В.Г.Крупин, А.Л.Павлов, Л.Г.Попов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Сборник задач с решениями

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
———————
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ "МЭИ"

В.Г. КРУПИН, А.Л. ПАВЛОВ, Л.Г. ПОПОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ

Учебное пособие по курсу "Высшая математика"
для студентов МЭИ, обучающихся по всем направлениям
подготовки

Москва Издательский дом МЭИ 2012

УДК 51
К 845

Утверждено учебным управлением МЭИ в качестве учебного пособия для студентов

Подготовлено на кафедре высшей математики

Рецензенты:
чл.-корр. РАН, докт. физ.-мат. наук, профессор Е.М. Чирка,
докт. физ.-мат. наук, профессор В.Ф. Сафонов

Крупин В.Г.

К 845 Высшая математика. Теория функций комплекного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. — М.: Издательский дом МЭИ, 2012. — 304 с.

ISBN 978-5-383-00732-7

Пособие содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения (по 30 вариантов каждой) из разделов высшей математики "Теория функций комплексного переменного", "Операционное исчисление".

Предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по техническим специальностям, а также аспирантов и преподавателей.

ISBN 978-5-383-00732-7

Посвящается нашим коллегам:

Краснову Михаилу Леонтьевичу,
Киселеву Александру Ивановичу,
Макаренко Григорию Ивановичу.

Мы благодарны им за тот бесценный опыт преподавания математики инженерам, которым они делились с нами при жизни и которым мы до сих пор пользуемся, работая с их замечательными учебными пособиями.

Docendo discimus (лат.). Уча, учимся.
Сенека (ок. 4 до н.э. – 65 н.э.). "Послания".

ПРЕДИСЛОВИЕ

Овладение курсом высшей математики невозможно без самостоятельного решения студентами достаточно большого количества различных по сложности задач.

Система индивидуальных заданий (типовые расчеты) давно хорошо зарекомендовала себя как форма активизации учебного процесса.

Пособие содержит краткие теоретические сведения, подробно разобранные типовые примеры и задачи для самостоятельного решения (по 30 вариантов каждой) из разделов высшей математики "Теория функций комплексного переменного", "Операционное исчисление". При этом рассмотрены как задачи, входящие в стандартный курс, так и более сложные вопросы, изучаемые, как правило, на спецкурсах. К последним относятся конформные отображения, применение аппарата функций комплексного переменного к решению уравнений математической физики, принцип аргумента, комплексный потенциал.

Задачи различны по сложности, и особо сложные (для сильных студентов) отмечены звездочкой или двумя звездочками.

Бóльшая часть задач, вошедших в сборник, составлены заново, хотя, безусловно, частично использованы известные задачи из хорошо зарекомендовавших себя учебных пособий.

Авторы выражают огромную благодарность рецензентам: чл.-корр. РАН, профессору Е.М. Чирке и профессору В.Ф. Сафонову за тщательное редактирование текста книги и полезные замечания.

Авторы благодарны В.И. Ивановой за большую работу при оформлении рукописи.

Основные обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное линейное арифметическое пространство

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел (поле комплексных чисел)

∞ — бесконечно удаленная комплексная точка

$\overline{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{z = \infty\}$

$A = \{z : \ ...\}$ — множество A состоит из членов z, обладающих свойством, указанном после двоеточия

$a \in A, \ \ a \notin A$ — элемент a принадлежит множеству A, элемент a не принадлежит множеству A

$A \Rightarrow B$ — из высказывания A следует высказывание B (A — достаточное условие B, а B — необходимое условие A)

$A \Leftrightarrow B$ — высказывания A и B равносильны

$\exists\, x : \, ...$ — существует такое x, что ...

$\exists!\, x : \, ...$ — существует единственное x, что ...

$\nexists\, x : \, ...$ — не существует такого x, что ...

$\forall\, x$ — для любого x

$k = \overline{1, n}$ — число k принимает последовательно все значения из множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел от 1 до n включительно

$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ — точка пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами x_i, $i = \overline{1, n}$

$|\overline{x}|$ — длина (норма) в $\mathbb{R}^n$, $|\overline{x}|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

$u_x, \ u_y, \ u_{xy}$ — частные производные функции $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \ \dfrac{\partial u}{\partial y}, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$\operatorname{grad} u(\overline{x})$ — вектор градиента скалярной функции $u(\bar{x})$ векторного аргумента $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$\operatorname{div} \overline{a}(\overline{x})$ — дивергенция векторного поля $\overline{a}$

$\operatorname{rot} \overline{a}(\overline{x})$ — ротор векторного поля $\overline{a}$

D — область n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. связное открытое множество точек $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$

∂D — граница области D

$\overline{D} = D \cup \partial D$ — замыкание области D

$C(D)$ — нормированное пространство функций, непрерывных в области D

$C^k(D)$ — нормированное пространство функций, непрерывно дифференцируемых k раз в области D

$O(D)$ — пространство функций, аналитических в области D

$[z_1, z_2]$ — отрезок прямой с концами в точках z_1 и z_2

(z_1, z_2) — отрезок прямой без точек z_1 и z_2

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модель комплексного числа $z = x + iy$

$\overline{z} = x - iy$ — комплексно сопряженное числу $z = x + iy$

$\operatorname{Re} z = x$ — действительная часть числа $z = x + iy$

$\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть числа $z = x + iy$

$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех значений аргумента комплексного числа $z \neq 0$

$\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа $z \neq 0$ $(-\pi < \arg z \leq \pi)$

$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$ — символ Кронекера

$\mathbf{E} = ||\delta_{nk}||$ — единичная матрица

$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$ — вычет функции в точке z_0

$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$ — интеграл в смысле главного значения

$\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2} dz$ — интеграл вероятности (функция ошибок), $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$

$\operatorname{erfc}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1 - \operatorname{erf}(x)$ — дополнительный интеграл вероятности

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz = \dfrac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$ — интеграл вероятности Гаусса (функция нормального распределения)

$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда

Используемые сокращения

ДУ — дифференциальное уравнение

ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение

ОЛДУ — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. Действия над комплексными числами

Рассмотрим множество упорядоченных пар $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ действительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$.

Определение. Множество элементов $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, наделенное операциями сложения, умножения на действительное число $\lambda \in \mathbb{R}$ и умножения элементов по правилам

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{1.1.1}$$

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y), \tag{1.1.2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.1.3}$$

называется *полем комплексных чисел* $\mathbb{C}$, а сами элементы $z = (x, y)$ называются комплексными числами.

Замечание. Операции сложения и умножения удовлетворяют всем аксиомам поля: коммутативны, ассоциативны, связаны соотношением дистрибутивности, для них существуют обратные действия вычитания и деления (если $z \neq (0, 0)$). Роль нулевого элемента выполняет комплексное число $(0, 0) = 0$, роль единичного $(1, 0) = 1$.

Определение. Комплексное число $(0, 1) = i$ называется *мнимой единицей*. Согласно (1.1.3), имеем

$$i \cdot i = i^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0).$$

Определение. Плоскость $\mathbb{R}^2$ с декартовой прямоугольной системой координат x и y, точки которой отождествлены с элементами поля $\mathbb{C}$, называется *комплексной плоскостью.* Комплексные числа $(x, 0) = x(1, 0)$, лежащие на оси абсцисс, отождествляются с действительными числами $x \in \mathbb{R}$, а сама ось абсцисс называется *действительной осью.* Комплексные числа $(0, y) = y(0, 1) = iy$ располагаются на оси ординат, называемой *мнимой осью*, а сами числа iy называются *чисто мнимыми.*

Комплексное число $z = (x, y)$ может быть представлено в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Определение. *Алгебраической формой записи* комплексного числа называется представление

$$z = (x, y) = x + iy$$

с правилами действий (1.1.1)—(1.1.3).

Замечание. Алгебраическая форма записи позволяет все действия с комплексными числами выполнять как с многочленами с учетом свойства мнимой единицы $i^2 = -1$.

Определение. *Векторной формой записи* комплексного числа называется представление

$$z = (x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i,$$

где естественный базис в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ задается векторами $1 = (1, 0)$ и $i = (0, 1)$ (рис. 1.1.1).

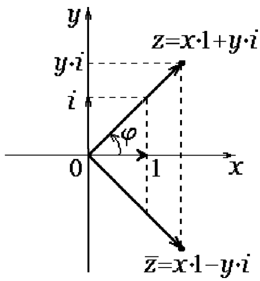


Рис. 1.1.1

Определение. Числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. *Модулем*, или *абсолютной величиной* z называется $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение. Комплексные числа $z = (x, y) = x + iy$ и $\overline{z} = (x, -y) = x - iy$ называются *комплексно сопряженными.* На комплексной плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ они располагаются симметрично действительной оси Ox (рис. 1.1.1).

Имеют место следующие соотношения (равенства):

$$z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z = 2x, \quad z - \overline{z} = i2\operatorname{Im} z = i2y, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2. \quad (1.1.4)$$

В поле комплексных чисел можно ввести евклидову метрику, с помощью которой определить расстояние между двумя комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Определение. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0,0)$. Полярный угол φ между раудис-вектором $z = (x, y)$ и ортом $1 = (1, 0)$ действительной оси (см. рис. 1.1.1) называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z = \varphi$. Единственное значение аргумента $\varphi \in (-\pi, \pi]$ называется *главным значением аргумента*, обозначается $\arg z$ и вычисляется по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Таким образом, аргумент комплексного числа $z \neq (0,0)$ определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая связь между декартовыми и полярными координатами точки $z = (x, y)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (см. рис. 1.1.1), получим *тригонометрическую (полярную) форму* записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi = \operatorname{Arg} z, \quad r = |z|.$$

Тригонометрическая форма особенно удобна при выполнении умножения и деления:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right],$$

где $z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, $\varphi_j = \operatorname{Arg} z_j$, $r_j = |z_j|$, $j = 1, 2$.

Возведение в целую степень и извлечение корня из комплексного числа выполняются по формулам Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1.6}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}, \quad n \in N. \quad (1.1.7)$$

Значения корня делят окружность с центром в начале координат радиусом $\sqrt[n]{r}$ на n дуг одинаковой длины.

Пример 1.1.1. Записать комплексные числа

1) $\overline{z}_1(z_1 + 2z_2)$; 2) $\dfrac{z_1 + 2\overline{z}_1}{z_2}$; 3) $\dfrac{z_2 - 2\overline{z}_2}{z_1}$

в алгебраической форме, где $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - i$.

Решение. 1) Раскроем скобки, воспользуемся равенствами (1.1.4) и свойством мнимой единицы $i^2 = -1$, получим

$$\overline{z}_1(z_1 + 2z_2) = \overline{z}_1 z_1 + 2\overline{z}_1 z_2 = |z_1|^2 + 2\overline{z}_1 z_2 = 2^2 + 3^2 + 2(2 - 3i)(3 - i) =$$

$$= 13 + 2(6 - 2i - 9i + 3i^2) = 13 + 2(3 - 11i) = 19 - 22i.$$

2) Домножим числитель и знаменатель на $\overline{z}_2$, воспользуемся равенствами (1.1.4) и свойством $i^2 = -1$, получим

$$\frac{z_1 + 2\overline{z}_1}{z_2} = \frac{(z_1 + \overline{z}_1 + \overline{z}_1)\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{(2\operatorname{Re} z_1 + \overline{z}_1)\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(4 + 2 - 3i)(3 + i)}{3^2 + (-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{10}(18 + 6i - 9i - 3i^2) = \frac{1}{10}(21 - 3i) = \frac{3}{10}(7 - i).$$

3) Домножим числитель и знаменатель на $\overline{z}_1$, воспользуемся равенствами (1.1.4) и свойством $i^2 = -1$, получим

$$\frac{z_2 - 2\overline{z}_2}{z_1} = \frac{(z_2 - \overline{z}_2 - \overline{z}_2)\overline{z}_1}{z_1\overline{z}_1} = \frac{(2i\operatorname{Im} z_2 - \overline{z}_2)\overline{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{(-2i - 3 - i)(2 - 3i)}{2^2 + 3^2} =$$

$$= -\frac{3}{13}(1 + i)(2 - 3i) = -\frac{3}{13}(2 - 3i + 2i - 3i^2) = -\frac{3}{13}(5 - i).$$

Ответ. 1) $19 - 22i$; 2) $\dfrac{3}{10}(7 - i)$; 3) $-\dfrac{3}{13}(5 - i)$.

Задача 1.1.1. Записать комплексные числа

1) $\overline{z}_1(z_1 + 2z_2)$; 2) $\dfrac{z_1 + 2\overline{z}_1}{z_2}$; 3) $\dfrac{z_2 - 2\overline{z}_2}{z_1}$

в алгебраической форме.

1. $z_1 = 2+i, \quad z_2 = 1-4i.$
2. $z_1 = 3-i, \quad z_2 = 2+3i.$
3. $z_1 = 4+3i, \quad z_2 = 2-i.$
4. $z_1 = 1+2i, \quad z_2 = 5-2i.$
5. $z_1 = 2-3i, \quad z_2 = 4+5i.$
6. $z_1 = -2+3i, \quad z_2 = 3+i.$
7. $z_1 = 5+2i, \quad z_2 = 3-2i.$
8. $z_1 = 3-4i, \quad z_2 = 1+2i.$
9. $z_1 = 3+i, \quad z_2 = 2-3i.$
10. $z_1 = 4-i, \quad z_2 = 3+2i.$
11. $z_1 = 2-3i, \quad z_2 = 2+i.$
12. $z_1 = 4+3i, \quad z_2 = 5-4i.$
13. $z_1 = 3-2i, \quad z_2 = 2+i.$
14. $z_1 = 5-3i, \quad z_2 = 3+4i.$
15. $z_1 = 7+2i, \quad z_2 = 1-3i.$
16. $z_1 = 1+4i, \quad z_2 = 2-3i.$
17. $z_1 = 2-3i, \quad z_2 = 3+i.$
18. $z_1 = 2+i, \quad z_2 = 4-3i.$
19. $z_1 = 5+2i, \quad z_2 = 1-2i.$
20. $z_1 = 4-5i, \quad z_2 = 2+3i.$
21. $z_1 = 3-i, \quad z_2 = 2-3i.$
22. $z_1 = 3+2i, \quad z_2 = 5-2i.$
23. $z_1 = 1-2i, \quad z_2 = 3+4i.$
24. $z_1 = -1+i, \quad z_2 = 2-i.$
25. $z_1 = 2-3i, \quad z_2 = 4+2i.$
26. $z_1 = 2-i, \quad z_2 = 3+2i.$
27. $z_1 = 5+4i, \quad z_2 = 4-3i.$
28. $z_1 = 2+i, \quad z_2 = 3-2i.$
29. $z_1 = 3-4i, \quad z_2 = 5+3i.$
30. $z_1 = 1+3i, \quad z_2 = 7-2i.$

Пример 1.1.2. Решить уравнения:

1) $(3+2i)z + (2+i)\overline{z} = 2+3i;$ 2) $z^2 = 5-4i;$

3) $\dfrac{2+i}{z+1-i} = 3-2i.$

Ответ представить в алгебраической форме.

Решение. 1) Пусть $z = x+iy$, тогда $\overline{z} = x-iy$ и уравнение примет вид
$$(3+2i)(x+iy) + (2+i)(x-iy) = 2+3i.$$
Раскроем скобки и выделим действительную и мнимую части в левой части уравнения:
$$3x-2y+i(2x+3y)+2x+y+i(x-2y) = 2+3i \iff$$
$$\iff 5x-y+i(3x+y) = 2+3i.$$
Приравнивая действительную и мнимые части, получим систему
$$\begin{cases} 5x-y=2, \\ 3x+y=3, \end{cases}$$
из которой находим $x = 5/8$, $y = 9/8$. Решением исходного уравнения является комплексное число $z = (5+9i)/8$.

Можно предложить другой способ решения. Возьмем комплексное сопряжение от левой и правой частей исходного уравнения и рассмотрим систему

$$\begin{cases}(3+2i)z+(2+i)\overline{z}=2+3i,\\(3-2i)\overline{z}+(2-i)z=2-3i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3+2i)z+(2+i)\overline{z}=2+3i,\\(2-i)z+(3-2i)\overline{z}=2-3i.\end{cases}$$

По правилу Крамера

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2+3i & 2+i\\ 2-3i & 3-2i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3+2i & 2+i\\ 2-i & 3-2i\end{vmatrix}}=\frac{(2+3i)(3-2i)-(2+i)(2-3i)}{(3+2i)(3-2i)-(2+i)(2-i)}=$$

$$=\frac{5+9i}{9+4-(4+1)}=\frac{5}{8}+\frac{9}{8}i.$$

2) Пусть $z=x+iy$, тогда уравнение примет вид

$$(x+iy)^2=5-4i \;\Leftrightarrow\; x^2-y^2+2ixy=5-4i.$$

Приравнивая действительную и мнимые части, получим систему

$$\begin{cases}x^2-y^2=5,\\2xy=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2/x,\\x^4-5x^2-4=0,\end{cases}$$

из которой находим

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{41}+5}{2}},\qquad y=\mp\sqrt{\frac{\sqrt{41}-5}{2}}.$$

Решением исходного уравнения являются комплексные числа

$$z_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{\sqrt{41}+5}\mp i\sqrt{\sqrt{41}-5}}{\sqrt{2}}.$$

3) Преобразуем исходное уравнение, проводя эквивалентные преобразования:

$$\frac{2+i}{z+1-i}=3-2i \;\Leftrightarrow\; z+1-i=\frac{2+i}{3-2i} \;\Leftrightarrow\; z+1-i=\frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; z+1-i=\frac{4+7i}{13} \;\Leftrightarrow\; z=\frac{4}{13}-1+i\left(\frac{7}{13}+1\right) \;\Leftrightarrow\; z=\frac{-9+20i}{13}.$$

Ответ. 1) $z = \dfrac{5+9i}{8}$; 2) $z_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{\sqrt{41}+5} \mp i\sqrt{\sqrt{41}-5}}{\sqrt{2}}$;

3) $z = \dfrac{-9+20i}{13}$.

Задача 1.1.2. Решить уравнение. Ответ представить в алгебраической форме.

1. $(2+3i)z + (3-i)\overline{z} = 1-2i$.
2. $(3-4i)z + (2-i)^3 = 5+i$.
3. $\dfrac{1+i}{z} + \dfrac{2-i}{3+i} = 2+i$.
4. $\dfrac{3+2i}{z} + \dfrac{1-i}{2+i} = 3+2i$.
5. $(4+3i)\overline{z} + (2-i)z = 5+2i$.
6. $(\overline{z}+1+2i)(3-i) = (2+i)z$.
7. $(1+2i)^2 z = 3+i$.
8. $(5-i)z + (2+i)\overline{z} = i^5$.
9. $\dfrac{2+3i}{z} + \dfrac{1-i}{1+i} = 3+5i$.
10. $z^2 = 5+4i$.
11. $\dfrac{z}{1+2i} + \dfrac{\overline{z}}{2-i} = 3+i$.
12. $\dfrac{4-i}{z+2i} = (3+i)^2$.
13. $(3+i)z + (1-2i)\overline{z} = 2+5i$.
14. $\dfrac{1+2i}{z} + \dfrac{i}{3+4i} = 1$.
15. $(4+2i)z + 5 - 3i = (2+i)^2$.
16. $z(2+i) + \overline{z}(1+2i) = 5+6i$.
17. $\dfrac{3+i}{z} = \dfrac{1+2i}{2+3i}$.
18. $z^2 = 3-4i$.
19. $(5-i)z + (-2+3i)\overline{z} = 4+2i$.
20. $(1-2i)^2 z = 4+3i$.
21. $\dfrac{2+i}{z-3+2i} = (1+i)^3$.
22. $\dfrac{3-2i}{z+2+i} = 2-i$.
23. $(1+2i)z + (3+i)\overline{z} = 4-i$.
24. $(2+i)z + 3 - i = (1-2i)^2$.
25. $(1+i)z = (4+3i)(\overline{z}-2i)$.
26. $(2-i)^2 z = (1+i)^3$.
27. $z^2 = 3+2i$.
28. $\dfrac{1+i}{z} + \dfrac{1}{4+3i} = i^3$.
29. $(2-i)z + (3+2i)\overline{z} = 4+3i$.
30. $(3+2i)z = (2-i)^3$.

Пример 1.1.3. Представить комплексное число

$$\left(-\sin\frac{2\pi}{5} + i\cos\frac{2\pi}{5}\right)^9$$

в тригонометрической форме.

Решение. Обозначим $z = -\sin\frac{2\pi}{5} + i\cos\frac{2\pi}{5}$, запишем z в тригонометрической форме, затем воспользуемся формулой Муавра (1.1.6). Сначала найдем модуль комплексного числа z:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sin^2\frac{2\pi}{5} + \cos^2\frac{2\pi}{5}} = 1.$$

Поскольку $x = \operatorname{Re} z = -\sin\frac{2\pi}{5} < 0$, $\;y = \operatorname{Im} z = \cos\frac{2\pi}{5} > 0$, то главное значение аргумента по формуле (1.1.5) будет равно

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}\right) =$$

$$= \pi - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\right) = \pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}.$$

Итак, $z = 1\left(\cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10}\right)$. Тогда по формуле Муавра (1.1.6)

$$z^9 = 1^9\left(\cos\left(9\cdot\frac{9\pi}{10}\right) + i\sin\left(9\cdot\frac{9\pi}{10}\right)\right) = \cos\frac{81\pi}{10} + i\sin\frac{81\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}.$$

Ответ. $\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$.

Задача 1.1.3. Представить комплексное число в тригонометрической форме.

1. $\left(\sin\frac{3\pi}{5} + i\cos\frac{3\pi}{5}\right)^8$.
2. $\left(\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\right)^7$.
3. $\left(-\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^5$.
4. $\left(\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{10}$.
5. $\left(\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\right)^8$.
6. $\left(\sin\frac{4\pi}{7} + i\cos\frac{4\pi}{7}\right)^9$.
7. $\left(\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}\right)^7$.
8. $\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)^6$.
9. $\left(\sin\frac{2\pi}{7} - i\cos\frac{2\pi}{7}\right)^8$.
10. $\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)\right)^5$.
11. $\left(\sin\frac{5\pi}{8} + i\cos\frac{5\pi}{8}\right)^6$.
12. $\left(\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}\right)^{12}$.

13. $\left(-\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^9$.

14. $\left(\sin\dfrac{2\pi}{5}+i\cos\dfrac{2\pi}{5}\right)^9$.

15. $\left(\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-i)\right)^7$.

16. $\left(-\sin\dfrac{\pi}{8}+i\cos\dfrac{\pi}{8}\right)^8$.

17. $\left(-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)^{10}$.

18. $\left(\sin\dfrac{7\pi}{8}+i\cos\dfrac{7\pi}{8}\right)^5$.

19. $\left(\sin\dfrac{\pi}{7}-i\cos\dfrac{\pi}{7}\right)^8$.

20. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^7$.

21. $\left(-\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)^9$.

22. $\left(-\sin\dfrac{5\pi}{7}+i\cos\dfrac{5\pi}{7}\right)^{10}$.

23. $\left(\sin\dfrac{4\pi}{7}-i\cos\dfrac{4\pi}{7}\right)^{11}$.

24. $\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}-i\cos\dfrac{2\pi}{7}\right)^{12}$.

25. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^6$.

26. $\left(-\sin\dfrac{5\pi}{8}+i\cos\dfrac{5\pi}{8}\right)^7$.

27. $\left(\sin\dfrac{3\pi}{8}+i\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)^7$.

28. $\left(\sin\dfrac{2\pi}{5}-i\cos\dfrac{2\pi}{5}\right)^9$.

29. $\left(-\sin\dfrac{\pi}{7}+i\cos\dfrac{\pi}{7}\right)^9$.

30. $\left(-\sin\dfrac{3\pi}{5}+i\cos\dfrac{3\pi}{5}\right)^{11}$.

Пример 1.1.4. Решить уравнение

$$z^4-4z^3+6z^2-4z+2+i\sqrt{3}=0.$$

Решение. Заметим, что исходное уравнение можно записать в виде $(z-1)^4+1+i\sqrt{3}=0$, откуда $z=1+\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$. Корень 4-й степени из комплексного числа $w=-1-i\sqrt{3}$ имеет четыре различных решения. По формуле Муавра (1.1.7) находим

$$z=1+\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}=1+\sqrt[4]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{4}\right),$$

где $\varphi=\arg w$ и $k=0,1,2,3$.

Найдем модуль комплексного числа $w=-1-i\sqrt{3}$ и его главное значение аргумента $\arg w$ по формуле (1.1.5):

$$|w|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2,\qquad \varphi=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)=-\frac{2\pi}{3}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3$ получим следующие четыре решения исходного уравнения:

$$z_0 = 1 + \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 1 + \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right),$$

$$z_1 = 1 + \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$z_2 = 1 + \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right),$$

$$z_3 = 1 + \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ. $1 + \sqrt[4]{2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \mp i\frac{1}{2}\right)$, $1 + \sqrt[4]{2}\left(\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задача 1.1.4. Решить уравнение.

1. $2z^4 + 1 = i\sqrt{3}$.
2. $z^3 - 1 = 0$.
3. $z^4 + 1 = 0$.
4. $z^4 - 256 = 0$.
5. $27z^3 - i = 0$.
6. $z^5 + 32 = 0$.
7. $z^4 + 128 = -i128\sqrt{3}$.
8. $256z^4 = 1$.
9. $8z^3 - i = 0$.
10. $z^4 = 1$.
11. $2z^4 + 1 = -i\sqrt{3}$.
12. $z^3 = -1$.
13. $z^3 + i = 0$.
14. $z^4 + 16 = 0$.
15. $32z^4 - 1 = i\sqrt{3}$.
16. $z^3 = 8$.
17. $z^3 - 8i = 0$.
18. $z^4 - 16 = 0$.
19. $32z^4 + 1 = -i\sqrt{3}$.
20. $z^3 + 8 = 0$.
21. $z^3 - 8i = 0$.
22. $32z^4 - i\sqrt{3} = 1$.
23. $2z^4 + i\sqrt{3} = -1$.
24. $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$.
25. $z^3 + 1 = i$.
26. $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.
27. $z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0$.
28. $8z^3 = 1$.
29. $16z^4 = 1$.
30. $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 17 = 0$.

1.2. Задание множества точек на комплексной плоскости

Определение. *Кривой* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется *непрерывное отображение* $\gamma: \ [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ отрезка действительной оси $[\alpha, \beta]$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Кривая называется *жордановой*, если γ осуществляет взаимно-однозначное отображение. Кривая называется *замкнутой жордановой*, если $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ и γ осуществляет взаимно-однозначное отображение $\gamma: \ [\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$.

Определение. Пусть параметр $t \in [\alpha, \beta]$ и γ задает отображение $\gamma(t): \ [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, для которого существует производная $\gamma'(t)$ для $\forall t \in [\alpha, \beta]$ (в концевых точках α, β существуют производные справа и слева). Кривая γ называется *гладкой*, если производная $\gamma'(t)$ непрерывна по t и $\gamma'(t) \neq 0$ для $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Кривая называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить точками на конечное число гладких кусков.

Определение. Точка $z_0 \in M \subset \mathbb{C}$ называется *внутренней точкой множества* M, если существует окрестность этой точки, целиком принадлежащая множеству M. Множество M называется *открытым*, если каждая ее точка является внутренней точкой M. Точка z_0 называется *граничной* точкой множества $M \subset \mathbb{C}$, если в любой ее окрестности есть точки, принадлежащие M и не принадлежащие ему. Множество $\overline{M}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Определение. *Областью* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называют *открытое* и *линейно связное* множество $D \subset \mathbb{C}$. *Линейная связность* D означает, что любые две точки можно соединить кривой, лежащей в D.

Определение. Область D называется *односвязной*, если для любого замкнутого жорданового контура в D его внутренняя часть также принадлежит данной области.

Определение. Ограниченная область D называется *областью с простой границей*, если ее граница ∂D представляет собой объединение конечного числа непересекающихся кусочно-гладких замкнутых жордановых кривых $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n$. Ориентация ∂D всегда выбирается так, чтобы область оставалась слева при обходе вдоль ограничивающих ее замкнутых контуров, т.е. внешняя граница γ_0 области D ориентирована против часовой стрелки, а внутренние компоненты $\gamma_1, ..., \gamma_n$ — по часовой.

Простейшие множества точек на комплексной плоскости:

$\mathrm{Re}\,(z-z_0) = a$ — прямая, параллельная мнимой оси Oy и проходящая через точку $(a+x_0, 0)$, где $z_0 = x_0 + iy_0$;

$\mathrm{Im}\,(z-z_0) = b$ — прямая, параллельная действительной оси Ox и проходящая через точку $(0, b+y_0)$, где $z_0 = x_0 + iy_0$;

$|z-z_0| = R,\ \ (R > 0)$ — окружность с центром в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ радиуса R;

$\arg(z-z_0) = \varphi$ — луч с началом в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, идущий под углом φ к положительному направлению действительной оси Ox $(-\pi < \varphi \leq \pi)$;

$|z-z_1| = |z-z_2|$ — геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных точек z_1 и z_2, т.е. прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2 и перпендикулярная ему;

$\mathrm{Re}\,(\overline{a}(z-z_0)) = 0$ — уравнение прямой, проходящей через точку z_0, перпендекулярной вектору $a = (A, B) = A + iB$;

$\mathrm{Im}\,(\overline{a}(z-z_0)) = 0$ — уравнение прямой, проходящей через точку z_0, перпендекулярной вектору $a = (A, B) = A + iB$;

$|z-z_1| + |z-z_2| = 2a$ — геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух заданных точек z_1 и z_2 есть величина постоянная $2a > 0$, т.е. эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2. В частности, при $z_1 = -c,\ \ z_2 = c > 0$ уравнение эллипса примет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $b = \sqrt{a^2 - c^2}\ \ (a > c)$;

$||z-z_1| - |z-z_2|| = 2a$ — геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух заданных точек z_1 и z_2 есть величина постоянная $2a > 0$, т.е. гипербола с фокусами в точках z_1 и z_2. В частности, при $z_1 = -c,\ \ z_2 = c > 0$ уравнение гиперболы примет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $b = \sqrt{c^2 - a^2}\ \ (c > a)$;

$|z-z_1| - |z-z_2| = 2a$ — ветвь гиперболы, которая ближе к точке z_2;

$|\mathrm{Re}\,(\overline{a}(z-z_0))| = |a| \cdot |z-z_0|$ — геометрическое место точек, для которых расстояние до фиксированной точки z_0 (называемой фокусом) равно расстоянию до фиксированной прямой $\mathrm{Re}\,(\overline{a}(z-z_0)) = 0$ (называемой директрисой), т.е парабола. В частности, при $z_0 = p/z$ и директрисе $z = -p/2$ $(a = 1)$, получим каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$.

Пример 1.2.1. Изобразить на комплексной плоскости области с кусочно- гладкими границами:

1) $2\mathrm{Re}\,(z-i) < |z-i|^2, \quad \mathrm{Im}\, z < 1;$
2) $|z-i| < |z-1|, \quad |z+1-i| > \sqrt{2};$
3) $|\arg(z-i)| < \pi/4, \quad \mathrm{Re}\,(z-1) < 0;$
4) $|z+1| + |z-1| < 4, \quad |\arg(z+1)| < \pi/3;$
5) $|z-2i| - |z+2i| < 2\sqrt{3}, \quad \mathrm{Im}\, z < 0.$

Решение. 1) Положим в первом неравенстве $z = x + iy$, получим

$$2\mathrm{Re}\,(z-i) < |z-i|^2 \;\Leftrightarrow\; 2\mathrm{Re}\,(x + i(y-1)) < |x + i(y-1)|^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x < x^2 + (y-1)^2 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2 + (y-1)^2 > 1.$$

Это неравенство задает внешность круга радиусом 1 с центром в точке $(1,1)$. Второе неравенство

$$\mathrm{Im}\, z < 1 \;\Leftrightarrow\; y < 1$$

задает точки полуплоскости с границей $y = 1$. Искомая область изображена на рис. 1.2.1, *а* (точки множества не заштрихованы).

