между элементами цепи нет. Данная цепь C называется *однородной*, если все связи в ней содержат лишь одну черточку.

Всякая цепь C, очевидно, связна. Согласно VII любой элемент $\beta \in S$ связан не более чем с одним элементом из C.

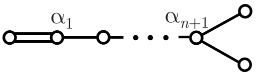
X. *Пусть S — допустимая схема Дынкина, C — однородная цепь в S. Образуем новую схему Дынкина S', заменяя цепь C одной точкой, которая считается связанной с элементом $\beta \notin C$ p-кратной связью* ($p = 0$, 1, 2 *или* 3), *если элемент β связан в схеме S p-кратной связью с некоторым элементом цепи C. Схема S допустима.*

Доказательство. Пусть Π' — система векторов, образованная всеми векторами $\beta \notin C$, $\beta \in \Pi$ и вектором $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k$, где $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$. Покажем, что схема S' соответствует системе Π'. Действительно, если $\beta \notin C$ и β связан с α_i, то вектор β ортогонален всем α_j с $j \neq i$, поэтому $(\beta, \alpha) = (\beta, \alpha_i)$. С другой стороны, $(\alpha, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n}((\alpha_i, \alpha_i) + 2(\alpha_i, \alpha_{i+1})) + (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1})$; действительно, так как цепь однородна, то $n_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, но $n_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = -2(\alpha_i, \alpha_{i+1})/(\alpha_i, \alpha_i)$, поэтому $(\alpha_i, \alpha_i) + 2(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, согласно (10.1.2) из соотношения $n_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 1$ следует, что $(\alpha_i, \alpha_i) = (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+1})$, поэтому $(\alpha_i, \alpha_i) = (\alpha_k, \alpha_k)$ для всех $i, k = 1, \ldots, n+1$. Следовательно, $(\alpha, \alpha) = (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (\alpha_k, \alpha_k)$ для всех $k = 1, \ldots, n+1$. Связи между элементами, не входящими в цепь C, не изменились. Следовательно, схема S' соответствует системе Π', причем система Π' удовлетворяет условию в) предложения I. Очевидно также, что векторы системы Π' линейно независимы, т. е. выполнено условие б) предложения I. Таким образом, схема Дынкина S' допустима.

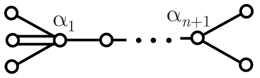
XI. *Схемы Дынкина*



(H)



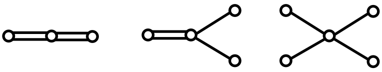
(I)



(K)

не допустимы.

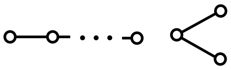
Доказательство. Применяя X к цепям $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\}$ этих схем, получаем соответственно схемы Дынкина



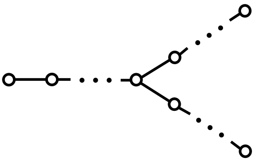
которые не допустимы вследствие VIII.

XII. *Всякая связная допустимая схема Дынкина порядка $n \geqslant 3$ принадлежит одному из классов*

(L)



(M)



(N)

Доказательство. Согласно IX данная связная дрпустимая схема Дынкина S не содержит тройных связей. Пусть S содержит двойную связь, т. е. подсхему из двух кружков, соединенных двумя черточками. Продолжим эту подсхему до максимальной цепи C. Если цепь C содержит две двойные связи, то C содержит подсхему вида (H), которая не допустима. Если $C \neq S$, то ввиду связности схемы Дынкина S существует элемент $\beta \notin C$, связанный с некоторым элементом цепи C (и притом только одним элементом вследствие VII). Если β связан с крайним элементом C, то цепь C можно расширить, присоединив к ней β; это противоречит максимальности цепи C. Следовательно, β связан с некоторым элементом цепи C, который не является крайним в C, т. е. схема Дынкина S содержит подсхему типа (I), которая не допустима. Это невозможно вследствие III. Итак, $C = S$, т. е. схема Дынкина S является цепью, содержащей одну двойную связь; поэтому данная схема имеет вид (L).

Пусть теперь все связи в S состоят из одной черточки. Если каждая точка схемы S связана не более чем с двумя другими точками, то максимальная цепь C в схеме S совпадает с S. Действительно, если $C \neq S$, то существует элемент $\beta \notin C$, связанный с некоторым (и притом однозначно определенным) элементом цепи C; если β связан с крайним элементом C, то цепь C можно расширить, в противоречие с ее максимальностью. Но β не может быть связан ни с каким другим элементом из C, так как, по предположению, каждая точка схемы Дынкина S связана не более чем с двумя другими точками. Полученное противоречие показываем что схема S имеет вид (M).

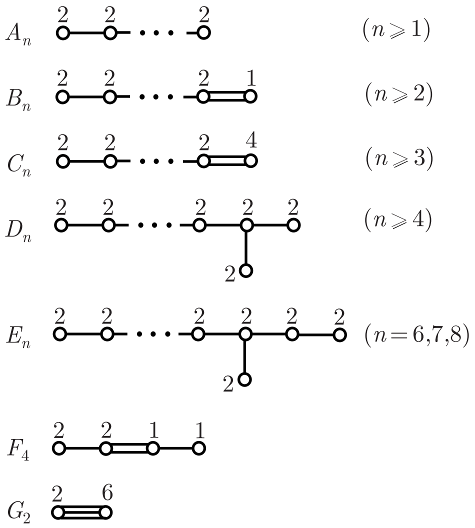
Пусть, наконец, все связи в S состоят из одной черточки, и пусть существует точка в S, связанная с тремя другими. Тогда в S содержится подсхема, имеющая вид «звезды» с тремя лучами. Продолжим ее до максимальной подсхемы $\widetilde{S} \subset S$ с тремя лучами, т. е. до максимальной подсхемы вида (N). Если $\widetilde{S} \neq S$, то существует элемент $\beta \notin \widetilde{S}$, связанный с некоторым элементом подсхемы $\widetilde{S}$ (и притом только одним элементом вследствие VII). Так как $\widetilde{S}$ — максимальная подсхема вида (N), то элемент β не может быть связан с крайним элементом в S. Но если β связан с элементом в $\widetilde{S}$, который не является крайним, то схема S содержит подсхему вида (K), которая не допустима. Полученное противоречие показывает, что $\widetilde{S} = S$, т. е. S имеет вид (M).

XIII. *Пусть цепь* $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *образована векторами одинаковой длины, т.е.* $(\alpha_i, \alpha_i) = a$. *Положим* $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} k\alpha_k$. *Тогда* $(\alpha, \alpha) = n(n+1)\,a/2$.

Доказательство.

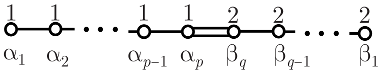
$$(\alpha, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} k^2(\alpha_k, \alpha_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(\alpha_k, \alpha_{k+1}) =$$
$$= n^2 a - \sum_{k=1}^{n-1} ka = n(n+1)\,a/2.$$

Теорема. *Всякая связная допустимая схема Дынкина совпадает с одной из схем* A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_4, G_2 (*с точностью до общего множителя у числовых отметок*), *где схемы* $A_n - G_2$ *имеют следующий вид*:



(*индекс в обозначении равен числу элементов в схеме Дынкина.*)

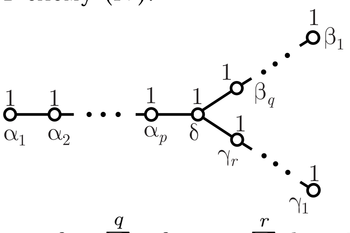
Доказательство. Рассмотрим схему вида (L). Из двух элементов, связанных двойной связью, квадрат длины одного из векторов вдвое больше квадрата длины другого (см. (10.1.2)), а элементы, связанные простой связью, имеют одинаковую длину. Таким образом, с точностью до общего множителя у числовых отметок, всякая схема вида (L) имеет вид



где корни $\beta_1, \ldots, \beta_q$ имеют вдвое больший квадрат длины, чем корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Положим $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{p} k\alpha_k$, $\beta = \sum\limits_{j=1}^{q} j\beta_j$. Согласно XIII $(\alpha, \alpha) = p(p+1)/2$, $(\beta, \beta) = q(q+1)$. Очевидно, что $(\alpha, \beta) = pq(\alpha_p, \beta_q) = -pq$. Так как векторы α и β не коллинеарны, то $(\alpha, \beta)^2 < (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$, т. е. $p^2q^2 < pq(p+1)(q+1)/2$, или $2pq < (p+1)(q+1)$, откуда $(p-1)(q-1) < 2$. Поэтому возможны лишь три случая: либо $p = 1$ и q — любое, либо $q = 1$ и p произвольно, либо $p = q = 2$. Соответствующие схемы суть B_{q+1}, C_{p+1} и F_4 соответственно. Очевидно, что схемы B_2 и C_2 отличаются лишь множителем.

Схема (M) с n элементами обозначается (A_n).

Рассмотрим теперь схему (N):



Положим $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{p} i\alpha_i$, $\beta = \sum\limits_{j=1}^{q} j\beta_j$, $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{r} k\gamma_k$. Так как векторы α, β и γ попарно ортогональны, а вектор δ не является их линейной комбинацией (так как система Π линейно независима), то сумма квадратов косинусов углов, образуемых вектором δ с векторами α, β и γ, должна быть строго меньше единицы. Найдем эти квадраты косинусов. Согласно XIII $(\alpha, \alpha) = p(p+1)/2$. Так как $(\delta, \delta) = 1$ и $(\alpha, \delta) = p(\alpha_p, \delta) = -p/2$, то квадрат косинуса угла θ, образуемого векторами α и δ, равен $\cos^2\theta = \dfrac{(\alpha, \delta)^2}{(\alpha, \alpha)(\delta, \delta)} = \left(1 - \dfrac{1}{p+1}\right)\Big/2 = \left(1 - \dfrac{1}{p+1}\right)\Big/2$. Аналогично вычисляются два других квадрата косинусов; следовательно, должно выполняться неравенство $\left(1 - \dfrac{1}{p+1} + 1 - \dfrac{1}{q+1} + 1 - \dfrac{1}{r+1}\right)\dfrac{1}{2} < 1$, или $(p+1)^{-1} + (q+1)^{-1} + (r+1)^{-1} > 1$. Пусть $p \geqslant q \geqslant r$; тогда $(p+1)^{-1} \leqslant (q+1)^{-1} \leqslant (r+1)^{-1}$ и $3 > r+1$, т. е. $r = 1$. Тогда должно выполняться неравенство $(p+1)^{-1} + (q+1)^{-1} > 1/2$, откуда $2/(q+1) > 1/2$, т. е. $q < 3$. Следовательно, возможны два случая: либо $q = 1$ и p — любое, либо $q = 2$ и $2 \leqslant p \leqslant 4$. Соответствующие схемы обозначаются D_{p+3} $(p \geqslant 1)$ и E_{p+4} $(2 \leqslant p \leqslant 4)$.

Схема порядка 2 с тройной связью обозначается через G_2.

Теорема доказана.

Системы корней алгебр Ли типов (A_n)–(G_2) подробно изучены в книге Бурбаки [1].

10.2. Некоторые вспомогательные предложения. В дальнейшем мы построим простые алгебры Ли, системы простых корней которых соответствуют схемам Дынкина типов A_n, B_n, C_n и D_n. В этом пункте мы докажем два предложения, которые будут использованы при построении этих алгебр.

I. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана размерности r. Если подсистема $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, системы всех корней обладает тем свойством, что для любого корня α алгебры Ли L относительно H имеет место равенство $\alpha = \pm\sum m_i\alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа, то совокупность $\{\alpha_i\}$ является системой простых корней.*

Доказательство. Корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ порождают систему всех корней, ранг которой равен размерности r подалгебры Ли H. Следовательно, корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ образуют базис в пространстве H^*. Снабдим пространство H_0^* (см. п. 9.6) лексикографическим упорядочением, соответствующим базису $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Относительно этого упорядочения корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ положительны, причем множество всех положительных корней образовано корнями вида $\sum m_i\alpha_i$, где $m_i \geqslant 0$. Покажем, что относительно этого упорядочения корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ являются простыми. Пусть $\alpha_i = \beta + \gamma$, где β и γ — положительные корни. Тогда $\beta = \sum m_j\alpha_j$; $\gamma = \sum n_j\alpha_j$, где $m_j, n_j \geqslant 0$ и $\alpha_i = \sum\limits_j (m_j + n_j)\,\alpha_j$. Из линейной независимости векторов α_j следует, что $m_j + n_j = 0$ при $j \neq i$ и $m_i + n_i = 1$, т. е. один из корней β и γ равен α, а другой — нулю. Итак, все корни α_i простые. Других простых корней нет, так как число простых корней равно r.

II. *Пусть L — комплексная алгебра Ли, H — абелева подалгебра L, Δ — конечный набор ненулевых линейных функционалов на H. Для любого линейного функционала λ (не обязательно из Δ) на H обозначим через L^λ совокупность таких элементов $\lambda \in L$, что $[h, x] = \lambda(h)\,x$ для всех $h \in H$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

а) *линейная оболочка множества Δ совпадает с пространством H^* линейных функционалов на H;*

б) *если $\alpha \in \Delta$, то $-\alpha \in \Delta$ и $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \neq (0)$ для любого $\alpha \in \Delta$;*

в)
$$L = H + \sum_{\alpha\in\Delta} L^\alpha. \tag{10.2.1}$$

Тогда L — полупростая алгебра Ли, H — картановская подалгебра в L, и соотношение (10.2.1) *есть разложение алгебры Ли L относительно картановской подалгебры H.*

Доказательство. Очевидно, что разложение (10.2.1) есть разложение алгебры Ли L в прямую сумму подпространств. Из условия в) следует, что $L^0 \subset H$; так как H абелева, то $H \subset L^0$; следовательно, $H = L^0$. Из определения L^λ и тождества Якоби непосредственно следует, что для любых $\lambda, \mu \in H^*$ имеем $[L^\lambda, L^\mu] \subset L^{\lambda+\mu}$ (ср. II § 8); в частности, $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \subset H$ для всех $\alpha \in \Delta$. Так как $[L^a, L^{-\alpha}] \neq (0)$, то $L^\alpha \neq (0)$. Зафиксируем $\alpha \in \Delta$ и выберем некоторые элементы $x'_\alpha \in L^\alpha$, $x'_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$ так, чтобы элемент $\overline{h}_\alpha = [x'_\alpha, x'_{-\alpha}]$ был отличен от нуля.

Рассмотрим множество $\Delta_{\beta,\alpha}$ элементов набора Δ, представимых в виде $\beta + k\alpha$ для некоторого целого k. Так как множество Δ конечно, то множество $\Delta_{\beta,\alpha}$ конечно. Введем подпространство $V = \sum\limits_{\gamma \in \Delta_{\beta,\alpha}} L^\gamma$. Из соотношения $[L^\lambda, L^\mu] \subset L^{\lambda+\mu}$ следует, что $[x'_\alpha, V] \subset V$ и $[x'_{-\alpha}, V] \subset V$. Следовательно, ограничение оператора $\operatorname{ad} \overline{h}_\alpha$ на подпространство V есть коммутатор ограничений на подпространство V операторов $\operatorname{ad} x'_\alpha$ и $\operatorname{ad} x'_{-\alpha}$; поэтому след оператора $\operatorname{ad} \overline{h}_\alpha$ в подпространстве V равен нулю. Пусть d_k — размерность пространства $L^{\beta+k\alpha}$ (в частности, $d_k = 0$ при $\beta + k\alpha \notin \Delta_{\beta,\alpha}$); тогда след оператора $\operatorname{ad} \overline{h}_\alpha$ в подпространстве $L^{\beta+k\alpha}$ равен $d_k(\beta + k\alpha)(\overline{h}_\alpha)$; поэтому

$$0 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} \overline{h}_\alpha|_V) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(\beta + k\alpha)(\overline{h}_\alpha) \tag{10.2.2}$$

(сумма на самом деле является конечной, так как $d_k = 0$ при $\beta + k\alpha \notin \Delta_{\beta,\alpha}$). Преобразуя соотношение (10.2.2), получаем, что

$$\beta(\overline{h}_\alpha) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k = -\alpha(\overline{h}_\alpha) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k d_k,$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} d_k$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} k d_k$ — целые числа, первое из которых не равно нулю. Следовательно, для любых $\alpha, \beta \in \Delta$ существует рациональное число $q_{\beta,\alpha}$ такое, что

$$\beta(\overline{h}_\alpha) = q_{\beta,\alpha}\alpha(\overline{h}_\alpha). \tag{10.2.3}$$

Если $\alpha(\overline{h}_\alpha) = 0$, то $\beta(\overline{h}_\alpha) = 0$ для всех $\beta \in \Delta$ согласно (10.2.3). Тогда из условия а) следует, что $\lambda(\overline{h}_\alpha) = 0$ для всех $\lambda \in H^*$, поэтому $\overline{h}_\alpha = 0$, что противоречит построению $\overline{h}_\alpha$. Следовательно,

$$\alpha(\overline{h}_\alpha) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \Delta. \tag{10.2.4}$$

Покажем, что $\dim(L^\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$. Пусть $V' = \mathbf{C}x'_{-\alpha} + \mathbf{C}\overline{h}_\alpha + \sum\limits_{k \geqslant 1} L^{k\alpha}$ — подпространство пространства L (здесь $L^{k\alpha} = (0)$, если $k\alpha \notin \Delta$). Читатель легко проверит, что подпространство V' инвариантно относительно операторов $\operatorname{ad} x'_\alpha$ и $\operatorname{ad} x'_{-\alpha}$, следовательно, след ограничения на V' оператора $\operatorname{ad} h'_\alpha$ равен нулю, поскольку $\operatorname{ad} \overline{h}_\alpha|_{V'} = [\operatorname{ad} x'_\alpha|_{V'}, \operatorname{ad} x'_{-\alpha}|_{V'}]$. Пусть δ_k — размерность пространства $L^{k\alpha}$. Тогда след оператора $\operatorname{ad} h_\alpha$ в пространстве $L^{k\alpha}$

равен $\delta_k(k\alpha)(\overline{h}_\alpha)$; кроме того, $(\operatorname{ad}\overline{h}_\alpha)(\overline{h}_\alpha) = 0$ и $(\operatorname{ad}\overline{h}_\alpha)(x'_{-\alpha}) = -\alpha(\overline{h}_\alpha)\,x'_{-\alpha}$, поэтому

$$0 = \operatorname{tr}\operatorname{ad}\overline{h}_\alpha|_{V'} = -\alpha(\overline{h}_\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} k\delta_k\alpha(\overline{h}_\alpha),$$

или

$$0 = \alpha(\overline{h}_\alpha)(-1 + \delta_1 + 2\delta_2 + \ldots), \tag{10.2.5}$$

где $\delta_1 \geqslant 1$ (так как $L^\alpha \neq (0)$) и $\delta_k \geqslant 0$ при $k \geqslant 2$. Так как $\alpha(\overline{h}_\alpha) \neq 0$ согласно (10.2.4), то $\delta_1 + 2\delta_2 + \ldots = 1$, где $\delta_1 \geqslant 1$ и $\delta_k \geqslant 0$; подставляя эти соотношения в (10.2.5), получаем, что $\delta_1 = 1$, т. е. $\dim(L^\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Введем элементы $h_\alpha \in H$, $x_\alpha \in L^\alpha$, $x_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$, полагая

$$h_\alpha = 2\overline{h}_\alpha/\alpha(\overline{h}_\alpha), \quad x_\alpha = x'_\alpha, \quad x_{-\alpha} = 2x'_{-\alpha}/\alpha(h'_\alpha). \tag{10.2.6}$$

Тогда из соотношения $\overline{h}_\alpha = [x'_\alpha, x'_{-\alpha}]$ и из определения пространств L^α следует, что

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \quad [h_\alpha, x_{-\alpha}] = -2x_{-\alpha}, \quad [x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha. \tag{10.2.7}$$

Докажем теперь, что L — полупростая алгебра Ли. Пусть R — радикал алгебры Ли L. Согласно IV § 3 радикал R инвариантен относительно представления π алгебры Ли H в пространстве L, определяемого формулой $\pi(h) = \operatorname{ad} h$. Покажем, что $R = (R \cap H) + \sum_{\alpha\in\Delta} (R \cap L^\alpha)$. Пусть ρ — представление алгебры Ли H в фактор-пространстве $\widetilde{L} = L/R$, определенное представлением π; пусть $\widetilde{H}$, $\widetilde{L}^\alpha$ — образы пространств H, L^α в $\widetilde{L}$ соответственно. Тогда $\rho(h)\,\widetilde{h} = 0$, $\rho(h)\,\widetilde{x}_\alpha - \alpha(h)\,\widetilde{x}_\alpha$ для всех $\alpha \in \Delta$, $h \in H$, $\widetilde{h} \in \widetilde{H}$, $\widetilde{x}_\alpha \in \widetilde{L}^\alpha$. Пусть $\widetilde{\Delta}$ — множество $\alpha \in \Delta$, таких, что $\widetilde{L}^\alpha \neq (0)$. Читатель легко проверит, что подпространства $\widetilde{L}^\alpha$, $\alpha \in \widetilde{\Delta}$, линейно независимы, и если $\widetilde{H} \neq (0)$, то подпространства $\widetilde{H}$, $\widetilde{L}^\alpha$, $\alpha \in \widetilde{\Delta}$ линейно независимы. Следовательно, из соотношения $h + \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha \in R$, где $h \in H$, $x_\alpha \in L^\alpha$, вытекает, что $h \in R$, $x_\alpha \in R$, т. е. $R \subset (R \cap H) + \sum_{\alpha\in\Delta} (R \cap L^\alpha)$. Обратное включение очевидно; итак,

$$R = (R \cap H) + \sum_{\alpha\in\Delta} (R \cap L^\alpha). \tag{10.2.8}$$

Покажем, что $R \cap L^\alpha = (0)$ для всех $\alpha \in \Delta$. Действительно, предположим противное: пусть $R \cap L^\alpha \neq (0)$ для некоторого $\alpha \in \Delta$. Так как L^α одномерно, то $R \cap L^\alpha = L^\alpha$, поэтому $x_\alpha \in R$. Так как R — идеал, то из соотношений (10.2.7) следует, что $h_\alpha \in R$, поэтому и $x_{-\alpha} \in R$. Идеал R разрешим, но, по доказанному, он содержит элементы h_α, x_α, $x_{-\alpha}$; порожденное ими подпространство $\mathbf{C}h_\alpha + L^\alpha + L^{-\alpha}$ есть полупростая подалгебра Ли в алгебре Ли R, что противоречит разрешимости алгебры

Ли R. Следовательно, $R \cap L^\alpha = (0)$ для всех $\alpha \in \Delta$, и из соотношения (10.2.8) следует, что $R \subset H$. Если $R \neq (0)$ и h — ненулевой элемент R, то существует такой элемент $\lambda \in H^*$, что $\lambda(h) \neq 0$. Из условия а) следует тогда, что существует такой элемент $\alpha \in \Delta$, что $\alpha(h) \neq 0$. Из соотношения $[h, x_\alpha] = \alpha(h)\, x_\alpha$ получаем, что $x_\alpha = \alpha(h)^{-1}[h, x_\alpha]$ принадлежит идеалу R, что невозможно, так как $R \subset H$. Итак, $R = (0)$, т. е. L — полупростая алгебра Ли. Из соотношения (10.2.1) следует, что $H = L^0$, т. е. H — подалгебра Картана в L.

10.3. Алгебры Ли типа A_n ($n \geqslant 1$). Пусть L — алгебра Ли $sl(n+1, \mathbf{C})$, т. е. алгебра Ли комплексных квадратных матриц порядка $n+1$, имеющих нулевой след. Пусть H — абелева подалгебра Ли в L, образованная диагональными матрицами. Обозначим через $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})$, где $a_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ — комплексные числа, диагональную матрицу с диагональными элементами $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Обозначим далее через e_{ij} матрицу, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Очевидно, что матрицы $e_{ii} - e_{i+1,\, i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, e_{ij} $(i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n+1)$ образуют базис в L.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ — линейные функционалы на H, определенные формулами $\lambda_i(\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})) = a_i$. Очевидно, что $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 0$. Прямое вычисление показывает, что

$$[h, e_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(h)\, e_{ij} \tag{10.3.1}$$

для всех $h \in H$. Обозначим через Δ множество линейных функционалов на H вида $\lambda_i - \lambda_j$, где $i \neq j$, $j = 1, \ldots, n+1$. Тогда для $\alpha \in \Delta$, $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$ имеем из (10.3.1)

$$L^\alpha = L^{\lambda_i - \lambda_j} = \mathbf{C} e_{ij} \quad (i \neq j), \tag{10.3.2}$$

причем элементы $e_{ii} - e_{i+1,\, i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, образуют базис в H; поэтому

$$L = H + \sum_{\alpha \in \Delta} L^\alpha, \tag{10.3.3}$$

т. е. для алгебр Ли L и H и семейства Δ выполнено условие в) предложения II п. 10.2. Очевидно, что семейство Δ удовлетворяет условию: если $\alpha \in \Delta$, то $-\alpha \in \Delta$. Наконец, если $\alpha(h) = 0$ для всех $\alpha \in \Delta$, где $h = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})$, то $a_i = a_{i+1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$; поэтому $h = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_1)$ и $\operatorname{tr}(h) = (n+1)\, a_1$; так как $\operatorname{tr}(h) = 0$, то $a_1 = 0$; следовательно, $h = 0$. Таким образом, выполнено условие а) предложения II п. 10.2. Покажем, что $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \neq 0$ для $\alpha \in \Delta$. Если $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, то $e_{ij} \in L^\alpha$, $e_{ji} \in L^{-\alpha}$ и

$$[e_{ij}, e_{ji}] = e_{ii} - e_{jj} \quad (i \neq j), \tag{10.3.4}$$

поэтому $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \neq 0$, т. е. выполнены все условия предложения II п. 10.2. Следовательно, алгебра Ли $L = sl(n+1, \mathbf{C})$ есть полупростая алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана, а разложение (10.3.3) есть разложение алгебры Ли L, соответствующее подалгебре Картана H.

Найдем схему Дынкина для алгебры Ли L. С этой целью вычислим сначала форму Киллинга на L. Если $h = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ и $h' = \mathrm{diag}(a'_1, \ldots, a'_{n+1})$ — некоторые элементы алгебры Картана H, то, применяя формулу (9.6.1), получаем, что

$$\begin{aligned}(h, h') &= \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(h)\,\alpha(h') = \sum_{i\neq j}(a_i - a_j)(a'_i - a'_j) = \\ &= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_i - a_j)(a'_i - a'_j) = \\ &= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_ia'_i + a_ja'_j - a_ja'_i - a_ia'_j) = \\ &= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_ia'_i + a_ja'_j) - 2\sum_{i\neq j} a_ia'_j. \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

Так как $a_1 + \ldots + a_{n+1} = 0$ и $a'_1 + \ldots + a'_{n+1} = 0$, то

$$(a_1 + \ldots + a_{n+1})(a'_1 + \ldots + a'_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_ia'_i + \sum_{i\neq j} a_ia'_j = 0. \tag{10.3.6}$$

Подставляя соотношение (10.3.6) в (10.3.5), получаем, что

$$(h, h') = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_ia'_i + a_ja'_j) + 2\sum_{i=1}^{n+1} a_ia'_i = 2(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} a_ia'_i. \tag{10.3.7}$$

Формула (10.3.7) позволяет вычислить форму Киллинга алгебры Ли L для любых элементов подалгебры Картана H. Положим

$$h'_{\lambda_i-\lambda_j} = (2(n+1))^{-1}(e_{ii} - e_{jj}) \tag{10.3.8}$$

для всех $i \neq j$; из (10.3.7) следует, что

$$(h, h'_{\lambda_i-\lambda_j}) = (\lambda_i - \lambda_j)(h). \tag{10.3.9}$$

Сравнивая соотношения (10.3.4) и (10.3.8), мы видим, что $h'_{\lambda_i-\lambda_j} \in [L^{\lambda_i-\lambda_j}, L^{\lambda_j-\lambda_i}]$, поэтому $h'_{\lambda_i-\lambda_j}$ пропорционален $\overline{h}_{\lambda_i-\lambda_j}$. Из первого соотношения в (10.2.6) следует тогда, что

$$h_{\lambda_i-\lambda_j} = 2((\lambda_i - \lambda_j)(h'_{\lambda_i-\lambda_j}))^{-1}h'_{\lambda_i-\lambda_j} = e_{ii} - e_{jj} \tag{10.3.10}$$

для всех $i \neq j$.

Обозначим через α_i корень $\lambda_i - \lambda_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\Delta = \{\pm(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}. \tag{10.3.11}$$

Следовательно, из предложения I п. 10.2 получаем, что система корней

$$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \tag{10.3.12}$$

есть система простых корней алгебры Ли L относительно H. Соответствующая система положительных корней есть множество корней вида $\lambda_i - \lambda_j$, где $i < j$. Применяя соотношение (9.2.1) и равенство (10.3.8), мы получаем из (10.3.7), что

$$\begin{aligned}(\alpha_i, \alpha_i) = (h'_{\lambda_i - \lambda_{i+1}}, h'_{\lambda_i - \lambda_{i+1}}) = \\ = 2 \cdot 2\,(n+1) \cdot 4^{-1}(n+1)^{-2} = (n+1)^{-1}\end{aligned} \tag{10.3.13}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Аналогично, при $i \neq j$ получаем, что

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |i-j| > 1, \\ -2^{-1}(n+1)^{-1} & \text{при} \quad |i-j| = 1. \end{cases} \tag{10.3.14}$$

Из соотношений (10.3.13) и (10.3.14) следует, что

$$n_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 1, \quad n_{\alpha_i, \alpha_i} = 0 \quad \text{при} \quad |i-j| > 1, \tag{10.3.15}$$

где n_{α_i, α_j} — числа Картана, определенные формулой (9.6.3). Таким образом, $sl(n+1, \mathbf{C})$ — алгебра Ли типа A_n ($n \geqslant 1$); в частности, $sl(n+1, \mathbf{C})$ — простая алгебра Ли.

10.4. Алгебры Ли типа B_n ($n \geqslant 1$) и D_n ($n \geqslant 2$). Пусть $m \geqslant 3$ — целое число, L — алгебра Ли кососимметрических комплексных матриц порядка m, т. е. алгебра Ли $so(m, \mathbf{C})$. Элементами алгебры Ли L являются квадратные матрицы m-го порядка $a = (a_{pq})$, удовлетворяющие условию $a_{pq} = -a_{qp}$ ($p, q = 1, \ldots, m$). Случаи $m = 2n$ ($n \geqslant 2$) и $m = 2n+1$ ($n \geqslant 1$) существенно различаются.

а). Пусть $m = 2n+1$, $n \geqslant 1$. Изменим нумерацию строк и столбцов элементов рассматриваемых матриц, считая, что индексы p, q пробегают целые числа $-n, -n+1, \ldots, 0, 1, \ldots, n$.

I. *Алгебра Ли $L = so\,(m, \mathbf{C})$ изоморфна алгебре Ли матриц $b = (b_{pq})$, $p, q = -n, -n+1, \ldots, n$, удовлетворяющих условию*

$$b_{pq} = -b_{-q,-p}, \quad p, q = -n, -n+1, \ldots, n. \tag{10.4.1}$$

Доказательство. Пусть $a_{pq} = -a_{qp}$ при всех $p, q = -n, -n+1, \ldots, n$, т. е.

$$a' = -a, \tag{10.4.2}$$

где a' — матрица, транспонированная к a. Введем матрицу $\sigma = (\sigma_{pq})$, $p, q = -n, -n+1, \ldots, n$, полагая

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} (1+i)/2 & & 0 & & (1-i)/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & (1+i)/2 & & (1-i)/2 & \\ \mathbf{0} & & 1 & & \mathbf{0} \\ & (1-i)/2 & & (1+i)/2 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-i)/2 & & 0 & & (1+i)/2 \end{matrix} \right\|. \tag{10.4.3}$$

Пусть $\widetilde{L}$ — алгебра Ли матриц b вида $b = \sigma a \sigma^{-1}$, $a \in L$. Тогда алгебры Ли L и $\widetilde{L}$ изоморфны, причем $b \in \widetilde{L}$ тогда и только тогда, когда $a \in L$, т. е.

$$(\sigma^{-1} b \sigma)' = -\sigma^{-1} b \sigma. \tag{10.4.4}$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\sigma^{-1} = \left\| \begin{matrix} (1-i)/2 & & & & (1+i)/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & (1-i)/2 & & (1+i)/2 & \dots \\ & & 1 & & \\ \dots & (1+i)/2 & & (1-i)/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1+i)/2 & \dots & \dots & \dots & (1-i)/2 \end{matrix} \right\|, \quad \sigma' = \sigma, \tag{10.4.5}$$

причем

$$\sigma^2 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & ⋰ & & \\ 1 & & & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|. \tag{10.4.6}$$

Тогда из соотношений (10.4.4)–(10.4.5) следует, что $b \in \widetilde{L}$ тогда и только тогда, когда $\sigma' b' (\sigma^{-1})' = -\sigma^{-1} b \sigma$, т. е. $\sigma b' \sigma^{-1} = -\sigma^{-1} b \sigma$, откуда

$$b' = -\sigma^{-2} b \sigma^2 = -\sigma^2 b \sigma^2. \tag{10.4.7}$$

Из соотношения (10.4.6) следует, что равенство (10.4.7) равносильно соотношениям (10.4.1).

Пусть H — линейное подпространство в $\widetilde{L}$, образованное диагональными матрицами. Очевидно, что матрицы $f_{pq} = e_{pq} - e_{-q,-p}$ $(-n \leqslant -q < p \leqslant n)$ образуют базис в алгебре Ли $\widetilde{L}$, причем матрицы $e_{kk} - e_{-k,-k} = f_{kk}$, $k = 1, \ldots, n$, образуют базис в подпространстве H, так что размерность H равна n. Из очевидного соотношения

$$[e_{pq}, e_{kl}] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad q \neq k \quad \text{или} \quad p = k, q = l, \\ e_{pl} & \text{при} \quad q = k, p \neq l, \\ e_{pp} - e_{qq} & \text{при} \quad p = l, q = k, p \neq q, \end{cases} \tag{10.4.8}$$

следует, что

$$[f_{k,k}, f_{k_1,k_1}] = 0 \quad \text{при всех} \quad k, k_1, \quad 1 \leqslant k, k_1 \leqslant n; \tag{10.4.9}$$

таким образом, подпространство H является абелевой подалгеброй Ли в $\widetilde{L}$. Кроме того, если $-n \leqslant -q < p \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, то из (10.4.8) получаем

$$[f_{k,k}, f_{p,q}] = [e_{k,k} - e_{-k,-k}, e_{pq} - e_{-q,-p}] =$$
$$= \begin{cases} 0 \ \text{при} \quad p \neq \pm k, q \neq \pm k & \text{или} \quad p = 1 = \pm k; \\ (e_{kq} - e_{-q,-k}) & \text{при} \quad p = k, q \neq k; \\ (e_{-k,q} - e_{-q,k} & \text{при} \quad p = -k, q \neq -k; \\ (e_{pk} - e_{-k,-p}) & \text{при} \quad p \neq k, q = k; \\ (e_{p,-k} - e_{k,-p} & \text{при} \quad p \neq -k, q = -k. \end{cases} \tag{10.4.10}$$

Из соотношений (10.4.10) следует равенство

$$[f_{k,k}, f_{p,q}] = c_{pqk} f_{pq}, \tag{10.4.11}$$

где

$$c_{pqk} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq \pm k, \quad q \neq \pm k \quad \text{или} \quad p = q = \pm k, \\ -1 & \text{при} \quad p = -k, \quad q \neq -k \quad \text{или} \quad q = k, p \neq k, \\ 1 & \text{при} \quad p = k, \quad\ \ q \neq k \quad\ \ \text{или} \quad p \neq -k, q = -k. \end{cases} \tag{10.4.12}$$

Если $h \in H$, то $h = \sum\limits_{k=1}^{n} h_k f_{k,k}$. Положим $h_0 = 0$, $h_{-k} = -h_k$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Из соотношений (10.4.12) следует тогда, что

$$[h, f_{pq}] = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{pqk} h_k \right) f_{pq} = (h_p - h_q)\, f_{pq} \tag{10.4.13}$$

для всех $h \in H$. Положим $\lambda_k(h) = h_k$ $(k = -n, -n+1, \ldots, n)$; тогда

$$[h, f_{pq}] = (\lambda_p - \lambda_q)(h)\, f_{pq} \tag{10.4.14}$$

для всех $h \in H$. Пусть Δ — множество линейных функционалов на H вида $\lambda_p - \lambda_q$, $q \neq p$, $-p < q$. Тогда для $\alpha \in \Delta$, $\alpha = \lambda_p - \lambda_q$ имеем из (10.4.14)

$$\widetilde{L}^{\alpha} = \widetilde{L}^{\lambda_p - \lambda_q} = \mathbf{C} f_{pq}, \tag{10.4.15}$$

ибо функционалы $\lambda_p - \lambda_q$, $q \neq p$, $-p < q$, не обращаются в тождественный нуль на H и попарно различны. Так как $\lambda_p - \lambda_q = -(\lambda_q - \lambda_p)$, то $\Delta = -\Delta$; если $(\lambda_q - \lambda_p)(h) = 0$ для всех $p \neq q$, $-p < q$, то

$(\lambda_p - \lambda_0)(h) = h_p = 0$ для $p = 1, \ldots, n$, т. е. $h = 0$. Наконец, из (10.4.15) следует, что

$$\widetilde{L} = H + \sum_{\alpha \in \Delta} \widetilde{L}^{\alpha}, \tag{10.4.16}$$

а из (10.4.8) вытекает, что $[f_{pq}, f_{qp}] = 2(f_{pp} - f_{qq}) \neq 0$ при $p \neq q$, т. е. $[\widetilde{L}^{\alpha}, \widetilde{L}^{-\alpha}] \neq 0$. Таким образом, выполнены все условия предложения II п. 10.2, и $\widetilde{L}$ есть полупростая алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана, Δ — система ненулевых корней алгебры Ли $\widetilde{L}$ относительно H.

Найдем схему Дынкина для алгебры Ли $\widetilde{L}$. Пусть $h, h' \in H$, причем $h = \sum\limits_{k=1}^{n} h_k f_{kk}$, $h' = \sum\limits_{k=1}^{n} h'_k f_{kk}$. Из (9.6.1) следует, что

$$(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\, \alpha(h') = \sum_{\substack{p \neq q \\ p+q>0}} (h_p - h_q)(h'_p - h'_q). \tag{10.4.17}$$

Вычисления, аналогичные приведенным для алгебр Ли типа A_n (см. (10.3.5)–(10.3.7)), показывают, что

$$(h, h') = (2n-1) \sum_{k=1}^{n} h_k h'_k, \tag{10.4.18}$$

следовательно, при $k \neq 0$

$$\lambda_k(h) = (\lambda_k - \lambda_0)(h) = (h, h'_{\lambda_k}), \tag{10.4.19}$$

где

$$h'_{\lambda_k} = (2n-1)^{-1} f_{kk}, \tag{10.4.20}$$

а при $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p + q > 0$

$$(\lambda_p - \lambda_q)(h) = (h, h'_{\lambda_p - \lambda_q}), \tag{10.4.21}$$

где

$$h'_{\lambda_p} = (2n-1)^{-1}(f_{pp} - f_{qq}). \tag{10.4.22}$$

Обозначим через α_p корень $\lambda_p - \lambda_{p+1}$, $p = 1, \ldots, n-1$, и положим $\alpha_n = \lambda_n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\lambda_q &= \alpha_q + \alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_n && \text{при} \quad q > 0,\\
\lambda_q - \lambda_p &= \alpha_q + \alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_{p-1} && \text{при} \quad 0 < q < p,\\
\lambda_q &= -\lambda_- && \text{при} \quad q < 0,\\
\lambda_q - \lambda_p &= -(\lambda_{-q} + \lambda_p) && \text{при} \quad q < 0, p < 0,\\
\lambda_q - \lambda_p &= -(\lambda_p - \lambda_q) && \text{при} \quad q > p > 0,\\
\lambda_q - \lambda_p &= -(\lambda_{-q} - \lambda_{-p}) && \text{при} \quad p < 0,
\end{aligned}$$

поэтому из предложения I п. 10.2 следует, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — система простых корней алгебры Ли $\widetilde{L}$. Применяя соотношение (9.2.1) и равенства (10.4.20) и (10.4.22), получаем, что

$$(\alpha_p, \alpha_p) = (h'_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}, h'_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}) = \\ = (2n-1)^{-2} \cdot 2 \cdot (2n-1) = 2(2n-1)^{-1} \quad (10.4.23)$$

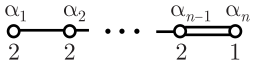
при $p = 1, \ldots, n-1$, и аналогично,

$$(\alpha_n, \alpha_n) = (2n-1)^{-1}, \quad (10.4.24)$$

причем при $p \neq q$ получаем

$$(\alpha_p, \alpha_q) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |p-q| > 1, \\ -(2n-1)^{-1} & \text{при} \quad |p-q| = 1. \end{cases} \quad (10.4.25)$$

Из равенств (10.4.23)–(10.4.25) следует, что схема Дынкина алгебры Ли $\widetilde{L}$ имеет вид



т. е. $\widetilde{L}$ есть алгебра Ли типа B_n. При $n = 1$ $B_1 = A_1$. Так как схема Дынкина связна, то алгебра Ли $\widetilde{L} \approx so(2n+1, \mathbf{C})$ проста.

б). Пусть $m = 2n$, $n \geqslant 2$. Изменим нумерацию строк и столбцов элементов рассматриваемых матриц, считая, что индексы p, q пробегают целые числа $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$.

II. *Алгебра Ли* $L = so(m, \mathbf{C})$ *изоморфна алгебре Ли матриц* $b = (b_{pq})$, $p, q = \pm 1, \ldots, \pm n$, *удовлетворяющих условию*

$$b_{pq} = -b_{-q,-p}, \quad p, q = \pm 1, \ldots, \pm n. \quad (10.4.26)$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения I. Введем матрицу $\sigma = (\sigma_{pq})$, $p, q = \pm 1, \ldots, \pm n$, полагая

$$\sigma = \begin{Vmatrix} (1+i)/2 & & 0 & & (1-i)/2 \\ & \cdot & & \cdot & \\ & & \cdot \quad \cdot & & \\ 0 & & \cdot & & 0 \\ & & \cdot \quad \cdot & & \\ & \cdot & & \cdot & \\ (1-i)/2 & & 0 & & (1+i)/2 \end{Vmatrix}. \quad (10.4.27)$$

Пусть $\widetilde{L}$ — алгебра Ли матриц b вида $b = \sigma a \sigma^{-1}$, $a \in L$. Алгебры Ли L и $\widetilde{L}$ изоморфны, причем $b \in \widetilde{L}$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in L$, т. е.

$$(\sigma^{-1} b \sigma)' = -\sigma^{-1} b \sigma; \quad (10.4.28)$$

вычисления, аналогичные переходу от (10.4.4) к (10.4.7), показывают, что соотношение (10.4.28) равносильно соотношению $b' = -\sigma^2 b \sigma^2$, где

$$\sigma^2 = \begin{Vmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{Vmatrix}; \tag{10.4.29}$$

отсюда сразу следует, что соотношения (10.4.26) и (10.4.28) эквивалентны.

Пусть H — линейное подпространство в $\widetilde{L}$, образованное диагональными матрицами. Очевидно, что матрицы $f_{pq} = e_{pq} - e_{-q,-p}$ $(p+q>0$, $p, q = \pm 1, \ldots, \pm n)$ образуют базис в алгебре Ли $\widetilde{L}$, причем матрицы $f_{kk} = e_{kk} - e_{-k,-k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ образуют базис в подпространстве H, так что размерность H равна n. Так же, как и в случае нечетного m, получаем, что из соотношений (10.4.8) следуют равенства

$$[f_{k,k}, f_{k_1,k_1}] = 0 \quad \text{при всех} \quad k, k_1, \quad 1 \leqslant k, k_1 \leqslant n \tag{10.4.30}$$

и

$$[f_{k,k}, f_{pq}] = c_{pqk} f_{pq}, \tag{10.4.31}$$

где

$$c_{pqk} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq \pm k, \quad q \neq \pm k \quad \text{или} \quad p = 1 = \pm k; \\ -1 & \text{при} \quad p = -k, \quad q \neq -k \quad \text{или} \quad q = k, \quad p \neq k; \\ 1 & \text{при} \quad p = k, \quad q \neq k \quad \text{или} \quad p \neq -k, \quad q = -k. \end{cases} \tag{10.4.32}$$

Из соотношений (10.4.30) следует, что подпространство H есть абелева подалгебра Ли в $\widetilde{L}$. Пусть $h \in H$; тогда $h = \sum\limits_{k=1}^{n} h_k f_{kk}$. Положим $h_{-k} = -h_k$ для $k = 1, \ldots, n$ и обозначим через λ_k линейный функционал на H, определенный формулой $\lambda_k(h) = h_k$, $k = \pm 1, \ldots, \pm n$. Тогда из равенств (10.4.31) и (10.4.32) следует, что

$$[\overline{h}, f_{pq}] = (\lambda_p - \lambda_q)(h)\, f_{pq} \tag{10.4.33}$$

для всех $h \in H$. Пусть Δ — множество линейных функционалов на H вида $\lambda_p - \lambda_q$, $q \neq p$, $p+q>0$. Тогда для $\alpha \in \Delta$, $\alpha = \lambda_p - \lambda_q$, имеем из (10.4.33), что

$$\widetilde{L}^{\alpha} = \widetilde{L}^{\lambda_p - \lambda_q} = \mathbf{C} f_{pq}, \tag{10.4.34}$$

так как функционалы $\lambda_p - \lambda_q$, $q \neq p$, $p+q>0$, не обращаются в тождественный нуль на H и попарно различны. Так как $(\lambda_p - \lambda_q) = -(\lambda_q - \lambda_p)$, то $\Delta = -\Delta$; если $(\lambda_q - \lambda_p)(h) = 0$ для всех $p \neq q$, $p+q>0$, то $(\lambda_q - \lambda_n)(h) = 0$, $(\lambda_{-q} - \lambda_n)(h) = 0$ для всех $q \neq \pm n$, поэтому $2\lambda_q(h) = (\lambda_q - \lambda_{-q})(h) = 0$ для всех $q \neq \pm n$, тогда и $\lambda_n(h) = 0$, т. е. $h_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$, поэтому $h = 0$. Наконец, из (10.4.34) следует, что $\widetilde{L} = H + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} \widetilde{L}^{\alpha}$, а из (10.4.8) следует, что $[f_{pq}, f_{qp}] = 2(f_{pp} - f_{qq}) \neq 0$ при $p \neq q$, поэтому $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \neq 0$. Таким образом, из предложения II п. 10.2 следует, что $\widetilde{L}$ — полупростая алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана, Δ — соответствующая система ненулевых корней.

Найдем схему Дынкина для алгебры Ли $\widetilde{L}$. Пусть $h, h' \in H$, причем $h = \sum\limits_{k=1}^{n} h_k f_{kk}$, $h' = \sum\limits_{k=1}^{n} h'_k f_{kk}$. Из (9.6.1) следует, что

$$(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\, \alpha(h') = \sum_{\substack{p \neq q \\ p+q>0}} (h_p - h_q)(h'_p - h'_q) \tag{10.4.35}$$

и вычисления, аналогичные (10.3.5)–(10.3.7), показывают, что

$$(h, h') = (2n-2) \sum_{k=1}^{n} h_k h'_k. \tag{10.4.36}$$

Следовательно, $(\lambda_p - \lambda_q)(h) = (h, h'_{\lambda_p - \lambda_q})$, где

$$h'_{\lambda_p - \lambda_q} = (2n-2)^{-1}(f_{pp} - f_{qq}). \tag{10.4.37}$$

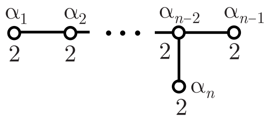
Обозначим через α_p корень $\lambda_p - \lambda_{p+1}$, $p = 1, \ldots, n-1$, и положим $\alpha_n = (\lambda_n - \lambda_{-(n-1)}) = \lambda_{n-1} + \lambda_n$. Тогда $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Delta$, причем при $i + j > 0$ имеем

$$\begin{array}{lll}
\lambda_p - \lambda_q = \alpha_p + \ldots + \alpha_{q-1} & \text{при} & 0 < p < q; \\
\lambda_p - \lambda_q = -(\lambda_{-q} - \lambda_{-p}) = \lambda_{-p} - \lambda_{-q} & \text{при} & 0 < q < p,\, p < q < 0 \\
 & & \qquad \text{или} \quad q < p < 0; \\
\lambda_p - \lambda_q = (\lambda_p - \lambda_n) + (\lambda_{-q} - \lambda_{n-1}) + \alpha_n & \text{при} & p > 0 > q, \\
\lambda_p - \lambda_q = -(\lambda_q - \lambda_p) & \text{при} & p < 0.
\end{array}$$

Тогда из предложения I п. 10.2 следует, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — система простых корней алгебры Ли $\widetilde{L}$. Из соотношения (9.2.1) и равенства (10.4.37) следует, что

$$(\alpha_p, \alpha_q) = \\
= \begin{cases}
2(2n-2)^{-1} & \text{при} \quad q = p; \\
-(2n-2)^{-1} & \text{при} \quad |p - q| = 1, \quad p < n, \quad q < n; \\
-(2n-2)^{-1} & \text{при} \quad p = n-2, \quad q = n \\
 & \qquad\qquad \text{или} \quad p = n, \quad q = n-2; \\
0 & \text{в остальных случаях.}
\end{cases} \tag{10.4.38}$$

Согласно соотношениям (10.4.38), схема Дынкина алгебры Ли имеет вид



т. е. является схемой Дынкина типа D_n $(n \geqslant 2)$. При $n = 2$ эта схема несвязна и имеет вид

При $n = 3$ имеем $D_3 = A_3$. При $n \geqslant 3$ алгебра Ли $\widetilde{L} \approx so\,(2n,\, \mathbf{C})$ проста, так как ее схема Дынкина связна.

10.5. Алгебры Ли типа C_n $(n \geqslant 2)$. Пусть $L = sp\,(2n,\, \mathbf{C})$, $n \geqslant 2$, — алгебра Ли комплексных матриц порядка $2n$, представимых в виде

$$x = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{Vmatrix}, \tag{10.5.1}$$

где a, b, c — квадратные комплексные матрицы порядка n, матрицы b и c симметричны, a^t — матрица, транспонированная матрице a. Тот факт, что L есть алгебра Ли, может быть проверен непосредственным вычислением или с помощью замечания, что матрица x принадлежит L тогда и только тогда, когда $x^t s + sx = 0$, где

$$s = \begin{Vmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad t_n \text{ — единичная матрица порядка } n. \tag{10.5.2}$$

Пусть H — линейное подпространство в L, образованное диагональными матрицами. Пусть $f_{ij} = e_{ij} - e_{j+n,\,i+n}$ $(i,\, j = 1,\, \ldots,\, n)$,

$$g_{ij} = e_{i+n,\,j} + e_{j+n,\,i} \quad (i,\, j = 1,\, \ldots,\, n),$$
$$\widetilde{g}_{ij} = e_{i,\,j+n} + e_{j,\,i+n} \quad (i,\, j = 1,\, \ldots,\, n).$$

Тогда набор f_{ij}, $i,\, j = 1,\, \ldots,\, n$; g_{ij}, $\widetilde{g}_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, образует базис в L, причем элементы f_{Ii}, $i = 1,\, \ldots,\, n$, образуют базис в H. Поэтому

$$L = H + \sum_{i \neq j} \mathbf{C} f_{ij} + \sum_{i \leqslant j} \mathbf{C} g_{ij} + \sum_{i \leqslant j} \mathbf{C} \widetilde{g}_{ij}. \tag{10.5.3}$$

Пусть $h \in H$; тогда $h = \sum\limits_{i=1}^{m} h_i f_{ii}$. Пусть $\lambda_i(h) = h_i$ $(i = 1,\, \ldots,\, n)$. Тогда из (10.4.8) следует, что

$$[h,\, f_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(h)\, f_{ij}; \tag{10.5.4а}$$
$$[h,\, g_{ij}] = (\lambda_i + \lambda_j)(h)\, g_{ij}; \tag{10.5.4б}$$
$$[[h,\, \widetilde{g}_{ij}] = -(\lambda_i + \lambda_j)(h)\, \widetilde{g}_{ij}. \tag{10.5.4в}$$

Пусть Δ — множество линейных функционалов на H вида $\lambda_i - \lambda_j$ $(i \neq j,\ i,\, j = 1,\, \ldots,\, n)$ и $\pm(\lambda_i + \lambda_j)$ $(i,\, j = 1,\, \ldots,\, n)$. Очевидно, что

$\Delta = -\Delta$. Если $\lambda(h) = 0$ для всех $\lambda \in \Delta$, то, в частности, $(\lambda_i + \lambda_i)(h) = 2\lambda_i(h) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, поэтому $h = 0$. Из соотношений (10.5.4) следует, что

$$L^{\lambda_i - \lambda_j} = \mathbf{C} f_{ij}, \quad L^{\lambda_i + \lambda_j} = \mathbf{C} g_{ij}, \quad L^{-\lambda_i - \lambda_j} = \mathbf{C} \widetilde{g}_{ij} \tag{10.5.5}$$

и из соотношений (10.4.8) следует, что

$$[f_{ij}, f_{ji}] = f_{ii} - f_{jj}, \quad [g_{ij}, \widetilde{g}_{ij}] = f_{ii} + f_{jj}, \tag{10.5.6}$$

т. е. $[L^\alpha, L^{-\alpha}] \neq 0$ для всех $\alpha \in \Delta$. Соотношение (10.5.3) можно записать в виде $L = H + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} L^\alpha$. Таким образом, все условия предложения II п. 10.2 выполнены, поэтому L — полупростая алгебра Ли, H — ее картановская подалгебра, Δ — множество ненулевых корней L относительно H.

Найдем схему Дынкина для алгебры Ли L. Если $h = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i f_{ii}$, $h' = \sum\limits_{i=1}^{n} h'_i f_{ii}$, то из (9.6.1) и определения Δ следует, что

$$\begin{aligned}(h, h') &= \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\, \alpha(h') = \\ &= \sum_{i \neq j} (h_i - h_j)(h'_i - h'_j) + 2 \sum_{i \leqslant j} (h_i + h_j)(h'_i + h'_j) = \\ &= 8 \sum_{i=1}^{n} h_i h'_i + \sum_{i \neq j} \{(h_i - h_j)(h'_i - h'_j) + (h_i + h_j)(h'_i + h'_j)\} = \\ &= 8 \sum_{i=1}^{n} h_i h'_i + 2 \sum_{i \neq j} (h_i h'_i + h_j h'_j) = (4n + 4) \sum_{i=1}^{n} h_i h'_i.\end{aligned} \tag{10.5.7}$$

Следовательно, $(\lambda_i - \lambda_j)(h) = (h, h'_{\lambda_i - \lambda_j})$, $(\lambda_i + \lambda_j)(h) = (h, h'_{\lambda_i + \lambda_j})$, где

$$h'_{\lambda_i - \lambda_j} = (4(n+1))^{-1} (f_{ii} - f_{jj}), \quad h'_{\lambda_i + \lambda_j} = (4(n+1))^{-1} (f_{ii} + f_{jj}). \tag{10.5.8}$$

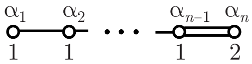
Обозначим через α_i корень $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и положим $\alpha_n = 2\lambda_n$. Тогда $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Delta$, причем

$$\begin{aligned} \lambda_i - \lambda_j &= \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} && \text{при } j > i; \\ \lambda_i - \lambda_j &= -(\lambda_j - \lambda_i) && \text{при } j < i; \\ \pm(\lambda_i + \lambda_j) &= \pm\{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}) + (\alpha_j + \ldots + \alpha_n)\} && \text{при } i \leqslant j. \end{aligned} \tag{10.5.9}$$

Из соотношений (10.5.9) следует, что система $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяет условиям предложения I п. 10.2 и потому является системой простых корней алгебры Ли L. Из соотношения (9.2.1) и равенств (10.5.8) следует, что

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 2/(4(n+1)) & \text{при} \quad 1 \leqslant i = j \leqslant n-1; \\ 4/(4(n+1)) & \text{при} \quad i = j = n; \\ -1/(4(n+1)) & \text{при} \quad |i-j| = 1,\, i < n,\, j < n; \\ -2/(4(n+1)) & \text{при} \quad i = n,\, j = n-1 \\ & \qquad \text{или } l = n-1,\, j = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{10.5.10}$$

Согласно соотношениям (10.5.10) схема Дынкина алгебры Ли имеет вид



т. е. является схемой Дынкина типа C_n $(n \geqslant 2)$. При $n = 2$ имеем $C_2 = B_2$. Так как схема Дынкина алгебры Ли L связна, то алгебра Ли $L = sp\,(2n, \mathbf{C})$ проста.