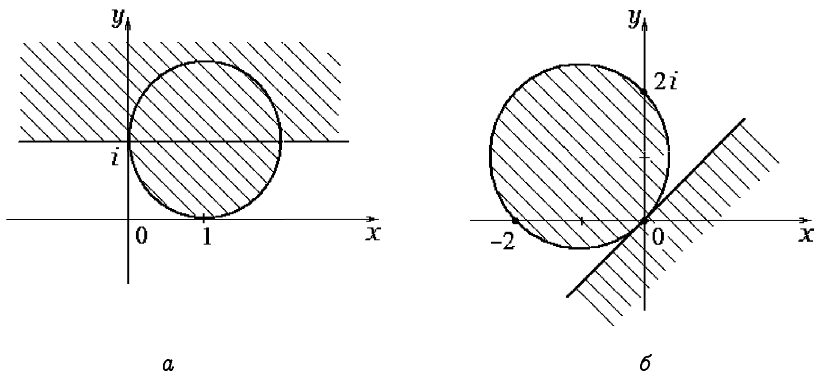


Рис. 1.2.1

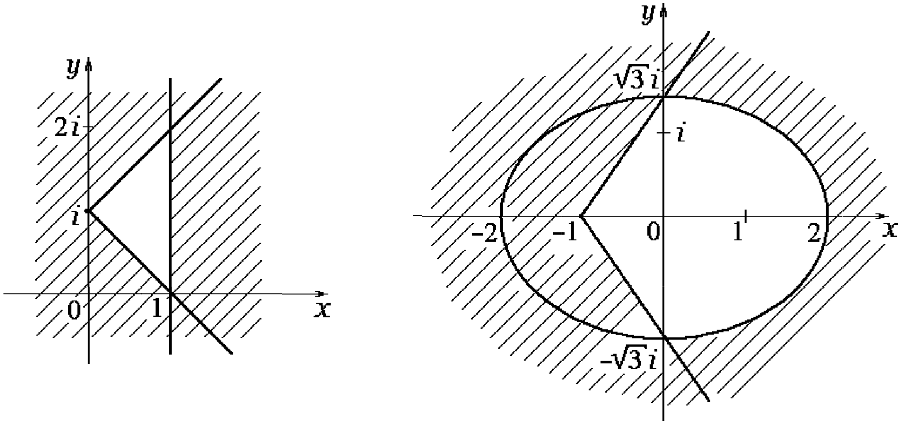
2) Положим в первом неравенстве $z = x + iy$, получим

$$|z-i| < |z-1| \;\Leftrightarrow\; |x + i(y-1)|^2 < |(x-1) + iy|^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2 + (y-1)^2 < (x-1)^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; -2y < -2x \;\Leftrightarrow\; y > x.$$

Это неравенство задает полуплоскость с границей $y = x$. Второе неравенство задает внешность круга радиусом $\sqrt{2}$ с центром в точке $(-1,1)$. Искомая область изображена на рис. 1.2.1, *б* (точки множества не заштрихованы).

3) В первом неравенстве сделаем замену $w = z - i$. Тогда в полуплоскости комплексного переменного w множество представляет собой клин с вершиной в начале координат $w = 0$, $-\pi/4 < \arg w < \pi/4$. В плоскости комплексного переменного $z = w + i$ множество представляет аналогичный клин с вершиной в точке $z = i$. Второе неравенство $\mathrm{Re}\,(z - 1) < 0 \;\Leftrightarrow\; x - 1 < 0$ задает полуплоскость с границей $x = 1$. Искомая область изображена на рис. 1.2.2, *а* (точки множества не заштрихованы).



а *б*

Рис. 1.2.2

4) Пусть $z = x + iy$. Тогда первое из неравенств примет вид $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \le 4$. Избавляясь от корней (два раза уединяем радикал и возводим обе части неравенства в квадрат), получим $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} \le 1$, т.е. первое из неравенств определяет внутренность эллипса с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{3}$.

Можно получить этот результат и по-другому. Это неравенство означает, что сумма расстояний от точки z до двух заданных точек $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$ должна быть не больше, чем 4. Напомним, что множество точек z, удовлетворяющих условию $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, где $|z_1 - z_2| < 2a$ определяет эллипс с фокусами в точках z_1, z_2. Следовательно, множество точек, для которых $|z_1 + 1| + |z - 1| < 4$, представляет внутренность эллипса с фокусами $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, большей полуосью a, определяемой из равенства $2a = 4$, и расстоянием $c = 1$ каждого из фокусов до центра эллипса в начале координат. Уравнение этого эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $a=2$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.

Неравенство $-\pi/3<\arg(z+1)<\pi/3$ определяет угол между прямыми, выходящими из точки $z_0=-1$ и образующими с осью Ox углы в $-\pi/3$ и $\pi/3$ радиан.

Искомая область изображена на рис. 1.2.2, *б* (точки множества не заштрихованы).

5) Уравнение $|z-2i|-|z+2i|=2\sqrt{3}$ задает ветвь гиперболы, которая располагается ближе к фокусу в точке $-2i$ (рис. 1.2.3).

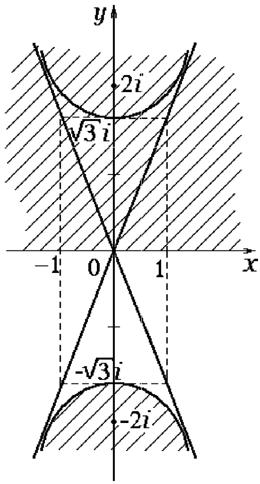


Рис. 1.2.3

Первое неравенство $|z-2i|-|z+2i|<2\sqrt{3}$ задает множество точек над этой веткой гиперболы. В этом можно убедиться, решая это неравенство, положив $z=x+iy$:

$$|z-2i|-|z+2i|<2\sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; |x+(y-2)i|-|x+(y+2)i|<2\sqrt{3} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}<2\sqrt{3}+\sqrt{x^2+(y+2)^2} \;\Leftrightarrow\; -(2y+3)<\sqrt{3}\sqrt{x^2+(y+2)^2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1) & y>-3/2; \\ 2) & \left\{\begin{array}{l} y\le -3/2 \\ y^2/3-x^2<1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Второе неравенство $\operatorname{Im} z<0$ задает нижнюю полуплоскость. Искомая область изображена на рис. 1.2.3 (точки множества не заштрихованы).

Задача 1.2.1. Изобразить на комплексной плоскости области с кусочно-гладкими границами.

1. 1) $2\mathrm{Re}\,(z+i) > |z+i|^2, \quad \mathrm{Im}\,z > -1;$

   2) $|z-5| - |z+5| > 6, \quad \mathrm{Re}\,z > -5.$

2. 1) $|z+i| > |z+1|, \quad 1 < |z| < 2;$

   2) $|z-1| < \mathrm{Re}\,(z+1), \quad \mathrm{Re}\,z < 1.$

3. 1) $\arg(z-1) > -\pi/4, \quad |z-1| < 1;$

   2) $|z-3| + |z+3| < 10, \quad \mathrm{Re}\,z > 3.$

4. 1) $1 < z\,\overline{z} < 2, \quad \mathrm{Re}\,z > -1, \quad \mathrm{Im}\,z > 0;$

   2) $|z-i| < |z+i|, \quad -3\pi/4 < \arg(z-i) < -\pi/4.$

5. 1) $2\mathrm{Im}\,(z-i) < |z-i|^2, \quad \mathrm{Re}\,z > 0;$

   2) $|z+i| + |z-i| < 4, \quad \mathrm{Im}\,z > 0.$

6. 1) $2\mathrm{Re}\,(z-1) < |z-1|^2, \quad \mathrm{Re}\,z < 2;$

   2) $|z+2i| - |z-2i| > 3, \quad \mathrm{Im}\,z < 2.$

7. 1) $|z+i| < |z+1|, \quad |z-1+i| > \sqrt{2};$

   2) $|z| > 2|z-1|, \quad \mathrm{Re}\,z > 4/3.$

8. 1) $\arg(z-1) < -\pi/4, \quad \mathrm{Im}\,z > -1;$

   2) $|z+1| < \mathrm{Re}\,(1-z), \quad \mathrm{Re}\,z > -1.$

9. 1) $(z-1)(\overline{z}-1) > 1, \quad \mathrm{Re}\,z > 0, \quad \mathrm{Im}\,z < 0;$

   2) $|\mathrm{Im}\,(z(1+i))| < 1, \quad |\mathrm{Re}\,(z(1+i))| < 1.$

10. 1) $2\mathrm{Re}\,(z-1) > |z-1|^2, \quad \mathrm{Im}\,z > 0;$

    2) $|z-1| < |z-i|, \quad \pi/2 < \arg(z-1) < \pi.$

11. 1) $|z-1| < |z+i|, \quad |z-1+i| > \sqrt{2};$

    2) $|z+5| - |z-5| > 6, \quad \mathrm{Re}\,z < 5.$

12. 1) $\arg(z+i) > -\pi/2, \quad \mathrm{Re}\,z < 1, \quad \mathrm{Im}\,z < 0;$

    2) $|z| > 3|z+1|, \quad \mathrm{Im}\,z > 0.$

13. 1) $(z-i)(\overline{z}+i) < 1, \quad 0 < \arg(z-i);$

    2) $|z| + \mathrm{Re}\,z < 1, \quad \mathrm{Re}\,z > 0.$

14. 1) $2\mathrm{Im}\,(z+1) < |z+1|^2, \quad \mathrm{Re}\,z > -1;$

2) $\mathrm{Re}\,(iz^2) < 2, \quad |z| < 2.$

15. 1) $2\mathrm{Re}\,(z+i) < |z+i|^2, \quad \mathrm{Re}\,z < 1;$

2) $|z+1| < |z-1|, \quad -\pi/4 < \arg(z+1) < \pi/4.$

16. 1) $|z-1| > |z+i|, \quad 1 < |z| < 2;$

2) $|z-2i| - |z+2i| > 3, \quad \mathrm{Im}\,z > -2.$

17. 1) $-\pi/4 < \arg(z-i) < \pi/2, \quad \mathrm{Re}\,z < 1, \quad \mathrm{Im}\,z < 2;$

2) $|z| > 2|z-i|, \quad \mathrm{Re}\,z > 0.$

18. 1) $2\mathrm{Im}\,(z+1) > |z+1|^2, \quad \mathrm{Im}\,z > 1;$

2) $\mathrm{Re}\,(1/z) > 1/4, \quad \mathrm{Im}\,z < 0.$

19. 1) $(z+1)(\overline{z}+1) > 1, \quad \mathrm{Re}\,z < 0;$

2) $|z| < 2, \quad -\pi/4 < \arg(z-1) < \pi/4.$

20. 1) $2\mathrm{Re}\,(z+1) > |z+1|^2, \quad \mathrm{Re}\,z > 0;$

2) $|z-i| < 1, \quad \arg z > \pi/4, \quad \arg(z+1-i) < \pi/4.$

21. 1) $|z-1| > |z+i|, \quad 1 < |z| < 2;$

2) $|z+5i| - |z-5i| > 6, \quad \mathrm{Im}\,z < 5.$

22. 1) $-\pi/4 < \arg(z+1) < \pi/2, \quad |z| > 1;$

2) $|\mathrm{Im}\,(z(1-i))| < 1, \quad |\mathrm{Re}\,(z(1-i))| < 1.$

23. 1) $2\mathrm{Im}\,(z+i) > |z+i|^2, \quad \mathrm{Re}\,z < 0;$

2) $|z| + \mathrm{Im}\,z < 1, \quad \mathrm{Im}\,z > 0.$

24. 1) $1 < (z+i)(\overline{z}-i) < 2, \quad \mathrm{Re}\,z > 0, \quad \mathrm{Im}\,(z+i) > 0;$

2) $|z| < |z-1-i|, \quad 0 < \arg z < \pi/2.$

25. 1) $2\mathrm{Re}\,(z+1) < |z+1|^2, \quad \mathrm{Im}\,z < 0;$

2) $|z-2| > 2|z|, \quad \mathrm{Im}\,z > 0.$

26. 1) $|z+1| < |z-i|, \quad |z+1+i| > \sqrt{2};$

2) $|z-2i| + |z+2i| < 8, \quad \pi/6 < \arg(z+2i) < 5\pi/6.$

27. 1) $-3\pi/4 < \arg(z+1) < 0, \quad \mathrm{Re}\,z < 1, \quad \mathrm{Im}\,z > -2;$

2) $|z+i| < 2, \quad |z-i| > 2.$

28. 1) $2\operatorname{Im}(z+i) < |z+i|^2, \quad \operatorname{Im} z < 0;$

2) $\operatorname{Im}(z^2) < 1, \quad |z| < 2.$

29. 1) $(z+i)(\overline{z}-i) < 1, \quad |\arg(z+i)| < \pi/4;$

2) $|z| > |z+1+i|, \quad 0 < \arg(z+1+i) < \pi/2.$

30. 1) $|z+1| > |z-i|, \quad 1 < |z| < 2;$

2) $|z-3| + |z+3| < 10, \quad \operatorname{Re} z > 0.$

Пример 1.2.2. Определить вид кривой:

1) $z = 3\operatorname{cosec} t - 2i \operatorname{ctg} t;$ 2) $z = \dfrac{2}{\operatorname{ch} t} + 5i \operatorname{th} t.$

Решение. 1) Отделяя действительную и мнимую части, получим уравнение кривой в параметрической форме $x = \dfrac{3}{\sin t}$, $y = -2\operatorname{ctg} t$. Исключим параметр t. Используя соотношение $\dfrac{1}{\sin^2 t} - \operatorname{ctg}^2 t = 1$, получим уравнение кривой в виде $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, т.е. данная кривая — гипербола.

2) Имеем $x = \dfrac{2}{\operatorname{ch} 3t}$, $y = 5\operatorname{th} 3t$. Используя соотношение $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t} + \operatorname{th}^2 t = 1$, получим уравнение кривой в виде $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. Учитывая, что $\operatorname{ch} 3t \geq 1$, имеем $x \geq 0$. Кривая — часть эллипса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, $x \geq 0$.

Ответ. 1) Гипербола $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; 2) часть эллипса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, $x \geq 0$.

Задача 1.2.2. Определить вид кривой.

1. $z = \dfrac{2}{\operatorname{ch} t} + 3i \operatorname{th} t.$

2. $z = \dfrac{3}{\operatorname{ch} 2t} + 2i \operatorname{th} 2t.$

3. $z = 2\operatorname{th} 3t + \dfrac{2i}{\operatorname{ch} 3t}.$

4. $z = \dfrac{1}{\operatorname{sh} t} - i \operatorname{cth} t.$

5. $z = \dfrac{3}{\cos t} + 2i \operatorname{tg} t.$

6. $z = \dfrac{2}{\cos t} - 3i \operatorname{tg} t.$

7. $z = -\dfrac{1}{\cos t} + 2i \operatorname{tg} t.$

8. $z = 4\operatorname{tg} t - \dfrac{3i}{\cos t}.$

9. $z = 3\cos t + 2i\sin t$.

10. $z = 2\cos t + 3i\sin t$.

11. $z = 5\cos 2t + 3i\sin 2t$.

12. $z = 4\sin 2t + 5i\cos 2t$.

13. $\dfrac{z-1}{z+1} = it$.

14. $\dfrac{z-2}{z+1} = it$.

15. $\dfrac{z-i}{z+i} = it$.

16. $\dfrac{z-2i}{z+2i} = it$.

17. $z = 3\,\mathrm{ch}\,2t + 2i\,\mathrm{sh}\,2t$.

18. $z = 2\,\mathrm{ch}\,3t - 3i\,\mathrm{sh}\,t$.

19. $z = 4\,\mathrm{sh}\,4t + 3i\,\mathrm{ch}\,4t$.

20. $z = -4\,\mathrm{sh}\,5t + 3i\,\mathrm{ch}\,5t$.

21. $z = \dfrac{3}{\sin t} + 2i\,\mathrm{ctg}\,t$.

22. $z = \dfrac{4}{\sin 2t} + 3i\,\mathrm{ctg}\,2t$.

23. $z = \mathrm{ctg}\,t - \dfrac{2i}{\sin t}$.

24. $z = -\,\mathrm{ctg}\,2t + \dfrac{3i}{\sin 2t}$.

25. $z = \dfrac{1+t}{1-t} + i\dfrac{2+t}{2-t}$.

26. $z = \dfrac{t-1+it}{t(t-1)}$.

27. $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$.

28. $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$.

29. $z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$.

30. $z = t - 1 + i(t^3 - 3t^2 + 3t + 4)$.

1.3. Элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими соотношениями.

1°. *Показательная функция*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1, z_2 — любые комплексные числа;

2) $e^{z+2\pi ki} = e^z$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т.е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

2°. *Тригонометрические функции*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\,z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \qquad \mathrm{ctg}\,z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного справедливы все известные формулы тригонометрии.

3°. *Гиперболические функции*

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны соотношениями

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh} iz = i \sin z, \qquad \cos iz = \operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

4°. *Логарифмическая функция*

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$, оно обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \qquad \operatorname{Ln}(z_1/z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln} z, \qquad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z, \quad n \in N,$$

которые понимаются не как равенства чисел, а равенство множеств значений.

5°. *Обратные тригонометрические функции.*

Поскольку тригонометрические и гиперболические функции выражаются через показательную функцию, то обратные к ним функции можно выразить через логарифмы:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), &&\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),\\
&\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), &&\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),\\
&\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, &&\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z},\\
&\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}, &&\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Все эти функции многозначные. Удобнее не запоминать общие формулы, а получать их как решение соответствующих уравнений.

Рассмотрим, например, $w = \operatorname{Arcsin} z$. Найдем w как решение уравнения $\sin w = z$, или $\dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$. Полагая $e^{iw} = t$, получим квадратное относительно t уравнение $t - \dfrac{1}{t} = 2iz$ или $t^2 - 2izt - 1 = 0$, откуда $t = iz + \sqrt{1 - z^2}$ (корень понимается как двузначная функция). Тогда $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$ и $w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$.

Пример 1.3.1. Представить в алгебраической форме:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 3i\right)$; 2) $\operatorname{ch}\left(2 + \dfrac{\pi}{6} i\right)$; 3) $(1+i)^i$.

Решение. 1) Имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right) = \frac{1}{2i}(e^{i(\pi/3+3i)} - e^{-i(\pi/3+3i)}) = \frac{1}{2i}(e^{-3+i\pi/3} - e^{3-i\pi/3}) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) - e^{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - e^{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{2}(e^3 - e^{-3}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(e^3 - e^{-3})\right) =$$

$$= -\frac{1}{2i}\,\frac{e^3 - e^{-3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{e^3 + e^{-3}}{2} = i\frac{1}{2}\operatorname{sh} 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 3 + i\frac{1}{2}\operatorname{sh} 3.$$

Можно по-другому:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos 3i + \cos\frac{\pi}{3}\sin 3i = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 3 + i\frac{1}{2}\operatorname{sh} 3,$$

так как $\cos 3i = \operatorname{ch} 3$, $\sin 3i = i \operatorname{sh} 3$.

2) По определению имеем

$$\operatorname{ch}\left(2 + \frac{\pi}{6} i\right) = \frac{1}{2}(e^{2+i\pi/6} + e^{-2-i\pi/6}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) + e^{-2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) + e^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{e^2 + e^{-2}}{2} + i\frac{1}{2}\,\frac{e^2 - e^{-2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 2 + i\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2.$$

Можно по-другому:

$$\operatorname{ch}\left(2+\frac{\pi}{6}i\right) = \operatorname{ch}\left(i\left(\frac{\pi}{6}-2i\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}-2i\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos 2i + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2i =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 2 + i\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2.$$

3) Воспользуемся основным логарифмическим тождеством

$$(1+i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)}.$$

Подсчитаем $\mathrm{Ln}(1+i)$. Для $z = 1+i$ имеем $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$. Тогда $\mathrm{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно:

$$(1+i)^i = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + i(\pi/4+2\pi k)\right)} = e^{-(\pi/4+2\pi k)} e^{i\ln\sqrt{2}} =$$

$$= e^{-(\pi/4+2\pi k)}(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}),$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 3 + i\dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 3$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} 2 + i\dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2$;

3) $e^{-(\pi/4+2\pi k)}(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.3.1. Представить в алгебраической форме.

1. $\operatorname{sh}(1 + i\pi/2)$.
2. $\operatorname{ch}(1 - i\pi)$.
3. $\mathrm{Ln}(1 + i\sqrt{3})$.
4. $\sin(\pi/2 - 5i)$.
5. $\cos(\pi/4 - 2i)$.
6. 1^{2i}.
7. $\operatorname{sh}(2 + i\pi/4)$.
8. $\operatorname{ch}(2 + i\pi/2)$.
9. $\mathrm{Ln}(1 + i)$.
10. $\sin(\pi/3 + i)$.
11. $\cos(\pi/4 + i)$.
12. $(-1)^{4i}$.
13. $\operatorname{sh}(3 + i\pi/6)$.
14. $\operatorname{ch}(3 + i\pi/3)$.
15. $\mathrm{Ln}(-1 - i)$.
16. $\sin(\pi/4 + 2i)$.
17. $\cos(\pi/3 - 2i)$.
18. $(1 - i)^{-i}$.
19. $\operatorname{sh}(2 + i\pi/6)$.
20. $\operatorname{ch}(1 + i\pi/4)$.
21. $\mathrm{Ln}(\sqrt{3} + i)$.
22. $\sin(\pi/6 - 2i)$.

23. $\cos(\pi/6 + 2i)$.

24. $(-i)^{5i}$.

25. $\operatorname{sh}(-2 + i\pi/4)$.

26. $\operatorname{ch}(-3 + i\pi/6)$.

27. $\operatorname{Ln}(1 - i\sqrt{3})$.

28. $\sin(\pi/3 - 3i)$.

29. $\cos(\pi/6 - 3i)$.

30. $(-1)^{i\sqrt{2}}$.

Пример 1.3.2.* Используя связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями, доказать справедливость следующих соотношений:

1) $\operatorname{sh}(z_1 - z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

2) $\operatorname{ch} 5z = 16 \operatorname{ch}^5 z - 20 \operatorname{ch}^3 z + 5 \operatorname{ch} z$.

Решение. Соотношения, связывающие тригонометрические и гиперболические функции

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh} iz = i \sin z,$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{ch} iz = \cos z,$$

$$\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z, \qquad \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z,$$

позволяют для каждой формулы тригонометрии получить аналогичную формулу для гиперболических функций.

1) $\operatorname{sh}(z_1 - z_2) = -i \sin[i(z_1 - z_2)] = -i[\sin iz_1 \cos iz_2 - \cos iz_1 \sin iz_2] =$

$$= -i[i \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 - i \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2] = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

2) Выразим сначала $\cos 5z$ через степени $\sin z$ и $\cos z$. По формуле Муавра (1.1.6)

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi.$$

Тогда

$$\cos 5\varphi = \operatorname{Re}\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5\right] = \operatorname{Re}\left[\cos^5\varphi + 5\cos^4\varphi(i\sin\varphi) +\right.$$

$$\left.+10\cos^3\varphi(i\sin\varphi)^2 + 10\cos^2\varphi(i\sin\varphi)^3 + 5\cos\varphi(i\sin\varphi)^4 + (i\sin\varphi)^5\right] =$$

$$= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi(1 - \cos^2\varphi) +$$

$$+5\cos\varphi(1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi) = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi.$$

Полагая $\varphi = z$, получим

$$\cos 5z = 16\cos^5 z - 20\cos^3 z + 5\cos z.$$

Имеем

$$\operatorname{ch} 5z = \cos i5z = 16\cos^5 iz - 20\cos^3 iz + 5\cos iz = 16\operatorname{ch}^5 z - 20\operatorname{ch}^3 z + 5\operatorname{ch} z.$$

Задача 1.3.2.* Используя связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями, доказать справедливость следующих соотношений.

1. $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2.$
2. $\operatorname{sh}(z_1 - z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2.$
3. $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$
4. $\operatorname{ch}(z_1 - z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$
5. $\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(z_1 + z_2) + \operatorname{sh}(z_1 - z_2)\right].$
6. $\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(z_1 + z_2) + \operatorname{ch}(z_1 - z_2)\right].$
7. $\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(z_1 + z_2) - \operatorname{ch}(z_1 - z_2)\right].$
8. $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2\operatorname{sh}\dfrac{z_1 + z_2}{2}\operatorname{ch}\dfrac{z_1 - z_2}{2}.$
9. $\operatorname{sh} z_1 - \operatorname{sh} z_2 = 2\operatorname{ch}\dfrac{z_1 + z_2}{2}\operatorname{sh}\dfrac{z_1 - z_2}{2}.$
10. $\operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 = 2\operatorname{ch}\dfrac{z_1 + z_2}{2}\operatorname{ch}\dfrac{z_1 - z_2}{2}.$
11. $\operatorname{ch} z_1 - \operatorname{ch} z_2 = 2\operatorname{sh}\dfrac{z_1 + z_2}{2}\operatorname{sh}\dfrac{z_1 - z_2}{2}.$
12. $\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z.$
13. $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z.$
14. $\operatorname{ch} 2z = 2\operatorname{ch}^2 z - 1.$
15. $\operatorname{ch} 2z = 2\operatorname{sh}^2 z + 1.$
16. $\operatorname{sh} 3z = 4\operatorname{sh}^3 z + 3\operatorname{sh} z.$
17. $\operatorname{ch} 3z = 4\operatorname{ch}^3 z - 3\operatorname{ch} z.$
18. $\operatorname{sh} 4z = 4\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z + 8\operatorname{sh}^3 z \operatorname{ch} z.$
19. $\operatorname{ch} 4z = 8\operatorname{sh}^4 z - 8\operatorname{ch}^2 z + 1.$
20. $\operatorname{sh} 5z = 16\operatorname{sh}^5 z + 20\operatorname{sh}^3 z + 5\operatorname{sh} z.$

21. $\operatorname{ch} 5z = 16 \operatorname{ch}^5 z - 20 \operatorname{ch}^3 z + 5 \operatorname{ch} z$.

22. $(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)^n = \operatorname{sh} nz + \operatorname{ch} nz$.

23. $\operatorname{sh}^2 z_1 - \operatorname{sh}^2 z_2 = \operatorname{sh}(z_1 + z_2) \operatorname{sh}(z_1 - z_2)$.

24. $\operatorname{ch}^2 z_1 - \operatorname{ch}^2 z_2 = \operatorname{sh}(z_1 + z_2) \operatorname{sh}(z_1 - z_2)$.

25. $\operatorname{sh}^2 z_1 + \operatorname{ch}^2 z_2 = \operatorname{ch}(z_1 + z_2) \operatorname{ch}(z_1 - z_2)$.

26. $\operatorname{ch}^2 z_1 + \operatorname{sh}^2 z_2 = \operatorname{ch}(z_1 + z_2) \operatorname{ch}(z_1 - z_2)$.

27. $\operatorname{sh}^2 z = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2z - 1)$.

28. $\operatorname{ch}^2 z = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2z + 1)$.

29. $\operatorname{th}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{th} z_1 + \operatorname{th} z_2}{1 + \operatorname{th} z_1 \operatorname{th} z_2}$.

30. $\operatorname{th} 2z = \dfrac{2 \operatorname{th} z}{1 + \operatorname{th}^2 z}$.

Пример 1.3.3. Решить уравнения:

1) $5 \sin z + i \operatorname{sh} iz = 3 - i$; 2) $4 \operatorname{ch} iz - \cos z + 5 = 0$;

3) $2 \operatorname{tg} z + i \operatorname{th} iz = 2 + 3i$.

Решение. 1) Поскольку $\operatorname{sh} iz = i \sin z$, уравнение имеет вид $4 \sin z = 3 - i$, откуда $\sin z = \dfrac{3-i}{4}$, тогда $z = \operatorname{Arcsin} \dfrac{3-i}{4}$. Воспользуемся полученной формулой (1.3.1):

$$\operatorname{Arcsin} t = -i \operatorname{Ln}(it + \sqrt{1-t^2}).$$

В нашем случае $t = \dfrac{3-i}{4}$ и

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1 - \frac{(3-i)^2}{16}} = \frac{\sqrt{8+6i}}{4} = \frac{\sqrt{(3+i)^2}}{4} = \pm\frac{3+i}{4}.$$

Тогда

$$it + \sqrt{1-t^2} = \frac{1 + 3i \pm (3+i)}{4} = \left[\begin{array}{l} 1+i \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i. \end{array}\right.$$

Отсюда

$$z_1 = -i \operatorname{Ln}(1+i) = -i\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) = \pi\left(\frac{1}{4} + 2k\right) - i \ln\sqrt{2},$$

$$z_2 = -i\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right) = -i\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\right) = \pi\left(\frac{3}{4}+2k\right)+i\ln\sqrt{2},$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

2) Поскольку $\mathrm{ch}\, iz = \cos z$, то уравнение имеет вид $3\cos z + 5 = 0$. Имеем $\cos z = -\dfrac{5}{3}$, откуда $z = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{5}{3}\right)$. Получим сначала общее выражение для $z = \mathrm{Arccos}\, t$ как решение уравнения $\cos z = t$ или $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = t$. Полагая $e^{iz} = p$, получим квадратное относительно p уравнение $p + \dfrac{1}{p} = 2t$ или $p^2 - 2pt + 1 - 0$, откуда $p = t + \sqrt{t^2-1}$ (корень понимается как двузначная функция). Тогда $e^{iz} = t + \sqrt{t^2-1}$ и $z = \mathrm{Arccos}\, t = -i\,\mathrm{Ln}(t+\sqrt{t^2-1})$. В нашем случае

$$z = \mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{3}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}-1}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}\right).$$

Тогда

$$z_1 = -i\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = -i\left(\ln\frac{1}{3}+i(\pi+2\pi k)\right) = \pi(1+2k)+i\ln 3,$$

$$z_2 = -i\,\mathrm{Ln}(-3) = -i(\ln 3 + i(\pi+2\pi k)) = \pi(1+2k) - i\ln 3, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3) Поскольку $\mathrm{th}\, iz = i\,\mathrm{tg}\, z$, то уравнение имеет вид $\mathrm{tg}\, z = 2+3i$. Получим сначала общее выражение для $z = \mathrm{Arctg}\, t$ как решение уравнения $\mathrm{tg}\, z = t$. Имеем $\mathrm{tg}\, z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{2(e^{iz}-e^{-iz})}{2i(e^{iz}+e^{-iz})} = \dfrac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}$, тогда получим $\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = it$, откуда $e^{2iz} = \dfrac{1+it}{1-it}$, следовательно, $z = \mathrm{Arctg}\, t = -\dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+it}{1-it}$. В нашем случае

$$z = \mathrm{Arctg}(2+3i) = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i(2+3i)}{1-i(2+3i)}\right) = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{-2+2i}{4-2i}\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{3}{5}+i\frac{1}{5}\right) = -\frac{i}{2}\left(\ln\sqrt{\frac{2}{5}}+i\left(\pi+\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi k\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{i}{4}\ln\frac{2}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. 1) $z_1 = \pi\left(\frac{1}{4}+2k\right) - i\ln\sqrt{2}$, $\quad z_2 = \pi\left(\frac{3}{4}+2k\right) + i\ln\sqrt{2}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$;

2) $z_1 = \pi(1+2k) + i\ln 3$, $\quad z_2 = \pi(1+2k) - i\ln 3$, $\quad k \in \mathbb{Z}$;

3) $z = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{i}{4}\ln\frac{2}{5}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.3.3. Решить уравнение.

1. $\sin z - i \operatorname{sh} iz = 8$.
2. $\cos z + 2\operatorname{ch} iz = -9i$.
3. $\operatorname{tg} z - 2i \operatorname{th} iz = i$.
4. $\operatorname{ctg} z + i \operatorname{cth} iz = i$.
5. $\operatorname{ch} z + \cos iz = -4$.
6. $2\operatorname{th} z - 3i \operatorname{tg} iz = 4 - 3i$.
7. $3\operatorname{cth} z + 2i \operatorname{ctg} iz = 4 + 3i$.
8. $5\sin z + i \operatorname{sh} iz = -3 + i$.
9. $2\operatorname{ctg} z - i \operatorname{cth} iz = 1$.
10. $\cos z + \operatorname{ch} iz = -10$.
11. $\operatorname{tg} z - i \operatorname{th} iz = 2 + 2i$.
12. $2\operatorname{ctg} z + i \operatorname{cth} iz = 6 + 3i$.
13. $2\operatorname{ch} z + \cos iz = 9i$.
14. $2\operatorname{sh} z - i \sin iz = -3i$.
15. $5\sin z - 3i \operatorname{sh} iz = 17$.
16. $3\operatorname{tg} z - 4i \operatorname{th} iz = 3\sqrt{3} - 8i$.
17. $3\cos z + \operatorname{ch} iz = -5$.
18. $2\operatorname{ctg} z - i \operatorname{cth} z = 2 - i$.
19. $2\operatorname{cth} z - i \operatorname{ctg} iz = i$.
20. $3\operatorname{ch} z - 2\cos iz = -4i$.
21. $2\operatorname{sh} z + i \sin iz = -4i$.
22. $3\sin z + i \operatorname{sh} iz = 1 - i\sqrt{3}$.
23. $\operatorname{tg} z - i \operatorname{th} iz = -i$.
24. $3\cos z - 2\operatorname{ch} iz = 2$.
25. $4\operatorname{ctg} z + i \operatorname{cth} iz = 4 + 3i$.
26. $\operatorname{ch} z + \cos iz = -2i$.
27. $\operatorname{sh} z - i \sin iz = 2$.
28. $\operatorname{cth} z + i \operatorname{ctg} iz = 2 + 2i$.
29. $3\sin z + 2i \operatorname{sh} iz = 3$.
30. $4\cos z - 3\operatorname{ch} iz = -5$.

1.4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши—Римана

Пусть функция $w = f(z)$ определена, однозначна в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z + \triangle z$ принадлежат области D.

Определение. *Производной* $f'(z)$ функции $f(z)$ в точке z называется предел

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z} = f'(z),$$

если он существует и конечен.

Если существует производная $f'(z)$, то функция называется *комплексно дифференцируемой в точке* z.

Теорема 1.4.1 (*необходимое условие*). Пусть $z = x+iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ существуют $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.4.1}$$

называемые *условиями Коши—Римана.*

Теорема 1.4.2 (*достаточное условие*). Если в некоторой точке (x, y) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных x и y и, кроме того, удовлетворяют условиям Коши—Римана, то функция $f(z) = u + iv$ является дифференцируемой в точке $z = x + iy$ как функция комплексного переменного z.