Алгебры Ли типов A_n, B_n, C_n, D_n называются *классическими*. Алгебры Ли типов E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 называются *особыми*; они построены, например, в книге Джекобсона [1].

§ 11. Группа Вейля полупростой алгебры Ли

Пусть L — полупростая комплексная алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана, Δ — система ненулевых корней алгебры Ли L относительно H. Для любого $\alpha \in A$ введем элемент h'_α подалгебры Картана H, определяемый условием, что

$$\alpha(h) = (h, h'_\alpha) \tag{11.1.1}$$

для всех $h \in H$ (так как ограничение формы Киллинга на подалгебру Картана H невырождено согласно IV п. 9.1, то элемент h'_α существует и определен однозначно для всех $\alpha \in \Delta$). Пусть H_0 — вещественное подпространство в H, порожденное векторами h'_α, $\alpha \in \Delta$, и λ — линейный функционал на H_0. Обозначим через P_λ гиперплоскость в H_0, определяемую уравнением $\lambda(h) = 0$. Пусть S_λ — отображение пространства H_0 на себя, переводящее каждый вектор $h \in H_0$ в вектор, симметричный вектору h относительно гиперплоскости P_λ. Найдем формулу для преобразования S_λ. Гиперплоскость P_λ задается уравнением $\lambda(h) = 0$, т. е. уравнением $(h, h'_\lambda) = 0$ (см. (11.1.1)). Следовательно, вектор h'_λ ортогонален к гиперплоскости P_λ. Так как $(h'_\lambda, h'_\lambda) = (\lambda, \lambda)$, то преобразование S_λ задается формулой

$$S_\lambda(h) = h - 2\lambda(h)(\lambda, \lambda)^{-1} h'_\lambda \quad (h \in H_0). \tag{11.1.2}$$

По определению преобразования S_λ, это преобразование пространства H_0 ортогонально. Сопряженное к S_λ преобразование S_λ^* пространства H_0^* определяется тогда соотношением

$$S_\lambda^*(\mu) = \mu - 2(\lambda,\, \mu)(\lambda,\, \lambda)^{-1}\lambda \quad (\mu \in H_0^*). \tag{11.1.3}$$

Действительно, из (11.1.1) и (9.2.1) следует, что $\mu(h'_\lambda) = (\lambda,\, \mu)$, поэтому

$$(\mu - 2(\lambda,\, \mu)(\lambda,\, \lambda)^{-1}\lambda)(h) = \mu(h - 2\lambda(h)(\lambda,\, \lambda)^{-1}h'_\lambda). \tag{11.1.4}$$

Пусть $\lambda = \alpha$ для некоторого $\alpha \in \Delta$. Применим S_α^* к корню $\beta \in \Delta$. Тогда

$$S_\alpha^*(\beta) = \beta - 2(\alpha,\, \beta)(\alpha,\, \alpha)^{-1}\alpha \tag{11.1.5}$$

вследствие (11.1.3). Но согласно (9.5.1)

$$-2(\alpha,\, \beta)(\alpha,\, \alpha)^{-1} = p + q, \tag{11.1.6}$$

где $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$ и для всех целых чисел k, удовлетворяющих неравенству $p \leqslant k \leqslant q$, линейный функционал $\beta + k\alpha$ принадлежит Δ. Так как $p \leqslant p + q \leqslant q$, то из (11.1.5) и (11.1.6) следует справедливость следующего утверждения:

I. $S_\alpha^*(\beta) = \Delta$ *для всех* $\alpha,\, \beta \in \Delta$.

Пусть W — подгруппа группы ортогональных преобразований пространства H_0, порожденная преобразованиями S_α, $\alpha \in \Delta$.

II. *Группа W конечна.*

Доказательство. Всякое преобразование S_α^*, $\alpha \in \Delta$, пространства H_0^* переводит конечное множество Δ в Δ согласно I. Следовательно, для любого элемента w группы W преобразование w^* переводит Δ в Δ. Если $w \in W$ и $w^*\alpha = \alpha$ для всех $\alpha \in \Delta$, то преобразование w^* пространства H_0^* тождественно на линейной оболочке множества Δ; но эта линейная оболочка совпадает с H_0^* согласно III п. 9.6. Следовательно, w^* — тождественное отображение H_0^*, поэтому w тождественно на H_0. Таким образом, группа W изоморфна подгруппе группы подстановок конечного множества Δ, поэтому W — конечная группа.

Группа W называется *группой Вейля* алгебры Ли L. Иногда группой Вейля называют группу W^*, образованную операторами, сопряженными элементам группы W.

Пусть Q — множество таких элементов $h \in H_0$, что $\alpha(h) \neq 0$ для всех $\alpha \in \Delta$. Максимальные выпуклые подмножества множества Q называются *фундаментальными областями Вейля*, или *камерами Вейля*.

III. *Пусть $\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_r$ — простые корни алгебры Ли L относительно H. Множество C_0 таких элементов $h \in H_0$, что $\alpha_i(h) > 0$ для всех $i = 1,\, \ldots,\, r$, есть камера Вейля.*

Доказательство. Если $h_1, h_2 \in C_0$, то $\alpha_i(th_1 + (1-t)\,h_2) = t\alpha_i(h_1) + (1-t)\,\alpha_i(h_2) > 0$ для всех $i = 1,\, \ldots,\, r$ и всех $t \in [0,\, 1]$, поэтому C_0 — выпуклое множество. Покажем, что C_0 есть подмножество Q. Если $C_0 \not\subset Q$, то существует $h \in C_0$ такой, что $\alpha(h) = 0$ при некотором $\alpha \in \Delta$. Но любой ненулевой корень α представи́м в виде $\alpha = \sum k_i \alpha_i$, где целые числа k_i одного знака и не все равны нулю; так как $\alpha_i(h) > 0$, то $\alpha(h) \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $C_0 \subset Q$. Очевидно, C_0 — *максимальное* выпуклое подмножество Q.

Камера Вейля C_0 называется *доминантной* камерой Вейля.

Пусть W' — подгруппа группы W, порожденная симметриями, определяемыми простыми корнями, т.е. элементами $S_i = S_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

IV. *Группа W' (а следовательно, и группа W) транзитивна на совокупности камер Вейля, т.е. для всякой камеры Вейля C_1 существует такой элемент $w \in W'$, что $C_0 = wC_1$.*

Доказательство. Если C_1 — камера Вейля, то для любого $w \in W$ множество wC_1 выпукло. Кроме того, так как w^* переводит Δ в Δ, то W переводит множество Q в себя. Поскольку $C_1 \subset Q$, то $wC_1 \subset Q$. Следовательно, wC_1 — выпуклое подмножество в Q; поэтому wC_1 содержится в некоторой камере Вейля. Поэтому для доказательства включения $wC_1 \subset C_0$ достаточно показать, что для данного элемента $h_1 \in C_1$ существует преобразование $w \in W'$ такое, что $wh_1 \in C_0$. Пусть h_0 — фиксированная точка в C_0. Множество точек wh_1, $w \in W'$, конечно; пусть $w_0 h_1$ — ближайшая к h_0 точка среди точек wh_1, $w \in W'$. Если $w_0 h_1$ не принадлежит камере Вейля C_0, то $\alpha_i(w_0 h_1) < 0$ для некоторого простого корня α_i. Сравним расстояние между $w_0 h_1$ и h_0 с расстоянием между $S_\alpha(w_0 h_1)$ и h_0. Проекция векторов $h_0 - w_0 h_1$ и $h_0 - S_{\alpha_i}(w_0 h_1)$ на гиперплоскость P_{α_i} одинакова, но проекция этих векторов на прямую $\{t h'_{\alpha_i},\, t \in \mathbf{R}\}$, перпендикулярную к плоскости P_{α_i}, различна, причем

$$|(h_0 - w_0 h_1,\, h'_{\alpha_i})| = |\alpha_i(h_0) - \alpha_i(w_0 h_1)| = \alpha_i(h_0) - \alpha_i(w_0 h_1), \quad (11.1.7)$$

так как $\alpha_i(h_0) > 0$, $\alpha_i(w_0 h_1) < 0$; с другой стороны,

$$\begin{aligned} |(h_0 - S_{\alpha_i}(w_0 h_1),\, h'_{\alpha_i})| &= |\alpha_i(h_0) - \alpha_i(S_{\alpha_i}(w_0 h_1))| = \\ &= |\alpha_i(h_0) - \alpha_i(w_0 h_1) - 2\alpha_i(w_0\, h_1)(\alpha_i,\, \alpha_i)^{-1} h'_{\alpha_i})| = \\ &= |\alpha_i(h_0) + \alpha_i(w_0 h_1)|. \quad (11.1.8) \end{aligned}$$

Сравнивая правые части равенств (11.1.7) и (11.1.8), видим, что $|\alpha_i(h_0) + \alpha_i(w_0 h_1)| < \alpha_i(h_0) - \alpha_i(w_0 h_1)$, поэтому точка $S_{\alpha_i}(w_0 h_1)$ расположена ближе к h_0, чем $w_0 h_1$. Следовательно, точка $w_0 h_1$ не является ближайшей к h. Полученное противоречие показывает, что $w_0 h_1 \in C_0$. Таким образом, $wC_1 \subset C_0$. Рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что $w^{-1} C_0 \subset C_1$, поэтому $C_0 = w(w^{-1} C_0) \subset wC_1$ и $C_0 = wC_1$.

V. $W = W'$.

Доказательство. Назовем гиперплоскость P_α ограничивающей камеру Вейля C, если граница камеры C содержит открытое подмножество гиперплоскости P_α. Очевидно, что камера C_0 ограничивается гиперплоскостями P_{α_i}, $i = 1, \ldots, r$, и только такими гиперплоскостями. Пусть $\alpha \in \Delta$ и C_1 — одна из камер Вейля, ограничиваемых гиперплоскостью P_α. Существует такое преобразование $w \in W'$, что $C_1 = wC$. При этом преобразовании гиперплоскость P_α является образом некоторой гиперплоскости, ограничивающей камеру C_0, т. е. некоторой гиперплоскости P_{α_i}. Но единственные корни, множеством нулей которых является P_α, суть $\pm\alpha$; следовательно, $w\alpha_i = \pm\alpha$. Если $w\alpha_i = -\alpha$, то $wS_{\alpha_i}(\alpha_i) = w(-\alpha_i) = \alpha$, так что всегда существует такой элемент $w \in W'$ и такой простой корень α_i, что $w\alpha_i = \alpha$. Тогда, очевидно, $S_\alpha = wS_{\alpha_i}w^{-1}$. Так как $w \in W'$ и $S_{\alpha_i} \in W'$, то $S_\alpha \in W'$ при всех $\alpha \in \Delta$, т. е. $W = W'$.

Из IV и V сразу следует

VI. *Группа Вейля W порождена симметриями S_i, $i = 1, \ldots, r$, определяемыми простыми корнями.*

Группы Вейля алгебр Ли типов (A_n)–(G_2) изучены в книге Бурбаки [1].

§ 12. Линейные представления полупростых комплексных алгебр Ли

Пусть L — полупростая комплексная алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана. Пусть Δ — система ненулевых корней алгебры Ли L относительно H. Предположим, что вещественное векторное пространство H_0^* снабжено структурой лексикографического упорядочения относительно некоторого базиса в H_0 так, что Σ — система положительных корней, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ — система простых корней.

I. *Линейные пространства $N_+ = \sum\limits_{\alpha>0} L^\alpha$ и $N_- = \sum\limits_{\alpha<0} L^\alpha$ являются нильпотентными алгебрами Ли, и пространство L есть прямая сумма подпространств N_+, N_- и H.*

Доказательство. Так как $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$ (см. II § 8), то N_+ и N_- являются подалгебрами Ли в L. Покажем, что N_+ нильпотентна. Пусть $\alpha = \Sigma m_i\alpha_i$ — разложение корня $\alpha \in \Sigma$ в линейную комбинацию простых корней (ср. III п. 9.6), назовем *порядком* корня α число $m = \Sigma m_i$. Пусть n — наивысший порядок корней $\alpha \in \Sigma$. Тогда из соотношения $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$ следует, что $(\operatorname{ad} x)^{n+1}$ для любого $x \in N_+$ переводит элементы любого из подпространств L^α, $\alpha \in \Sigma$, в нуль; следовательно (см. теорему 1 п. 2.1), алгебра Ли N_+ нильпотентна. Аналогично доказывается нильпотентность алгебры Ли N_-. Справедливость разложения $L = N_+ + H + N_-$ следует из соотношения $L = H + \sum_{\alpha \neq 0} L^\alpha$ (см. (8.1.6)).

Разложение $L = N_- + H + N_+$ называется *разложением Картана* алгебры Ли L.

II. *Алгебра Ли* N_+ (*соответственно* N_-) *порождается подпространствами* L^{α_i} (*соответственно*, $L^{-\alpha_i}$), $i = 1, \ldots, r$.

Доказательство. Пусть N'_+ — подалгебра Ли в N_+, порожденная подпространствами L^{α_i}; пусть уже доказано, что $L^\beta \subset N'_+$ при $0 < \beta < \alpha$. Если α — простой корень, то, по условию, $L^\alpha \subset N'_+$; если $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma > 0$, то $0 < \beta < \alpha$, $0 < \gamma < \alpha$; поэтому, применяя II п. 9.5, видим, что $L^\alpha = [L^\beta, L^\gamma] \subset [N'_+, N'_+] \subset N'_+$. Аналогично доказывается соответствующее утверждение для подалгебры Ли N_-.

Положим $h_\alpha = 2(\alpha, \alpha)^{-1} h'_\alpha$ и $h_i = h_{\alpha_i}$. Тогда $\alpha(h_\alpha) = 2$ и $\alpha_i(h_i) = 2(\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_j, \alpha_j)^{-1} = -n_{ji}$, где n_{ji} — некоторое неотрицательное целое число (см. III п. 9.6 и (9.6.3)). Кроме того, если $x \in L^\alpha$, $y \in L^{-\alpha}$, то $[x, y] = (x, y)\, h'_\alpha$ (см. (9.2.3)); поэтому можно выбрать $x_i \in L^{\alpha_i}$, $y_i \in L^{-\alpha_i}$ так, что $[x_i, y_i] = h_i$. Так как $\alpha_i - \alpha_j$ не является корнем, то $[x_i, y_i] = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, алгебра Ли L порождается элементами x_i, y_i, h_i ($i = 1, 2, \ldots, r$), для которых справедливы следующие соотношения (вообще говоря, не исчерпывающие всех соотношений между x_i, y_i, h_i):

$$[x_i, y_j] = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \tag{12.1.1а}$$

$$[x_i, y_i] = h_i, \tag{12.1.1б}$$

$$[h_i, x_j] = -n_{ij} x_j, \tag{12.1.1в}$$

$$[h_i, y_j] = n_{ij} y_j, \tag{12.1.1г}$$

$$[h_i, h_j] = 0. \tag{12.1.1д}$$

Пусть π — линейное представление алгебры Ли L в векторном пространстве V. Пусть λ — линейный функционал на H; обозначим через V_λ множество векторов $v \in V$ таких, что $\rho(h)\, v = \lambda(h)\, v$ для всех $h \in H$. Очевидно, что V_λ — подпространство в V, причем $V_\lambda \subset V^\lambda$, где $V^\lambda = V(H, \lambda)$ определено в п. 2.4. Если $V_\lambda \neq (0)$, то функционал λ называется *весом* представления π алгебры Ли L.

III. *Подпространства* V_λ *линейно независимы.*

Доказательство сразу следует из II 3) п. 2.4, так как $V_\lambda \subset V^\lambda$.

IV. *Если* $W \subset V$ — *инвариантное подпространство представления* π, *то* $W \cap \left(\sum_\lambda V_\lambda \right) = \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$.

Доказательство. Рассмотрим представление, определяемое представлением π в фактор-пространстве V/W. В силу III из соотношения $\sum_\lambda v_\lambda \in W$ (где $v_\lambda \in V_\lambda$) следует, что $v_\lambda \in W$. Таким образом, $W \cap \left(\sum\limits_{\lambda} V_\lambda\right) \subset \sum\limits_{\lambda}(W \cap V_\lambda)$. С другой стороны, соотношение $\sum\limits_{\lambda}(W \cap V_\lambda) \subset W \cap \left(\sum\limits_{\lambda} V_\lambda\right)$ очевидно.

V. *Конечномерное представление π полупростой алгебры Ли L обладает по крайней мере одним весом.*

Доказательство. Ограничение представления π на подалгебру Картана H есть (конечномерное) представление алгебры Ли H. Пусть $V_1 \subset V$ — инвариантное относительно $\pi(H)$ подпространство такое, что семейство операторов $\pi(H)|_{V_1}$ неприводимо. Так как H — коммутативная алгебра Ли, то $\pi(H)|_{V_1}$ — неприводимое семейство попарно перестановочных операторов. Тогда из леммы Шура следует, что V_1 — одномерное подпространство. Если v — ненулевой вектор в V_1, то $\pi(h)\,v \in V_1$ для всех $h \in H$, т. е. $\pi(h)\,v = \lambda(h)\,v$ для некоторого $\lambda(h)$. Функция λ является весом.

VI. $\pi(L^\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$.

Доказательство. Если $v \in V_\lambda$, $x \in L^\alpha$, то

$$\begin{aligned}\pi(h)\,\pi(x)\,v &= \pi([h, x])\,v + \pi(x)\,\pi(h)\,v = \\ &= \pi(\alpha(h)\,x)\,v + \pi(x)(\lambda(h)\,v) = (\alpha(h) + \lambda(h))\,\pi(x)\,v, \end{aligned} \qquad (12.1.2)$$

поэтому $\pi(x)\,v \in V_{\lambda+\alpha}$.

VII. *Подпространство $\sum\limits_{\lambda} V_\lambda$ инвариантно относительно представления π.*

Доказательство сразу следует из VI.

Назовем вектор $v \in V$ *старшим вектором* представления π, если $v \in V_\lambda$ для некоторого веса λ, $\pi(x_i)\,v = 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$ и наименьшее подпространство в V, инвариантное относительно всех операторов $\pi(x)$, $x \in L$, и содержащее вектор v, совпадает с V. В этом случае вес λ называется *старшим весом* представления π [1]).

Так как подалгебра Ли N_+ порождается элементами x_i, $i = 1, \ldots, r$, то $\pi(x)\,v = 0$ для всех $x \in N_+$. Рассмотрим подпространство $B = H + N_+$ в алгебре Ли L. Очевидно, что B — подалгебра Ли в L, причем N_+ — идеал в B, так как $[H, N_+] \subset N_+$ согласно (12.1.1в). Так как $\pi(h)\,v = \lambda(h)\,v$ для $h \in H$ и $\pi(x)\,v = 0$ для $x \in N_+$, то одномерное подпространство, порожденное вектором v, инвариантно относительно операторов $\pi(b)$, $b \in B$.

[1]) Это определение не согласуется с определением старшего вектора и старшего веса, принятым для представлений групп (см. главы VI и VII), так как в настоящем определении требуется, чтобы старший вектор был циклическим вектором представления. Для неприводимых представлений это условие цикличности выполняется автоматически.

Пусть U, U_0, U_- — универсальные обертывающие алгебры алгебр Ли L, B, N_- соответственно. Выберем в L базис вида $n_1^-, \ldots, n_p^-$, $h_1, \ldots, h_r$, $n_1^+, \ldots, n_p^+$, где $n_i^\pm \in N_\pm$ и $h_i \in H$. Применяя к этому базису теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта (см. теорему п. 6.3), заключаем, что $\pi(U)\,v = \pi(U_-)\,v$, ибо $\pi(U_0)\,v$ содержится в одномерном подпространстве $\mathbf{C}v$, порожденном вектором v.

Рассмотрим подпространство $\mathbf{C}v + \sum V_\mu$, где сумма распространена на все такие веса μ, что разность $\lambda - \mu$ представима в виде линейной комбинации корней α_i с неотрицательными целыми коэффициентами. Это подпространство содержит вектор v и инвариантно относительно алгебры Ли N_-; действительно, для любого положительного корня α имеем $\pi(L^{-\alpha})V_\mu \subset V_{\mu-\alpha}$ и функционал $\lambda - (\mu - \alpha) = (\lambda - \mu) + \alpha$ можно представить в виде $\sum m_i\alpha_i$, где целые числа m_i неотрицательны. Так как $\pi(U_-)\,v = \pi(U)\,v$ и $\pi(U_-)\,v \subset \mathbf{C}v + \sum V_\mu$, то, по определению вектора старшего веса, $\mathbf{C}v + \sum V_\mu = V$. Следовательно,

VIII. *Если λ — старший вес представления π, то подпространство V_λ одномерно и всякий вес μ представления π можно представить в виде $\mu = \lambda - \sum m_i\alpha_i$, где m_i — неотрицательные целые числа. Кроме того, $V = \sum V_\mu = \pi(U_-)\,v$.*

Очевидно, что из предложения VIII непосредственно следует

IX. *Старший вес λ однозначно определяется представлением π.*

X. *Весовые подпространства V_μ конечномерны.*

Доказательство. Нам известно, что $V = \pi(U_-)\,v$, причем $y_i \in L^{-\alpha_i}$. Следовательно, подпространство V_μ линейно порождается векторами вида $\pi(y_{i_1})\ldots\pi(y_{i_p})\,v$, где $i_1, \ldots, i_p$ — такой набор, что $\lambda - \alpha_{i_1} - \ldots - \alpha_{i_p} = \mu$. Наборов $\{i_1, \ldots, i_p\}$, обладающих этим свойством, лишь конечное число; поэтому V_μ конечномерно.

Приступим к классификации конечномерных представлений полупростой комплексной алгебры Ли L. Ввиду теоремы о полной приводимости (см. п. 7.2) мы можем ограничиться изучением неприводимых представлений.

XI. *Всякое конечномерное неприводимое представление π имеет старший вектор, определенный однозначно с точностью до множителя.*

Доказательство. Согласно V представление π обладает по крайней мере одним весом. Так как π — конечномерное представление, то из III следует, что множество весов представления π конечно. Следовательно, существует вес λ представления π такой, что $\lambda + \alpha_i$ не является весом для всех $i = 1, \ldots, r$. Тогда из VI следует, что $\pi(x_i)\,v = 0$ при $i = 1, \ldots, r$ для любого $v \in V_\lambda$, т.е. $\pi(N_+)\,v = 0$. Так как представление π неприводимо, то для любого $v \neq 0$ инвариантное относительно операторов $\pi(x)$, $x \in L$, подпространство пространства V, содержащее вектор v, совпадает с V. Следовательно, всякий ненулевой вектор $v \in V_\lambda$ является старшим вектором представления π, причем подпространство V_λ одномерно вследствие VIII.

Пусть $h_i \in H$ выбраны так, что $\alpha_i(h) = (h, h_i)$ для всех $h \in H$ и всех простых корней α_i.

Теорема 1. *Линейный функционал λ тогда и только тогда есть старший вес некоторого конечномерного неприводимого представления π алгебры Ли L, когда все $\lambda(h_i)$, $i = 1, \ldots, r$, — целые и неотрицательные числа. Всякое конечномерное неприводимое представление π алгебры Ли L в пространстве V обладает старшим вектором, причем V есть прямая сумма подпространств V_μ; для всякого корня α и всякого веса μ число $\mu(h_\alpha)$ — целое; если μ и $\mu + \alpha$ являются весами представления π, то $\pi(L^\alpha)V_\mu \neq (0)$. Пусть P — множество всех весов представления π. Множество P конечно и инвариантно относительно семейства операторов, сопряженных элементам группы Вейля W алгебры Ли L. Если $\mu = \sigma^*\nu$ при некотором $\sigma \in W$, то $\dim V_\mu = \dim V_\nu$.*

Доказательство. Пусть π — неприводимое представление алгебры Ли L в пространстве V. Согласно XI, представление π обладает старшим вектором v. Пусть λ — старший вес представления π. Согласно VIII всякий вес μ представления π имеет вид $\mu = \lambda - \sum\limits_{i=1}^{r} m_i\alpha_i$, где $m_i \geqslant 0$ — целые, причем V — прямая сумма подпространств V_μ. Пусть μ — какой-либо вес представления π; пусть α — корень алгебры Ли L. Положим $\widetilde{V} = \sum\limits_j V_{\mu+j\alpha}$. Пусть L_α — подалгебра Ли алгебры Ли L, натянутая на векторы e_α, $e_{-\alpha}$, h_α (см. IV п. 9.3). Подпространство $\widetilde{V}$ инвариантно относительно $\pi(L_\alpha)$, так как $\pi(L^\alpha)V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$ для любого веса μ, а $\pi(H)V_\mu \subset V_\mu$. Так как $\alpha(h_\alpha) = 2$, то различные веса вида $\mu + j\alpha$ принимают на h_α различные значения. Применим теорему п. 9.4 к представлению $\widetilde{\pi}$ алгебры Ли L_α в пространстве $\widetilde{V}$, определенному формулой $\widetilde{\pi}(x)\widetilde{v} = \pi(x)\widetilde{v}$ для всех $x \in L_\alpha$, $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$. Согласно этой теореме число $2\mu(h_\alpha) \times (\alpha(h_\alpha))^{-1}$ — целое. Кроме того, существует такой вес μ' представления $\widetilde{\pi}$ алгебры Ли L_α в пространстве $\widetilde{V}$, что $\mu'(h_\alpha) = -\mu(h_\alpha)$. Следовательно, $(\mu + \mu')(h_\alpha) = 0$, т. е. $(\mu + \mu', \alpha) = 0$. Но вес μ', как и любой другой вес представления $\widetilde{\pi}$, имеет вид $\mu' = \mu + j\alpha$, где j — некоторое целое число. Подставляя равенство $\mu' = \mu + j\alpha$ в соотношение $(\mu + \mu', \alpha) = 0$, видим, что $2(\mu, \alpha) + j(\alpha, \alpha) = 0$, т. е. $j = -2(\mu, \alpha)(\alpha, \alpha)^{-1}$ и $\mu' = \mu + j\alpha = \mu - 2(\mu, \alpha)(\alpha, \alpha)^{-1}\alpha = S_\alpha^*(\mu)$. Таким образом, множество весов представления π инвариантно относительно порожденной преобразованиями S_α^* группы Вейля W^*. Из той же теоремы п. 9.4 следует также, что $\dim V_\mu = \dim V_{\mu'}$; тогда для любого веса ν, получаемого из μ преобразованием из группы Вейля, имеем $\dim V_\mu = \dim V_\nu$. Наконец, если $\mu + \alpha$ — вес и $x \in L^\alpha$, $x \neq 0$, то, согласно (9.4.7), $\pi(x)V_\mu \neq (0)$.

Применим перечисленные выше результаты к старшему весу λ. Функционал $S_i^*(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\,\alpha_i$, по доказанному, является весом. С другой стороны, всякий вес имеет вид $\lambda - \sum m_k\alpha_k$, где m_k — неотрицательные целые числа. Следовательно, $\lambda(h_i)$ — неотрицательное целое число. Тогда для любого положительного корня $\alpha = \sum n_i\alpha_i$ число $\lambda(h_\alpha) = (\lambda, \alpha) = (\lambda, \sum n_i\alpha_i) = \sum n_i\lambda(h_i)$ — неотрицательное целое.

Обратно, пусть λ — линейный функционал на H. Обозначим через I_λ левый идеал в алгебре U, порожденный алгеброй Ли N_+ и элементами вида $h - \lambda(h)\,e$, где $h \in H$, e — единичный элемент алгебры U. Рассмотрим естественное представление ρ алгебры Ли L в пространстве U/I_λ, порождаемое левыми операторами умножения на элементы алгебры Ли L. Пусть v — образ единичного элемента $e \in U$ в пространстве U/I_λ. Покажем, что v — старший вектор представления ρ с весом λ. Действительно, $h - \lambda(h)\,e \in I_\lambda$, поэтому $\rho(h - \lambda(h)\,e)\,v = 0$, кроме того, $N_+ \subset I_\lambda$, поэтому $\rho(N_+)\,v = 0$. Наконец, всякое подпространство пространства U/I_λ, инвариантное относительно представления ρ, инвариантно также относительно всех операторов левого умножения на все элементы алгебры U; но $Uv = U/I_\lambda$, т. е. наименьшее инвариантное относительно представления ρ подпространство в U/I_λ, содержащее v, совпадает с U/I_λ. Итак, v — старший вектор представления ρ с весом λ.

Покажем, что $\rho \neq 0$, т. е. $I_\lambda \neq U$. Пусть I_λ — левый идеал в алгебре U_0, порожденный алгеброй Ли N_+ и элементами вида $h - \lambda(h)\,e$, $h \in H$. Пусть ρ_0 — представление алгебры U_0, соответствующее такому одномерному представлению θ алгебры Ли B, что $\theta(h) = \lambda(h)\,1$, $\theta(n) = 0$ для $h \in H$, $n \in N_+$ (так как линейный функционал θ обращается в нуль на $[B, B] = N_+$, то θ действительно является представлением алгебры Ли B). Идеал I_λ содержится в ядре представления ρ_0; поэтому $I'_\lambda \neq U_0$. Применяя теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта, видим, что $U = U_-U_0$ не совпадает с $I_\lambda = U_-I'_\lambda$, т. е. ρ — ненулевое представление алгебры Ли L (вообще говоря, бесконечномерное) со старшим весом λ.

Пусть T — инвариантное подпространство пространства $V' = U/I_\lambda$. Согласно VIII имеем $V' = \sum\limits_\mu V'_\mu$; согласно IV выполняется равенство $T = \sum\limits_\mu (T \cap V'_\mu)$. Так как подпространство V'_λ одномерно вследствие VIII, то $T \cap V'_\lambda = (0)$ или V'_λ; в последнем случае T содержит старший вектор, т. е. $T = V'$. Итак, если $T \neq V'$, то $T \subset \sum\limits_{\mu\neq\lambda} V'_\mu$. Сумма V'' всех инвариантных подпространств, содержащихся в $\sum\limits_{\mu\neq\lambda} V'_\mu$, есть инвариантное подпространство, не совпадающее с V'. Очевидно, что представление π алгебры Ли L в фактор-пространстве $V = V'/V''$, определенное представлением ρ, есть неприводимое представление со старшим весом λ.

Пусть ρ_1 — другое неприводимое представление алгебры Ли L со старшим весом λ. Пусть $I \subset U$ — множество $x \in U$ таких, что $\pi(x)\,v = 0$. Очевидно, что I содержит N_+ и все элементы вида $h - \lambda(h)\,e$, где $h \in H$. Следовательно, $I \supset I_\lambda$, поэтому представление ρ_1, изоморфное естественному представлению алгебры Ли L в U/I, изоморфно также некоторому фактор-представлению представления алгебры Ли L в U/I, т. е. ρ_1 изоморфно фактор-представлению представления ρ. Так как ρ_1 неприводимо, то I — максимальный левый идеал алгебры U, содержащий I_λ. Но, как мы видели в предыдущем абзаце, максимальный идеал в алгебре U, содержащий I_λ, определен однозначно. Следовательно, ρ_1 эквивалентно π, т. е. *неприводимое представление однозначно определяется своим старшим весом.*

Предположим, что $\lambda(h_i)$, $i = 1, \ldots, r$, — неотрицательные целые числа. Покажем, что в этом случае пространство V конечномерно. Пусть L_i — подалгебра Ли алгебры Ли L, натянутая на элементы x_i, y_i, h_i. Пусть M_i — линейная оболочка вектора v и векторов вида $\pi(z_1)\ldots\pi(z_n)\,v$, где n — любое натуральное число, а $z_1, \ldots, z_n$ — произвольные элементы алгебры Ли L_i. Тогда подпространство M_i инвариантно относительно L_i и имеет старший вектор v. Но M_i является прямой суммой весовых пространств относительно L_i, причем любой вес алгебры Ли L_i в M_i имеет вид $\lambda - k\alpha_i$, где k — неотрицательное целое, поэтому пространство M_i порождается векторами $(\pi(y_i))^k v$, где k — неотрицательные целые числа (см. VIII). Если $j \neq i$, то $[x_j, y_i] = 0$, поэтому $\pi(x_j)\,\pi(y_i)^k v = \pi(y_i)^k \pi(x_j)\,v$; но $x_i \in N_+$, следовательно, $\pi(x_j)\,v = 0$ и $\pi(x_j)\,\pi(y_i)^k v = 0$. Таким образом, оператор $\pi(x_j)$ равен нулю на M_i. Пространство M_i есть прямая сумма весовых подпространств, причем пространство старшего веса одномерно (см. VIII); поэтому любое собственное инвариантное относительно L_i подпространство $M_i' \subset M_i$ содержится в подпространстве $\sum\limits_{\mu\neq\lambda} V_\mu$. Так как $\pi(x_j) = 0$ на M_i' при $j \neq i$, то подпространство M_i' инвариантно также относительно x_j при $j \neq i$. Следовательно, M_i' инвариантно относительно алгебры Ли N_+. Заметим теперь, что M_i' инвариантно относительно подалгебры Картана H. Действительно, так как $\alpha_i(h_i) = 2$, то различным весам представления π в подпространстве M_i — т. е. различным весам вида $(\lambda - k\alpha_i)$ — соответствуют разные веса представления алгебры Ли L_i в пространстве M_i; следовательно, $M_i' = \sum\limits_{\mu}(M_i' \cap V_\mu)$. Таким образом, подпространство M_i' инвариантно относительно алгебры Ли $B = H + N_+$, причем $M_I' \subset \sum\limits_{\mu\neq\lambda} V_\mu$. Следовательно, $\pi(U)M_i' = \pi(U_-)\,\pi(U_0)M_i' \subset \pi(U_-)\Bigl(\sum\limits_{\mu\neq\lambda} V_\mu\Bigr) \subset \sum\limits_{\mu\neq\lambda} V_\mu$. Тогда ненулевые векторы из M_i' не являются циклическими для представления π, что противоречит неприводимости представления π, если $\pi(U)M_i' \neq (0)$. Поэтому $\pi(U)M_i' = (0)$ и $M_i' = (0)$, т. е. представление алгебры Ли L_i в подпространстве M_i неприводимо. Согласно III п. 9.4 существует неприводимое конечномерное представление алгебры Ли L_i со старшим весом λ; как нам известно, неприводимое представление однозначно определяется старшим весом, т. е. M_i конечномерно.

Пусть $\mathscr{T}_i$ — семейство всех конечномерных подпространств пространства V, инвариантных относительно алгебры Ли L_i. Если $M, N \in \in \mathscr{T}_i$, то сумма $M + N$ также принадлежит $\mathscr{T}_i$. Кроме того, если $M \in \mathscr{T}_i$, то подпространство $\pi(L)M$ конечномерно и

$$\pi(L_i)\,\pi(L)M \subset \pi([L, L_i])M + \pi(L)\,\pi(L_1)M \subset \pi(L)M, \tag{12.1.3}$$

т. е. $\pi(L)M \subset \mathscr{T}_i$. Пусть $\widetilde{M}_i$ — объединение всех подпространств из семейства $\mathscr{T}_i$. Так как $\pi(L)M \in \mathscr{T}_i$ для $M \in \mathscr{T}_i$, то $\widetilde{M}_i$ инвариантно относительно L. С другой стороны, $M_i \in \mathscr{T}_i$ и $v \in M_i$, поэтому $v \in \widetilde{M}_i$ и $\widetilde{M}_i = V$.

Пусть μ — какой-нибудь вес представления π; пусть $v_\mu \in V_\mu$. Подпространство $\sum\limits_k V_{\mu+k\alpha_i}$ инвариантно относительно алгебры Ли L_i; по предыдущему, существует конечномерное подпространство M, инвариантное относительно L_i, содержащееся в $\sum\limits_k V_{\mu+k\alpha_i}$ и содержащее вектор v_μ. Так же, как и для представления π алгебры Ли L_α в пространстве $\widetilde{V}$, получаем тогда, что $S_i^*\mu$ — вес представления π. Так как группа Вейля W порождена преобразованиями S_i (см. VI § 11), то множество P весов представления π инвариантно относительно группы Вейля.

Согласно X все подпространства V_μ конечномерны. Покажем, что множество P конечно; отсюда будет следовать конечномерность пространства V. Пусть $\mu \in P$. Выберем из конечного множества весов, сопряженных весу μ относительно группы Вейля, такой вес ν, что $\sigma^*\nu - \nu$ не является линейной комбинацией корней α_i с неотрицательными целыми коэффициентами для всех $\sigma \in W \diagdown \{e\}$. Для веса $S_i^*\nu = = \nu - \nu(h_i)\,\alpha_i$ имеем $S_i^*\nu - \nu = -\nu(h_i)\,\alpha_i$, причем число $\nu(h_i)$ — целое вследствие равенств $\nu = \lambda - \sum m_j\alpha_j$ и $\nu(h_i) = \lambda(h_i) - \sum m_j\alpha_j(h_i)$, где $\lambda(h_i)$, m_j, $\alpha_j(h_i)$ — целые числа. Следовательно, $\nu(h_i) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$, т. е. всякий вес μ сопряжен такому весу ν, что $\nu(h_i)$ — неотрицательные целые для всех $i = 1, \ldots, r$. Пусть $\nu = \lambda - \sum m_i\alpha_i$. Обозначим $\beta = \sum m_i\alpha_i$; тогда

$$(\lambda, \lambda) = (\nu, \nu) + (\beta, \beta) + 2(\nu, \beta), \tag{12.1.4}$$

где

$$(\nu, \beta) = \sum m_i(\nu, \alpha_i) = (1/2) \sum m_i\nu(h_i)(\alpha_i, \alpha_i) \geqslant 0, \tag{12.1.5}$$

поэтому из (12.1.4) следует, что

$$(\lambda, \lambda) \geqslant (\nu, \nu), \tag{12.1.6}$$

т. е. вес ν содержится в множестве элементов целочисленной решетки вида $\lambda - \sum m_j\alpha_j$ в пространстве H_0^*, принадлежащих шару радиуса $\sqrt{(\lambda, \lambda)}$ с центром в начале координат. Следовательно, число весов ν конечно. Но всякий вес сопряжен относительно группы Вейля одному из весов ν, причем группа Вейля конечна; следовательно, множество P весов представления конечно, что завершает доказательство теоремы.

§ 13. Характеры конечномерных неприводимых представлений полупростой алгебры Ли

13.1. Определение характера и его простейшие свойства. Пусть π — неприводимое линейное представление алгебры Ли L в конечномерном комплексном линейном пространстве V. Представление π однозначно определяет представление универсальной обертывающей алгебры U алгебры Ли L, в том же пространстве V (см. II п. 6.3). Обозначим это представление снова через π. Положим

$$\chi(x) = (\dim V)^{-1} \operatorname{tr} \pi(x) \tag{13.1.1}$$

для всех $x \in U$. Очевидно, что формула (13.1.1) определяет линейную функцию χ на алгебре U. Эта функция χ называется *характером* [1]) представления π.

I. *Представление π определяется своим характером однозначно с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Согласно теореме Бернсайда (см. Наймарк [2]), операторы $\pi(x)$, $x \in U$, образуют алгебру всех линейных операторов в пространстве V. Пусть $\chi(ax) = 0$ для всех $x \in U$; тогда $\operatorname{tr} \pi(ax) = \operatorname{tr}(\pi(a)\,\pi(x)) = 0$ для всех $x \in U$. Следовательно,

$$\operatorname{tr}(\pi(a)\,T) = 0 \tag{13.1.2}$$

для всех линейных операторов T в пространстве V. Из (13.1.2) следует, что

$$\pi(a) = 0. \tag{13.1.3}$$

Обозначим через I идеал, состоящий из таких элементов $a \in U$, что $\chi(ax) = 0$ для всех $x \in U$. Из (13.1.3) следует, что фактор-алгебра ассоциативной алгебры U по идеалу I изоморфна алгебре $L(V)$ всех линейных операторов в пространстве V.

Пусть π и π' — представления алгебры Ли L в пространствах V и V' соответственно, и пусть характеры представлений π и π' равны. Тогда алгебры $L(V)$ и $L(V')$ изоморфны, поскольку обе эти алгебры изоморфны алгебре U/I. Как известно (см. Наймарк [2]), всякий

[1]) Иногда функцию $\chi(x)$, определенную формулой (13.1.1), называют *нормализованным характером* представления π, а функцию $\widetilde{\chi}(x) = \operatorname{tr} \pi(x)$, $x \in V$, — *характером* представления π.

изоморфизм между $L(V)$ и $L(V')$ порождается некоторым изоморфизмом между пространствами V и V'; этот изоморфизм между V и V' и устанавливает эквивалентность представлений π и π'.

13.2. Некоторые свойства обертывающей алгебры. Покажем, что всякий характер χ однозначно определяется своим ограничением на подалгебру $U(H) \subset U(L)$, т. е. на универсальную обертывающую алгебру подалгебры Картана H в L.

I. *Всякий элемент $x \in U$ можно представить в виде $h + \sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i]$, где $h \in U(H)$, $x_i \in L$, $y_i \in U$, так что пространство U есть сумма подпространств $U(H)$ и $[L, U]$. Кроме того, $U = U(H) + [U, U]$.*

Доказательство. Рассмотрим симметрическую алгебру S над пространством L (т. е. универсальную обертывающую алгебру абелевой алгебры Ли, построенной с помощью линейного пространства L введением в L нулевого коммутирования: $[x, y]_1 = 0$ для всех $x, y \in L$). Алгебра S есть фактор-алгебра тензорной алгебры T над L по идеалу J, порожденному элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$ $(x, y \in L)$. Пусть M — пространство симметрических тензоров на L. Применяя операцию симметризации к произвольному элементу тензорной алгебры T, видим, что пространство T есть прямая сумма пространств J и M. Таким образом, каноническое отображение T на $T/J = S$ является изоморфизмом — обозначим его f — пространства M на 5. Отождествим пространства M и S с помощью этого изоморфизма.

Продолжим присоединенное представление алгебры Ли L до представления алгебры Ли L в пространстве T, полагая

$$\operatorname{ad} x(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes [x, x_i] \otimes \ldots \otimes x_n. \tag{13.2.1}$$

Очевидно, что оператор $\operatorname{ad} x$ оставляет инвариантными подпространства J и M. Следовательно, ограничение операторов $\operatorname{ad} x$ на подпространство M определяет представление ρ алгебры Ли L в M; изоморфизм f пространства M на S определяет представление от алгебры Ли L в пространстве S, эквивалентное ρ, так что $\sigma = f \rho f^{-1}$.

Пусть I — идеал в тензорной алгебре T, порожденный элементами вида $\varphi_{x,y} = x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$. Из формулы (13.2.1) следует, что

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} z)(\varphi_{x,y}) = [z, x] \otimes y + x \otimes [z, y] - [z, y] \otimes x - \\ - y \otimes [z, x] - [z, [x, y]] = \varphi_{(\operatorname{ad} z)(x),\, y} + \varphi_{x,\, (\operatorname{ad} z)(y)}.\end{aligned} \tag{13.2.2}$$

Соотношение (13.2.2) показывает, что идеал I инвариантен относительно всех операторов $\operatorname{ad} x$, $x \in L$. Обозначим через τ представление алгебры Ли L в фактор-алгебре $Y = T/I$, определяемое представлением $z \to \operatorname{ad} z$ алгебры L в T. Из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта следует, что пространство T есть прямая сумма подпространства M и идеала I. Каноническое отображение алгебры T на $U = T/I$

определяет поэтому изоморфизм пространств M и U; очевидно, что этот изоморфизм осуществляет эквивалентность представлений ρ и τ алгебры Ли L в пространствах M и U соответственно. Отсюда следует, что представления ρ и τ эквивалентны. Очевидно также, что при изоморфизме между пространствами U и S, устанавливающем эквивалентность представлений τ и σ, подпространство $U(H) \subset U$ отображается на подпространство $S(H) \subset S$, где $S(H)$ — симметрическая алгебра над H.

Пусть R — наименьшее подпространство пространства S, содержащее $S(H)$ и инвариантное относительно представления σ алгебры Ли L. Пусть h — такой элемент подалгебры Ли H, что $\alpha(h) \neq 0$ для всякого корня α. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — некоторый набор корней; пусть $e_{\alpha_i} \in L^{\alpha_i}$; введем числа n_i так, чтобы имело место равенство $[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_i}] = n_i e_{\alpha_1+\alpha_i}$. Тогда из (13.2.1) следует равенство

$$(\operatorname{ad} e_{\alpha_1})(e_{\alpha_2} \ldots e_{\alpha_p} h^{n-p+1}) = \sum n_i e_{\alpha_2} \ldots e_{\alpha_1+\alpha_i} \ldots e_{\alpha_p} h^{n-p+1} - \\ - (-p+n+1)\, \alpha_1(h)\, e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_p} h^{n-p}. \quad (13.2.3)$$

Подпространство R содержит $S(H)$, в частности, $h^{n+1} \in R$. Из формулы (13.2.3) индукцией по p получаем тогда, что подпространство R (инвариантное относительно $\operatorname{ad} L$) содержит все элементы вида $e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_p} h^{n-p}$, $p = 1, \ldots, n$, где h выбран так, что $\alpha(h) \neq 0$ для всех корней α. Но любой элемент $h \in H$ есть разность таких элементов h_1 и h_2, что $\alpha(h_i) \neq 0$ для всех ненулевых корней α и $i = 1, 2$ (действительно, множество $h \in H$ таких, что $\alpha(h) = 0$ для некоторого ненулевого корня α, есть конечное объединение гиперплоскостей в H). Следовательно, пространство $S(H)$ порождается степенями всех элементов $h \in H$ таких, что $\alpha(h) \neq 0$ для ненулевых корней α. Отсюда в свою очередь следует, что подпространство R содержит все элементы вида $e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_p} h^k$ для всевозможных $h \in H$. Следовательно, $R = S$. Но, по определению R, любой элемент из R можно представить в виде суммы некоторого элемента из $S(H)$ и линейной комбинации элементов из подпространств вида $\sigma(x_1)(\sigma(x_2)(\ldots(\sigma(x_k)(S(H))\ldots)$, $x_1, \ldots, x_k \in L$, следовательно, $S = R \subset S(H) + \sum_{k\geqslant 1} (\sigma(L))^k(S(H))$. Тогда, используя изоморфизм между S и U видим, что $U \subset U(H) + \sum_{k\geqslant 1} (\operatorname{ad} L)^k(U(H))$, т. е. $U \subset U(H) + [L, U] \subset U(H) + [U, U] \subset U$ и $U = U(H) + [L, U] = U(H) + [U, U]$.

II. *Функция χ однозначно определяется своим ограничением на подалгебру $U(H)$.*

Доказательство сразу следует из I; так как след коммутатора двух линейных операторов равен нулю, то для любого $x \in U$ имеем

$$\chi(x) = (\dim V)^{-1} \operatorname{tr} \pi(x) = (\dim V)^{-1} \Big(\operatorname{tr} \pi\Big(h + \sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i]\Big)\Big) =$$

$$= (\dim V)^{-1} \operatorname{tr}\Big(\pi(h) + \sum_{i=1}^{m} [\pi(x_i), \pi(y_i)]\Big) = (\dim V)^{-1} \operatorname{tr} \pi(h) = \chi(h),$$

если $x = h + \sum\limits_{i=1}^{m} [x_i, y_i]$.

13.3. Некоторые вспомогательные предложения. Пусть V и V' — конечномерные векторные пространства, находящиеся в двойственности относительно билинейной формы (v, v'). Пусть $S^m(V)$ — линейная оболочка элементов вида $x_1 x_2 \ldots x_m$, где $x_1 \in V$ и порядок элементов $x_1, \ldots, x_m$ в $x_1 x_2 \ldots x_m$ не играет роли. Положим

$$(v_1 \ldots v_m, v'_1 \ldots v'_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^{m} (v_i, v'_{\sigma(j)}), \tag{13.3.1}$$

где S_m — группа подстановок индексов $1, 2, \ldots, m$. Так как выражение в правой части (13.3.1) полилинейно и симметрично отдельно по v_i и отдельно по v'_i, то формула (13.3.1) действительно определяет билинейную форму на $S^m(V) \times S^m(V')$. Из формулы (13.3.1) следует, в частности, что

$$(v_1 \ldots v_m, v'^m) = m! \prod_{i=1}^{m} (v_i, v') \tag{13.3.2}$$

для всех $v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v' \in V'$. Определим для любого $v' \in V'$ линейный функционал $e^{v'}$ на $S(V)$ (прямой сумме пространств $S^m(V)$), полагая

$$(v_1 \ldots v_p, e^{v'}) = \prod_{i=1}^{p} (v_i, v') \tag{13.3.3}$$

для всех натуральных p и всех $v_1, \ldots, v_p \in V$. Из формулы (13.3.2) следует, что имеет место формальное равенство

$$e^{v'} = \sum_{m \geqslant 0} (m!)^{-1} v'^m, \tag{13.3.4}$$

в котором предполагается, что v'^m обращается в нуль на $S^n(V)$ при $n \neq m$. Из соотношения (13.3.3) заключаем, что отображение $x \to (x, e^{v'})$ алгебры $S(V)$ в поле комплексных чисел есть гомоморфизм, переводящий 1 в 1 и v в (v, v'). Далее, из соотношения (13.3.4) и формулы бинома сразу следует, что

$$e^{v'_1} e^{v'_2} = e^{v'_1 + v'_2}, \tag{13.3.5}$$

где произведение в левой части понимается как произведение гомоморфизмов алгебры $S(V)$ в поле комплексных чисел, т. е. $(e^{v_1'}e^{v_2'})(x) = e^{v_1'}(x)\,e^{v_2'}(x)$ для всех $x \in S(V)$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — система простых корней алгебры Ли L; пусть $\alpha_i(h) = (h, h_i)$ для всех $h \in H$. Пусть P — аддитивная группа линейных функционалов λ на H таких, что $\lambda(h_i)$ — целые числа; пусть P_+ — подмножество в P, образованное такими $\lambda \in P$, что $\lambda(h_i) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Пусть A — алгебра комплексных функций на P, отличных от нуля лишь в конечном числе точек, в которой умножение определяется как свертка:

$$(f * g)(a) = \sum_{b+c=a} f(b)\,g(c). \tag{13.3.6}$$

Обозначим через e^λ функцию на P, равную единице в точке λ и нулю в остальных точках. Тогда $\{e^\lambda, \lambda \in P\}$ есть базис в A, причем

$$e^\lambda * e^\mu = e^{\lambda+\mu}. \tag{13.3.7}$$

Это соотношение позволяет отождествлять в дальнейшем элемент $e^\lambda \in A$ с функционалом e^λ на $S(H)$, определенным формулой (13.3.4).

Пусть B — подалгебра A, образованная линейными комбинациями элементов e^λ, где $\lambda \in P$. Положим $x_i = e^{\lambda_i}$, где $\lambda_i(h_i) = 1$ при $i = j$, $\lambda_i(h_i) = 0$ при $i \neq j$.

Из (13.3.7) следует, что любой элемент e^λ, где $\lambda \in P_+$, можно представить в виде $e^\lambda = (e^{\lambda_1})^{\lambda(h_1)} \ldots (e^{\lambda_r})^{\lambda(h_r)} = x_1^{\lambda(h_1)} \ldots x_r^{\lambda(h_r)}$, где $\lambda(h_i)$ — неотрицательные целые числа. Так как элементы e^λ, $\lambda \in P_+$, образуют базис в B, то алгебра B изоморфна алгебре многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_r$ с комплексными коэффициентами. Аналогично, алгебра A может быть отождествлена с алгеброй многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_r, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$.

Пусть W — группа Вейля алгебры Ли L, W^* — множество преобразований, сопряженных преобразованиями из группы W. Для любого $w \in W^*$ положим

$$\widetilde{w}(e^\lambda) = e^{w(\lambda)}, \quad \lambda \in P, \tag{13.3.8}$$

и продолжим преобразование $\widetilde{w}$ линейно на всю алгебру A. По определению, каждый элемент группы Вейля является ортогональным преобразованием, поэтому определитель любого преобразования w, $w \in W^*$, равен ± 1. Назовем элемент $a \in A$ *симметрическим*, если $\widetilde{w}(a) = a$ для всех $w \in W^*$, и *кососимметрическим*, если $\widetilde{w}(a) = (\det w)\,a$ для всех $w \in W^*$.

Элемент $a \in A$ тогда и только тогда является симметрическим (*соответственно кососимметрическим*), *когда $S_i^* a = a$* (*соответственно $S_i^* a = -a$*) *для всех $S_i^* = S_{\alpha_i}^*$*, $i = 1, \ldots, r$. Этот факт сразу следует из соотношения $\det S_i^* = -1$, так как элементы S_i порождают всю группу Вейля W (см. § 11).

Введем в алгебре A *операцию альтернирования*, полагая

$$\operatorname{Alt}(a) = \sum_{w\in W^*} (\det w)\, \widetilde{w}(a). \qquad (13.3.9)$$

I. *Элемент* $\operatorname{Alt}(a)$ *кососимметричен для любого* $a \in A$.

Доказательство. Если $w_0 \in W$, то

$$\widetilde{w}_0(\operatorname{Alt}(a)) = \sum_{w\in W^*} (\det w)\, \widetilde{w}_0\widetilde{w}(a) = \sum_{w\in W^*} \det(w_0^{-1}w)\, \widetilde{w}(a) =$$
$$= \det(w_0^{-1}) \sum_{w\in W^*} (\det w)\, \widetilde{w}(a) = \det(w_0^{-1}) \operatorname{Alt}(a) = \det(w_0) \operatorname{Alt}(a).$$

Если a — кососимметрический элемент, то из формулы (13.3.9) сразу следует, что $\operatorname{Alt}(a) = |W|a$, где $|W|$ — порядок группы Вейля. Следовательно, отображение $a \to |W|^{-1}\operatorname{Alt}(a)$ является оператором, проектирующим алгебру A на множество C кососимметрических элементов алгебры A. Очевидно, что C — линейное подпространство в A. Следовательно, любой элемент $x \in C$ может быть представлен как линейная комбинация элементов $\operatorname{Alt}(e^\lambda) = \sum\limits_{w\in W^*} (\det w)\, e^{w(\lambda)}$. Очевидно, что $\operatorname{Alt}(e^{w(\lambda)}) = (\det w)\operatorname{Alt}(e^\lambda)$ для всех $\lambda \in P$, $w \in W^*$, поэтому при построении базиса в пространстве C из элементов вида $\operatorname{Alt}(e^\lambda)$ можно ограничиться элементами e^λ для таких линейных функционалов λ, что $\lambda \geqslant w(\lambda)$ при всех $w \in W^*$. Действительно, для любого $\lambda \in P$ среди конечного множества $w(\lambda)$, $w \in W^*$, есть функционал λ_0, максимальный в этом множестве относительно лексикографического упорядочения, и $\operatorname{Alt}(e^{\lambda_0})$ пропорционален $\operatorname{Alt}(e^\lambda)$.