Производная функции вычисляется по формулам

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Формулы дифференцирования функций комплексного переменного аналогичны формулам дифференцирования функций действительного переменного.

Определение. Однозначная функция $w = f(z)$ называется *аналитической в данной точке* z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема в каждой точке этой области, и обозначается $f(z) \in O(D)$.

Теорема 1.4.3 (*необходимое и достаточное условия аналитичности*). Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в области D тогда и только тогда, когда $u(x, y)$ и $v(x, y) \in C(D)$, и в любой точке $z = (x, y) \in D$ существуют первые частные производные, связанные условиями Коши—Римана (1.4.1) [8].

Определение. Если $\forall R > 0 \;\; \exists N > 0$, начиная с которого $\forall n > N$ члены последовательности $\{z_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$ удовлетворяют условию $|z_n| > R$, то последовательность называется *неограниченно возрастающей.*

Определение. Любая неограниченная последовательность сходится к единственному числу $z = \infty$, которое называется *бесконечно удаленной точкой.*

Определение. *Полной комплексной плоскостью* называется комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с добавлением к ней элемента $z = \infty$ $\mathbb{C} \cup \{z = \infty\} = \overline{\mathbb{C}}$.

Определение. Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* $z = \infty$, если функция $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ аналитична в точке $\zeta = 0$.

Свойства аналитических функций.

а) Если $f(z) \in O(D)$ (аналитическая в области D), то $f(z) \in C(D)$ (непрерывна в D), более того, $f(z)$ бесконечно дифференцируема в D.

б) Если $f(z)$, $g(z) \in O(D)$, то $f(z) + g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, $f(z)/g(z)$ — аналитичны всюду в D, кроме точек, где знаменатель равен нулю.

в) Если $f(z) \in O(D)$ и $g(w) \in O(\widetilde{D})$, где $\widetilde{D}$ — область значений функции f плоскости $\mathbb{C}_w$ комплексного переменного w, то *сложная функция* $\zeta = g(f(z)) \equiv F(z) \in O(D)$.

г) Если $f(z) \in O(D)$ и $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$, тогда в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ существует *обратная аналитическая функция* $z = \varphi(w) \in O(|w - w_0| < \varepsilon)$, отображающая окрестность $|w - w_0| < \varepsilon$ на окрестность $|z - z_0| < \delta$. Причем $\varphi'(w_0) = 1/f'(z_0)$.

д) Если функция $f(z) = u+iv$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются *гармоническими в этой области* функциями, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Если функция $u(x, y)$ (функция $v(x, y)$) является гармонической в некоторой односвязной области D, то существует аналитическая в D функция $f(z)$ с действительной частью $u(x, y)$ (соответственно с мнимой частью $v(x, y)$), определяемая с точностью до постоянного слагаемого.

Пользуясь условиями Коши—Римана, можно восстановить аналитическую функцию $w = f(z)$, если известна ее действительная часть $u(x, y)$ или мнимая часть $v(x, y)$.

Пример 1.4.1. Проверить, что $u(x, y)$ (или $v(x, y)$) является действительной (или мнимой) частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$:

1) $u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0;$

2) $v = y + \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad f(1) = 0.$

Решение. 1) Проверим, что $u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x$ — гармоническая функция. Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x \operatorname{ch} y - 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = -2\sin x \operatorname{ch} y, \qquad \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 2\sin x \operatorname{ch} y.$$

Отсюда получаем

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\sin x \operatorname{ch} y + 2\sin x \operatorname{ch} y = 0.$$

Следовательно, $u(x, y)$ — гармоническая функция, и существует такая аналитическая функция $f(z)$, что $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Записывая условия Коши—Римана, для определения $v(x, y)$ имеем систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2\cos x \operatorname{ch} y - 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 2\sin x \operatorname{sh} y.$$

Из второго соотношения находим

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int -2\sin x \operatorname{sh} y \, dx + \varphi(y) = 2\cos x \operatorname{sh} y + \varphi(y),$$

где функция $\varphi(y)$ пока неизвестна. Подсчитаем $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2\cos x \operatorname{ch} y + \varphi'(y)$. Сравним с первым соотношением, получим $\varphi'(y) = -1$, следовательно, $\varphi(y) = -y + C$, где $C = \mathrm{const}$.

Итак, $v(x, y) = 2\cos x \operatorname{sh} y - y + C$, следовательно:

$$f(z) = 2\sin x \operatorname{ch} y - x + i(2\cos x \operatorname{sh} y - y) + iC.$$

Полагая $x = 0$, $y = 0$ и учитывая $f(0) = 0$, имеем $C = 0$. Тогда

$$f(z) = 2(\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y) - (x + iy) =$$

$$= 2(\sin x \cos iy + \cos x \sin iy) - (x + iy) = 2\sin(x + iy) - (x + iy) = 2\sin z - z.$$

2) Проверим, что $v = y + \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ — гармоническая функция. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2},$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial x^2} = \frac{6x^2 y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}, \qquad \frac{\partial v^2}{\partial y^2} = \frac{-6x^2 y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}.$$

откуда $\triangle v = \dfrac{\partial v^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial v^2}{\partial y^2} = 0$.

Используя условия Коши—Римана, для определения $u(x, y)$ имеем систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Из второго соотношения

$$u(x, y) = \int \frac{2xy\, dy}{(x^2 + y^2)^2} = x \int \frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi(x).$$

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x)$. Сравнивая с первым соотношением, получим $\varphi'(x) = 1$, откуда $\varphi(x) = x + C$.

Итак, $u(x, y) = -\dfrac{x}{x^2 + y^2} + x + C$, следовательно:

$$f(x, y) = -\frac{x - iy}{x^2 + y^2} + x + iy + C = -\frac{\overline{z}}{|z|^2} + z + C = -\frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} + z + C = -\frac{1}{z} + z + C.$$

Учитывая, что $f(1) = 0$, имеем $C = 0$. Окончательно $f(z) = -\dfrac{1}{z} + z$.

Ответ. 1) $f(z) = 2\sin z - z$; 2) $f(z) = -\dfrac{1}{z} + z$.

Задача 1.4.1. Проверить, что $u(x, y)$ (или $v(x, y)$) является действительной (или мнимой) частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$.

1. $u = x^3 - 3xy^2 - x, \qquad f(0) = 0.$
2. $v = 2xy - 2y, \qquad f(0) = 1.$
3. $u = \sin x \operatorname{ch} y + x, \qquad f(0) = 0.$
4. $v = e^{-y} \sin x, \qquad f(0) = 1.$
5. $u = -2xy - 2y, \qquad f(0) = i.$
6. $v = \cos x \operatorname{sh} y + y, \qquad f(0) = 0.$
7. $u = e^{-y} \cos x + x, \qquad f(0) = 1.$
8. $v = e^{-y} \sin x, \qquad f(0) = 1.$
9. $v = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, \qquad f(0) = 2.$
10. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x, \qquad f(1) = 2.$
11. $v = e^x (y \cos y + x \sin y), \qquad f(0) = 0.$
12. $u = x^2 - y^2 + x, \qquad f(0) = 0.$
13. $v = e^{-y} \sin x + y, \qquad f(0) = 1.$
14. $u = \operatorname{sh} x \cos y - x, \qquad f(0) = 0.$
15. $v = \operatorname{ch} x \sin y - y, \qquad f(0) = 0.$
16. $u = \operatorname{ch} x \cos y, \qquad f(0) = 1.$
17. $u = -\dfrac{x}{x^2 + y^2} + x, \qquad f(1) = 0.$
18. $v = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x} \sin y, \qquad f(0) = 0.$
19. $u = y - 2xy, \qquad f(0) = 0.$
20. $v = x^2 - y^2 + 2x, \qquad f(0) = 0.$
21. $u = \sin 2x \operatorname{ch} 2y, \qquad f(0) = 0.$
22. $v = \sin 2x \operatorname{sh} 2y, \qquad f(0) = -1.$
23. $u = \cos 2x \operatorname{ch} 2y, \qquad f(0) = 1.$

24. $v = \cos 2x \operatorname{sh} 2y, \qquad f(0) = 0.$

25. $v = 3x^2y - y^3 - y, \qquad f(0) = 0.$

26. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, \qquad f(0) = 1.$

27. $u = \operatorname{sh} 2x \cos 2y, \qquad f(0) = 0.$

28. $v = \operatorname{sh} 2x \sin 2y, \qquad f(0) = 1.$

29. $u = \operatorname{ch} 2x \cos 2y, \qquad f(0) = 1.$

30. $v = \operatorname{ch} 2x \sin 2y, \qquad f(0) = 0.$

1.5. Конформные отображения

Определение. Отображение окрестности точки $z \in \mathbb{C}$, задаваемое однозначной непрерывной функцией $w = f(z)$, называется *конформным в точке* z_0, если оно однолистно (взаимно-однозначно) и является композицией поворота и растяжения. Отображение, задаваемое функцией $w = f(z)$, *конформно в области* D, если оно конформно в каждой точке этой области.

Теорема 1.5.1. Отображение, задаваемое однозначной функцией $w = f(z)$, конформно в точке z_0 тогда и только тогда, когда $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z) \neq 0$.

Теорема 1.5.2. Всякая однолистная (взаимно-однозначная) аналитическая в односвязной области D функция $w = f(z)$ совершает конформное отображение области $D \in \mathbb{C}$ на область $f(D)$ той же связности.

Определение. Комплекснозначная однозначная функция $w = f(z)$, заданная в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$, называется *конформной* в точке $z = \infty$, если функция $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ конформна в точке $\zeta = 0$.

Определение. Комплекснозначная однозначная функция $w = f(z)$, обращающаяся в бесконечность в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ $\left(\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty\right)$, называется *конформной* в точке z_0, если функция $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ конформна в точке z_0.

Замечание. Если $f(\infty)=\infty$, то конформность функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ означает конформность функции $\Phi(\zeta)=\dfrac{1}{\varphi(\zeta)}=\dfrac{1}{f(1/\zeta)}$ в точке $\zeta=0$.

Теорема 1.5.3 (*принцип соответствия границ*). Пусть $\mathrm{w}=f(z)$ — конформное отображение односвязной области D с границей ∂D на односвязную область G с границей ∂G, где ∂D и ∂G — замкнутые кусочно-гладкие жордановы кривые $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда $f(z)$ непрерывно продолжается на ∂D и осуществляет взаимно-однозначное отображение замкнутых областей $\overline{D}$ и $\overline{G}$ с сохранением направления обхода по границе.

Теорема 1.5.4 (*принцип симметрии*). Пусть $\mathrm{w}=f(z)$ — конформное отображение односвязной области D на односвязную область G, а граница ∂D содержит прямолинейный отрезок $\varGamma$ (или дугу окружности), который отображается в γ — прямолинейный отрезок или дугу окружности. Тогда существует аналитическое продолжение $f(z)$ в область D^*, симметричную области D относительно $\varGamma$, которое совершает конформное отображение области D^* на G^*, симметричную области G относительно γ.

Теорема 1.5.5 (*инвариантность относительно конформных отображений*). Пусть $u=u(x,y)=u(z)$ — гармоническая в односвязной области D функция и $z=\varphi(\mathrm{w})$ — конформное отображение области G на область D. Тогда сложная функция $u=u(\varphi(\mathrm{w}))$ гармонична в G.

Пример 1.5.1. Найти образ G области D при отображении $\mathrm{w}=\mathrm{w}(z)$:

1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Im} z<2\}$ при отображении $\mathrm{w}=(1+i)z+1$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\operatorname{Re} z<2,\quad \operatorname{Im} z<0\}$ при отображении $\mathrm{w}=1/z$;

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z-3i|>3,\ \ \operatorname{Im} z>0\}$ при отображении $\mathrm{w}=1/z$;

4) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\operatorname{Im} z-\operatorname{Re} z<2\}$ при отображении $\mathrm{w}=1/z$;

5) $D=\left\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(\operatorname{Im} z-\dfrac{1}{2}\right)^2}<\operatorname{Re} z<\operatorname{Im} z\right\}$ при отображении $\mathrm{w}=1/z$;

6) $D = \{z: \ z \in \mathbb{C} \quad -1 < \operatorname{Re} z < 1 + \operatorname{Im} z, \quad -1 < \operatorname{Im} z < 0\}$ при отображении $\mathrm{w} = 1/z$.

Решение. 1) Линейная функция $\mathrm{w} = az + b$ осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Согласно принципу соответствия границ (см. теорему 1.5.3) при конформном отображении найдем образ границы AB области D (рис. 1.5.1, *а*). Параметрические уравнения границы $AB: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \end{cases}$, где параметр t изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. Образ границы $A'B'$: $\mathrm{w} = (1+i)(t+i2)+1 = (t-1)+i(t+2) = u(t)+iv(t)$, т.е. параметрические уравнения $A'B': \begin{cases} u = t - 1 \\ v = t + 2 \end{cases}$, где по-прежнему t изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. Исключим параметр и получим уравнение прямой $v - u = 3$.

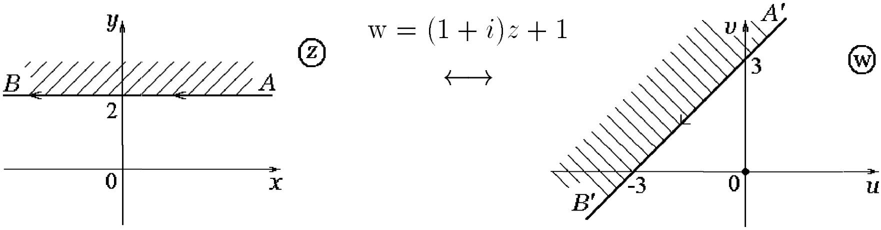


Рис. 1.5.1, *а*

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} - \operatorname{Re} \mathrm{w} < 3\}$.

2) Функция $\mathrm{w} = 1/z$ обладает следующими свойствами:

а) функция $\mathrm{w}{=}1/z$ однолистна в расширенной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ и конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$;

б) функция $\mathrm{w} = 1/z$ является суперпозицией симметрии относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат (инверсии) и симметрии относительно действительной оси: $\mathrm{w}_1 = 1/\overline{z}$, $\mathrm{w} = \overline{\mathrm{w}}_1$.

Определение. Две точки z_1 и z_2 называются *симметричными (инверсными)* относительно окружности $|z| = R$, если они лежат на одном луче, выходящем из точки $z = 0$ и $|z_1| \cdot |z_2| = R^2$. Эти точки связаны соотношением $z_1 = R^2/\overline{z}_2 = R^2 z_2/|z_2|^2$.

в) при отображении $\mathrm{w} = 1/z$ образом любой окружности является окружность, если прямую линию на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ рассматривать как окружность, проходящую через бесконечно удаленную точку $z = \infty$;

г) функция $\mathrm{w} = 1/z$ семейство прямых $\operatorname{Re} z = x = 1/2a$ отображает в окружности $(u-a)^2 + v^2 = a^2$, где $\mathrm{w} = u + iv$, а семейство прямых $\operatorname{Im} z = y = 1/2b$ отображает в окружности $u^2 + (v+b)^2 = b^2$ (рис. 1.5.1, *б*).

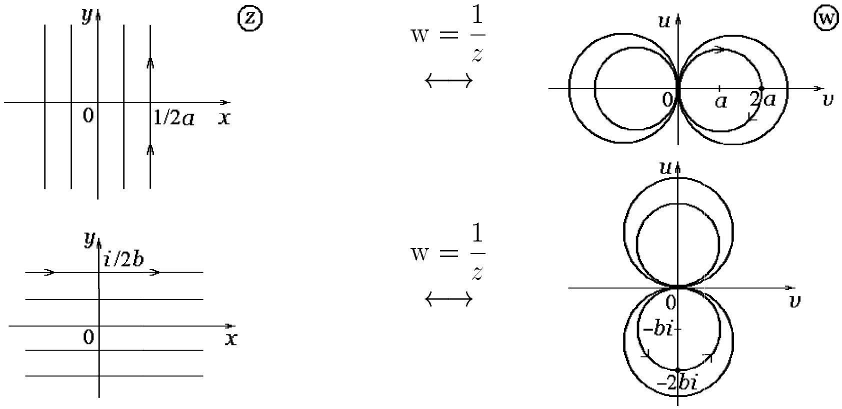


Рис. 1.5.1, ***б***

Найдем образ границы области D при отображении $\mathrm{w} = 1/z$ (рис. 1.5.1, *в*).

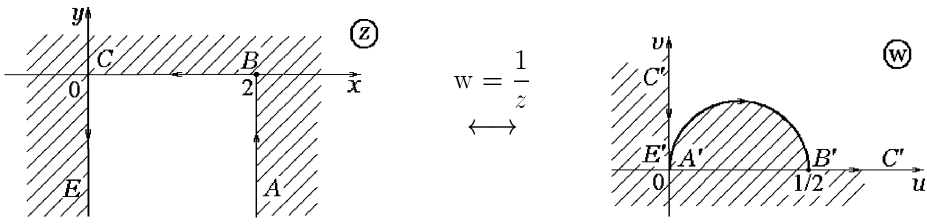


Рис. 1.5.1, в

Сначала рассмотрим участок границы на действительной оси $BC : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, где параметр t изменяется от 2 до 0. Параметрические уравнения образа $B'C' : \begin{cases} u = 1/t \\ v = 0 \end{cases}$, где $2 \geq t \geq 0$, причем имеет место соответствие точек $B = 2 \leftrightarrow B' = 1/2$ и $C = 0 \leftrightarrow C' = \infty$.

Параметрические уравнения части границы $CE:\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$, где параметр t меняется от 0 до $-\infty$. Параметрические уравнения образа $C'E':\begin{cases} u=0 \\ v=-1/t \end{cases}$, где $0>t>-\infty$, причем имеет место соответствие точек $C=0 \leftrightarrow C'=\infty$ и $E=\infty \leftrightarrow E'=0$.

Граница AB принадлежит прямой $x=2$. Учитывая, что $x=\operatorname{Re}z$, запишем это уравнение в виде $\frac{1}{2}(z+\overline{z})=2$ и заменим $z=1/\mathrm{w}$, где $\mathrm{w}=u+iv$:

$$\frac{1}{2}(z+\overline{z})=2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{w}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{w}}}\right)=2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{w}}+\mathrm{w})=2\mathrm{w}\overline{\mathrm{w}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; u=2(u^2+v^2) \;\Rightarrow\; \left(u-\frac{1}{4}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Отсюда следует, что прямая $x=2$ отображается в окружность $\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Функция $\mathrm{w}=1/z$ является композицией двух отображений: симметрии относительно единичной окружности и симметрии относительно действительной оси, следовательно, точки границы AB, лежащие в $\operatorname{Im}z<0$, должны отобразится в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\mathrm{w}>0$, как изображено на рис. 1.5.1, *в*.

Ответ. $G=\{\mathrm{w}:\mathrm{w}\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Re}\mathrm{w}>0,\quad \operatorname{Im}\mathrm{w}>0,\quad |\mathrm{w}-1/4|>1/4\}$.

3) Найдем образ границы области D при отображении $\mathrm{w}=1/z$ (рис. 1.5.1, *г*).

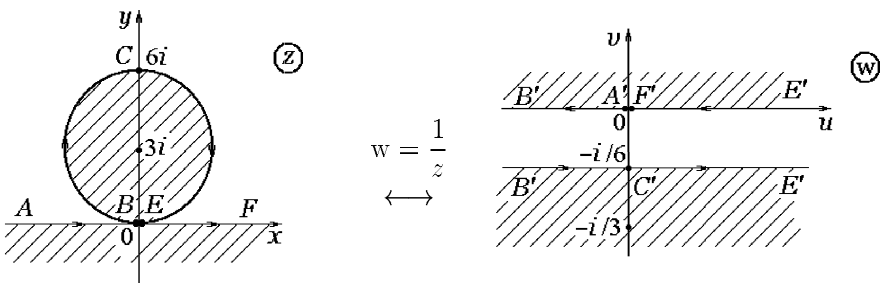


Рис. 1.5.1, г

Параметрические уравнения части границы AB имеют вид $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, где $-\infty < t < 0$, ее образ также лежит на действительной оси $A'B' : \begin{cases} u = 1/t \\ v = 0 \end{cases}$, где $-\infty < t < 0$, причем имеет место соответствие точек $A = -\infty \ \leftrightarrow \ A' = 0$ и $B = 0 \ \leftrightarrow \ B' = -\infty$.

Часть границы BCE задается уравнением $|z - 3i| = 3$ и отображается на кривую, определяемую уравнением

$$\left|\frac{1}{\mathrm{w}} - 3i\right| = 3 \ \Leftrightarrow \ |1 - 3i\mathrm{w}| = |3\mathrm{w}| \ \Leftrightarrow \ \left|\mathrm{w} + \frac{i}{3}\right| = |\mathrm{w}|.$$

Последнее уравнение задает геометрическое место точек комплексной плоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{w}}$, равноудаленных от точек $-i/3$ и 0, т.е. прямую $\operatorname{Im}\mathrm{w} = -1/6$.

Часть границы $EF : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, где $0 < t < +\infty$, отображается в $E'F'$: $\begin{cases} u = 1/t \\ v = 0 \end{cases}$, где $0 < t < +\infty$, причем $E = 0 \ \leftrightarrow \ E' = +\infty$ и $F = +\infty \ \leftrightarrow \ F' = 0$.
Принимая во внимание принцип соответствия границ (см. теорему 1.5.3) с сохранением направления обхода, получим ответ.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad -1/6 < \operatorname{Im}\mathrm{w} < 0\}$.

4) Найдем образ границы области D при отображении $\mathrm{w} = 1/z$ (рис. 1.5.1, *д*).

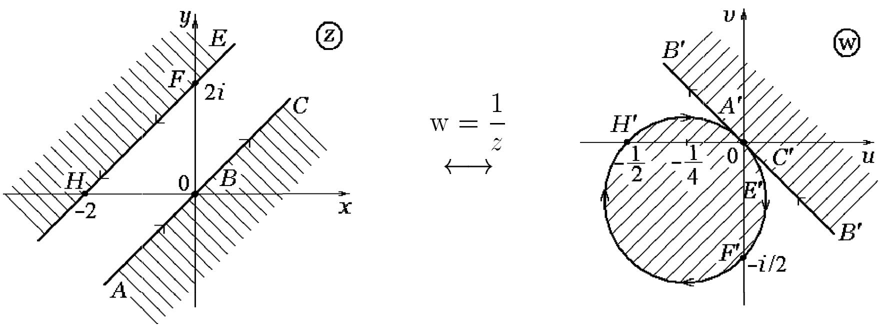


Рис. 1.5.1, *д*

Часть границы $ABC : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$, $-\infty < t < +\infty$ отобразится в прямую $A'B'C' : \begin{cases} u = 1/2t \\ v = -1/2t \end{cases}$, $-\infty < t < +\infty$, проходящую через начало координат, причем $A = \infty \ \leftrightarrow \ A' = 0$, $B = 0 \ \leftrightarrow \ B' = \infty$, $C = \infty \ \leftrightarrow \ C' = 0$.

Часть границы EFH — прямая, заданная уравнением $y - x = 2$. Учитывая, что $y = \operatorname{Im} z$ и $x = \operatorname{Re} z$, запишем это уравнение в виде $\dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}) - \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) = 2$. Найдем образ этой прямой при отображении $\mathrm{w} = 1/z$:

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\mathrm{w}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{w}}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{w}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{w}}}\right) = 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2i}(\overline{\mathrm{w}} - \mathrm{w}) - \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{w}} + \mathrm{w}) = 2\mathrm{w}\overline{\mathrm{w}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -v - u = 2(u^2 + v^2) \;\Leftrightarrow\; \left(u + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

Это окружность с центром в точке $-(1+i)/4$ радиуса $\sqrt{2}/4$. Принимая во внимание принцип соответствия границ с сохранением направления обхода, получим ответ.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w} + (1+i)/4| > \sqrt{2}/4, \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} + \operatorname{Re}\mathrm{w} < 0\}$.

5) Область D изображена на рис. 1.5.1, *е*.

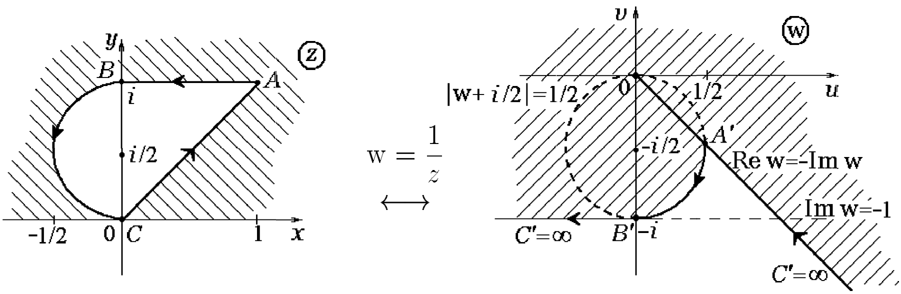


Рис. 1.5.1, *е*

Найдем образ границы области D при отображении $\mathrm{w} = 1/z$. Отрезок AB лежит на прямой $\operatorname{Im} z = 1$, которая отображается в окружность $|\mathrm{w} + i/2| = 1/2$. Действительно:

$$\operatorname{Im} z = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{z - \overline{z}}{2i} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1/\mathrm{w} - 1/\overline{\mathrm{w}}}{2i} = 1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{\mathrm{w} - \overline{\mathrm{w}}}{2i} = \mathrm{w}\overline{\mathrm{w}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -\operatorname{Im}\mathrm{w} = |\mathrm{w}|^2 \;\Leftrightarrow\; u^2 + v^2 + v = 0 \;\Leftrightarrow\; u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \left|\mathrm{w} + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Полуокружность BC лежит на окружности $|z - i/2| = 1/2$, которая отображается на прямую $\operatorname{Im}\mathrm{w} = -1$ (см. рис. 1.5.1, *б*). Отрезок

CA лежит на прямой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, которая отображается в прямую $\operatorname{Re} \mathrm{w} = -\operatorname{Im} \mathrm{w}$. Действительно:

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \;\Leftrightarrow\; \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z-\overline{z}}{2i} \;\Leftrightarrow\; \frac{1/\mathrm{w}+1/\overline{\mathrm{w}}}{2} = \frac{1/\mathrm{w}-1/\overline{\mathrm{w}}}{2i} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{w}+\overline{\mathrm{w}}}{2} = -\frac{\mathrm{w}-\overline{\mathrm{w}}}{2i} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re} \mathrm{w} = -\operatorname{Im} \mathrm{w}.$$

Принимая во внимание принцип соответствия границ с сохранением направления обхода (см. теорему 1.5.3), получим область G, изображенную на рис. 1.5.1, *е*.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \;\; \{\operatorname{Im} \mathrm{w} < -1,\; \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0\} \cup \{|\mathrm{w} + i/2| > 1/2,$ $-\pi/2 \le \arg \mathrm{w} < \pi/4\}\}$.

6) Область D изображена на рис. 1.5.1, *ж*.

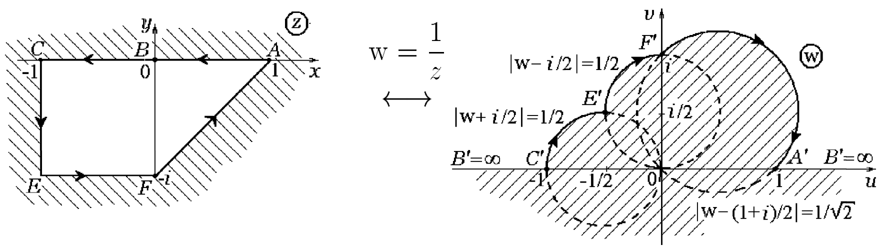


Рис. 1.5.1, *ж*

Найдем образ границы области D при отображении $\mathrm{w} = 1/z$. Отрезок ABC лежит на прямой $\operatorname{Im} y = 0$, которая отображается в прямую $\operatorname{Im} \mathrm{w} = 0$, причем $A = 1 \longleftrightarrow A' = 1$, $B = 0 \longleftrightarrow B' = \infty$, $C = -1 \longleftrightarrow C' = -1$.

Отрезок CE лежит на прямой $\operatorname{Re} z = -1$, которая отображается в окружность $|\mathrm{w} + 1/2| = 1/2$. Действительно:

$$\operatorname{Re} z = -1 \;\Leftrightarrow\; \frac{z+\overline{z}}{2} = -1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1/\mathrm{w}+1/\overline{\mathrm{w}}}{2} = -1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{w}+\overline{\mathrm{w}}}{2} = -\mathrm{w}\overline{\mathrm{w}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; |\mathrm{w}|^2 + \operatorname{Re} \mathrm{w} = 0 \;\Leftrightarrow\; u^2 + v^2 + u = 0 \;\Leftrightarrow\; (u+1/2)^2 + v^2 = 1/4 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; |\mathrm{w} + 1/2| = 1/2.$$

Отрезок EF лежит на прямой $\operatorname{Im} z = -1$, которая отображается в окружность $|\mathrm{w} - i/2| = 1/2$ (см. рис. 1.5.1, *б*).

Отрезок FA лежит на прямой $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 1$, которая отображается на окружность $|\mathrm{w} - (1+i)/2| = 1/\sqrt{2}$. Действительно:

$$\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{z+\overline{z}}{2} - \frac{z-\overline{z}}{2i} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1/\mathrm{w} + 1/\overline{\mathrm{w}}}{2} - \frac{1/\mathrm{w} - 1/\overline{\mathrm{w}}}{2i} = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{w}+\overline{\mathrm{w}}}{2} + \frac{\mathrm{w}-\overline{\mathrm{w}}}{2i} = \mathrm{w}\overline{\mathrm{w}} \;\Leftrightarrow\; |\mathrm{w}|^2 - \operatorname{Re}\mathrm{w} - \operatorname{Im}\mathrm{w} = 0 \;\Leftrightarrow\; u^2+v^2-u-v = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (u-1/2)^2 + (v-1/2)^2 = 1/2 \;\Leftrightarrow\; |\mathrm{w} - (1+i)/2| = 1/\sqrt{2}.$$

Принимая во внимание принцип соответствия границ с сохранением направления обхода (см. теорему 1.5.3), получим область G, изображенную на рис. 1.5.1, *ж*.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0,\; |\mathrm{w} + 1/2| > 1/2,\; |\mathrm{w} - i/2| > 1/2,\; |\mathrm{w} - (1+i)/2| > 1/\sqrt{2}\}$.

Задача 1.5.1. Найти образ G области D при отображении $\mathrm{w}=\mathrm{w}(z)$.

1. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Re} z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (1+i)z + 1;$

   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; 0 < \operatorname{Re} z < 1/2,\; \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z;$

   3) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Re} z < 1,\; -\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < 1\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

2. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Im} z > 1\}, \quad \mathrm{w} = (2-i)z + 1;$

   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; 0 < \operatorname{Im} z < 1,\; \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z;$

   3) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Re} z > 0,\; \operatorname{Re} z - 1 < \operatorname{Im} z < 1 - \operatorname{Re} z\}, \; \mathrm{w} = 1/z.$

3. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Re} z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (1-i)z + 1;$

   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; -1 < \operatorname{Re} z < 0,\; \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \mathrm{w} = 1/z;$

   3) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; -1 < \operatorname{Re} z < 1,\; 0 < \operatorname{Im} z < 1\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

4. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Re} z < 2\}, \quad \mathrm{w} = (1+i)z + 1;$

   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; |z - i| > 1,\; |z - 2i| < 2\}, \quad \mathrm{w} = 1/z;$

   3) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; -\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z,\; \operatorname{Im} z < 1\}, \quad \mathrm{w} = 1/z.$

5. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Im} z < -1\}, \quad \mathrm{w} = (2-i)z + 1;$

   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; |z - 1| > 1,\; |z - 2| < 2\}, \quad \mathrm{w} = 1/z;$

   3) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Im} z - 1 < \operatorname{Re} z < \sqrt{1/4 - (\operatorname{Im} z - 1/2)^2}\}, \; \mathrm{w} = 1/z.$

6. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z>1\},\quad \mathrm{w}=(1-i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -1<\mathrm{Re}\,z<0,\ \ \mathrm{Im}\,z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -\mathrm{Im}\,z<\mathrm{Re}\,z<\sqrt{1/4-(\mathrm{Im}\,z-1/2)^2}\},\ \mathrm{w}=1/z.$

7. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z>1\},\quad \mathrm{w}=(2+i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\mathrm{Im}\,z<1/2,\ \ \mathrm{Re}\,z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -1<\mathrm{Re}\,z<\sqrt{1/4-(\mathrm{Im}\,z-1/2)^2}\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

8. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1+i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z+i|>1,\ \ |z+2i|<2\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z<1,\ \ |z-i|<1\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

9. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<2\},\quad \mathrm{w}=(1-i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\mathrm{Re}\,z<1,\ \ \mathrm{Im}\,z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z>-1,\ \ \mathrm{Re}\,z<\mathrm{Im}\,z<1\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

10. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1+2i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z<1\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z>0,\ \mathrm{Im}\,z-1<\mathrm{Re}\,z<1-\mathrm{Im}\,z\},\ \mathrm{w}=1/z.$

11. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z>1\},\quad \mathrm{w}=(1+2i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z+1|>1,\ \ |z+2|<2\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -1<\mathrm{Re}\,z<0,\ \ -1<\mathrm{Im}\,z<1\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

12. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Im}\,z>1\},\quad \mathrm{w}=(1-2i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -1<\mathrm{Im}\,z<0,\ \ \mathrm{Re}\,z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z>-1,\ \ \mathrm{Re}\,z<\mathrm{Im}\,z<-\mathrm{Re}\,z\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

13. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1-2i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -1<\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad -\sqrt{1/4-(\mathrm{Im}\,z-1/2)^2}<\mathrm{Re}\,z<1-\mathrm{Im}\,z\},\ \mathrm{w}=1/z.$

14. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<2\},\quad \mathrm{w}=(2+i)z+1;$
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\mathrm{Im}\,z-\mathrm{Re}\,z<1\},\quad \mathrm{w}=1/z;$
3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,z<\mathrm{Im}\,z<\sqrt{1/4-(\mathrm{Re}\,z+1/2)^2}\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

15. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1+i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -1<\operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -\sqrt{1/4-(\operatorname{Im}z-1/2)^2}<\operatorname{Re}z<1\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

16. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z>1\},\quad \mathrm{w}=(1-2i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z-i|>1,\ \ \operatorname{Im}z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -1<\operatorname{Re}z<-1+\sqrt{1-(\operatorname{Im}z)^2}\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

17. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z>1\},\quad \mathrm{w}=(1+2i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -1<\operatorname{Im}z<0,\ \ \operatorname{Re}z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z<1,\ \ -1<\operatorname{Im}z<\operatorname{Re}z\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

18. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1+2i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ 1<\operatorname{Re}z<2,\ \ \operatorname{Im}z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z<0,\ -1-\operatorname{Re}z<\operatorname{Im}z<1+\operatorname{Re}z\},\ \mathrm{w}=1/z.$

19. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z>2\},\quad \mathrm{w}=(2-i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z-1|>1,\ \ \operatorname{Re}z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -1<\operatorname{Re}z<1,\ \ -1<\operatorname{Im}z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

20. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z<-1\},\quad \mathrm{w}=(1-i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z-2i|>2,\ \ \operatorname{Im}z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z<\operatorname{Re}z<-\operatorname{Im}z,\ \ -1<\operatorname{Im}z\},\quad \mathrm{w}=1/z.$

21. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z>1\},\quad \mathrm{w}=(2+i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z-2|>2,\ \ \operatorname{Re}z>0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -1-\operatorname{Im}z<\operatorname{Re}z<\sqrt{1/4-(\operatorname{Im}z+1/2)^2}\},\ \mathrm{w}=1/z.$

22. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z>1\},\quad \mathrm{w}=(1+i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z+i|>1,\ \ \operatorname{Im}z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -\sqrt{1/4-(\operatorname{Im}z+1/2)^2}<\operatorname{Re}z<-\operatorname{Im}z\},\ \mathrm{w}=1/z.$

23. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z<-1\},\quad \mathrm{w}=(2-i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z+2i|>2,\ \ \operatorname{Im}z<0\},\quad \mathrm{w}=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -1<\operatorname{Im}z<\sqrt{1/4-(\operatorname{Re}z+1/2)^2}\},\ \mathrm{w}=1/z.$

24. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z>2\},\quad w=(1-2i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -2<\operatorname{Im}z<-1,\ \ \operatorname{Re}z>0\},\quad w=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z>-1,\ \ |z+i|<1\},\ \ w=1/z.$

25. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z<-1\},\quad w=(2+i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ 2<\operatorname{Re}z<4,\ \ \operatorname{Im}z>0\},\quad w=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z>-1,\ \ -1<\operatorname{Im}z<-\operatorname{Re}z\},\ \ w=1/z.$

26. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z>1\},\quad w=(1-i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -1<\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z<1\},\quad w=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z<0,\ -1-\operatorname{Im}z<\operatorname{Re}z<1+\operatorname{Im}z\},\ w=1/z.$

27. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z>-1\},\quad w=(1+i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z+1|>1,\ \ \operatorname{Re}z<0\},\quad w=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ 0<\operatorname{Re}z<1,\ -1<\operatorname{Im}z<1\},\ w=1/z.$

28. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z<-1\},\quad w=(1-2i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ 0<\operatorname{Re}z<1,\ \ \operatorname{Im}z<0\},\quad w=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z<1,\ \ -\operatorname{Re}z<\operatorname{Im}z<\operatorname{Re}z\},\ w=1/z.$

29. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z>2\},\quad w=(2+i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z+2|>2,\ \ \operatorname{Re}z<0\},\quad w=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ -\sqrt{1/4-(\operatorname{Im}z+1/2)^2}<\operatorname{Re}z<1+\operatorname{Im}z\},\ w=1/z.$

30. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z<2\},\quad w=(2-i)z+1;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ 0<\operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z<1\},\quad w=1/z;$

3) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|<1\},\ w=1/z.$

Пример 1.5.2. Найти дробно-линейную функцию $w=w(z)$, конформно отображающую область D на область G и удовлетворяющую дополнительным условиям:

1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ |z|<1\},\quad G=\{w:\ w\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}w<-1\},$ $w(i)=-1,\ \ w(0)=-2;$

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Re}z>0,\ \ \operatorname{Im}z<0\},\quad G=\{w:\ w\in\mathbb{C}\ \ |w|<2,$ $\operatorname{Im}w>0\},\quad w(0)=-2,\ \ w(-i)=0;$

3) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C}\quad \operatorname{Re} z < 0,\ \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C}\quad |\mathrm{w}| < 1,$ $\operatorname{Im} \mathrm{w} > \operatorname{Re} \mathrm{w}\}$, $\mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(1+i)/2$, $\mathrm{w}(-1) = 0$.

Решение.

Определение. Функция

$$\mathrm{w} = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где} \quad ad - bc \neq 0,$$

называется *дробно-линейной.* Ее значение в ∞ по определению равно a/c.

Дробно-линейная функция обладает следующими свойствами:

а) дробно-линейная функция осуществляет взаимно-однозначное (однолистное) и конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на $\overline{\mathbb{C}}$;

б) дробно-линейная функция отображает окружность в окружность (если считать прямую линию вместе с точкой ∞ окружностью бесконечно большого радиуса);

в) дробно-линейная функция не изменяет двойное отношение любых попарно различных точек.

Определение. *Двойным (ангармоническим) отношением* четырех точек z, z_1, z_2, z_3 называется выражение

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z - z_3}{z_1 - z_3}. \tag{1.5.1}$$

Если одна из этих точек равна ∞, то соответствующую разность надо заменить на 1.

г) При дробно-линейном отображении симметрия точек относительно окружности сохраняется.

1) Воспользуемся этими свойствами при решении первой задачи.

Пусть точка $z_1 = i$ отображается в точку $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}(i) = -1$, а точка $z_2 = 0 \ \leftrightarrow \ \mathrm{w}_2 = \mathrm{w}(0) = -2$.

При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности (или прямой), переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности (или прямой). Рассмотрим точку $z_3 = \infty$, симметричную точке $z_2 = 0$ относительно границы $|z| = 1$ области D.

Точка $z_3 = \infty$ должна отображаться в точку $\mathrm{w}_3 = \mathrm{w}(\infty) = 0$, симметричную точке $\mathrm{w}_2 = -2$ относительно границы $\operatorname{Re} \mathrm{w} = -1$ области G (рис. 1.5.2, *а*).

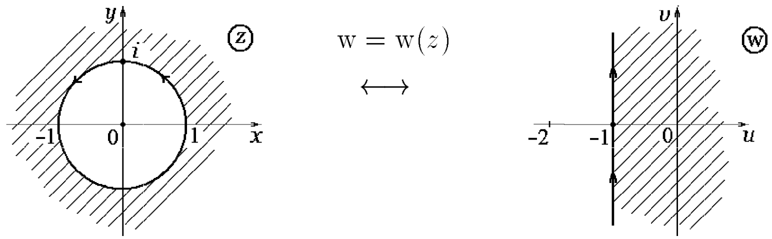


Рис. 1.5.2, *а*

Предположим, что точка z — произвольная точка области D, а w — ее образ, тогда по свойству сохранения двойного отношения (1.5.1) получим

$$\frac{z-0}{i-0} : \frac{z-\infty}{i-\infty} = \frac{\mathrm{w}+2}{-1+2} : \frac{\mathrm{w}-0}{-1-0}.$$

После преобразования этого выражения получим искомое отображение:

$$-\frac{\mathrm{w}+2}{\mathrm{w}} = \frac{z}{i} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{w} = \frac{2}{iz-1}.$$

Ответ. $\mathrm{w} = 2/(iz-1)$.

2) Пусть точка $z_1 = 0$ отображается в точку $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}(0) = -2$, а точка $z_2 = -i \;\leftrightarrow\; \mathrm{w}_2 = \mathrm{w}(-i) = 0$. Заметим, что свойство сохранения углов в точке $z_1 = 0$ и $\mathrm{w}_1 = -2$ выполняется (рис. 1.5.2, *б*).

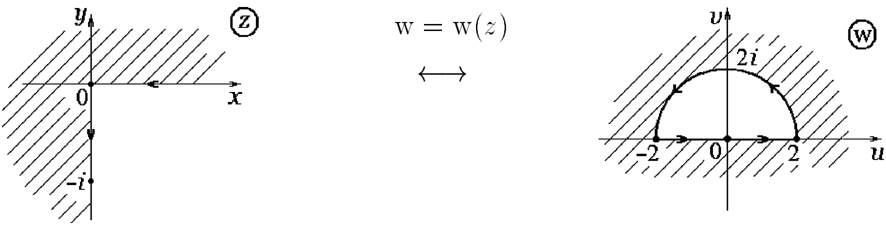


Рис. 1.5.2, *б*

Потребуем, чтобы точка $z_3 = \infty$ отображалась в $\mathrm{w}_3 = \mathrm{w}(\infty) = 2$ (свойство сохранения углов будет выполнено). Искомая дробно-линейная функция находится из свойства инвариантности двойного отношения попарно различных четырех точек z, z_1, z_2, z_3 (см. формулу (1.5.1)):

$$\frac{z+i}{0+i} : \frac{z-\infty}{0-\infty} = \frac{\mathrm{w}-0}{-2-0} : \frac{\mathrm{w}-2}{-2-2} \ \Leftrightarrow\ \frac{z+i}{i} = \frac{2\mathrm{w}}{\mathrm{w}-2} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{w} = \frac{2(z+i)}{z-i}.$$

Ответ. $\mathrm{w} = 2(z+i)/(z-i)$.

3) Выберем три точки $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = \infty$ так, чтобы при последовательном обходе вдоль границы область D оставалась слева. Потребуем, чтобы дробно-линейная функция $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$ отобразила эти точки в $\mathrm{w}_1 = 0$, $\mathrm{w}_2 = \sqrt{2}(1+i)/2$, $\mathrm{w}_3 = -\sqrt{2}(1+i)/2 = -\mathrm{w}_2$ (рис. 1.5.2, *в*).

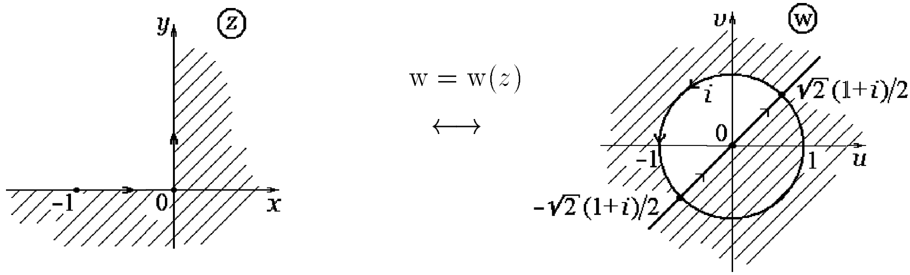


Рис. 1.5.2, *в*

Заметим, что свойство сохранения углов в угловых точках будет выполнено. Воспользуемся инвариантностью двойного отношения попарно различных четырех точек z, z_1, z_2, z_3 (см. формулу (1.5.1)):

$$\frac{z-0}{-1-0} : \frac{z-\infty}{-1-\infty} = \frac{\mathrm{w}-\mathrm{w}_2}{0-\mathrm{w}_2} : \frac{\mathrm{w}+\mathrm{w}_2}{0+\mathrm{w}_2} \ \Leftrightarrow\ z = \frac{(\mathrm{w}-\mathrm{w}_2)\mathrm{w}_2}{\mathrm{w}_2(\mathrm{w}+\mathrm{w}_2)} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{w} = \mathrm{w}_2\frac{z+1}{1-z}.$$

Ответ. $\mathrm{w} = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2} \cdot \dfrac{z+1}{1-z}$.

Задача 1.5.2. Найти дробно-линейную функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на область G и удовлетворяющую дополнительным условиям.

1. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 1\}$, $\quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\}$,
$\mathrm{w}(i) = 2$, $\ \mathrm{w}(2i) = 0$.

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 0\}$,
$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -2.$

2. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\}$,
$\mathrm{w}(1) = 2i, \quad \mathrm{w}(2) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 0, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > -\mathrm{Im}\, \mathrm{w}\}$,
$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 3\sqrt{2}(1 - i)/2.$

3. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} < 1\}$,
$\mathrm{w}(0) = -2i, \quad \mathrm{w}(1) = i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > \mathrm{Im}\, \mathrm{w}\}$,
$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -2\sqrt{2}(1 + i).$

4. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > 1\}$,
$\mathrm{w}(0) = 2, \quad \mathrm{w}(1) = 1.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 0, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 5, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > 0\}$,
$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -5i.$

5. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 3\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 2\}$,
$\mathrm{w}(0) = 4i, \quad \mathrm{w}(3i) = 2i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} < 0\}$,
$\mathrm{w}(i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -1.$

6. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z > 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\}$,
$\mathrm{w}(2i) = 2, \quad \mathrm{w}(4i) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 0, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} < 0\}$,
$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -2i.$

7. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3\},$

$\mathrm{w}(1) = 3i, \quad \mathrm{w}(2) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < \operatorname{Im} \mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 3\sqrt{2}(1+i)/2.$

8. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < -2\},$

$\mathrm{w}(0) = -4i, \quad \mathrm{w}(2) = -2i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < -\operatorname{Im} \mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 2\sqrt{2}(-1+i).$

9. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 1\},$

$\mathrm{w}(0) = 2, \quad \mathrm{w}(2) = 1.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 5, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > -\operatorname{Im} \mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 5\sqrt{2}(1-i)/2.$

10. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 3\},$

$\mathrm{w}(\infty) = 6i, \quad \mathrm{w}(2i) = 3i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > \operatorname{Im} \mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(1+i)/2.$

11. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 3\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\},$

$\mathrm{w}(3i) = 2, \quad \mathrm{w}(6i) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0\},$

$\mathrm{w}(-i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 2i.$

12. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3\},$

$\mathrm{w}(2) = 3i, \quad \mathrm{w}(4) = 0.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 0, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > 0\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 3.$

13. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 3\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} < -4\}$,

$\mathrm{w}(0) = -8i, \quad \mathrm{w}(3) = -4i.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < 0\}$,

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -4i.$

14. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 3\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} > 2\}$,

$\mathrm{w}(0) = 4, \quad \mathrm{w}(3) = 2.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 0, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 5, \quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} > 0\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 5i.$

15. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > 2\}$,

$\mathrm{w}(0) = 4i, \quad \mathrm{w}(i) = 2i.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad -\mathrm{Re}\,\mathrm{w} > \mathrm{Im}\,\mathrm{w}\}$,

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(-1+i)/2.$

16. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z > 1\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3\}$,

$\mathrm{w}(i) = 3, \quad \mathrm{w}(2i) = 0.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 0, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < -\mathrm{Im}\,\mathrm{w}\}$,

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(-1+i).$

17. 1) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 3\}, \quad G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2\}$,

$\mathrm{w}(3) = 2i, \quad \mathrm{w}(6) = 0.$

2) $D = \{z:\ z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$,

$G = \{\mathrm{w}:\ \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \quad \mathrm{Re}\,\mathrm{w} < -\mathrm{Im}\,\mathrm{w}\}$,

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 3\sqrt{2}(1-i)/2.$

18. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < -4\},$

$\mathrm{w}(0) = -8i, \quad \mathrm{w}(2) = -4i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad -\operatorname{Re} \mathrm{w} > \operatorname{Im} \mathrm{w}\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 2\sqrt{2}(1 - i).$

19. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 4\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 3\},$

$\mathrm{w}(0) = 6, \quad \mathrm{w}(4) = 3.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 5, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 5i.$

20. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 4\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 3\},$

$\mathrm{w}(0) = 6i, \quad \mathrm{w}(4i) = 3i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\},$

$\mathrm{w}(i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 1.$

21. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3\},$

$\mathrm{w}(2i) = 3, \quad \mathrm{w}(4i) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 2i.$

22. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 4\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3\},$

$\mathrm{w}(4) = 3i, \quad \mathrm{w}(8) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 3, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 3.$

23. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 3\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < -2\},$

$\mathrm{w}(0) = -4i, \quad \mathrm{w}(3) = -2i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 4, \quad \mathrm{Re\,w} < -\mathrm{Im\,w}\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 2\sqrt{2}(-1 + i).$

24. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 3\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re\,w} > 4\},$

$\mathrm{w}(0) = 8, \quad \mathrm{w}(3) = 4.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\,z < 0, \quad \mathrm{Im}\,z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 5, \quad \mathrm{Re\,w} < \mathrm{Im\,w}\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 5\sqrt{2}(1 - i)/2.$

25. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 3\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im\,w} < 4\},$

$\mathrm{w}(\infty) = 0, \quad \mathrm{w}(3i) = 4i.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\,z > 0, \quad \mathrm{Im}\,z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Re\,w} < \mathrm{Im\,w}\},$

$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(-1 + i)/2.$

26. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\,z > -1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1\},$

$\mathrm{w}(-i) = 1, \quad \mathrm{w}(0) = 0.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\,z < 0, \quad \mathrm{Im}\,z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Im\,w} > \mathrm{Re\,w}\},$

$\mathrm{w}(-i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(1 + i)/2.$

27. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\,z < 2\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| > 1\},$

$\mathrm{w}(2) = -1, \quad \mathrm{w}(0) = \infty.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\,z > 0, \quad \mathrm{Im}\,z < 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Im\,w} < 0\},$

$\mathrm{w}(-i) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = 1.$

28. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re\,w} < -1\},$

$\mathrm{w}(1) = -1, \quad \mathrm{w}(\infty) = -2.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\,z < 0, \quad \mathrm{Im}\,z > 0\},$

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Re\,w} < 0\},$

$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = i.$

29. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| > 1\},$
$\mathrm{w}(i) = 1, \quad \mathrm{w}(0) = \infty.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > \mathrm{Re}\,\mathrm{w}\},$
$\mathrm{w}(1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = \sqrt{2}(-1 - i).$

30. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 1\}, \quad G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| > 2\},$
$\mathrm{w}(1) = 2i, \quad \mathrm{w}(0) = \infty.$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z < 0, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 2, \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > 0\},$
$\mathrm{w}(-1) = 0, \quad \mathrm{w}(0) = -2.$

Пример 1.5.3. Найти какую-либо функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{w} > 0\}$:

1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, z > 0, \quad z \notin [i, i+2], \quad z \notin [3+i, +\infty + i]\};$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin \{|z| = 1, \quad \mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, z \le 0\}\}.$

Решение. Степенная функция $\mathrm{w} = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ обладает следующими свойствами:

а) степенная функция однозначна и аналитична в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;

б) областями однолистности являются клинья $D_k = \left\{z : z \in \mathbb{C} \quad \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n}\right\}$, $k = \overline{0, n-1}$. Каждая из областей D_k отображается на плоскость с разрезом по положительной действительной оси $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [0, \infty]\}$, если считать главное значение аргумента определенным в пределах $0 < \arg z < 2\pi$;

в) в точке $z = 0$ нарушается локальная однолистность, так как ее производная $\mathrm{w}' = nz^{n-1}$ обращается в ноль (точка $z = 0$ — точка ветвления).

В частности, функция $\mathrm{w} = z^2$ однолистно и конформно отображает области $D_0 = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z > 0\}$ и $D_1 = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, z < 0\}$ на плоскость с разрезом по положительной действительной оси

$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [0, \infty]\}$. Соответственно однозначная нулевая ветвь квадратного корня $z = \sqrt[2]{\mathrm{w}} = \sqrt{|\mathrm{w}|}\, e^{i \arg \mathrm{w}/2}$ отображает G на D_0, а однозначная первая ветвь квадратного корня $z = \sqrt[2]{\mathrm{w}} = \sqrt{|\mathrm{w}|}\, e^{i\,(\arg \mathrm{w} + 2\pi)/2}$ отображает G на D_1.

1) Рассмотрим композицию отображений $\mathrm{w}_1 = (z - i)$, $\mathrm{w}_2 = (z - i)^2$, $\mathrm{w}_3 = \dfrac{\mathrm{w}_2 - 9}{\mathrm{w}_2 - 4}$, $\mathrm{w} = \sqrt[2]{\mathrm{w}_3}$, которая представлена на рис. 1.5.3, *а*, где под символом $\sqrt[2]{\cdot}$ понимается нулевая ветвь квадратного корня.

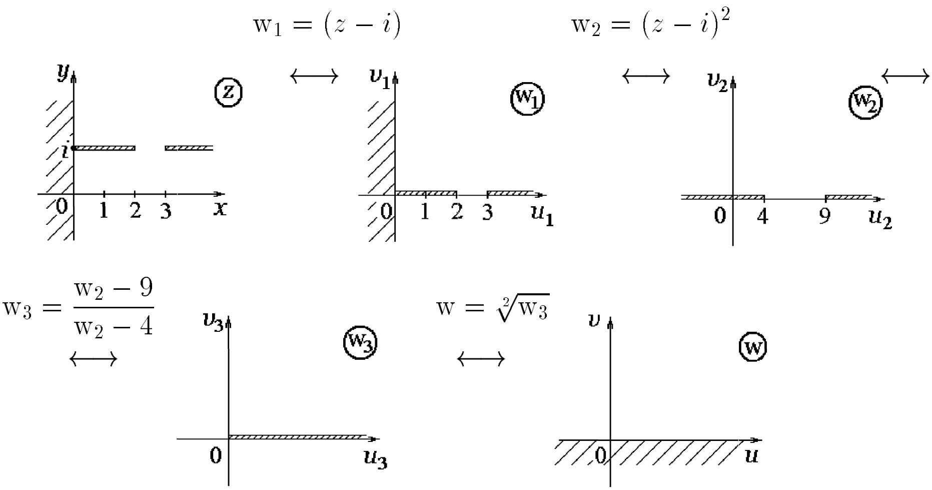


Рис. 1.5.3, *а*

Ответ. $\mathrm{w} = \sqrt[2]{\dfrac{(z - i)^2 - 9}{(z - i)^2 - 4}}$.

2) Сначала найдем дробно-линейную функцию, отображающую окружность $|z| = 1$ на действительную ось $\operatorname{Im} \widetilde{\mathrm{w}} = 0$ так, чтобы точки $z_1 = -\sqrt{2}(1 + i)/2$, $z_2 = 1$, $z_3 = \sqrt{2}(1 + i)/2$ отобразились соответственно в точки $\widetilde{\mathrm{w}}_1 = 0$, $\widetilde{\mathrm{w}}_2 = 1$, $\widetilde{\mathrm{w}}_3 = \infty$ (рис. 1.5.3, *б*). Воспользуемся свойством дробно-линейной функции сохранять двойное отношение попарно различных четырех точек z, z_1, z_2, z_3 (см. формулу (1.5.1)):

$$\frac{z-1}{z_1-1}:\frac{z-z_3}{z_1-z_3}=\frac{\widetilde{\mathrm{w}}-1}{0-1}:\frac{\widetilde{\mathrm{w}}-\infty}{0-\infty} \;\Leftrightarrow\; \frac{z-1}{z_1-1}\cdot\frac{2z_1}{z+z_1}=1-\widetilde{\mathrm{w}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \widetilde{\mathrm{w}}=\frac{(z-z_1)(z_1+1)}{(z+z_1)(1-z_1)}.$$

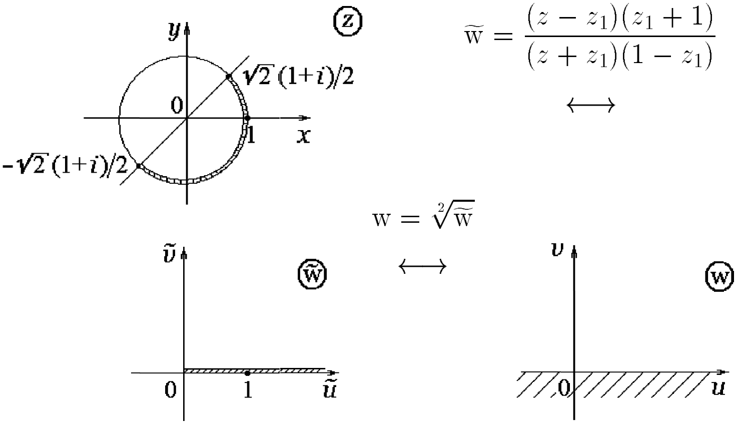


Рис. 1.5.3, *б*

Далее применяем нулевую ветвь квадратного корня $\mathrm{w}=\sqrt[2]{\widetilde{\mathrm{w}}}=$ $=\sqrt{|\widetilde{\mathrm{w}}|}\,e^{i\arg\widetilde{\mathrm{w}}/2}$, где $0<\arg\widetilde{\mathrm{w}}<2\pi$.

Ответ. $\mathrm{w}=\sqrt[2]{\dfrac{(z+\sqrt{2}(1+i)/2)(1-\sqrt{2}(1+i)/2)}{(z-\sqrt{2}(1+i)/2)(1+\sqrt{2}(1+i)/2)}}.$

Задача 1.5.3. Найти какую-либо функцию $\mathrm{w}=\mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на полуплоскость $G=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}\mathrm{w}>0\}$. Символом $[z_1,z_2]$ обозначается отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и z_2.

1. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im}z>0,\ \ z\notin[1,\,1+i]\}$.
2. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ z\notin[0,1]\}$.
3. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ z\notin[-\infty,0],\ \ z\notin[1,+\infty]\}$.
4. $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ z\notin\{\,|z|=1,\ \ 0\le\arg z\le\pi\,\}\}$.

5. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin \{\, |z| = 1, \quad |\arg z| \leq \pi/2 \,\}\}$.

6. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad z \notin [-1 + i, i]\}$.

7. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [0, i]\}$.

8. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [-i\infty, 0], \quad z \notin [i, +i\infty]\}$.

9. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad z \notin [-\infty, -2], \quad z \notin [-1, 0]\}$.

10. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [0, i], \quad z \notin [2i, +i\infty]\}$.

11. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \in [-1, -1 - i]\}$.

12. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [-1, 0]\}$.

13. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [-\infty, -1], \quad z \notin [0, +\infty]\}$.

14. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [0, \sqrt{2}(1 + i)/2]\}$.

15. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin \{\, |z| = 1, \quad -\pi \leq \arg z \leq 0 \,\}\}$.

16. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad z \in [i, 1 + i]\}$.

17. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [-i, 0]\}$.

18. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [-i\infty, -i], \quad z \notin [0, +i\infty]\}$.

19. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin \{\, |z| = 1, \quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z \geq 0 \,\}\}$.

20. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin \{\, |z| = 1, \quad \operatorname{Re} z \leq 0 \,\}\}$.

21. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z > 0, \quad z \notin [\, 0, \sqrt{2}(-1 + i)/2 \,]\}$.

22. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [\, -i\infty, -2i \,], \quad z \notin [-i, 0]\,\}$.

23. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [-\infty - i, -i], \quad z \notin [1 - i, +\infty - i]\,\}$.

24. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} > 0, \quad z \notin [0, 1], \quad z \notin [2, +\infty]\,\}$.

25. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [1, 1 + i], \quad z \notin [1 + 2i, 1 + i\infty]\,\}$.

26. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0, \quad z \notin [0, \sqrt{2}(1 + i)/2]\,\}$.

27. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \in [0, \sqrt{2}(-1 + i)/2]\,\}$.

28. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin \{\, |z| = 1, \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq 0 \,\}\}$.

29. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad z \notin [-\infty - i, -2 - i], \quad z \notin [-1 - i, -i]\,\}$.

30. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad z \notin [1 - i\infty, 1], \quad z \notin [1 + i, 1 + i\infty]\,\}$.

Пример 1.5.4. Найти какую-либо функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на область G :

1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -2 < \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < -1\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -2 < \operatorname{Im} z < -1, \quad \operatorname{Re} z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$;

3) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z + 1 - i| > \sqrt{2}, \quad |z + 2 - 2i| < 2\sqrt{2}\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$;

4) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z + 1| > 1, \quad |z + 2| < 2, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$;

5) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z + 1 + i| > \sqrt{2}, \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

Решение. Показательная функция $\mathrm{w} = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ обладает следующими свойствами:

а) показательная функция однозначна и аналитична в $\mathbb{C}$, $z = \infty$ является существенно особой точкой;

б) областями однолистности являются полосы $D_k = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k + 1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Каждая из областей D_k отображается на плоскость с разрезом по положительной действительной оси $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [0, \infty]\}$. Соответственно каждая однозначная ветвь обратной функции $z = \operatorname{Ln} \mathrm{w} = \ln |\mathrm{w}| + i(\arg \mathrm{w} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (при фиксированном k) отображает G на D_k, если считать главное значение аргумента определенным в пределах $0 < \arg \mathrm{w} < 2\pi$;

в) прямая $\operatorname{Re} z = x = a$ в области D_k отображается в окружность с выколотой точкой $|\mathrm{w}| = e^a$, $\operatorname{Re} \mathrm{w} \neq e^a$, а отрезок $\operatorname{Im} z = y = b$ в области D_k отображается в луч $\mathrm{w} = e^x e^{ib}$, $-\infty < x < +\infty$.

1) Рассмотрим композицию отображений (рис. 1.5.4, *а*).

Сначала применим линейное отображение $\mathrm{w}_1 = (z + 2i)e^{-i\pi/4}\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$ — сдвиг на $2i$, поворот вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $\pi/4$ и растяжение с коэффициентом $\pi\sqrt{2}/2$.

Затем применим показательную функцию $\mathrm{w}_2 = e^{\mathrm{w}_1}$, которая отображает прямую ABC в луч $A'B'C'$, а часть границы EFH — в луч $E'F'H'$. Последнее дробно-линейное отображение $\mathrm{w} = (\mathrm{w}_2 - 1)/(\mathrm{w}_2 + 1)$ отображает точки $H' = A' = 0$, $B' = 1$, $C' = E' = \infty$ соответственно в точки $A'' = -1$, $B'' = 0$, $C'' = 1$.

Ответ. $\mathrm{w} = \dfrac{\exp[\pi(1 - i)(z + 2i)/2] - 1}{\exp[\pi(1 - i)(z + 2i)/2] + 1}$.

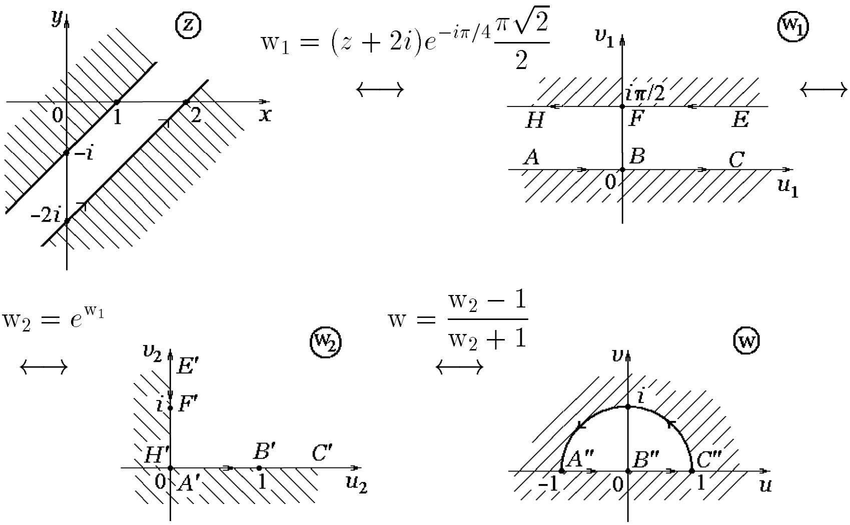


Рис. 1.5.4, *а*

2) Рассмотрим композицию отображений, изображенную на рис. 1.5.4, *б*. Сначала применим линейное отображение $w_1 = (z+3i)\dfrac{\pi}{2}$ — сдвиг на $3i$, растяжение с коэффициентом $\pi/2$.