Изучим свойства функционалов $\lambda \in P$ таких, что $w(\lambda) \leqslant \lambda$ при всех $w \in W^*$.

II. *Симметрия* S_i^* *переставляет между собой положительные корни, не равные* α_i; *кроме того*, $S_i^*(\alpha_i) = -\alpha_i$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{r} m_k\alpha_k$ положителен. Тогда $S_i^*\alpha = \alpha - 2(\alpha, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1}\alpha_i = (m_i - 2(\alpha, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1})\,\alpha_i + {}$ $+ \sum\limits_{k\neq i} m_k\alpha_k$. Так как $\{\alpha_k\}$ — система простых корней, то все коэффициенты в разложении $S_i^*\alpha$ по этой системе должны быть одного знака. Если $m_i < 2(\alpha, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1}$, то $m_k \leqslant 0$ при $k \neq i$. С другой стороны, α — положительный корень, поэтому $m_k \geqslant 0$. Следовательно, $m_k = 0$ при $k \neq i$, т. е. α пропорционален α_i. Согласно III п. 9.5 это означает, что $\alpha = \alpha_i$; тогда $S^*\alpha_i = \alpha_i - 2(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_I, \alpha_i)^{-1}\alpha_i = -\alpha_i$. Если же $m_i \geqslant 2(\alpha, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1}$, то все коэффициенты в разложении $S_i^*\alpha$ по системе $\{\alpha_k\}$ неотрицательны, т. е. $S_i^*(\alpha)$ — положительный корень.

III. *Если* $\lambda \geqslant S_i^*(\lambda)$, *то* $\lambda(h_i) \geqslant 0$.

Доказательство. $S_i^*(\lambda) = \lambda - 2(\lambda, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_i)^{-1}\alpha_i$, поэтому условие $\lambda \geqslant S_i^*(\lambda)$ равносильно условию $(\lambda, \alpha_i) \geqslant 0$, т. е. $\lambda(h_i) \geqslant 0$.

IV. *Пусть* $\lambda \in P$. *Условие* $w(\lambda) < \lambda$ *выполняется для всех* $w \in W^*$, $w \neq 1$, *тогда и только тогда, когда* $\lambda(h_i) > 0$ *для* $i = 1, \ldots, r$.

Доказательство. Если $\lambda(h_i) \leqslant 0$, то $S_i^*(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\,\alpha_i \geqslant \lambda$. Обратно, пусть $\lambda(h_i) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Покажем, что $w(\lambda) < \lambda$ для всех $w \in W^*$, $w \neq 1$. Это условие выполнено для $w = S_i^*$, так как $\lambda > S_i^*(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\,\alpha_i$. Пусть $p > 1$; пусть неравенство $\lambda > w(\lambda)$ доказано для всех $w \in W^*$, представимых в виде произведения $q < p$ симметрии S_i^*. Предположим, что $w = S_{i_1}^* \ldots S_{i_p}^* = w_0 S_{i_p}^*$, где $w_0 = S_{i_1}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*$. Тогда $w(\lambda) = w_0(S_{i_p}^* \lambda) = w_0(\lambda) - \lambda(h_{i_p})\, w_0(\alpha_{i_p})$. Если $w_0(\alpha_{i_p})$ — положительный корень, то $w(\lambda) < w_0(\lambda) < \lambda$. Если $w_0(\alpha_{i_p})$ — отрицательный корень, обозначим через k наименьшее число, обладающее тем свойством, что $S_{i_l}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p}) > 0$ при всех $l \geqslant k$. По условию, $w_0(\alpha_{i_p}) < 0$, поэтому $k > 1$; с другой стороны, можно считать, что $S_{i_{p-1}}^* \neq S_{i_p}^*$ (в противном случае можно сократить выражение для w, пользуясь равенством $S_{i_p}^{*^2} = 1$), поэтому из II следует, что $S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p}) > 0$, т. е. $k \leqslant p - 1$. По определению, $S_{i_k}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p}) > 0$ и $S_{i_{k-1}}^*(S_{i_k}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p})) < 0$. Согласно II отсюда следует, что $S_{i_k}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*(\alpha_{i_p}) = \alpha_{i_{k-1}}$. Полагая $w_0' = S_{i_1}^* \ldots S_{i_{k-2}}^*$, $w_0'' = S_{i_k}^* \ldots S_{i_{p-1}}^*$, видим, что $w_0 = w_0' S_{i_{k-1}}^* w_0''$, где $w_0''(\alpha_{i_p}) = \alpha_{i_{k-1}}$. Очевидно, что $w_0'' S_\alpha^* (w_0'')^{-1} = S_{w_0''(\alpha)}^*$, в частности, $w_0'' S_{i_p}^* (w_0'')^{-1} = S_{i_{k-1}}^*$, $w_0'' S_{i_p}^* = S_{i_{k-1}}^* w_0''$ и $w = w_0 S_{i_p}^* = w_0' S_{i_{k-1}}^* w_0'' S_{i_p}^* = w_0' S_{i_{k-1}}^{*^2} w_0'' = w_0' w_0''$, т. е. w представимо в виде произведения $p - 2$ симметрий S_i^*, и неравенство $w(\lambda) < \lambda$ выполняется по предположению индукции.

V. *Если* $\lambda(h_i) = 0$ *для некоторого* $i = 1, \ldots, r$, *то* $\mathrm{Alt}(e^\lambda) = 0$.

Доказательство. Из условия следует, что $S_i^*(\lambda) = \lambda$. Пусть W' — подмножество в W, пересекающее каждый смежный класс wH группы W по подгруппе $H = \{1, S_i\}$ ровно по одному разу. Тогда

$$\mathrm{Alt}(e^\lambda) = \sum_{w \in (W')^*} \{(\det w)\, e^{w(\lambda)} + \det(w S_i^*)\, e^{(w S_i^*)(\lambda)}\} = 0,$$

так как $\det S_i^* = -1$.

VI. *Всякий кососимметрический элемент алгебры* A *есть линейная комбинация элементов вида* $\mathrm{Alt}(e^\lambda)$, *где* $\lambda(h_i) > 0$ *при всех* $i = 1, \ldots, r$.

Доказательство. Если $\alpha \in C$, то α есть линейная комбинация элементов вида $\mathrm{Alt}(e^\lambda)$ и можно считать, что $\lambda \geqslant w(\lambda)$ для $w \in W^*$. Остается применить III, IV и V.

VII. *Пусть α — ненулевой корень, $a \in A$, $\widetilde{S}^*_\alpha a = -a$. Тогда элемент a представи́м в виде $a = (1 - e^{-a})\, b$, где $b \in A$.*

Доказательство. Так как $(1 - \widetilde{S}^*_a)\, a = 2a$, то, полагая $a = \sum a_\lambda e^\lambda$, $a_\lambda \in \mathbf{C}$, и применяя (13.3.8) и (13.3.5), имеем

$$a = (1/2)(1 - \widetilde{S}^*_\alpha)\, a = (1/2) \sum a_\lambda (1 - \widetilde{S}^*_\alpha)\, e^\lambda = \\ = \sum (a_\lambda/2)(e^\lambda - e^{\lambda - \lambda(h_\alpha)\,\alpha}) = \sum (a_\lambda/2)\, e^\lambda \{1 - (e^{-\alpha})^{\lambda(h_\alpha)}\},$$

где $\lambda(h_\alpha)$ — целые числа. Так как $1 - (e^{-\alpha})^{\lambda(h_\alpha)} = (1 - e^{-\alpha})\, b_\lambda$ для некоторого $b_\lambda \in A$, то $a = (1 - e^{-\alpha}) \sum (a_\lambda/2)\, e^\lambda b_\lambda$.

Обозначим через ρ полусумму всех положительных корней алгебры Ли L.

VIII. *Если $a \in C$, то $a = Db$, где $b \in A$, а*

$$D = e^\rho \prod_{\alpha \geqslant 0} (1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha > 0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}). \tag{13.3.10}$$

Доказательство. Напомним, что алгебра A изоморфна алгебре многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_r, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$. Элементы e^α соответствуют некоторым одночленам в алгебре A. Элементы $x_i - 1$, $i = 1, \ldots, r$, принадлежат алгебре многочленов от $x_1, \ldots, x_r$ и, очевидно, являются неприводимыми элементами [1] этой алгебры. Для любого $\alpha > 0$ элемент e^α переводится в e^{α_i} некоторым преобразованием w группы Вейля, поэтому элементы алгебры многочленов от $x_1, \ldots, x_r$, соответствующие элементам $e^\alpha - 1$ подалгебры $B \subset A$, являются неприводимыми элементами алгебры A. Действительно, если $e^\alpha - 1 = a_1 a_2$, где $a_1, a_2 \in A$, то $e^{\alpha_i} - 1 = b_1 b_2$, где $b_1 = \widetilde{w}(a_1)$, $b_2 = (\widetilde{w}(a_2)$, поэтому $x_1 - 1 = f_1(x)\, f_2(x)$, где f_1 и f_2 — многочлены от $x_1, \ldots, x_r, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$. Умножая последнее равенство на бо́льшую степень одночлена $x_1, \ldots, x_r$, видим, что $x_1^{2N} \ldots x_r^{2N} (x_i - 1) = P_1(x) P_2(x)$, где $P_i = x_1^N \ldots x_r^N f_i(r)$, $i = 1, 2$, — многочлены от $x_1, \ldots, x_r$. Из однозначности разложения на простые сомножители в кольце многочленов от n переменных (см. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, § 51, с. 315) следует, что один из многочленов P_1 и P_2 является одночленом от $x_1, \ldots, x_r$, следовательно, либо f_1, либо f_2 является одночленом от $x_1, \ldots, x_r, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$, т. е. обратимым элементом алгебры A.

Пусть $a \in C$; так как $\det S^*_\alpha = -1$, то $S^*_\alpha a = -a$ для всех $a > 0$. Согласно VII отсюда следует, что элемент a представи́м в виде произведения $(1 - e^{-\alpha})\, b_\alpha$, где $b_\alpha \in A$ для всех $\alpha > 0$. Элементы $(1 - e^{-\alpha}) = e^{-\alpha}(e^\alpha - 1)$ взаимно просты при разных $\alpha > 0$, поэтому

[1] Напомним, что элемент x коммутативной алгебры A называется *неприводимым*, или *простым*, если в любом разложении $x = x_1 x_2$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ хотя бы один из элементов x_1 и x_2 обратим в A.

из теоремы о разложении на простые сомножители в кольце многочленов от n переменных следует, что элемент $a \in C$ представи́м в виде $a = \prod\limits_{\alpha>0} (1 - e^{-\alpha})\, b_1 = e^{\rho} \prod\limits_{\alpha\geqslant 0} (1 - e^{-\alpha})(e^{-\rho} b_1) = Db$, где b_1, $b \in A$. Предложение VIII доказано.

Найдем $S_i^* D$. Множители в D, отличные от $e^{\alpha_i/2} - e^{-\alpha_i/2}$, переставляются между собой согласно II, в то время как $e^{\alpha_i/2} - e^{-\alpha_i/2}$ переходит в $e^{-\alpha_i/2} - e^{\alpha_i/2} = -(e^{\alpha_i/2} - e^{-\alpha_i/2})$. Следовательно, $S_i^* D = -D$ для всех $i = 1, \ldots, r$, поэтому $D \in C$.

IX. $D = \operatorname{Alt}(e^{\rho})$.

Доказательство. Согласно формуле (13.3.10) элемент D есть линейная комбинация элементов e^{λ} с показателями λ такими, что $\rho \geqslant \lambda \geqslant -\rho$. Следовательно, если $D = \sum c_\lambda \operatorname{Alt}(e^{\lambda})$, то можно считать, что сумма в правой части распространяется лишь на такие λ, что $\rho \geqslant w(\lambda) \geqslant -\rho$ для всех $w \in W^*$. Действительно, если существуют такие $\lambda \in P$ и $w \in W^*$, что $c_\lambda \neq 0$, но соотношение $\rho \geqslant w(\lambda) \geqslant -\rho$ не выполняется, то из равенства $\operatorname{Alt}(e^{\lambda}) = \sum\limits_{w\in W^*} (\det w)\, e^{w(\lambda)}$ и определения чисел c_λ следует, что в разложение элемента $D \in A$ по базису $\{e^{\lambda}\}$ входит элемент e^{μ} с показателем $\mu = w(\lambda)$, не удовлетворяющим неравенству $\rho \geqslant \mu \geqslant -\rho$. С другой стороны, каждый элемент $\operatorname{Alt}(e^{\lambda})$ кососимметричен, и из VIII следует, что $\operatorname{Alt}(e^{\lambda}) = Db_\lambda$, где $b_\lambda \in A$.

Сравним старшие и младшие члены левой и правой части равенства $\operatorname{Alt}(e^{\lambda}) = Db_\lambda$. Старший член e^{μ} произведения Db_λ равен произведению старших членов в D и в b_λ, т. е. $\mu \geqslant \rho$; аналогично, младший член e^{ν} произведения Db_λ равен произведению младших членов в D и в b_λ т. е. $\nu \leqslant -\rho$; с другой, стороны, старший и младший члены выражения $\operatorname{Alt}(e^{\lambda})$, имеют, по условию, показатели между ρ и $-\rho$. Следовательно, старший и младший члены b_λ суть постоянные, т. е. b_λ — константа, причем λ получается из ρ преобразованием группы Вейля, т. е. можно считать, что $\lambda = \rho$. Таким образом, D и $\operatorname{Alt}(e^{\rho})$ пропорциональны; так как старшие члены у D и $\operatorname{Alt}(e^{\rho})$ равны e^{ρ}, то $D = \operatorname{Alt}(e^{\rho})$.

X. $\rho(h_i) = 1$.

Доказательство. С одной стороны,

$$S_i^* \rho = \rho - \rho(h_i)\, \alpha_i; \tag{13.3.11}$$

с другой стороны, из II сразу следует, что

$$S_i^* \rho = S_i^* \left((1/2) \sum \alpha_j\right) = (1/2) S_i^* \left(\sum \alpha_j\right) = \\ = (1/2)\left(\sum \alpha_j - 2\alpha_i\right) = \rho - \alpha_i. \tag{13.3.12}$$

Сравнивая правые части равенств (13.3.11) и (13.3.12), получаем, что $\rho(h_i) = 1$.

XI. *Пусть a — симметрический элемент алгебры A. Тогда a есть линейная комбинация элементов вида* $\operatorname{Alt}(e^{\lambda+\rho})/\operatorname{Alt}(e^{\rho})$, $\lambda \in P_+$.

Доказательство. Элемент aD является кососимметрическим элементом алгебры A; согласно VI он представи́м в виде $aD = \sum c_\mu \operatorname{Alt}(e^\mu)$, где $\mu(h_i) > 0$ при всех $i = 1, \ldots, r$, и $\mu(h_i)$ — целые числа. Положим $\mu = \lambda + \rho$. Тогда из X следует, что $\lambda(h_i) = \mu(h_i) - \rho(h_i) = \mu(h_i) - 1 \geqslant 0$; таким образом, $\lambda \in P_+$ и $aD = \sum c_{\lambda+\rho} \operatorname{Alt}(e^{\lambda+\rho})$, где $\lambda \in P_+$. Каждый из элементов $\operatorname{Alt}(e^{\lambda+\rho})$ кососимметричен (см. I); согласно предложениям VIII и IX имеет место равенство $\operatorname{Alt}(e^{\lambda+\rho}) = a_\lambda D = a_\lambda \operatorname{Alt}(e^\rho)$, где a_λ — некоторый элемент алгебры A. Таким образом, $aD = \sum c_{\lambda+\rho} a_\lambda D$, т. е. $a = \sum c_{\lambda+\rho} a_\lambda$, где $a_\lambda = \operatorname{Alt}(e^{\lambda+\rho}) / \operatorname{Alt}(e^\rho)$.

13.4. Формула Вейля для характеров. Приступим теперь к вычислению характера неприводимого линейного представления π алгебры Ли L в конечномерном векторном пространстве V. Очевидно, что $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ имеет нулевой след для всех $x, y \in U(L) = U$. Поэтому из предложения II п. 12.2 следует, что для определения характера представления достаточно найти величины $\operatorname{tr} \pi(h)$ для $h \in U(H)$.

Пусть λ — старший вес представления π. Обозначим через n_μ кратность веса μ в представлении π, т. е. размерность пространства V_μ. Пусть $h \in U(H) \subset U(L)$; тогда оператор $\pi(h)$ действует на подпространстве V_μ как скалярный оператор. Собственное значение оператора $\pi(h)$ на подпространстве V_μ определяет гомоморфизм алгебры $U(H)$ в поле $\mathbf{C}$. Так как H — абелева алгебра Ли, то $U(H)$ и $S(H)$ канонически изоморфны; гомоморфизм алгебры $S(H)$ в $\mathbf{C}$, переводящий 1 в 1 и элементы $h \in H$ в $\mu(h)$, есть гомоморфизм $e^\mu = \sum\limits_{m \geqslant 0} (m!)^{-1} \mu^m$. Таким образом, собственное значение оператора $\pi(h)$ в подпространстве V_μ равно (h, e^μ), поэтому

$$\operatorname{tr} \pi = \sum_\mu n_\mu (h, e^\mu) = \Big(h, \sum_\mu n_\mu e^\mu\Big), \tag{13.4.1}$$

причем $\dim V = \sum\limits_\mu n_\mu$.

Рассмотрим элемент

$$\varphi_\lambda = \sum_\mu n_\mu e^\mu \tag{13.4.2}$$

алгебры A. Если μ_1 и μ_2 сопряжены относительно группы Вейля, то $n_{\mu_1} = n_{\mu_2}$ согласно теореме 1 § 12. Поэтому φ_λ — симметрический элемент. Из X п. 12.3 следует, что φ_λ есть линейная комбинация элементов вида $\operatorname{Alt}(e^{\mu+\rho}) / \operatorname{Alt}(e^\rho)$.

I. *Пусть* $e_\alpha \in L^\alpha$ *при всех* $\alpha \neq 0$ *и* $\operatorname{tr}(\mu, \alpha)$ — *след ограничения оператора* $\pi(e_\alpha)\, \pi(e_{-\alpha})$ *на подпространство* V_μ. *Если* $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$, *то*

$$t(\mu, \alpha) - t(\mu + \alpha, \alpha) = n_\mu (\mu, \alpha). \tag{13.4.3}$$

Доказательство. Пусть E — сумма подпространств V_λ и $V_{\lambda+\alpha}$. Введем линейные операторы P_+, P_- в E, полагая $P_+ x = \pi(e_\alpha)\,x$, $P_+ y = 0$; $P_- x = 0$, $P_- y = \pi(e_{-\alpha})\,y$ для всех $x \in V_\lambda$, $y \in V_{\lambda+\alpha}$. Тогда $[P_+, P_-]\,x = -\pi(e_{-\alpha})\,\pi(e_\alpha)\,x = (\lambda, \alpha)\,x - \pi(e_\alpha)\,\pi(e_{-\alpha})\,x$; $[P_+, P_-]\,y = \pi(e_\alpha)\,\pi(e_{-\alpha})\,y$, поэтому след оператора $[P_+, P_-]$, равный нулю, равен одновременно $n_\mu(\lambda, \alpha) - t(\mu, \alpha) + t(\mu+\alpha, \alpha)$, откуда и следует формула (13.4.3).

Пусть $k_i \in H$ выбраны так, что $(h_i, k_i) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Согласно (6.4.2) элемент $z = \sum\limits_\alpha e_\alpha e_{-\alpha} + \sum\limits_i h_i k_i$ является элементом Казимира, соответствующим присоединенному представлению алгебры Ли L. Элемент z принадлежит центру алгебры $U = U(L)$. Поэтому из неприводимости представления π и леммы Шура следует, что оператор $\pi(z)$ скалярен, т. е. $\pi(z) = c \cdot 1$. Вычисляя след оператора $\pi(z)$ в подпространстве V_μ, получаем

$$c\,n_\mu = \operatorname{tr}_{V_\mu} \pi(z) = \sum \operatorname{tr}_{V_\mu}(\pi(e_\alpha)\,\pi(e_{-\alpha})) + \sum \operatorname{tr}_{V_\mu}(\pi(h_i)\,\pi(k_i)) = \\ = \sum_\alpha t(\mu, \alpha) + \sum_i n_\mu \mu(h_i)\,\mu(k_i). \quad (13.4.4)$$

Но из условия $(h_i, k_j) = \delta_{ij}$ заключаем, что $\sum\limits_i \mu(h_i)\,\mu(k_i) = (\mu, \mu)$, поэтому из (13.4.4) следует равенство

$$c\,n_\mu = \sum_\alpha t(\mu, \alpha) + n_\mu(\mu, \mu),$$

т. е.

$$\sum_\alpha t(\mu, \alpha) = n_\mu(c - (\mu, \mu)). \quad (13.4.5)$$

Пусть Q — тензорное произведение $A \otimes H^*$. Введем в Q «скалярное произведение» со значениями в A, полагая

$$(a \otimes \lambda, b \otimes \mu) = ab(\lambda, \mu) \quad (13.4.6)$$

и распространяя его линейно на все пространство Q. Положим также

$$a(b \otimes \lambda) = (ab) \otimes \lambda; \quad (13.4.7)$$

это правило, распространенное линейно на все пространство Q, определяет представление алгебры A в пространстве Q. Положим

$$\Delta(e^\lambda) = (\lambda, \lambda)\,e^\lambda, \quad (13.4.8)$$

$$g(e^\lambda) = e^\lambda \otimes \lambda \quad (13.4.9)$$

для всех $e^\lambda \in A$ и продолжим отображения Δ и g линейно до линейных операторов из пространства A в пространства A и Q соответственно. Как легко проверить, имеют место равенства

$$g(ab) = bg(a) + ag(b), \quad (13.4.10)$$

$$\Delta(ab) = a\Delta(b) + 2(g(a), g(b)) + \Delta(a)\,b \quad (13.4.11)$$

(достаточно проверить эти соотношения для $a = e^{\lambda}$, $b = e^{\mu}$; тогда соотношение (13.4.10) сразу следует из определений (13.4.7) и (13.4.9), а формула (13.4.11) использует равенство $(\lambda + \mu, \lambda + \mu) = (\lambda, \lambda) + 2(\lambda, \mu) + (\mu, \mu)$).

Рассмотрим теперь элемент

$$R = \prod_{\alpha \neq 0} (e^{\alpha} - 1) = \prod_{\alpha > 0} (e^{\alpha} - 1)(e^{-\alpha} - 1) = -D^2 \qquad (13.4.12)$$

и найдем произведение

$$R(c\varphi_{\lambda} - \Delta\varphi_{\lambda}) = T. \qquad (13.4.13)$$

В силу (13.4.2)

$$T = \prod_{\beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) \left(c \sum n_{\mu} e^{\mu} - \Delta \left(\sum n_{\mu} e^{\mu} \right) \right) = \\ = \prod_{\beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) \sum_{\mu} n_{\mu} e^{\mu} (c - (\mu, \mu)). \qquad (13.4.14)$$

Из соотношения (13.4.5) следует тогда, что

$$T = \prod_{\beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) \sum_{\mu} e^{\mu} \sum_{\alpha} t(\mu, \alpha) = \\ = \sum_{\alpha} \Bigg(\prod_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \neq 0}} (e^{\beta} - 1) \Bigg) (e^{\alpha} - 1) \sum_{\mu} t(\mu, \alpha)\, e^{\mu} = \\ = \sum_{\alpha} \Bigg(\prod_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \neq 0}} (e^{\beta} - 1) \Bigg) \sum_{\mu} t(\mu, \alpha)(e^{\mu + \alpha} - e^{\mu}). \qquad (13.4.15)$$

Меняя порядок суммирования, получаем, что

$$T = \sum_{\alpha} \prod_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \neq 0}} (e^{\beta} - 1) \sum_{\mu} e^{\mu + \alpha} (t(\mu, \alpha) - t(\mu + \alpha, \alpha)).$$

Поэтому из I и (13.4.6) следует, что

$$T = \sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha, \beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) \sum_{\mu} n_{\mu} (\mu, \alpha)\, e^{\mu + \alpha} = \\ = \Bigg(\sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha, \beta \neq 0} (e^{\beta} - 1)(e^{\alpha} \otimes \alpha),\ \sum_{\mu} n_{\mu} (e^{\mu} \otimes \mu) \Bigg). \qquad (13.4.16)$$

Согласно (13.4.12) $R = \prod_{\alpha \neq 0} (e^{\alpha} - 1)$, поэтому из (13.4.10) и (13.4.9) следует равенство

$$g(R) = \sum_{\alpha \neq 0} \Bigg(\prod_{\beta \neq \alpha, \beta \neq 0} (e^{\beta} - 1) \Bigg) (e^{\alpha} \otimes \alpha). \qquad (13.4.17)$$

С другой стороны, из (13.4.2) следует, что $\sum\limits_{\mu} n_\mu (e^\mu \otimes \mu) = g\left(\sum n_\mu e^\mu\right) = g(\varphi_\lambda)$. Отсюда и из (13.4.7) получаем после подстановки в (13.4.16), что

$$T = (g(R), g(\varphi_\lambda)). \tag{13.4.18}$$

Подставляя (13.4.18) в (13.4.13), видим, что $R(c\varphi_\lambda - \Delta\varphi_\lambda) = (g(R), g(\varphi_\lambda))$. Разделим это равенство на $(-D)$ и заметим, что $g(R) = g(-D^2) = -2Dg(D)$ согласно (13.4.10), поэтому

$$D(c\varphi_\lambda - \Delta\varphi_\lambda) = 2(g(D), g(\varphi_\lambda)). \tag{13.4.19}$$

Следовательно,

$$c(D\varphi_\lambda) = D\Delta(\varphi_\lambda) + 2(g(D), g(\varphi_\lambda));$$

пользуясь равенством (13.4.11), получаем, что

$$c(D\varphi_\lambda) = \Delta(Dvi_\lambda) - \Delta(D)\,\varphi_\lambda. \tag{13.4.20}$$

Рассмотрим выражение $\Delta(D) = \Delta(\mathrm{Alt}(e^\rho))$. Для любого $w \in W^*$ имеем $(w(\rho), w(\rho)) = (\rho, \rho)$, так как преобразование w ортогонально. Тогда из (13.4.8) следует, что $\Delta(D) = (\rho, \rho)D$, т. е. в силу (13.4.20)

$$\Delta(D\varphi_\lambda) = (c + (\rho, \rho))(D\varphi_\lambda), \tag{13.4.21}$$

и $D\varphi_\lambda$ есть собственный вектор оператора Δ. Найдем соответствующее собственное значение. Заметим, что старший член произведения $D\varphi_\lambda$ равен $e^\rho e^\lambda = e^{\rho+\lambda}$; при применении оператора Δ он умножается на $(\lambda + \rho, \lambda + \rho)$, поэтому

$$\Delta(D\varphi_\lambda) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)(D\varphi_\lambda). \tag{13.4.22}$$

С другой стороны, элемент $D\varphi_\lambda$ к антисимметричен, откуда следует равенство

$$|W|D\varphi_\lambda = \mathrm{Alt}(D\varphi_\lambda) = \sum_{w\in W^*}\sum_{\mu} (\det w)\, n_\mu\, \mathrm{Alt}(e^{\mu + w\rho}). \tag{13.4.23}$$

Член этой суммы, отвечающий $w \in W^*$, есть собственный вектор оператора Δ с собственным значением $(\mu + w\rho, \mu + w\rho)$, следовательно, можно ограничиться лишь слагаемыми с $(\mu + w\rho, \mu + w\rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$. Определим эти слагаемые.

II. *Если μ — вес представления π, не равный λ, то $(\mu + w\rho, \mu + w\rho) < (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 § 12 (см. (12.1.6)) всякий вес μ сопряжен относительно группы Вейля такому весу ν, что $\nu(h_i) \geqslant 0$ и $(\nu, \nu) \leqslant (\lambda, \lambda)$, причем $(\mu, \mu) - (\nu, \nu)$. С другой стороны,

$w^{-1}(\mu)$ есть вес представления π, поэтому $w^{-1}(\mu) = \lambda - \sum m_i\alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные числа. Следовательно,

$$(\mu,\, w\rho) = (w^{-1}(\mu),\, \rho) = (\lambda,\, \rho) - \sum_i m_i(\rho,\, \alpha_i), \tag{13.4.24}$$

$$(\lambda+\rho,\, \lambda+\rho) - (\mu + w\rho,\, \mu + w\rho) = \\ = (\lambda,\, \lambda) - (\mu,\, \mu) + 2\sum_i m_i(\rho,\, \alpha_i). \tag{13.4.25}$$

Согласно IX п. 13.3, $\rho(h_i) = 2(\rho,\, \alpha_i)(\alpha_i,\, \alpha_i)^{-1} = 1$, так что

$$(\lambda+\rho,\, \lambda+\rho) - (\mu + w\rho,\, \mu + w\rho) = \\ = (\lambda,\, \lambda) - (\mu,\, \mu) + \sum_i m_i(\alpha_i,\, \alpha_i) \geqslant 0, \tag{13.4.26}$$

причем равенство может иметь место лишь в случае, если все m_i равны нулю, т. е. $w^{-1}(\mu) = \lambda$.

Из предложения II следует, что в сумме по μ, стоящей в правой части формулы (13.4.23), отлично от нуля лишь слагаемое с $\mu = \lambda$, поэтому

$$D\varphi_\lambda = |W|^{-1} \sum_{w\in W^*} (\det w)^2 n_\lambda \operatorname{Alt}(e^{\lambda+\rho}) = n_\lambda \operatorname{Alt}(e^{\lambda+\rho}),$$

т. е.

$$\varphi_\lambda = \operatorname{Alt}(e^{\lambda+\rho}) / \operatorname{Alt}(e^{\rho}), \tag{13.4.27}$$

так как $n_\lambda = 1$.

Объединяя соотношения (13.4.1), (13.4.2) и (13.4.27), видим, что нами доказана

Теорема 1. *Характер неприводимого конечномерного представления π полупростой комплексной алгебры Ли L вычисляется по формуле*

$$\operatorname{tr}(h) = \left(h,\, \frac{\sum\limits_{w\in W^*} (\det w)\, e^{w(\lambda+\rho)}}{\sum\limits_{w\in W^*} (\det w)\, e^{w(\rho)}} \right) \tag{13.4.28}$$

для всех $h \in U(H)$, где λ — старший вес представления π, H — подалгебра Картана в L, W^* — соответствующая группа Вейля, ρ — полусумма положительных корней.

Формула (13.4.28) называется *формулой Вейля для характеров*.

Найдем теперь размерность представления π.

Теорема 2. *Размерность неприводимого конечномерного представления π полупростой комплексной алгебры Ли L вычисляется* *по формуле*

$$\dim \pi = \frac{\prod\limits_{\alpha>0} (\lambda+\rho,\, \alpha)}{\prod\limits_{\alpha>0} (\rho,\, \alpha)}. \tag{13.4.29}$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм алгебры A в поле $\mathbf{C}$, при котором все элементы e^{λ}, $\lambda \in P$, переходят в 1. Этот гомоморфизм сводится к суперпозиции двух гомоморфизмов: сопоставлению элементу e^{λ} степенного ряда $e^{x(\lambda,\, \rho)}$ от переменного x и последующего взятия свободного члена степенных рядов. Пусть ψ_{μ} — гомоморфизм, переводящий e^{λ} в $e^{x(\lambda,\, \mu)}$. Тогда

$$\psi_{\mu}(\mathrm{Alt}(e^{\lambda})) = \sum_{w} (\det w)\, e^{x(w\lambda,\, \mu)} = \\ = \sum_{w} (\det w)\, e^{x(\lambda,\, w^{-1}\mu)} = \psi_{\lambda}(\mathrm{Alt}(e^{\mu})), \tag{13.4.30}$$

поэтому

$$\psi_{\rho}(\mathrm{Alt}(e^{\lambda})) = \psi_{\lambda}(\mathrm{Alt}(e^{\rho})) = \prod_{\alpha>0} (e^{x(\alpha,\, \lambda)/2} - e^{-x(\alpha,\, \lambda)/2}). \tag{13.4.31}$$

Младший член этого ряда равен $\prod\limits_{\alpha>0} x(\alpha,\, \lambda)$; поэтому свободный член ряда $\psi_{\rho}(\mathrm{Alt}(e^{\lambda+\rho}))/\psi_{\rho}(\mathrm{Alt}(e^{\rho}))$ равен $\prod\limits_{\alpha>0} (\lambda+\rho,\, \alpha) \Big/ \prod\limits_{\alpha>0})\, \rho,\, \alpha)$. Итак, $\dim \pi = \prod\limits_{\alpha>0} (\lambda+\rho,\, \alpha) \Big/ \prod\limits_{\alpha>0} (\rho,\, \alpha)$, что доказывает формулу (13.4.29).

Отметим ряд следствий из формулы Вейля (13.4.28).

Умножая обе части формулы $\varphi_{\lambda} = \mathrm{Alt}(e^{\lambda+\rho})/D$ на знаменатель D, получаем

$$\sum_{w} \sum_{\mu} n_{\mu} (\det w)\, e^{\mu+w\rho} = \sum_{w} (\det w)\, e^{w(\lambda+\rho)}. \tag{13.4.32}$$

Пусть μ — вес, не равный λ. Согласно II имеем $(\mu+\rho,\, \mu+\rho) < (\lambda+\rho,\, \lambda+\rho)$, поэтому $\mu+\rho$ не совпадает ни с одним из функционалов вида $w(\lambda+\rho)$. Следовательно, суммарный коэффициент при $e^{\mu+\rho}$ в левой части равенства (13.4.32) равен нулю. Этот коэффициент получается суммированием по весам μ' таким, что $\mu' + w\rho = \mu + \rho$; итак,

$$\sum_{w\in W} n_{\mu+\rho-w\rho} (\det w) = 0. \tag{13.4.33}$$

Из IV и X п. 13.3 следует, что $\rho - w\rho > 0$ при $w \neq 1$, поэтому формула (13.4.33) является рекуррентной формулой для определения кратностей $n_{\mu'}$. Ей можно придать вид

$$n_\mu = -\sum_{w\neq 1} (\det w)\, n_{\mu+\rho-w\rho}. \tag{13.4.34}$$

Отметим без доказательства две другие рекуррентные формулы для кратности веса [1]).

1). Формула Фрейденталя:

$$n_\mu = 2((\lambda+\rho,\, \lambda+\rho) - (\mu+\rho,\, \mu+\rho))^{-1} \sum_{\alpha>0} \sum_{k=1}^{\infty} n_{\mu+k\alpha}(\mu+k\alpha,\, \alpha). \tag{13.4.35}$$

2). Формула Костанта:

$$n_\mu = \sum_{w\in W^*} (\det w) P(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)), \tag{13.4.36}$$

где $P(0)=0$, а при $\mu\neq 0$ число $P(\mu)$ равно числу различных представлений вектора μ в виде суммы положительных корней.

Доказательство этих формул приведено, например, в книге Д. П. Желобенко [1] и в статье Картье [1*].

13.5. Представления алгебры Ли $sl(n+1,\, \mathbf{C})$. Пусть L — простая алгебра Ли типа (A_n); например, $L = sl(n+1,\, \mathbf{C})$ (см. § 10 п. 10.3; мы воспользуемся введенными там обозначениями). Пусть H — подалгебра Картана алгебры Ли L, образованная диагональными матрицами. Определим линейный функционал λ_i на H по формуле

$$h_i(h) = h_i, \quad \text{если} \quad h = \begin{Vmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{n+1} \end{Vmatrix}. \tag{13.5.1}$$

Очевидно, что

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 0, \tag{13.5.2}$$

причем функционалы $\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n$ образуют базис в пространстве H^*, сопряженном H.

Множество Δ корней алгебры Ли L относительно H состоит из линейных функционалов вида

$$\omega_{ij} = \lambda_i - \lambda_j, \quad i, j = 1,\, \ldots,\, n+1. \tag{13.5.3}$$

Введем в подпространстве H_0 вещественных диагональных матриц естественное лексикографическое упорядочение (см. II п. 9.6 и п. 10.3).

---

[1]) Этими формулами не исчерпываются все известные формулы для кратности веса; см., например, Климык [1*].

Тогда множество Δ^+ положительных корней алгебры Ли L относительно H есть множество корней

$$\omega_{ij} = \lambda_i - \lambda_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n+1. \tag{13.5.4}$$

Корни

$$\omega_{i,\, i+1} = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \quad i = 1, \, \ldots, \, n, \tag{13.5.5}$$

образуют систему простых корней. Нильпотентная алгебра Ли $\sum\limits_{\alpha>0} L^\alpha$ совпадает с подалгеброй Ли $N^+ \subset L$, образованной верхними треугольными матрицами с нулями на главной диагонали. Аналогично, $N^- = \sum\limits_{\alpha<0} L^\alpha$ есть подалгебра Ли нижних треугольных нильпотентных матриц.

Введем $h'_{\omega_{ij}} \in H_0$, полагая $h'_{\omega_{ij}} = (2(n+1))^{-1}(e_{ii} - e_{jj})$, где e_{ij} — матрица, единственный ненулевой элемент которой равен 1 и расположен на пересечении i-й строки и j-го столбца. Тогда

$$\omega_{ij}(h) = (h, \, h'_{\omega_{ij}}) \tag{13.5.6}$$

для всех $h \in H$, где $(\cdot, \cdot)$ — форма Картана–Киллинга на H:

$$(h, \, \widetilde{h}) = (2n+1) \sum_{i=1}^{n+1} h_i \widetilde{h}_i. \tag{13.5.7}$$

Пусть

$$h_{\omega_{ij}} = 2(\omega_{ij}(h'_{\omega_{ij}}))^{-1} h'_{\omega_{ij}} = e_{ii} - e_{jj}. \tag{13.5.8}$$

Найдем неприводимые конечномерные представления алгебры Ли $L = sl(n+1, \, \mathbf{C})$ и характеры этих представлений.

I. *Линейный функционал λ на H тогда и только тогда является старшим весом некоторого неприводимого представления π алгебры Ли L, когда*

$$\lambda = m_1 \lambda_1 + \ldots + m_n \lambda_n, \tag{13.5.9}$$

где все m_i — целые неотрицательные числа, причем $m_k \geqslant m_{k+1}$ при всех $k = 1, \, \ldots, \, n$.

Доказательство. Любой элемент $\lambda \in H^*$ можно представить в виде (13.5.9); из (13.5.8) следует, что

$$\lambda(h_{\omega_{i,\, i+1}}) = \lambda(e_{ii} - e_{i+1,\, i+1}) = m_i - m_{i+1}, \tag{13.5.10}$$

где положено $m_{n+1} = 0$. Согласно теореме 1 § 12 функционал λ является старшим весом конечномерного неприводимого представления тогда и только тогда, когда $\lambda(h_{\omega_{i,\, i+1}})$ — неотрицательные целые числа при всех $i = 1, \, \ldots, \, n$. Отсюда и из (13.5.10) следует I.

Построим представление со старшим весом $\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$. Пусть π — тождественное представление алгебры Ли L в пространстве $V = \mathbf{C}^{n+1}$. Тогда веса представления π суть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ ($\lambda_{n+1} = -\lambda_1 - \ldots - \lambda_n$), поэтому старший вес представления π равен λ_1.

II. *Пусть k — одно из чисел $1, 2, \ldots, n$. Обозначим через V_k внешнее произведение k экземпляров пространства V. Пусть $\bigotimes\limits_{i=1}^{k} \pi$ — тензорное произведение k экземпляров представления π алгебры Ли L. Тогда пространство V_k инвариантно относительно представления $\bigotimes\limits_{i=1}^{k} \pi$; представление π_k, определяемое ограничением представления $\bigotimes\limits_{i=1}^{k} \pi$ на V_k, неприводимо, старший вес представления π_k равен $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$.*

Доказательство. Пространство V_k есть линейная оболочка элементов вида $f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n+1$, а $f_1, \ldots, f_{n+1}$ — канонический базис в $V = \mathbf{C}^{n+1}$, причем $f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k} = \sum\limits_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma)\, f_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes f_{i_{\sigma(k)}}$, где S_k — группа подстановок, а $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ для четных подстановок σ и $\operatorname{sgn} = -1$ для нечетных подстановок σ. Используя формулу (1.2.2), мы видим, что

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{k} \pi\right)(x)(f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k}) = \\ = \pi(x)\, f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k} + \ldots + f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi(x)\, f_{i_k}. \quad (13.5.11)$$

Отсюда следует прежде всего инвариантность подпространства $V_k \subset \subset \bigotimes\limits_{i=1}^{n} V$ относительно представления $\bigotimes\limits_{i=1}^{k} \pi$. Обозначим через π_k ограничение представления $\bigotimes\limits_{i=1}^{k} \pi$ на V_k. Тогда формула (13.5.11) показывает, что

$$\pi_k(h)(f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k}) = \\ = \pi(h)\, f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k} + \ldots + f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi(h)\, f_{i_k} = \\ = (\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_k})(h)(f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k}). \quad (13.5.12)$$

Из (13.5.12) следует, что линейные функционалы $\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k = n+1$, образуют полный набор весов представления π_k.

Покажем, что вектор $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k$ есть старший вектор представления π_k. Так как для любого $i = 1, \ldots, n+1$ подпространство $\pi(N^+)\, f_i$ содержится в линейной оболочке векторов $f_1, \ldots, f_{i-1}$, то из (13.5.11) следует, что $\pi_k(N^+)(f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) = 0$. Для доказательства того, что $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k$ — старший вектор, осталось показать, что $\pi_k(N^-)$-инвариантное подпространство в V_k, содержащее вектор $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k$, совпадает с V_k. Заметим, что

$$\pi(e_{i+1,\,i})\, f_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq i, \\ f_{k+1} & \text{при} \quad k = i. \end{cases} \tag{13.5.13}$$

Из (13.5.11) и (13.5.13) следует, что

$$\pi_k(e_{i_j+1,\,i_j})(f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k}) = f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_j+1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k}. \tag{13.5.14}$$

Из формулы (13.5.14) следует по индукции, что $\pi_k(N^-)$-инвариантное подпространство, содержащее $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k$, содержит все векторы $f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{I_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n+1$, т. е. совпадает с V_k. Следовательно, $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k$ — старший вектор представления π_k, и соответствующий старший вес равен $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$. Так как представление π_k имеет старший вектор, то π_k неприводимо.

Следующее предложение относится к произвольной комплексной полупростой алгебре Ли.

III. *Пусть ρ_1, ρ_2 — неприводимые представления алгебры Ли L в пространствах E_1, E_2; пусть μ_1, μ_2 — их старшие веса, f_1, f_2 — старшие векторы. Пусть ρ — представление представления $\rho_1 \otimes \rho_2$ в наименьшем $\rho_1 \otimes \rho_2$-инвариантном подпространстве пространства $E_1 \otimes E_2$, содержащем вектор $f_1 \otimes f_2$. Тогда ρ — неприводимое представление алгебры Ли L, старший вектор представления ρ равен $f_1 \otimes f_2$, а старший вес равен $\mu_1 + \mu_2$.*

Доказательство. По определению,

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(x)(f_1 \otimes f_2) = \rho_1(x)\, f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes \rho_2(x)\, f_2 \tag{13.5.15}$$

для всех $x \in L$. Следовательно, $(\rho_1 \otimes \rho_2)(L^\alpha)(f_1 \otimes f_2) = 0$ при $\alpha > 0$, а $f_1 \otimes f_2$ — собственный вектор относительно $(\rho_1 \otimes \rho_2)(h)$, $h \in H$, с собственным значением $\mu_1(h) + \mu_2(h)$. Отсюда следует, что наименьшее $\rho_1 \otimes \rho_2$-инвариантное подпространство $E \subset E_1 \otimes E_2$, содержащее $f_1 \otimes f_2$, совпадает с линейной оболочкой векторов вида $(\rho_1 \otimes \rho_2)(x_1) \ldots (\rho_1 \otimes \rho_2)(x_k)(f_1 \otimes f_2)$, где $x_1, \ldots, x_k \in \sum\limits_{\alpha<0} L^\alpha$. Пусть ρ — ограничение подпредставления $\rho_1 \otimes \rho_2$ на подпространство E. Предыдущее рассуждение показывает, что ρ — представление со старшим вектором $f_1 \otimes f_2$; следовательно, ρ — неприводимо. Старший вес представления ρ равен $\mu_1 + \mu_2$.

IV. *Всякое неприводимое представление алгебры Ли $L = sl(n+1, \mathbf{C})$ является подпредставлением тензорной степени тождественного представления алгебры Ли L.*

Доказательство. Пусть $\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$ — старший вес представления π (см. I). Тогда

$$\lambda = (m_1 - m_2)\,\lambda_1 + (m_2 - m_3)(\lambda_1 + \lambda_2) + \ldots + m_n(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n), \tag{13.5.16}$$

где $m_1 - m_2, \ldots, m_n$ — неотрицательные целые числа. Веса $\lambda_1, \ldots, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ являются старшими весами представлений $\pi_1, \ldots, \pi_n$ (см. II), которые являются подпредставлениями тензорных степеней тождественного представления. Ввиду (13.5.16) предложение IV следует тогда из предложения III.

Найдем характер неприводимого представления π алгебры Ли L со старшим весом $\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$. Для применения формулы (13.4.28) мы должны найти полусумму положительных корней ρ и описать группу Вейля W^*.

Заметим сначала, что из (13.5.2) и (13.5.4) следует, что

$$2\rho = (n+1)\,\lambda_1 + ((n+1)-2)\,\lambda_2 + \ldots + (-(n-1))\,\lambda_{n+1} = \\ = 2(n+1)\,\lambda_1 + 2n\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_{n+1},$$

поэтому

$$\rho = (n+1)\,\lambda_1 + n\lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} = \\ = n\lambda_1 + (n-1)\,\lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \quad (13.5.17)$$

Далее, для любого простого корня $\omega_{i,\,i+1}$ соответствующая симметрия $S_i^* \in W^*$ имеет вид

$$S_i^*(\mu) = \mu - 2(\mu, \omega_{i,\,i+1})(\omega_{i,\,i+1}, \omega_{i,\,i+1})^{-1}\omega_{i,\,i+1} = \\ = \mu - \mu(e_{ii} - e_{i+1,\,i+1})\,\omega_{i,\,i+1} \quad (13.5.18)$$

для всех $\mu \in H_0^*$. Подставляя в (13.5.18) вместо μ корень ω_{kl}, $k \neq l$, убеждаемся, что применение S_i^* сводится к перестановке i и $i+1$ в индексах корней ω_{kl} (причем индексы, не равные i и $i+1$, остаются на месте). Отсюда непосредственно следует, что группа Вейля W^* изоморфна группе S_{n+1} подстановок индексов $(1, \ldots, n+1)$. Применяя формулу (13.4.28), видим, что для любого $h \in U(H)$ имеет место равенство

$$\operatorname{tr}\pi(h) = \left(h,\ \frac{\sum\limits_{\sigma \in S_{n+1}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, e^{(m_i+n)\,\lambda_{\sigma(1)} + \ldots + (m_n)\,\lambda_{\sigma(n)}}}{\sum\limits_{\sigma \in S_{n+1}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, e^{n\lambda_{\sigma(1)} + \ldots + \lambda_{\sigma(n)}}} \right). \quad (13.5.19)$$

Согласно (13.3.35) формулу (13.5.19) можно представить в виде

$$\operatorname{tr}\pi(h) = \frac{\begin{vmatrix} e^{(m_1+n)\,\lambda_1}(h) & \ldots & e^{(m_1+n)\,\lambda_{n+1}}(h) \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ e^{m_n+1)\,\lambda_1}(h) & \ldots & e^{(m_n+1)\,\lambda_{n+1}}(h) \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{n\lambda_1}(h) & \ldots & e^{n\lambda_{n+1}}(h) \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ e^{\lambda_1}(h) & \ldots & e^{\lambda_{n+1}}(h) \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}} \quad (13.5.20)$$

для всех $h \in U(H)$.

Найдем теперь формулу для размерности представления π. Согласно (13.4.29) имеем

$$\dim\pi = \frac{\prod\limits_{\alpha>0}(\lambda+\rho,\,\alpha)}{\prod\limits_{\alpha>0}(\rho,\,\alpha)} = \frac{\prod\limits_{i<j}(\lambda+\rho\omega_{ij})}{\prod\limits_{i<j}(\rho,\,\omega_{ij})} = \frac{\prod\limits_{i<j}(m_i-m_j+j-i)}{\prod\limits_{i<j}(j-i)}. \qquad (13.5.21)$$

Отметим полезное для дальнейшего следствие из формулы (13.5.21). Из (13.5.21) непосредственно следует, что $\dim\pi$ является строго возрастающей функцией от m_i-m_j, $i<j$. Следовательно, если $m_k-m_{k+1}>0$, то размерность представления π не меньше размерности представления π_k. Предположим, что $\dim\pi=n+1$. Так как $\dim\pi_k=C_{n+1}^k$, то $\dim\pi_k>n+1$ при $1<k<n$. Следовательно,

V. *Если π — неприводимое представление алгебры Ли $L=$ $=sl(n+1,\,\mathbf{C})$ размерности $n+1$, то либо $\pi\approx\pi_1$, либо $\pi\approx\pi_n$.*

Очевидно, что отображение

$$\widetilde{\pi}(x)=-x' \qquad (13.5.22)$$

(x' — матрица, транспонированная к x) есть $(n+1)$-мерное не приводимое представление алгебры Ли L с весами $-\lambda_1,\,\ldots,\,-\lambda_n,\,-\lambda_{n+1}=$ $=\lambda_1+\ldots+\lambda_r$. Поэтому из V следует:

VI. *Представления $\widetilde{\pi}$ и π_n эквивалентны.*

Читателю предлагается сравнить результаты этого пункта с п. 3.3–3.4 гл. VI.

§ 14. Вещественные формы полупростых комплексных алгебр Ли

14.1. Вещественные формы. Пусть L — комплексная алгебра Ли, L_0 — вещественная подалгебра Ли алгебры Ли L (рассматриваемой как вещественная алгебра Ли). Алгебра Ли L_0 называется *вещественной формой* алгебры Ли L, если каноническое отображение комплексификации $(L_0)_\mathbf{C}$ алгебры Ли L_0 в алгебру Ли L (определяемое как продолжение на $(L_0)_\mathbf{C}$ гомоморфизма вложения алгебры Ли L_0 в L) является изоморфизмом комплексных алгебр Ли $(L_0)_\mathbf{C}$ и L. Очевидно, что в этом случае $\dim_\mathbf{R} L_0=\dim_\mathbf{C} L$.

Если L_0 — вещественная форма алгебры Ли L, то всякий элемент $z\in L$ можно единственным образом представить в виде

$$z=x+iy;\quad x,\,y\in L_0. \qquad (14.1.1)$$

Рассмотрим отображение θ алгебры Ли L в себя, определяемое формулой

$$\theta(x+iy)=x-iy \quad \text{для всех} \quad x,\,y\in l_0. \qquad (14.1.2)$$

Из определения θ с помощью формулы (14.1.2) непосредственно следует, что

$$\theta(\theta(x)) = z \quad \text{для всех} \quad z \in L, \tag{14.1.3}$$

т. е. θ — *инволютивное* отображение L на L; кроме того, из формулы (14.1.2) следует, что

$$\theta(z + w) = \theta(z) + \theta(w), \tag{14.1.4}$$

$$\theta(\lambda z) = \overline{\lambda}\, \theta(z), \tag{14.1.5}$$

$$\theta([z, w]) = [\theta(z), \theta(w)] \tag{14.1.6}$$

для всех $z, w \in L$ и всех $\lambda \in \mathbf{C}$. Отображение θ определяется подалгеброй Ли L_0 однозначно; будем называть отображение θ *инволюцией, определяемой вещественной формой L_0 алгебры Ли L*.

Обратно, пусть задано отображение θ алгебры Ли L в себя, удовлетворяющее условиям (14.1.3)–(14.1.6). Обозначим через L_0 множество элементов $z \in L$ таких, что $\theta(z) = z$. Пусть $z, w \in L_0$, λ — вещественное число; тогда из равенств (14.1.4)–(14.1.6) следует, что $z + w$, λz и $[z, w]$ лежат в L_0, т. е. L_0 — вещественная алгебра Ли.

I. *Любой элемент $z \in L$ можно единственным образом представить в виде $z = x + iy$, где $x, y \in L_0$.*

Доказательство. Из (14.1.3) и (14.1.5) следует, что $z + \theta(z) \in$ $\in L_0$ и $(-i)(z - \theta(z)) \in L_0$. С другой стороны,

$$z = (1/2)(z + \theta(z)) + i(-i/2)(z - \theta(z)) = x + iy, \tag{14.1.7}$$

где $x = (z + \theta(z))/2 \in L_0$, $y = (z - \theta(z))/2i \in L_0$. Обратно, если $z = x + iy$, где $x, y \in L_0$, то $\theta(z) = x - iy$, поэтому $x = (1/2)(z + \theta(z))$, $y = (1/2i)(z - \theta(z))$, так что представление $z \in L$ в виде (14.1.7) единственно.

Предложение I означает, что L_0 — вещественная форма алгебры Ли L. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между вещественными формами данной комплексной алгебры Ли L и инволюциями в L, удовлетворяющими условиям (14.1.4)–(14.1.6).

II. *Форма Шиллинга алгебры Ли L_0 совпадает с ограничением на L_0 формы Шиллинга алгебры Ли L.*

Доказательство. Пусть $x, y \in L_0$; рассмотрим линейный оператор $\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y$ в пространстве L. Так как L_0 — вещественная алгебра Ли, то $(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)(z) = [x, [y, z]] \in L_0$ при $z \in L_0$; следовательно, вещественное подпространство $L_0 \subset L$ инвариантно относительно оператора $\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в вещественном линейном пространстве L_0. Из предложения I следует, что $e_1, \ldots, e_n$ есть базис в комплексном линейном пространстве L. Пусть $(\operatorname{ad} x \times$ $\times \operatorname{ad} y)\, e_k = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ik} e_i$ — разложение элемента $(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)\, e_k$ в пространстве L_0, тогда та же самая формула определяет разложение элемента

$(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)\, e_k$ по базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства L. Следовательно, след оператора $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ в вещественном пространстве L_0 равен следу оператора $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ в комплексном линейном пространстве L, т. е.

$$(x, y)_{L_0} = \operatorname{tr}_{L_0}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = \operatorname{tr}_L(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = (x, y)_L. \tag{14.1.8}$$

III. *Форма $(x, y)_L$ принимает на алгебре Ли L_0 вещественные значения.*

Доказательство сразу следует из формулы (14.1.8), так как $(x, y)_{L_0}$ принимает лишь вещественные значения.

IV. *Равенство*

$$(x, y)_L = \overline{(\theta(x), \theta(y))_L} \tag{14.1.9}$$

справедливо для всех $x, y \in L$.

Доказательство. Если $x, y \in L_0$, то $\theta(x) = x$, $\theta(y) = y$, причем число $(x, y)_L$ вещественно (см. III). Следовательно, равенство (14.1.9) справедливо для всех $x, y \in L_0$. С другой стороны, из (14.1.4) и (14.1.5) следует, что $(\overline{(\theta(x), \theta(y))}$ есть комплексная билинейная форма на L. Но из предложения I следует, что комплексные билинейные формы, совпадающие на L_0, совпадают на L.