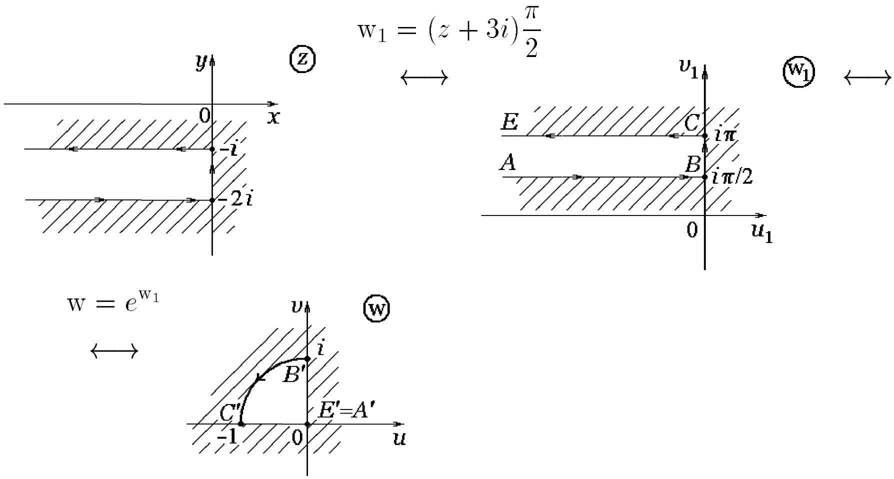


Рис. 1.5.4, *б*

Затем применяем показательную функцию $\text{w} = e^{\text{w}_1}$. Часть границы AB отображается в точки луча, аргументы у которых равны $\pi/2$, действительно, $AB : \begin{cases} v_1 = \pi/2 \\ u_1 = t \end{cases}, -\infty < t < 0 \leftrightarrow A'B' : \text{w} = e^t e^{i\pi/2}$, $-\infty < t < 0$.

Отрезок BC отобразится в точки единичной окружности — BC : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = t \end{cases}, \pi/2 < t < \pi \leftrightarrow B'C' : \text{w} = e^{it}, \pi/2 < t < \pi$. Отрезок $CE : \begin{cases} u_1 = t \\ v_1 = \pi \end{cases}, 0 > t > -\infty$ отобразится в точки луча, у которых аргументы равны $\pi \leftrightarrow C'E' : \text{w} = e^t e^{i\pi}, 0 > t > -\infty$.

Ответ. $\text{w} = \exp\left((z + 3i)\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Замечание. Полученное выражение можно преобразовать:

$$\text{w} = e^{(z+3i)\pi/2} = e^{z\pi/2}e^{i3\pi/2} = -ie^{z\pi/2}.$$

Отсюда следует, что можно было рассмотреть следующую композицию отображений: $\text{w}_1 = \dfrac{\pi}{2}z$, $\text{w}_2 = e^{\text{w}_1}$, $\text{w} = -i\text{w}_2$.

3) Рассмотрим следующую композицию отображений, изображенную на рис. 1.5.4, *в*. Сначала выполним поворот вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $\pi/4$ $\text{w}_1 = e^{-i\pi/4}z$. Затем применим функцию $\text{w}_2 = 1/\text{w}_1$, растяжение $\text{w}_3 = 2\sqrt{2}\pi\text{w}_2$ и показательную функцию $\text{w} = \exp(\text{w}_3)$.

Ответ. $\text{w} = \exp\left(\dfrac{2\sqrt{2}\pi e^{i\pi/4}}{z}\right) = \exp\left(\dfrac{2\pi(1+i)}{z}\right)$.

Замечание. Можно было бы область D отобразить на полосу $\{\widetilde{\text{w}} : \widetilde{\text{w}} \in \mathbb{C} \ \ -\pi < \operatorname{Im}\widetilde{\text{w}} < -\pi/2\}$ с помощью дробно-линейной функции, используя свойство сохранения двойного отношения четырех точек. Например, отобразить точки $z_1 = 4i$, $z_2 = -4$, $z_3 = -2$ в точки $\widetilde{\text{w}}_1 = -\pi(1+i)$, $\widetilde{\text{w}}_2 = \pi(1-i)$, $\widetilde{\text{w}}_3 = -i\pi/2$.

4) Рассмотрим следующую композицию отображений, изображенную на рис. 1.5.4, *г*. Сначала применим функцию $\text{w}_1 = 1/z$, затем выполним сдвиг полуполосы $\{\text{w}_1 : \text{w}_1 \in \mathbb{C} \ \ -1/2 < \operatorname{Re}\text{w}_1 < -1/4, \ \operatorname{Im}\text{w}_1 > 0\}$ вправо на $1/2$, поворот вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $\pi/2$ и растяжение с коэффициентом, равным 4π, $\text{w}_2 = (\text{w}_1 + 1/2)e^{i\pi/2}4\pi = (\text{w}_1 + 1/2)4\pi i$.

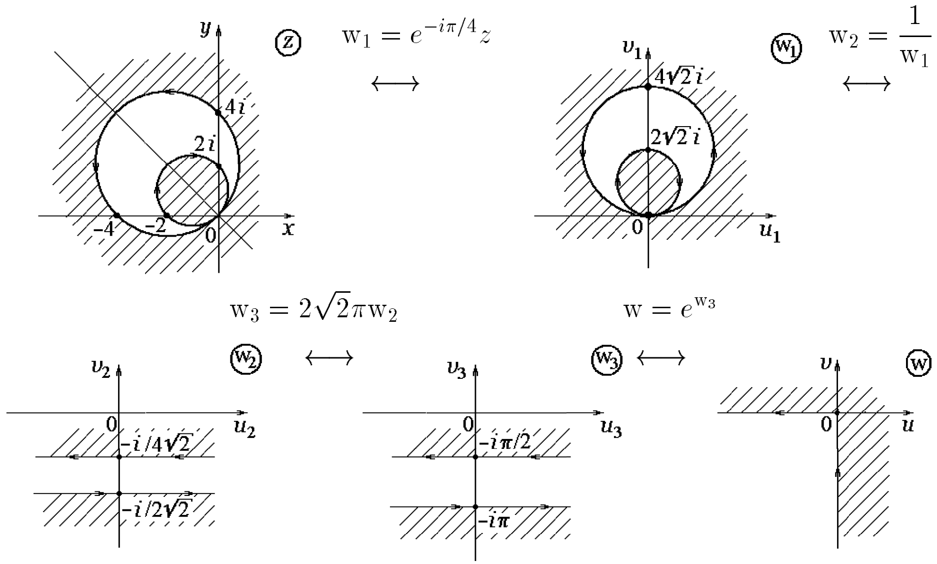


Рис. 1.5.4, в

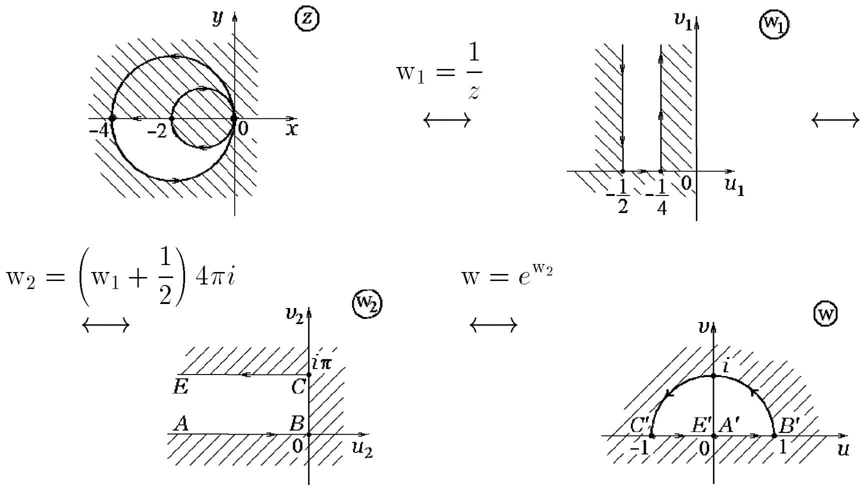


Рис. 1.5.4, г

Теперь применим показательную функцию $\mathrm{w} = e^{\mathrm{w}_2}$.

Граница AB : $\begin{cases} u_2 = t \\ v_2 = 0 \end{cases}$, $-\infty < t < 0$ отобразится в точки луча $A'B'$: $\mathrm{w} = e^t$, $-\infty < t < 0$. Граница BC : $\begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = t \end{cases}$, $0 < t < \pi$ отобразится в точки единичной окружности $B'C'$: $\mathrm{w} = e^{it}$, $0 < t < \pi$, а отрезок границы CE : $\begin{cases} u_2 = t \\ v_2 = \pi \end{cases}$, $0 > t > -\infty$ отобразится в точки луча $C'E'$: $\mathrm{w} = e^t e^{i\pi}$, $0 > t > -\infty$, у которых аргумент равен π.

Ответ. $\mathrm{w} = \exp\left(4\pi i \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

Замечание. Полученное выражение можно преобразовать:

$$\mathrm{w} = e^{4\pi i\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\right)} = e^{4\pi i/z}\, e^{2\pi i} = e^{4\pi i/z}.$$

Отсюда следует, что можно было рассмотреть следующую композицию отображений: $\mathrm{w}_1 = 1/z$, $\mathrm{w}_2 = 4\pi i \mathrm{w}_1$, $\mathrm{w} = e^{\mathrm{w}_2}$.

Замечание. Можно было бы область D отобразить на полуполосу $\{\widetilde{\mathrm{w}} : \widetilde{\mathrm{w}} \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Im} \widetilde{\mathrm{w}} < \pi, \quad \operatorname{Re} \widetilde{\mathrm{w}} < 0\}$ с помощью дробно-линейной функции, используя свойство сохранения двойного отношения четырех точек. Например, отобразить точки $z_1 = -(1 + i)$, $z_2 = -2$, $z_3 = -4$ в точки $\widetilde{\mathrm{w}}_1 = -1$, $\widetilde{\mathrm{w}}_2 = 0$, $\widetilde{\mathrm{w}}_3 = i\pi$.

5) Сначала отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z + 1 + i| > \sqrt{2}$, $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 0\}$ на полосу шириной $\pi/2$ $\{\mathrm{w}_2 : \mathrm{w}_2 \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Im} \mathrm{w}_2 < \pi/2\}$ с помощью композиции отображений $\mathrm{w}_1 = e^{i\pi/4} z$, $\mathrm{w}_2 = \sqrt{2}\pi/\mathrm{w}_1$. Затем сделаем сдвиг полосы $\mathrm{w}_3 = \mathrm{w}_2 - i\pi$ и применим показательную функцию $\mathrm{w} = e^{\mathrm{w}_3}$, которая отображает полосу $\{\mathrm{w}_3 : \mathrm{w}_3 \in \mathbb{C}$ $-\pi < \operatorname{Im} \mathrm{w}_3 < -\pi/2\}$ на область $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$ (рис. 1.5.4, *д*).

Ответ. $\mathrm{w} = \exp\left(\dfrac{\pi(1-i)}{z} - i\pi\right)$.

Замечание. Полученное выражение можно преобразовать:

$$\mathrm{w} = e^{\pi(1-i)/z - i\pi} = e^{\pi(1-i)/z}\, e^{-i\pi} = -e^{\pi(1-i)/z}.$$

Отсюда следует, что можно было рассмотреть следующую композицию отображений $\mathrm{w}_1 = 1/z$, $\mathrm{w}_2 = \pi(1 - i)\mathrm{w}_1$, $\mathrm{w}_3 = e^{\mathrm{w}_2}$, $\mathrm{w} = -\mathrm{w}_3$.

Замечание. Можно было бы область D отобразить на полосу $\{\widetilde{\mathrm{w}} : \widetilde{\mathrm{w}} \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Im} \widetilde{\mathrm{w}} < -\pi/2\}$ с помощью дробно-линейной функции, используя свойство сохранения двойного отношения четырех точек. Например, отобразить точки $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = -2$ в точки $\widetilde{w}_1 = -i\pi/2$, $\widetilde{w}_2 = -\pi(1+i)$, $\widetilde{w}_3 = \pi(1-i)$.

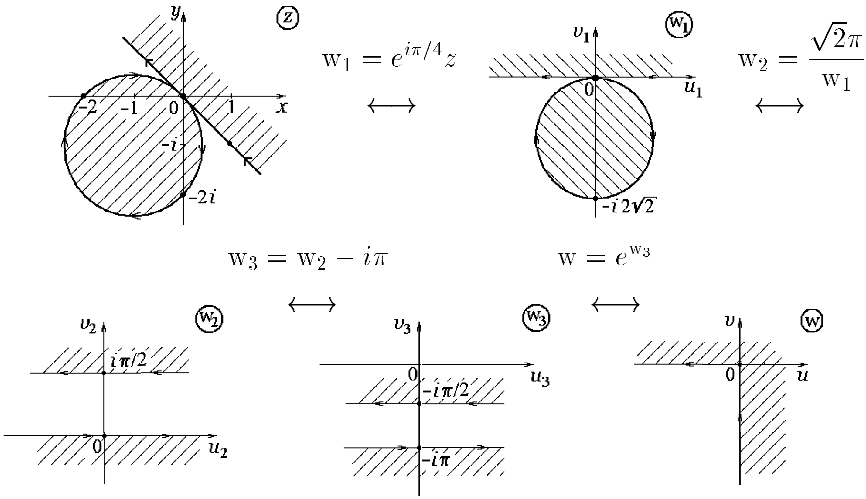


Рис. 1.5.4, д

Задача 1.5.4. Найти какую-либо функцию $w = w(z)$, конформно отображающую область D на область G.

1. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$,
   $G = \{w : w \in \mathbb{C} \quad |w| < 1, \quad \operatorname{Re} w > 0\}$.

2. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Im} z < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0\}$,
   $G = \{w : w \in \mathbb{C} \quad |w| < 1, \quad \operatorname{Re} w > 0, \quad \operatorname{Im} w < 0\}$.

3. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - i| > 1, \quad |z - 2i| < 2\}$,
   $G = \{w : w \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} w > 0, \quad \operatorname{Im} w > 0\}$.

4. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1| > 1, \quad |z - 2| < 2, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,
   $G = \{w : w \in \mathbb{C} \quad |w| < 1, \quad \operatorname{Im} w > 0\}$.

5. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1| > 1, \quad \operatorname{Re} z > 0\}$,
   $G = \{w : w \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} w > 0, \quad \operatorname{Im} w > 0\}$.

6. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Im} z < 2\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0\}$.

7. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Re} z < 2, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

8. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-1| > 1, \quad |z-2| < 2\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

9. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-i| > 1, \quad |z-2i| < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0\}$.

10. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z-i| > 1, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$.

11. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -2 < \operatorname{Re} z < -1\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$.

12. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Im} z < 2, \quad \operatorname{Re} z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} w > 0\}$.

13. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+i| > 1, \quad |z+2i| < 2\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

14. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+1| > 1, \quad |z+2| < 2, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

15. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+1| > 1, \quad \operatorname{Re} z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

16. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -2 < \operatorname{Im} z < -1\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} < 0\}$.

17. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \operatorname{Re} z < 2, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$.

18. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+1| > 1, \quad |z+2| < 2\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} < 0, \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$.

19. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z+i| > 1, \quad |z+2i| < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0\}$,
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \operatorname{Re} \mathrm{w} > 0\}$.

20. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z + i| > 1, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > 0, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} < 0\}.$

21. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, z < 2\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > 0\}.$

22. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -2 < \mathrm{Im}\, z < -1, \quad \mathrm{Re}\, z > 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > 0, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} < 0\}.$

23. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -2 < \mathrm{Re}\, z < -1, \quad \mathrm{Im}\, z > 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} < 0, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} < 0\}.$

24. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1| > 1, \quad |z - 2| < 2, \quad \mathrm{Im}\, z < 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} < 0\}.$

25. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1 - i| > \sqrt{2}, \quad \mathrm{Im}\, z + \mathrm{Re}\, z > 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > 0, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 0\}.$

26. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 1 < \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z < 2\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} < 0\}.$

27. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1 - i| > \sqrt{2}, \quad |z - 2 - 2i| < 2\sqrt{2}\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > 0, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 0\}.$

28. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - 1 + i| > \sqrt{2}, \quad |z - 2 + 2i| < 2\sqrt{2}\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} > 0, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} < 0\}.$

29. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z - i| > 1, \quad |z - 2i| < 2, \quad \mathrm{Re}\, z < 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}| < 1, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} < 0\}.$

30. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z + 1 - i| > \sqrt{2}, \quad \mathrm{Im}\, z - \mathrm{Re}\, z > 0\},$
$G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\, \mathrm{w} < 0, \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 0\}.$

Пример 1.5.5. Найти образ G области D при отображении с помощью функции Жуковского $\mathrm{w} = (z + 1/z)/2$:

1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-1, -1/2], \quad z \notin [i/2, i]\};$

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [1, 2], \quad z \notin [-i\infty, -i]\}.$

Найти какую-нибудь функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 0\}$:

3) $D=\{z\,:\, z\in\mathbb{C}\ \ |z|<1,\ \operatorname{Im} z-\operatorname{Re} z<0,\ \ z\notin[\sqrt{2}(1-i)/6, \sqrt{2}(1-i)/2]\}$;

4) $D=\{z\,:\, z\in\mathbb{C}\ \ |z|>1,\ \operatorname{Im} z-\operatorname{Re} z<0,\ \ z\notin[\sqrt{2}(1-i)/2, \sqrt{2}(1-i)]\}$.

Решение.

Определение. Дробно-рациональная функция

$$\mathrm{w}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

называется *функцией Жуковского.*

Функция Жуковского обладает следующими свойствами:

а) функция Жуковского аналитична всюду в $\mathbb{C}$, кроме точек $z=0$, $z=\infty$, в которых имеет полюсы первого порядка;

б) функция Жуковского локально однолистна во всех точках расширенной плоскости $\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\overline{\mathbb{C}}$, кроме точек $z=\pm1$, в которых $\mathrm{w}'=0$;

в) областями однолистности являются области $|z|<1$, $|z|>1$, $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Im} z<0$;

г) образом окружности $|z|=r$ является эллипс с фокусами в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$. При $r\to1$ эллипс вырождается в разрез $z\in[-1,1]$, проходимый дважды при изменении $0\le\varphi\le2\pi$;

д) образами лучей $\arg z=\alpha$ являются ветви гипербол с фокусами в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$ и асимптотами $v=\pm u\operatorname{tg}\alpha$. При $\alpha\to0$ гипербола вырождается в разрез $[1,+\infty]$, проходимый дважды при изменении $0<r<+\infty$. При $\alpha\to\pi$ гипербола вырождается в разрез $[-\infty,-1]$, проходимый дважды;

е) верхняя и нижняя полуплоскости $D_1=\{z\,:\, z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z>0\}$, $D_2=\{z\,:\, z\in\mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} z<0\}$ отображаются функцией Жуковского на плоскости с разрезами $G_1=\{\mathrm{w}:\mathrm{w}\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{w}\notin[-\infty,-1],\ \ \mathrm{w}\notin[1,+\infty]\}$;

ж) круг единичного радиуса с центром в начале координат $D_3=\{z:\, z\in\mathbb{C}\ \ |z|<1\}$ и его внешность $D_4=\{z:\, z\in\mathbb{C}\ \ |z|>1\}$ отображаются функцией Жуковского на плоскость с разрезом $G_2=\{\mathrm{w}:\mathrm{w}\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{w}\notin[-1,1]\}$.

1) Рассмотрим область $D=\{z\,:\, z\in\mathbb{C}\ \ |z|<1,\ \ z\notin[-1,-1/2],$ $z\notin[i/2,i]\}$, изображенную на рис. 1.5.5, *а*.

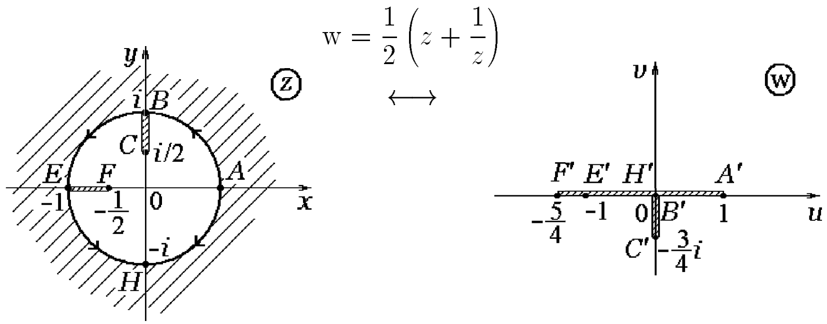


Рис. 1.5.5, *а*

Функция Жуковского отображает круг $|z| < 1$ на плоскость с разрезом $[-1, 1]$. Найдем образ части границы $BC : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$, $1/2 \le t \le 1$. Образ задается уравнением $\mathrm{w} = \dfrac{it + 1/it}{2} = \dfrac{i(t^2 - 1)}{2t}$, $1/2 \le t \le 1$ и представляет собой отрезок мнимой оси $B'C'$, по которому проходят дважды в противоположных направлениях при движении по границе. Образ части границы $EF : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $-1 \le t \le -1/2$ задается уравнением $\mathrm{w} = \dfrac{t + 1/t}{2} = \dfrac{t^2 + 1}{2t}$, $-1 \le t \le -1/2$ и представляет собой отрезок $E'F'$ отрицательной действительной оси, который проходится дважды в разных направлениях. В итоге образом области D является область G, представляющая собой точки комплексной плоскости с разрезами, изображенная на рис. 1.5.5, *а*.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-5/4, 1], \quad \mathrm{w} \notin [-3i/4, 0]$.

2) Рассмотрим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ |z| > 1, \ z \notin [1, 2], \ z \notin [-i\infty, -i]\}$.

Функция Жуковского отображает внешность круга $|z| > 1$ на плоскость с разрезом $[-1, 1]$. Найдем образ границы $AB : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $1 \le t \le 2$. Образ задается уравнением $\mathrm{w} = \dfrac{t + 1/t}{2} = \dfrac{t^2 + 1}{2t}$, $1 \le t \le 2$ и представляет собой отрезок положительной действительной оси $A'B'$, проходимый дважды в противоположных направлениях при движении по границе. Образ части границы $CE : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$, $-\infty \le t \le -1$ задается уравнением $\mathrm{w} = \dfrac{it + 1/it}{2} = \dfrac{i(t^2 - 1)}{2t}$, $-\infty \le t \le -1$ и представляет собой мнимую полуось $[-i\infty, 0]$, которая проходится дважды в противоположных направлениях при движении по границе. Таким образом, область D отображается на область G, представляющую собой точки комплексной плоскости с разрезами, изображенными на рис. 1.5.5, *б*.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-1, 5/4], \quad \mathrm{w} \notin [-i\infty, 0]$.

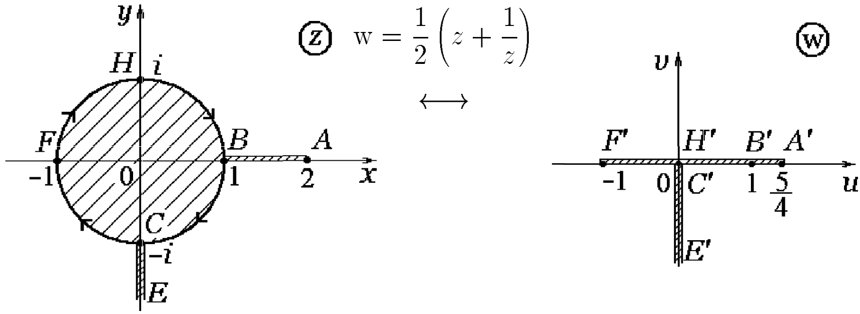


Рис. 1.5.5, *б*

3) Рассмотрим композицию отображений (рис. 1.5.5, *в*).

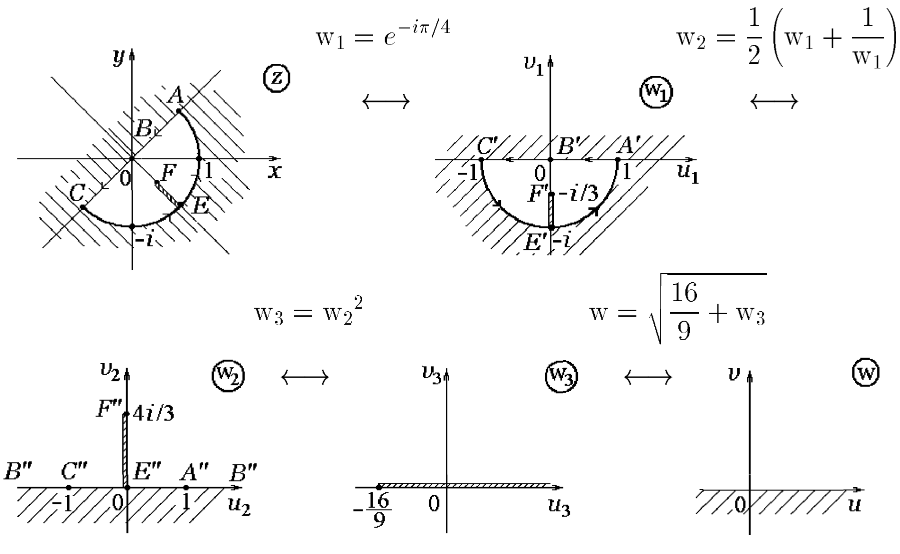


Рис. 1.5.5, *в*

Найдем модули чисел $F = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{6} \Rightarrow |F| = 1/3$ и $E = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow\ |E| = 1$ для того, чтобы определить их образы при повороте $\mathrm{w}_1 = e^{-i\pi/4}$ на угол $\pi/4$ по часовой стрелке. Функция Жуковского $\mathrm{w}_2 = \dfrac{\mathrm{w}_1 + 1/\mathrm{w}_1}{2}$ отображает полукруг $\{\mathrm{w}_1 : \mathrm{w}_1 \in \mathbb{C}\ \ |\mathrm{w}_1| < 1,\ \operatorname{Im} \mathrm{w}_1 < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{\mathrm{w}_2 : \mathrm{w}_2 \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} \mathrm{w}_2 > 0\}$, а точки разреза $\mathrm{w}_1 \in [-i, -i/3]$ — на разрез $\mathrm{w}_2 \in [0, 4i/3]$. Далее возводим в квадрат $\mathrm{w}_3 = \mathrm{w}_2^2$, делаем сдвиг $\dfrac{16}{9} + \mathrm{w}_3$ и применяем нулевую ветвь квадратного корня, отображающую плоскость с разрезом по положительной действительной оси на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C}\ \ \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$. Искомое отображение имеет вид

$$\mathrm{w} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{4}\left(e^{-i\pi/4}\, z + \frac{1}{e^{-i\pi/4}\, z}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + i\frac{(-iz + 1/z)^2}{4}}.$$

Ответ. $\mathrm{w} = \sqrt{\dfrac{16}{9} + i\dfrac{(-iz + 1/z)^2}{4}}.$

4) Рассмотрим композицию отображений (рис. 1.5.5, *г*).

$$\mathrm{w}_1 = e^{3\pi i/4} \qquad\qquad \mathrm{w}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{w}_1 + \frac{1}{\mathrm{w}_1}\right)$$

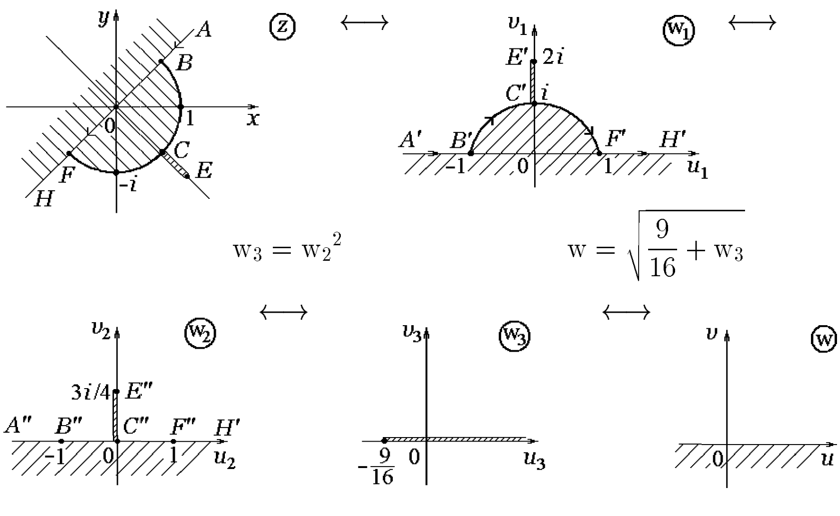


Рис. 1.5.5, г

Найдем модули чисел $C = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2} \Rightarrow |C| = 1$ и $E = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $|E| = 2$ для того, чтобы определить их образ при повороте $\mathrm{w}_1 = e^{3\pi i/4}$ на угол $3\pi/4$ против часовой стрелки. Функция Жуковского $\mathrm{w}_2 = \dfrac{\mathrm{w}_1 + 1/\mathrm{w}_1}{2}$ отображает область $\{\mathrm{w}_1 : \mathrm{w}_1 \in \mathbb{C} \quad |\mathrm{w}_1| > 1$, $\operatorname{Im} \mathrm{w}_1 > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{\mathrm{w}_2 : \mathrm{w}_2 \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w}_2 > 0\}$, а точки разреза $\mathrm{w}_1 \in [i, 2i]$ — на разрез по мнимой оси $\mathrm{w}_2 \in [0, 3i/4]$. Далее применяем степенную функцию $\mathrm{w}_3 = \mathrm{w}_2^2$, сдвиг $\mathrm{w}_3 + \dfrac{9}{16}$ и нулевую ветвь квадратного корня, отображающую плоскость с разрезом по положительной действительной полуоси на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$. Искомое отображение имеет вид

$$\mathrm{w} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\left(e^{i3\pi/4}\, z + \frac{1}{e^{i3\pi/4}\, z}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{i(-iz + 1/z)^2}{4}}.$$

Ответ. $\mathrm{w} = \sqrt{\dfrac{9}{16} + \dfrac{i(-iz + 1/z)^2}{4}}$.

Задача 1.5.5. 1) Найти образ G области D при отображении с помощью функции Жуковского $\mathrm{w} = \dfrac{z + 1/z}{2}$. Символом $[z_1, z_2]$ обозначается отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и z_2 комплексной плоскости.

2) Найти какую-нибудь функцию $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$, конформно отображающую область D на полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$.

1. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [0, 1], \quad z \notin [i/2, i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [i/2, i]\}$.

2. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [1, 2], \quad z \notin [i, 2i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [i, 2i]\}$.

3. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \in [1/2, 1], \quad z \notin [i/2, i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-i, -i/2]\}$.

4. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [1, +\infty], \quad z \notin [i, 2i]\}$;
   2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-2i, -i]\}$.

5. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad z\notin[1/2,1],\quad z\notin[0,-i]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad \mathrm{Re}\,z>0,\quad z\notin[1/2,1]\,\}$.

6. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad z\notin[-2,-1],\quad z\notin[i,2i]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad \mathrm{Re}\,z>0,\quad z\notin[1,2]\,\}$.

7. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad z\notin[1/2,1],\quad z\notin[-i,-i/2]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad \mathrm{Re}\,z<0,\quad z\notin[-1,-1/2]\,\}$.

8. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad z\notin[-2,-1],\quad z\notin[i,+i\infty]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad \mathrm{Re}\,z<0,\quad z\notin[-2,-1]\,\}$.

9. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad z\notin[-1,0],\quad z\notin[-i,-i/2]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad \mathrm{Im}\,z+\mathrm{Re}\,z>0,$
$z\notin[\sqrt{2}(1+i)/4,\sqrt{2}(1+i)/2]\,\}$.

10. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad z\notin[-2,-1],\quad z\notin[-2i,-i]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad \mathrm{Im}\,z+\mathrm{Re}\,z>0,$
$z\notin[\sqrt{2}(1+i)/2,3\sqrt{2}(1+i)/4]\,\}$.

11. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad z\notin[-1,-1/2],\quad z\notin[-i,-i/2]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad \mathrm{Im}\,z+\mathrm{Re}\,z<0,$
$z\notin[-\sqrt{2}(1+i)/2,-\sqrt{2}(1+i)/4]\,\}$.

12. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad z\notin[-\infty,-1],\quad z\notin[-2i,-i]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad \mathrm{Im}\,z+\mathrm{Re}\,z<0,$
$z\notin[-3\sqrt{2}(1+i)/4,-\sqrt{2}(1+i)/2]\,\}$.

13. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad z\notin[-1,-1/2],\quad z\notin[0,i]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad \mathrm{Im}\,z-\mathrm{Re}\,z>0,$
$z\notin[\sqrt{2}(-1+i)/2,\sqrt{2}(-1+i)/4]\,\}$.

14. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad z\notin[1,2],\quad z\notin[-2i,-i]\,\}$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad \mathrm{Im}\,z-\mathrm{Re}\,z>0,$
$z\notin[3\sqrt{2}(-1+i)/4,\sqrt{2}(-1+i)/2]\,\}$.

15. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-i, -i/2], \quad z \notin [i/2, i]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 0,$
$z \notin [\sqrt{2}(1-i)/4, \sqrt{2}(1-i)/2]\,\}$.

16. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [-2, -1], \quad z \notin [1, +\infty]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 0,$
$z \notin [\sqrt{2}(1-i)/2, 3\sqrt{2}(1-i)/4]\,\}$.

17. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-1, -1/2], \quad z \notin [0, 1]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [i/3, i]\,\}$.

18. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [-2, -1], \quad z \notin [1, 2]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [i, 3i]\,\}$.

19. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-1, -1/2], \quad z \notin [1/2, 1]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-i, -i/3]\,\}$.

20. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [-2i, -i], \quad z \notin [i, +i\infty]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-3i, -i]\,\}$.

21. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-i, 0], \quad z \notin [i/2, i]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad z \notin [1/3, 1]\,\}$.

22. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [-2i, -i], \quad z \notin [i, 2i]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad z \notin [1, 3]\,\}$.

23. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-1, -1/2], \quad z \notin [1/2, 1],$
$z \notin [i/2, i]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad z \notin [-1, -1/3]\,\}$.

24. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad z \notin [-\infty, -1], \quad z \notin [1, 2]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1, \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad z \notin [-3, -1]\,\}$.

25. 1) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad z \notin [-1, 0], \quad z \notin [1/2, 1]\,\}$;

2) $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z > 0,$
$z \notin [\sqrt{2}(1+i)/6, \sqrt{2}(1+i)/2]\,\}$.

26. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad z\notin[-2,-1],\quad z\notin[1,2],\quad z\notin[i,2i]\,\}$;
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad \operatorname{Im}z+\operatorname{Re}z>0,$
$z\notin[\sqrt{2}(1+i)/2,\sqrt{2}(1+i)]\,\}$.

27. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad z\notin[-i,-i/2],\quad z\notin[0,i]\,\}$;
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad \operatorname{Im}z+\operatorname{Re}z>0,$
$z\notin[-\sqrt{2}(1+i)/2,-\sqrt{2}(1+i)/6]\,\}$.

28. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad z\notin[-i\infty,-i],\quad z\notin[i,2i]\,\}$;
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad \operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z>0,$
$z\notin[-\sqrt{2}(1+i),-\sqrt{2}(1+i)/2]\,\}$.

29. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad z\notin[-i,-i/2],\quad z\notin[i/2,i],\quad z\notin[1/2,1]\,\}$;
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|<1,\quad \operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z>0,$
$z\notin[\sqrt{2}(-1+i)/2,\sqrt{2}(-1+i)/6]\,\}$.

30. 1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad z\notin[-2,-1],\quad z\notin[-2i,-i],\quad z\notin[i,2i]\,\}$;
2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad |z|>1,\quad \operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z>0,$
$z\notin[\sqrt{2}(-1+i),\sqrt{2}(-1+i)/2]\,\}$.

Пример 1.5.6. Найти образ G области D при отображении $\mathrm{w}=\mathrm{w}(z)$:

1) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad \operatorname{Re}z<0,\quad 0<\operatorname{Im}z<2\pi,\quad z\notin[-1+i\pi/2,i\pi/2],$
$z\notin[-1+i3\pi/2,i3\pi/2]\,\};\quad \mathrm{w}=\operatorname{sh}z$;

2) $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\quad 0<\operatorname{Re}z<2\pi,\quad \operatorname{Im}z<0,\quad z\notin[\pi/2,\pi/2-i],$
$z\notin[3\pi/2,3\pi/2-i]\,\};\quad \mathrm{w}=\sin z$.

Символом $[z_1,z_2]$ обозначается отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и z_2 комплексной плоскости.

Решение. Заметим, что функция $\mathrm{w}=\operatorname{ch}z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ состоит из композиции показательной функции $\mathrm{w}_1=e^z$ и функции Жуковского $\mathrm{w}=\dfrac{\mathrm{w}_1+1/\mathrm{w}_1}{2}$. Выразим остальные тригонометрические функции через гиперболический косинус:

$$\cos z=\operatorname{ch}(iz),\quad \sin z=\operatorname{ch}(iz-i\pi/2),\quad \operatorname{sh}z=-i\operatorname{ch}(z+i\pi/2).$$

1) Воспользуемся формулой $\operatorname{sh} z = -i \operatorname{ch}(z + i\pi/2)$ и рассмотрим композицию отображений $\mathrm{w}_1 = z + i\pi/2$, $\mathrm{w}_2 = e^{\mathrm{w}_1}$, $\mathrm{w}_3 = (\mathrm{w}_2 + 1/\mathrm{w}_2)/2$, $\mathrm{w} = -i\mathrm{w}_3$, изображенную на рис. 1.5.6, *а*.

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-\infty, 0], \quad \mathrm{w} \notin [-i \operatorname{ch} 1, i \operatorname{ch} 1]\}$.

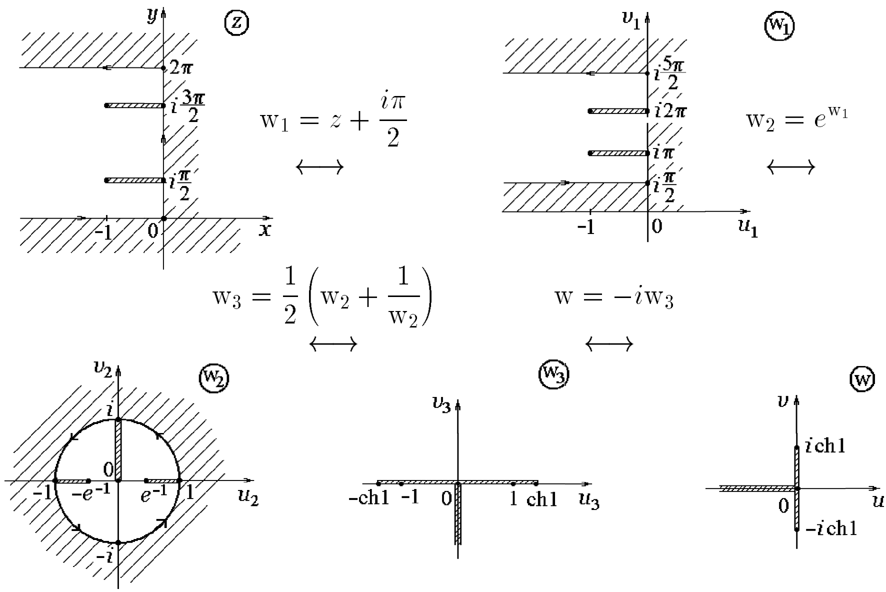


Рис. 1.5.6, *а*

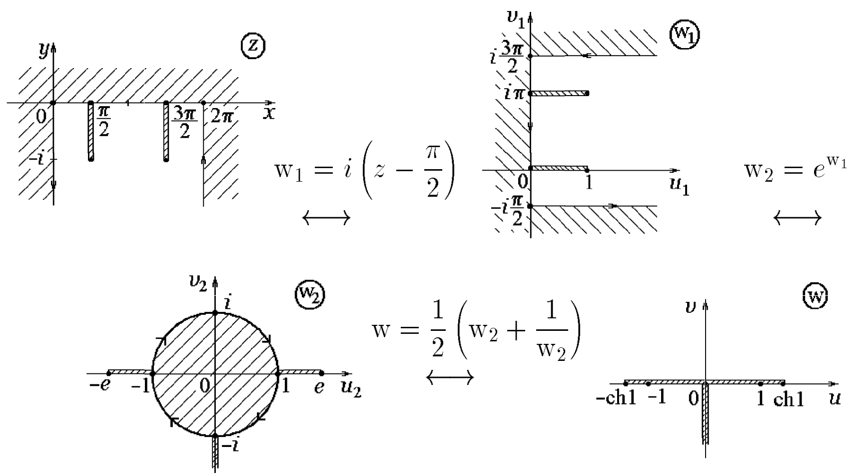


Рис. 1.5.6, *б*

2) Воспользуемся формулой $\sin z = \operatorname{ch}(iz - i\pi/2)$ и рассмотрим композицию отображений $\mathrm{w}_1 = i(z - \pi/2)$, $\mathrm{w}_2 = e^{\mathrm{w}_1}$, $\mathrm{w} = (\mathrm{w}_2 + 1/\mathrm{w}_2)/2$ (рис. 1.5.6, *б*).

Ответ. $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{w} \notin [-\operatorname{ch} 1, \operatorname{ch} 1], \quad \mathrm{w} \notin [-i\infty, 0]\,\}$.

Задача 1.5.6. Найти образ G области D при отображении $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$.

1. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad z \notin [i\pi/2, 1 + i\pi/2]\,\}$, $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.
2. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [-\pi/2, -\pi/2 + i]\,\}$, $\mathrm{w} = \cos z$.
3. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad z \notin [i\pi/2, 1 + i\pi/2]\,\}$, $\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.
4. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [-\pi/2, -\pi/2 + i]\,\}$, $\mathrm{w} = \sin z$.
5. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad z \notin [-1 + i\pi/2, i\pi/2]$, $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.
6. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-\pi/2, -\pi/2 - i]\,\}$, $\mathrm{w} = \cos z$.
7. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \quad z \notin [-1 + i\pi/2, i\pi/2]\,\}$, $\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.
8. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-\pi/2, -\pi/2 - i]\,\}$, $\mathrm{w} = \sin z$.
9. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-i\pi/2, 1 - i\pi/2]\,\}$, $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.
10. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 + i]\,\}$, $\mathrm{w} = \cos z$.
11. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-i\pi/2, 1 - i\pi/2]\,\}$, $\mathrm{w} = \operatorname{sh} z$.
12. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 + i]\,\}$, $\mathrm{w} = \sin z$.
13. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-1 - i\pi/2, -i\pi/2]\,\}$, $\mathrm{w} = \operatorname{ch} z$.

14. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 - i]\},$
$\mathrm{w} = \cos z.$

15. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad -\pi < \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [-1 - i\pi/2, -i\pi/2]\},$
$\mathrm{w} = \operatorname{sh} z.$

16. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 - i]\},$
$\mathrm{w} = \sin z.$

17. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \operatorname{Re} z > 0, \ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \ z \notin [0, 1]\}, \ \mathrm{w} = \operatorname{ch} z.$

18. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [0, i]\},$
$\mathrm{w} = \cos z.$

19. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \operatorname{Re} z > 0, \ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \ z \notin [0, 1]\}, \ \mathrm{w} = \operatorname{sh} z.$

20. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [0, i]\},$
$\mathrm{w} = \sin z.$

21. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \operatorname{Re} z < 0, \ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \ z \notin [-1, 0]\},$
$\mathrm{w} = \operatorname{ch} z.$

22. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [0, -i]\},$
$\mathrm{w} = \cos z.$

23. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \quad z \notin [-1, 0]\},$
$\mathrm{w} = \operatorname{sh} z.$

24. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [0, -i]\},$
$\mathrm{w} = \sin z.$

25. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad z \notin [i\pi/2, 1 + i\pi/2],$
$z \notin [i3\pi/2, 1 + i3\pi/2]\}, \quad \mathrm{w} = \operatorname{ch} z.$

26. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 + i]\},$
$z \notin [3\pi/2, 3\pi/2 + i]\}, \quad \mathrm{w} = \cos z.$

27. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad z \notin [i\pi/2, 1 + i\pi/2]\},$
$z \notin [i3\pi/2, 1 + i3\pi/2]\}, \quad \mathrm{w} = \operatorname{sh} z.$

28. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 + i]\},$
$z \notin [3\pi/2, 3\pi/2 + i]\}, \quad \mathrm{w} = \sin z.$

29. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} z < 0, \ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad z \notin [-1 + i\pi/2, i\pi/2]\},$
$z \notin [-1 + i3\pi/2, i3\pi/2]\}, \quad \mathrm{w} = \operatorname{ch} z.$

30. $D = \{z : z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad z \notin [\pi/2, \pi/2 - i]\},$
$z \notin [3\pi/2, 3\pi/2 - i]\}, \quad \mathrm{w} = \cos z.$

Пример 1.5.7.* С помощью интеграла Кристоффеля—Шварца отобразить на многоугольник D верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$:

1) $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\operatorname{Re}\mathrm{w} > 0,\ \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0) \cup (\operatorname{Re}\mathrm{w} \leq 0,\ \operatorname{Im}\mathrm{w} > 1)\}$;

2) $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\operatorname{Im}\mathrm{w} > 0) \cup (\operatorname{Re}\mathrm{w} > 0), \quad \mathrm{w} \notin [0, i]\}$;

3) $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0, \quad \mathrm{w} \notin [-\infty + i, i]\}$;

4) $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (0 < \operatorname{Im}\mathrm{w} < 1) \cup (\operatorname{Re}\mathrm{w} > 0,\ \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0)\}$;

5) $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0, \quad \mathrm{w} \notin [i, +i\infty]\}$;

6) $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Im}\mathrm{w} < 2, \quad \mathrm{w} \notin [i, +\infty + i]\}$.

Решение.

Теорема 1.5.6 (*Кристоффеля—Шварца*). [5–7, 9] Пусть на комплексной плоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{w}}$ задан ограниченный n-угольник с внутренними углами $\alpha_k\pi$ $(0 < \alpha_k \leq 2,\ k = \overline{1, n})$ при вершинах в точках A_k. Функция $\mathrm{w} = f(z)$ комплексной переменной z, определенная в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$:

$$\mathrm{w} = f(z) = C \int\limits_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1}(z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1, \qquad (1.5.2)$$

где z_0, C, C_1 — заданные постоянные; a_k, $k = \overline{1, n}$ — действительные числа, расположенные в порядке возрастания, соответствующие вершинам A_k, реализует конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность ограниченного многоугольника.

Замечание. Подинтегральная функция в выражении (1.5.2) имеет особые точки при $z = a_k$, но функция $f(z)$ имеет конечные пределы при $z \to a_k$ и при $z \to \infty$. Это следует из оценок порядка роста подинтегральной функции.

Замечание. Константу z_0 можно положить равной $z_0 = 0$, так как при изменении z_0 меняется C_1.

Замечание. Пусть одна из вершин многоугольника — образ бесконечно удаленной точки, например $a_n = \infty \leftrightarrow A_n$. Можно показать [5–7, 9], что в формуле (1.5.2) множитель, соответствующий этой точке, выпадает. Формула Кристоффеля—Шварца принимает вид

$$\mathrm{w} = f(z) = C \int\limits_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1}(z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + C_1. \quad (1.5.3)$$

Замечание. Пусть одна или несколько вершин многоугольника лежат в бесконечно удаленных точках. Можно показать [5–7, 9], что формула (1.5.2) остается в силе, если угол между двумя прямыми с вершиной в бесконечности определять как угол в конечной точке их пересечения, взятый со знаком минус (рис. 1.5.7, *а*).

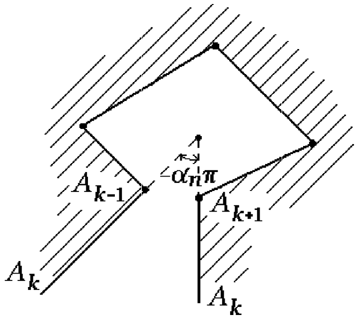


Рис. 1.5.7, ***а***

1) Область D изображена на рис. 1.5.7, *б* и представляет собой треугольник с одной вершиной ($A_1 = \infty$), расположенной в бесконечно удаленной точке.

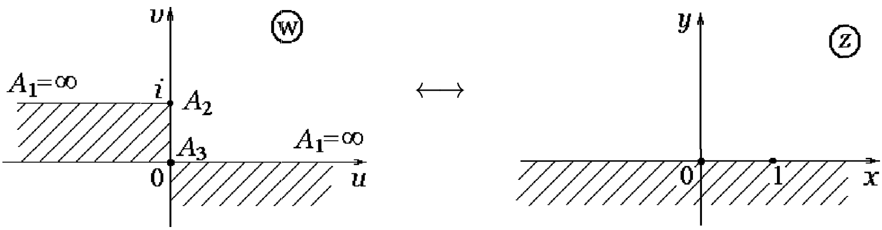


Рис. 1.5.7, ***б***

Углы треугольника равны $\alpha_2\pi = \dfrac{3}{2}\pi$, $\alpha_3\pi = \dfrac{1}{2}\pi$, а угол в бесконечно удаленной точке $A_1 = \infty$, по определению, равен углу между отрезками A_1A_2 и A_1A_3 в конечной точке, взятому с противоположным знаком, т.е. $\alpha_1\pi = -\pi$. Сумма углов треугольника $A_1A_2A_3$ равна $\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} - \pi = \pi$, как у треугольника с вершинами в конечных точках.

Составим таблицу возможных соответствий $A_k \leftrightarrow a_k$:

k	A_k	α_k	a_k	a_k	a_k
1	∞	-1	∞	∞	-1
2	i	$3/2$	0	-1	0
3	0	$1/2$	1	0	∞
			а)	б)	в)

В случае а) интеграл Кристоффеля—Шварца (см. формулу (1.5.3)) примет вид

$$\mathrm{w} = C\int\limits_0^z (z-0)^{3/2-1}(z-1)^{1/2-1}dz + C_1 = \widetilde{C}\int\limits_0^z \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-z}}dz + C_1 =$$

$$= \widetilde{C}(\arcsin\sqrt{z} - \sqrt{z}\sqrt{1-z}) + C_1. \tag{1.5.4}$$

Здесь первообразная найдена следующим образом:

$$\int \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-z}}dz = \left| \begin{array}{l} \sqrt{z} = \sin t \\ z = \sin^2 t \\ dz = 2\sin t\cos t dt \end{array} \right| = \int 2\sin^2 t dt = t - \frac{1}{2}\sin 2t + \mathrm{const} =$$

$$= \arcsin\sqrt{z} - \sqrt{z}\sqrt{1-z} + \mathrm{const}.$$

В случае б) интеграл Кристоффеля—Шварца (см. формулу (1.5.3)) примет вид

$$\mathrm{w} = C\int\limits_0^z (z+1)^{3/2-1}(z-0)^{1/2-1}dz + C_1 = C\int\limits_0^z \frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z}}dz + C_1 =$$

$$= C(\operatorname{arsh}\sqrt{z} + \sqrt{z}\sqrt{1+z}) + C_1. \tag{1.5.5}$$

Здесь первообразная найдена следующим образом:

$$\int \frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z}}dz = \left| \begin{array}{l} \sqrt{z} = \operatorname{sh} t \\ z = \operatorname{sh}^2 t \\ dz = 2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t dt \end{array} \right| = \int 2\operatorname{ch}^2 t dt = t + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t + \mathrm{const} =$$

$$= \operatorname{arsh}\sqrt{z} + \sqrt{z}\sqrt{1+z} + \mathrm{const}.$$

В случае в) интеграл Кристоффеля—Шварца (см. формулу (1.5.3)) примет вид

$$\mathrm{w} = C\int\limits_0^z (z+1)^{-1-1}(z-0)^{3/2-1}dz + C_1 = C\int\limits_0^z \frac{\sqrt{z}}{(z+1)^2}dz + C_1.$$

Этот интеграл расходится в точке $z = a_1 = -1$, соответствующей вершине $A_1 = \infty$. Находить C и C_1 здесь сложно.

Найдем в формуле (1.5.4) $\widetilde{C}$ и C_1 из условий соответствия точек $A_2 = i \leftrightarrow \leftrightarrow a_2 = 0$, $A_3 = 0 \leftrightarrow a_3 = 1:$

$$\begin{cases} i = \widetilde{C}(\arcsin 0 - 0) + C_1, \\ 0 = \widetilde{C}(\arcsin 1 - 0) + C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{C} = -2i/\pi, \\ C_1 = i. \end{cases}$$

Подставим эти значения в выражение (1.5.4), получим искомую функцию

$$\mathrm{w} = -\frac{2i}{\pi}(\arcsin\sqrt{z} - \sqrt{z}\sqrt{1-z}) + i.$$

Найдем в формуле (1.5.5) C и C_1 из условий соответствия точек $A_2 = i \leftrightarrow \leftrightarrow a_2 = -1$, $A_3 = 0 \leftrightarrow a_3 = 0$:

$$\begin{cases} i = C(\operatorname{arsh}\sqrt{-1} + 0) + C_1, \\ 0 = C(0+0) + C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2/\pi, \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

Подставим эти значения в выражение (1.5.5), получим еще одну функцию, дающую решение нашей задачи:

$$\mathrm{w} = \frac{2}{\pi}(\operatorname{arsh}\sqrt{z} + \sqrt{z}\sqrt{1+z}).$$

2) Область D изображена на рис. 1.5.7, *в* и представляет собой треугольник, одна из вершин которого $A_1 = \infty$ расположена в бесконечности.

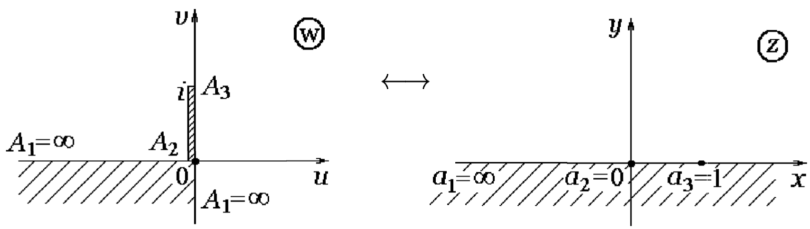


Рис. 1.5.7, *в*

Составим таблицу соответствий $A_k \leftrightarrow a_k$ (возможны и другие варианты):

k	A_k	α_k	a_k
1	∞	$-3/2$	∞
2	0	$1/2$	0
3	i	2	1

Интеграл Кристоффеля—Шварца (см. формулу (1.5.3)) примет вид

$$\mathrm{w} = C\int_0^z (z-0)^{1/2-1}(z-1)^{2-1}dz + C_1 = C\int_0^z \frac{z-1}{\sqrt{z}}dz + C_1 =$$

$$= \widetilde{C}(z^{3/2} - 3z^{1/2}) + C_1.$$

Из условий соответствия точек $A_2 = 0 \leftrightarrow a_2 = 0$, $A_3 = i \leftrightarrow a_3 = 1$ найдем $\widetilde{C}$ и C_1:

$$\begin{cases} 0 = \widetilde{C}\cdot 0 + C_1, \\ i = \widetilde{C}(-2) + C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ \widetilde{C} = -i/2. \end{cases}$$

Искомая функция имеет вид

$$\mathrm{w} = \frac{i}{2}(3z^{1/2} - z^{3/2}).$$

3) Область D изображена на рис. 1.5.7, *г* и представляет собой треугольник, две вершины которого $A_1 = \infty$ и $A_3 = \infty$ находятся в бесконечно удаленной точке.

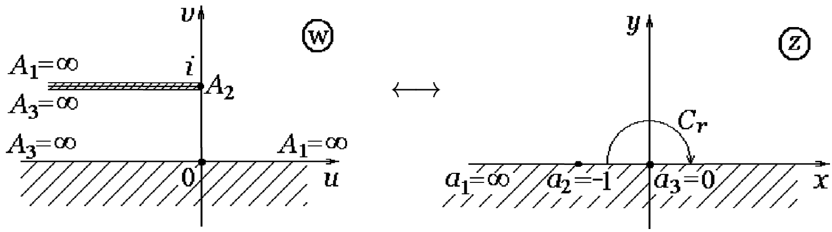


Рис. 1.5.7, г

Составим таблицу соответствий $A_k \leftrightarrow a_k$ (возможны и другие варианты):

k	A_k	α_k	a_k
1	∞	-1	∞
2	i	2	-1
3	∞	0	0

Интеграл Кристоффеля—Шварца (см. формулу (1.5.3)) примет вид

$$\mathrm{w} = C\int_0^z (z+1)^{2-1}(z-0)^{0-1}dz + C_1 = C\int_0^z \frac{z+1}{z}dz + C_1 = C(z + \ln z) + C_1.$$

Для определения C и C_1 одно условие получим из соответствия точек $A_2 = i \leftrightarrow a_2 = -1$:

$$i = C(-1 + \ln(-1)) + C_1 \ \Rightarrow\ i = C(-1 + i\pi) + C_1.$$

Другое условие получим из следующих рассуждений. Когда точка $a_3 = 0$ обходится по полуокружности $C_r : z = re^{i\varphi}$ бесконечно малого радиуса r, аргумент φ меняется от π до 0, а приращение функции $\mathrm{w} = C(z + \ln z) + C_1$ будет равно $\Delta\mathrm{w} = C(0 - i\pi) + O(r)$ при $r \to 0$, так как первое слагаемое z в силу непрерывности в нуле будет иметь приращение, равное нулю. С другой стороны, соответствующая точка w должна перейти с луча A_2A_3 на луч A_3A_1, т.е. функция w должна получить приращение $\Delta\mathrm{w} = (0 - i) + O(r) = -i + O(r)$ при $r \to 0$. Это оправдано тем, что образ C_r при $r \to 0$ мало отличается от отрезка прямой, соединяющего лучи A_2A_3 и A_3A_1 и перпендикулярного этим лучам. Итак:

$$\Delta\mathrm{w} = -Ci\pi = -i \ \Rightarrow\ C = 1/\pi.$$

Из первого условия, связывающего C и C_1, получим

$$C_1 = i - \frac{1}{\pi}(-1 + i\pi) \ \Leftrightarrow\ C_1 = \frac{1}{\pi}.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$\mathrm{w} = \frac{z + \ln z + 1}{\pi}.$$

4) Область D изображена на рис. 1.5.7, ∂ и представляет собой треугольник, две вершины которого $A_1 = \infty$ и $A_3 = \infty$ находятся в бесконечности.

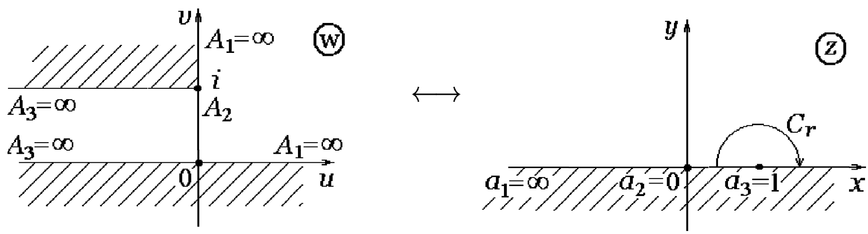


Рис. 1.5.7, ∂

Составим таблицу соответствий $A_k \leftrightarrow a_k$:

k	A_k	α_k	a_k
1	∞	$-1/2$	∞
2	i	$3/2$	0
3	∞	0	1

Интеграл Кристоффеля—Шварца (см. формулу (1.5.3)) примет вид

$$\mathrm{w} = C\int_0^z (z-0)^{3/2-1}(z-1)^{0-1}dz + C_1 = C\int_0^z \frac{z^{1/2}}{z-1}dz + C_1 =$$

$$= C[2\sqrt{z} + \ln(\sqrt{z}-1) - \ln(\sqrt{z}+1)] + C_1. \qquad (1.5.6)$$

Для определения C и C_1 используем условие соответствия точек $A_2 = i \leftrightarrow a_2 = 0$:

$$i = C(0 + i\pi - 0) + C_1 \;\Leftrightarrow\; i = i\pi C + C_1. \qquad (1.5.7)$$

Второе условие получим из следующих рассуждений. Когда точка $a_3 = 1$ обходится по полуокружности бесконечно малого радиуса r $C_r : z = 1 + re^{i\varphi}$, аргумент φ меняется от π до o, а приращение функции (см. выражение (1.5.6)) будет равно $\Delta\mathrm{w} = C\Delta\ln(\sqrt{z}-1) - O(r) =$ $= C\Delta\ln(\sqrt{1+re^{i\varphi}}-1) - O(r) = C\Delta(i\varphi) + O(r) = -Ci\pi + O(r)$. Приращение остальных слагаемых в формуле (1.5.6) бесконечно мало, так как эти слагаемые непрерывны в точке $z = 1$. С другой стороны, образ точки $z \in C_r$ в плоскости C_w должен перейти с луча A_2A_3 на луч A_3A_1, и приращение w должно мало отличаться от $\Delta\mathrm{w} = 0 - i + O(r)$. Приравнивая выражения для $\Delta\mathrm{w}$, получим

$$\Delta\mathrm{w} = -Ci\pi + O(r) = -i + O(r) \;\Leftrightarrow\; C = 1/\pi.$$

Из формулы (1.5.7) находим $C_1 = 0$.

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$\mathrm{w} = \frac{1}{\pi}[2\sqrt{z} + \ln(\sqrt{z}-1) - \ln(\sqrt{z}+1)].$$

5) Область D изображена на рис. 1.5.7, *е* и представляет собой треугольник, две вершины которого $A_1 = \infty$ и $A_3 = \infty$ находятся в бесконечности.

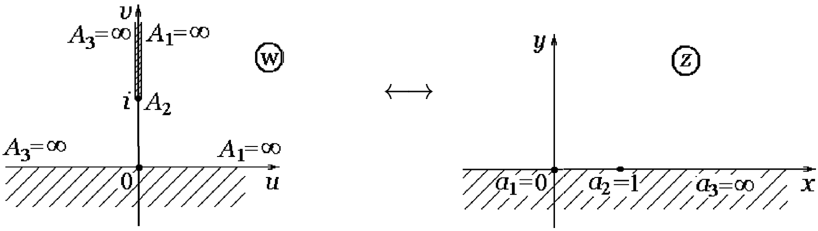


Рис. 1.5.7, е

Составим таблицу соответствий $A_k \leftrightarrow a_k$:

k	A_k	α_k	a_k
1	∞	$-1/2$	0
2	i	2	1
3	∞	$-1/2$	∞

Интеграл Кристоффеля—Шварца (см. формулу (1.5.3)) примет вид

$$\mathrm{w} = C\int_0^z z^{-1/2-1}(z-1)^{2-1}dz + C_1 = C\int_0^z (z^{-1/2} - z^{-3/2})dz + C_1 =$$

$$= \widetilde{C}(z^{1/2} + z^{-1/2}) + C_1. \qquad (1.5.8)$$

Для определения констант $\widetilde{C}$ и C_1 используем условие соответствия точек $A_2 = i \leftrightarrow a_2 = 1$:

$$i = 2\widetilde{C} + C_1. \qquad (1.5.9)$$

Второе условие получим из следующих рассуждений. Когда $x = \operatorname{Re} z \to +\infty$, образ этой точки $\operatorname{Re}\mathrm{w} = 0$, $\operatorname{Im}\mathrm{w} \to +\infty$. Из формулы (1.5.8) получаем

$$i\operatorname{Im}\mathrm{w} = \widetilde{C}(x^{1/2} + x^{-1/2}) + C_1 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{Re} C_1 = 0,\ \operatorname{Re}\widetilde{C} = 0.$$

Когда $x = \operatorname{Re} z \to -\infty$, образ этой точки $\operatorname{Re}\mathrm{w} \to -\infty$, $\operatorname{Im}\mathrm{w} = 0$. Из формулы (1.5.8) получаем

$$\operatorname{Re}\mathrm{w} = i\operatorname{Im}\widetilde{C}(x^{1/2} + x^{-1/2}) + i\operatorname{Im} C_1 \ \Rightarrow\ \operatorname{Im} C_1 = 0,$$

т.е. $C_1 = 0$. Из выражения (1.5.9) находим $\operatorname{Im}\widetilde{C}$:

$$i = 2\operatorname{Im}\widetilde{C}_i \ \Rightarrow\ \operatorname{Im}\widetilde{C} = i/2.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$\mathrm{w} = \frac{i}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}).$$

6) Область D изображена на рис. 1.5.7, *ж* и представляет собой четырехугольник, три вершины которого A_1, A_2, A_4 находятся в бесконечности.

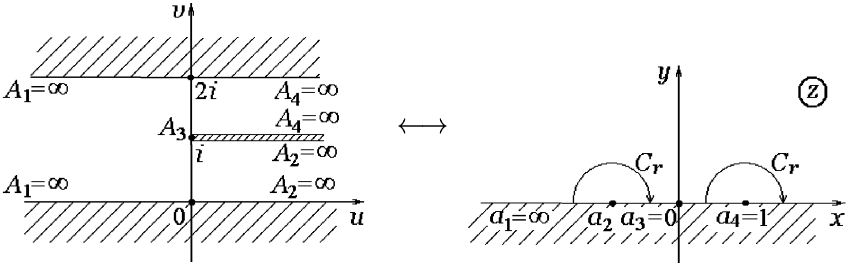


Рис. 1.5.7, ж

Составим таблицу соответствий $A_k \leftrightarrow a_k$:

k	A_k	α_k	a_k
1	∞	0	∞
2	∞	0	a_2
3	i	2	0
4	∞	0	1

Интеграл Кристоффеля—Шварца (см. формулу (1.5.3)) примет вид

$$\mathrm{w} = C\int\limits_0^z (z-a_2)^{2-1}(z-0)^{2-1}(z-1)^{-1}dz + C_1 = C\int\limits_0^z \frac{z}{(z-a_2)(z-1)}dz + C_1 =$$

$$= \widetilde{C}\int\limits_0^z \left(\frac{1}{z-1} - a_2\frac{1}{z-a_2}\right)dz + C_1 = \widetilde{C}[\ln(z-1) - a_2\ln(z-a_2)] + C_1. \quad (1.5.10)$$

Для нахождения $\widetilde{C}$, a_2 и C_1 воспользуемся следующим соображением: когда точка z обходит точку a_2 по полуокружности C_r достаточно малого радиуса $C_r : (z-a_2) = re^{i\varphi}$, $\pi \geq \varphi \geq 0$, аргумент меняется от π до 0, а приращение функции w будет равно

$$\Delta\mathrm{w} = -\widetilde{C}a_2\Delta\ln(z-a_2) + \Delta[\widetilde{C}\ln(z-1) + C_1].$$

Приращение $\Delta\ln(z-a_2)=\Delta(\ln(re^{i\varphi}))=\Delta\ln r+i\Delta\varphi=-i\pi+O(r)$, где $O(r)$ — бесконечно малая при $r\to 0$. Приращение $\Delta[\widetilde{C}\ln(z-1)+C_1]=$ $=O(r)$, так как эта функция непрерывна в точке $z=a_2$. С другой стороны, образ точки $z\in C_r$ в плоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{w}}$ должен перейти с луча A_1A_2 на луч A_2A_3, и приращение w должно мало отличаться от $\Delta\mathrm{w}=$ $=i+O(r)$.