Назовем вещественную алгебру Ли M *компактной*, если форма Киллинга на M является отрицательно определенной, т. е. $(x, x)_M < 0$ при всех $x \neq 0$, $x \in M$. Пусть L_0 — вещественная форма комплексной алгебры Ли L; если вещественная алгебра Ли L_0 компактна, то вещественная подалгебра Ли $L_0 \subset L$ называется *компактной вещественной формой* алгебры Ли L.

V. *Вещественная форма L_0 комплексной алгебры Ли L компактна тогда и только тогда, когда эрмитова форма $\{x, y\} = (x, \theta(y))$ на алгебре Ли L является отрицательно определенной.*

Доказательство. Пусть L_0 — компактная вещественная форма алгебры Ли L; пусть $z \in L$ и $z = x + iy$, где $x, y \in L_0$; тогда при $z \neq 0$ хотя бы один из элементов x и y не равен нулю и

$$(z, \theta(z)) = (x + iy, x - iy) = (x, x) + (y, y) < 0.$$

Обратно, если эрмитова форма $(x, \theta(y))$ отрицательно определена, то при $x \in L_0$, $x \neq 0$ имеем $\theta(x) = x$, поэтому $(x, x) = (x, \theta(x)) < 0$.

Приступим к изучению инволюций θ в *комплексной полупростой* алгебре Ли L, удовлетворяющих условиям (14.1.4)–(14.1.6), т. е. тем самым — вещественных форм L_0 алгебры Ли L. Нам понадобятся два общих вспомогательных предложения.

VI. *Пусть H — комплексное линейное подпространство в алгебре Ли L. Подпространство H тогда и только тогда инвариантно относительно инволюции θ, когда любой элемент $z \in H$ можно представить в виде $z = x + iy$, где $x, y \in H_0 = L_0 \cap H$.*

Доказательство. Пусть $\theta(H) = H$. Если $z \in H$, то $x = (1/2)(z + \theta(z))$ принадлежит и H, и L_0; аналогично, $y = (1/2i) \times (z - \theta(z)) \in L_0 \cap H = H_0$, причем $z = x + iy$. Обратно, пусть любой элемент $z \in H$ можно представить в виде $z = x + iy$, где $x, y \in H_0 = L_0 \cap H$; тогда $\theta(z) = x - iy \in H$, т.е. $\theta(H) \subset H$. Так как $\theta^2 = 1$, то $\theta(H) = H$.

VII. *Пусть τ, θ — две инволюции в алгебре Ли L, удовлетворяющие условиям* (14.1.4)–(14.1.6). *Пусть $\tau\theta = \theta\tau$. Обозначим через L_u множество неподвижных точек инволюции τ, а через L_u^+ (соответственно $L_u^- u$) — множество таких точек $z \in L_u$, что $\theta(z) = z$ (соответственно $\theta(z) = -z$). Тогда пространство L_u есть прямая сумма L_u^+ и L_u^-, а пространство L_0 неподвижных точек инволюции θ есть прямая сумма пространств L_u^+ и L_u^-.*

Доказательство. Если $z \in L_u$, то $\tau\theta(z) = \theta(\tau z) = \theta(z)$, поэтому $\theta(z) \in L_u$ для всех $z \in L_u$. Следовательно, оператор θ оставляет пространство L_u инвариантным. Ограничение σ оператора θ на подпространство L_u есть вещественно-линейное отображение L_u на L_u, причем $\sigma^2 = 1$. Очевидно, что $L_u^+ \cap L_u^- = (0)$. Кроме того, $z + \sigma(z) \in L_u^+$ и $z - \sigma(z) \in L_u^-$ при любом $z \in L_u$, так что соотношение

$$z = (1/2)(z + \sigma(z)) + (1/2)(z - \sigma(z))$$

означает, что $L_u = L_u^+ + L_u^-$.

Пространство L есть прямая сумма пространств L_u и iL_u, следовательно, $L = L_u^+ \dotplus L_u^- \dotplus iL_u^+ \dotplus iL_u^-$. Отображение θ тождественно на L_u^+ и сводится к умножению на -1 в подпространстве L_u. Так как $\theta(iz) = -i\theta(z)$ для всех $z \in L$, то отображение θ сводится к умножению на -1 в подпространстве iL_u^+ и тождественно на iL_u^-. Отсюда следует, что L_0 — прямая сумма L_u^+ и iL_u^-.

VIII. *Пусть L_0 — вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли L, θ — соответствующая инволюция в L. Тогда существует подалгебра Картана H алгебры Ли L, инвариантная относительно θ. Если H_0 — вещественное подпространство в H, порожденное векторами h'_α, $\alpha \in \Delta$, то $\theta(H_0) = H_0$. Если θ^* — отображение в пространстве H^*, сопряженное θ, то $\theta^*\Delta = \Delta$.*

Доказательство. Пусть M_x — подпространство в L, образованное такими элементами $y \in L$, что $(\operatorname{ad} x)^q y = 0$ для некоторого натурального q. Очевидно, что M_x инвариантно относительно $\operatorname{ad} x$. Приводя оператор $\operatorname{ad} x$ в L к жордановой нормальной форме, убеждаемся, что M_x есть корневое подпространство оператора $\operatorname{ad} x$, отвечающее нулевому корню. Следовательно, размерность пространства M_x равна кратности нулевого корня характеристического многочлена. Пусть

$$\det(\operatorname{ad} x - \lambda 1) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \ldots + (-\lambda)^k\varphi_k(x).$$

Если $\varphi_k(x) \not\equiv 0$ на L, то при переменном $x \in L$ наименьшая возможная размерность подпространства M_x равна k; таким образом, если $\varphi_k(x_0) \neq 0$, то x_0 — регулярный элемент в L.

Пусть k выбрано так, что $\varphi_k(x) \not\equiv 0$ на L. Функция $\varphi_k(x)$ — многочлен от элементов матрицы оператора $\operatorname{ad} x$ в некотором базисе. Используя, например, формулу Тейлора для многочленов, видим, что из равенства $\varphi_k(x) \equiv 0$ на L_0 следует, что $\varphi_k(x) \equiv 0$ на L. Следовательно, существует элемент $x_0 \in L_0$ такой, что $\varphi_k(x_0) \neq 0$. Таким образом, алгебра Ли L_0 содержит регулярный элемент x_0. Согласно IV § 8 множество H таких элементов $y \in L$, что $[y, x_0] = 0$, есть подалгебра Картана в L. Пусть $h \in H$; тогда из (14.1.6) следует, что

$$[\theta(h), x_0] = \theta([h, \theta(x_0)]) = \theta([h, x_0]) = \theta(0) = 0. \tag{14.1.10}$$

Равенство (14.1.10) означает, что $\theta(h) \in H$. Следовательно, подпространство H инвариантно относительно θ. Так как $\theta^2 = 1$, то из соотношения $\theta H \subset H$ следует, что $\theta H = H$.

Пусть $\alpha \neq 0$ — корень алгебры Ли L относительно картановской подалгебры H. Пусть $\overline{\alpha}$ — линейный функционал на H, определенный формулой

$$\overline{\alpha}(h) = \overline{\alpha(\theta h)} \quad \text{для всех} \quad h \in H. \tag{14.1.11}$$

Пусть $y \in L^\alpha$; тогда $[h, y] = \alpha(h)\,y$ и $[\theta(h), \theta(y)] = \theta([h, y]) = \theta(\alpha(h)\,y) = \overline{\alpha(h)}\,\theta(y) = \overline{\alpha}(\theta h)\,\theta(y)$. Так как $\theta H = H$, то

$$[h, \theta(y)] = \overline{\alpha}(h)\,\theta(y) \tag{14.1.12}$$

для всех $h \in H$. Соотношение (14.1.12) означает, что $\overline{\alpha}$ — корень алгебры Ли L относительно H, т. е. $\theta^*\Delta \subset \Delta$, причем $\theta(y) \in L^{\overline{\alpha}}$ при всех $y \in L^\alpha$, т. е. $\theta L^\alpha \subset L^{\overline{\alpha}}$. Кроме того, используя предложение IV, получаем, что

$$(\theta(h'_\alpha), h) = \overline{(h'_\alpha, \theta(h))} = \overline{\alpha(\theta(h))} = \overline{\alpha}(h) = (h'_{\overline{\alpha}}, h), \tag{14.1.13}$$

поэтому $\theta h'_\alpha = h'_{\overline{\alpha}}$. Следовательно, θ сохраняет вещественное подпространство $H_0 \in H$.

Итак, $\theta H \subset H$, $\theta^*\Delta \subset \Delta$, $\theta H_0 \subset H_0$. Так как $\theta^2 = 1$, то $\theta H = H$, $\theta^*\Delta = \Delta$, $\theta H_0 = H_0$.

IX. *Пусть L — комплексная полупростая алгебра Ли, L_0 — ее вещественная форма, θ — соответствующая инволюция, H — подалгебра Картана в L, удовлетворяющая условиям предложения* VIII. *Пусть векторы $e_\alpha \in L^\alpha$, $\alpha \in \Delta$, выбраны так, что $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$. Существуют такие комплексные числа C_α, что $\theta e_\alpha = C_0 e_\alpha$, причем*

$$\overline{C}_\alpha C_{\overline{\alpha}} = 1, \quad C_\alpha C_{-\alpha} = 1, \quad C_{\alpha+\beta}\overline{N}_{\alpha,\beta} = C_\alpha C_\beta N_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} \tag{14.1.14}$$

для всех $\alpha, \beta \in \Delta$.

Доказательство. Согласно (14.1.12), $\theta(e_\alpha) \in L^{\overline{\alpha}}$. Так как все пространства L^α, $\alpha \in \Delta$ одномерны, то $\theta(e_\alpha) = C_\alpha e_{\overline{\alpha}}$ для некоторых комплексных чисел C_α.

Так как $\theta^2 h = h$ для $h \in H_0$ и $\theta^2 e_\alpha = \theta(C_\alpha e_{\overline{\alpha}}) = \overline{C}_\alpha \theta e_\alpha = \overline{C}_\alpha C_{\overline{\alpha}} e_{\overline{\overline{\alpha}}}$, то $\overline{C}_\alpha C_{\overline{\alpha}} e_{\overline{\overline{\alpha}}} = e_\alpha$. С другой стороны, из (14.1.11) непосредственно следует, что $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$, поэтому $\overline{C}_\alpha C_{\overline{\alpha}} = 1$, что доказывает первое из равенств (14.1.14).

Воспользуемся теперь условием (14.1.5). Из соотношения $\theta([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = [\theta(e_\alpha), \theta(e_{-\alpha})]$ и равенства $\theta h'_\alpha = h'_{\overline{\alpha}}$ следует, что $\theta(-h'_\alpha) = [C_\alpha e_{\overline{\alpha}}, C_{-\alpha} e_{\overline{\alpha}}] = C_\alpha C_{-\alpha}(-h'_{\overline{\alpha}})$, но $\theta h'_\alpha = h'_{\overline{\alpha}}$, поэтому $C_\alpha C_{-\alpha} = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Наконец, из соотношения $\theta([e_\alpha, e_\beta]) = [\theta(e_\alpha 0, \theta(e_\beta)]$ следует, что $\overline{N}_{\alpha,\beta} C_{\alpha+\beta} e_{\overline{\alpha}+\overline{\beta}} = C_\alpha C_\beta N_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} e_{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}$, откуда следует последнее из соотношений (14.1.14).

X. *Пусть L — комплексная полупростая алгебра Ли, H — ее картановская подалгебра, H_0 — вещественное линейное подпространство в H, порожденное векторами h'_α, где α пробегает множество ненулевых корней алгебры Ли L относительно H. Пусть φ — вещественный линейный изоморфизм пространства H_0 на себя. Предположим, что $\varphi^2 = 1$ и что для любого $\alpha \in \Delta$ комплексный линейный функционал $\overline{\alpha}$ на H, удовлетворяющий условию $\overline{\alpha}(h) = \alpha(\varphi(h))$ при всех $h \in H_0$, является корнем алгебры Ли L относительно H. Пусть $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$ для всех $\alpha \in \Delta$. Отображение φ тогда и только тогда можно продолжить до инволюции τ алгебры Ли L, удовлетворяющей условиям* (14.1.4)–(14.1.6) *и условию $\tau(e_\alpha) = C_\alpha e_{\overline{\alpha}}$, когда комплексные числа C_α удовлетворяют условиям* (14.1.14).

Доказательство. Равенство (14.1.13) (с заменой θ на φ) справедливо по определению $\overline{\alpha}$, поэтому $\varphi(h'_\alpha) = h'_{\overline{\alpha}}$ для всех $\alpha \in \Delta$. Так как пространство H_0 и векторы e_α, $\alpha \in \Delta$, порождают комплексное линейное пространство L, то существует, и притом только одно, отображение τ пространства L в себя, удовлетворяющее условиям $\tau(h_0) = \varphi(h_0)$ при $h_0 \in H_0$, $\tau(e_\alpha) = C_\alpha e_{\overline{\alpha}}$ и условиям (14.1.4) и (14.1.5).

Выясним, при каком условии на числа C_α отображение τ удовлетворяет условиям (14.1.3) и (14.1.6). Из определения корня $\overline{\alpha}$ и равенства $\varphi^2 = 1$ следует, что $\overline{\alpha} = \alpha$; с другой стороны, $\tau(h'_\alpha) = \varphi(h'_\alpha) = h'_{\overline{\alpha}}$, $\tau(ih'_\alpha) = -\tau(h'_\alpha) = -h'_{\overline{\alpha}}$, поэтому $\tau^2 = 1$ на картановской подалгебре H. Далее, $\tau^2(e_\alpha) = \tau(C_\alpha e_{\overline{\alpha}}) = \overline{C}_\alpha C_{\overline{\alpha}} e_{\overline{\overline{\alpha}}} = \overline{C}_\alpha C_{\overline{\alpha}} e_\alpha$, поэтому первое из условий (14.1.14) необходимо и достаточно для того, чтобы выполнялось условие (14.1.3).

Найдем необходимые и достаточные условия выполнения условия (14.1.6). Условие (14.1.6) равносильно условиям

$$\begin{aligned} \tau([e_\alpha, e_{-\alpha}]) &= [\tau(e_\alpha), \tau(e_{-\alpha})], \\ \tau([h, e_\alpha]) &= [\tau(h), \tau(e_\alpha)], \\ \tau([e_\alpha, e_\beta]) &= [\tau(e_\alpha), \tau(e_\beta)] \end{aligned} \qquad (14.1.15)$$

для всех $\alpha, \beta \in \Delta$ и $h \in H$, ибо условие $\tau([h_1, h_2]) = [\tau(h_1), \tau(h_2)]$ выполняется автоматически вследствие абелевости алгебры Ли H. Но из доказательства предложения IX следует, что первое и третье из соотношений (14.1.15) равносильны соответственно второму и третьему из соотношений (14.1.14). Наконец, второе из условий (14.1.15) равносильно условию $\tau(\alpha(h)\, e_\alpha) = [\tau(h), C_\alpha e_{\overline{\alpha}}] = C_\alpha \overline{\alpha}(\tau(h))\, e_{\overline{\alpha}}$, т. е. условию $\overline{\alpha(h)} C_\alpha e_{\overline{\alpha}} = C_\alpha \overline{\alpha}(\tau(h))\, e_{\overline{\alpha}}$, т. е. равносильно определению функционала $\overline{\alpha}$.

XI. *Пусть выполнены условия предложения* VIII. *Если L_0 — компактная вещественная форма алгебры Ли L, то $\theta(h) = -h$ для всех $h \in H_0$ и существует такой базис Вейля алгебры Ли L, что $\theta(e_\alpha) = e_{-\alpha}$.*

Доказательство. Пусть алгебра Ли L_0 компактна. Согласно предложению V отсюда следует, что $(x, \theta(x)) < 0$ для всех $x \in L$, $x \neq 0$. Так как $\theta H_0 = H_0$ согласно VIII, то оператор θ определяет при ограничении на H_0 такое вещественное линейное отображение σ пространства H_0 в себя, что $\sigma^2 = 1$. Поэтому пространство H_0 разлагается в прямую сумму подпространств H_0^+ и H_0^-, составленных из векторов $h \in H_0$, для которых $\sigma h = h$ и $\sigma h = -h$ соответственно. Если $h \in H_0^+$, то $(h, \theta(h)) = (h, \sigma(h)) = (h, h) = \sum\limits_{a \in \Delta} (\alpha(h))^2 \geqslant 0$; с другой стороны, если $h \neq 0$, то $(h, \theta(h)) < 0$. Следовательно, $h = 0$, т. е. $H_0^+ = (0)$ и $H_0^- = H_0$. Поэтому оператор θ равен на H_0 оператору умножения на -1, в частности,

$$\theta(h'_\alpha) = -h'_\alpha. \tag{14.1.16}$$

Следовательно, $h'_{\overline{\alpha}} = -h'_\alpha$ и $\overline{\alpha} = -\alpha$. Пусть в L выбран базис Вейля. Тогда, в частности,

$$N_{\alpha, \beta} = \overline{N}_{\alpha, \beta} = N_{\overline{\alpha}, \overline{\beta}}. \tag{14.1.17}$$

Если $\theta e_\alpha = C_\alpha e_{-\alpha}$, то для чисел C_α должны выполняться соотношения (14.1.14), которые с учетом условий (14.1.16) и (14.1.17) приобретают вид

$$\overline{C}_\alpha C_{-\alpha} = C_\alpha C_{-\alpha} = 1, \quad C_{\alpha+\beta} = C_\alpha C_\beta. \tag{14.1.18}$$

Заметим, что $(e_\alpha, \theta(e_\alpha)) = C_\alpha(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -C_\alpha < 0$, поэтому $C_\alpha > 0$. Положим $\delta_\alpha = (C_\alpha)^{-1/2}$ и $e'_\alpha = \delta_\alpha e_\alpha$. Тогда из равенств (14.1.18) следует, что $(e'_\alpha, e'_{-\alpha}) = -\delta_\alpha \delta_{-\alpha} = -1$ и $\theta(e'_\alpha) = C_\alpha \delta_\alpha e_{-\alpha} = (\delta_\alpha)^{-1} e_{-\alpha} = \delta_{-\alpha} e_{-\alpha} = e'_{-\alpha}$. Наконец, введем числа $N'_{\alpha, \beta}$ при помощи равенства $[e'_\alpha, e'_\beta] = N'_{\alpha\beta} e'_{\alpha+\beta}$; тогда из равенств (14.1.16) и (14.1.17) получаем $N'_{\alpha, \beta} = N'_{-\alpha, -\beta}$. Следовательно, $\{e'_\alpha\}$ — искомый базис Вейля.

XII. *Пусть L_0— вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли L; пусть $\{e_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ — базис Вейля в алгебре Ли L. Пусть θ — антилинейное отображение алгебры Ли L в себя,* *однозначно определяемое условиями*

$$\theta(h) = -h \quad \textit{для всех} \quad h \in H_0, \tag{14.1.19}$$

$$\theta(e_\alpha) = e_{-\alpha} \quad \textit{для всех} \quad \alpha \in \Delta. \tag{14.1.20}$$

Тогда θ — *инволюция в* L, *удовлетворяющая условиям* (14.1.4)–(14.1.6), *и связанная с инволюцией* θ *вещественная форма* L_0 *алгебры Ли* L *компактна.*

Доказательство. Пусть $\overline{\alpha} = -\alpha$, $C_\alpha = 1$. Тогда инволютивное отображение θ, определенное формулой

$$\theta\left(h_0 + i\widetilde{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta}\xi_\alpha e_\alpha\right) = -h_0 + i\widetilde{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta}\overline{\xi}_\alpha e_{-\alpha},$$

где $h_0, \widetilde{h}_0 \in H_0$, $\xi_\alpha \in \mathbf{C}$, есть антилинейное отображение L в L, удовлетворяющее, очевидно, условиям (14.1.3)–(14.1.5) и (14.1.19)–(14.1.20). Проверим, что $[\theta(x), \theta(y)] = \theta([x, y])$ для всех $x, y \in L$. Для этого достаточно проверить справедливость равенств

$$\theta([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = [\theta(e_\alpha), \theta(e_{-\alpha})],$$
$$\theta([h, e_\alpha]) = [\theta(h), \theta(e_\alpha)],$$
$$\theta([e_\alpha, e_\beta]) = [\theta(e_\alpha), \theta(e_\beta)]$$

для всех $\alpha, \beta \in \Delta$, $h \in H_0$; действительно, $\theta([h_1, h_2]) = 0 = [\theta(h_1), \theta(h_2)]$, ибо алгебра Ли H абелева. Из предложения X следует, что соотношение $\theta([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = [\theta(e_\alpha), \theta(e_{-\alpha})]$ равносильно равенству $C_\alpha C_{-\alpha} = 1$, которое выполняется ввиду равенства $C_\alpha = 1$, а соотношение $\theta([e_\alpha, e_\beta]) = [\theta(e_\alpha), \theta(e_\beta)]$ равносильно соотношению $C_{\alpha+\beta}\overline{N}_{\alpha\beta} = C_\alpha C_\beta N_{\overline{\alpha}, \overline{\beta}}$, которое выполняется, так как $C_\alpha = 1$, числа $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ вещественны и $\overline{\alpha} = -\alpha$. Равенство $\theta([h, e_\alpha]) = [\theta(h), \theta(e_\alpha)]$ равносильно равенству $C_\alpha\overline{\alpha}(\theta(h))\, e_{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha(h)}\,\theta(e_\alpha)$, которое равносильно определению функционала $\overline{\alpha}$. Итак, $\theta([x, y]) = [\theta(y), \theta(y)]$ для всех $x, y \in L$. Покажем, что $(x, \theta(x)) < 0$ при $x \neq 0$. Пусть $x = h_0 + i\widetilde{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta}\xi_\alpha e_\alpha$; тогда $\theta(x) = -h_0 + i\widetilde{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta}\overline{\xi}_\alpha e_\alpha$, поэтому из (9.6.1) следует, что

$$(x, \theta(x)) = (h_0 + i\widetilde{h}_0, -h_0 + i\widetilde{h}_0) + \sum_\alpha \xi_\alpha\overline{\xi}_\alpha(e_\alpha, e_{-\alpha}) =$$
$$= \sum_\alpha\{\alpha(h)\,\alpha(\theta(h)) - \xi_\alpha\overline{\xi}_\alpha\}, \tag{14.1.21}$$

где $h = h_0 + ih_0$. Заметим теперь, что $\alpha(\theta(h)) = \overline{\overline{\alpha}(h)} = -\alpha(h)$ согласно

(14.1.11) и (14.1.20); тогда из (14.1.21) получаем

$$(x, \theta(x)) = -\sum_{\alpha}(|\alpha(h)|^2 + |\xi_\alpha|^2),$$

поэтому $(x, \theta(x)) < 0$ для любого $x \neq 0$.

XIII. *Пусть L — полупростая комплексная алгебра Ли, L_0 — ее вещественная форма, θ — инволюция в алгебре Ли L, определяемая вещественной формой L_0. Тогда существует компактная вещественная форма L_u алгебры Ли L, инвариантная относительно инволюции θ.*

Доказательство. Согласно предложению VII достаточно доказать, что существует инволюция τ в алгебре Ли L, удовлетворяющая условиям (14.1.4)–(14.1.6), перестановочная с θ и удовлетворяющая условию $(x, \tau(x)) < 0$ для всех $x \neq 0$; тогда искомая алгебра Ли L_u может быть определена как совокупность элементов $x \in L$ таких, что $\tau(x) = x$.

Согласно предложению VIII существует подалгебра Картана $H \subset L$, инвариантная относительно инволюции θ; согласно предложению IX существует такой базис Вейля в алгебре Ли L, что $\theta(e_\alpha) = C_\alpha e_{\overline{\alpha}}$ для всех $\alpha \in \Delta$. Положим

$$\tau(e_\alpha) = |C_\alpha| e_{-\alpha}, \quad \tau(h'_\alpha) = h'_{-\alpha}, \tag{14.1.22}$$

и продолжим отображение τ до инволюции на алгебре Ли L, удовлетворяющей условиям (14.1.4) и (14.1.5). Из предложения X следует, что отображение τ тогда и только тогда удовлетворяет условию (14.1.6), когда числа $|C_\alpha|$ удовлетворяют условиям (14.1.14). Условие $|C_\alpha|\,|C_{-\alpha}| = 1$ следует из соотношения $C_\alpha C_{-\alpha} = 1$; таким образом, первые два из соотношений (14.1.14) выполняются для чисел $|C_\alpha|$. Из соотношения $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ следует, что третье условие (14.1.14) для чисел $|C_\alpha|$ имеет вид равенства $|C_{\alpha+\beta}| = |C_\alpha|\,|C_\beta|$; проверим это равенство. Заметим, что $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \overline{\beta}(h'_{\overline{\alpha}}) = \overline{\beta(\theta(h'_\alpha))} = \overline{\beta(h'_\alpha)} = \overline{(\alpha, \beta)}$, но (α, β) — вещественное число для любых $\alpha, \beta \in \Delta$, поэтому $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (\alpha, \beta)$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$. Из предложения II п. 9.7 следует, что $N^2_{\alpha,\beta} = (1/2)(\alpha, \alpha)\, q_{\alpha,\beta}(1 - p_{\alpha,\beta})$; так как отображение $\alpha \to \overline{\alpha}$ есть аддитивное инволютивное отображение системы корней Δ на себя, то линейный функционал $\beta + k\alpha$ тогда и только тогда является корнем, когда $\overline{\beta} + k\overline{\alpha} \in \Delta$; следовательно, $q_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} = q_{\alpha,\beta}$, $p_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} = p_{\alpha,\beta}$ и $N^2_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} = (1/2)(\overline{\alpha}, \overline{\alpha})\, q_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}(1 - p_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}) = (1/2)(\alpha, \alpha)\, q_{\alpha,\beta}(1 - p_{\alpha,\beta}) = N^2_{\alpha,\beta}$, или $|N_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}| = |N_{\alpha,\beta}|$. Поэтому, переходя в последнем из равенств (14.1.14) к абсолютным величинам, получаем, что $|C_{\alpha+\beta}| = |C_\alpha|\,|C_\beta|$. Таким образом, из предложения X следует, что инволюция τ в алгебре Ли L удовлетворяет условиям (14.1.4)–(14.1.6). Проверим, что τ и θ перестановочны. Так как $\tau\theta(h'_\alpha) = \tau(h'_{\overline{\alpha}}) = h'_{-\overline{\alpha}}$ и $\theta\tau(h'_\alpha) = \theta(h'_{-\alpha}) = h'_{-\overline{\alpha}}$, то $\tau\theta$ и $\theta\tau$ совпадают на H_0, следовательно, $\tau\theta = \theta\tau$ на H. Остается проверить, что $\theta\tau(e_\alpha) = \tau\theta(e_\alpha)$; но

$$\tau\theta(e_\alpha) = \tau(C_\alpha e_{\overline{\alpha}}) = \overline{C}_\alpha |C_{\overline{\alpha}}| e_{-\overline{\alpha}},$$
$$\theta\tau(e_\alpha) = |C_\alpha| \theta(e_{-\alpha}) = |C_\alpha| C_{-\alpha} e_{-\overline{\alpha}},$$

и $\overline{C}_\alpha |C_{\overline{\alpha}}| = |C_\alpha| C_{-\alpha}$, так как из первых двух равенств (14.1.14) следуют равенства

$$C_\alpha(\overline{C}_\alpha |C_{\overline{\alpha}}|) = |C_\alpha|^2 |C_{\overline{\alpha}}| = |C_\alpha|(|C_\alpha|\,|C_{\overline{\alpha}}|) = |C_\alpha| = |C_\alpha| C_\alpha C_{-\alpha},$$

причем $C_\alpha \neq 0$. Этим завершается доказательство предложения XIII.

XIV. *Пусть выполнены условия предложения* XIII *и пусть* L_u — *компактная вещественная форма алгебры Ли* L, *инвариантная относительно инволюции* θ. *Пусть* $L_u^+ = L_u \cap L_0$, $L_u^- = L_u \cap iL_0$. *Пусть* H_u^- — *максимальная коммутативная подалгебра Ли, содержащаяся в* L_u^-, H_u — *максимальная коммутативная подалгебра Ли в* L_u, *содержащая* H_u^-, $H_u^+ = H_u \cap L_u^+$. *Тогда подпространство* $H = H_u + iU_u$ *есть подалгебра Картана в* L, $H_u = H_u^+ + H_u^-$, $H \cap L_0 = H_u^+ + iH_u^-$.

Доказательство. Пусть $x \in L_u$; из определения L_u^+ и L_u^- следует, что $x \in L_u^+$ (соотв. L_u^-) тогда и только тогда, когда $\theta x = x$ (соотв. $\theta x = -x$). Согласно предложению VII $L_u = L_u^+ + L_u^-$. Для всякого $h \in H_u$ и для любых $x, y \in L_u$ выполняется соотношение

$$((\operatorname{ad} h)(x), y) + (x, (\operatorname{ad} h)(y)) = ([h, x], y) + (x, [h, y]) =$$
$$= \operatorname{tr}([\operatorname{ad} h, \operatorname{ad} x] \operatorname{ad} y + \operatorname{ad} x [\operatorname{ad} h, \operatorname{ad} y]) = \operatorname{tr}[\operatorname{ad} h, \operatorname{ad} x \operatorname{ad} y] = 0,$$

т. е. оператор $\operatorname{ad} h$ в пространстве L_u кососимметричен относительно отрицательно определенной формы (x, y). Тогда оператор $\operatorname{ad} h$ вполне приводим, т. е. всякое инвариантное подпространство в L_u имеет инвариантное ортогональное дополнение. Так как H_u — коммутативная алгебра Ли, то подпространство $H_u \subset L_u$ инвариантно относительно всех операторов $\operatorname{ad} h$, $h \in H_u$; следовательно, ортогональное дополнение $H_u^\perp$ пространства H_u в L_u также инвариантно относительно всех операторов $\operatorname{ad} h$, $h \in H_u$. Так как H_u — максимальная коммутативная подалгебра Ли в L_u, то из условия $(\operatorname{ad} h)\, y = 0$ для данного $y \in L_u$ и всех $h \in H_u$ следует, что $y \in H_u$. Следовательно, пространство $H_u^\perp$ не содержит ненулевых корневых подпространств, отвечающих нулевому корню алгебры Ли L_u относительно H_u, т. е. H_u совпадает с корневым подпространством, отвечающим нулевому корню алгебры Ли L_u относительно H_u. Следовательно, H_u — подалгебра Картана в L_u (см. § 8).

Пусть $H = H_u + iH_u$. Покажем, что H — подалгебра Картана в алгебре Ли L. Пусть $z \in L^0$, т. е. для любого $h \in H$ существует натуральное k такое, что $(\operatorname{ad} h)^k z = 0$. Покажем, что $z \in H$. В частности, для любого $h \in H_u$ существует натуральное k такое, что $(\operatorname{ad} h)^k z = 0$. Так как L_u — вещественная форма алгебры Ли L, то $z = x + iy$, где $x, y \in L_u$; с другой стороны, пространство L_u инвариантно относительно всех операторов $\operatorname{ad} h$, $h \in H_u$. Поэтому $0 = (\operatorname{ad} h)^k z = (\operatorname{ad} h)^k x + i(\operatorname{ad} h)^k y$, т. е. $(\operatorname{ad} h)^k x = 0$, $(\operatorname{ad} h)^k y = 0$. Следовательно, $x, y \in L_u^0 = H_u$, откуда $z = x + iy \in H_u + iH_u = H$. Итак, $L^0 = H$, т. е. H — подалгебра Картана в L.

Покажем, что подалгебра Картана H_u алгебры Ли L_u инвариантна относительно инволюции θ. Пусть $h \in H_u$, $h_u^- \in H_u^-$. Так как $H_u^- \subset H_u$ и H_u коммутативна, то $[h, h^-] = 0$; тогда и $[\theta(h), \theta(h^-)] = \theta([h, h^-]) = t(0) = 0$. С другой стороны, $h^- \in H_u^- \subset L_u^-$, поэтому $\theta(h^-) = -h^-$. Таким образом, $\theta(h)$ коммутирует со всеми элементами пространства H_u^-; следовательно, $h - \theta(h)$ также коммутирует со всеми элементами пространства H_u^-. Но $h - \theta(h) \in L_u$ и $\theta(h - \theta(h)) = -(h - \theta(h))$, поэтому $h - \theta(h) \in L_u^-$. Так как H_u^- — максимальная коммутативная подалгебра Ли в L_u^- и $h - \theta(h)$ коммутирует с ее элементами, то $h - \theta(h) \in H_u^-$; так как $h \in H_u$, то и $\theta(h) \in H_u$. Итак, H_u инвариантно относительно инволюции θ. Отсюда следует, что $H_u = H_u^+ + H_u^-$.

Согласно предложению VII $L_0 = L_u^+ + iL_u^-$; из соотношений $H_u = H_u^+ + H_u^-$ и $H = H_u + iH_u$ следует, что $H = H_u^+ + H_u^- + iH_u^+ + iH_u^-$, причем $H_u^+ \subset L_u^+$, $iH_u^- \subset iL_u^-$, $H_u^- \cap L_0 = iH_u^+ \cap L_0 = (0)$. Следовательно, $H \cap L_0 = H_u^+ + iH_u^-$.

XV. *Пусть выполнены условия предложения* XIV. *Пусть H_0 — множество линейных комбинаций элементов h'_α с вещественными коэффициентами. Тогда $H_0 = H_0^+ + H_0^-$, где $H_0^\pm = \{x \in H, \theta x = \pm x\}$ и система Δ ненулевых корней алгебры Ли L относительно H разбивается на три части*: $\Delta = \Sigma \cup \Delta' \cup (-\Sigma)$, *где*

$$\Sigma = \{\alpha \in \Delta, \alpha > 0, \overline{\alpha} > 0\};$$
$$\Delta' = \{\alpha \in \Delta \colon \overline{\alpha} = -\alpha\} = \{\alpha \in \Delta \colon \alpha(H_0^+) = 0\}.$$

Доказательство. Пространство H_0 инвариантно относительно инволюции θ, поэтому $H_0 = H_0^+ + H_0^-$. Пусть $h_1^+, \ldots, h_m^+$ — некоторый базис в H_0^+, $h_1^-, \ldots, h_n^-$ — некоторый базис в H_0^-. Снабдим пространство H_0 лексикографическим упорядочением, соответствующим базису $h_1^+, \ldots, h_m^+, h_1^-, \ldots, h_n^-$ пространства H_0.

Покажем, что условие $\overline{\alpha} = -\alpha$ равносильно условию $\alpha(H_0^+) = 0$. Действительно, пространство H_0^+ порождается (как вещественное пространство) векторами вида $h + \theta(h)$, $h \in H_0$; с другой стороны, α принимает на H_0 вещественные значения, поэтому $\overline{\alpha}(h) = \overline{\alpha(\theta(h))} = \alpha(\theta(h))$ при $h \in H_0$. Следовательно, $\overline{\alpha} = -\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha(h + \theta(h)) = 0$ при всех $h \in H_0$.

Предположим теперь, что $\alpha > 0$ и $\alpha \notin \Delta'$, т. е. $\overline{\alpha} \neq -\alpha$. Тогда $\alpha(H_0^+) \neq 0$, следовательно, существует такое $i \geqslant 0$, что $\alpha(h_1^+) = \ldots = \alpha(h_i^+) = 0$, $\alpha(h_{i+1}^+) > 0$. Так как $h_i^+ \in H_0^+$, то $\theta(h_j^+) = h_j^+$, поэтому $\overline{\alpha}(h_j^+) = \overline{\alpha(\theta(h_j^+))} = \alpha(h_j^+)$ при $j = 1, \ldots, m$. Следовательно, $\overline{\alpha}(h_j^+) = 0$ при $j \leqslant i$, $\overline{\alpha}(h_{i+1}^+) = \alpha(h_{i+1}^+) > 0$; таким образом, $\overline{\alpha} > 0$ и $\alpha \in \Sigma$.

XVI. *Пусть L — полупростая комплексная алгебра Ли, L_0 — ее вещественная форма, L_u — компактная вещественная форма алгебры Ли L. Пусть θ и τ — инволюции в алгебре Ли L, определяемые вещественными формами L_0 и L_u соответственно. Пусть $L_u^+ = L_u \cap L_0$. Предположим, что инволюции θ и τ перестановочны и что для корня $\alpha \in \Delta$ имеет место равенство $\overline{\alpha} = -\alpha$. Тогда для любого $x \in L^\alpha$ имеет место равенство $\theta(x) = \tau(x)$; в частности, $\theta(e_\alpha) = -e_{-\alpha}$. Кроме того, $x + \theta(x) \in L_u^+$ для всех $x \in L^\alpha$.*

Доказательство. Из (14.1.12) следует, что $\theta(x) \in L^{\overline{\alpha}}$ для всех $x \in L^\alpha$; если $\overline{\alpha} = -\alpha$, то $\theta(x) \in L^{-\alpha}$ при $x \in L^\alpha$. Из X следует, что $\tau(x) \in L^{-\alpha}$ при $x \in L^\alpha$, таким образом, элемент $y = \theta(x) - \tau(x)$ принадлежит пространству $L^{-\alpha}$. Покажем, что y коммутирует с подпространством H_0^+. Действительно, пусть $h \in H_0^+$; тогда $h = \theta(h)$. Согласно XV, $\alpha(H_0^+) = 0$; согласно XI $\tau(h) = -h$ для всех $h \in H_0$; следовательно, для всех $h \in H_0^+$ $[h, \theta(x)] = \theta([\theta(h), x]) = \theta([h, x]) = \theta(\alpha(h)\, x) = \overline{\alpha(h)}\, \theta(x) = 0$, и аналогично,

$$[h, \tau(x)] = \tau([\tau(h), x]) = -\tau([h, x]) = -\overline{\alpha(h)}\, \tau(x) = 0,$$

поэтому $[h, y] = 0$. Заметим, что пространство H_u порождено (как вещественное пространство) векторами ih'_α, причем $iH_0^+ \subset H_u^-$, $iH_0^- \subset H_0^+$. Следовательно, подпространство H_u^- порождено (как вещественное подпространство) множеством iH_0^+. Так как элемент y коммутирует с H_0^+, то y коммутирует с H_u^-. Так как подпространство H_u^- инвариантно относительно инволюции θ, то элемент $\theta(y)$ коммутирует с H_u^-, поэтому $y - \theta(y)$ коммутирует с H_u^-. Но $y - \theta(y) \in L_u^-$, а H_u^- — максимальная коммутативная подалгебра в L_u^-. Поэтому $y - \theta(y) \in H_u^-$. С другой стороны, $y \in L^{-\alpha}$, $\theta(y) \in L^\alpha$ и сумма подпространств L^α, $L^{-\alpha}$ и H_u^- есть прямая сумма. Следовательно, $y = \theta(y) = 0$, т. е. $\theta(x) = \tau(x)$ для всех $x \in L^\alpha$. Наконец, $x + \theta(x) = x + \tau(x) \in L_0 \cap L_u = L_u^+$.

XVII. *Пусть выполнены условия предложения* XIII. *Пусть $L_u^+ = L_u \cap L_0$, $L_u^- = L_u \cap iL_0$. Тогда L_u — прямая сумма L_u^+ и L_u^-, L_0 — прямая сумма L_u^+ и iL_u^-, и L_0 — прямая сумма подалгебры L_u^+ и некоторой разрешимой подалгебры M_0.*

Доказательство. Положим

$$N = \sum_{\alpha \in \Sigma} L^\alpha, \quad N' = \sum_{\alpha \in \Sigma} L^{-\alpha}. \tag{14.1.23}$$

Если $\alpha \in \Sigma$, то α и $\overline{\alpha}$ — положительные корни, поэтому $\overline{\alpha}$ и $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ — положительные корни. Следовательно, $\overline{\alpha} \in \Sigma$ и подпространства N и N' инвариантны относительно инволюции θ. С другой стороны, из (14.1.22) следует, что $\tau(L^\alpha) = L^{-\alpha}$, поэтому $\tau(N) = N'$.

Так как N инвариантно относительно θ, то N есть комплексная оболочка пересечения $N_0 = N \cap L_0$. Докажем, что

$$L_0 = L_u^+ \dotplus iH_u^- \dotplus N_0. \tag{14.1.24}$$

Сумма в правой части равенства (14.1.24) — прямая. Действительно, если $l \in L_u^+$, $h \in iH_u^-$ и $n \in N_0$, и если $l + h + n = 0$, то, применяя к этому равенству τ, получаем $l - h + \tau(n) = 0$; вычитая, видим, что $2h + n - \tau(n) = 0$; но $h \in H$, $n \in N$, $\tau(n) \in N'$, и сумма подпространств H, N и N' является прямой; поэтому $h = n = 0$; тогда и $l = 0$. Итак, сумма L_u^+, iH_u^- и N_0 является прямой суммой. Заметим теперь, что пространство L_0 порождено (как вещественное пространство) подпространством $H \cap L_0 = H_u^+ + iH_u^- \subset L_u^+ + iH_u^-$ и элементами вида $y = x + \theta(x)$, где $x \in L^\alpha$. Если $\overline{\alpha} = -\alpha$, то из XVI следует, что элемент $x + \theta(x)$ лежит в L_u^+. Если $\alpha \in \Sigma$, то $\overline{\alpha} > 0$ и $y \in L^\alpha + L^{\overline{\alpha}} \subset N$. Так как $y \in L_0$, то $y \in N \cap L_0 = N_0$. Если же $\alpha \in -\Sigma$, то $\tau(y) \in L^{-\alpha} + L^{-\overline{\alpha}} \subset N$ и $y + \tau(y) \in L_u^+$, поэтому $y \in N_0 + L_u^+$. Следовательно, пространство L_0 порождено (как вещественное пространство) элементами пространств L_u^+, iH_u^- и N_0.

Так как $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$ и при $\alpha, \beta \in \Sigma$ имеем $\alpha + \beta \in \Sigma$, то N и N' — подалгебры Ли в L. Так как Σ — конечное множество, то из соотношения $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$ следует, что N и N' — нильпотентные алгебры Ли. Положим $M_0 = iH_u^- + N_0$. Тогда из (14.1.24) следует, что $L_0 = L_u^+ + M_0$. С другой стороны, $[N_0, N_0] \subset N_0$, $[iH_u^-, iH_u^-] = 0$ и $[iH_u^-, N_0] \subset N_0$, поэтому M_0 — подалгебра Ли в L_0, причем $[M_0, M_0] \subset N_0$. Так как N_0 нильпотентна, то M_0 — разрешимая алгебра Ли.

14.2. Линейные представления вещественных форм.

I. *Пусть L — комплексная алгебра Ли, L_0 — ее вещественная форма, π — представление алгебры Ли L_0 в конечномерном комплексном линейном пространстве V. Тогда формула*

$$\widetilde{\pi}(x + iy) = \pi(x) + i\pi(y), \quad x, y \in L_0, \tag{14.2.1}$$

определяет представление $\widetilde{\pi}$ алгебры Ли L в пространстве V. Представление π неприводимо тогда и только тогда, когда представление $\widetilde{\pi}$ неприводимо. Если π_1 — другое представление алгебры Ли L_0 в пространстве V_1, то π и π_1 эквивалентны тогда и только тогда, когда $\widetilde{\pi}$ и $\widetilde{\pi}_1$ эквивалентны.

Доказательство. Из предложения I п. 14.1 сразу следует, что формула (14.2.1) определяет комплексно-линейное отображение алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$; так как $[x + iy, x_1 + iy_1] = [x, x_1] - [y, y_1] + i([x, y_1] + [y, x_1])$, то из условия $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ следует, что $\widetilde{\pi}$ есть представление алгебры Ли L в V. Кроме того, из формулы (14.2.1) следует, что всякое комплексное линейное подпространство $V_1 \subset V$, инвариантное относительно операторов $\pi(x)$, $x \in L_0$, инвариантно относительно операторов $\pi(x)$, $x \in L_0$. Наконец, если $\pi_1(x) = A\pi(x)A^{-1}$ для всех $x \in L_0$, где A — некоторый обратимый линейный оператор из V в V_1, то из (14.2.1) следует, что $\widetilde{\pi}_1(z) = A\widetilde{\pi}(z)A^{-1}$ для всех $z \in L$.

II. *Пусть L — комплексная алгебра Ли, L_0 — ее вещественная форма, π — неприводимое представление алгебры Ли L, ρ — его ограничение на L_0. Тогда предствление ρ неприводимо, и если π пробегает множество всех попарно не эквивалентных неприводимых представлений алгебры Ли L, то ρ пробегает множество всех попарно не эквивалентных неприводимых представлений алгебры Ли L_0.*

Доказательство. Из предложения I п. 14.1 и формулы (14.2.1) следует, что представление π эквивалентно представлению $\widetilde{\rho}$. Тогда утверждение предложения II сразу следует из I.

14.3. Классификация вещественных форм простых комплексных алгебр Ли. Перечислим вещественные формы комплексных полупростых алгебр Ли типов (A_n)–(G_2), системы корней которых построены в § 11. Это перечисление вещественных форм дает нам полный список вещественных простых алгебр Ли, так как комплексификация вещественной простой алгебры Ли является комплексной простой алгеброй Ли.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть 1_m — единичная матрица порядка m. Положим

$$I_{p,q} = \begin{Vmatrix} -1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{Vmatrix}, \quad J_n = \begin{Vmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad K_{p,q} = \begin{Vmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{Vmatrix}. \tag{14.3.1}$$

Для любой матрицы $x \in gl(n, \mathbf{C})$ обозначим через x^* матрицу, сопряженную x; через x^+ — матрицу, транспонированную к x; через $\overline{x}$ — матрицу, получаемую из x заменой всех элементов матрицы на комплексно-сопряженные.

Рассмотрим алгебры Ли $u(p, q)$, $su(p, q)$, $su^*(2n)$, $so\,(p, q)$, $so^*(2n)$, $sp\,(p, q)$, определяемые следующим образом:

$u(p, q)$ — алгебра Ли матриц $x \in gl(n, \mathbf{C})$, удовлетворяющих условию $x = -I_{p,q}x^*I_{p,q}$;

$su(p, q)$ — подалгебра Ли в алгебре Ли $u(p, q)$, состоящая из таких матриц $x \in u(p, q)$, что $\operatorname{tr} x = 0$;

$su^*(2n)$ — алгебра Ли матриц $x \in gl(n, \mathbf{C})$, удовлетворяющих условиям $\operatorname{tr} x = 0$, $xJ_n = J_n\overline{x}$;

$so\,(p, q)$ — алгебра Ли матриц $x \in gl(n, \mathbf{R})$, удовлетворяющих условиям $\operatorname{tr} x = 0$, $x = -I_{p,q}x^-I_{p,q}$;

$so^*(2n)$ — алгебра Ли матриц $x \in su^*(2n)$, удовлетворяющих условию $x = -x^+$;

$sp\,(2p, 2q)$ $(p + q = n)$ — алгебра Ли матриц $x \in gl(2n, \mathbf{C})$, удовлетворяющих условиям $xJ_n + J_nx^+ = 0$, $x = -K_{pq}x^*K_{p,q}$. Алгебру Ли $sp\,(2n, 0)$ обозначим через $sp\,(2n)$.

Перечислим вещественные формы алгебр Ли типов (A_n)–(D_n).

Теорема 1. 1). *Вещественными формами комплексной полупростой алгебры Ли* $sl(n+1, \mathbf{C})$, *имеющей тип* A_n, *являются вещественные алгебры Ли*: $sl(n+1, \mathbf{R})$; $su(p, q)$, *где* $p \geqslant q$, $p+q = n+1$ (*в частности, при* $q = 0$ *получаем компактную вещественную форму* $su(n+1)$), *и, если* n *нечетно, алгебра Ли* $su^*(n+1)$.

2). *Вещественными формами комплексной полупростой алгебры Ли* $so\,(2n+1, \mathbf{C})$, *имеющей тип* B_n, *являются вещественные алгебры Ли* $so\,(p, q)$, *где* $p+q = 2n+1$, $p > q$ (*в частности, при* $q = 0$ *получаем компактную вещественную форму* $so\,(2n+1, \mathbf{C})$).

3). *Вещественными формами комплексной полупростой алгебры Ли* $sp\,(2n, \mathbf{C})$, *имеющей тип* C_n, *являются вещественные алгебры Ли*: $sp\,(2n, \mathbf{R})$; $sp\,(2p, 2q)$, *где* $p \geqslant q$, $p+q = n$ (*в частности, при* $q = 0$ *получаем компактную вещественную форму* $sp\,(2n)$).

4). *Вещественными формами комплексной полупростой алгебры Ли* $so\,(2n, \mathbf{C})$, *имеющей тип* D_n, *являются вещественные алгебры Ли*: $so\,(p, q)$, *где* $p+q = 2n$, $p \geqslant q$ (*в частности, при* $q = 0$ *получаем компактную вещественную форму* $so\,(2n, \mathbf{R})$); *и, если* n *четно, алгебра Ли* $so^*(2n)$.

Доказательство этой теоремы довольно громоздко, мы проведем его только для алгебры Ли $L = sl(n+1, \mathbf{C})$ типа (A_n), т. е. докажем только утверждение п. 1).

Пусть L_0 — вещественная форма алгебры Ли L, θ — соответствующая ей инволюция в L (см. п. 14.1). Пусть L_u — компактная вещественная форма алгебры Ли L, инвариантная относительно θ (см. XIII п. 14.1); обозначим через τ инволюцию в L, соответствующую форме L_u. Тогда $\theta\tau = \tau\theta$; положим $\sigma = \theta\tau$. Отображение σ является автоморфизмом алгебры Ли L, причем $\sigma^2 = (\theta\tau)^2 = 1_L$, и компактная вещественная форма L_u инвариантна относительно σ. Отображение π: $x \to \sigma(x)$ является $(n+1)$-мерным представлением алгебры Ли $L = sl(n+1, \mathbf{C})$. Так как σ — автоморфизм, то представление π неприводимо. Согласно V и VI п. 13.5 либо представление π эквивалентно тождественному представлению, либо π эквивалентно представлению $x \to x^+$. Рассмотрим эти две возможности.

а). Если π эквивалентно тождественному представлению алгебры Ли L, то существует такая обратимая матрица A, что $\sigma(x) = AxA^{-1}$ для всех $x \in sl(n+1, \mathbf{C})$. Так как $\sigma(\sigma(x)) = x$, то $A^2xA^{-2} = x$ для всех $x \in sl(n+1, \mathbf{C})$, т. е. $A^2 = \lambda 1_{n+1}$, $\lambda \neq 0$. Домножая A на $\lambda^{-1/2}$, мы можем считать, что $A^2 = 1_{n+1}$. Тогда матрица A подобна матрице $I_{p,q}$ (см. (14.3.1)) при некоторых p, q, таких, что $p+q = n+1$; таким образом, автоморфизм σ подобен автоморфизму $\widetilde{\sigma}$, определенному формулой

$$\widetilde{\sigma}(x) = I_{p,q}xI_{p,q}. \tag{14.3.2}$$

Пусть $\widetilde{\sigma} = \alpha\sigma\alpha^{-1}$, где α — автоморфизм алгебры Ли $sl(n+1, \mathbf{C})$. Очевидно, что компактная вещественная форма $su(n+1)$ инвариантна относительно автоморфизма $\widetilde{\sigma}$; мы вправе считать, что компактная форма L_u была выбрана так, что $\alpha(su(n+1)) = L_u$. Тогда отображение $\widetilde{\tau} = \alpha\tau\alpha^{-1}$ есть инволюция в L, связанная с $su(n+1)$, т.е. инволюция $\widetilde{\tau}$ действует по формуле $\widetilde{\tau}(x) = -x^*$. Положим $\widetilde{\theta} = \alpha\theta\alpha^{-1}$; тогда $\widetilde{\theta} = \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}$, поэтому

$$\widetilde{\theta}(x) = -I_{p,q}x^*I_{p,q}. \tag{14.3.3}$$

Очевидно, что множество $\widetilde{L}_0$ неподвижных точек инволюции $\widetilde{\theta}$ совпадает с $su(P, q)$. Так как $\alpha(\widetilde{L}_0) = L_0$, то L_0 изоморфна $su(P, q)$.

б). Если π эквивалентно представлению $s \to -x^+$, то существует такая обратимая матрица A, что $\sigma(x) = -Ax^+A^{-1}$ для всех $x \in sl(n+1, \mathbf{C})$. Так как $\sigma(\sigma(x)) \equiv x$, то $A(A^{-1})^+xA^+A^{-1} = x$ для всех $x \in sl(n+1, \mathbf{C})$. Следовательно, $A^+A^{-1} = \lambda 1_{n+1}$, т.е. $A^+ = \lambda A$; тогда $A = (A^+)^+ = \lambda^2 A$, поэтому $\lambda = \pm 1$.

Пусть сначала $\lambda = 1$. Тогда $A^+ = A$, т.е. A — симметричная невырожденная матрица. Пусть $p(\lambda)$ — такой многочлен от λ, что $(p(A))^2 = A$ (см. Гантмахер [1], гл. V). Положим $B = p(A)$; тогда $B^+ = p(A^+) = p(A) = B$ и $B^2 = BB^+ = A$. Рассмотрим автоморфизм α алгебры Ли L, определенный формулой $\alpha(x) = B^{-1}xB$. Непосредственное вычисление показывает, что $\alpha\sigma\alpha^{-1}(x) + -x^+$, т.е. автоморфизм σ подобен автоморфизму $\widetilde{\sigma}$, определенному формулой

$$\sigma(x) = -x^+. \tag{14.3.4}$$

Если $\widetilde{\tau}$ — инволюция, соответствующая компактной форме $su(n+1)$, то отображение $\widetilde{\theta} = \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}$ определяется формулой

$$\widetilde{\theta}(x) = -(-x^*)^+ = \overline{x}. \tag{14.3.5}$$

Множество $\widetilde{L}_0$ неподвижных точек инволюции $\widetilde{\theta}$ есть множество вещественных матриц из $sl(n+1, \mathbf{C})$, т.е. $\widetilde{L}_0 = sl(n+1, \mathbf{R})$ и $L_0 \approx \widetilde{L}_0 = sl(n+1, \mathbf{R})$.

Предположим теперь, что $\lambda = -1$. Тогда $A^* = -A$, т.е. A — кососимметричная невырожденная матрица. Это возможно только в случае, если $n+1$ — четное число, пусть $n+1 = 2m$. Рассмотрим автоморфизм α алгебры Ли L, определенный формулой $\alpha(x) = BxB^{-1}$, где B — некоторая невырожденная матрица. Непосредственное вычисление показывает, что автоморфизм $\widetilde{\sigma} = \alpha\sigma\alpha^{-1}$ алгебры Ли L действует по формуле

$$\widetilde{\sigma}(x) = -\widetilde{A}x^+\widetilde{A}^{-1}, \quad x \in sl(n+1, \mathbf{C}), \tag{14.3.6}$$

где

$$\widetilde{A} = BAB^+. \tag{14.3.7}$$

Согласно Бурбаки [1], гл. IX, § 5, п. 1, для любой невырожденной кососимметрической матрицы A существует такая невырожденная матрица B, что матрица $\widetilde{A}$ в (14.3.7) совпадает с J_m, т. е. автоморфизм $\widetilde{\sigma}$ из (14.3.6) действует по формуле

$$\widetilde{\sigma}(x) = -J_m x^+ J_m^{-1}. \tag{14.3.8}$$

Если $\widetilde{\tau}(x) = -x^*$ и $\widetilde{\theta} = \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}$, то

$$\widetilde{\theta}(x) = -J_m(-x^*)^+ J_m^{-1} = J_m \overline{x} J_m^{-1}. \tag{14.3.9}$$

Из (14.3.9) следует, что множество неподвижных точек инволюции $\widetilde{\theta}$ совпадает с $su^*(n+1)$, т. е. $L_0 \approx su^*(n+1)$.

Укажем теперь вещественные формы особых комплексных полупростых алгебр Ли типов E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Алгебра Ли L типа E_6 имеет компактную вещественную форму L_u и четыре некомпактные вещественные формы L_1, L_2, L_3, L_4, причем $L_1 \cap L_u \approx sp\,(8)$, $L_2 \cap L_u \approx su(6) + su(2)$, $L_3 \cap L_u \approx so\,(10, \mathbf{R}) + \mathbf{R}$, $L_4 \cap L_u$ изоморфна компактной вещественной форме комплексной алгебры Ли типа F_4.

Алгебра Ли L типа E_7 имеет компактную вещественную форму L_u и три некомпактные вещественные формы L_1, L_2, L_3, причем $L_1 \cap L_u \approx su(8)$; $L_2 \cap L_u \approx so\,(12, \mathbf{R}) + su(2)$; $L_3 \cap L_u \approx \widetilde{L} + \mathbf{R}$, где $\widetilde{L}$ — компактная вещественная форма комплексной алгебры Ли типа E_6.

Алгебра Ли L типа E_8 имеет компактную вещественную форму L_u и две некомпактные вещественные формы L_1, L_2, причем $L_1 \cap L_u \approx$ $\approx so\,(16, \mathbf{R})$, $L_a \cap L_u \approx \widetilde{L} + su(2)$, где $\widetilde{L}$ — компактная вещественная форма комплексной алгебры Ли типа E_7.

Алгебра Ли L типа F_4 имеет компактную вещественную форму L_u и две некомпактные вещественные формы L_1, L_2, причем $L_1 \cap L_u \approx$ $\approx sp\,(6) + su(2)$, $L_2 \cap L_u \approx so\,(9, \mathbf{R})$.

Алгебра Ли L типа G_2 имеет компактную вещественную форму L_u и некомпактную вещественную форму L_0, причем $L_0 \cap L_u \approx su(2) +$ $+ su(2)$.

Доказательство этих утверждений и описание соответствующих инволюций в терминах корней приведено в статье Э. Картана [1*]. См. также статью Сироты и Солодовникова [1*].

§ 15. Общие теоремы об алгебрах Ли

I. *Пусть L — алгебра Ли, π — гомоморфизм алгебры Ли в алгебру Ли $gl(V)$, причем* $\operatorname{Ker}\pi = (0)$. *Пусть A — абелев идеал в L, и пусть элемент $v \in V$, $v \neq 0$, обладает следующими свойствами*: 1) $\pi(L)\,v = \pi(A)\,v$; 2) *соответствие $a \to \pi(a)\,v$ есть взаимно однозначное отображение алгебры Ли A на $\pi(a)\,v$. Пусть J — множество $x \in L$ таких, что $\pi(x)\,v = 0$. Тогда J — подалгебра Ли в L и L есть прямая сумма векторных пространств A и J.*

Доказательство. Так как $([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$, то из определения J сразу следует, что J — подалгебра Ли в L, кроме того, по условию, $J \cap A$ состоит лишь из нуля. Наконец, если $x \in L$ и a — такой элемент идеала A, что $\pi(x)\,v = \pi(a)\,v$, то $\pi(x-a)\,v = 0$, т. е. $x - a \in J$.

II. *Пусть L — алгебра Ли, A — абелев идеал в L, $S = L/A$. Пусть S полупроста, и пусть ограничение семейства операторов* $\mathrm{ad}(x)$, *$x \in L$, на подпространство $A \subset L$ есть ненулевое неприводимое семейство операторов в A. Тогда в L существует подалгебра Ли J, дополнительная к A и изоморфная S.*

Доказательство. Пусть $V = gl(L)$, т. е. V — линейное пространство линейных операторов на L. Положим $\sigma(x)\,\varphi = [\mathrm{ad}\,x, \varphi]$ для всех $x \in L$, $\varphi \in V$; тогда σ есть гомоморфизм алгебры Ли L в $gl(V)$. Пусть P, Q, R — вложенные друг в друга ($P \subset Q \subset R$) подпространства в V, где P есть множество $\mathrm{ad}\,a$, $a \in A$; Q — множество $\varphi \in V$ таких, что $\varphi(L) \subset A$ и $\varphi(A) = 0$, R — множество $\varphi \in V$ таких, что $\varphi(L) \subset A$ и ограничение φ на A скалярно. Очевидно, что P, Q, R инвариантны относительно операторов $\sigma(x)$, $x \in L$, и подпространство Q имеет коразмерность 1 в R. Пусть $a \in A$, $\varphi \in R$ и ограничение отображения φ на A есть умножение на число λ; тогда

$$\sigma(a)\,\varphi = \mathrm{ad}\,a \circ \varphi - \varphi \circ \mathrm{ad}\,a = -\lambda\,\mathrm{ad}\,a.$$

Следовательно, $\varphi(a)R \subset P$ при $a \in A$. Это обстоятельство позволяет рассмотреть фактор-пространства Q/P и R/P и гомоморфизмы π_1 и π алгебры Ли $S = L/A$ в алгебры Ли $gl(Q/P)$ и $gl(R/P)$ соответственно, индуцированные гомоморфизмом σ. Очевидно, что гомоморфизм π_1 является ограничением гомоморфизма π на инвариантное подпространство R/P, содержащее инвариантное подпространство Q/P коразмерности 1 в R/P. Так как алгебра S полупроста, то семейство $\pi_1(S)$ вполне приводимо на R/P; следовательно, существует инвариантное дополнение подпространства Q/P, так что существует элемент $\overline{v} \in R/P$, инвариантный относительно π (т. е. $\pi(S)\,\overline{v} = 0$); можно считать, что ограничение представителей $v \in R$ элемента $\overline{v}$ на подпространство A есть тождественное отображение. Пусть $v \in R$ — какой-нибудь прообраз элемента $\overline{v}$. Покажем, что v удовлетворяет условиям предложения I. Если $a \in A$, то $\sigma(a)\,v = -\,\mathrm{ad}\,a$ (так как ограничение отображения v на A тождественно по построению). Если $\sigma(a)\,v = 0$, то $\mathrm{ad}\,a = 0$, т. е. $[a, x] = 0$ для всех $x \in L$. Следовательно, $(\mathrm{ad}\,x)(A) = 0$ для всех $x \in L$; если $a \neq 0$, то подпространство элементов $b \in A$ таких, что $(\mathrm{ad}\,x)(b) = 0$, есть ненулевое подпространство в A; это противоречит условию, что ограничение семейства операторов $\mathrm{ad}(x)$, $x \in L$, на идеал A есть ненулевое неприводимое семейство. Таким образом, отображение $a \to \sigma(x)\,v$ есть взаимно однозначное отображение идеала A на $\sigma(A)\,v$. С другой стороны, пусть $x \in L$; мы должны показать, что $\sigma(x)\,v$ можно представить в виде $\sigma(a)\,v$, где $a \in A$. Но $\sigma(a)\,v = -\,\mathrm{ad}\,a$, следовательно, мы должны убедиться, что $\sigma(x)\,v \in P$. Но элемент $\overline{v}$ инвариантен относительно $\pi(S)$; отсюда $\pi(S)\,\overline{v} = \pi(L/A)\,\overline{v} = 0$, или $\sigma(L)\,v \in P$. Применяя предложение I к представлению σ и вектору v, получаем, что множество J элементов $x \in L$ таких, что $[\mathrm{ad}\,x, v] = 0$ для всех x, есть подалгебра Ли в L, причем L есть прямая сумма векторных пространств A и J. При каноническом отображении алгебры Ли L на $L/A = S$ подалгебра Ли J отображается на S изоморфно.

Теорема Леви–Мальцева. *Пусть φ — гомоморфизм алгебры Ли L на полупростую алгебру Ли S. Пусть A — ядро гомоморфизма φ. Тогда радикал алгебры Ли L содержится в A, и в L существует подалгебра Ли J, дополнительная к A и изоморфная S.*

Доказательство. а). При $A = (0)$ утверждение тривиально, поэтому пусть $A \neq (0)$. Предположим сначала, что семейство B ограничений операторов $\mathrm{ad}\,x$, $x \in L$, на идеал A есть неприводимое семейство операторов в A. Пусть R — радикал алгебры Ли L (см. § 3); тогда алгебра Ли $\varphi(R)$ изоморфна некоторой фактор-алгебре алгебры R и потому $\varphi(R)$ — разрешимая алгебра Ли (см. IV п. 1.6). Так как R — идеал в L, то $\varphi(R)$ — идеал в $\varphi(L) = S$. Но алгебра Ли S полупроста, поэтому разрешимый идеал $\varphi(R)$ в S является нулевым. Таким образом, $R \subset A$. Так как идеал R инвариантен относительно всех операторов $\mathrm{ad}\,x$, $x \in L$ (см. VI § 3), а идеал A неприводим относительно семейства B, то либо $R = (0)$, либо $R = A$. Если $R = (0)$, то L — полупростая алгебра Ли, и можно взять $J = A^{\perp}$ (см. III п. 7.1). Если $R = A \neq (0)$, то A — разрешимый идеал. Следовательно, $A \neq [A, A]$, причем подпространство $[A, A]$ инвариантно относительно B. По предположению, идеал A неприводим относительно семейства B; следовательно, $[A, A] = 0$, т. е. A — абелев идеал. Если семейство B — нулевое, то $[x, a] = 0$ для всех $a \in A$, $x \in L$. Следовательно, идеал A лежит в ядре присоединенного гомоморфизма алгебры Ли L, и семейство операторов $\mathrm{ad}\,x$, $x \in L$, можно рассматривать как образ гомоморфизма π алгебры Ли $S = L/A$ в алгебру Ли $gl(V)$, определенного формулой: $\pi(s) = \mathrm{ad}\,x$ при $x \in s \in S$, $x \in L$. Но алгебра Ли S полупроста, поэтому семейство операторов $\{\mathrm{ad}\,x,\ x \in L\} = \{\pi(s),\ s \in S\}$ вполне приводимо по теореме Г. Вейля. Таким образом, в алгебре Ли L существует подпространство J, дополнительное к A и инвариантное относительно семейства операторов $\mathrm{ad}\,x$, $x \in L$; в этом случае J — идеал в L, дополнительный к A. Если же семейство B — ненулевое, то существование дополнительной подалгебры J, удовлетворяющей условиям теоремы, следует из предложения II.

б). Проведем теперь доказательство теоремы Леви–Мальцева индукцией по размерности идеала A. Если $\dim A = 1$, то A — абелев идеал в L и любое семейство операторов в (одномерном) пространстве A неприводимо; согласно части а) настоящего доказательства в этом случае теорема Леви–Мальцева справедлива. Предположим, что теорема справедлива при $\dim A \leqslant n-1$, где $n > 1$, и пусть $\dim A = n$.

Если семейство B неприводимо, то утверждение теоремы справедливо согласно а). Если семейство B приводимо, то существует собственное подпространство $A_1 \subset A$, инвариантное относительно семейства B. Следовательно, A_1 — идеал в алгебре Ли L, содержащийся в A. Рассмотрим гомоморфизм $\widetilde{\varphi}$ алгебры Ли L/A_1 на алгебру Ли $L/A = S$, определяемый каноническим отображением φ: $L \to L/A$ при переходе к фактор-алгебре L/A_1. Очевидно, что ядро гомоморфизма $\widetilde{\varphi}$ есть A/A_1. Так как $\dim(A/A_1) < \dim A = n$, то, по предположению индукции, в алгебре Ли L/A_1 имеется подалгебра Ли L_1/A_1, изоморфная S и дополнительная к A/A_1 в алгебре Ли L/A_1. Тем самым определен гомоморфизм алгебры Ли L/A_1 на алгебру Ли S; ядро этого гомоморфизма есть идеал A_1, размерность которого строго меньше n. Снова пользуясь предположением индукции, получаем, что в алгебре Ли L_1 существует подалгебра J_1, изоморфная S и дополнительная к A_1 в J_1. При сквозном отображении $L \to L/A_1 \to L/A$, ограниченном на L_1, алгебра Ли J_1 отображается на L/A изоморфно. Следовательно, J_1 дополнительна к идеалу A в алгебре Ли L.

III. *Пусть L — алгебра Ли, R — ее радикал. Существует такая полупростая подалгебра Ли $S \subset L$, что $L = S \dotplus R$.*

Доказательство. Пусть R_1 — радикал алгебры Ли L/R. Если $\widetilde{R}$ — полный прообраз R_1 в L, то $\widetilde{R}$ — разрешимый идеал в L, так как алгебры Ли R и $\widetilde{R}/R$ разрешимы (см. II п. 2.2). Но всякий разрешимый идеал в алгебре Ли L содержится в R (см. § 3); поэтому $\widetilde{R} \subset R$, $\widetilde{R} = R$ и $R_1 = (0)$, так что алгебра Ли L/R полупроста. Применяя теорему Леви–Мальцева к каноническому гомоморфизму алгебры Ли на полупростую алгебру Ли L/R, видим, что существует полупростая подалгебра Ли $S \subset L$, изоморфная L/R и дополнительная к R.

Отметим без доказательства теорему, позволяющую сводить изучение алгебр Ли к изучению подалгебр Ли алгебры Ли $gl(n, \mathbf{R})$ или алгебры Ли $gl(n, \mathbf{C})$.

Теорема Адо. *Всякая вещественная* (*соответственно комплексная*) *алгебра Ли имеет точное конечномерное линейное представление.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книгах Шевалле [1], Серра [1] и в Трудах семинара «Софус Ли» [1].

Глава XI

ГРУППЫ ЛИ

§ 1. Формула Кемпбелла–Хаусдорфа

1.1. Постановка задачи. Пусть G — группа Ли, L — ее алгебра Ли. Пусть $x, y \in L$; рассмотрим произведение $\exp(x)\exp(y)$. Так как в некоторой окрестности точки $0 \in L$ экспоненциальное отображение является взаимно однозначным аналитическим отображением L в G, то существует некоторая окрестность U точки 0 в L и аналитическое отображение $f\colon U \times U \to L$, удовлетворяющее условию

$$\exp(x)\exp(y) = \exp f(x, y) \tag{1.1.1}$$

для всех $x, y \in U$. В этом параграфе мы найдем формулу, определяющую отображение f.

Введем в алгебре Ли L некоторую норму, превращая тем самым L в конечномерное нормированное пространство. (Например, если $e_1, \ldots, e_m$ — базис в L, то можно положить $\|x\| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$ при $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$.) Пусть f определено формулой (1.1.1); пусть $f(0, 0) = 0$. Обозначим через L_r, $r > 0$, множество элементов $x \in L$, таких, что $\|x\| < r$. Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы экспоненциальное отображение было взаимно однозначным на множестве L_ε; пусть $\delta > 0$ выбрано так, что $\delta < \varepsilon$ и $\exp(L_\delta)\exp(L_\delta) \subset \exp(L_\varepsilon)$. Тогда отображение f определяет аналитическое отображение $L_\delta \times L_\delta$ в L_ε. Положим

$$\varphi(u, v) = f(ux, vy), \tag{1.1.2}$$

где u и v вещественны (соответственно комплексны), если G вещественная (соответственно комплексная) группа Ли. Функция $\varphi(u, v)$ аналитична в некоторой окрестности начала координат на $\mathbf{R}^2$ (соответственно $\mathbf{C}^2$), по крайней мере в окрестности, определяемой условиями $\|ux\| < \delta$, $\|vy\| < \delta$. Из (1.1.1) и (1.1.2) следует, что в этой окрестности

$$\exp(ux)\exp(vy) = \exp\varphi(u, v). \tag{1.1.3}$$

Положим

$$\psi(t) = \psi(t, x, y) = \varphi(t, t). \tag{1.1.4}$$

Функция ψ аналитична в окрестности точки $t = 0$ (по крайней мере при $\|tx\| < \delta$, $\|ty\| < \delta$). Положим

$$c_n(x, y) = \frac{1}{n!}\,((d^n/dt^n)\,\psi(t, x, y))_{t=0} \tag{1.1.5}$$

для всех $n \geqslant 0$; из аналитичности функции ψ следует, что при достаточно малых t имеет место равенство

$$\psi(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n c_n(x, y) \tag{1.1.6}$$

и при малых t ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t^n|\,\|c_n(x, y)\| \tag{1.1.7}$$

сходится. Таким образом, для определения функции $\psi(t, x, y)$ достаточно найти коэффициенты $c_n(x, y)$; с другой стороны, функция ψ определяет функцию f ввиду равенства

$$f(x, y) = \psi(1, x, y) \tag{1.1.8}$$

(ср. (1.1.1), (1.1.3) и (1.1.4)).

1.2. Рекуррентная формула для коэффициентов c_n. Согласно (3.5.15) гл. IX, $c_0(x, y) = 0$, $c_1(x, y) = x + y$. Найдем рекуррентную формулу для $c_n(x, y)$. Положим $g(z) = z^{-1}(1 - e^{-z}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \times \times ((n + 1)!\,)^{-1} z^n$, $z \neq 0$; $g(0) = 1$. Тогда g — целая функция. Пусть $h(z) = (g(z))^{-1}$. Тогда h аналитична в окрестности точки $z = 0$, причем $h(0) = 1$. Непосредственное вычисление показывает, что $h(-z) = h(z) - z$. Положим $k(z) = h(z) - z/2 = z(1 - e^{-z})^{-1} - z/2$; тогда k — четная аналитическая функция в окрестности точки $z = 0$, $k(0) = 1$. Пусть $k(z) = 1 + \sum\limits_{p=1}^{\infty} k_{2p} z^{2p}$ [1]). Введем линейные операторы $k(\operatorname{ad} x)$, $g(\operatorname{ad} x)$ в пространстве L, полагая

$$g(\operatorname{ad} x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)!}\,(\operatorname{ad} x)^n, \tag{1.2.1}$$

$$k(\operatorname{ad} x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} k_{2p}(\operatorname{ad} x)^{2p} \tag{1.2.2}$$

для всех $x \in L_\delta$. Так как ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}((n + 1)!)^{-1}\|\operatorname{ad} x\|^n$ и $\sum\limits_{p=0}^{\infty} k_{2p}\|\operatorname{ad} x\|^{2p}$ сходятся при $x \in L_\delta$, то формулы (1.2.1) и (1.2.2) действительно

[1]) Числа $k_{2p} \cdot (2p)!$ называются *числами Бернулли*, см., например, Маркушевич [1], гл. 3, § 7. Все числа k_{2p} рациональны.

определяют некоторые линейные операторы $g(\operatorname{ad} x)$, $k(\operatorname{ad} x)$, причем с рядами (1.2.1) и (1.2.2) можно определить арифметические действия, как с обычными степенными рядами. В частности, из соотношения $g(z)(k(z)+z/2)=1$ следует, что $g(\operatorname{ad} x)\left(k(\operatorname{ad} x)+\frac{1}{2}\operatorname{ad} x\right)=$ $=\left(k(\operatorname{ad} x)+\frac{1}{2}\operatorname{ad} x\right)g(\operatorname{ad} x)=1$, т. е. оператор $g(\operatorname{ad} x)$ обратим и

$$(g(\operatorname{ad} x))^{-1}=k(\operatorname{ad} x)+(\operatorname{ad} x)/2. \tag{1.2.3}$$

С другой стороны, согласно (3.6.6) гл. IX оператор $g(\operatorname{ad} x)$ при всех $x\in L_\delta$ совпадает с дифференциалом экспоненциального отображения:

$$(d\exp)_x=g(\operatorname{ad} x). \tag{1.2.4}$$

Составим дифференциальное уравнение для функции $\psi(t, x, y)$:

I. *Пусть* $x, y\in L$ *и пусть функция* $\psi(t, x, y)$ *определена формулами* (1.1.3)–(1.1.4). *Пусть* $a>0$ *выбрано так, что* $a\,\|x\|<\delta$, $a\,\|y\|<\delta$. *Тогда функция* ψ *удовлетворяет в области* $|t|<a$ *дифференциальному уравнению*

$$d\psi/dt=k(\operatorname{ad}\psi)(x+y)+(1/2)\,[x-y, \psi], \tag{1.2.5}$$

и условию

$$\psi(0, x, y)=0. \tag{1.2.6}$$

Доказательство. Соотношение (1.1.3) имеет место при всех u, v таких, что $|u|<a$, $|v|<a$. Найдем дифференциалы отображений $\alpha\colon v\to\exp\varphi(u, v)$ и $\beta\colon v\to\exp\varphi(u, v)$ многообразия $\{v\colon |v|<a\}$ в группу G. Пусть w — векторное поле на многообразии $\{v\colon |v|<a\}$, определенное условием $w(v)(z)=1$ для всех v, $|v|<a$, где z — функция, определенная равенством $z(v)\equiv v$, $|v|<a$. Будем обозначать через $y(g)$ касательный вектор, определяемый векторным полем y в точке $g\in G$. Так как отображение α есть композиция однопараметрической подгруппы $\gamma\colon v\to\exp(vy)$ и последующего умножения на $\exp(ux)$, то из определения отображения γ и из соотношений (3.4.18), предложения II п. 3.4 гл. IX и (1.5.1) п. 1.5 гл. IX следует равенство

$$\begin{aligned}(d\alpha)_v(w(v))&=\exp(ux)(d\gamma)_v(w(v))=\\&=\exp(ux)\exp(vy)\,y(e)=y(\exp(ux)\exp(vy)).\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

С другой стороны,

$$(d\beta)_v(w(v))=(d\exp)_{\varphi(u, v)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right). \tag{1.2.8}$$

Таким образом, из (1.1.3), (1.2.7) и (1.2.8) следует, что

$$y(\varphi(u, v))=(d\exp)_{\varphi(u, v)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right). \tag{1.2.9}$$

Применяя равенство (1.2.4) к правой части (1.2.9), видим, что

$$y(\varphi(u, v)) = g(\operatorname{ad}\varphi(u, v))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right). \tag{1.2.10}$$

Но оператор $g(\operatorname{ad}\varphi(u, v))$ обратим; умножая на $g(\operatorname{ad}\varphi(u, v))^{-1}$ и применяя (1.2.3), получаем из (1.2.9), что

$$(\partial\varphi/\partial v) = k(\operatorname{ad}\varphi)\, y + (1/2)\,[\varphi, y] \tag{1.2.11}$$

при всех $|u| < a$, $|v| < a$.

Рассмотрим теперь равенство

$$\exp(-vy)\exp(-ux) = \exp(-\varphi(u, v)) \tag{1.2.12}$$

(которое является непосредственным следствием (1.1.3)). Дифференцируя левую и правую части (1.2.12) по u, получаем, что

$$\begin{aligned} -\, x(\exp(-vy)\exp(-ux)) = (d\exp)_{-\varphi(u,v)}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = \\ = g(-\operatorname{ad}\varphi)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right), \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

а из (1.2.13) следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = g(-\operatorname{ad}\varphi)^{-1}x \tag{1.2.14}$$

при всех $|u| < a$, $|v| < a$. Используя четность функции k и равенство (1.2.3), получаем, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = k(\operatorname{ad}\varphi)\, x - (1/2)\,[\varphi, x] \tag{1.2.15}$$

при всех $|u| < a$, $|v| < a$. Но

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{u=v=t}, \tag{1.2.16}$$

поэтому (1.2.5) следует из (1.2.16), (1.2.11) и (1.2.15). Равенство (1.2.6) следует из (1.1.5) и (3.5.15) гл. IX.

II. *Пусть $x, y \in L$ и пусть коэффициенты $c_n(x, y)$ определены равенством* (1.1.5). *Тогда коэффициенты $c_n(x, y)$ однозначно определяются рекуррентным соотношением*

$$\begin{aligned} (n+1)\, c_{n+1}(x, y) = [x - y, c_n(x, y)]/2 + \\ + \sum_{p\geqslant 1,\, 2p\leqslant n} k_{2p} \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_{2p} > 0 \\ m_1 + \ldots + m_{2p} = n}} [c_{m_1}(x, y), [\ldots, [c_{m_{2p}}(x, y), x + y]\ldots]], \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

где $n \geqslant 1$, и равенством

$$c_1(x, y) = x + y. \tag{1.2.18}$$

Доказательство. Равенство (1.2.18) следует из (3.5.15) гл. IX. Докажем равенство (1.2.17). Зафиксируем некоторое $n \geqslant 1$. Дифференцируя равенство (1.1.6), видим, что

$$d\psi/dt = c_1(x, y) + 2\,t\,c_2(x, y) + \ldots + (n+1)\,t^n c_{n+1}(x, y) + o(t^n); \tag{1.2.19}$$

с другой стороны, из аналитичности присоединенного представления и равенства (1.1.6) следует, что

$$\operatorname{ad}\psi(t) = t\operatorname{ad}c_1(x, y) + \ldots + t^n\operatorname{ad}c_n(x, y) + o(t^n). \tag{1.2.20}$$

Из (1.2.20) получаем возведением в степень, что для любого $p \geqslant 1$, удовлетворяющего условию $2p \leqslant n$, имеет место равенство

$$(\operatorname{ad}\psi(t))^{2p} = \sum_{2p\leqslant q\leqslant n} t^q \sum_{\substack{m_1>0,\,\ldots,\,m_{2p}>0\\ m_1+\ldots+m_{2q}=q}} \operatorname{ad}c_{m_1}(x, y)\times\ldots$$
$$\ldots\times\operatorname{ad}c_{m_{2p}}(x, y) + o(t^n). \tag{1.2.21}$$

Из (1.2.20) следует также, что $\operatorname{ad}\psi(t) = t\operatorname{ad}c_1(x, y) + o(t)$, поэтому подстановка равенств (1.2.21) в соотношение (1.2.2) для $x = \psi(t)$ приводит к равенству

$$k(\operatorname{ad}\psi(t)) = 1 + \sum_{p\geqslant 1,\,2p\leqslant n} k_{2p}(\operatorname{ad}\psi(t))^{2p} + o(t^n) =$$
$$= 1 + \sum_{1\leqslant q\leqslant n} t^q \sum_{p\geqslant 1,\,2p\leqslant q} k_{2p} \sum_{\substack{m_1,\,\ldots,\,m_{2p}\geqslant 1\\ m_1+\ldots+m_{2p}=q}} \operatorname{ad}c_{m_1}(x, y)\times\ldots$$
$$\ldots\times\operatorname{ad}c_{m_{2p}}(x, y) + o(t^n). \tag{1.2.22}$$

Подставляя (1.2.19), (1.2.20) и (1.2.22) в (1.2.5) и приравнивая коэффициенты при t^n в обеих частях равенства, получаем соотношение (1.2.17).

Очевидно, что коэффициенты $c_n(x, y)$ однозначно определяются равенствами (1.2.17)–(1.2.18) при всех $n \geqslant 1$, что завершает доказательство предложения II. Заметим, что $c_2(x, y) = (1/2)\,[x, y]$.

Из формул (1.1.1), (1.1.8), (1.1.6), (1.2.17) и (1.2.18) следует, что при $\|x\| < a$, $\|y\| < a$ имеет место равенство

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, y), \tag{1.2.23}$$

где коэффициенты $c_n(x, y)$ определены соотношениями (1.2.17) и (1.2.18). Соотношения (1.2.23), (1.2.17), (1.2.18) называются *формулой Кемпбелла–Хаусдорфа*, а ряд в правой части (1.2.23) — *рядом Кемпбелла–Хаусдорфа*.

1.3. Сходимость ряда Кемпбелла–Хаусдорфа. Пусть $q(z)$ — функция комплексного переменного z, определенная равенством

$$q(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} |k_{2p}| z^{2p}. \tag{1.3.1}$$

Из формулы Коши–Адамара следует, что радиус сходимости ряда $1 + \sum\limits_{p=1}^{\infty} k_{2p} z^{2p}$ для функции $k(z)$ равен радиусу сходимости ряда $q(z)$. Но ближайшие к точке $z = 0$ особые точки функции $k(z) = z(1 - e^{-z})^{-1} - z/2$ суть точки $\pm 2\pi i$, поэтому радиус сходимости ряда для $k(z)$, а с ним и ряда (1.3.1), равен 2π.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dy/dz = (y/2) + q(y). \tag{1.3.2}$$

Согласно общей теории дифференциальных уравнений существует положительное число b, $b < 2\pi$, такое, что уравнение (1.3.2) имеет аналитическое в круге $\{z \colon |z| < b\}$ решение $y(z)$, удовлетворяющее условию

$$y(0) = 0. \tag{1.3.3}$$

Зафиксируем это положительное число b. Пусть G — группа Ли, L — алгебра Ли группы G; пусть L является нормированным линейным пространством относительно некоторой нормы $\|x\|$, $x \in L$. Пусть $M \geqslant 1$ — такое число, что

$$\|[x, y]\| \leqslant M\, \|x\|\, \|y\| \tag{1.3.4}$$

для всех $x, y \in L$. Обозначим через U множество таких элементов $x \in L$, что $\|x\| < b/2M$, т. е.

$$U = L_{b/2M}. \tag{1.3.5}$$

Заметим, что $b/2M < \pi$, так как $b < 2\pi$, $2M \geqslant 2$.

I. *Пусть* $c_1(x, y) = x + y$ *и пусть функции* $c_n(x, y)$ *определены рекуррентными формулами* (1.2.17) *для всех* $b > 1$. *Для любых* $x, y \in U$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|c_n(x, y)\|$ *сходится. Положим*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, y) = F(x, y), \quad x, y \in U; \tag{1.3.6}$$

тогда функция $F(x, y)$ *определяет аналитическое отображение многообразия* $U \times U$ *в* L, *причем*

$$\exp(x)\exp(y) = \exp F(x, y) \tag{1.3.7}$$

для всех $x, y \in U$.

Доказательство. Пусть $x, y \in L$; положим $r = \max(\|x\|, \|y\|)$. Из соотношения $c_1(x, y+ = x + y$ следует, что $\|c_1(x, y)\| \leqslant 2r$. Из (1.2.17) следует, что при всех $n \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$(n+1)\,\|c_{n+1}(x, y)\| \leqslant Mr\,\|c_n(x, y)\| + \\ + 2r \sum_{p\geqslant 1,\, 2p\leqslant n} |k_{2p}| M^{2p} \sum_{\substack{m_1>0, \ldots, m_{2p}>0\\ m_1+\ldots+m_{2p}=n}} \|c_{m_1}(x, y)\| \ldots \|c_{m_{2p}}(x, y)\|. \tag{1.3.8}$$

Пусть $y = y(z)$ — аналитическая в круге $\{z\colon |z| < b\}$ функция, являющаяся решением задачи Коши (1.3.2)–(1.3.3). Пусть

$$y(z) = \sum_{N=1}^{\infty} \rho_n z^n \tag{1.3.9}$$

при $|z| < b$. Подставляя соотношение (1.3.9) в (1.3.2) и приравнивая коэффициенты при z^n в левой и правой части полученного равенства, видим, что коэффициенты ρ_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(n+1)\,\rho_{n+1} = \rho_n/2 + \sum_{p\geqslant 1,\, 2p\leqslant n} |k_{2p}| \sum_{\substack{m_1>0, \ldots, m_{2p}>0\\ m_1+\ldots+m_{2p}=n}} \rho_{m_1} \ldots \rho_{m_{2p}}, \tag{1.3.10}$$

причем

$$\rho_1 = 1. \tag{1.3.11}$$

Из соотношений (1.3.10)–(1.3.11) следует, что $\rho_n > 0$ для всех $n \geqslant 1$.

Покажем индукцией по n, что при всех $n \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\|c_n(x, y)\| \leqslant M^{n-1}(2r)^n \rho_n. \tag{1.3.12}$$

Так как $\|c_1(x, y)\| \leqslant 2r$, то при $n = 1$ равенство (1.3.12) справедливо. Предположим, что соотношение (1.3.12) справедливо для всех $n = 1, 2, \ldots, m$. Тогда из (1.3.8) и (1.3.10) следует, что

$$(m+1)\,\|c_{m+1}(x, y)\| \leqslant MrM^{m-1}(2r)^m \rho_m + \\ + 2r \sum_{p\geqslant 1,\, 2p\leqslant m} |k_{2p}| M^{2p} \sum_{\substack{m_1>0, \ldots, m_{2p}>0\\ m_1+\ldots+m_{2p}=m}} M^{m-2p}(2r)^m \rho_{m_1} \ldots \rho_{m_{2p}} = \\ = M^m (2r)^{m+1}(m+1)\,\rho_{m+1},$$

т. е. (1.3.12) справедливо для всех $n \geqslant 1$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n |z|^n$ сходится при $|z| < b$, то из (1.3.12) следует, что ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|c_n(x, y)\|$ сходится при $2Mr < b$, т. е. при $x, y \in U$.

При фиксированных $x, y \in L$ и любом t выполняется соотношение

$$c_n(tx, ty) = t^n c_n(x, y) \tag{1.3.13}$$

(действительно, это соотношение легко проверяется по индукции с помощью равенств (1.2.17)). Тогда из (1.1.6), (1.1.8), (1.3.6) и (1.3.13) следует, что

$$F(tx, ty) = f(tx, ty) \tag{1.3.14}$$

для всех достаточно малых $|t|$. Так как отображения F и f аналитичны в окрестности точки $(0, 0) \in L \times L$, то из (1.3.14) следует совпадение функций F и f в некоторой окрестности точки $(0, 0) \in L \times L$. В частности, $\exp(x)\exp(y) = \exp F(x, y)$ в некоторой окрестности точки $(0, 0) \in L \times L$. Но аналитическая функция на связном множестве однозначно определяется своим ограничением на любое открытое подмножество, следовательно, $\exp(x)\exp(y) = \exp F(x, y)$ для всех $x, y \in U$.

1.4. Связь между гомоморфизмами групп и алгебр Ли.

I. *Пусть G, H — связные группы Ли; L, M — их алгебры Ли; π_1, π_2 — аналитические гомоморфизмы группы Ли G в группу Ли H. Если гомоморфизмы $d\pi_1$ и $d\pi_2$ алгебры Ли L в алгебру Ли M совпадают, то π_1 и π_2 совпадают.*

Доказательство. Пусть W — каноническая окрестность элемента $e \in G$ (см. п. 3.4 гл. IX). Из (3.4.25) гл. IX следует, что $\pi_1(g) = \pi_2(g)$ на W. Так как G связна, то $G = \bigcup_{n \geqslant 1} W^n$ (см. V п. 1.2 гл. V), поэтому $\pi_1(g) = \pi_2(g)$ для всех $g \in G$.

Таким образом, гомоморфизм группы Ли однозначно определяется соответствующим гомоморфизмом алгебр Ли. В частности, аналитическое представление группы Ли G (т. е. аналитический гомоморфизм группы Ли G в группу Ли G_E, где E — конечномерное комплексное линейное пространство) однозначно определяется соответствующим представлением алгебры Ли группы G.

Пусть теперь нам задано некоторое представление ρ алгебры Ли группы Ли G в конечномерном комплексном линейном пространстве E. Вообще говоря, представление ρ нельзя представить в виде $\rho = d\pi$, где π — некоторое представление группы Ли G в пространстве E.

Пример. Пусть $G = \Gamma^1$ — единичная окружность; алгебра Ли L группы G изоморфна $\mathbf{R}^1$ (см. пример 2 п. 3.2). Обозначим через X левоинвариантное векторное поле на Γ^1, определенное формулой $X(1)(\sin\varphi) = 1$; тогда $X(1)(\cos\varphi) = X(1)\left(\sqrt{1 - \sin^2\varphi}\right) = X(1) \times \times (1 + \sin^2\varphi f(\varphi))$, где $f(\varphi)$ — аналитическая функция в окрестности точки $\varphi = 0$. Из равенства $X(1)(1) = 0$ и соотношений (1.4.1) и (1.4.2) гл. IX следует, что $X(1)(\cos\varphi) = 0$. Из условия левоинвариантности векторного поля X следует, что

$$X(e^{i\theta})(\sin\varphi) = X(1)(\sin(\varphi + \theta)) = X(1)(\sin\varphi\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi) = \cos\theta;$$

аналогично, $X(e^{i\theta})(\cos\varphi) = -\sin\theta$. Легко проверить по индукции, что для любого целого n имеют место равенства $X(e^{i\theta})(\cos n\varphi) = -n\sin n\theta$, $X(e^{i\theta})(\sin n\varphi) = n\cos n\theta$. Элемент X образует базис в алгебре Ли L. Пусть L — алгебра Ли группы $\mathbf{C}$ и пусть Y — векторное поле на $\mathbf{C}$, определяемое условием, что $Yx = 1$, где x — функция $x(z) = Z$ на $\mathbf{C}$; тогда Y образует базис в комплексном линейном пространстве $\widetilde{L}$. Следовательно, для любого комплексного числа a формула $\rho(\lambda x) = \lambda aY$, $\lambda \in \mathbf{R}$, определяет представление ρ алгебры Ли L в пространстве $\mathbf{C}$. Но, с другой стороны, все непрерывные представления группы Γ^1 нам известны (см. г) п. 3.3 гл. III). Пусть π_n, $n \in \mathbf{Z}$, — представление группы Γ^1, определенное формулой $\pi_n(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Тогда $d\pi_n(X)(0) = (d\pi_n)_1 X(1)$ (см. (3.3.1)), поэтому $d\pi_n(X)(0)(x) = X(1)(x \circ \pi_n) = X(1)(e^{in\varphi}) = X(1) \times \times (\cos n\varphi + i\sin\varphi) = -n\sin 0 + in\cos 0 = in$, т. е. $d\pi_n(X) = inY$ и при $a \neq in$ представление ρ нельзя представить в виде $\rho = d\pi$.

Таким образом, гомоморфизму алгебр Ли, вообще говоря, может не соответствовать никакой гомоморфизм групп Ли. Однако для односвязных групп Ли справедливо следующее предложение.

II. *Пусть G, H — группы Ли, L, M — их алгебры Ли, ρ — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли M. Если группа G односвязна, то существует аналитический гомоморфизм π группы Ли G в группу Ли H, удовлетворяющий условию $d\pi = \rho$.*

Доказательство. Пусть W — каноническая окрестность единичного элемента в группе G (см. п. 3.4 гл. IX), V — окрестность нулевого элемента в алгебре Ли L, гомеоморфно отображаемая на W при экспоненциальном отображении (ср. V п. 3.4 гл. IX). Положим

$$\pi(\exp(x)) = \exp(\rho(x)) \tag{1.4.1}$$

для всех $x \in V$. Покажем, что формула (1.4.1) определяет локально гомоморфное отображение группы Ли G в H. Пусть множество $U \subset L$ определено соотношением (1.3.5). Тогда множество $U \cap V$ есть окрестность нулевого элемента в L, и $\exp(U \cap V)$ есть окрестность единичного элемента e в G. Пусть U_0 — такая окрестность элемента e в G, что $U_0^2 \subset \exp(U \cap V)$. Тогда для любых $g_1, g_2 \in U_0$

$$g_1 = \exp x, \quad g_2 = \exp y \tag{1.4.2}$$

для некоторых однозначно определенных $x, y \in U \cap V$, причем

$$\exp x \exp y = \exp F(x, y) \tag{1.4.3}$$

согласно (1.3.7), где $\exp x \exp y \in \exp(U \cap V)$ и поэтому $F(x, y) \in U \cap V$

в (1.4.3). Из (1.4.3) и (1.4.1) следует, что

$$\pi(g_1g_2) = \pi(\exp x \exp y) = \pi(\exp F(x, y)) = \exp \rho(F(x, y)). \qquad (1.4.4)$$

Представление ρ линейно, поэтому оно непрерывно. Применяя ρ к обеим частям равенства (1.3.6), видим, что

$$\rho(F(x, y)) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(c_n(x, y)), \qquad (1.4.5)$$

а из равенств (1.2.17) и (1.2.18) легко следует по индукции, что

$$\rho(c_n(x, y)) = c_n(\rho(x), \rho(y)) \qquad (1.4.6)$$

для всех $n \geqslant 1$. Подставляя (1.4.5) и (1.4.6) в (1.4.4), получаем

$$\pi(g_1g_2) = \exp \rho(F(x, y)) = \exp F(\rho(x), \rho(y)), \qquad (1.4.7)$$

а из (1.4.7) и (1.3.6) следует, что

$$\pi(g_1g_2) = \exp F(\rho(x), \rho(y)) = \exp \rho(x) \exp \rho(y) = \\ = \pi(\exp(x) \exp(y)) = \pi(g_1)\, \pi(g_2) \qquad (1.4.8)$$

для всех $g_1, g_2 \in U_0$.

Таким образом, отображение π определяет локально гомоморфное отображение группы G в H. Но, по предположению группа G односвязна, поэтому из I п. 2.3 гл. VIII следует, что отображение π можно продолжить до непрерывного гомоморфизма группы G в группу H; этот гомоморфизм мы снова обозначим через π. Из формулы (1.4.1) заключаем, что гомоморфизм π является аналитическим отображением в некоторой окрестности единичного элемента группы G. Следовательно, π — аналитический гомоморфизм группы G в H.

Пусть $d\pi$ — гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру Ли M, определяемый гомоморфизмом π. Согласно (3.4.25) гл. IX, $\pi(\exp x) = \exp(d\pi(x))$ для всех $x \in L$; сравнивая с (1.4.1), видим, что

$$\exp(\rho(x)) = \exp(d\pi(x)) \qquad (1.4.9)$$

для всех $x \in V$. Так как экспоненциальное отображение гомеоморфно в некоторой окрестности нулевого элемента алгебры Ли M, то в этой окрестности $\rho(x) = d\pi(x)$ согласно (1.4.9). Но тогда $\rho = d\pi$, что завершает доказательство предложения II.

Теорема. *Пусть G — односвязная группа Ли, L — ее алгебра Ли, ρ — представление алгебры Ли L в конечномерном комплексном линейном пространстве E. Существует аналитическое представление π группы Ли G в пространстве E такое, что $\rho = d\pi$.*

Доказательство сразу следует из предложения II, примененного к случаю $H = G_E$, $M = gl(E)$.

§ 2. Теорема Картана

Пусть G — связная группа Ли, L — алгебра Ли группы G. Будем считать, что пространство L снабжено некоторой нормой $\|\cdot\|$. Пусть U — окрестность нулевого элемента в L, определенная соотношением (1.3.5). Пусть $V\subset U$ — симметричная окрестность нулевого элемента в L, гомеоморфно отображаемая в G при экспоненциальном отображении, и пусть $W=\exp(V)$. Тогда W — симметричная окрестность единицы в G. Предположим, что H — замкнутая подгруппа в G; тогда пересечение $W\cap H$ замкнуто в W. Пусть F — такое подмножество в V, что $\exp F=W\cap H$; так как exp гомеоморфно на V, то F замкнуто в V. Очевидно, что подмножество $W\cap H$ удовлетворяет следующим двум условиям:

а) если $g_1,\ \ldots,g_m\in W\cap H$ и $g_1\ldots g_m\in W$, то $g_1\ldots g_m\in H\cap W$,

б) если $g\in H\cap W$, то $g^{-1}\in H\cap W$.

Пусть M — множество таких элементов $x\in L$, что для некоторого $\varepsilon>0$ $\exp(tx)\in H\cap W$ при всех $|t|<\varepsilon$, т. е. $tx\in F$ при всех $|t|<\varepsilon$.

I. *Если $x\in M$, то $\lambda x\in M$ для всех вещественных λ.*

Доказательство. Если $\lambda\neq 0$, то $g(\lambda x)\in F$ при $|t|<\varepsilon\lambda^{-1}$.

II. *Пусть $x\in VY$ и $x\in M$; тогда $x\in F$.*

Доказательство. Так как $x\in M$, то существует такое $\varepsilon>0$, что $tx\in F$ при $|t|<\varepsilon$, т. е. $\exp(tx)\in H\cap W$ при $|t|<\varepsilon$. С другой стороны, $x\in V$, так что $\exp(x)=(\exp(xn^{-1}))^n\in H\cap W$ согласно условию а).

III. *Пусть $x_n\in F$, $x_n\neq 0$ $(n=1,\,2,\,\ldots)$. Пусть $x_n\to 0$ и $x_n/\|x_n\|\to$ $\to y\neq 0$ в L. Тогда $y\in M$.*

Доказательство. Пусть L_ε — шар радиуса ε с центром в точке 0, содержащийся в V. Пусть m — натуральное число и пусть $\varepsilon_m=\varepsilon m^{-1}$. Положим

$$S_k=\{x\in L\colon (k-1)\,\varepsilon_m\leqslant\|x\|\leqslant k\varepsilon_m\}\tag{2.1.1}$$

(в частности, $S_1=L_{\varepsilon_m}$). Существует номер N_m такой, что $x_n\in S_1$ при всех $n\geqslant N_m$. Выберем k так, что $1<k\leqslant m$. Из предложения I и определения S_k следует, что для каждого целого $n\geqslant N_m$ найдется элемент $y_n^{(k)}$ вида jx_n (j натурально), лежащий в S_k. Так как $x_n/\|x_n\|$ сходится к y, то ввиду компактности всех S_k некоторая подпоследовательность точек $y_{n_k}^{(k)}$ сходится к точке вида λy, где $(k-1)\,\varepsilon_m\leqslant|\lambda|\leqslant k\varepsilon_m$. Так как $x_n\in S_1=L_{\varepsilon_m}$, то $jx_n\in L_\varepsilon\subset V$ при всех натуральных j таких, что $jx_n\in S_k$; следовательно, $y_n^{(k)}\in V$. Но $x_n=j^{-1}y_n^{(k)}\in M$, поэтому из II следует, что $y_n^{(k)}\in F$. Поскольку $y_n^{(k)}\to\lambda y$, где $\lambda y\in S_m\subset L_\varepsilon$, а множество F замкнуто в V, то $\lambda y\in F$. Таким образом, мы доказали, что *для любых натуральных чисел m и k, таких, что $1<k\leqslant m$, существует элемент $\lambda y\in F$, для которого $(k-1)\,\varepsilon_m\leqslant|\lambda|\leqslant k\varepsilon_m$.*

Из условия б) следует, что множество D вещественных чисел λ таких, что $\lambda y \in F$, симметрично относительно нуля. Отсюда и из только что доказанного свойства множества D следует, что множество D всюду плотно в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Но из замкнутости множества F следует, что D целиком содержит интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$; следовательно, $y \in M$.

IV. *Если* $x, y \in V$, *то*

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\exp\frac{x}{m}\,\exp\frac{y}{m}\right)^m = \exp(x+y), \tag{2.1.2}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\left[\exp\frac{x}{m},\ \exp\frac{y}{m}\right]^m = \exp[x, y]. \tag{2.1.3}$$

Доказательство. По условию, экспоненциальное отображение гомеоморфно на V, поэтому достаточно проверить, что если $\exp(x)\exp y = \exp f(x, y)$, где функция f определяется соотношениями (1.2.17), (1.2.18), (1.2.23), то

$$\lim_{m\to+\infty} mf\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right) = x + y, \tag{2.1.4}$$

$$\lim_{m\to+\infty} m^2 f\left(f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right), f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)\right) = [x, y]. \tag{2.1.5}$$

Заметим, однако, что из (1.2.17)–(1.2.18) индукцией по n легко следует, что

$$c_n\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right) = \frac{1}{m^n}\,c_n(x, y); \tag{2.1.6}$$

тогда (2.1.4) сразу следует из (2.1.6) и (1.2.23). Кроме того, из (2.1.6) и (1.2.23) следует, что

$$\begin{aligned} f\left(f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right), f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)\right) = f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right) + f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right) + \\ + \frac{\left[f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right), f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)\right]}{2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right), \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

причем

$$f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right) = \frac{x+y}{2} + \frac{1}{2m^2}\,[x, y] + o\left(\frac{1}{m^2}\right). \tag{2.1.8}$$

Подставляя (2.1.8) в (2.1.7), получаем, что

$$\begin{aligned} f\left(f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right), f\left(-\frac{x}{m}, -\frac{y}{m}\right)\right) = \frac{x+y}{m} + \frac{1}{2m^2}\,[x, y] + \frac{x+y}{m} + \\ + \frac{1}{2m^2}\,[x, y] + \frac{[x+y, x+y]}{2m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) = \frac{[x, y]}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right). \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Соотношение (2.1.5) сразу следует из (2.1.9).

V. *Множество* M *есть подалгебра Ли в* L.

Доказательство. Если $x, y \in M$, то $\exp(tx)$, $\exp(ty)$ лежат в $H \cap W$ при достаточно малых t. Так как H — подгруппа, то при достаточно малом t элементы $\exp(tx)\exp(ty)$ и $[\exp(tx),\ \exp(ty)]$ также принадлежат $H\cap W$. Следовательно, $f(tx,\ ty)\in F$ при достаточно малых t и $f\left(\dfrac{x}{n},\ \dfrac{y}{n}\right)\in F$ при достаточно больших n; тогда из (2.1.2) и III следует, что $x+y\in M$. Аналогично, $\left[\exp\dfrac{x}{n},\ \exp\dfrac{y}{n}\right]\in F$, поэтому из (2.1.3) и III следует, что $[x,\ y]\in M$. Так как $\lambda x\in M$ при $x\in M$ (см. I), то M — подалгебра Ли в L.

Теорема 1. *Замкнутая подгруппа вещественной группы Ли является группой Ли.*

Доказательство. Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа. Пересечение группы H с компонентой единицы G_0 группы G есть одновременно открытая и замкнутая подгруппа (и даже нормальный делитель) в группе H; таким образом, если $H\cap G_0$ есть группа Ли, то H также является группой Ли. Следовательно, достаточно доказать, что пересечение $H\cap G_0$ есть группа Ли; поэтому мы можем дополнительно предполагать, что G — связная группа. Пусть L — алгебра Ли группы Ли G, пусть M — ее подалгебра Ли, определенная перед предложением I (см. также V). Пусть $\widetilde{H}$ — аналитическая подгруппа в G, соответствующая M. Пусть $g\in W\cap\widetilde{H}$. Так как $\widetilde{H}$ связна, то $\widetilde{H}=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(\exp(M\cap V))^m$, следовательно, $g=\exp x_1\ldots\exp x_k$, где $x_1,\ \ldots,\ x_k\in M\cap V$. С другой стороны, так как $x_1\in M\cap V\subset M$, то $tx_i\in F$ при $|t|<\varepsilon_i$ для некоторого $\varepsilon_i>0$, в частности, $x_i/m_i\in F$ для некоторого натурального m_i. Следовательно, $g=(\exp(x_i/m_i))^{m_1}\ldots(\exp(x_k/m_k))^{m_k}$, где сомножители $\exp(x_i/m_i)$ лежат в $\exp F=H\cap W$. Согласно условию а), так как $g\in W$, то $g\in H\cap W$. Мы показали, что $\widetilde{H}\cap W\subset H\cap W=\exp F$. Докажем, что F содержится в некоторой окрестности нуля в пространстве M. Пусть это не так; тогда существует такая последовательность точек $x_n\in F\diagdown M$, что $x_n\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть N — подпространство в L, дополнительное к M. По построению, отображение пространства $(N\cap V)\times(M\cap V)$ в V, определенное формулой $(y,\ z)\to f(y,\ z)$, $y\in N\cap V$, $z\in M\cap V$, является локальным изоморфизмом в точке 0 (так как дифференциал этого отображения определяется формулой $\{y,\ z\}\to y+z$ и поэтому является изоморфизмом касательных пространств). Следовательно, при достаточно большом n элемент x_n однозначно представим в виде $x_n=f(y_n,\ z_n)$, где $y_n\in N\cap V$, $z_n\in M\cap V$. При этом $y_n\to 0$, $z_n\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому при достаточно больших n имеем $z_n\in F$ (так как $\exp F\supset W\cap\widetilde{H}$), но тогда и $y_n\in F$ ввиду условий а) и б). Следовательно, можно считать, что последовательность x_n лежит в N. Ввиду компактности единичной сферы подпоследовательность $x_{n_k}/\|x_{n_k}\|$ сходится к элементу $y_0\in N$, $y_0\neq 0$. С другой стороны, $y_0\in M$. Это противоречит тому, что N — дополнение к M в L. Следовательно, $\exp\widetilde{F}\subset H$, и группа Ли H есть компонента единицы в H.

Теорема 2. *Всякий непрерывный гомоморфизм* $\varphi\colon G_1 \to G_2$ *групп Ли является* (*вещественно*) *аналитическим.*

Доказательство. Пусть H — подмножество всех элементов в $G_1 \times G_2$ вида $(g_1, \varphi(g_1))$, $g_1 \in G_1$. Тогда H — замкнутая подгруппа группы G. По теореме 1, H есть подгруппа Ли в $G_1 \times G_2$. Отображение $\varphi_1\colon (g_1, g_2) \to g_1$ есть аналитический гомоморфизм группы $G_1 \times G_2$ на G_1, его ограничение на H взаимно однозначно и аналитично. Очевидно, что оно определяет изоморфизм групп Ли H и G_1. Тогда обратное отображение $g_1 \to (g_1, \varphi(g_1))$ аналитично. Так как отображение $(g_1, g_2) \to g_2$ также аналитично, то сквозное отображение $g_1 \to (g_1, \varphi(g_1)) \to \varphi(g_1)$ аналитично.

VI. *Всякое непрерывное конечномерное представление* (*вещественной или комплексной*) *группы Ли является вещественно-аналитическим.*

Доказательство. Непрерывное представление π группы Ли G в конечномерном пространстве V есть непрерывный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли G_V; согласно теореме 2 этот гомоморфизм вещественно-аналитичен.

Пример. Доказательство теоремы 1 позволяет указать алгебру Ли любой замкнутой подгруппы группы Ли. В частности, пусть замкнутая подгруппа G группы Ли $GL(n, \mathbf{R})$ выделяется набором условий вида $F_\alpha(g) = 0$, $\alpha \in A$, где F_α — аналитические функции на G. Пусть алгебра Ли группы $GL(n, \mathbf{R})$ канонически отождествлена с $gl(n, \mathbf{R})$ (см. VI п. 3.1); тогда алгебру Ли группы Ли G можно отождествить с подалгеброй Ли $M \subset gl(n, \mathbf{R})$, состоящей из всех таких $x \in gl(n, \mathbf{R})$, что $(x^n F_\alpha)(e) = 0$ для всех $a \in A$ и всех натуральных n. Действительно, в обозначениях предложения I множество M есть алгебра Ли группы Ли G, причем M есть множество всех таких $x \in (n, \mathbf{R})$, что $\exp(tx) \in G$ при всех достаточно малых t, т. е. таких $x \in gl(n, \mathbf{R})$, что $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$ при достаточно малых t. Но $F_\alpha(\exp(tx))$ — аналитическая функция, поэтому $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $(d^n/dt^n)F_\alpha(\exp(tx))|_{t=0}$ для всех $n \geqslant 0$, т. е. $(x^n F_\alpha)(e) = 0$ для всех натуральных n.