Приравнивая выражения для $\Delta\mathrm{w}$, получим

$$\Delta\mathrm{w}=\widetilde{C}a_2 i\pi=i \ \Leftrightarrow\ \widetilde{C}a_2=\frac{1}{\pi}. \tag{1.5.11}$$

Аналогично, когда точка обходит точку $a_4=1$ по полуокружности $C_r:(z-1)=re^{i\varphi}$, приращение

$$\Delta\mathrm{w}=-\widetilde{C}i\pi=i \ \Leftrightarrow\ \widetilde{C}=-\frac{1}{\pi}. \tag{1.5.12}$$

Подставим выражения (1.5.11), (1.5.12) в (1.5.10), получим

$$\mathrm{w}=-\frac{1}{\pi}[\ln(z-1)+\ln(z+1)]+C_1.$$

Для определения C_1 воспользуемся соответствием точек $A_3=i\leftrightarrow a_3=0$:

$$i=-\frac{1}{\pi}\ln(-1)+C_1 \ \Leftrightarrow\ C_1=2i.$$

Искомая функция имеет вид

$$\mathrm{w}=-\frac{1}{\pi}[\ln(z-1)+\ln(z+1)]+2i.$$

Ответ. 1) $\mathrm{w}=\dfrac{2}{\pi}(\operatorname{arsh}\sqrt{z}+\sqrt{z}\sqrt{1+z})$;

2) $\mathrm{w}=\dfrac{i}{2}(3z^{1/2}-z^{3/2})$; 3) $\mathrm{w}=\dfrac{z+\ln z+1}{\pi}$;

4) $\mathrm{w}=\dfrac{1}{\pi}[2\sqrt{z}+\ln(\sqrt{z}-1)-\ln(\sqrt{z}+1)]$;

5) $\mathrm{w}=\dfrac{i}{2}(z^{1/2}+z^{-1/2})$; 6) $\mathrm{w}=-\dfrac{1}{\pi}[\ln(z-1)+\ln(z+1)]+2i$.

Задача 1.5.7.* С помощью интеграла Кристоффеля—Шварца отобразить на многогранник D верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$.

1. $D=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\quad(\operatorname{Im}\mathrm{w}>1)\cup(\operatorname{Re}\mathrm{w}<0,\quad 0<\operatorname{Im}\mathrm{w}\le 1)\}$.
2. $D=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\quad(\operatorname{Re}\mathrm{w}<0)\cup(\operatorname{Im}\mathrm{w}>0),\quad \mathrm{w}\notin[0,2i]\}$.

3. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im\, w} > 0, \quad \mathrm{w} \notin [2i, +\infty + 2i]\}.$

4. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (0 < \mathrm{Im\, w} < 2) \cup (\mathrm{Re\, w} < 0, \quad \mathrm{Im\, w} > 0)\}.$

5. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re\, w} < 0, \quad \mathrm{w} \notin [-\infty, -2]\}.$

6. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad -1 < \mathrm{Re\, w} < 1, \quad \mathrm{w} \notin [0, +i\infty]\}.$

7. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\mathrm{Re\, w} < 0) \cup (0 \le \mathrm{Re\, w} < 1, \quad \mathrm{Im\, w} > 0)\}.$

8. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\mathrm{Re\, w} < 0) \cup (\mathrm{Im\, w} > 0), \quad \mathrm{w} \notin [-2, 0]\}.$

9. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re\, w} < 0, \quad \mathrm{w} \notin [-2, -2 - i\infty]\}.$

10. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (-2 < \mathrm{Im\, w} < 0) \cup (\mathrm{Re\, w} > 0, \quad \mathrm{Im\, w} < 0)\}.$

11. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im\, w} < 0, \quad \mathrm{w} \notin [-2i, -i\infty]\}.$

12. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad 0 < \mathrm{Im\, w} < 3, \quad \mathrm{w} \notin [i, +\infty + i]\}.$

13. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\mathrm{Im\, w} > 2) \cup (\mathrm{Re\, w} > 0, \quad 0 < \mathrm{Im\, w} \le 2)\}.$

14. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \; (\mathrm{Im\, w} < 0) \cup (\mathrm{Re\, w} > 0, \; \mathrm{Im\, w} > 0), \; \mathrm{w} \notin [-2i, 0]\}.$

15. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im\, w} < 0, \quad \mathrm{w} \notin [-\infty - i, -i]\}.$

16. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (-2 < \mathrm{Re\, w} < 0) \cup (\mathrm{Re\, w} \le -2, \quad \mathrm{Im\, w} > 0)\}.$

17. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re\, w} > 0, \quad \mathrm{w} \notin [2, +\infty]\}.$

18. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad 0 < \mathrm{Im\, w} < 2, \quad \mathrm{w} \notin [-\infty + i, i]\}.$

19. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\mathrm{Re\, w} > 2) \cup (0 < \mathrm{Re\, w} \le 2, \quad \mathrm{Im\, w} > 0)\}.$

20. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\mathrm{Re\, w} < 0) \cup (\mathrm{Im\, w} < 0), \quad \mathrm{w} \notin [-2i, 0]\}.$

21. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re\, w} > 0, \quad \mathrm{w} \notin [2, 2 + i\infty]\}.$

22. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (0 < \mathrm{Re\, w} < 2) \cup (2 \le \mathrm{Re\, w}, \quad \mathrm{Im\, w} > 0)\}.$

23. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im\, w} > 0, \quad \mathrm{w} \notin [2i, +i\infty]\}.$

24. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad -1 < \mathrm{Re\, w} < 1, \quad \mathrm{w} \notin [-i\infty, 0]\}.$

25. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\mathrm{Im\, w} > 0) \cup (\mathrm{Re\, w} < 0, \quad -2 < \mathrm{Im\, w} \le 0)\}.$

26. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (\mathrm{Re\, w} > 0) \cup (\mathrm{Im\, w} < 0), \quad \mathrm{w} \notin [0, 2]\}.$

27. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re\, w} < 0, \quad \mathrm{w} \notin [-2, -2 + i\infty]\}.$

28. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad (-1 < \mathrm{Im\, w} < 0) \cup (\mathrm{Re\, w} < 0, \quad -1 \le \mathrm{Im\, w} < 0)\}.$

29. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Im\, w} > 0, \quad \mathrm{w} \notin [3i, +i\infty]\}.$

30. $D = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \quad 0 < \mathrm{Im\, w} < 3, \quad \mathrm{w} \notin [-\infty + i, i]\}.$

1.6. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть на комплексной плоскости задана кусочно-гладкая кривая γ, на которой определена однозначная функция $f(z)$. Разобьем эту кривую на n частей точками $z_0, z_1, ..., z_n$ в направлении от z_0 — начальной точки до z_n — конечной точки кривой γ и на каждой части выберем какую-нибудь точку $\xi_k \in \gamma$, заключенную между z_{k-1} и z_k.

Определение. *Интегралом функции $f(z)$ по кривой γ* называется предел

$$\lim_{\max|z_k - z_{k-1}| \to 0} \sum_{k=1}^{k} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_\gamma f(z)dz,$$

если этот предел существует и не зависит от выбора промежуточных точек z_k и ξ_k.

Теорема 1.6.1 (*достаточное условие существования*). Если функция $f(z)$ непрерывна на кусочно-гладкой кривой γ, то $\int\limits_\gamma f(z)dz$ существует. Если $z = x + iy$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy, \tag{1.6.1}$$

т.е. сводится к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода.

Если кривая γ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а начальная и конечная точки кривой соответствуют значениям $t = \alpha$ и $t = \beta$, то

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt, \quad \text{где } z(t) = x(t) + iy(t). \tag{1.6.2}$$

Если кривая γ является замкнутым жордановым контуром, то используется обозначение

$$\oint_\gamma f(z)dz.$$

Основные свойства интеграла.

а) *Линейность.* Если функции $f(z)$, $g(z)$ непрерывны вдоль кусочно-гладкой кривой γ и $a, b \in \mathbb{C}$, то

$$\int_\gamma (af(z) + bg(z))dz = a\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz.$$

б) *Аддитивность.* Пусть γ_1 и γ_2 — кусочно-гладкие кривые. Если функция $f(z)$ непрерывна вдоль $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, то

$$\int\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

в) *Зависимость от ориентации.* Пусть кусочно-гладкая кривая γ задана параметрическим уравнением $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, а кусочно-гладкая кривая γ^- задана параметрическим уравнением $z = z(\alpha+\beta-t)$ при $\alpha \le t \le \beta$, т.е. γ^- получается из γ сменой ориентации. Если функция $f(z)$ непрерывна вдоль γ, то она непрерывна вдоль γ^- и

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz.$$

г) *Оценка интеграла.* Пусть функция $f(z)$ непрерывна вдоль кусочно-гладкой кривой γ, заданной параметрическими уравнениями $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Тогда справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)dz \right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))|\,|z'(t)|dt,$$

где в правой части неравенства криволинейный интеграл первого рода от функции $|f(z)|$ вдоль кривой γ.

Если $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл вдоль кривой $\gamma \subset D$ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек z_0 и z_1 и может быть вычислен по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \tag{1.6.3}$$

где $\Phi(z)$ — *первообразная функции* $f(z)$, т.е. $\Phi(z)$ аналитична и $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

Теорема 1.6.2 (*Коши*). Если функция $f(z) \in O(D)$ аналитична в односвязной области D и γ — кусочно-гладкий замкнутый жорданов контур в этой области, то

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{1.6.4}$$

Пусть область D ограничена и имеет *простую границу*, т.е. ∂D состоит из конечного числа непересекающихся кусочно-гладких замкнутых жордановых кривых $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n$, где γ_0 обозначает ориентированную против часовой стрелки внешнюю границу области D, а $\gamma_1, ..., \gamma_n$ — внутренние компоненты границы ∂D, ориентированные по часовой стрелке.

Теорема 1.6.3 (*Коши для многосвязной области*). Пусть D — ограниченная область с простой границей и $f(z) \in O(D)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \partial D$. Тогда

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \oint_{\gamma_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0, \tag{1.6.5}$$

где γ_k^-, $k = \overline{1, n}$ — внутренние компоненты границы ∂D, ориентированные против часовой стрелки.

Теорема 1.6.4 (*интегральная формула Коши*). Пусть D — ограниченная область с простой границей и $f(z) \in O(D)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \partial D$. Тогда $\forall z_0 \in D$ справедливы формулы

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{1.6.6}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in N. \tag{1.6.7}$$

Пример 1.6.1. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

1) $\int\limits_{\gamma} \overline{z} dz$, где а) γ — ломаная ABC, где $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$,

б) γ — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ от точки $A(1, 0)$ до точки $C(-1, 0)$;

2) $\int\limits_{\gamma} z \operatorname{ch} z dz$, где γ — ломаная ABC, где $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

Решение. 1) Для $f(z) = \overline{z} = x - iy$ имеем по формуле (1.6.1)

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\gamma} xdx + ydy + i \int_{\gamma} -ydx + xdy.$$

а) По свойству аддитивности интеграла, поскольку путь интегрирования состоит из двух отрезков, запишем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz.$$

На участке AB: $y=-x+1$, $dy=-dx$, $1 \geq x \geq 0$ интеграл равен

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_1^0 xdx + (-x+1)(-dx) + i\int\limits_1^0 (x-1)dx + x(-dx) =$$

$$= \int\limits_1^0 (2x-1)dx - i\int\limits_1^0 dx = (x^2-x)\Big|_1^0 - ix\Big|_1^0 = i.$$

На участке BC: $y=x+1$, $dy=dx$, $0 \geq x \geq -1$ интеграл равен

$$\int\limits_{BC} f(z)dz = \int\limits_0^{-1} xdx + (x+1)dx + i\int\limits_0^{-1} (-x-1)dx + xdx =$$

$$= \int\limits_0^{-1} (2x+1)dx - i\int\limits_0^{-1} dx = (x^2+x)\Big|_0^{-1} - ix\Big|_0^{-1} = i.$$

Окончательно $\int\limits_\gamma f(z)dz = 2i$.

б) В данном случае удобно воспользоваться уравнением кривой γ в параметрической форме $z=e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, $dz = ie^{it}dt$. Тогда $f(z) = \overline{z} = e^{-it}$. По формуле (1.6.2) имеем

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_0^\pi e^{-it}ie^{it}dt = i\int\limits_0^\pi dt = i\pi.$$

Подынтегральная функция $f(z)=\overline{z}$ непрерывна, но не является аналитической, поэтому интегралы по различным кривым, соединяющим две заданные точки, могут иметь различные значения.

2) Подынтегральная функция $f(z) = z\operatorname{ch} z$ аналитична всюду. Применяя формулу Ньютона—Лейбница (1.6.3), получим

$$\int\limits_\gamma z\operatorname{ch} z dz = \int\limits_0^i z\operatorname{ch} z dz = \int\limits_0^i z d(\operatorname{sh} z) = z\operatorname{sh} z\Big|_0^i - \int\limits_0^i \operatorname{sh} z dz = (z\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z)\Big|_0^i =$$

$$= i\operatorname{sh} i - \operatorname{ch} i + 1 = -\sin 1 - \cos 1 + 1.$$

Ответ. 1) а) $2i$; б) $i\pi$; 2) $1-\sin 1 - \cos 1$.

Задача 1.6.1. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по заданной кривой.

1. $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z dz$; AB — отрезок прямой $z_A = 0$, $z_B = 1+2i$.

2. $\int\limits_{\gamma}(z^2+i\overline{z})dz;\quad \gamma$ — часть окружности $|z|=3,\ \arg z\in[\pi/2,\pi]$.

3. $\int\limits_{AB} z^2dz;\quad AB:\{y=x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

4. $\int\limits_{\gamma}(z+1)e^zdz;\quad \gamma:\{|z|=1,\ 0\le\arg z\le\pi/2\}$.

5. $\int\limits_{\gamma}(\cos iz+2z)dz;\quad \gamma:\{|z|=1,\ \pi/2\le\arg z\le\pi\}$.

6. $\int\limits_{ABC}|z|dz;\quad ABC$ — ломаная $A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,1)$.

7. $\int\limits_{AB}\overline{z}^2dz;\quad AB$ — отрезок прямой $A(1,1),\ B(0,0)$.

8. $\int\limits_{ABC}z^3e^{z^4}dz;\quad ABC$ — ломаная $A(0,1),\ B(1,0),\ C(0,0)$.

9. $\int\limits_{\gamma}z|z|dz;\quad \gamma:\{|z|=1,\ -\pi\le\arg z\le 0\}$.

10. $\int\limits_{\gamma}(z^3+\sin z)dz;\quad \gamma:\{|z|=1,\ 0\le\arg z\le\pi/2\}$.

11. $\int\limits_{AB}z\mathrm{Im}\,zdz;\quad AB$ — отрезок прямой $A(1,1),\ B(0,0)$.

12. $\int\limits_{ABC}(cosiz+z^3)dz;\quad ABC$ — ломаная $A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,2)$.

13. $\int\limits_{\gamma}|z|dz;\quad \gamma:\{|z|=2,\ \pi/4\le\arg z\le 3\pi/4\}$.

14. $\int\limits_{\gamma}z\cos izdz;\quad \gamma:\{|z|=1,\ -\pi\le\arg z\le 0\}$.

15. $\int\limits_{ABC}(1+z^8)dz;\quad ABC$ — ломаная $A(0,0),\ B(1,1),\ C(0,1)$.

16. $\int\limits_{ABC}(\sin iz+z)dz;\quad ABC$ — ломаная $A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,1)$.

17. $\int\limits_{AB}z\overline{z}dz;\quad AB:\{|z|=1,\ \pi/2\le\arg z\le\pi\}$.

18. $\int\limits_{AB}(z^3+1)dz;\quad AB:\{y=x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

19. $\int\limits_{\gamma}(\mathrm{ch}\,z+z)dz;\quad \gamma:\{|z|=1,\ -\pi\le\arg z\le 0\}$.

20. $\displaystyle\int\limits_{ABC} (z^2+\cos z)dz; \quad ABC$ — ломаная $A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,1)$.

21. $\displaystyle\int\limits_{AB} \operatorname{Re} z dz; \quad AB$ — отрезок прямой $A(1,0),\ B(0,1)$.

22. $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \operatorname{Im} z dz; \quad \gamma : \{y=x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

23. $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z}; \quad \gamma : \{|z|=2,\ 0\le \arg z\le 2\pi\}$.

24. $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re}(z^2-z)dz; \quad \gamma : \{y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

25. $\displaystyle\int\limits_{AB} (z^3-3iz)dz; \quad AB$ — отрезок прямой $A(1,0),\ B(0,1)$.

26. $\displaystyle\int\limits_{ABC} z^2e^{z^3}dz; \quad ABC$ — ломаная $A(0,1),\ B(1,0),\ C(0,0)$.

27. $\displaystyle\int\limits_{AB} (4z^3+3z^2+1)dz; \quad AB : \{y=x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

28. $\displaystyle\int\limits_{AB} \operatorname{Re} z^2 dz; \quad AB$ — отрезок прямой $A(1,1),\ B(0,0)$.

29. $\displaystyle\int\limits_{AB} e^z dz; \quad AB : \{y=x^2,\ 0\le x\le 1\}$.

30. $\displaystyle\int\limits_{AB} (1-i+2\overline{z})dz; \quad AB$ — отрезок прямой $A(0,1),\ B(1,0)$.

Пример 1.6.2. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы $\displaystyle\oint\limits_{\gamma_k} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2(z+1)}dz, \quad k=0,1,2$ (рис. 1.6.1):

1) $\gamma_1 :\ |z+1|=1/2$; 2) $\gamma_2 :\ |z-1|=1/2$; 3) $\gamma_0 :\ |z|=2$.

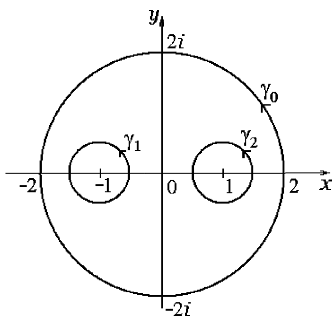


Рис. 1.6.1

Решение. 1) Внутри контура γ_1 (рис. 1.6.1) знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точке $z_0 = -1$. Применим формулу Коши (1.6.6), в которой $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z-1)^2}$ является аналитической внутри γ_1. Поэтому

$$\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2(z+1)} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{e^{-i}}{4} = \frac{\pi i}{2} e^{-i}.$$

2) Внутри контура γ_2 (см. рис. 1.6.1) знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точке $z_0 = 1$. Применим формулу Коши (1.6.7), в которой $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z+1}$ является аналитической внутри γ_2. Поэтому

$$\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2(z+1)} dz = 2\pi i f'(1).$$

Находим производную

$$f'(z) = \left(\frac{e^{iz}}{z+1}\right)' = \frac{ie^{iz}(z+1) - e^{iz}}{(z+1)^2}.$$

Отсюда

$$f'(1) = \frac{(-1+2i)}{4} e^{i}.$$

Следовательно:

$$\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2(z+1)} dz = \frac{\pi i}{2}(-1+2i)e^{i}.$$

3) Воспользуемся теоремой 1.6.3. Из формулы (1.6.5), в которой роль γ_0, γ_1^- и γ_2^- играют γ_0, γ_1 и γ_2 соответственно, следует, что

$$\oint\limits_{|z|=2} f(z)dz = \oint\limits_{|z+1|=1/2} f(z)dz + \oint\limits_{|z-1|=1/2} f(z)dz.$$

Поэтому

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2(z+1)} dz = \frac{\pi i}{2} e^{-i} + \frac{\pi i}{2}(-1+2i)e^{i} = \frac{\pi i}{2}(e^{-i} + (-1+2i)e^{i}).$$

Ответ. 1) $\dfrac{\pi i e^{-i}}{2}$; 2) $\dfrac{\pi i(-1+2i)e^{i}}{2}$; 3) $\dfrac{\pi i(e^{-i} + (-1+2i)e^{i})}{2}$.

Задача 1.6.2. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы
$$\oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz, \quad k = 0, 1, 2.$$

1. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

2. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z-1)^2}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

3. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon |z+1| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/2$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

4. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z+1)}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z+1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

5. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z-1)^2(z+1)}$, $\gamma_1\colon |z+1| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/2$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

6. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{z^3(z+1)}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z+1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

7. $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2(z+1)}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z+1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

8. $f(z) = \dfrac{e^{-iz}}{z^2(z-1)}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

9. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^2(z+1)}$, $\gamma_1\colon |z+1| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/2$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

10. $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{z(z-1)^2}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

11. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z+1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

12. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z-1)(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon |z+1| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/2$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

13. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z-1)^2}$, $\gamma_1\colon |z| = 1/2$, $\gamma_2\colon |z-1| = 1/4$, $\gamma_0\colon |z| = 2$.

14. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-1)(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon\ |z-1|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/2$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

15. $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z}{z(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon\ |z|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/4$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

16. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z-1)(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon\ |z-1|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/2$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

17. $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2(z+1)}$, $\gamma_1\colon\ |z-1|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/2$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

18. $f(z)=\dfrac{e^{-i(z-1)}}{(z-1)(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon\ |z-1|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/2$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

19. $f(z)=\dfrac{\sin(z-1)}{z^2(z+1)}$, $\gamma_1\colon\ |z|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/4$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

20. $f(z)=\dfrac{\cos\pi(z-1)}{(z-1)(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon\ |z-1|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/2$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

21. $f(z)=\dfrac{e^{(z-1)}}{z^2(z+1)}$, $\gamma_1\colon\ |z|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/4$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

22. $f(z)=\dfrac{e^{i(z+1)}}{z^2(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon\ |z|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/4$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

23. $f(z)=\dfrac{\sin\pi(z+1)}{(z-1)^2(z+1)}$, $\gamma_1\colon\ |z+1|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z-1|=1/2$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

24. $f(z)=\dfrac{\cos(z-1)}{z^2(z-1)}$, $\gamma_1\colon\ |z|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z-1|=1/4$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

25. $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z-1)}$, $\gamma_1\colon\ |z|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z-1|=1/4$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

26. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}(z-1)}{z(z-1)^2}$, $\gamma_1\colon\ |z|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z-1|=1/4$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

27. $f(z)=\dfrac{e^{-(z+1)}}{z(z+1)^2}$, $\gamma_1\colon\ |z|=1/2$, $\gamma_2\colon\ |z+1|=1/4$, $\gamma_0\colon\ |z|=2$.

28. $f(z)=\dfrac{\sin\pi(z+2)}{z^2(z+1)},\quad \gamma_1\colon\ |z|=1/2,\quad \gamma_2\colon\ |z+1|=1/4,\quad \gamma_0\colon\ |z|=2.$

29. $f(z)=\dfrac{\cos\pi(z+1)}{(z-1)^2(z+1)},\quad \gamma_1\colon\ |z-1|=1/2,\quad \gamma_2\colon\ |z+1|=1/2,$
$\gamma_0\colon\ |z|=2.$

30. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch}(z+1)}{z(z+1)^2},\quad \gamma_1\colon\ |z|=1/2,\quad \gamma_2\colon\ |z+1|=1/4,\quad \gamma_0\colon\ |z|=2.$

1.7. Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана

Определение. Составленный из комплексных чисел ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *сходится* к $S\in\mathbb{C}$, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|S-\sum_{k=1}^{n} z_k\right|=0.$$

Определение. Составленный из однозначных комплекснозначных функций ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится к функции $f(z)$ равномерно на множестве $M\subset\mathbb{C}$*, если

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in M}\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right|=0.$$

Свойства равномерно сходящихся рядов.

а) *Признак равномерной сходимости Вейерштрасса.*

Если функциональный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом, т.е

$$\max_{z\in M}|f_n(z)|\le C_n$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на M.

б) *Интегрирование равномерно сходящихся рядов.*

Пусть γ — кусочно-гладкая жорданова кривая в $\mathbb{C}$, функции $f_n(z)$ непрерывны на γ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на γ к функции $f(z)$. Тогда его сумма $f(z)$ непрерывна на γ и

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma} f_n(z)dz.$$

в) *Дифференцирование равномерно сходящихся рядов.*

Пусть функции $f_n(z)$ — однозначны и аналитичны в области $D \subset \mathbb{C}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно внутри D к функции $f(z)$. Тогда его сумма $f(z)$ является аналитической функцией в D, а функциональный ряд можно дифференцировать почленно любое число раз:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in D, \quad k = \overline{0, \infty}$$

Теорема 1.7.1 (*Тейлора*). Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в круге $|z - z_0| < R$ радиуса $R > 0$ с центром в точке z_0. Тогда она разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \tag{1.7.1}$$

где коэффициенты

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad 0 < \rho < R, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{1.7.2}$$

Причем ряд (см. формулу (1.7.1)) сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве M внутри круга $|z - z_0| < R$, и это разложение единственно.

Определение. Ряд (см. формулу (1.7.1)) называется *рядом Тейлора функции* $f(z)$ *с центром в точке* z_0, а числа C_n в формуле (1.7.2) не зависят от ρ и называются *коэффициентами Тейлора в точке* z_0.

Теорема 1.7.2 (*Лорана*). Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$ с центром в точке z_0 $(0 \le r < R \le +\infty)$. Тогда она разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \tag{1.7.3}$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad r < \rho < R, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.7.4}$$

Причем ряд (см. формулу (1.7.3)) сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве M внутри кольца $r < |z - z_0| < R$, и это разложение единственно.

Определение. Ряд (см. формулу (1.7.3)) называется *рядом Лорана функции* $f(z)$ *в кольце* $r < |z - z_0| < R$, числа C_n (см. формулу (1.7.4)) не зависят от ρ и называются *коэффициентами Лорана.* В формуле (1.7.3) ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-k}}{(z - z_0)^k}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

называются соответственно *главной частью* ряда Лорана и *правильной частью* ряда Лорана.

Замечание. Сходимость ряда Лорана (1.7.3) означает *по определению*, что сходятся *по отдельности* главная часть и правильная часть.

Определение. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой функции* $f(z)$, если существует проколотая окрестность этой точки $0 < |z - z_0| < R$, в которой $f(z)$ — однозначная и аналитическая функция, но в самой точке z_0 функция $f(z)$ не определена или теряет аналитичность.

Функцию $f(z)$ в кольце $0 < |z - z_0| < R$ можно разложить в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$, который называют *рядом Лорана* $f(z)$ *в окрестности особой точки* z_0.

На практике для нахождения коэффициентов C_n, если это возможно, используются следующие разложения элементарных функций в ряд Тейлора:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty;$$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - ... + (-1)^n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} z^n + ... =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1.$$

Определение. Точка $z = \infty$ называется *изолированной особой точкой функции* $f(z)$, если существует окрестность $|z| > R$, в которой $f(z)$ аналитическая, за исключением самой точки $z = \infty$.

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в окрестности бесконечно удаленной точки $|z| > R$, тогда функция $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ аналитическая в окрестности точки $\zeta = 0$ и ее можно разложить в ряд Лорана $\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \zeta^n$. Отсюда следует, что $f(z)$ разлагается в ряд

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{-k} z^k, \quad |z| > R,$$

который называется *рядом Лорана функции* $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Определение. Ряд $\sum_{k=-\infty}^{0} C_{-k} z^k$ называют *правильной частью* ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$, а $\sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} z^k$ *главной частью* ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

Замечание. Рассмотрим окрестность бесконечно удаленной точки $|z - z_0| > R$, в которой функция $f(z)$ аналитична. Тогда функция $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta} + z_0\right)$ аналитична в окрестности точки $\zeta = 0$ и ее можно разложить в ряд Лорана $\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \zeta^n$. Отсюда следует, что $f(z)$ разлагается в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z - z_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{-k} (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| > R.$$

Пример 1.7.1. Найти все лорановские разложения по степеням z функции $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2-z-2}$.

Решение. Имеем $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2-z-2}=\dfrac{3z+2}{(z+1)(z-2)}$, т.е. функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1=-1$ и $z_2=2$, в которых она неаналитична. Следовательно, имеются три кольца с центром в точке $z_0=0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

а) круг $|z|<1$;

б) кольцо $1<|z|<2$;

в) $2<|z|<\infty$ — внешность круга $|z|\leq 2$.

Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в каждом из этих колец.

Разложим $f(z)$ на сумму простейших дробей:

$$f(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{z-2}. \tag{1.7.5}$$

а) В круге $|z|<1$ преобразуем выражение (1.7.5) следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-z/2}.$$

Используя разложение в ряд Тейлора

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad |t|<1, \tag{1.7.6}$$

имеем

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1; \tag{1.7.7}$$

$$\frac{1}{1-z/2}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n},\quad |z|<2. \tag{1.7.8}$$

Следовательно, в круге $|z|<1$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$\frac{3z+2}{z^2-z-2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3}-\frac{4}{3\cdot 2^n}\right]z^n.$$

Этот ряд не содержит главной части и является рядом Тейлора функции $f(z)$.

б) В кольце $1<|z|<2$ ряд (см. формулу (1.7.7)) расходится, а ряд (см. формулу (1.7.8)) сходится. Поэтому вместо формулы (1.7.7) используем выражение

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n}. \quad (1.7.9)$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > 1$.

Следовательно, в кольце $1 < |z| < 2$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$\frac{3z+2}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} - \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

в) В кольце $|z| > 2$ ряд (см. формулу (1.7.9)) сходится, а ряд (см. формулу (1.7.8)) расходится. Поэтому представим $f(z)$ следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{3z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \ldots\right) +$$

$$+ \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3} + \frac{8 \cdot 2^{n-1}}{3}\right]\frac{1}{z^n}.$$

Как видно из этого примера, ряд Лорана функции $f(z)$ в разных кольцах может иметь разный вид.

Ответ. а) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3} - \frac{4}{3 \cdot 2^n}\right] z^n, \quad |z| < 1;$

б) $f(z) = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} - \frac{4}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \quad 1 < |z| < 2;$

в) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3} + \frac{8 \cdot 2^{n-1}}{3}\right]\frac{1}{z^n}, \quad 2 < |z|.$

Задача 1.7.1. Найти все лорановские разложения по степеням z функции $f(z)$.

1. $f(z) = \dfrac{z+2}{2z^3 - z^2 - z}$.
2. $f(z) = \dfrac{3}{z^4 + 5z^2 + 4}$.
3. $f(z) = \dfrac{2z+3}{z^3 + 3z^2 + 2z}$.
4. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}$.
5. $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - 3z^3 + 2z}$.
6. $f(z) = \dfrac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$.
7. $f(z) = \dfrac{z+4}{2z^2 + z^3 - z^4}$.
8. $f(z) = \dfrac{2}{z^3 - 4z^2 + 3z}$.

9. $f(z) = \dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$.

10. $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2-5z+6}$.

11. $f(z) = \dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$.

12. $f(z) = \dfrac{1}{z^3-3z^2}$.

13. $f(z) = \dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.

14. $f(z) = \dfrac{1}{z^4-z^2}$.

15. $f(z) = \dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$.

16. $f(z) = \dfrac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$.

17. $f(z) = \dfrac{1}{z^3+4z^2}$.

18. $f(z) = \dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$.

19. $f(z) = \dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$.

20. $f(z) = \dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$.

21. $f(z) = \dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$.

22. $f(z) = \dfrac{1}{z^4-4z^2}$.

23. $f(z) = \dfrac{1}{z^3-2z^2}$.

24. $f(z) = \dfrac{3}{z^4-5z^2+4}$.

25. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$.

26. $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2+z}$.

27. $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^2}$.

28. $f(z) = \dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$.

29. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-6z+8}$.

30. $f(z) = \dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.

Пример 1.7.2. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки z_0:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}, \quad z_0 = i;$ 2) $f(z) = z\cos\dfrac{\pi z}{z-2}, \quad z_0 = 2.$

Решение. 1) Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$ имеет две изолированные особые точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$, расстояние между которыми равно 2. Следовательно, $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z-i| < 2$ и разлагается в этом кольце в ряд Лорана. Разложим $f(z)$ на сумму простейших дробей:

$$f(z) = -\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Первое слагаемое уже представляет собой степень $(z-i)$. Для второго слагаемого имеем

$$\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{(z-i)+2i}=\frac{i}{2\cdot 2i}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{z-i}{2i}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{z-i}{2i}+\left(\frac{z-i}{2i}\right)^2-\ldots\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n},$$

где ряд (геометрическая прогрессия) сходится при $|z-i|<2$. Окончательно

$$f(z)=-\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n(z-i)^n,\quad 0<|z-i|<2,$$

где первое слагаемое — главная часть ряда Лорана, остальные — правильная часть.

2) Функция $f(z)=z\cos\dfrac{\pi z}{z-2}$ имеет единственную особую точку $z=2$, следовательно, она аналитична в кольце $0<|z-2|<\infty$ и разложима в этом кольце в ряд Лорана по степеням $(z-2)$.