Предположим сначала, что одна из функций F_{α_0} имеет вид $F_{\alpha_0}(g) = \det g - 1$. Очевидно, $F_{\alpha_0}(g) = 0$ тогда и только тогда, когда $g \in SL(n, \mathbf{R})$. Группа $SL(n, \mathbf{R})$ связна (см. XVI п. 1.2 гл. V) и является ядром аналитического гомоморфизма φ группы Ли $GL(n, \mathbf{R})$ в группу Ли $\mathbf{R}^* = GL(1, \mathbf{R})$, определенного формулой $\varphi(g) = \det g$. Согласно IV п. 3.3, отсюда следует, что группа $SL(n, \mathbf{R})$ совпадает с аналитической подгруппой, соответствующей ядру гомоморфизма $d\varphi$ алгебры Ли $gl(n, \mathbf{R})$. Применяя формулу (3.4.25) гл. VIII, видим, что $\varphi(\exp(tx)) = \exp(d\varphi(tx)) = \exp(t(d\varphi(x)))$ для всех $x \in gl(n, \mathbf{R})$. Но, приводя матрицу x к жордановой форме, мы видим, что $\varphi(\exp(tx)) = \det(e^{tx}) = e^{t \cdot \mathrm{tr}(x)}$, где $\mathrm{tr}(x)$ — след матрицы x. Следовательно, $e^{t\,\mathrm{tr}(x)} = e^{t\,d\varphi)\,x}$ для всех $x \in gl(n, \mathbf{R})$, т. е. $d\varphi(x) = \mathrm{tr}(x)$; в частности, алгебра Ли группы $SL(n, \mathbf{R})$ есть подалгебра Ли $L \subset gl(n, \mathbf{R})$, образованная матрицами с нулевым следом, т. е. $L = sl(n, \mathbf{R})$ (см. пример 2 п. 2.1 гл. IX).

Рассмотрим другой важный частный случай. Пусть $F_\alpha(g) = g^*Bg - B$, где B — некоторая невырожденная матрица. Тогда соотношение $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$ равносильно соотношению $\exp(tx^*)\times B\exp(tx) - A \equiv 0$ и соотношению $\exp(tx^*)B - B\exp(-tx) = 0$. Дифференцируя по t при $t = 0$, получаем, что матрица x должна удовлетворять соотношению $x^*B + Bx = 0$, или $x^*B = -Bx$. Обратно, пусть $x^*B = -Bx$ для некоторой матрицы $x \in gl(n, \mathbf{R})$. Тогда индукцией по n получаем, что соотношение $(x^*)^nB = (-1)^nBx^n$ имеет место для всех натуральных n. Отсюда в свою очередь следует, что $(d^n/dt^n)(\exp(tx^*)B - B\exp(-tx))|_{t=0} = (x^*)^nB + (-1)^{n+1}Bx^n = 0$ для всех натуральных n, т. е. $\exp(tx^*)B = B\exp(-x)$ для всех t, т. е. $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$. Аналогично, если $F_\alpha(g) = g'Bg - B$, то соотношение $F_\alpha(\exp(tx)) \equiv 0$ равносильно соотношению $x'B = -Bx$. Аналогичные утверждения очевидным образом справедливы для замкнутых подгрупп группы $GL(n, \mathbf{C})$.

Применяя полученный результат к группам $U(n)$, $SU(n)$, $O(n, \mathbf{R})$, $SO(n, \mathbf{R})$, $Sp(2n)$, $O(n, \mathbf{C})$, $SO(n, \mathbf{C})$, $Sp(2n, \mathbf{C})$, видим, что их алгебрами Ли являются соответственно алгебры Ли $u(n)$, $su(n)$, $o(n, \mathbf{R})$, $so(n, \mathbf{R})$, $sp(2n)$, $o(n, \mathbf{C})$, $so(n, \mathbf{C})$, $sp(2n, \mathbf{C})$.

§ 3. Третья теорема Ли

3.1. Полупрямые произведения групп Ли. Пусть G, H — связные группы Ли. Предположим, что α — отображение, которое каждому элементу $h \in H$ сопоставляет аналитический изоморфизм α_k группы Ли G на себя, удовлетворяющий следующим условиям:

1) для любых $h_1, h_2 \in H$ выполняется соотношение
$$\alpha_{h_1h_2} = \alpha_{h_1}\alpha_{h_2}; \tag{3.1.1}$$

2) отображение произведения $G \times H$ в G, определенное формулой
$$(g, h) \to \alpha_h(g), \qquad g \in G, \quad h \in H, \tag{3.1.2}$$
есть аналитическое отображение многообразий.

Введем в топологическом пространстве $G \times H$ операцию умножения по формуле
$$(g, h)(g_1, h_1) = (g\alpha_k(g_1), hh_1) \tag{3.1.3}$$
для всех $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$, Пусть e_G, e_H — единичные элементы групп G и H соответственно; читатель легко проверит, что операция умножения, определенная формулой (3.1.3), превращает топологическое пространство $G \times H$ в топологическую группу, причем единичным

элементом этой группы является пара (e_G, e_H), а обратный элемент вычисляется по формуле

$$(g, h)^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1}) \tag{3.1.4}$$

для всех $g, h \in G$. Так как отображение (3.1.2) аналитично, то из формул (3.1.3) и (3.1.4) следует, что $G \times H$ является группой Ли относительно отображения (3.1.3). Обозначим эту группу Ли через $G \underset{\alpha}{\times} H$ и назовем ее *скрещенным произведением* групп G и H относительно α. Если α_h есть тождественное отображение группы G на себя при всех $h \in H$, то $G \underset{\alpha}{\times} H$ совпадает с обычным прямым произведением групп Ли G и H.

Положим

$$g' = (g, e_H), \quad h' = (e_G, h) \tag{3.1.5}$$

для всех $g \in G$, $h \in H$; пусть

$$G' = G \times \{e_H\}, \quad H' = \{e_G\} \times H. \tag{3.1.6}$$

Очевидно, что G' и H' — замкнутые подгруппы Ли в $G \underset{\alpha}{\times} H$. Из (3.1.3) и (3.1.4) следует, что

$$(g, h)(g_1, h_1)(g, h)^{-1} = (g\alpha_h(g_1)\, \alpha_{hh_1h^{-1}}(g^{-1}), hh_1h^{-1}) \tag{3.1.7}$$

для всех $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$; в частности,

$$(g, h)\, g_1'(g, h)^{-1} = (g\alpha_j(g_1)\, g^{-1})', \tag{3.1.8}$$

$$h'g'h'^{-1} = \alpha_h(g)'. \tag{3.1.9}$$

Соотношение (3.1.8) означает, что G' — нормальный делитель в группе G.

3.2. Полупрямые произведения алгебр Ли. Пусть L, M — алгебры Ли групп G и H соответственно. Обозначим через β_h дифференциал отображения α_h: $G \to G$; тогда β_h — автоморфизм алгебры Ли L при всех $h \in H$ (см. п. 3.5 гл. IX). Согласно (3.4.25) гл. IX

$$\alpha_h(\exp(x)) = \exp \beta_h(x) \tag{3.2.1}$$

для всех $x \in L$. Из соотношения (3.1.1) следует, что

$$\beta_{h_1h_2} = \beta_{h_1}\beta_{h_2} \tag{3.2.2}$$

для всех $h_1, h_2 \in H$, а из соотношения (3.2.1) следует, что отображение β есть аналитическое отображение группы H в группу G_L. Сопоставляя этот факт с (3.2.2), видим, что β есть аналитический гомоморфизм группы H в G_L. Пусть $\gamma = d\beta$ — соответствующий гомоморфизм алгебры Ли M группы H (см. III п. 3.3 гл. IX); согласно III п. 3.3 гл. IX отображение γ есть гомоморфизм алгебры Ли M в алгебру Ли $gl(L)$. Заметим, что

$$\beta_h([x, y]) = [\beta_h(x), \beta_h(y)] \tag{3.2.3}$$

для всех $x, y \in L$, так как β_h — автоморфизм алгебры Ли L. Из (3.2.3) следует, что

$$\gamma(z)\,[x,\, y] = [\gamma(z)\,x,\, y] + [x,\, \gamma(z)\,y] \tag{3.2.4}$$

для всех $x, y \in L$, $z \in M$, т. е. γ есть гомоморфизм алгебры Ли M в алгебру Ли дифференцирований алгебры Ли L.

Пусть L, M — некоторые алгебры Ли, δ — гомоморфизм алгебры Ли M в алгебру Ли $\mathrm{Der}(L)$. Рассмотрим линейное пространство $L \times M$ и положим

$$[(x,\, y),\, (x_1,\, y_1)] = ([x,\, x_1] + \delta(y)\,x_1 - \delta(y_1)\,x,\, [y,\, y_1]) \tag{3.2.5}$$

для всех $x, x_1 \in L$, $y, y_1 \in M$. Легко проверить непосредственно, что операция (3.2.5) превращает $L \times M$ в алгебру Ли; обозначим эту алгебру Ли через $L \underset{\delta}{\times} M$ и назовем ее *полупрямым произведением алгебр Ли* L и M относительно δ. Пусть

$$L' = L \times \{0\}, \quad M' = \{0\} \times M. \tag{3.2.6}$$

Из (3.2.5) и (3.2.6) легко следует, что L' — идеал в $L \underset{\delta}{\times} M$, M' — подалгебра в $L \underset{\delta}{\times} M$, причем

$$L' + M' = L \underset{\delta}{\times} M, \quad L' \cap M' = \{0\}. \tag{3.2.7}$$

I. *Алгебра Ли группы Ли* $G \underset{\alpha}{\times} H$ *изоморфна алгебре Ли* $\underset{\gamma}{\times} M$.

Доказательство. Пусть A — алгебра Ли группы $G \underset{\alpha}{\times} H$, L', M' — подалгебры Ли в A, соответствующие подгруппам G', $H' \subset G \underset{\alpha}{\times} H$ (см. (3.1.6)). Так как G' — нормальный делитель в $G \underset{\alpha}{\times} H$, то L' — идеал в A (см. V п. 3.5 гл. IX). Из (3.1.6) следует, что $G \underset{\alpha}{\times} H = G'H'$, причем $G' \cap H' = \{e\}$; тогда из I, II п. 3.3 и (3.5.15) гл. IX следует, что

$$L' + M' = A, \quad L' \cap M' = \{0\}. \tag{3.2.8}$$

Пусть $x \to x'$ (соотв. $y \to y'$) — изоморфизм алгебры Ли L на алгебру Ли L' (соотв. изоморфизм M на M'), определяемый изоморфизмом $g \to g'$ (соотв. $h \to h'$) группы Ли G на G' (соотв. H на H'). Из соотношения (3.1.9) и формулы (3.4.25) гл. IX следует, что для любого $h \in H$ и $x \in L$ справедливо равенство

$$(\exp \beta_h(x))' = h'(\exp x')\,h'^{-1}, \tag{3.2.9}$$

поэтому

$$\beta_h(x)' = \mathrm{Ad}_{G \underset{\alpha}{\times} H}(h')(x'). \tag{3.2.10}$$

Дифференцируя обе части равенства (3.2.10) как отображения группы H в L' видим, что

$$(\gamma(y)\,x)' = [y',\, x'] \tag{3.2.11}$$

для всех $y \in M$, $x \in L$. Из соотношения (3.2.11) следует, что

$$\begin{aligned}[]
[x'+y',\, x_1'+y_1'] &= [x',\, x_1'] + [y',\, x_1'] - [y_1',\, x'] + [y',\, y_1'] = \\
&= [x',\, x_1'] + (\gamma(y)\,x_1)' - (\gamma(y_1)\,x)' + [y',\, y_1']
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

для всех $x,\, x_1 \in L$, $y,\, y_1 \in M$. Сравнивая (3.2.12) с (3.2.5) и применяя (3.2.7) и (3.2.8), видим, что отображение

$$(x,\, y) \to x' + y'$$

есть изоморфизм алгебр Ли $L \underset{\gamma}{\times} M$ и A.

II. *Пусть G, H — односвязные группы Ли, L, M — их алгебры Ли, δ — гомоморфизм алгебры Ли M в алгебру Ли* $\mathrm{Der}(L)$. *Существует однозначно определенное отображение α группы Ли H в множество аналитических изоморфизмов группы Ли G на себя, удовлетворяющее условиям* 1) *и* 2) п. 3.1, *такое, что отображение* (3.2.13) *устанавливает изоморфизм алгебры Ли группы $G \underset{\alpha}{\times} H$ и алгебры Ли $L \underset{\delta}{\times} M$. Группа $G \underset{\alpha}{\times} H$ односвязна.*

Доказательство. Так как группа H односвязна, то по гомоморфизму δ алгебры Ли M в алгебру Ли $gl(L)$ можно построить такой аналитический гомоморфизм β группы H в группу Ли $gl(L)$, что $d\beta = \delta$ (см. II п. 1.4). Покажем, что

$$\beta(h)\,[x_1,\, x_2] = [\beta(h)\,x_1,\, \beta(h)\,x_2] \tag{3.2.13}$$

для всех $h \in H$, $x_1,\, x_2 \in L$. Так как группа H связна, то достаточно доказать формулу (3.2.13) для всех H из некоторой окрестности единичного элемента в H, поэтому достаточно показать, что функция

$$\varphi(t) = \beta(\exp(ty))\,[x_1,\, x_2] - [\beta(\exp(ty))\,x_1,\, \beta(\exp(ty))\,x_2] \tag{3.2.14}$$

тождественно равна нулю по t при всех $y \in M$, $x_1,\, x_2 \in L$. Используя (3.4.25) гл. IX, видим, что формулу (3.2.14) можно переписать в виде

$$\varphi(t) = \exp(t\delta(y))\,[x_1,\, x_2] - [\exp[t\delta(y))\,x_1,\, \exp(t\delta(y))\,x_2]. \tag{3.2.15}$$

Дифференцируя (3.2.15) по t в точке $t=0$, получаем

$$\left(\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}\right)_{t=0} = \delta(y)^n[x_1,\, x_2] - \sum_{k=0}^{n} C_n^k[\delta(y)^k x_1,\, \delta(y)^{n-k} x_2]. \tag{3.2.16}$$

Но $\delta(y)$ — дифференцирование, т. е.

$$\delta(y)\,[x_1,\, x_2] = [\delta(y)\,x_1,\, x_2] + [x_1,\, \delta(y)\,x_2] \tag{3.2.17}$$

для всех $y \in M$, $x_1, x_2 \in L$. Следовательно, $\left.\dfrac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = 0$, и индукцией по n из формулы (3.2.16) легко следует, что $\left(\dfrac{d^n\varphi(t)}{dt^n}\right)_{t=0} = 0$ для всех $n \geqslant 1$. Таким образом, $\varphi(t) = \varphi(0) = 0$. Этим завершается доказательство соотношения (3.2.13).

Таким образом, $\beta(h)$ есть автоморфизм алгебры Ли L группы G. Так как группа G односвязна, то существует такой однозначно определенный аналитический изоморфизм α_h группы G на себя, что $d\alpha_h = \beta(h)$ (см. II п. 1.4). Так как α_h однозначно определен автоморфизмом $\beta(h)$ и $\beta(h_1)\,\beta(h_2) = \beta(h_1h_2)$, то $\alpha_{h_1}\alpha_{h_2} = \alpha_{h_1h_2}$ для всех $h_1, h_2 \in H$.

Из равенства $d\beta = \delta$ следует, что $\beta(\exp(y)) = \exp(\delta(y))$ для всех $y \in L$; отсюда и из равенства $d\alpha_{\exp(y)} = \beta(\exp(y))$ заключаем, что

$$\alpha_{\exp(y)}(\exp(x)) = \exp(\beta(\exp y)\,x) = \exp(\exp\delta(y))\,x) \tag{3.2.18}$$

для всех $x \in L$, $y \in M$. Из формулы (3.2.18) следует, что отображение $(g, h) \to \alpha_h(g)$ является аналитическим отображением многообразия $G \times H$ в G. Таким образом, отображение α удовлетворяет условиям 1) и 2) п. 3.1. Построим группу $G \underset{\alpha}{\times} H$. Так как $\delta = d\beta$, где $\beta(h) = d\alpha_h$, то из предложения I следует, что алгебра Ли группы $G \underset{\alpha}{\times} H$ изоморфна алгебре Ли $L \underset{\delta}{\times} M$, причем изоморфизм устанавливается при помощи отображения (3.2.13). Группа $G \underset{\alpha}{\times} H$ гомеоморфна произведению $G \times H$ (см. п. 3.1); так как G и H односвязны, то $G \times H$ и $G \underset{\alpha}{\times} H$ односвязны (см. II п. 2.1 гл. IX).

3.3. Третья теорема Ли.

Теорема. *Пусть L — алгебра Ли. Существует односвязная группа Ли G, алгебра Ли которой изоморфна L.*

Доказательство. Предположим сначала, что L — разрешимая алгебра Ли. В этом случае мы докажем теорему индукцией по размерности алгебры Ли L. Если $\dim L = 1$, то $L = \mathbf{R}$ или $L = \mathbf{C}$; можно взять соответственно $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{C}$. Пусть $\dim L = N > 1$, и пусть утверждение теоремы уже доказано для всех разрешимых алгебр Ли размерности $< n$. Так как L разрешима, то $[L, L] \neq L$ (см. п. 1.6 гл. X). Пусть I — линейное подпространство в L, содержащее $[L, L]$, такое, что $\dim L/I = 1$. Пусть J — какое-нибудь одномерное подпространство в L, дополнительное к I. Так как $[I, L] \subset [L, L] \subset I$, то I — идеал в L. Очевидно, что J — коммутативная подалгебра Ли в L, причем

$$I + J = L, \quad I \cap J = (0). \tag{3.3.1}$$

Пусть $x \in I$, $y \in J$; положим

$$\delta(y)\,x = [y, x]. \tag{3.3.2}$$

Очевидно, что $\delta(y)$ является дифференцированием алгебры Ли I при любом $y \in J$, причем отображение δ является гомоморфизмом алгебры Ли J в алгебру Ли $\mathrm{Der}(I)$. Легко непосредственно проверить, что алгебра Ли L изоморфна алгебре Ли $I \underset{\delta}{\times} J$. По предположению индукции, существуют односвязные группы Ли S и T, алгебры Ли которых изоморфны алгебрам Ли I и J соответственно. Применяя предложение II п. 3.2, видим, что существует односвязная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна L.

Предположим теперь, что алгебра Ли L полупроста. Тогда центр L равен нулю, поэтому присоединенное представление алгебры Ли L есть точное представление и подалгебра Ли $L' \subset gl(L)$, состоящая из операторов вида $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, изоморфна L. Применяя II п. 3.3 гл. XI, видим, что существует аналитическая подгруппа $G' \subset G_L$, алгебра Ли которой есть L'. Пусть G — универсальная накрывающая группа для группы G'. Тогда G — односвязная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна L.

Пусть, наконец, L — произвольная алгебра Ли. Пусть R — радикал алгебры Ли L. Согласно III § 15 гл. X, существует такая полупростая подалгебра Ли $Q \subset L$, что

$$L = Q + R, \quad Q \cap R = 0.$$

Для любых $x \in R$, $y \in Q$ положим

$$\delta(y)\, x = [y, x].$$

Непосредственная проверка показывает, что алгебра Ли L изоморфна алгебре Ли $R \underset{\delta}{\times} Q$. Согласно первой части доказательства для разрешимой алгебры Ли R и полупростой алгебры Ли Q существуют односвязные группы Ли S и T, алгебры Ли которых изоморфны алгебрам Ли R и Q соответственно. Снова применяя предложение II п. 3.2, видим, что существует односвязная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна $R \underset{\delta}{\times} Q$, т. е. изоморфна L.

§ 4. Некоторые свойства групп Ли в целом

4.1. Разложения односвязных групп Ли.

I. *Пусть G — односвязная группа Ли, L — ее алгебра Ли, M — идеал в L, H — аналитическая подгруппа в G, соответствующая M. Тогда H — замкнутый нормальный делитель в G.*

Доказательство. Вследствие V п. 3.5 гл. IX, достаточно показать, что H — замкнутая подгруппа. Пусть S — группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна L/M (см. теорему п. 3.3). Каноническое отображение ρ алгебры Ли L на алгебру Ли L/M есть гомоморфизм; так как группа G односвязна, то существует аналитический гомоморфизм π

группы Ли G в S такой, что $d\pi = \rho$ (см. II п. 1.4). Согласно IV п. 3.3 гл. IX, гомоморфизм π есть отображение G на всю группу S. Тогда группа H является компонентой единицы в ядре гомоморфизма π, следовательно, группа H замкнута,

II. *Пусть T — односвязная группа Ли, S — алгебра Ли группы S. Пусть L — идеал в S, M — подалгебра Ли в L, такие, что*

$$L + M = S, \quad L \cap M = (0). \tag{4.1.1}$$

Пусть G, H — аналитические подгруппы группы T, соответствующие подалгебрам Ли L и M в S. Положим

$$\alpha_h(g) = hgh^{-1} \tag{4.1.2}$$

для всех $g \in G$, $h \in H$. Тогда отображение

$$(g, h) \to gh \tag{4.1.3}$$

$(g \in G,\ h \in H)$ *есть изоморфизм групп Ли $G \underset{\alpha}{\times} H$ и T. В частности, группы G и H замкнуты и односвязны, причем*

$$GH = T, \quad G \cap H = \{e\}. \tag{4.1.4}$$

Доказательство. Пусть $\delta(y)$, $y \in M$, — оператор в L, определяемый как ограничение на L оператора $\operatorname{ad} y$ в алгебре Ли S. Тогда, как легко проверить непосредственно, отображение ρ, заданное формулой

$$\rho(x, y) = x + y, \tag{4.1.5}$$

есть изоморфизм алгебры Ли $L \underset{\delta}{\times} M$ на алгебру Ли S. Пусть G', H' — односвязные группы Ли, алгебры Ли которых суть соответственно L и M (см. теорему п. 3.3), и пусть $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ — полупрямое произведение групп Ли G' и H', алгебра Ли которого изоморфна алгебре Ли $L \underset{\delta}{\times} M$ (см. предложение II п. 3.2). Пусть τ — соответствующий изоморфизм алгебры Ли группы $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ на алгебру Ли $L \underset{\delta}{\times} M$. Тогда отображение $\rho \circ \tau$ есть изоморфизм алгебры Ли группы $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ на алгебру Ли группы T. Так как группы T и $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ односвязны, то существует такой аналитический изоморфизм π группы Ли $G' \underset{\alpha'}{\times} H'$ на группу T, что $d\pi = \rho \circ \tau$. Из определения отображений ρ и τ легко следует, что $\rho \circ \tau(L \times \{0\}) = L$, $\rho \circ \tau(\{0\} \times M) = M$, следовательно, $\pi(G' \times \{e\}) = G$, $\pi(\{e\} \times H') = H$, откуда сразу следуют все утверждения предложения II.

Следующее предложение является обобщением предложения II.

III. *Пусть G — односвязная группа Ли, L — ее алгебра Ли. Пусть J, $I_1, \ldots, I_r$ — такие подалгебры Ли в L, что*:

1) *L есть прямая сумма линейных пространств J, $I_1, \ldots, I_r$;*
2) *если $Q_0 = J$, $Q_i = J + I_1 + \ldots + I_i$ при $i \geqslant 1$, то Q_i — подалгебры Ли в L, причем Q_i — идеал в Q_{i+1}, $i = 1, \ldots, r-1$.*

Пусть T, $S_1, \ldots, S_r$ — аналитические подгруппы группы G, определенные подалгебрами Ли J, $I_1, \ldots, I_r$ соответственно. Тогда группы T, $S_1, \ldots, S_r$ замкнуты и односвязны, и отображение

$$(t, s_1, \ldots, s_r) \to ts_1 \ldots s_r, \tag{4.1.6}$$

$t \in T$, $s_i \in S_i$, $t = 1, \ldots, r$, есть аналитический изоморфизм многообразия $T \times S_1 \times \ldots \times S_r$ на G.

Доказательство. При $r = 1$ утверждение сразу следует из II. Пусть $m \geqslant 2$; предположим, что III уже доказано при всех $r = 1, \ldots, m-1$. Пусть H_{m-1} — аналитическая подгруппа в G, определенная подалгеброй Ли Q_{m-1}. Согласно II подгруппа H_{m-1} и подгруппа S_m замкнуты и односвязны в G, причем отображение $(h, s_m) \to hs_m$ есть аналитический изоморфизм многообразия $H_{m-1} \times S_m$ на G. Применяя к H_{m-1} предположение индукции, получаем утверждение предложения III.

Применение предложений II и III основано на следующем вспомогательном предложении.

IV. *Пусть L — алгебра Ли, I — максимальный идеал в L (т.е. любой собственный идеал $J \subset L$, содержащий I, совпадает с I). Существует такая подалгебра Ли $M \subset L$, что*

$$I + M = L, \quad I \cap M = (0). \tag{4.1.7}$$

Доказательство. Так как алгебра Ли L/I не имеет нетривиальных идеалов, то либо L/I проста, либо $\dim(L/I) = 1$. Если $\dim(L/I) = 1$, то в качестве M можно взять одномерное подпространство в L, порожденное элементом $x \in L$, не лежащим в M. Если L/I — простая алгебра Ли, то L/I полупроста, и в этом случае утверждение IV следует из теоремы Леви–Мальцева (§ 15 гл. X).

V. *Пусть G — односвязная группа Ли, H — аналитическая подгруппа в G, являющаяся нормальным делителем в G. Тогда H — замкнутый нормальный делитель, группы H и G/H односвязны, и если π: $G \to G/H$ — канонический аналитический гомоморфизм группы G на G/H, то существует такое аналитическое отображение ρ: $G/H \to G$, что отображение $\pi \circ \rho$ есть тождественное отображение G/H на себя.*

Доказательство. Пусть L — алгебра Ли группы Ли G, I — идеал в L, соответствующий аналитической подгруппе H. Используя ряд Жордана–Гёльдера для алгебры Ли L/I (см. п. 1.5 гл. X), получаем, что существует такая последовательность подалгебр Ли $L = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_r = I$, что L_i — максимальный идеал в L_{i-1} при всех $i = 1, \ldots, r$ и все подалгебры L_i содержат I. Положим $M_i = L_{r-i}$. Согласно IV, существуют подалгебры Ли I_i, $i = 1, \ldots, r$, такие, что $M_i = M_{i-1} + I_i$, $I_i \cap M_{i-1} = (0)$, $i = 1, \ldots, r$. Пусть S_i — аналитические подгруппы в G, соответствующие I_i, $i = 1, \ldots, r$. Согласно III аналитическая подгруппа H замкнута и односвязна, причем отображение $(s_1, \ldots, s_r) \to Hs_1 \ldots s_r$ есть аналитический изоморфизм многообразия $S_1 \times \ldots \times S_r$ на группу G/H. Так как S_i односвязны, то G/H также односвязна. Наконец, отображение ρ можно определить формулой $\rho(Hs_1 \ldots s_r) = s_1 \ldots s_r$.

4.2. Коммутаторы в связных группах Ли. Пусть G — группа, $g_1, g_2 \in G$. Положим

$$[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}. \tag{4.2.1}$$

Если H_1, H_2 — подгруппы группы G, обозначим через $[H_1, H_2]$ подгруппу группы G, порожденную элементами $[h_1, h_2]$, где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$.

I. *Подгруппа* $[H_1, H_2]$ *есть множество всевозможных элементов вида*

$$[a_1, b_1]\,[b_2, a_2]\,[a_3, b_3] \ldots [a_{2r-1}, b_{2r-1}[b_{2r}, a_{2r}], \tag{4.2.2}$$

где $a_i \in H_1$, $b_i \in H_2$, $i = 1, \ldots, 2r$, $r \geqslant 1$.

Доказательство. Любой элемент вида (4.2.2) содержится в $[H_1, H_2]$; действительно, достаточно проверить, что $[b, a] \in [H_1, H_2]$ при $a \in H_1$, $b \in H_2$, но

$$[b, a] = bab^{-1}a^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = [a, b]^{-1}, \tag{4.2.3}$$

где $[a, b] \in [H_1, H_2]$. Поэтому для доказательства предложения I достаточно показать, что множество элементов вида (4.2.2) образует подгруппу в G. Но произведение двух эпементов вида (4.2.2) также имеет вид (4.2.2), а из (4.2.3) следует, что элемент, обратный элементу вида (4.2.2), также имеет вид (4.2.2).

II. *Пусть* H_1, H_2 — *связные подгруппы связной топологической группы* G; *тогда группа* $[H_1, H_2]$ *связна* [1]).

Доказательство. Из (4.2.2) следует, что $[H_1, H_2]$ есть объединение множеств $[H_1, H_2]_r = \{[a_1, b_1]\,[b_2, a_2]\,[a_3, b_3] \ldots [b_{2r}, a_{2r}]$, где $\alpha_i \in H_1$, $b_i \in H_2$, $i = 1, \ldots, 2r\}$ по всем $r \geqslant 1$. Но множество $[H_1, H_2]_r$ есть образ прямого произведения $2r$ экземпляров групп $H_1 \times H_2$ при непрерывном отображении $((a_1, b_1), \ldots, (a_{2r}, b_{2r})) \to [a_1, b_1]\,[b_2, a_2] \ldots \ldots [b_{2r}, a_{2r}]$. Следовательно, $[H_1, H_2]_r$ — связное множество.

[1]) Аналогичный результат был получен в гл. V (см. II п. 2.3).

Так как $[H_1, H_2] = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} [H_1, H_2]_r$, причем все множества $[H_1, H_2]_r$ связны и содержат e, то $[H_1, H_2]$ — связная группа.

Пусть L — алгебра Ли, M_1, M_2 — ее подалгебры Ли. Обозначим через $[M_1, M_2]$ линейную оболочку элементов вида $[x, y]$, $x \in M_1$, $y \in M_2$.

III. *Пусть G — связная группа Ли, L — алгебра Ли группы G. Пусть M_1, M_2, N — подалгебры Ли в L. Пусть $[M_1, N] \subset N$, $[M_2, N] \subset N$ и $[M_1, M_2] = N$. Пусть H_1, H_2, K — аналитические подгруппы в G, соответствующие подалгебрам Ли M_1, M_2, N. Тогда $K = [H_1, H_2]$.*

Доказательство. Заметим сначала, что из IV п. 3.5 гл. IX следует, что

$$h_1 K h_1^{-1} \subset K \quad \text{и} \quad h_2 K h_2^{-1} \subset K \quad \text{для всех} \quad h_1 \in H_1, \quad h_2 \in H_2. \tag{4.2.4}$$

Покажем теперь, что для любых $y \in M_2$ и $h_1 \in H_1$ вектор $\mathrm{Ad}(h_1)\, y - y$ принадлежит N. Согласно соотношению (3.4.25) гл. IX, примененному к присоединенному представлению, при всех $x \in M_1$, $y \in M_2$ и всех $t \in \mathbf{R}$, имеет место равенство

$$\mathrm{Ad}(\exp(tx))(y) - y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, (\mathrm{ad}\, x)^n(y). \tag{4.2.5}$$

Так как $(\mathrm{ad}\, x)^n(y) \in N$ при $n \geqslant 1$, то из (4.2.5) следует, что $\mathrm{Ad}(\exp(tx))(y) - y \in N$. С другой стороны, очевидно, что множество F элементов $h_1 \in H_1$, таких, что $\mathrm{Ad}(h_1)\, y - y \in N$ при всех $y \in M_2$, есть подгруппа в H_1. Действительно, если $h_1, h_2 \in F$, то, применяя (4.2.4), видим, что $\mathrm{Ad}(h_1 h_2)\, y - y = \mathrm{Ad}\, h_1((\mathrm{Ad}\, h_2)\, y - y) + ((\mathrm{Ad}\, h_1)\, y - y) \in N$ и $\mathrm{Ad}(h_1^{-1})\, y - y = \mathrm{Ad}(h_1^{-1})(y - \mathrm{Ad}(h_1)\, y) \in N$, так что $h_1 h_2 \in F$ и $h_1^{-1} \in F$. Но подгруппа F содержит все элементы вида $\exp(tx)$, $x \in M_1$, т. е. содержит окрестность единицы. Так как H_1 — связная группа, то $F = H_1$, т. е. $\mathrm{Ad}(h_1)\, y - y \in N$ для всех $h_1 \in H_1$.

Покажем, что элементы вида $\mathrm{Ad}(h_1)\, y - y$, $y \in M_2$, $h_1 \in H_1$, порождают всю алгебру Ли N. Пусть λ — линейный функционал на N; достаточно показать, что из условия $\lambda(\mathrm{Ad}(h_1)\, y - y) = 0$ для всех $y \in M_2$, $h_1 \in H_1$ следует, что $\lambda = 0$. Но из (4.2.5) следует, что

$$\frac{d}{dt}\, \lambda(\mathrm{Ad}(\exp(tx))\, y - y)|_{t=0} = \lambda([x, y]), \tag{4.2.6}$$

поэтому из условия $\lambda(\mathrm{Ad}(h_1)\, y - y) = 0$ для всех $y \in M_2$, $h_1 \in H_1$ следует, что $\lambda([x, y]) = 0$ для всех $x \in M_1$, $y \in M_2$. По условию, $[M_1, M_2] = N$, так что $\lambda(N) = 0$, $\lambda = 0$.

Покажем, что $[H_1, H_2] \subset K$. Пусть W — симметричная окрестность нулевого элемента в L, определенная в (1.3.5). Тогда при $x, y \in W$ ряд в правой части формулы Кемпбелла–Хаусдорфа сходится и определяет функцию $F(x, y)$, удовлетворяющую соотношению

$$\exp x \exp y = \exp F(x, y) \tag{4.2.7}$$

для всех $x, y \in W$. Пусть $V \subset W$ — такая симметричная окрестность нуля в L, что $\mathrm{Ad}(\exp x)(y) \in W$ при $x, y \in V$. В частности, при $x \in M_1 \cap V$, $y \in M_2 \cap V$ имеем $\mathrm{Ad}(\exp x)(y) \in W$, так что из (4.2.7) получаем

$$\begin{gathered}[\exp x,\ \exp y] = \exp x \exp y\,(\exp x)^{-1}(\exp y)^{-1} = \\ = (\mathrm{Ad}(\exp x) \exp y)(\exp(-y)) = \exp(\mathrm{Ad}(\exp x)\, y) \exp(-y) = \\ = \exp F(\mathrm{Ad}(\exp x)\, y, -y). \quad (4.2.8)\end{gathered}$$

Положим $x' = \mathrm{Ad}(\exp x)\, y$, $y' = -y$. Воспользуемся формулами (1.2.17)–(1.2.18) для коэффициентов $c_n(x, y)$. Так как $\mathrm{Ad}(\exp x)\, y - y \in N$, то $c_1(x', y') = x' + y' = \mathrm{Ad}(\exp x)\, y - y \in N$.

Покажем по индукции, что $c_n(x', y') \in N$ для всех n. Пусть $c_m(x', y') \in N$ при $m = 1, \ldots, n$. Так как $x' + y' \in N$, $y' \in M_2$, то из условия $c_n(x', y') \in N$ следует, что

$$[x' - y', c_n(x', y')] = [x' + y', c_n(x', y')] - 2[y', c_n(x', y')] \in N,$$

так как $[M_2, N] \subset N$. Тогда из соотношения (1.2.17) заключаем, что $c_{n+1}(x', y') \in N$, так что $c_n(x', y') \in N$ при всех натуральных n. Таким образом, из (4.2.8) получаем, что $[\exp x,\ \exp y] \in \exp N \subset K$. Следовательно, можно указать такие окрестности U_1, U_2 единичных элементов в группах H_1 и H_2 соответственно, что $[h_1, h_2] \in K$, $h_1 \in U_1$, $h_2 \in U_2$. Заметим теперь, что для всех $h_1 \in H_1$, $h_2', h_2'' \in H_2$

$$[h_1, h_1' h_2''] = [h_1, h_2'](h_2'[h_1, h_2'']\, h_2'^{-1}). \tag{4.2.9}$$

Из соотношения (4.2.9) и включения $h_2' K h_2'^{-1} \subset K$ следует, что $[h_1, h_2] \in K$ для всех $h_1 \in U_1$, $h_2 \in U_2^n$, где n — некоторое натуральное число. Так как группа H_2 связна, то $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} U_2^n = H_2$, т. е. $[h_1, h_2] \in K$ при всех $h_1 \in U_1$, $h_2 \in H_2$. Аналогично, меняя ролями h_1 и h_2, получаем, что $[H_1, H_2] \subset K$.

Покажем, наконец, что группа $[H_1, H_2]$ содержит окрестность единичного элемента в K. Выберем элементы $y_1, \ldots, y_m \in M_2$ и $h_1^{(1)}, \ldots, h_1^{(m)} \in H_1$ так, чтобы векторы $\mathrm{Ad}(h_1^{(k)})\, y_k - y_k$, $k = 1, \ldots, m$, порождали пространство N. Рассмотрим аналитическое отображение ψ прямого произведения m экземпляров многообразия $H_1 \times H_2$ в G, определяемое формулой

$$\psi((h_1^{(1)}, h_2^{(1)}),\ \ldots,\ (h_1^{(m)}, h_2^{(m)})) = [h_1^{(1)}, h_2^{(1)}] \ldots [h_1^{(m)}, h_2^{(m)}].$$

Из II следует, что образ ψ содержится в $[H_1, H_2]$. Согласно соотношению $[H_1, H_2] \subset K$ образ при отображении ψ содержится в K, появляется аналитическим отображением произведения m экземпляров многообразия $H_1 \times H_2$ в K. Заметим, что $\psi((h_1^{(1)}, e), \ldots, (h_1^{(m)}, e)) = e$; согласно VIII п. 1.5 гл. IX для того, чтобы доказать, что образ ψ содержит окрестность единицы, достаточно доказать, что $d\psi$ в точке $z = ((h_1^{(1)}, e), \ldots, (h_1^{(m)}, e))$ есть отображение на касательное пространство $\widetilde{T}_e(K)$. Но при любом $k = 1, \ldots, m$ согласно (3.4.25) гл. IX, примененному к $\pi = \alpha_{h_1^{(k)}}$, имеем

$$\frac{d}{dt}\,\psi((h_1^{(1)}, e), \ldots, (h_1^{(k)}, \exp(ty_k)), \ldots, (h_1^{(m)}, e))\Big|_{t=0} = \\ = \frac{d}{dt}\,(\exp(t\,\mathrm{Ad}(h_1^{(k)})\,y_k)\exp(-ty_k))\Big|_{t=0} = \mathrm{Ad}(h_1^{(k)})\,y_k - y_k.$$

Следовательно, образ при отображении $(d\psi)(z)$ содержит все векторы $\mathrm{ad}(h_1^{(k)})\,y_k - y_k$, так что $(d\psi)(z)$ есть отображение на $\widetilde{T}_e(K)$.

IV. *Пусть G — связная группа Ли, L — ее алгебра Ли. Пусть $G^{(1)} = [G, G]$, $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$, $G_{(1)} = [G, G]$, $G_{(n)} = [G, G_{(n-1)}]$ $(n > 1)$. Для любого $n \geqslant 1$ группа $G^{(n)}$ (соответственно $G_{(n)}$) является аналитической подгруппой группы Ли G, соответствующей подалгебре Ли $L^{(n)}$ (соответственно $L_{(n)}$). Все группы $G^{(n)}$, $G_{(n)}$ являются нормальными делителями в G. Если группа G односвязна, то все группы $G^{(n)}$, $G_{(n)}$ замкнуты и односвязны.*

Доказательство сразу следует из III и из V п. 4.1.

V. *Связная группа Ли разрешима (соответственно нильпотентна) тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли разрешима (соответственно нильпотентна).*

Доказательство сразу следует из IV.

VI. *Если G — связная группа Ли, алгебра Ли которой полупроста, то $G = [G, G]$.*

Доказательство следует из III и IV п. 7.1 гл. X.

4.3. Структура разрешимых групп Ли.

I. *Пусть L — разрешимая алгебра Ли размерности n. Существует базис $e_1, \ldots, e_n$ в L, обладающий следующими свойствами:*

1) *линейная оболочка L_k элементов $e_1, \ldots, e_n$ является подалгеброй Ли в L;*
2) *L_k является идеалом в L_{k+1} при всех $k = 1, \ldots, n-1$, где $L_n = L$.*

Доказательство. Так как L разрешима, то $[L, L] \neq L$. Пусть L_{n-1} — подпространство коразмерности 1 в L, содержащее $[L, L]$. Тогда $[L, L_{n-1}] \subset [L, L] \subset L_{n-1}$, поэтому L_{n-1} — идеал в L; в частности, L_{n-1} — подалгебра Ли в L.

Пусть уже построены такие подалгебры Ли $L_{n-1}, L_{n-2}, \ldots, L_{k+1}$ в L, что L_m — идеал в L_{m+1} при $m = k+1, \ldots, n-1$ $(L_n = L)$. Согласно III п. 1.6 гл. X, подалгебра Ли L_{k+1} разрешима. Пусть L_k —

подпространство коразмерности 1 в L_{k+1}, содержащее $[L_{k+1}, L_{k+1}]$; тогда L_k— идеал в L_{k+1} и L_k — подалгебра Ли в L; таким образом, подалгебры L_k строятся по индукции. Пусть e_1 — ненулевой вектор в L_1. Пусть уже построены векторы $e_1, \ldots, e_k$ так, что линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_j$ совпадает с L_j при всех $j = 1, \ldots, k$. В качестве вектора e_{k+1} возьмем любой вектор из L_{k+1}, не лежащий в L_k; таким образом, базис $e_1, \ldots, e_n$ строится по индукции.

II. *Пусть G — односвязная разрешимая вещественная (соответственно комплексная) группа Ли, L — ее алгебра Ли, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L, удовлетворяющий условиям предложения* I. *Тогда отображение φ пространства $\mathbf{R}^n$ (соответственно $\mathbf{C}^n$) в G, определенное формулой*

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \exp(t_1 e_1) \ldots \exp(t_n e_n), \tag{4.3.1}$$

есть аналитический изоморфизм многообразия $\mathbf{R}^n$ (соответственно $\mathbf{C}^n$) на G.

Доказательство. Пусть M_k — одномерная подалгебра Ли в L, порожденная вектором e_k, пусть H_k — аналитическая подгруппа группы G, соответствующая M_k. Применяя III п. 4.1 (при $I_k = M_k$, $J = (0)$), заключаем, что H_k — замкнутые односвязные подгруппы в G, причем отображение $(h_1, \ldots, h_n) \to h_1 \ldots h_n$ есть аналитический изоморфизм многообразия $H_1 \times \ldots \times H_n$ на G. С другой стороны, так как подгруппы H_k одномерны и односвязны, то отображение $t \to \exp(te_k)$ есть аналитический изоморфизм группы $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) на H_k.

III. *Пусть G — односвязная разрешимая группа Ли. Любая аналитическая подгруппа H группы G замкнута и односвязна.*

Доказательство. Пусть L — алгебра Ли группы G, M — подалгебра Ли в G, соответствующая подгруппе H. Выберем в L базис $e_1, \ldots, e_n$, удовлетворяющий условиям предложения I. Пусть $\dim M = m$. Выберем индексы $k_1, \ldots, k_m$ ($1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n$), удовлетворяющие следующим условиям: если $d_j = \dim(M \cap L_j)$, $j = 1, \ldots, n$, то $d_j = 0$ при $j < k_1$, $d_j = i$ при $k_i \leqslant j < k_{i+1}$; $d_j = m$ при $j \geqslant k_m$. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — базис в M, такой, что линейная оболочка векторов $f_1, \ldots, f_i$ совпадает с $M \cap L_{k_i}$ при всех $i = 1, \ldots, m$. Заменим в базисе $e_1, \ldots, e_m$ векторы e_{k_i} на f_i при $i = 1, \ldots, m$; при этом подпространства L_k не изменятся. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $e_{k_i} = f_i$ при всех $i = 1, \ldots, m$. Пусть M_i — линейная оболочка векторов $f_1, \ldots, f_i$; тогда $M_i = L_{k_i} \cap M$ при всех $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, M_i — подалгебры Ли в M. При $1 \leqslant i \leqslant m-1$ и $k_i \leqslant k < k_{i+1}$ имеем $L_k \cap M = L_{k_i} \cap M$, поэтому

$$[M_{i+1}, M_i] = [L_{k_{i+1}} \cap M, L_{k_{i+1}-1} \cap M] \subset \\ \subset [L_{k_{i+1}}, L_{k+i+1-1}] \cap M \subseteq L_{k_{i+1}-1} \cap M = M_i. \tag{4.3.2}$$

Соотношение (4.3.2) показывает, что M_i — идеал в M_{i+1}.

Пусть $\widetilde{H}$ — односвязная группа Ли, являющаяся универсальной накрывающей для группы H относительно гомоморфизма π (см. п. 3.2 гл. VIII). Алгебра Ли M может рассматриваться также как алгебра Ли группы $\widetilde{H}$, так как отображение $d\pi$ является изоморфизмом алгебр Ли групп $\widetilde{H}$ и H (см. VII п. 3.3 гл. IX). Установленные нами свойства базиса $f_1, \ldots, f_m$ в алгебре Ли M позволяют применить к группе H предложение II. Следовательно, отображение $(u_1, \ldots, u_m) \to \exp_{\widetilde{H}}(u_1 f_1) \ldots \exp_{\widetilde{H}}(u_m f_m)$ есть аналитический изоморфизм m-мерного векторного пространства на $\widetilde{H}$. Так как $\pi(\widetilde{H}) = H$, то отображение

$$(u_1, \ldots, u_m) \to \exp(u_1 f_1) \ldots \exp(u_m f_m) \tag{4.3.3}$$

есть аналитическое отображение m-мерного векторного пространства на всю группу H. Но, с другой стороны, отображение (4.3.3) является ограничением отображения φ, определенного формулой (4.3.1), на множество таких точек $(t_1, \ldots, t_m)$, что $t_k = 0$ при $k \neq k_1, \ldots, k \neq k_m$. Так как φ — аналитический изоморфизм согласно II, то образ линейного подпространства замкнут и односвязен. Следовательно, H замкнута и односвязна.

4.4. Полупростые алгебры Ли. Теорема Леви–Мальцева.

I. *Пусть G — группа Ли, L — ее алгебра Ли, R — радикал алгебры Ли L, H — аналитическая подгруппа в группе G, соответствующая подалгебре Ли $R \subset L$. Тогда H — замкнутый связный разрешимый нормальный делитель в G.*

Доказательство. Согласно V п. 4.2 достаточно показать, что H замкнута. Пусть $\overline{H}$ — замыкание H в G. Тогда $\overline{H}$ — замкнутая связная подгруппа в G, т. е. $\overline{H}$ — связная подгруппа Ли в G (см. теорему Картана в § 2). Пусть M — подалгебра Ли в L, соответствующая $\overline{H}$. Покажем, что $\overline{H} = H$. Достаточно показать, что $M \subset R$. Так как R — радикал L, то достаточно показать, что M — разрешимая алгебра Ли. Согласно V п. 4.2 достаточно показать, что группа $\overline{H}$ разрешима. Но из предложения I п. 4.2 легко следует, что подгруппа $[\overline{H}_1, \overline{H}_2]$ содержится в замыкании группы $[H_1, H_2]$ для любых подгрупп $H_1, H_2 \subset G$. Пусть n — наименьшее из натуральных чисел, для которых $H^{(n)} = \{e\}$. Если $n = 1$, то $[\overline{H}, \overline{H}] \subset \overline{[H, H]} = \overline{H^{(1)}} = \overline{\{e\}} = \{e\}$, т. е. $\overline{H}$ разрешима. Пусть $n > 1$. Предположим, что разрешимость группы $\overline{H}$ доказана для всех таких подгрупп H, что $H^{(n-1)} = \{e\}$. Тогда $[H, H] \subset \overline{[H, H]} = \overline{H^{(1)}}$, где $(H^{(1)})^{n-1} = \{e\}$, поэтому $\overline{H^{(1)}}$ — разрешимая группа по предложению индукции. Следовательно, $\overline{(H)}^{(1)}$ — разрешимая группа, поэтому и $\overline{H}$ — разрешимая группа. Согласно предыдущему отсюда следует равенство $\overline{H} = H$. Так как R — идеал в L, то H — нормальный делитель в G (см. V п. 3.5 гл. IX).

Напомним, что топологическая группа G называется *полупростой*, если она не содержит замкнутых связных разрешимых нормальных делителей, отличных от $\{e\}$.

II. *Группа Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли полупроста.*

Доказательство. Пусть G — полупростая группа Ли, L — ее алгебра Ли, R — радикал алгебры Ли L. Если H — аналитическая подгруппа в G, соответствующая R, то H — замкнутый связный разрешимый нормальный делитель в G. Если $R \neq (0)$, то $H \neq \{e\}$, что противоречит полупростоте G. Следовательно, $R = (0)$ и L полупроста.

Обратно, пусть L — полупростая алгебра Ли и N — замкнутый связный разрешимый нормальный делитель в G. Пусть M — идеал в L, соответствующий N. Если $N \neq \{e\}$, то $M \neq (0)$ и M разрешим согласно V п. 4.2. Это противоречит полупростоте L; следовательно, $N = \{e\}$ и G полупроста.

III. (теорема Леви–Мальцев). *Пусть G — группа Ли, L — ее алгебра Ли, R — радикал алгебры Ли L, S — такая полупростая подалгебра Ли в L, что $L = S \dotplus R$* (см. III § 15 гл. X). *Пусть H — аналитическая подгруппа в G, соответствующая R. Тогда*: а) *H — связный замкнутый разрешимый нормальный делитель в G, и фактор-группа G/H — полупростая группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна S*; б) *если G — односвязна и T — аналитическая подгруппа в G, соответствующая S, то T — односвязная замкнутая полупростая подгруппа, H односвязна, и отображение $(t, h) \to th$, $t \in T$, $h \in H$, есть аналитический изоморфизм многообразия $T \times H$ на G.*

Доказательство. а) следует из II, I и IV, VIII п. 3.3 гл. IX. Утверждение б) следует из II п. 4.1.

IV. *Центр полупростой группы Ли дискретен.*

Доказательство. Пусть G — полупростая группа Ли, L — ее алгебра Ли. Так как L — полупростая алгебра Ли (см. II), то центр алгебры Ли L равен нулю; поэтому ядро присоединенного гомоморфизма алгебры Ли L состоит лишь из нулевого элемента алгебры Ли L. Следовательно, отображение $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in L$, является изоморфизмом алгебры Ли L на алгебру Ли $\operatorname{ad}(L)$ группы Ли $\operatorname{Ad}(G)$. Но тогда из (3.4.25) гл. IX следует, что присоединенное представление группы Ли G является локальным изоморфизмом. Так как ядро присоединенного представления группы G есть центр Z группы G, то из локальной изоморфности канонического отображения группы G на $\operatorname{Ad}(G) \approx G/Z$ следует, что Z — дискретная подгруппа в G.

V. *Пусть G — связная полупростая группа Ли, L — ее алгебра Ли. Присоединенная группа группы Ли G есть замкнутая подгруппа в группе G_L.*

Доказательство. Пусть Ad: $G \to G_L$ — присоединенное представление группы Ли G. Пусть $\mathrm{Aut}(L)$ — множество таких элементов $h \in G_L$, что формула $\alpha_h(y) = h(y)$, $y \in L$, определяет автоморфизм α_h алгебры Ли L. Согласно п. 3.5 гл. IX, всякий элемент группы G_L, представимый в виде $\mathrm{Ad}\,g$, $g \in G$, содержится в $\mathrm{Aut}(L)$. Очевидно, что $\mathrm{Aut}(L)$ — замкнутая подгруппа в группе Ли G_L. Алгебра Ли группы $\mathrm{Aut}(L)$ состоит, согласно § 2 и III п. 3.5 гл. IX, из всех линейных операторов X в пространстве L, удовлетворяющих условию $\exp(tX) \in \mathrm{Aut}(L)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Но условие, что $\exp(tX) \in \mathrm{Aut}(L)$ для всех $t \in \mathbf{R}$, равносильно условию, что $X \in \mathrm{Der}(L)$ (ср. доказательство предложения VI § 3 гл. X и пример § 2). С другой стороны, алгебра Ли присоединенной группы $\mathrm{Ad}\,G$ совпадает с образом алгебры Ли L группы G при присоединенном гомоморфизме ad (см. IV п. 3.3 гл. IX); но $\mathrm{ad}\,L$ есть идеал внутренних дифференцирований алгебры Ли L (см. I п. 1.1 гл. X), причем всякое дифференцирование полупростой алгебры Ли является внутренним, поэтому алгебра Ли $\mathrm{Der}(L)$ совпадает со своим идеалом внутренних дифференцирований. Таким образом, алгебра Ли группы $\mathrm{Ad}\,G$ совпадает с алгеброй Ли замкнутой подгруппы $\mathrm{Aut}(L)$ группы Ли G_L, причем группа $\mathrm{Ad}\,G$ связна как образ связной группы G. Отсюда следует, что группа $\mathrm{Ad}\,G$ совпадает со связной компонентой единицы в группе $\mathrm{Aut}(L)$. Так как компонента единицы является замкнутой подгруппой в топологической группе (см. III п. 1.2 гл. V), то $\mathrm{Ad}\,G$ замкнута в $\mathrm{Aut}(L)$, и из замкнутости группы $\mathrm{Aut}(L)$ в G_L следует, что $\mathrm{Ad}\,G$ замкнута в G_L.

§ 5. Разложение Гаусса

5.1. Разложение Гаусса в линейной полупростой комплексной группе Ли. Пусть G — аналитическая подгруппа в группе $GL(n, \mathbf{C})$, пусть L — алгебра Ли группы G; предположим, что подалгебра Ли $H \subset L$, образованная диагональными матрицами из L, есть подалгебра Картана в L. Обозначим через N_+, N_- нильпотентные подалгебры Ли в L, образованные соответственно верхними и нижними треугольными нильпотентными матрицами. Предположим, что

$$L = N_- \dotplus H \dotplus N_+. \tag{5.1.1}$$

Пусть D_0 — аналитическая подгруппа в G, алгебра Ли которой есть H, пусть Z_+, Z_- — аналитические подгруппы G, соответствующие подалгебрам Ли N_+, N_- (см. I, II п. 3.3 гл. IX).

Рассмотрим отображение φ произведения $Z_- \times D_0 \times Z_+$ в группу G, определенное формулой

$$\varphi(z_-, d, z_+) = z_- d z_+ \tag{5.1.2}$$

для всех $z_- \in Z_-$, $d \in D_0$, $z_+ \in Z_+$. Очевидно, что отображение φ есть аналитическое отображение многообразий.

I. *При отображении* φ *некоторая окрестность точки* $(e, e, e) \in \in Z_- \times D_0 \times Z_+$ *гомеоморфно отображается на некоторую окрестность* U *единичного элемента в* G.

Доказательство. Из (3.5.15) гл. IX, (5.1.2) и (5.1.1) следует, что дифференциал отображения φ в точке (e, e, e) есть отображение на касательное пространство $T_G(e)$; с другой стороны, $\dim(Z_- \times D_0 \times \times Z_+) = \dim G$, поэтому отображение $d\varphi_{(e,e,e)}$ есть изоморфизм касательных пространств (в частности, отображение φ регулярно в точке (e, e, e)). Тогда утверждение предложения I следует из VIII п. 1.5 гл. IX.

Пусть $D(n)$ — подгруппа диагональных матриц в группе $GL(n, \mathbf{C})$; $Z_+(n)$, $Z_-(n)$ — подгруппы верхних и нижних треугольных матриц из $GL(n, \mathbf{C})$ соответственно с единицами на главной диагонали. Тогда $Z_+ \subset Z_+(n)$, $Z_- \subset Z_-(n)$, $D_0 \subset D(n)$. Пусть $D = D(n) \cap G$; очевидно, что алгеброй Ли группы D является H.

II. *Группы* Z_+ *и* Z_- *односвязны*, $Z_+ = Z_+(n) \cap G$, $Z_- = Z_-(n) \cap G$.

Доказательство. Алгебры Ли групп Z_+ и $Z_+(n) \cap G$ совпадают; поэтому согласно III п. 4.3 достаточно показать, что группа $Z_+(n)$ односвязна. Пусть $z_+ \in Z_+(n)$; тогда $z_+ = 1 + w$, где 1 — единичная, а w — нильпотентная матрица. Отсюда легко следует, что матрица z_+ однозначно представима в виде $\exp(x)$, где x — верхняя нильпотентная матрица. Таким образом, экспоненциальное отображение алгебры Ли $N_+(n)$ группы $Z_+(n)$ в группу $Z_+(n)$ есть взаимно однозначное отображение на всю группу $N_+(n)$. Следовательно, $Z_+(n)$ гомеоморфно $N_+(n)$, но $N_+(n)$ односвязно как линейное пространство (см. гл. IX, II п. 3.6 и VIII п. 1.5).

Пусть G_{reg} — множество элементов $g \in G$, допускающих разложение Гаусса в группе $GL(n, \mathbf{C})$, т. е. представимых в виде

$$g = z_- d z_+, \tag{5.1.3}$$

где $z_- \in Z_-(n)$, $z_+ \in Z_+(n)$, $d \in D(n)$.

III. *Множество* G_{reg} *связно, открыто и всюду плотно в* G.

Доказательство. Матрица $g \in G$ тогда и только тогда содержится в G_{reg}, когда все главные миноры матрицы g отличны от нуля, т. е. $g \in G \diagdown G_{\mathrm{reg}}$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_k(g) = 0$$

хотя бы при одном k, $k = 1, \ldots, n-1$. Но функция $\Delta_k(g)$ есть многочлен от матричных элементов, т. е. $\Delta_k(g)$ — аналитическая функция на группе G. Если $\Delta_k(g)$ обращается в нуль на некотором открытом множестве в G, то $\Delta_k(g) \equiv 0$ на G ввиду связности G. Но $\Delta_k(e) \neq 0$, поэтому замкнутое множество нулей функции $\Delta_k(g)$ нигде не плотно в G, а $G \diagdown G_{\mathrm{reg}}$ есть объединение конечного числа этих множеств.

Таким образом, множество G_{reg} является дополнением в G к множеству F нулей аналитической функции $f(g) = \Delta_1(g)\ldots\Delta_n(g)$, не равной тождественно нулю на G. Напомним, что многообразие G связно. Пусть g_1, g_2 — элементы G_{reg} и пусть $\{g(t)\}$, $t \in [0,\,1]$, — *путь* в G, соединяющий g_1 и g_2, т. е. $g(0) = g_1$, $g(1) = g_2$ и $t \to g(t)$ — непрерывное отображение отрезка $[0,\,1]$ в G. Из определения многообразия легко следует, что множество точек $g_2 \in G$, которые можно соединить путем $\{g(t)\}$ с данной точкой $g_1 \in G$, непусто, открыто и замкнуто в G. Так как G связна, то любые два элемента g_1, $g_2 \in G$ можно соединить путем. Покроем каждую точку пути $\{g(t)\}$ связной координатной окрестностью и выберем конечное подпокрытие $U_1,\,\ldots,\,U_p$. В каждой из связных координатных окрестностей U_k, $k = 1,\,\ldots,\,p$, множество нулей функции $f(g)$ гомеоморфно множеству нулей обычной аналитической функции в открытом связном подмножестве пространства $\mathbf{C}^n$. Но если $\Phi(z_1,\,\ldots,\,z_n)$ — аналитическая функция на открытом связном подмножестве Ω пространства $\mathbf{C}^n$, не равная тождественно нулю, то дополнение в Ω множества N нулей функции Φ связно (см. Ганнинг и Росси [1], гл. I). Таким образом, точки g_1 и g_2 содержатся в конечном объединении связных множеств $U_k \diagdown F$, $k = 1,\,\ldots,\,p$; так как $\bigcup\limits_{k=1}^{p} U_k$ покрывает путь $\{g(t),\, t \in [0,\,1]\}$, то множества U_k и U_{k+1} можно считать пересекающимися при всех $k = 1,\,\ldots,\,p-1$. Тогда и множества $U_k \diagdown F$, $U_{k+1} \diagdown F$ пересекаются при всех $k = 1,\,\ldots,\,p-1$; так как все множества $U_k \diagdown F$, $k = 1,\,\ldots,\,p$, связны, то их объединение также связно. Следовательно, любые два элемента g_1, g_2 множества G_{reg} содержатся в связном подмножестве $\bigcup\limits_{k=1}^{p} (U_k \diagdown F)$ множества G_{reg}, поэтому G_{reg} связно.

IV. *Для любого* $g \in G_{\text{reg}}$ *элемент* $z_+ \in Z_+(n)$, *однозначно определенный равенством* (5.1.3), *принадлежит* Z_+, *и отображение* $g \to Z_+$ *аналитично на* G_{reg}.

Доказательство. Пусть M — множество точек $g \in G_{\text{reg}}$ таких, что $z_+ \in Z_+$. Как нам известно, $U \subset M$ (см. I). Обозначим через M_1 замыкание внутренности множества M. Так как M содержит окрестность единицы в G, то множество M_1 непусто. С другой стороны, матричные элементы матрицы z_+ являются рациональными функциями от матричных элементов матрицы g, поэтому отображение $g \to Z_+$ аналитично на G_{reg}, в частности, z_+ непрерывно зависит от g на G_{reg}. Так как Z_+ замкнуто в $GL(n,\mathbf{C})$ и Z_+ непрерывно зависит от g, то множество M замкнуто. Следовательно, $M_1 \subset M$. Покажем теперь, что множество M_1 открыто. Пусть $g_0 \in M_1$ и пусть V — некоторая координатная окрестность точки g_0 в группе G, лежащая в G_{reg} (это возможно, так как G_{reg} открыто согласно III). Выберем окрестность W точки g_0 в $GL(n,\mathbf{C})$ и систему аналитических координат $(y_1,\,\ldots,\,y_{n^2})$ в окрестности W так, чтобы $W \cap G \subset V$

и подмногообразие $G \subset GL(n, \mathbf{C})$ выделялось в W условиями $y_{m+1} = = \ldots = y_{n^2} = 0$, где $m = \dim G$ (см. п. 1.7 гл. IX). Так как отображение $g \to Z_+$ аналитично, то $y_k(z_+)$ — аналитическая функция на G_{reg}. С другой стороны, пересечение $V \cap W \cap M_1$ содержит открытое (в G_{reg}) подмножество, на котором $z_+ \in G$, т. е. функции $y_k(z_+)$ равны нулю на $V \cap W \cap M_1$ при $k = m+1, \ldots, n^2$. Следовательно, $y_k(z_+) = 0$ при $k = m+1, \ldots, n^2$ на всем пересечении $V \cap W$, т. е. $z_+ \in G$ при $g \in \in V \cap W$. Следовательно, множество M_1 открыто в G_{reg}. Так как G_{reg} связно согласно III, то $M_1 = G_{\text{reg}}$.

Аналогично доказывается, что элемент z_- в (5.1.3) аналитически зависит от g и $z_- \in Z_-$ при всех $g \in G_{\text{reg}}$. Следовательно,

V. *Для любого $g \in G_{\text{reg}}$ элемент $d \in D(n)$, определенный равенством* (5.1.3), *принадлежит G_{reg}, т. е. $d \in D$, и отображение $g \to d$ является аналитическим отображением.*

VI. Группа D связна и совпадает с подгруппой D_0.

Доказательство. Отображение ψ многообразия $Z_-(n) \times D(n) \times \times Z_+(n)$ в группу $GL(n, \mathbf{C})$, определенное формулой $\psi(z_-, d, z_+) = = z_- d z_+$ для всех $z_- \in Z_-(n)$, $d \in D(n)$, $z_+ \in Z_+(n)$, является аналитическим отображением многообразий. Кроме того, отображение ψ является гомеоморфизмом многообразия $M = Z_-(n) \times D(n) \times Z_+(n)$ на образ $\psi(M)$ многообразия M в $GL(n, \mathbf{C})$. Тогда сужение отображения ψ на $Z_- \times D \times Z_+$ гомеоморфно отображает $Z_- \times D \times Z_+$ на G_{reg}. Так как G_{reg} связно, то $Z_- \times D \times Z_+$ — связное пространство. Следовательно, группа D связна. Поэтому группа D совпадает с аналитической подгруппой D_0.

Таким образом, нами доказана

Теорема. *Пусть G — аналитическая подгруппа в группе $GL(n, \mathbf{C})$, пусть L — алгебра Ли группы G. Предположим, что подалгебра Ли $H \subset L$, образованная диагональными матрицами из L, есть подалгебра Картана в L. Пусть N_+, N_- — нильпотентные подалгебры Ли в L, образованные соответственно верхними и нижними треугольными нильпотентными матрицами. Предположим, что $L = N_+ \dotplus H \dotplus N_-$. Обозначим через D, Z_+, Z_- аналитические подгруппы в G, соответствующие подалгебрам Ли H, N_+, N_- соответственно. В группе G существует связное открытое всюду плотное множество G_{reg}, такое, что любой элемент $g \in G_{\text{reg}}$ допускает однозначное представление в виде*

$$g = z_- d z_+, \tag{5.1.4}$$

где $z_- \in Z_-$, $d \in D$, $z_+ \in Z_+$. Элементы z_-, d, z_+ аналитически зависят от $g \in G_{\text{reg}}$. Группы Z_+ и Z_- односвязны, причем $Z_+ = Z_+(n) \cap G$, $Z_- = Z_-(n) \cap G$, $D = D(n) \cap G$. Множество G_{reg} содержит окрестность единичного элемента в G.

Соотношение (5.1.4) называется *разложением Гаусса элемента $g \in G$.*

5.2. Разложение Гаусса в связной полупростой комплексной группе Ли. Пусть G — связная полупростая комплексная группа Ли, L — ее алгебра Ли, H — подалгебра Картана в L, Δ — система корней алгебры Ли L относительно H. Пусть H_0 — вещественная линейная оболочка системы векторов h'_α, $\alpha \in \Delta$, $\alpha \neq 0$ (см. п. 9.2 и 9.6 гл. X), Δ_+ — система положительных корней алгебры Ли L относительно некоторого лексикографического упорядочения пространства H_0. Положим

$$N_+ = \sum_{\alpha \in \Delta_+} L^\alpha, \quad N_- = \sum_{\alpha \in -\Delta_+} L^\alpha, \tag{5.2.1}$$

где L^α — корневые подпространства алгебры Ли L (см. § 8 гл. X). Согласно I § 12 гл. X, подпространства N_+ и N_- — нильпотентные алгебры Ли, причем

$$L = N_- \dotplus N \dotplus N_+. \tag{5.2.2}$$

I. *В алгебре Ли* L *можно выбрать такой базис, чтобы в этом базисе операторы* $\operatorname{ad} h$, $h \in H$, *имели диагональные матрицы, операторы* $\operatorname{ad} x$, $x \in N_+$ (*соответственно* $\operatorname{ad} x$, $x \in N_-$) — *верхние* (*соответственно нижние*) *треугольные матрицы с нулями на главной диагонали.*

Доказательство. Пусть $\{h_\alpha, e_\alpha\}$ — базис Вейля в алгебре Ли L, определяемый подалгеброй Картана H. Пусть $\dim H = r$. Расположим элементы базиса Вейля следующим образом:

$$\{e_\alpha, \alpha \in -\Delta_+; h_1, \ldots, h_r; e_\alpha, \alpha \in \Delta_+\} \tag{5.2.3}$$

и будем считать, что векторы e_α расположены в таком порядке, что векторы $h'_\alpha \in H_0$ расположены в порядке возрастания относительно лексикографического упорядочения в H_0. Из соотношения $[L^\alpha, L^\beta] \subset \subset L^{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \in \Delta$ (см. II § 8 гл. X) и определений (5.2.1) следует, что в базисе (5.2.3) операторы $\operatorname{ad} h$, $h \in H$, записываются диагональными матрицами, а операторы $\operatorname{ad} x$, $x \in N_+$, и $\operatorname{ad} x$, $x \in N_-$, записываются соответственно верхними и нижними нильпотентными матрицами.

Пусть $\widetilde{G}$ — присоединенная группа группы G, $\widetilde{L}$ — алгебра Ли группы $\widetilde{G}$. Пусть $\widetilde{H}$, $\widetilde{N}_+$, $\widetilde{N}_-$ — образы подалгебр Ли H, N_+, N_- при изоморфизме алгебры Ли L на алгебру Ли $\widetilde{L}$, определяемом присоединенным гомоморфизмом $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in L$. Используя базис (5.2.3), мы можем отождествить группу $\widetilde{G}$ с подгруппой Ли в группе $GL(n, \mathbf{C})$ и алгебру Ли $\widetilde{L}$ — с подалгеброй Ли алгебры Ли $gl(n, \mathbf{C})$, где $n = \dim G = \dim L$. Предложение I показывает тогда, что к группе $\widetilde{G}$ можно применить теорему п. 5.1. Пусть Z_- и Z_+ — аналитические подгруппы группы G с алгебрами Ли N_- и N_+ соответственно. Пусть $\widetilde{D}$, $\widetilde{Z}_+$, $\widetilde{Z}_-$ — аналитические подгруппы группы G, соответствующие подалгебрам Ли $\widetilde{H}$, $\widetilde{N}_+$, $\widetilde{N}_-$ соответственно. Обозначим через C центр группы G. Пусть π — гомоморфизм группы G на группу $\widetilde{G}$, определяемый присоединенным представлением. Ядро гомоморфизма π совпадает с C (см. VI п. 3.5 гл. IX), а C — дискретная группа (см. IV п. 4.4), поэтому группа G является накрывающей группой для $\widetilde{G}$ относительно отображения π.

II. *Группы Z_+ и Z_- являются компонентами единицы в группах $\pi^{-1}(\widetilde{Z}_+)$, $\pi(\widetilde{Z}_-)$ соответственно.*

Доказательство сразу следует из очевидных соотношений $\pi(Z_+) = \widetilde{Z}_+$, $\pi(Z_-) = \widetilde{Z}_-$, так как Z_+ и Z_- связны.

Пусть D — полный прообраз группы $\widetilde{D}$ относительно гомоморфизма π.

III. *Группа G коммутативна.*

Доказательство. Пусть D_0 — компонента единицы в группе D. Так как D_0 — аналитическая подгруппа, соответствующая коммутативной подалгебре Ли $H \subset L$, то D_0 коммутативна. С другой стороны, группа D порождена подгруппами D_0 и C. Так как группы D_0 и C коммутативны и их элементы попарно перестановочны, то группа D коммутативна.

IV. *Ограничение отображения π на группы Z_+ и Z_- определяет изоморфизм групп Z_+ и Z_- на группы $\widetilde{Z}_+$ и $\widetilde{Z}_-$ соответственно. В частности, группы Z_+ и Z_- односвязны.*

Доказательство. Из предложения II следует, что можно применить предложение VII § 1 гл. VIII. Следовательно, Z_+ и Z_- — накрывающие группы для $\widetilde{Z}_+$ и $\widetilde{Z}_-$ соответственно относительно ограничений отображения π. С другой стороны, $\widetilde{Z}_+$ и $\widetilde{Z}_-$ односвязны согласно II п. 5.1, поэтому группы Z_+ и $\widetilde{Z}_+$ (соответственно Z_- и $\widetilde{Z}_-$) изоморфны относительно ограничения отображения π на Z_+ (соответственно Z_-).

V. *В группе G существует такое открытое всюду плотное множество G_{reg}, что любой элемент $g \in G_{\text{reg}}$ допускает однозначное представление в виде*

$$g = z_- d z_+,$$

где $z_- \in Z$, $d \in D$, $z_+ \in Z_+$. Отображения $g \to z_-$, $g \to d$, $g \to z_+$ являются аналитическими отображениями многообразия G_{reg} в группы Ли Z_-, D, Z_+ соответственно.

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}_{\text{reg}}$ — множество элементов $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$, допускающих разложение Гаусса

$$\widetilde{g} = \widetilde{z}_- \widetilde{d} \widetilde{z}_+,$$

где $\widetilde{z}_- \in \widetilde{Z}_-$, $\widetilde{d} \in \widetilde{D}$, $\widetilde{z}_+ \in \widetilde{Z}_+$. Согласно III п. 5.1 множество $\widetilde{G}_{\text{reg}}$ открыто и всюду плотно в $\widetilde{G}$. Пусть G_{reg} — прообраз множества $\widetilde{G}_{\text{reg}}$ в G. Если $g \in G_{\text{reg}}$, то $\pi(g) = \widetilde{z}_- \widetilde{d} \widetilde{z}_+$ для некоторых $\widetilde{z}_-$, $\widetilde{d}$, $\widetilde{z}_+$. Пусть $z_- \in Z_-$, $z_+ \in Z_+$ — однозначно определенные элементы, удовлетворяющие условиям $\pi(z_-) = \widetilde{z}_-$, $\pi(z_+) = \widetilde{z}_+$ (см. IV). Пусть d' — некоторый прообраз элемента $\widetilde{d} \in \widetilde{D}$ в группе D. Тогда $\pi(g) = \pi(z_- d' z_+)$, т. е. $\pi(g^{-1}z_-d'z_+) = e$. Следовательно, $g^{-1}z_-d'z_+ = c$, где c принадлежит центру C. Тогда $g = z_-d'z_+(c^{-1}) = z_-(d'c^{-1})\,z_+$, где $d'c^{-1} \in D$. Полагая $d = d'c^{-1}$, получаем, что

$$g = z_-dz_+, \tag{5.2.4}$$

где $z_- \in Z_-$, $z_+ \in Z_+$, $d \in D$. Так как элементы z_- и z_+ определены элементом $g \in G_{\mathrm{reg}}$ однозначно, то и элемент $d \in D$ определен элементом $g \in G_{\mathrm{reg}}$ однозначно. Отображение $g \to z_+$ можно представить в виде композиции аналитических отображений $g \to \pi(g) \to \widetilde{z}_+ \to z_+$ (см. IV п. 5.1 и IV), поэтому отображение $g \to z_+$ аналитично. Аналогично, отображение $g \to z_-$ является аналитическим, поэтому и отображение $g \to d = (z_-)^{-1}g(z_+)^{-1}$ является аналитическим отображением.

Разложение (5.2.4) называется *разложением Гаусса* элемента $g \in G$.

§ 6. Разложение Ивасавы

6.1. Разложение Ивасавы в присоединенной группе. Пусть L — комплексная полупростая алгебра Ли, L_0 — ее вещественная форма, σ — соответствующая инволюция в L. Пусть L_u — компактная вещественная форма алгебры Ли L, инвариантная относительно σ (см. XIII п. 14.1 гл. X), и пусть τ — инволюция в L, соответствующая вещественной форме L_u. Присоединенное представление $x \to \operatorname{ad} x$, $x \in L$, является изоморфизмом алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(L)$. Пусть G, G_0, G_u — аналитические подгруппы группы G_L, рассматриваемой как вещественная группа Ли, соответствующие подалгебрам Ли $\operatorname{ad}(L)$, $\operatorname{ad}(L_0)$, $\operatorname{ad}(L_u)$. Так как σ и τ — инволютивные линейные операторы в L, то формулы

$$s(g) = \sigma g \sigma^{-1}, \quad t(g) = \tau g \tau^{-1} \tag{6.1.1}$$

определяют инволютивные автоморфизмы группы Ли G.

I. *Связная компонента множества неподвижных точек автоморфизма s (соответственно τ) совпадает с G_0 (соответственно G_u).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H — связная компонента множества неподвижных точек автоморфизма s, тогда H — подгруппа Ли в G (см. теорему 1 § 2). Пусть M — соответствующая подгруппе H подалгебра Ли в L. Тогда из (6.1.1) следует, что $x \in M$ в том и только том случае, когда

$$\exp(tx)(y) = s(\exp(tx))(y) = \sigma(\exp tx)\,\sigma^{-1}(y) \tag{6.1.2}$$

для всех $y \in L$. Дифференцируя равенство (6.1.2) по t при $t = 0$, и используя тот факт, что σ — автоморфизм алгебры Ли L, получаем, что

$$[x, y] = \sigma[x, \sigma^{-1}y] = [\sigma x, y], \tag{6.1.3}$$

т. е. $[x - \sigma x, y] = 0$ для всех $y \in L$. Так как алгебра Ли L полупроста, то $x - \sigma x = 0$, т. е. $\sigma x = x$ и $x \in L_0$. Обратно, если $x \in L_0$, то $\sigma x = x$, поэтому

$$\begin{aligned}\sigma(\exp tx)\,\sigma^{-1}(y) = \sigma\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,(\operatorname{ad}x)^n(\sigma^{-1}y)\right) &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,(\operatorname{ad}(\sigma x))^n(y) &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,(\operatorname{ad}x)^n(y) &= \exp(tx)\,y\end{aligned}$$

для всех $y \in L$, т. е. выполняется (6.1.2). Следовательно, $L_0 = M$, поэтому $G_0 = H$. Аналогично доказывается утверждение, относящееся к автоморфизму τ.

II. *G_0 и G_u — замкнутые подгруппы группы G.*

Доказательство. Множества неподвижных точек автоморфизмов s и t замкнуты; согласно I G_0 и G_u суть связные компоненты этих множеств, следовательно, они также замкнуты в G.

Группа G замкнута в G_L (см. V п. 4.4). Таким образом, G, G_0 и G_u — замкнутые подгруппы в группе G_L.

III. *Группа G_u компактна.*

Доказательство. Напомним, что $(\tau y, \tau z) = (y, z)$ для всех $y, z \in L$, где $(\cdot, \cdot)$ — форма Картана–Киллинга. Если $x \in L_u$, $y, z \in L$, то, используя инвариантность формы Киллинга, видим, что

$$\begin{aligned}((\operatorname{ad}x)\,y, \tau(z)) &= (\tau\tau(\operatorname{ad}x)\,y, \tau(z)) = (\tau([x, y]), z) = \\ &= ([\tau x, \tau y], z) = ([x, \tau y], z) = (\operatorname{ad}x(\tau y), z) = \\ &= -(\tau y,\ \operatorname{ad}x(z)) = -(y, \tau(\operatorname{ad}x)(z)).\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Пусть $\{y, z\}$ — билинейная форма на L, определенная равенством $\{y, z\} = -(y, \tau z)$. Равенство (6.1.4) означает, что

$$\{(\operatorname{ad}x)\,y, z\} = -\{y, (\operatorname{ad}x)\,z\}. \tag{6.1.5}$$

для всех $x \in L_u$, $y, z \in L$.

Тогда для любых $t \in \mathbf{R}$, $y, z \in L$ и $x \in L_u$ имеем из (6.1.5)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,&\{\exp(tx)\,y,\ \exp(tx)\,z\} = \\ &= \{(\operatorname{ad}x)\exp(tx)\,y,\ \exp(tx)\,z\} + \\ &\quad + \{\exp(tx)\,y, (\operatorname{ad}x)\exp(tx)\,z\} = 0,\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

откуда следует, что

$$\{\exp(tx)\,y,\ \exp(tx)\,z\} = \{\exp(0x)\,y,\ \exp(0x)\,z\} = \{y, z\} \tag{6.1.7}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$, $y, z \in L$, $x \in L_u$. Следовательно,

$$\{gy, gz\} = \{y, z\} \tag{6.1.8}$$

для всех $y, z \in L$ и всех g из некоторой окрестности единичного элемента в группе G_u. Так как G_u связна, то равенство (6.1.8) выполняется для всех $g \in G_u$. Поэтому группа G_u содержится в множестве линейных преобразований пространства L, сохраняющих билинейную форму $\{x, y\}$. Но согласно V п. 14.1 гл. X, форма $\{x, x\} = -\{x, \tau x\}$ отрицательно определена на L. Таким образом, G_u — замкнутая (согласно II) подгруппа в группе U преобразований L, унитарных относительно формы $\{x, x\}$. Так как U компактна, то G_u компактна.

Пусть K — связная компонента единицы группы $G_0 \cap G_u$.

IV. *K — компактная группа Ли, алгебра Ли которой совпадает с $L_u \cap L_0$.*

Доказательство. Группа $G_0 \cap G_u$ есть замкнутая подгруппа компактной группы G_u, поэтому $G_0 \cap G_u$ и K — компактные группы. Алгебра Ли подгруппы K, очевидно, есть пересечение алгебр Ли групп G_0 и G_u.

Пусть H_u — подалгебра Картана в алгебре Ли L_u, построенная в XIV п. 14.1 гл. X. Введем обозначения H_u^-, N_0, H_0, H_0^+ п. 14.1 гл. X. Обозначим через R подгруппу Ли группы G_0, алгеброй Ли которой служит разрешимая подалгебра Ли $M_0 = iH_u^- + N_0 \subset L$ (см. XVII п. 14.1 гл. X).

Заметим, что пространство iH_u^- порождается (как вещественное пространство) множеством H_0^+ таких элементов h картановской подалгебры $H_0 \subset L_0$, что $\sigma(h) = h$. Выберем базис Вейля вида $\{e_{-\alpha_k}, \ldots$ $\ldots, e_{-\alpha_1}, h_1, \ldots, h_r, e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_k}\}$, где $e_{\pm\alpha_k} \in L^{\pm\alpha_k}$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — множество всех положительных корней, и $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ относительно лексикографического упорядочения), $h_1, \ldots, h_r$ — ортонормированный относительно формы Киллинга базис в H_0. Так как $\alpha(H_0^+) \subset \mathbf{R}$ для всякого корня α, то преобразования из $\mathrm{ad}(iH_u^-)$ записываются в данном базисе Вейля диагональными матрицами с вещественной диагональю. Так как преобразования из $\mathrm{ad}(N_0)$ записываются в этом базисе треугольными матрицами с нулями на главной диагонали, то мы получаем

V. *Преобразования из $\mathrm{ad}(M_0)$ записываются в выбранном базисе Вейля треугольными матрицами с вещественными числами на главной диагонали.*

VI. *Группа R — односвязная разрешимая группа. Пересечение $R \cap K$ сводится к единичному элементу. Экспоненциальное отображение гомеоморфно отображает $M_0 = iH_u^- + N_0$ на R.*

Доказательство. Группа R разрешима, так как ее алгебра Ли M_0 разрешима (см. V п. 4.2). Но G — линейная группа, поэтому отображение exp совпадает с обычной матричной экспонентой (см. пример п. 3.4 гл. IX). Если x — треугольная матрица с вещественными элементами на диагонали, то e^x — треугольная матрица с положительными элементами на диагонали. Но всякая треугольная матрица y с положительными элементами на диагонали однозначно представляется в виде e^x для треугольной матрицы x с вещественными элементами на диагонали (этот факт легко получить, приведя преобразование y к жордановой нормальной форме). Таким образом, если M — вещественная подалгебра Ли в $gl(L)$, элементы которой представляются в выбранном базисе Вейля треугольными матрицами с вещественной диагональю, то отображение exp взаимно однозначно отображает M на подгруппу $H \subset G_L$, образованную треугольными матрицами с положительными диагональными элементами. Очевидно, что подгруппа H гомеоморфна $\mathbf{R}_+^n \times \mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ и потому односвязна. Тогда из III п. 4.3 следует, что R односвязна. Кроме того, из взаимной однозначности отображения exp на M следует, что exp взаимно однозначно отображает M_0 в R.

Докажем, что exp гомеоморфно отображает M_0 на R. Так как собственные значения операторов из $\mathrm{ad}(M_0)$ вещественны, то exp является локальным гомеоморфизмом (см. гл. IX, II п. 3.6 и VIII п. 1.5). Остается доказать, что образ exp совпадает с R. Но отображение $x \to e^x$, $x \in M$, также есть локальный гомеоморфизм, притом $x \to e^x$ взаимно однозначно отображает M на H. Так как exp есть ограничение отображения $x \to e^x$ на M_0, то образ отображения exp замкнут в R. С другой стороны, из локальной гомеоморфности exp следует, что образ exp открыт в R. Так как R связна, то $\exp(M_0) = R$.

Докажем, наконец, что $R \cap K$ состоит лишь из единицы. Согласно (14.1.21) гл. X, если $x = \sum\limits_{j=1}^{r} t_j h_j + \sum\limits_{\alpha\neq 0} \lambda_\alpha e_\alpha = h + \sum\limits_{\alpha\neq 0} \lambda_\alpha e_\alpha$, то $\{x, x\} = -(x, \tau(x)) = \sum\limits_{\alpha\neq 0} (|\alpha(h)|^2 + |\lambda_\alpha|^2)$, следовательно, выбранный нами базис Вейля является ортонормированным относительно формы $\{x, x\}$, и из соотношения (6.1.8) следует, что преобразования из группы K записываются в выбранном базисе Вейля унитарными матрицами. Но всякая матрица, унитарная и треугольная одновременно, диагональна; если на диагонали стоят положительные вещественные числа, то такая матрица единична. Следовательно, $K \cap R = \{e\}$.

VII. $G_0 = K \cdot R$, *т. е. любой элемент* $g \in G_0$ *однозначно представляется в виде* $g = kr$, *где* $k \in K$, $r \in R$. *Отображения* $g \to k$, $g \to r$ *являются аналитическими.*

Доказательство. Так как $\widetilde{T}_e(R) = M_0$, $\widetilde{T}_e(K) = L_u \cap L_0$, то касательное пространство к многообразию $K \times R$ в точке (e, e) отождествляется с $(L_u \cap L_0) + M_0 = (L_u \cap L_0) + iH_u^- + N_0$ (см. п. 1.5 гл. IX). Очевидно, что дифференциал в точке (e, e) отображения $G_0 \times G_0$ в G_0, определенного формулой $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$, есть отображение $L_0 + L_0$ в L_0, определенное формулой $(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$. Следовательно, отображение π: $(k, r) \to kr$ многообразия $K \times R$ в группу G_0 индуцирует в точке (e, e) изоморфизм касательных пространств.

Согласно VIII п. 1.5 гл. IX существуют такие окрестности единичного элемента U, V в группах K и R соответственно, что ограничение отображения π на $U \times V$ является аналитическим гомеоморфизмом $U \times V$ в G_0. Тогда из аналитичности умножения следует, что существуют такие окрестности $U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$ и такие аналитические отображения $k^0\colon U_1 \times V_1 \to U$ и $r^0\colon U_1 \times V_1 \to V$, что

$$rk = k^0(r, k)\, r^0(r, k) \tag{6.1.9}$$

для всех $k \in U$, $r \in V$.

Пусть $S \in \{k_1, \ldots, k_p\}$ — набор элементов из U_1. Построим теперь окрестность $V(S) \subset V_1$ и аналитические отображения r^S и k^S, удовлетворяющие условию

$$rk(S)\, k = k^S(r, k)\, r^S(r, k) \tag{6.1.10}$$

для всех $k \in U_1$, $r \in V(S)$, где $k(S) = k_1, \ldots, k_p$. При $p = 0$ можно считать, что $k^S = k^0$, $r^S = r^0$ (см. (6.1.9)). Проведем построение индукцией по p. Пусть $S' = \{k_0\} \cup S$, и для S окрестность $V(S)$ и отображения r^S и k^S уже построены. Тогда $k(S') = k_0 k(S)$ и из (6.1.10) и (6.1.9) следует, что

$$rk(S')\, k = rk_0 k(S)\, k = k^0(r, k_0)\, r^0(r, k_0)\, k(S)\, k$$

для всех $r \in V_1$. Из единственности разложения (6.1.9) следует, что $r^0(e, k_0) = e$; поэтому существует такая окрестность $V(S') \subset V_1$, что $r^0(r, k_0) \in V(S)$ при $r \in V(S')$. Тогда

$$rk(S')\, k = k^0(r, k_0)\, k^S(r^0(r, k_0), k)\, r^S(r^0(r, k_0), k)$$

для всех $r \in V(S')$, что доказывает формулу (6.1.10).

Так как группа K компактна, то для любого U_1 существует такое конечное число наборов S_j, $j = 1, \ldots, m$, что $K = \bigcup\limits_{j=1}^{m} k(S_j) U_1$. Пусть $\bigcap\limits_{j=1}^{m} V(S_j) = V_2$; тогда при $r \in V_2$ и $k \in K$ из формулы (6.1.10) следует, что $rk \in KR$.

Пусть $T = \{r_1, \ldots, r_1\}$ — набор элементов из V_2 и $r(T) = r_1 \ldots r_q$. Покажем, что $r(T)\, k \in KR$. При $q = 1$ это утверждение уже доказано. Если $T' = \{r_0\} \cup T$, то $r(T') = r_0 r(T)$ и $r(T')\, k \in r_0 r(T)\, k \in r_0 KR$, но $r_0 K \subset KR$ ввиду $r_0 \in V_2$, так что $r(T')\, k \in KR$. Так как связная группа R порождается окрестностью V_2, то $RK \subset KR$. Отсюда непосредственно следует, что KR — подгруппа в группе G_0. Но KR содержит множество $U_1 V_1$, которое является окрестностью единицы в связной группе G_0. Согласно VI п. 1.2 гл. V, имеем $G_0 = KR$. Единственность разложения следует из равенства $K \cap R = \{e\}$: если $g = k_1 r_1 = k_2 r_2$, то $k_2^{-1} k_1 = r_2 r_1^{-1} \in K \cap R$, поэтому $k_2^{-1} k_1 = r_2 r_1^{-1} = e$ и $k_1 = k_2$, $r_1 = r_2$. Таким образом, отображение произведения $K \times R$ в G_0, определенное формулой $(k, r) \to kr$, есть аналитический изоморфизм многообразий

$K \times R$ и G_0. Следовательно, обратное отображение $kr \to (k, r)$ также аналитично, т. е. отображения $g \to k$ и $g \to r$ аналитичны.

6.2. Разложение Ивасавы в произвольной связной полупростой группе Ли. Пусть G' — связная полупростая группа Ли, т. е. связная группа Ли, алгебра Ли которой полупроста. Пусть L_0 — алгебра Ли группы G', $L_{\mathbf{C}}$ — ее комплексификация, пусть G_0 — аналитическая подгруппа группы $G_{L_{\mathbf{C}}}$, соответствующая подалгебре Ли $\mathrm{ad}(L_0) \subset \mathrm{ad}(L_{\mathbf{C}})$. Присоединенный гомоморфизм ρ: $g \to \mathrm{Ad}(g)$, отображающий G' в G_{L_0}, однозначно продолжается до гомоморфизма π: $G' \to G_{L_{\mathbf{C}}}$, где $\pi(g)$ определяется при каждом $g \in G'$ формулой

$$\pi(g)(x + iy) = \rho(g)\, x + i\rho(g)\, y, \quad x, y \in L_0.$$

Образ $\pi(G')$ совпадает с аналитической подпруппой группы $G_{L_{\mathbf{C}}}$, соответствующей подалгебре Ли $\mathrm{ad}(L_0)$ (см. IV п. 3.3 гл. IX), следовательно, $\pi(G') = G_0$.

Очевидно, что условия $\pi(g) = 1$ и $\rho(g) = 1$ равносильны; так как ядро присоединенного представления ρ совпадает с центром Z группы G', то группа $\pi(G') = G_0$ изоморфна G'/Z. Так как центр алгебры Ли L_0 состоит из нуля, то центр Z группы G' дискретен, следовательно, отображение π является накрытием. Пусть K и R — аналитические подгруппы группы G_0, построенные в п. 6.1 (см. IV–VII п. 6.1), пусть $\widetilde{R}$ — полный прообраз группы R в группе G'. Пусть R' — компонента единицы в группе R. Группа R' накрывает группу R относительно отображения π, так как $\pi(R') = R$ и ядро π дискретно. Но группа R односвязна (см. VI п. 6.1), следовательно, π определяет аналитический изоморфизм группы R' на R. В частности, $R' \cap Z = \{e\}$. Очевидно, что R' замкнута, так как R' — компонента единицы в полном прообразе замкнутой (см. VI п. 6.1) подгруппы R группы G_0. Таким образом, R' — односвязная замкнутая разрешимая подгруппа Ли группы G', соответствующая подалгебре Ли $M_0 = iH_u^- + N_0 \subset L_0$ (см. 6.1).

Положим $K' = \pi^{-1}(K)$; тогда $K' \supset Z$. Так как K замкнута в G_0, то K' замкнута в G'. Если $g \in K' \cap R'$, то $\pi(g) \in K \cap R = \{e\}$, так что $g \in Z$; но $Z \cap R' = \{e\}$, поэтому $g = e$. Итак, $K \cap R = \{e\}$. Далее, если $g \in G'$, то $\pi(g) = kr$ для некоторых $k \in K$, $r \in R$. Из соотношений $K' = \pi^{-1}(K)$, $\pi(R') = R$ следует, что существуют $k'' \in \pi^{-1}(k) \subset K$, $r' \in \pi^{-1}(r) \cap R'$, такие, что $\pi(g) = \pi(k'')\,\pi(r') = \pi(k''r')$, т. е. существует $z \in Z$, такой, что $g = z(k''r') = (zk'')\,r'$. Полагая $zk'' = k'$ и пользуясь соотношением $K \supset Z$, видим, что $k' \in K'$ и $g = k'r'$. Если $g = k_1'r_1'$ и $k_1' \in K'$, $r_1' \in R'$, то $k'r' = k_1'r_1'$, $k_1'^{-1}k' = r_1'r'^{-1} \in K' \cap R' = \{e\}$, так что $k' = k_1'$, $r' = r_1'$ и разложение $g = k'r'$, $k \in K'$, $r' \in R'$, единственно.

Таким образом, отображение ψ: $(k', r') \to k'r'$ произведения многообразий $K' \times R'$ в G' есть (очевидно, аналитическое) взаимно однозначное отображение на всю группу G'. Следовательно, для доказательства того, что отображение ψ есть изоморфизм аналитических многообразий $K' \times R'$ и G', достаточно показать, что в любой точке (k', r') отображение $d\psi(k', r')$ определяет изоморфизм касательных пространств $T_{(k', r')}(K' \times R')$ и $T_{k'r'}(G')$. Пусть x, y — элементы алгебр Ли групп K' и R' соответственно. Любой касательный вектор из $T_{(k', r')}(K' \times R')$ можно представить в виде $(x(k'), y(r'))$ для некоторых x, y; тогда для любой функции f, аналитической в некоторой окрестности точки $g' = k'r'$,

$$d\psi(k', r')(x(k'), y(r'))\, f = (x(k'), y(r'))(f \circ \psi) = \\ = x(k')(f \circ \psi) + y(r')(f \circ \psi). \quad (6.2.1)$$

Используя соотношение

$$f(k'r') = f(r'r'^{-1}k'r'),$$

видим, что

$$x(k')(f \circ \psi) = \mathrm{Ad}(r'^{-1})\, x(k')(f \circ \varphi_{r'}); \quad (6.2.2)$$

кроме того,

$$y(r')(f \circ \psi) = y(r')(f \circ \varphi_{k'}). \quad (6.2.3)$$

Подставляя (6.2.2) и (6.2.3) в (6.2.1) и применяя (3.2.1) гл. IX, видим, что

$$d\psi(k', r')(x(k'), y(r'))\, f = (d\varphi_{(k', r')})_e(\mathrm{Ad}(r'^{-1})\, x + y)(e)\, f = \\ = (\mathrm{Ad}(r'^{-1})\, x + y)(k'r')\, f.$$

Если $d\psi(k', r')(x(k'), y(r')) = 0$, то $\mathrm{Ad}(r'^{-1})\, x + y = 0$, так что $x + \mathrm{Ad}(r')\, y = 0$. Но x лежит в алгебре Ли группы K', а y и $\mathrm{Ad}(r')\, y$ лежат в алгебре Ли группы R', эти алгебры Ли дополнительны друг к другу в L_0, следовательно, $x = \mathrm{Ad}(r')\, y = 0$, т. е. $x = y = 0$ и $d\psi(k'r')$ — изоморфное отображение в касательное пространство $T_{k'r'}(G')$; но размерности многообразий $K' \times R'$ и G' равны, поэтому $d\psi$ определяет изоморфизм касательных пространств в каждой точке $(k', r') \in K' \times R'$. Итак, отображение ψ есть изоморфизм аналитических многообразий. В частности, так как группа G' связна, то группа K' связна; следовательно, группа K' совпадает с аналитической подгруппой группы G', соответствующей подалгебре Ли $L_0 \cap L_u$ (см. п. 6.1).

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть G' — связная полупростая группа Ли, K' и R' — аналитические подгруппы группы G', соответствующие подалгебрам Ли $L_0 \cap L_u$ и $iH_u^- + N_0$ алгебры Ли L_0 группы G'* (см. I и II п. 3.3 гл. IX). *Тогда K' содержит центр группы G', и образ группы K' в присоединенном представлении группы G' является компактной группой; R' — односвязная разрешимая группа Ли; группы K' и R' замкнуты. Отображение $(k', r') \to k'r'$ есть аналитический изоморфизм многообразия $K' \times R'$ на G'.*

Найдем теперь формулу для меры Хаара на G'.

I. *Мера Хаара на связной полупростой группе Ли G' двусторонне инвариантна.*

Доказательство. Если Δ — модуль группы G', то Δ определяет аналитический (см. теорему 2 § 2) гомоморфизм группы G' в группу $\mathbf{R}^+$. Тогда $d\Delta$ есть гомоморфизм полупростой алгебры Ли группы G' в одномерную коммутативную алгебру Ли. С другой стороны, из III § 7 гл. X следует, что всякая фактор-алгебра полупростой алгебры Ли полупроста; если $d\Delta \neq 0$, то мы получим противоречие, так как образ при гомоморфизме алгебр Ли изоморфен некоторой фактор-алгебре. Поэтому $d\Delta = 0$ и Δ — отображение группы G' в единицу группы $\mathbf{R}^+$.

II. *При надлежащей нормировке левоинвариантных мер Хаара dx', dr', dg' на группах K', R', G' имеем*

$$\int f(g')\,dg' = \int\int f(k'r'^{-1})\,dk'\,dr' \tag{6.2.4}$$

для всех непрерывных финитных функций f на G'.

Доказательство. Рассмотрим функцию f на G', представимую в виде $f(g') = f_1(k')\,f_2(r')$, где $g' = k'r'$. При фиксированной функции $f_1 \geqslant 0$ интеграл $\int f(g')\,dg'$ является положительным инвариантным справа линейным функционалом на множестве всех непрерывных функций f_2 на R', равных нулю вне компактного множества (зависящего от f_2). Следовательно, $\int f(g')\,dg' = c(f_1)\int f_2(r'^{-1})\,dr'$. Фиксируя $f_2 \geqslant 0$, видим, что $c(f_1)$ — левоинвариантный положительный линейный функционал от f_1. Поэтому, при надлежащей нормировке меры dk', $c(f_1) = \int f_1(k')\,dk'$. Следовательно, формула (6.2.4) справедлива для всех непрерывных финитных функций f вида $f_1(k')\,f_2(r')$. Но из теоремы Стоуна (см. п. 1.4 гл. IV), примененной к компактным подмножествам группы G', легко следует, что любая непрерывная финитная функция f на G' есть равномерный на G' предел последовательности конечных линейных комбинаций функций вида $f_1(k')\,f_2(r')$, где f_1, f_2 — непрерывные финитные функции на K', R'; переходя к соответствующему пределу в (6.2.4), получаем утверждение предложения II.

§ 7. Универсальная накрывающая полупростой компактной группы Ли

7.1. Некоторые свойства гомоморфизмов компактных групп. Пусть $\widetilde{G}$ — связная локально компактная группа, C — дискретная подгруппа группы $\widetilde{G}$, лежащая в центре группы $\widetilde{G}$. Тогда C — замкнутый нормальный делитель в $\widetilde{G}$. Пусть G — факторгруппа $\widetilde{G}/C$, и пусть π — канонический гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ на группу G.

I. *Предположим, что группа G компактна. Тогда группа C конечно порождена. В частности, если группа C бесконечна, то* *существует нетривиальный гомоморфизм группы C в аддитивную группу вещественных чисел.*

Доказательство. Пусть U — окрестность единичного элемента $\widetilde{e}$ группы $\widetilde{G}$, имеющая компактное замыкание $\overline{U}$ в $\widetilde{G}$. Тогда $\pi(gU)$ есть окрестность элемента $\pi(g) \in G$. Так как группа G компактна, то существует такой конечный набор элементов $g_1, \ldots, g_n \in \widetilde{G}$, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \pi(g_k U)$ покрывает K. Пусть $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n} g_k \overline{U}$; тогда D — компактное подмножество группы $\widetilde{G}$ и внутренность D_0 множества D содержит объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{n} g_k U$; поэтому $\pi(D_0) = G$ и, следовательно, $G = CD_0$. Увеличивая при необходимости множество D, мы вправе считать, что $\widetilde{e} \in D$ и что $D = D^{-1}$. Множество $D \cdot D^{-1}$ компактно; с другой стороны, так как $D \cdot D^{-1} \subset \widetilde{G} = \bigcup\limits_{c \in C} cD_0$, то семейство множеств вида cD_0, $c \in C$, образует открытое покрытие множества $D \cdot D^{-1}$. Поэтому существуют такие $c_1, \ldots, c_m \in C$, что $D \cdot D^{-1} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} c_i D_0$. Пусть C_1 — подгруппа группы C, порожденная элементами $c_1, \ldots, c_m$. Так как C содержится в центре группы $\widetilde{G}$, то C_1 — замкнутый нормальный делитель в $\widetilde{G}$. Пусть E — образ множества D в фактор-группе $\widetilde{G}/C_1$; тогда множество E содержит единицу, $E = E^{-1}$ и $E \cdot E^{-1} \subset E$, так что E — подгруппа в $\widetilde{G}/C_1$. Так как D^0 — окрестность единицы в $\widetilde{G}$, то множество E содержит окрестность единицы в $\widetilde{G}/C_1$. Так как $\widetilde{G}$ связна, то и группа $\widetilde{G}/C_1$, связна, следовательно, подгруппа E, содержащая окрестность единицы в $\widetilde{G}/C_1$, совпадает с $\widetilde{G}/C_1$. Это означает, что $G = C_1 D$. Так как C — дискретная группа, то $D \cap C$ конечно. Кроме того, если $c \in C$ и $c = c_1 d$, где $c_1 \in C_2 \subset C$, то $d = cc_1^{-1} \in C$, так что $C \subset C_1 \cdot (D \cap C)$. Так как C_1 конечно порождена, а $D \cap C$ — конечное множество, то группа C конечно порождена.

Если C бесконечна, то C изоморфна группе вида $C_0 \times Z^q$, где C_0— конечная группа, $q \geqslant 1$. Следовательно, существует нетривиальный гомоморфизм группы G в $\mathbf{R}$.

II. *Пусть φ — гомоморфизм группы C в* $\mathbf{R}$. *Тогда существует непрерывная вещественная функция ψ на $\widetilde{G}$, удовлетворяющая следующему условию*: $\psi(xc) = \psi(x) + \varphi(c)$ *для всех* $x \in \widetilde{G}$, $c \in C$, *причем* $\psi(\widetilde{e}) = 0$.

Доказательство. Пусть D — такое компактное подмножество группы $\widetilde{G}$, что $\widetilde{G} = CD$. Пусть f — неотрицательная непрерывная функция на группе $\widetilde{G}$, равная нулю вне некоторого компактного множества Q и равная единице на множестве D. Положим

$$h_1(x) = \sum_{c \in C} f(xc)\, e^{-\varphi(c)} \tag{7.1.1}$$

для всех $x \in \widetilde{G}$. Очевидно, что для любого $x \in \widetilde{G}$ сумма в правой части (7.1.1) конечна, так как множество $xC \cap Q$ конечно для любого $x \in \widetilde{G}$ (ввиду компактности множества Q и дискретности смежного класса xC). Поэтому функция $h_1(x)$ корректно определена и непрерывна на $\widetilde{G}$. Если $x \in \widetilde{G}$, то $x \in CD$, поэтому существует такой элемент $c \in C$, что $xc \in D$, тогда $f(xc) = 1$; следовательно, $h_1(x) > 0$ для всех $x \in \widetilde{G}$. Положим $h(x) = (h_1(\widetilde{e}))^{-1} h_1(x)$ для всех $x \in \widetilde{G}$; тогда $h(x)$ — положительная непрерывная функция на $\widetilde{G}$, и при $c_0 \in C$

$$h(xc_0) = (h_1(\widetilde{e}))^{-1} h_1(xc_0) = (h_1(\widetilde{e}))^{-1} \sum_{c \in C} f(xc_0 c_e^{-\varphi(c)} =$$

$$= (h_1(\widetilde{e}))^{-1} \sum_{c_1 \in C} f(xc_1)\, e^{-\varphi(c_1 c_0^{-1})} = (h_1(\widetilde{e}))^{-1} \sum_{c_1 \in C} f(xc_1)\, e^{-\varphi(c_1)+\varphi(c_0)} =$$

$$= e^{\varphi(c_0)} (h_1(\widetilde{e}))^{-1} h_1(x) = e^{\varphi(c_0)}\, h(x). \quad (7.1.2)$$

Положим $\psi(x) = \ln h(x)$. Так как $h(\widetilde{e}) = 1$, то $\psi(\widetilde{e}) = 0$; логарифмируя равенство (7.1.2), получаем, что $\psi(xc_0) = \psi(x) + \varphi(c_0)$ для всех $c_0 \in C$.

III. *Пусть G — связная компактная группа. Пусть F — непрерывная вещественная функция на $G \times G$, удовлетворяющая условиям*

$$F(e, e) = 0, \quad (7.1.3)$$

$$F(xy, z) + F(x, y) = F(x, yz) + F(y, z) \quad (7.1.4)$$

для всех $x, y, z \in G$. Тогда существует непрерывная вещественная функция f на G, удовлетворяющая условиям

$$f(e) = 0, \quad (7.1.5а)$$

$$F(x, y) = f(xy) - f(x) - f(y). \quad (7.1.5б)$$

Доказательство. Пусть dg — инвариантная мера на группе G, удовлетворяющая условию $\int\limits_G dg = 1$. Положим

$$f(x) = -\int\limits_G F(x, g)\, dg \quad (7.1.6)$$

для всех $x \in G$. Тогда, применяя (7.1.4), видим, что

$$f(xy) - f(x) - f(y) = -\int\limits_G F(xy, g)\, dg + \int\limits_G F(x, g)\, dg +$$

$$+ \int\limits_G F(y, g)\, dg = \int\limits_G F(x, g)\, dg + \int\limits_G F(x, y)\, dg - \int\limits_G F(x, yg)\, dg =$$

$$= F(x, y) + \int\limits_G F(x, g)\, dg - \int\limits_G F(x, yg)\, dg, \quad (7.1.7)$$

и (7.1.5б) следует из (7.1.7) и инвариантности меры dg. С другой стороны, подставляя в соотношение (7.1.4) $x = y = e$ и применяя соотношение (7.1.3), видим, что $F(e, z) = F(e, z) + F(e, z)$, т. е. $F(e, z) = 0$ при всех $z \in G$. Отсюда и из (7.1.6) следует, что $f(e) = 0$, т. е. выполнено условие (7.1.5а).

IV. *Пусть выполнены условия предложения* I. *Для любого гомоморфизма* φ *группы* C *в* $\mathbf{R}$ *существует непрерывный гомоморфизм* χ *группы* G *в* $\mathbf{R}$ *такой, что* $\chi(c) = \varphi(c)$ *для всех* $c \in C$.

Доказательство. Пусть ψ — непрерывная вещественная функция на $\widetilde{G}$, построенная в предложении II. Положим

$$\Phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \psi(\widetilde{x}\,\widetilde{y}) - \psi(\widetilde{x}) - \psi(\widetilde{y}) \tag{7.1.8}$$

для всех $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{G}$. Из соотношения $\psi(\widetilde{x}c) = \psi(\widetilde{x}) + \varphi(c)$ и равенства (7.1.8) следует, что

$$\Phi(\widetilde{x}c_1, \widetilde{y}c_2) = \Phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \tag{7.1.9}$$

для всех $c_1, c_2 \in C$. Следовательно, формула

$$F(x, y) = \Phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \qquad x, y \in G, \quad \widetilde{x} \in x, \quad \widetilde{y} \in y, \tag{7.1.10}$$

корректно определяет непрерывную вещественную функцию F на $G \times G$. Так как $\psi(\widetilde{e}) = 0$, то $F(e, e) = 0$, и из (7.1.8) и (7.1.10) непосредственно следует, что функция F удовлетворяет условию (7.1.4) для всех $x, y, z \in G$. Согласно III существует непрерывная вещественная функция f, удовлетворяющая условию $f(e) = 0$ и соотношению (7.1.5б). Положим $\chi(\widetilde{x}) = \psi(x) - f(\pi(\widetilde{x}))$ для всех $\widetilde{x} \in \widetilde{G}$. Тогда χ — непрерывная вещественная функция на $\widetilde{G}$, причем из (7.1.8)–(7.1.10) и (7.1.5) следует, что

$$\chi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \chi(\widetilde{x}) - \chi(\widetilde{y}) = \Phi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - F(\pi(\widetilde{x}), \pi(\widetilde{y})) = 0$$

для всех $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{G}$, т. е. χ — непрерывный гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ в $\mathbf{R}$.

Покажем, что $\chi(c) = \varphi(c)$ для всех $c \in C$. Из соотношений $\psi(\widetilde{e}) = 0$ и $\psi(\widetilde{x}c) = \psi(\widetilde{x}) + \varphi(c)$ следует при $\widetilde{x} = \widetilde{e}$, что $\psi(c) = \varphi(c)$ при всех $c \in C$; так как $f(\pi(c)) = f(e) = 0$ при всех $c \in C$, то $\chi(c) = \psi(c) - f(\pi(c)) = \varphi(c)$ при всех $c \in C$.

V. *Пусть* $\widetilde{G}$ *— связная локально компактная группа,* C *— ее дискретная подгруппа, лежащая в центре группы* $\widetilde{G}$. *Предположим, что группа* $G = \widetilde{G}/C$ *компактна, а группа* $\widetilde{G}$ *не имеет нетривиальных непрерывных гомоморфизмов в группу* $\mathbf{R}$. *Тогда группа* $\widetilde{G}$ *компактна.*

Доказательство. Если группа C бесконечна, то существует нетривиальный гомоморфизм группы C в $\mathbf{R}$ (см. I); следовательно, существует нетривиальный непрерывный гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ в $\mathbf{R}$ (см. IV), что противоречит условию. Следовательно, группа C конечна, и из компактности группы G следует компактность группы $\widetilde{G}$.

VI. *Пусть* $\widetilde{G}$ *— связная локально компактная группа,* C *— ее дискретная подгруппа, лежащая в центре группы* $\widetilde{G}$. *Если группа* $[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ *всюду плотна в* $\widetilde{G}$ *и группа* $G = \widetilde{G}/C$ *компактна, то группа* $\widetilde{G}$ *также компактна.*

Доказательство. Подгруппа $[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ содержится в ядре любого гомоморфизма группы $\widetilde{G}$ в группу $\mathbf{R}$; следовательно, любой непрерывный гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ в $\mathbf{R}$ тривиален, и остается применить предложение V.

7.2. Универсальная накрывающая компактной группы Ли. Напомним, что из определения многообразия следует, что всякое многообразие локально связно и локально односвязно. Следовательно, всякая связная группа Ли имеет универсальную накрывающую группу (см. гл. VIII, IV п. 3.1 и I п. 3.2). Согласно VII п. 3.3 гл. IX эта универсальная накрывающая группа также является группой Ли.

I (Теорема Г. Вейля.) *Пусть* G *— связная компактная полупростая вещественная группа Ли. Тогда ее универсальная накрывающая группа также компактна.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}$ — универсальная накрывающая группа группы G. Мы можем считать, что $G = \widetilde{G}/C$, где C — дискретная подгруппа группы $\widetilde{G}$, содержащаяся в центре группы $\widetilde{G}$. Так как алгебры Ли групп Ли G и $\widetilde{G}$ изоморфны, то группа Ли $\widetilde{G}$ также полупроста. Следовательно, $\widetilde{G} = [\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ (см. VI п. 4.2), и для завершения доказательства остается применить предложение VI п. 7.1.

Нам известно, что любое представление алгебры Ли односвязной группы Ли является дифференциалом некоторого представления группы Ли (см. II п. 1.4). Оказывается, что для связных компактных полупростых групп Ли справедливо обратное утверждение:

II. *Пусть* G *— компактная полупростая связная группа Ли,* L *— ее алгебра Ли. Если любое представление алгебры Ли* L *является дифференциалом некоторого представления группы Ли* G, *то группа* G *односвязна.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}$ — универсальная накрывающая группа группы G относительно некоторого гомоморфизма π. Согласно I группа $\widetilde{G}$ компактна. Пусть C — ядро гомоморфизма π. Отождествим алгебру Ли группы $\widetilde{G}$ с алгеброй Ли L так, что отображение $d\pi$ является тождественным отображением. Пусть c — некоторый неединичный элемент ядра C. Согласно теореме 4 п. 2.4 гл. IV (ср. также доказательство предложения I в п. 8.3), существует такое представление $\widetilde{\rho}$ группы $\widetilde{G}$, что $\widetilde{\rho}(c)$ — неединичный оператор в пространстве представления $\widetilde{\rho}$. Пусть $d\widetilde{\rho}$ — дифференциал представления $\widetilde{\rho}$. По условию предложения II, существует такое представление ρ группы G, что $d\rho = d\widetilde{\rho}$. Следовательно, представления $\widetilde{\rho}$ и $\rho \circ \pi$ группы $\widetilde{G}$ имеют равные дифференциалы. Согласно I п. 1.4 имеем $\widetilde{\rho} = \rho \circ \pi$; в частности,

$\widetilde{\rho}(c) = \rho(\pi(c)) = \rho(e) = 1$, в противоречие с предположением. Следовательно, C сводится к единичному элементу группы $\widetilde{G}$; таким образом, $\widetilde{G} \approx G$ и G односвязна.

III. *Группа $SO(n, \mathbf{R})$ неодносвязна.*

Доказательство. Матричные элементы тождественного представления π компактной группы $G = SO(n, \mathbf{R})$ вещественны. Следовательно, семейство матричных элементов всевозможных тензорных степеней представления π удовлетворяет условиям теоремы Стоуна. Согласно теореме п. 1.4 гл. IV неприводимые представления тензорных степеней представления π образуют полную систему неприводимых унитарных представлений группы G. Пусть L — алгебра Ли группы G. Представление алгебры Ли, соответствующее тензорной степени представления π, есть тензорная степень представления $d\pi$ алгебры Ли L, отвечающего тождественному представлению алгебры Ли L. Читатель легко проверит, что каждый вес представления $\bigotimes\limits_{k=1}^{n} d\pi$ является суммой весов представления $d\pi$. Но из формул (10.4.19), (10.4.21), (10.4.37) гл. X следует, что числа $2(\lambda, \alpha_k)/(\alpha_k, \alpha_k) = \lambda(h_k)$ являются четными для любого веса λ представления алгебры Ли $so(n, \mathbf{C})$, соответствующего тождественному представлению группы $SO(n, \mathbf{C})$. Следовательно, не каждое неприводимое представление алгебры Ли $so(n, \mathbf{R})$ продолжается до представления группы $SO(n, \mathbf{R})$ (в частности, представление алгебры Ли $SO(2n, \mathbf{R})$ или $SO(2n+1, \mathbf{R})$, соответствующее старшему весу $(1/2)(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ соответствующей комплексной алгебры Ли, не продолжается до представления группы). Поэтому $SO(n, \mathbf{R})$ неодносвязна.

§ 8. Комплексные полупростые группы Ли и их вещественные формы

8.1. Компактные вещественные формы. Определение вещественной формы комплексной алгебры Ли дано в § 14 гл. IX. Напомним, что любая комплексная полупростая алгебра Ли имеет хотя бы одну вещественную форму — в частности, имеет компактную вещественную форму (см. XII § 14 гл. X).

Введем теперь определение вещественной формы комплексной группы Ли. Пусть G — комплексная группа Ли, L — ее алгебра Ли, H — (вещественная) аналитическая подгруппа группы Ли G, рассматриваемой как вещественная группа Ли. Пусть L_0 — вещественная подалгебра Ли в алгебре Ли L, соответствующая подгруппе H. Подгруппа Ли H называется *вещественной формой* комплексной группы Ли G, если L_0 — вещественная форма алгебры Ли L. Вещественная форма H называется *компактной*, если она компактна как топологическая группа.

I. *Пусть G — связная комплексная полупростая группа Ли, L — ее алгебра Ли. Тогда G имеет компактную вещественную форму: а именно, вещественная аналитическая подгруппа Ли $H \subset G$, соответствующая компактной вещественной форме $L_u \subset L$, является компактной вещественной формой группы Ли G.*

Доказательство. Достаточно доказать, что группа H компактна. Но компактность группы H доказывается аналогично III п. 6.1.

II. *Любое конечномерное представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо.*

Доказательство. Согласно п. 14.2 гл. X достаточно доказать это утверждение для комплексной полупростой алгебры Ли L. Пусть G — односвязная комплексная группа Ли с алгеброй Ли L (см. теорему п. 3.3). Пусть L_u и H определены так же, как в I. Пусть π — конечномерное представление алгебры Ли L. Тогда существует такое представление ρ группы G, что $\pi = d\rho$ (см. II, п. 1.4). Пусть σ — представление группы H, определяемое ограничением представления ρ на H. Тогда $d\sigma$ есть ограничение представления π на L_u. Так как любое конечномерное представление компактной группы вполне приводимо (см. теорему 2 п. 2.2 гл. IV), то представление σ вполне приводимо. Следовательно, $d\sigma$ вполне приводимо (см. теорему п. 3.4 гл. IX). Но $d\sigma = \pi|_{L_u}$ — представление вещественной формы L_u алгебры Ли L, поэтому из полной приводимости представления $d\sigma$ следует полная приводимость представления π (см. п. 14.2 гл. X).

8.2. «Унитарный прием» Г. Вейля.

I. *Пусть G — связная комплексная полупростая группа Ли, G_0 — вещественная форма группы G, N — связная окрестность множества G_0 в G. Если F — комплексно-аналитическая функция на N, ограничение которой на G_0 равно нулю, то $F = 0$.*

Доказательство. Пусть L — (комплексная) алгебра Ли группы G; L_0 — вещественная подалгебра Ли, соответствующая подгруппе G_0. Будем рассматривать элементы универсальной обертывающей алгебры U группы G как левоинвариантные комплексно-аналитические дифференциальные операторы на G. Так как элементы $x(g_0)$, $x \in L_0$, $g_0 \in G_0$, являются касательными векторами к G_0, то из обращения F в нуль на G_0 следует, что $xF(g_0) = 0$ для всех $x \in L_0$, $g_0 \in G_0$. Так как функция F комплексно-аналитична и $L = L_0 + iL_0$, то $xF(g_0) = 0$ для всех $g_0 \in G_0$, $x \in L$. Следовательно, xF обращается в нуль на G_0 для всех $x \in L$. Применяя к xF предыдущее рассуждение и используя индукцию по степени элемента $y \in U$, видим, что yF обращается в нуль на G_0 для всех $y \in U$. В частности, $yF(e) = 0$ для всех $y \in U$. Следовательно, комплексно-аналитическая функция F равна нулю в некоторой окрестности единичного элемента e. Так как N связна, то $F = 0$ на N.

II. *Пусть G — односвязная полупростая комплексная группа Ли, G_u — ее компактная вещественная форма, тогда G_u односвязна.*

Доказательство. Пусть L — алгебра Ли группы G, L_u — компактная вещественная форма, соответствующая подгруппе G_u. Пусть π — представление алгебры Ли L_u, $\pi_{\mathbf{C}}$ — его комплексификация (см. (14.2.1) гл. X). Так как группа G односвязна, то существует комплексно-аналитическое представление ρ группы Ли G, удовлетворяющее условию $d\rho = \pi_{\mathbf{C}}$. Очевидно, что ограничение σ представления ρ на G_u удовлетворяет условию $d\sigma = \pi$. Следовательно, группа G_u удовлетворяет условию предложения VIII п. 8.1. Поэтому G_u односвязна.

III. *Любая компактная связная полупростая группа Ли K может быть вложена как компактная вещественная форма в некоторую полупростую связную комплексную группу Ли.*

Доказательство. Пусть L_K — алгебра Ли группы Ли K, L — комплексификация алгебры Ли L_K. Тогда L_K и L — полупростые алгебры Ли. Пусть G — односвязная комплексная группа Ли, соответствующая алгебре Ли L (см. теорему п. 3.3). Пусть G_K — вещественная аналитическая подгруппа группы G, соответствующая подалгебре Ли $L_K \subset L$. Согласно II группа G_K односвязна. Так как G_K и K имеют изоморфные алгебры Ли, то существует такая дискретная подгруппа $C \subset G_K$, что G_K/C изоморфна K. Так как C дискретна, то C содержится в центре группы G. Следовательно, K изоморфна компактной вещественной форме G_K/C комплексной группы G/C.

IV. *Пусть G — односвязная комплексная полупростая группа Ли, G_0 — ее вещественная форма. Если π — неприводимое комплексно-аналитическое представление группы G, то ограничение π на G_0 неприводимо, и класс эквивалентности этого ограничения однозначно определяется классом эквивалентности π. Обратно, любое неприводимое вещественно-аналитическое представление группы G_0 является ограничением на группу G_0 некоторого однозначно определенного комплексно-аналитического представления группы G.*

Доказательство. Пусть ρ — неприводимое вещественно-аналитическое представление группы G_0, $d\rho$ — соответствующее представление вещественной формы L_0 алгебры Ли L группы G. Пусть $(d\rho)_{\mathbf{C}}$ — комплексификация представления $d\rho$. Так как G односвязна, то существует такое комплексно-аналитическое представление π группы G, что $d\pi = (d\rho)_{\mathbf{C}}$ (см. II п. 1.4). Очевидно, что дифференциал ограничения представления π на подгруппу G_0 совпадает с $d\rho$. Согласно I п. 1.4 отсюда следует, что $\pi|_{G_0} = \rho$. С другой стороны, если $\pi|_{G_0} = \rho$, то $d\pi|_{L_0} = d\rho$, а представление $d\pi$ однозначно определяется своим ограничением на L_0 (так как $L = L_0 + iL_0$). Так как представление π однозначно определяется своим дифференциалом, то представление ρ является ограничением на G_0 однозначно определенного комплексно-аналитического представления группы G.

Очевидно, что если ρ неприводимо, то π неприводимо, и если π_1 и π_2 эквивалентны, то ρ_1 и ρ_2 эквивалентны (где $\rho_i = \pi_i|_{G_0}$, $i = 1, 2$). Пусть теперь π — некоторое комплексно-аналитическое представление группы Ли G в конечномерном комплексном векторном пространстве V. Пусть ρ — ограничение представления π на подгруппу G_0. Пусть $E(\pi)$, $E(\rho)$ — комплексные линейные оболочки всех операторов вида $\pi(g)\, g \in G$, и $\rho(g_0)$, $g_0 \in G_0$, соответственно. Очевидно, что $E(\rho) \subset E(\pi)$. Покажем, что $E(\rho) = E(\pi)$. Действительно, если $E(\rho) \neq E(\pi)$, то существует ненулевой линейный функционал f на линейном пространстве $E(\pi)$, равный нулю на $E(\rho)$. Пусть $F(g) = f(\pi(g))$, $g \in G$. Тогда $F(g) \not\equiv 0$, но $F(g_0) = 0$ для всех $g_0 \in G_0$. Из I следует, что тогда $F(g) \equiv 0$, полученное противоречие показывает, что $E(\rho) = E(\pi)$. Если π неприводимо, то $E(\pi)$ совпадает с алгеброй всех линейных операторов в V («теорема Бернсайда», см. Наймарк [2]). Так как $E(\rho) = E(\pi)$, то из неприводимости π следует неприводимость ρ.

Пусть теперь ρ_1 и ρ_2 — представления группы Ли G_0, π_1 и π_2 — такие комплексно-аналитические представления группы G, что $\pi_i|_{G_0} = \rho_i$, $i = 1, 2$. Если ρ_1 и ρ_2 эквивалентны, то существует такой линейный оператор T из пространства V_1 представления ρ_1 в пространство V_2 представления ρ_2, что $\rho_2(g_0) = T\rho_1(g_0)\,T^{-1}$ для всех $g_0 \in G$. Если $\pi_2(g) \neq T\pi_1(g)\,T^{-1}$ для некоторого $g \in G$, то существуют линейный функционал f на V_2 и элемент $v \in V_2$, удовлетворяющие условию $f((\pi_2(g) - T\pi_1(g)\,T^{-1})\,v) \neq 0$. Но функция $F(g) = f((\pi_2(g) - T\pi_1(g)\,T^{-1})\,v)$ удовлетворяет условиям предложения I, поэтому $F(g) \equiv 0$. Полученное противоречие показывает, что $\pi_2(g) = T\pi_1(g)T^{-1}$ для всех $g \in G$.

Формулы для характеров и размерностей неприводимых непрерывных унитарных представлений компактных связных полупростых групп Ли найдены Г. Вейлем; они тесно связаны с соответствующими формулами для характеров и размерностей представлений комплексных полупростых алгебр Ли, найденными в п. 13.4 гл. X. См. по этому поводу Варадараджан [1], Семинар «Софус Ли» [1].

8.3. Линейность компактных групп Ли.

I. *Всякая связная компактная группа Ли G имеет точное вещественно-аналитическое линейное представление в конечномерном векторном пространстве.*

Доказательство. Из теоремы 4 п. 2.4 гл. IV следует, в частности, что для любого элемента $g \in G$ существует такое конечномерное представление T, что $T(g) \neq T(e)$. Действительно, в противном случае всевозможные матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы G принимали бы в точках g и e равные значения, и непрерывная функция на G, равная 0 в g и 1 в e, не допускала бы равномерной аппроксимации линейными комбинациями этих матричных элементов. Следовательно, для любого $g \in G$, $g \neq e$, существует такое конечномерное представление T, что g не содержится в ядре T, т. е. открытые множества $G\setminus \operatorname{Ker} T$ покрывают $G\setminus\{e\}$. Пусть V — окрестность точки e, допускающая канонические координаты. Пусть L — алгебра Ли группы G. Выберем в L шар L_ε радиуса ε с центром в начале координат так, чтобы экспоненциальное отображение гомеоморфно отображало шар $L_{2\varepsilon}$ в V. Пусть $W = \exp(L_\varepsilon)$. Тогда $G\setminus \operatorname{Ker} T$ покрывают $G\setminus W$, и из компактности G следует, что существует такой конечный набор $T_1, \ldots, T_n$ конечномерных представлений группы G, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} T_i \subset W$. Но $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} T_i$ — подгруппа в G, а из построения W и свойств канонических координат непосредственно следует, что окрестность W не содержит неединичных подгрупп группы G. Следовательно, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} T_i = \{e\}$ и прямая сумма $T_1 \dotplus \ldots \dotplus T_n$ является искомым представлением.

8.4. Комплексная оболочка комплексной полупростой алгебры Ли. Пусть L — комплексная полупростая алгебра Ли, $L_{\mathbf{R}}$ — алгебра Ли L, рассматриваемая как вещественная алгебра Ли; пусть $L_{\mathbf{C}}$ — комплексификация алгебры Ли $L_{\mathbf{R}}$. Так как $L_{\mathbf{R}}$ полупроста, то и $L_{\mathbf{C}}$ полупроста. Пусть S — линейный оператор в L, действующий по формуле

$$Sx = ix$$

для всех $x \in L$. Полагая $S\{x, y\} = \{Sx, Sy\}$, получаем комплексно-линейный оператор S в $L_{\mathbf{C}}$. Так как $S^2 = -1$ в L и $[Sx, y] = S[x, y]$ для всех $x, y \in L$, то

$$S^2 = -1, \quad [Sx, y] = S[x, y]$$

в пространстве $L_{\mathbf{C}}$. Пусть L' — множество таких $z \in L_{\mathbf{C}}$, что $Sz = iz$, и пусть L'' — множество таких $z \in L_{\mathbf{C}}$, что $Sz = -iz$. Так как $S^2 = -1$, то $(iS)^2 = 1$, поэтому $z \in L'$ (соответственно $z \in L''$) тогда и только тогда, когда $z = ((iS+1)/2)\, z$ (соответственно $z = ((1-iS)/2)\, z$), где $(1+iS)/2$, $(1-iS)/2$ — операторы проектирования на L', L'' соответственно. Поэтому $L_{\mathbf{C}}$ есть прямая сумма подпространств L', L''. Если $x \in L'$, $y \in L_{\mathbf{C}}$, то $S[x, y] = [Sx, y] = [ix, y] = i[x, y]$, т. е. L' — идеал в $L_{\mathbf{C}}$. Аналогично, L'' — идеал в $L_{\mathbf{C}}$.

Пусть $\widetilde{L}$ — подалгебра Ли в $L_{\mathbf{C}}$, образованная элементами $\widetilde{x} = \{x, 0\}$, где $x \in L$. Алгебра Ли $\widetilde{L} \subset L_{\mathbf{C}}$ пересекает L' и L'' лишь в нуле, так как для $\widetilde{x} \in \widetilde{L}$ имеем $i\widetilde{x} = J\{x, 0\} = \{0, x\}$ (см. п. 1.4 гл. X), так что соотношение $S\widetilde{x} = \pm i\widetilde{x}$ означает, что $\{ix, 0\} = \pm\{0, x\}$, т. е. $x = 0$. Следовательно, проекции алгебры Ли $\widetilde{L}$ на L' и L'' взаимно однозначны. Так как $Sz = iz$ для $z \in L'$, то отображение проектирования определяет изоморфизм комплексных алгебр Ли $\widetilde{L}$ и L'. Так как $Sz = -iz$ для $z \in L''$, то отображение проектирования $\widetilde{L}$ на L'' определяет *антиизоморфизм* комплексных алгебр Ли $\widetilde{L}$ и L'' (т. е. такое взаимно однозначное отображение φ: $\widetilde{L} \to L''$, что $\varphi(\alpha x + \beta y) = \widetilde{\alpha}\varphi(x) + \widetilde{\beta}\varphi(y)$, $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ для всех $x, y \in \widetilde{L}$, $\alpha, \ = \mathbf{C}$).

Пусть L_u — компактная вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли L; пусть L'_u, L''_u — ее образы в L', L'' относительно соответствующих отображений проектирования. Очевидно, что $L'_u + L''_u$ есть компактная вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли $L_{\mathbf{C}} = L' + L''$, и пересечение алгебры Ли $\widetilde{L} \subset L_{\mathbf{C}}$ с $L'_u + L''_u$ равно $\widetilde{L}_u = \{(x, 0), x \in L_u\}$.

8.5. Разложение Ивасавы комплексной полупростой группы Ли.

I. *Пусть G — комплексная полупростая группа Ли, L — ее алгебра Ли. Пусть L_u — компактная вещественная форма алгебры Ли L. Существует такая (вещественная) разрешимая подалгебра Ли $M \subset L$, что $L_u \dot{+} M = L$, и если K и R — аналитические подгруппы группы G, соответствующие подалгебрам Ли L_u и M, то K — компактная группа Ли, R — разрешимая группа Ли, центр группы G содержится в K, группа R односвязна, и отображение $(k, r) \to kr$, $k \in K$, $r \in R$, есть аналитический изоморфизм многообразия $K \times R$ на G.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{G}$ комплексную группу Ли, определяемую следующим образом: группа $\overline{G}$ изоморфна группе G как топологическая группа, и если π: $g \to \overline{g}$ — топологический изоморфизм G на $\overline{G}$, то для любого открытого множества $\overline{U} \subset \overline{G}$ алгебра $D(\overline{U})$ состоит из тех и только тех функций f на $\overline{U}$, для которых функция $\overline{f(\pi(g))}$ принадлежит $D(\pi^{-1}(\overline{U}))$. Воспользуемся результатами п. 8.4. Представление алгебры Ли $L_{\mathbf{C}}$ в виде $L' \dot{+} L''$, где L' изоморфна L, а L'' антиизоморфна L, показывает, что алгебра Ли группы Ли $G \times \overline{G}$ изоморфна $L_{\mathbf{C}}$, поэтому комплексную группу Ли G можно рассматривать как вещественную форму комплексной группы Ли $G \times \overline{G}$, отождествляя элементы $g \in G$ с элементами вида $(g, \overline{g}) \in G \times \overline{G}$. Таким образом, доказательство предложения I следует из I п. 8.1, результатов п. 8.4 и теоремы § 6, примененной к группе $G \subset G \times \overline{G}$.

II. *Комплексная полупростая группа Ли G односвязна тогда и только тогда, когда ее компактная вещественная форма G_u односвязна.*

Доказательство. Если G односвязна, то G_u односвязна согласно II п. 8.2. Обратно, если G_u односвязна, то G гомеоморфна прямому произведению односвязных пространств $K = G_u$ и R (см. I) и потому односвязна.

Отсюда следует, в частности, что группы $SL(n, \mathbf{C})$ и $Sp(2n, \mathbf{C})$ односвязны. Группа $SO(n, \mathbf{C})$ неодносвязна, так как ее компактная вещественная форма $SO(n, \mathbf{R})$ неодносвязна (см. III п. 7.2).

8.6. Представления комплексных полупростых групп Ли.

I. *Всякая связная полупростая комплексная группа Ли G допускает точное комплексно-аналитическое линейное представление в конечномерном комплексном векторном пространстве.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}$ — универсальная накрывающая группа для группы G относительно гомоморфизма π. Пусть G_u — компактная вещественная форма группы G. Согласно I п. 8.3, существует точное вещественно-аналитическое представление T группы G_u в некотором конечномерном комплексном векторном пространстве V. Мы можем рассматривать это представление T как представление соответствующей вещественной формы $\widetilde{G}_u$ группы $\widetilde{G}$. Пусть ρ — комплексно-аналитическое представление группы G, ограничение которого на $\widetilde{G}_u$ совпадает с T (см. IV п. 8.2). Так как представление T имеет дискретное ядро, то dT точно; следовательно, $d\rho$ — точное представление алгебры Ли группы $\widetilde{G}$. Поэтому ядро представления ρ дискретно. Согласно VI п. 1.2 гл. V отсюда следует, что ядро представления ρ содержится в центре группы $\widetilde{G}$. Но согласно I п. 8.5 центр группы $\widetilde{G}$ содержится в $\widetilde{G}_u$, т. е. ядро представления ρ содержится в $\widetilde{G}_u$. Но тогда $\operatorname{Ker}\rho = \operatorname{Ker} T$, а так как $\pi(\widetilde{G}_u) = G_u$ и центр группы $\widetilde{G}$ содержится в $\widetilde{G}_u$, то $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker}\pi$. Следовательно, ядро представления ρ совпадает с $\operatorname{Ker}\pi$, поэтому можно рассматривать ρ как точное представление группы $G \approx \widetilde{G}/\operatorname{Ker}\pi$.

Пусть T — вещественно-аналитическое представление комплексной группы Ли G в конечномерном комплексном линейном пространстве V. Представление T называется *комплексно-аналитическим*, если для любых $v \in V$, $f \in V^*$ функция $\varphi(g) = f(T(g)\,v)$ принадлежит $D(G)$; представление T называется *комплексно-антианалитическим*, если функция $\overline{\varphi(g)} = \overline{f(T(g)\,v)}$ принадлежит $D(G)$ для всех $v \in V$, $f \in V^*$.

II. *Пусть G — комплексная полупростая группа Ли, L — ее алгебра Ли. Представление T группы G тогда и только тогда комплексно-аналитично* (*соответственно антианалитично*), *когда $dT(ix) = i\,dT(x)$* (*соответственно $dt(ix) = -i\,dT(x)$*) *для всех $x \in L$.*

Доказательство. Представление T комплексно-аналитично тогда и только тогда, когда dT есть представление не только вещественной, но и комплексной алгебры Ли L, т. е. тогда и только тогда, когда $dT(ix) = i\,dT(x)$ для всех $x \in L$. Аналогично доказывается утверждение для антианалитических представлений.

III. *Всякое неприводимое вещественно-аналитическое линейное представление комплексной группы Ли в комплексном конечномерном линейном пространстве эквивалентно тензорному произведению комплексно-аналитического неприводимого представления и комплексно-антианалитического неприводимого представления.*

Доказательство. Согласно IV п. 8.2 и доказательству предложения I п. 8.5, всякое неприводимое вещественно-аналитическое представление T есть ограничение на группу G неприводимого комплексно-аналитического представления S группы $G \times \overline{G}$. Согласно п. 2.7 гл. I представление S эквивалентно тензорному произведению неприводимых представлений T_1 и $\overline{T}_2$ групп G и $\overline{G}$ соответственно, причем представления T_1 и $\overline{T}_2$ являются подпредставлениями ограничения представления S на $G \times \{\overline{e}\}$ и $\{e\} \times \overline{G}$ соответственно; следовательно, T_1 и $\overline{T}_2$ — аналитические представления групп G и $\overline{G}$ соответственно. Если π: $G \to \overline{G}$ — отображение, построенное в доказательстве предложения I п. 8.4, то представление T_2, определенное формулой $T_2(g) = \overline{T}_2(\pi(g))$, $g \in G$, является антианалитическим представлением G по определению группы $\overline{G}$. Тогда из соотношения $S \approx T_1 \otimes \overline{T}_2$ и определения тензорного произведения представлений группы G следует, что $T \approx T_1 \otimes \overline{T}_2$.

Глава XII

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

Задача описания всех, с точностью до эквивалентности, конечномерных неприводимых представлений связной комплексной полупростой группы Ли G была сведена в гл. IX к аналогичной задаче для алгебры Ли L группы G; последняя задача была решена в гл. X. Тем самым было получено решение исходной задачи, — мы будем называть его *классическим*, — принадлежащее Э. Картану [1*]–[3*] и Г. Вейлю [1]. Фактически в классическом решении описаны не сами представления T группы G, а их дифференциалы dT. Мы приведем здесь другое решение, использующее разложение Гаусса, в котором будут указаны в явном виде формулы для операторов представления T.

§ 1. Представления комплексных полупростых групп Ли

1.1. Описание представлений при помощи старших весов и векторов старшего веса. Пусть G — связная полупростая комплексная группа Ли,

$$G_{\text{reg}} = KZ^+, \quad K = Z^- D, \tag{1.1.1}$$

— ее разложение Гаусса [1]), T: $g \to T(g)$ — представление группы G в конечномерном пространстве V. Вектор $v \in V$ называется *весовым вектором* представления T, если

$$T(\delta)\, v = \nu(\delta)\, v \quad \text{для всех} \quad \delta \in D, \tag{1.1.2}$$

где $\nu(\delta)$ — числовая функция на D. Очевидно, $\nu(\delta)$ — характер группы D; он называется *весом вектора v в представлении T*. Весовой вектор $v \in V$ называется *вектором старшего веса*, если

$$T(z)\, v = v \quad \text{для всех} \quad v \in Z^+, \tag{1.1.3}$$

и *вектором младшего веса*, если

$$T(\zeta)\, v = v \quad \text{для всех} \quad \zeta \in Z^-. \tag{1.1.4}$$

---

[1]) Группа K называется *борелевской* подгруппой группы G.

Вес $\alpha(\delta)$ вектора старшего веса называется *старшим весом* представления T; в дальнейшем $\alpha(\delta)$ будет обозначать старший вес представления T.

Повторяя, по существу, рассуждения в п. 2.1 гл. VI (см. также п. 2.1 гл. VII), заключаем, что имеет место

Теорема 1. *В пространстве всякого конечномерного представления T существует вектор старшего и вектор младшего веса. Если представление T в пространстве V неприводимо, то в V существует только один с точностью до числового множителя вектор старшего веса и представление T определяется своим старшим весом $\alpha(\delta)$ однозначно, с точностью до эквивалентности.*

Последнее утверждение теоремы означает, что

I. *Два неприводимых конченомерных представления группы G эквивалентны тогда и только тогда, когда их старшие веса совпадают.*

Положим
$$\alpha(g) = \alpha(d) \quad \text{при} \quad g = \zeta\delta z, \quad g \in G_{\text{reg}}. \tag{1.1.5}$$
Характер α группы G называется *индуктивным относительно* G, если:

1) функцию $\alpha(g)$ (заданную на G_{reg}) можно доопределить по непрерывности на всей группе G;
2) линейная оболочка — обозначим ее Φ_α — всех $\alpha(gg_0)$, $g_0 \in G$, конечномерна.

Пусть α индуктивен относительно G. Определим представление T_α: $g \to T_\alpha(g)$ группы G в Φ_α, полагая
$$T_\alpha(g_0)\, f(g) = f(gg_0) \quad \text{при} \quad f \in \Phi_\alpha. \tag{1.1.6}$$
Повторяя далее рассуждения в § 2 гл. VI, заключаем, что имеет место

Теорема 2. *Характер α группы D определяет неприводимое конечномерное представление группы G со старшим весом α тогда и только тогда, когда α индуктивен относительно G. В этом случае T_α — конечномерное неприводимое представление со старшим весом α и всякое конечномерное неприводимое представление группы G со старшим весом α эквивалентно представлению T_α.*

Представление T_α называется *канонической моделью* неприводимого конечномерного представления, а функция $\alpha(g)$, отвечающая индуктивному характеру $\alpha(\delta)$, — *производящей функцией* этого представления.

1.2. Реализация представлений в пространстве функций на Z^+. Легко проверить, что производящая функция $\alpha(g)$ удовлетворяет условию $\alpha(kg) = \alpha(k)\,\alpha(g)$, $k \in K$. Отсюда следует, что для всевозможных сдвигов $\alpha(gg_0)$, а значит, и для любой их линейной комбинации $f(g) \in \Phi_\alpha$
$$f(kg) = \alpha(k)\, f(g) \quad \text{при} \quad k \in K. \tag{1.2.1}$$

Отсюда для каждой функции $f \in \Phi_\alpha$

$$f(g) = f(kz) = \alpha(k)\, f(z) \quad \text{при} \quad k \in K, \quad z \in Z^+, \quad g \in G_{\text{reg}}. \qquad (1.2.2)$$

Рассуждая как в п. 2.3 гл. V, заключаем, что соответствие $f(g) \to f(z)$, установленное формулой (1.2.2), линейно и взаимно однозначно. Пусть F_α — образ пространства Φ_α при отображении $f(g) \to f(z)$ по формуле (1.2.2). При этом отображении операторы $T_\alpha(g)$ перейдут в операторы, обозначим их $\dot{T}_\alpha(g)$, в F_α, причем

$$\dot{T}_\alpha(g_0)\, f(z) = \alpha(zg_0)\, f(z\overline{g}_0), \qquad (1.2.3)$$

где $z\overline{g}_0$ — элемент группы Z^+, определяемый разложением Гаусса

$$zg_0 = k_1 z\overline{g}_0, \qquad k_1 \in K, \quad z\overline{g}_0 \in Z^+. \qquad (1.2.4)$$

Из формулы (1.2.3) видно, что функция $f_0(z) \equiv 1$ есть вектор старшего веса и потому F_α есть линейная оболочка всех $\dot{T}_\alpha(g)\, f_0 = \alpha(zg)$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Всякое конечномерное неприводимое представление T связной полупростой комплексной группы Ли G эквивалентно представлению $\dot{T}_\alpha$, где α — старший вес представления T, определенному следующим образом*:

Пространство F_α представления $\dot{T}_\alpha$ есть линейная оболочка всех $\alpha(zg)$, $g \in G$, а операторы представления задаются формулой

$$\dot{T}_\alpha(g)\, f(z) = \alpha(zg)\, f(z\overline{g}),$$

где $z_1 = z\overline{g}$ определяется из условия $zg = k_1 z_1$.

1.3. Реализация представлений в пространстве функций на U. Воспользуемся теперь разложением Ивасавы (см. п. 8.5 гл. XI) вместо разложения Гаусса. Если $f \in \Phi_\alpha$, то

$$f(g) = f(ku) = \alpha(k)\, f(u) \qquad (1.3.1)$$

и соответствие

$$f(g) \to f(u), \qquad (1.3.2)$$

установленное формулой (1.3.1), взаимно однозначно и линейно. Обозначим через $\dot{F}_\alpha$ образ Φ_α при отображении (1.3.2). При этом отображении представление T_α перейдет в эквивалентное ему представление в $\dot{F}_\alpha$, которое снова обозначим через $\dot{T}_\alpha$. Повторяя рассуждение в п. 2.6 гл. VI, легко находим:

I. *Операторы $\dot{T}^\alpha(g)$ представления $\dot{T}_\alpha$ задаются формулой*

$$\dot{T}_\alpha(g_0)\, f(u) = \alpha(k)\, f(u_{g_0}) \quad \textit{при} \quad ug_0 = ku_{g_0}. \qquad (1.3.3)$$

Кроме того, в силу (1.3.1):

II. *Функции $f \in \dot{F}_\alpha$ удовлетворяют условию*

$$f(\gamma u) = \alpha(\gamma)\, f(u) \quad \textit{при} \quad \gamma \in \Gamma = K \cap U. \tag{1.3.4}$$

В силу (1.3.4) неоднозначность разложения $ug_0 = ku_{g_0}$ в формуле (1.3.3) не играет роли. Действительно, всякое другое такое разложение имеет вид $ug_0 = k\gamma^{-1}\gamma u_{g_0}$; тогда в формуле (1.3.3) мы получим $k\gamma^{-1}$ вместо k и γu_{g_0} вместо u_{g_0} и $\alpha(k\gamma^{-1})\, f(\gamma u_{g_0}) = \alpha(k)\, \alpha(\gamma^{-1})\, \alpha(\gamma)\, f(u_{g_0}) = \alpha(k)\, f(u_{g_0})$. Можно добиться однозначности в определении u_{g_0}, положив $ug_0 = \zeta\varepsilon u_{g_0}$. Тогда формула (1.3.3) примет вид

$$T_\alpha(g_0)\, f(u) = \alpha(\varepsilon)\, f(u_{g_0}) \quad \text{при} \quad ug_0 = \zeta\varepsilon u_{g_0}. \tag{1.3.5}$$

1.4. Критерий индуктивности. Пусть G — односвязная полупростая группа Ли. Пусть L — алгебра Ли группы G,

$$L = N^- + H + N^+ \tag{1.4.1}$$

— разложение Картана алгебры L, отвечающее разложению Гаусса (1.1.1); следовательно, N^-, H, N^+ — алгебры Ли групп Z^-, D, Z^+ соответственно. Обозначим через r ранг группы L и выберем в H базис $h_k = 2h'_{\alpha_k}/(h'_{\alpha_k}, h'_{\alpha_k})$, $k = 1, \ldots, r$, где α_k — простые корни алгебры L относительно H. Тогда каждый элемент $h \in H$ запишется в виде

$$h = \sum_{k=1}^{r} t_k h_k, \tag{1.4.2}$$

и мы выберем $\lambda_k = \exp t_k$ в качестве координат в группе D. Тогда D изоморфна прямому произведению $\mathbf{C}_0^k$, и потому всякий характер $\alpha(\delta)$ на D должен иметь вид

$$\alpha(\delta) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{p_k} \overline{\lambda}_k^{q_k} \quad \text{при} \quad \delta = \exp h, \tag{1.4.3}$$

где p_k и q_k — такие комплексные числа, что $p_k - q_k$ — целые числа; последнее условие необходимо и достаточно для однозначности функции $\alpha(\delta)$ на D. Из (1.4.3) заключаем, что

$$\alpha(\delta) = \exp\Bigl(\sum_{k=1}^{r} t_k p_k + \sum_{k=1}^{r} \overline{t}_k q_k\Bigr) \quad \text{при} \quad \delta = \exp h;$$

отсюда в силу (1.4.2)

$$\alpha(\delta) = \exp[(p, h) + (q, \overline{h})] \quad \text{при} \quad \delta = \exp h, \tag{1.4.4}$$

где p, q — векторы в H с координатами p_k и q_k соответственно.

Пусть теперь T — неприводимое конечномерное представление группы G в V и пусть $\pi = dT$ — дифференциал этого представления. Тогда π — неприводимое конечномерное представление алгебры Ли L (см. теорему п. 3.4 гл. IX) в V.

Пусть v_0 — вектор старшего веса представления T, так что

$$T(\delta)\, v_) = \alpha(\delta)\, v_0 \quad \text{для всех} \quad \delta \in D \tag{1.4.5}$$

где $\alpha(\delta)$ — старший вес представления T, и

$$T(z)\, v_0 = v_0 \quad \text{для всех} \quad z \in Z^+. \tag{1.4.6}$$

Переходя от T к π и учитывая (1.4.4)–(1.4.6), заключаем, что

$$\pi(h)\, v_0 = [(p,\, h) + (q,\, \overline{h})]\, v_0 \quad \text{для всех} \quad h \in H, \tag{1.4.7}$$

$$\pi(n)\, v_0 = 0 \quad \text{для всех} \quad n \in N^+. \tag{1.4.8}$$

Кроме того, наименьшее инвариантное подпространство в V, инвариантное относительно $\pi(L)$ и содержащее v_0, совпадает с V, ибо π неприводимо. Следовательно, из (1.4.7) и (1.4.8) вытекает, что v_0 — вектор старшего веса представления π и $(p,\, h) + (q,\, \overline{h})$ — старший вес этого представления. Но тогда (см. теорему § 12, гл. X) для каждого простого корня α алгебры Ли L относительно H числа

$$p_\alpha = 2(p,\, \alpha)/(\alpha,\, \alpha), \quad q_\alpha = 2(q,\, \alpha)/(\alpha,\, \alpha) \tag{1.4.9}$$

должны быть целыми неотрицательными.

Обратно, пусть числа (1.4.9) — целые неотрицательные для каждого простого корня α. Тогда существует неприводимое представление π алгебры Ли L в некотором конечномерном пространстве V со старшим весом $(p,\, h) + (q,\, \overline{h})$ (см. III п. 8.6 гл. XI). Согласно II п. 1.4 гл. XI это представление π есть дифференциал некоторого неприводимого представления T группы G в V.

Пусть $\alpha'(\delta)$ — старший вес представления T. Тогда $\alpha'(\delta)$ индуктивен относительно G в силу теоремы 2 п. 1.1 и $\alpha'(\delta) = \exp((p,\, h) + (q,\, \overline{h})) = \alpha(\delta)$, т. е. $\alpha(\delta)$ индуктивен относительно G.

Нами доказана

Теорема 4. *Характер*

$$\alpha(\delta) = \exp[(p,\, h) + (q,\, \overline{h})], \quad h,\, p,\, q \in H,$$

группы D тогда и только тогда индуктивен относительно G, когда все числа

$$p_\alpha = 2(p,\, \alpha)/(\alpha,\, \alpha), \quad q_\alpha = 2(q,\, \alpha)/(\alpha,\, \alpha)$$

— целые неотрицательные для каждого простого корня α.

Замечание. В действительности, если характер $\alpha(\delta)$ в (1.4.4) индуктивен относительно G, то p_α, q_α — целые неотрицательные числа для любого корня α. Действительно, для любого фиксированного корня α можно так упорядочить систему корней, что α станет простым (см. IV и V § 11 гл. X).

Объединяя теоремы 1–4, получаем:

Теорема 5. *Каждое конечномерное неприводимое представление односвязной полупростой комплексной группы G задается системой целых неотрицательных чисел* (*сигнатурой*) p_j, q_j, $j = 1, \ldots$ $\ldots, r$, *где r — ранг группы G, и каждая такая система p_j, q_j, $j = 1, \ldots, r$, задает неприводимое конечномерное представление группы G. Представление T, отвечающее данной сигнатуре p_j, q_j, $j = 1, \ldots, r$, определяется своей производящей функцией*

$$\alpha(\zeta\delta z) = \alpha(\delta) = \exp[(p, h) + (q, \overline{h})], \qquad p, q, h \in H, \quad \delta = \exp h,$$

где

$$2(p, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = p_j, \quad 2(q, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = q_j, \quad j = 1, \ldots, r,$$

α_j — простые корни алгебры Ли L группы G относительно картановской подалгебры H алгебры L.

Пространство F представления есть линейная оболочка всех функций $\alpha(zg)$, $g \in G$, и операторы $T(g)$ задаются формулой

$$T(g)\, f(z) = \alpha(zg)\, f(z\overline{g}) \quad \text{при} \quad zg = k \cdot z\overline{g}, \quad z\overline{g} \in Z^+.$$

Пример. Пусть $G = SL(n, \mathbf{C})$. Тогда Z^-, Z^+ совпадают с группами, введенными в гл. VI, а D — группа диагональных матриц

$$\delta = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

удовлетворяющих условию $\lambda_1 \ldots \lambda_n = 1$. Алгебра H есть алгебра всех диагональных матриц

$$h = \begin{Vmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{Vmatrix}$$

со следом $h_1 + \ldots + h_n = 0$, а простые корни имеют вид

$$\alpha_1 = h_1 - h_2, \quad \alpha_2 = h_2 - h_3, \; \ldots, \alpha_{n-1} = h_{n-1} - h_n, \quad r = n - 1.$$

Простые вычисления показывают, что $p_{\alpha_k} = p_k - p_{k+1}$, $q_{\alpha_k} = q_k - q_{k+1}$ (см. (10.3.9) гл. X), поэтому для индуктивности характера относительно $SL(n, \mathbf{C})$ необходимо и достаточно, чтобы числа $p_1 - p_2$, $p_2 - p_3, \ldots, p_{n-1} - p_n$, $q_1 - q_2$, $q_2 - q_3, \ldots, q_{n-1} - q_n$ были целыми неотрицательными. Мы приходим к условию индуктивности для группы $SL(n, \mathbf{C})$, полученному ранее другим путем в главах VI и VII.

Другой вывод условия индуктивности характера, не использующий классические результаты о представлениях полупростых алгебр Ли, см. в книге Желобенко [1].

1.5. Описание пространства неприводимого конечномерного представления группы G**.** Рассмотрим, например, представление T_α группы G в реализации в функциях на группе Z^+. Как мы видели, пространство F_α представления есть линейная оболочка всех функций $\alpha(zg)$, $g \in G$. Однако такое описание пространства не является достаточно эффективным. Приведем еще следующее описание пространства F_α, принадлежащее Д. П. Желобенко [1]:

Теорема 6. *Пусть D_j, $\overline{D}_j$ — аналитический и антианалитический инфинитезимальные операторы левого сдвига на Z, отвечающие корневому вектору e_{α_j}, $j = 1, \ldots, r$, где α_j — все простые корни алгебры Ли L группы G. Тогда F_α состоит из всех решений системы уравнений*

$$D_j^{p_j+1} f(z) = 0, \quad \overline{D}_j^{\,q_j+1} f(z) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{1.5.1}$$

где

$$p_j = 2(p, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j), \quad q_j = 2(q, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j), \tag{1.5.2}$$

$$\alpha(\delta) = \exp[(h, p) + (\overline{h}, q)], \quad \delta = \exp h. \tag{1.5.3}$$

Доказательство см. в книге Д. П. Желобенко [1] в гл. XVI.

§ 2. Представления вещественных полупростых групп Ли

Пусть $\widetilde{G}$ — связная вещественная полупростая группа Ли. Предположим, что группа $\widetilde{G}$ является вещественной формой некоторой комплексной полупростой группы Ли G [1]. Воспользуемся теоремой 5 п. 1.4. Очевидно, что конечномерное неприводимое представление T группы G тогда и только тогда является аналитическим, когда все числа q_j, $j = 1, \ldots, r$, равны нулю. Применяя IV п. 8.2 гл. XI, получаем:

Теорема. *Каждое конечномерное неприводимое представление T связной полупростой вещественной группы Ли $\widetilde{G}$, являющейся вещественной формой комплексной полупростой группы Ли G,*

[1] Не всякая вещественная полупростая группа Ли является вещественной формой комплексной полупростой группы Ли; в частности, универсальная накрывающая группа группы $SL(2, \mathbf{R})$ не имеет комплексной оболочки. Подробнее см. Желобенко [1].

задается системой целых неотрицательных чисел (сигнатурой) p_j, $j = 1, \ldots, r$, *где* r — *ранг группы* G, *и каждая такая система задает неприводимое конечномерное представление группы* $\widetilde{G}$. *Представление* $\widetilde{T}$, *отвечающее данной сигнатуре* p_j, $j = 1, \ldots, r$, *определяется своей производящей функцией* $\alpha(\zeta\delta z) = \alpha(\delta) = \exp(p, h)$, $p, q, h \in H$, $\delta = \exp h$, *где* $2(p, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = p_j$, $j = 1, \ldots, r$ (α_j — *простые корни алгебры Ли* L *группы* G *относительно картановской подалгебры* H *алгебры Ли* L). *Постранство* F *представления* $\widetilde{T}$ *есть линейная оболочка всех функций вида* $\alpha(zg)$, $g \in G$, *и операторы представления* $\widetilde{T}$ *задаются формулой* $\widetilde{T}(\widetilde{g})\, f(z) = \alpha(z\widetilde{g})\, f(z\overline{\widetilde{g}})$, *где* $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$, $z\widetilde{g} = k \cdot z\overline{\widetilde{g}}$, $z\overline{\widetilde{g}} \in Z^+$.

Пример. Пусть $\widetilde{G}$ — группа $SU(n)$ или группа $SL(n, \mathbf{R})$. Тогда группа $\widetilde{G}$ является вещественной формой комплексной полупростой группы Ли $G = SL(n, \mathbf{C})$. Согласно только что доказанной теореме, всякое конечномерное неприводимое представление группы $\widetilde{G}$ является ограничением на группу $\widetilde{G}$ неприводимого аналитического представления группы G, т. е. представления с сигнатурой вида $(p_1, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0)$, где все числа $p_1 - p_2, \ldots, p_{n-1} - p_n$ являются целыми неотрицательными.

Список литературы

а). Монографии и учебники

Б е р н с а й д (Burnside W.)
[1] The Theory of Groups of Finite Order. — Cambridge, Cambridge Press, 1911.

Б у р б а к и (Bourbaki N.)
[1] Алгебра (части I, II, III). — М.: Наука, 1962, 1965, 1966.
[2] Группы Ли и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
[3] Общая топология. Основные структуры. — М.: Физматгиз, 1958.

В а н - д е р - В а р д е н (Waerden B. L., van der)
[1] Современная алгебра. Т. I, II. — М.–Л.: Гостехиздат, 1947.
[2] Методы теории групп в квантовой механике. — Харьков: ОНТИ, 1939.

В а р а д а р а д ж а н (Varadarajan V. S.)
[1] Lie groups, Lie algebras and their representations. — Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1974.

В е й л ь А. (Weil A.)
[1] Интегрирование в топологических группах и его применения. — М.: ИЛ, 1950.

В е й л ь Г. (Weyl H.)
[1] Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ИЛ, 1947.
[2] The theory of groups and quantum mechanics. — Lnd.: Dover Publ., 1931.

В и л е н к и н Н. Я.
[1] Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.

Г а н н и н г Р. и Р о с с и Х. (Gunning R. C., Rossi H.)
[1] Аналитические функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1969.

Г а н т м а х е р Ф. Р.
[1] Теория матриц. — М.: Наука, 1967; М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

Г е л ь ф а н д И. М., М и н л о с Р. А., Ш а п и р о З. Я.
[1] Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.

Г е л ь ф а н д И. М., Н а й м а р к М. А.
[1] Унитарные представления классических групп. — М.: Труды МИАН, 1950.

Д ж е к о б с о н Н. (Jacobson N.)
[1] Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

Ж е л о б е н к о Д. П.
[1] Компактные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.
[2] Лекции по теории групп Ли. — Дубна, 1965.
[3] Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли. — М.: Наука, 1974.

Заманский М. (Zamansky M.)
[1] Введение в современную алгебру и анализ. — М.: Наука, 1974.
Капланский (Kaplansky I.)
[1] Алгебры Ли и локальна компактные группы. — М.: Мир, 1974.
Кириллов А. А.
[1] Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1972.
Коккеде Я.
[1] Теория кварков. — М.: Мир, 1971.
КолмогоровА. Н., Фомин С. В.
[1] Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
Курош А. Г.
[1] Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1965.
[2] Теория групп. — М.: Наука, 1967.
Кэртис Ч. и Райнер И. (Curtis Ch., Reiner I.)
[1] Теория представлений конечных группы и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1968.
Ли и Энгель (Lie S., Engel F.)
[1] Theorie der Transformationsgruppen. — Leipzig, Bd. 1, 2, 3, 1893.
Литлвуд (Littlewood D.)
[1] The Theory of Group Characters. — Oxford, 1950.
Любарский Т. Я.
[1] Теория групп и ее применение в физике. — М.: Физматгиз, 1957.
Маркушевич А. И.
[1] Теория аналитических функций. — М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
Монтгомери, Циппин (Montgomery D., Zippin L.)
[1] Topological Transformation Groups. — N. Y.: Interscience Publ., 1955.
Мурнаган (Murnaghan F.)
[1] Теория представлений групп. — М.: ИЛ, 1950.
Наймарк М. А.
[1] Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968; М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
[2] Линейные представления группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
Понтрягин Л. С.
[1] Непрерывные группы. — М.: Наука, 1974.
Семинар «Софус Ли».
[1] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. — М.: ИЛ, 1962.
Серр Ж.-П. (Serre J.-P.)
[1] Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.
[2] Линейные представления конечных групп. — М.: Мир, 1970.
[3] Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.
Фихтенгольц Г. М.
[1] Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II, III. — М.: Наука, 1970, 1971; М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
Фробениус Г. (Frobenius G.)
[1] Теория характеров и представлений групп. — Харьков: ОНТИ, 1937.
Хамермеш М. (Hamermesh M.)
[1] Теория групп и ее применение к физическим проблемам. — М.: Мир, 1966.

Хелгасон С. (Helgason S.)
[1] Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: ИЛ, 1964.
Холл М. (Hall M.)
[1] Теория групп. — М.: ИЛ, 1962.
Шевалле К. (Chevalley C.)
[1] Теория групп Ли. Т. 1, 2, 3. — М.: ИЛ, 1948, 1958.
Шилов Г. Е.
[1] Математический анализ. Спец. курс. — М.: Физматгиз, 1961.
Эйринг Х., Уолтер Дж., Кимбалл Г. (Eyring H., Walter J., Kimball G.)
[1] Квантовая химия. — М.: Гостехиздат, 1948.

б). Журнальные статьи

Адо И. Д.
[1*] О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок. — Изв. физ.-матем. о-ва, Казань **7** (1934/35), 3–43.
Березин Ф. А.
[1*] Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли. — Функциональный анализ и его приложения **1**, № 2 (1967), 1–14.
Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.
[1*] Структура представлений со старшим весом. — Функциональный анализ и его приложения **5**, № 1 (1971), 1–9.
Вейль Г. (Weyl H.)
[1*] Theorie der Darstellungen kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. — Math. Z. **23** (1925), 271–304; **24** (1926), 328–395, 789–791.
Гельфанд И. М.
[1*] Центр инфинитезимального группового кольца. — Матем. сб. **26** (1950), 103–112.
[2*] Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве. — ДАН СССР **25**, (1939), 711–716.
Гельфанд И. М., Граев М. И.
[1*] Конечномерные неприводимые представления унитарной и полной линейной группы и связанные с ними специальные функции. — ИАН СССР, сер. матем., **29** № 6 (1965), 1329–1365.
Гельфанд С. И.
[1*] Представления полной линейной группы над конечным полем. — Матем. сб. **83**, № 1 (1970), 15–41.
Годман (Godement R.)
[1*] A theory of spherical functions. — Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 496–556.
Грин (Green J. A.)
[1*] The characters of the finite general linear groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 237–289.
Дынкин Е. Б.
[1*] Структура полупростых алгебр Ли. — УМН **2**, № 4 (1947), 59–127.
[2*] О представлении ряда $\log(e^x e^y)$ для некоммутирующих x, y через коммутаторы. — Матем. сб. **25** (1949), 155–162.

Дынкин Е. Б., Онищик А. Л.
[1*] Компактные группы Ли в целом. — УМН **10**, № 4 (1955), 3–74.

Желобенко Д. П.
[1*] Описание всех неприводимых (конечномерных) представлений произвольной связной группы Ли. — ДАН СССР **139**, № 6 (1961), 1291–1294.
[2*] Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений. — УМН **17**, № 1 (1962), 27–120.
[3*] К теории линейных представлений комплексных и вещественных групп Ли. — Тр. Моск. матем. о-ва **12** (1963), 53–98.

Ивасава (Iwasawa K.)
[1*] On some types of topological groups. — Ann. Math. **50** (1949), 507–558.

Картан (Cartan E.)
[1*] Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. — Thèse, Paris, Nony, 1894.
[2*] Les groupes réels simples et continus. — Ann. Sci. Ècole Norm., Sup. **31** (1914), 263–355.
[3*] Les tenseurs irreductibles et les groupes simples et semisimples. — Bull. Sci. Math. **49** (1925), 130–152.

Картье (Cartier P.)
[1*] О формуле характера Г. Вейля. — «Математика» (сб. переводов) **6**, № 5 (1962), 139–141.

Климык А. У.
[1*] О кратностях весов неприводимых представлений полупростой комплексной группы Ли. — ДАН СССР **177**, № 5 (1967), 1001–1004.

Костант (Kostant B.)
[1*] A formula for the multiplicity of a weight. — Trans. Amer. Math. Soc. **93**, № 1 (1959), 53–73.

Крейн М. Г.
[1*] Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры. — ДАН СССР **69**, № 6 (1969), 725–729.

Мальцев А. И.
[1*] О разложении алгебры Ли в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры. — ДАН СССР **36**, № 2 (1942), 46–50.

Макки Г. (Mackey G. W.)
[1*] Бесконечномерные представления групп. — Математика (сб. переводов) **6**, № 6 (1962), 57–103.

Молчанов В. Ф.
[1*] О матричных элементах неприводимых представлений симметрической группы. — Вестник Московского Гос. ун-та, сер. мат. мех. **1** (1966), 52–57.

фон Нейман (von Neumann, J.)
[1*] Zum Haarischen Mass in topologischen Gruppen. — Compos. Math. **1** № 1 (1934), 106–114.

Петер Ф., Вейль Г. (Pter F., Weyl H.)
[1*] Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. — Math. Ann. **97** (1927), 737–755.

Рашевский П. К.
[1*] О некоторых основных теоремах теории групп Ли. — УМН **8**, № 1 (1953).

Сирота А. И., Солодовников А. С.
[1*] Некомпактные полупростые группы Ли. — УМН **18**, № 1 (1963), 87–144.
Таннака (Tannaka T.)
[1*] Über Dualitätsatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen. — Tôhoku Math. **53** (1938), 1–12.
Хаар (Haar A.)
[1*] Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. — Ann. Math. **34** (1933), 147–169.
Хариш-Чандра (Harish-Chandra)
[1*] On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra. — Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 28–96.
Шварц Л. (Schwarz L.)
[1*] Sur une proprieté de synthése spectrale dans les groupes non compacts. — C. R. Acad. Sci. **227** (1948), 424–426.
Шур (Schur I.)
[1*] Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linear Substitutionen. — Sitz. Pr. Akad. Wiss. (1906), 164–184.
Юнг (Young A.)
[1*] On the quantitative substitutional analysis. — Proc. Lond. Math. Soc. **33** (1900), 97; **34** (1902), 361.

Предметный указатель

Научное издание

НАЙМАРК Марк Аронович

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

Редактор *А.И. Штерн*
Выпускающий редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *Д.А. Воробьев*
Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 26.11.2010. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 36,0. Уч.-изд. л. 39,6. Тираж 400 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6