Сделав замену переменной $t=z-2$, получим

$$f(t+2)=(t+2)\cos\frac{\pi(t+2)}{t}=(t+2)\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{t}\right)=-t\cos\frac{2\pi}{t}-2\cos\frac{2\pi}{t}.$$

Используя табличное разложение, получим

$$f(t+2)=-t\left(1-\frac{(2\pi)^2}{2!t^2}+\frac{(2\pi)^4}{4!t^4}-\ldots\right)-2\left(1-\frac{(2\pi)^2}{2!t^2}+\frac{(2\pi)^4}{4!t^4}-\ldots\right)=$$

$$=-t-2+\frac{(2\pi)^2}{2!t}+\frac{2(2\pi)^2}{2!t^2}-\frac{(2\pi)^4}{4!t^3}-\frac{2(2\pi)^4}{4!t^4}+\ldots=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!t^{2n-1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2(2\pi)^{2n}}{(2n)!t^{2n}}.$$

Возвращаясь к исходной переменной z, имеем

$$f(z)=-(z-2)-2+\frac{(2\pi)^2}{2!(z-2)}+\frac{2(2\pi)^2}{2!(z-2)^2}-\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}}{(2n)!(z-2)^{2n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2(2\pi)^{2n}}{(2n)!(z-2)^{2n}},$$

где $0<|z-2|<\infty$. Первые два слагаемых, т.е. $-(z-2)-2$, представляют правильную часть ряда Лорана, остальные — главную часть.

Ответ. 1) $f(z) = -\dfrac{i}{2} \cdot \dfrac{1}{z-i} + \dfrac{1}{4} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{i}{2}\right)^n (z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < 2;$

2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}}{(2n)!(z-2)^{2n-1}} + 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}}{(2n)!(z-2)^{2n}}, \quad 0 < |z-2| < \infty.$

Задача 1.7.2. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки z_0.

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-2}, \quad z_0 = 2.$
2. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^2}, \quad z_0 = 0.$
3. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2}, \quad z_0 = -1.$
4. $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z-2}, \quad z_0 = 2.$
5. $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0 = 0.$
6. $f(z) = ze^{1/(z-2)}, \quad z_0 = 2.$
7. $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z-3}, \quad z_0 = 3.$
8. $f(z) = \dfrac{e^z}{z}, \quad z_0 = 0.$
9. $f(z) = z^2\sin\dfrac{z+2}{z}, \quad z_0 = 0.$
10. $f(z) = \sin\dfrac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1.$
11. $f(z) = \dfrac{e^z-1}{z}, \quad z_0 = 0.$
12. $f(z) = z\,e^{1/z^2}, \quad z_0 = 0.$
13. $f(z) = \cos\dfrac{\pi z}{z+1}, \quad z_0 = -1.$
14. $f(z) = \dfrac{1}{z}\sin^2 z, \quad z_0 = 0.$
15. $f(z) = z\,e^{z/(z+2)}, \quad z_0 = -2.$
16. $f(z) = \cos\dfrac{\pi z}{z+1}, \quad z_0 = -1.$
17. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}, \quad z_0 = 0.$
18. $f(z) = e^{z/(z-2)}, \quad z_0 = 2.$
19. $f(z) = z\sin\dfrac{z}{z-1}, \quad z_0 = 1.$
20. $f(z) = \dfrac{1+\cos z}{z^4}, \quad z_0 = 0.$
21. $f(z) = \operatorname{sh}\dfrac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1.$
22. $f(z) = z\sin\dfrac{\pi z}{z-1}, \quad z_0 = 1.$
23. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-5z+6}, \quad z_0 = 2.$
24. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}, \quad z_0 = -i.$
25. $f(z) = z\sin\dfrac{\pi(z+2)}{z}, \quad z_0 = 0.$
26. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}, \quad z_0 = -1.$
27. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-1}, \quad z_0 = 1.$
28. $f(z) = z\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$
29. $f(z) = z\sin\dfrac{\pi z}{z-2}, \quad z_0 = 2.$
30. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}, \quad z_0 = 1.$

Пример 1.7.3. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

1) $f(z) = \cos z$; 2) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$;

3) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z-1}$; 4) $f(z) = \dfrac{1}{1+e^z}$.

Решение. 1) Разложение $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, справедливое при $|z| < \infty$, можно рассматривать как разложение в окрестности $z = \infty$, при этом первое слагаемое, т.е. 1, — правильная часть, а все остальные — главная часть.

2) Функция $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ имеет две особые точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$, следовательно, она аналитична в кольце $1 < |z| < \infty$ и разлагается в нем в ряд Лорана. Воспользуемся тем, что $\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)' = -\dfrac{2z}{(1+z^2)^2}$, откуда $f(z) = -\dfrac{1}{2z}\,\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)$. В кольце $1 < |z| < \infty$ имеем

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2(1+1/z^2)} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}}.$$

Воспользовавшись теоремой о почленном дифференцировании ряда Лорана, получим

$$f(z) = -\frac{1}{2z}\,\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}}\right) = -\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2(n+1)(-1)^n}{z^{2n+3}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n}{z^{2n+4}},$$

т.е. ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ состоит только из правильной части.

3) Для функции $f(z) = \sin\dfrac{1}{z-1}$ воспользуемся стандартным разложением

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{(z-1)^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}},$$

справедливом при $0 < |z-1| < \infty$. Рассматривая этот ряд как ряд Лорана в окрестности $z = \infty$, видим, что он состоит только из правильной части.

4) Функция $f(z) = \dfrac{1}{1+e^z}$ не может быть разложена в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$, поскольку особые точки $z_k = i(\pi + 2\pi k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ накапливаются в бесконечности, если $k \to \infty$, т.е. $z = \infty$ не является для этой функции изолированной особой точкой.

Ответ. 1) $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| > R$;

2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(-1)^n}{z^{2n+4}}, \quad |z| > 1$;

3) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}, \quad |z-1| > 1$;

4) Точка $z = \infty$ — неизолированная особая точка.

Задача 1.7.3. Записать разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ (см. условие в задаче 1.7.1).

1.8. Классификация особых точек

Определение. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *изолированной особой точкой* однозначной функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \varepsilon, \ \varepsilon > 0$ точки z_0.

Определение. Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ называется:

1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$;

2) *полюсом*, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

3) *существенно особой точкой*, если не существует предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ни конечного, ни бесконечного.

Замечание. Точка $z_0 = 0$ является *неизолированной* особой точкой для функции $f(z) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, имеющей полюсы в точках $z_n = \dfrac{1}{\pi n} \to z_0 = 0$ при $n \to \infty$.

Тип изолированной особой точки тесно связан с видом лорановского разложения функции в окрестности этой точки.

Теорема 1.8.1. 1. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда лорановское разложение $f(z)$ в окрестности z_0 не содержит главной части:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

2. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности z_0 содержит лишь конечное (ненулевое) число слагаемых:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

$$c_{-m} \neq 0, \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Число m — номер старшего члена главной части лорановского разложения в окрестности полюса называют *порядком полюса.* При $m = 1$ полюс называется *простым.*

3. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой точкой $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное число отличных от нуля слагаемых:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Замечание. Для определения порядка полюса часто используется эквивалентность следующих утверждений:

1) точка z_0 является полюсом функции $f(z)$ порядка m;

2) точка z_0 — изолированная особая точка $f(z)$ и

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^m = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty;$$

3) функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$, где функция $\varphi(z)$ — аналитическая в окрестности точки z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$;

4) точка z_0 является нулем кратности m функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки $z = \infty$).

Определение. Изолированная особая точка $z = \infty$ является *устранимой* особой точкой, *полюсом* или *существенно особой точкой* функции $f(z)$ в зависимости от того, конечен, бесконечен или же вовсе не существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Критерии для определения типа особенности в бесконечно удаленной точке, связанные с рядом Лорана в окрестности $z = \infty$, дословно совпадают с соответствующими критериями для конечных особых точек и определяются количеством ненулевых слагаемых в главной части. При этом надо помнить, что в окрестности $z = \infty$ главная часть — слагаемые с положительными степенями в ряде Лорана.

Порядок полюса $z = \infty$ совпадает с числом m, для которого существует конечный предел:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^m} = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty.$$

Замечание. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является *устранимой* (*полюсом, существенно особой*) для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда точка $\zeta = 0$ является *устранимой* (*полюсом, существенно особой*) для функции $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$.

Пример 1.8.1. Для функции $f(z)$ определить тип особой точки $z = 0$:

$$1)\ f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}; \quad 2)\ f(z) = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{\sin z - z + \dfrac{z^3}{6}}; \quad 3)\ f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}.$$

Решение. 1) 1-й способ. Имеем, применяя, например, правило Лопиталя $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{z^2} = \dfrac{1}{2}$, следовательно, $z = 0$ — устранимая особая точка.

2-й способ. Разлагая функцию $\cos z$ в ряд Тейлора по степеням z, получим лорановское разложение $f(z)$ в окрестности $z = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}(1-\cos z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \ldots\right) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots .$$

Это разложение не содержит главной части, поэтому точка $z = 0$ — устранимая особая точка.

2) 1-й способ. Представим $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)=\operatorname{ch} z-1$, $\psi(z)=$ $=\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}$. Для функции $\varphi(z)$ точка $z=0$ — нуль 2-го порядка: $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=\operatorname{sh}(0)=0$, $\varphi''(0)=\operatorname{ch}(0)=1\neq 0$. Для функции $\psi(z)$ точка $z=0$ — нуль 5-го порядка: $\psi(0)=\psi'(0)=...=\psi^{(4)}(0)=0$, $\psi^{(5)}(0)=\cos(0)=1\neq 0$. Следовательно, для функции $\dfrac{1}{f(z)}$ точка $z=0$ является нулем 3-го порядка, а значит, $z=0$ — полюс 3-го порядка для $f(z)$.

2-й способ. Разложим в ряд Тейлора числитель и знаменатель функции $f(z)$:

$$\operatorname{ch} z-1=-1+\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+...\right)=z^2\left(\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}+...\right);$$

$$\sin z-z+\frac{z^3}{6}=-z+\frac{z^3}{6}+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...\right)=z^5\left(\frac{1}{5!}-\frac{z^2}{7!}+...\right).$$

Тогда $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\frac{z^2\left(\dfrac{1}{2!}+\dfrac{z^2}{4!}+...\right)}{z^5\left(\dfrac{1}{5!}-\dfrac{z^2}{7!}+...\right)}=\frac{1}{z^3}\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в окрестности $z=0$, $\varphi(0)=\dfrac{5!}{2!}\neq 0$. Следовательно, $z=0$ — полюс 3-го порядка $f(z)$.

3) 1-й способ. Предел $\lim\limits_{z\to 0} z^3\sin\dfrac{1}{z}$ не существует, так как $\lim\limits_{z\to 0} z^3=0$, а предел $\lim\limits_{z\to 0}\sin\dfrac{1}{z}$ не существует ни конечный, ни бесконечный (заметим, что $\left|\sin\dfrac{1}{z}\right|$ не является ограниченной в окрестности $z=0$). Следовательно, $z=0$ — существенно особая точка $f(z)$.

2-й способ. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=0$:

$$f(z)=z^3\sin\frac{1}{z}=z^3\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-...\right)=z^2-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!z^2}-\frac{1}{7!z^4}+....$$

Это разложение содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями z, следовательно, $z=0$ — существенно особая точка.

Ответ. 1) Устранимая особая точка; 2) полюс 3-го порядка; 3) существенно особая точка.

Задача 1.8.1. Для функции $f(z)$ определить тип особой точки $z = 0$.

1. $f(z) = \dfrac{z}{z - \sin z}$.
2. $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{z^3}\right)$.
3. $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$.
4. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}(1 - \cos z)$.
5. $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 1}$.
6. $f(z) = \dfrac{\sin z - z}{z^3}$.
7. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}$.
8. $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1 - 2z}{z^4}$.
9. $f(z) = \dfrac{\cos(1/z) - 1}{z^2}$.
10. $f(z) = \dfrac{e^{z^2} - 1}{e^z - 1 - z}$.
11. $f(z) = z \cos\dfrac{2}{z}$.
12. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} 2z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.
13. $f(z) = \dfrac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.
14. $f(z) = z^4 \cos\dfrac{3}{z^2}$.
15. $f(z) = \dfrac{\cos 5z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.
16. $f(z) = z e^{4/z^3}$.
17. $f(z) = \dfrac{e^{3z} - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.
18. $f(z) = z^3 \sin\dfrac{4}{z^2}$.
19. $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.
20. $f(z) = z^3 e^{1/z^2}$.
21. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} 3z - 1}{e^z - 1 - z}$.
22. $f(z) = \dfrac{1}{e^z - z - 1}$.
23. $f(z) = z \cos\dfrac{3}{z^2}$.
24. $f(z) = \dfrac{e^{3z} - 1 - 3z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.
25. $f(z) = \dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.
26. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} 2z - 1}{e^z - 1 - z}$.
27. $f(z) = \dfrac{e^{z^2} - 1}{e^z - z - 1}$.
28. $f(z) = \dfrac{z}{1 - \cos z^2}$.
29. $f(z) = \operatorname{ctg} z$.
30. $f(z) = z e^{1/z^2}$.

Пример 1.8.2. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки и определить их тип:

1) $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z(2z-\pi)}$; 2) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z}$; 3) $f(z) = \dfrac{1}{e^z+2}$.

Решение. 1) Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{\sin z}{z\cos z(2z-\pi)}$. Особые точки — нули знаменателя: $z = 0$, $z_n = \dfrac{\pi}{2}$, $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В точке $z = 0$ имеем

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos z(2z-\pi)} = -\frac{1}{\pi}.$$

Следовательно, точка $z = 0$ есть устранимая особая точка функции $f(z)$.

В точке $z = \dfrac{\pi}{2}$ представим $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\cos z \cdot 2(z-\pi/2)}$, где $\varphi(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $\varphi(\pi/2) \neq 0$. Функция $\cos z$ имеет в точке $z = \dfrac{\pi}{2}$ нуль 1-го порядка, поскольку $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos'(\pi/2) = -1 \neq 0$. Следовательно, $z = \dfrac{\pi}{2}$ — нуль 2-го порядка для знаменателя. Значит, точка $z = \dfrac{\pi}{2}$ — полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

В точках $z_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ представим $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{\cos z}$, где $\psi(z) = \dfrac{\sin z}{z(2z-\pi)}$, $\psi(z_n) \neq 0$. Функция $\cos z$ имеет в точках z_n нули 1-го порядка, поскольку $\cos(z_n) = 0$, $\cos'(z_n) \neq 0$. Следовательно, точки $z_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюса 1-го порядка.

2) Представим $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z \sin z}$. Особые точки — нули знаменателя: $z = 0$, $z_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Для определения типа особой точки $z = 0$ разложим числитель и знаменатель в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$:

$$z - \sin z = z^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}z^2 + \ldots\right), \qquad z\sin z = z^2\left(1 - \frac{1}{3!}z^2 + \ldots\right).$$

Тогда имеем, что точка $z = 0$ — нуль 3-го порядка для числителя и нуль 2-го порядка для знаменателя, т.е. $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$ и точка $z = 0$ — устранимая особая точка.

В точках $z_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ представим функцию в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\sin z}$, где $\varphi(z) = \dfrac{z - \sin z}{z}$ и $\varphi(z_n) \neq 0$. Точки z_n — нули 1-го порядка функции $\sin z$, поскольку $\sin(z_n) = 0$, $\sin'(z_n) \neq 0$. Следовательно, точки $z_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюса 1-го порядка функции $f(z)$.

3) Особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 2}$ — нули знаменателя. Решая уравнение $e^z = -2$, получим $z = \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Итак, особые точки $z_n = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n)$ — нули 1-го порядка функции $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, поскольку $g(z_n) = 0$, $g'(z_n) = -2 \neq 0$. Следовательно, точки $z_n = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n)$ являются полюсами 1-го порядка $f(z)$.

Ответ. 1) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z = \dfrac{\pi}{2}$ — полюс 2-го порядка, $z_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы 1-го порядка;

2) $z = 0$ — устранимая особая точка, $z_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы 1-го порядка;

3) $z = \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ — полюсы 1-го порядка.

Задача 1.8.2. Для функции $f(z)$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

1. $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^2(z^2 + 1)}$.
2. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z(1 - \cos z)}$.
3. $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$.
4. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3(z + 1)^2}$.
5. $f(z) = \operatorname{tg} z$.
6. $f(z) = \operatorname{ctg} z$.
7. $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 1}$.
8. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z - 1)^3}$.
9. $f(z) = \operatorname{th} z$.
10. $f(z) = \operatorname{cth} z$.
11. $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z}$.
12. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin \pi z}$.
13. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3(1 - \cos z)}$.
14. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z}$.
15. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z + 1)}$.
16. $f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}$.

17. $f(z) = z \operatorname{sh} \dfrac{1}{z}$.

18. $f(z) = \cos \dfrac{1}{z+1}$.

19. $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}$.

20. $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 - 2z^5 + z^4}$.

21. $f(z) = \dfrac{z^2 - 3z + 2}{z^3 + 2z^2 + z}$.

22. $f(z) = e^{1/z^2}$.

23. $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$.

24. $f(z) = e^{z-(1/z)}$.

25. $f(z) = \dfrac{3z - \sin 3z}{z^2(z^2+4)}$.

26. $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + \sin \dfrac{1}{z^2}$.

27. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z^3 - 1)^2}$.

28. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^2}$.

29. $f(z) = \dfrac{z}{e^z + 3}$.

30. $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\sin z}$.

Пример 1.8.3. Определить тип особой точки $z = \infty$ для функции $f(z)$:

1) $f(z) = \operatorname{ch} z$; 2) $f(z) = \dfrac{z^2}{\sin^3\left(\dfrac{1}{z+1}\right)}$; 3) $f(z) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)}{z}$; 4) $f(z) = \operatorname{tg} z$.

Решение. 1) Воспользуемся табличным разложением

$$f(z) = \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty.$$

Рассматривая его как ряд Лорана в окрестности $z = \infty$, видим, что здесь содержится бесконечное число ненулевых слагаемых с положительными степенями z, поэтому $z = \infty$ — существенно особая точка.

2) Поскольку $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2}{\sin^3\left(\dfrac{1}{z+1}\right)} = \infty$, то $z = \infty$ — полюс функции $f(z)$. Определим его порядок. Имеем

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^5} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^3 \sin^3\left(\dfrac{1}{z+1}\right)} = \lim_{z\to\infty} \frac{(z+1)^3}{z^3} = 1,$$

поэтому разложение в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ имеет вид $f(z) = z^5 + c_4 z^4 + c_3 z^3 + \ldots$. Следовательно, $z = \infty$ — полюс 5-го порядка функции $f(z)$.

3) Имеем $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\cos(1/z)}{z} = 0$, следовательно, $z = \infty$ — устранима особая точка.

4) Точка $z = \infty$ не является изолированной особой точкой, поскольку полюса $z_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ этой функции накапливаются в бесконечности при $n \to \infty$.

Ответ. 1) Существенно особая точка; 2) полюс 5-го порядка; 3) устранимая особая точка; 4) неизолированная особая точка.

Задача 1.8.3. Определить тип особой точки $z = \infty$ для функции $f(z)$.

1. $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^3}$.
2. $f(z) = \dfrac{z^3 - z + 2}{z^2}$.
3. $f(z) = z\cos\dfrac{2}{z}$.
4. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$.
5. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^4}$.
6. $f(z) = \dfrac{e^{3z}}{z^2}$.
7. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$.
8. $f(z) = z^4 e^{1/z}$.
9. $f(z) = e^{1/z^3}$.
10. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$.
11. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$.
12. $f(z) = \cos\dfrac{3}{z}$.
13. $f(z) = \dfrac{\sin}{z}$.
14. $f(z) = (z+1)e^{1/z}$.
15. $f(z) = z^3 e^{1/z}$.
16. $f(z) = \dfrac{e^{2z}-1}{z^3}$.
17. $f(z) = \dfrac{2z^3 + z^2 - 3}{z^2}$.
18. $f(z) = z^3 + 2z - 1$.
19. $f(z) = \dfrac{\cos 3z}{z}$.
20. $f(z) = z\sin\dfrac{1}{z}$.
21. $f(z) = z^2 e^{1/z}$.
22. $f(z) = \dfrac{1-\cos 2z}{z^3}$.
23. $f(z) = \dfrac{z^4+1}{z^4-1}$.
24. $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2}$.
25. $f(z) = e^{-2z}$.
26. $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^3}$.

27. $f(z) = e^{1/z} - z^2 + 3$.

28. $f(z) = e^{1/(z+1)}$.

29. $f(z) = \sin 2z$.

30. $f(z) = \dfrac{z^5 - z + 1}{z^2 + 2}$.

1.9. Вычеты в изолированных особых точках

Определение. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, обозначаемое символом $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz, \quad \text{где } 0 < r < \varepsilon.$$

Этот интеграл по теореме 1.6.2 (Коши) не зависит от выбора r.

Сравнивая с выражениями для коэффициентов c_n разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки z_0 (см. формулу (1.7.4)), имеем

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Замечание. Равенство нулю вычета функции $f(z)$ в некоторой особой точке не означает, что эта точка является устранимой особой точкой для $f(z)$, например, функция $f(z) = 1/z^2$ имеет полюс 2-го порядка в точке $z_0 = 0$, а $c_{-1} = \operatorname*{res}_{0} f(z) = 0$.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе m-го порядка вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-z_0)^m].$$

В случае простого полюса $(m = 1)$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z - z_0)].$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представляется как частное двух аналитических функций $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, т.е. z_0 — простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если точка z_0 есть существенно особая точка $f(z)$, то для нахождения $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$ необходимо найти коэффициент c_{-1} лорановского разложения функции в окрестности этой точки.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности $|z| > R$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Определение. *Вычетом функции* $f(z)$ *в бесконечно удаленной точке* $z = \infty$, являющейся изолированной особой точкой $f(z)$, называется число

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)dz,$$

где $\gamma = \{|z| = r\}$ — окружность достаточно большого радиуса $r > R$, проходимая *по часовой стрелке.*

Из этого определения следует, что вычет функции в бесконечности равен коэффициенту c_{-1} лорановского разложения функции в окрестности $z = \infty$, взятому с противоположным знаком:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Замечание. Если $z = \infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, то вычет в этой точке может быть отличен от нуля (в отличие от случая, когда z_0 — конечная устранимая особая точка).

На практике часто удобно использовать следующее утверждение.

Если $z = \infty$ является нулем функции $f(z)$ кратности m, то функция $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m+1}}{z^{m-1}} + \ldots, \quad \text{где } c_{-m} \neq 0.$$

Следовательно, справедлива асимптотическая формула

$$f(z) \sim \frac{A}{z^m} \quad \text{при } z \to \infty, \quad \text{где } A = c_{-m} \neq 0.$$

Тогда при $m = 1$ имеем $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -A$, а при $m \geq 2$ получаем, что $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$.

Теорема 1.9.1 (*о полной сумме вычетов*). Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа особых точек $\{z_n\}$, $n = \overline{1, k}$. Тогда сумма вычетов в точках z_n и в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ равна нулю:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) + \sum_{n=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) = 0.$$

Пример 1.9.1. Найти вычеты в особых точках функции $f(z)$:

1) $f(z) = (z+1)^2 \sin \dfrac{1}{z-1}$; 2) $f(z) = \dfrac{\cos 3z}{(z+1)^3}$;

3) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z^2+1)}$.

Решение. 1) Особой точкой функции $f(z)$ является точка $z = 1$. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности $z = 1$. Используя табличное разложение для синуса, получим при $|z-1| > 0$

$$f(z) = ((z-1)+2)^2 \sin \frac{1}{z-1} =$$

$$= [(z-1)^2 + 4(z-1) + 4] \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{(z-1)^5} - \ldots \right),$$

откуда находим, что коэффициент при $(z-1)^{-1}$ есть $c_{-1} = 4 - \dfrac{1}{3!} = \dfrac{23}{6}$. Следовательно, $\operatorname*{res}_{1} f(z) = \dfrac{23}{6}$.

2) Особой точкой функции $f(z)$ является точка $z = -1$ — полюс 3-го порядка. Тогда

$$\operatorname*{res}_{-1} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to-1} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{\cos 3z \cdot (z+1)^3}{(z+1)^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to-1} (-3^2 \cos 3z) = -\frac{9\cos 3}{2}.$$

3) Функция имеет три особые точки $z = 0$, $z = \pm i$. Поскольку $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z(z^2+1)} = 1$, то $z = 0$ — устранимая особая точка и $\operatorname*{res}_{0} f(z) = 0$.

Точки $z = \pm i$ — полюса 1-го порядка. Для вычисления вычетов представим функцию в виде дроби $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $\psi(z) = z^2 + 1$, причем $\varphi(\pm i) \neq 0$, $\psi(\pm i) = 0$, $\psi'(\pm i) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \frac{\varphi(i)}{\psi'(i)} = \frac{\sin i}{i \cdot 2i} = -\frac{1}{2} i \operatorname{sh} 1, \qquad \operatorname*{res}_{-i} f(z) = \frac{\varphi(-i)}{\psi'(-i)} = \frac{1}{2} i \operatorname{sh} 1.$$

Ответ. 1) $\operatorname*{res}_{1} f(z) = \dfrac{23}{6}$; 2) $\operatorname*{res}_{-1} f(z) = -\dfrac{9\cos 3}{2}$;

3) $\operatorname*{res}_{0} f(z) = 0$, $\operatorname*{res}_{i} f(z) = -\dfrac{i \operatorname{sh} 1}{2}$, $\operatorname*{res}_{-i} f(z) = \dfrac{i \operatorname{sh} 1}{2}$.

Задача 1.9.1. Найти вычеты в особых точках функции $f(z)$.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z}e^{2/z^2}$.
2. $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$.
3. $f(z) = \dfrac{z^2+2}{(z-1)^2}$.
4. $f(z) = \operatorname{tg} z$.
5. $f(z) = \cos 2z \cdot e^{1/z^2}$.
6. $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$.
7. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-4)}$.
8. $f(z) = \dfrac{e^z-1}{z^3}$.
9. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^3}$.
10. $f(z) = \operatorname{th} z$.
11. $f(z) = \operatorname{cth} z$.
12. $f(z) = \dfrac{e^z-1}{\sin \pi z}$.
13. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z(1-\cos z)}$.
14. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$.
15. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)^2}$.
16. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3}$.
17. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$.
18. $f(z) = z^3\, e^{1/z^2}$.
19. $f(z) = \dfrac{e^z-1}{z^2(z+1)}$.
20. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$.
21. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$.
22. $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$.
23. $f(z) = z^5 \sin \dfrac{1}{z}$.
24. $f(z) = \operatorname{tg} 2z$.
25. $f(z) = \operatorname{ctg} 3z$.
26. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z}$.
27. $f(z) = \dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$.
28. $f(z) = e^{3/(z-1)}$.
29. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$.
30. $f(z) = \dfrac{\cos z^2 - 1}{z^3}$.

Пример 1.9.2. Найти вычеты в особых точках функции $f(z)$ (включая $z=\infty$):

1) $f(z) = \dfrac{\cos(1/z)}{z+1}$; 2) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{(z-1)^2}$; 3) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2+4}$.

Решение. 1) Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z=0$, $z=-1$, $z=\infty$.

Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности $z=0$. При $0<|z|<1$ имеем

$$f(z)=\frac{1}{1+z}\cos\frac{1}{z}=(1-z+z^2-z^3+\ldots)\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\ldots\right),$$

откуда для коэффициента при z^{-1} имеем

$$c_{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}-\ldots=1-\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}-\ldots\right)=1-\cos 1.$$

Тогда $\operatorname*{res}_0 f(z)=1-\cos 1$.

В точке $z=-1$ (полюс 1-го порядка) получим

$$\operatorname*{res}_{-1} f(z)=\lim_{z\to-1}\frac{(\cos(1/z))(z+1)}{(z+1)}=\lim_{z\to-1}\cos\frac{1}{z}=\cos 1.$$

Точка $z=\infty$ — нуль кратности 1, поскольку $f(z)\sim\dfrac{1}{z}$ при $z\to\infty$. Поэтому разложение в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-3}}{z^3}+\ldots$$

и коэффициент $c_{-1}=1$. Следовательно, $\operatorname*{res}_\infty f(z)=-1$.

2) Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z=0$, $z=1$, $z=\infty$. Для разложения в ряд Лорана в окрестности $z=0$ воспользуемся табличным разложением при $|z|<1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{d}{dz}(1+z+z^2+\ldots)=1+2z+3z^2+\ldots.$$

Тогда при $0<|z|<1$ представим

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}e^{1/z}=(1+2z+3z^2+\ldots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right),$$

откуда $c_{-1}=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots=e$, следовательно, $\operatorname*{res}_0 f(z)=e$.

В точке $z=1$ (полюс 2-го порядка) получим

$$\operatorname*{res}_1 f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{1/z}(z-1)^2}{(z-1)^2}\right)=\lim_{z\to1}\left(-\frac{e^{1/z}}{z^2}\right)=-e.$$

В точке $z = \infty$ функция $f(z)$ имеет нуль кратности 2, поскольку $f(z) \sim \dfrac{1}{z^2}$ при $z \to \infty$. Поэтому разложение $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-4}}{z^4} + \ldots$$

и коэффициент $c_{-1} = 0$. Следовательно, $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$.

3) Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-2i)(z+2i)}$, откуда видно, что особыми точками являются $z = \pm 2i$ (простые полюсы) и $z = \infty$. Имеем

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{\sin z}{z + 2i} = \frac{\sin 2i}{4i} = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2;$$

$$\operatorname*{res}_{-2i} f(z) = \lim_{z \to -2i} \frac{\sin z}{z - 2i} = \frac{\sin(-2i)}{-4i} = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2.$$

При $|z| > 2$ представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2\left(1 + \left(\frac{2}{z}\right)^2\right)} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^4 - \ldots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{z^2} - \frac{2^2}{z^4} + \frac{2^4}{z^6} - \ldots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right),$$

откуда

$$c_{-1} = 1 + \frac{2^2}{3!} + \frac{2^4}{5!} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2.$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2$.

Заметим, что в этих примерах при вычислении вычета в бесконечности можно было сразу воспользоваться теоремой 1.9.1 (о полной сумме вычетов).

Ответ. 1) $\operatorname*{res}_{0} f(z) = 1 - \cos 1, \quad \operatorname*{res}_{-1} f(z) = \cos 1, \quad \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -1;$

2) $\operatorname*{res}_{0} f(z) = e, \quad \operatorname*{res}_{1} f(z) = -e, \quad \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0;$

3) $\operatorname*{res}_{2i} f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} 2}{4}, \quad \operatorname*{res}_{-2i} f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} 2}{4}, \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\dfrac{\operatorname{sh} 2}{2}.$

Задача 1.9.2. Найти вычет функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ (в качестве $f(z)$ использовать функции из задачи 1.8.3).

1.10. Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов

Теорема 1.10.1 (*Коши о вычетах*). Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с простой границей ∂D и функция $f(z)$ однозначна и аналитична в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \partial D$ за исключением конечного числа особых точек $z_1, ..., z_n \in D$ (но $z_k \notin \partial D$, $k = \overline{1,n}$). Тогда

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Пример 1.10.1. Вычислить интеграл:

$$1)\ \oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^3+1}; \qquad 2)\ \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}-1}{z^2+z}dz; \qquad 3)\ \oint\limits_{|z|=3} z^4 e^{1/z}dz.$$

Решение. 1) Особыми точками функции $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$ являются нули знаменателя:

$$z_k = \sqrt[3]{-1} = e^{i(\pi+2\pi k)/3} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Внутри контура интегрирования — окружности $|z-1| = 1$ — расположены две особые точки: $z_0 = e^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $z_2 = e^{i5\pi/3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (полюса 1-го порядка). Имеем

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(z^3+1)'}\bigg|_{z_0} = \frac{1}{3z_0^2} = \frac{1}{3}e^{-i2\pi/3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\operatorname*{res}_{z_2} f(z) = \frac{1}{3z_2^2} = \frac{1}{3}e^{-i10\pi/3} = \frac{1}{3}e^{-i4\pi/3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

По теореме 1.10.1

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i(\operatorname*{res}_{z_0} f(z) + \operatorname*{res}_{z_2} f(z)) = -\frac{2\pi i}{3}.$$

2) Внутри контура $|z| = 2$ функция $\dfrac{e^{2z}-1}{z(z+1)}$ аналитична всюду, кроме точек $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$. Точка $z_1 = 0$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, поскольку

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}-1}{z(z+1)} = 2.$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_0 f(z) = 0$. Точка $z_2 = -1$ — полюс 1-го порядка. Имеем

$$\operatorname*{res}_{-1} f(z) = \lim_{z\to -1}\left(\frac{e^{2z}-1}{z(z+1)}(z+1)\right) = 1 - e^{-2}.$$

По теореме 1.10.1

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}-1}{z^2+z}dz = 2\pi i(\operatorname*{res}_0 f(z) + \operatorname*{res}_{-1} f(z)) = 2\pi i(1-e^{-2}).$$

3) Внутри контура интегрирования $|z| = 3$ функция $f(z) = z^4\,e^{1/z}$ имеет одну особую точку $z = 0$ (существенно особая точка). Раскладывая $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = 0$ получим

$$f(z) = z^4\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \ldots\right) = z^4 + z^3 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z} + \ldots,$$

откуда находим

$$\operatorname*{res}_0 f(z) = c_{-1} = \frac{1}{5!}.$$

По теореме 1.10.1

$$\oint\limits_{|z|=3} z^4 e^{1/z}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_0 f(z) = \frac{2\pi i}{5!} = \frac{\pi i}{60}.$$

Ответ. 1) $-2\pi i/3$; 2) $2\pi i(1-e^{-2})$; 3) $\pi i/60$.

Задача 1.10.1. Вычислить интеграл.

1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{3\sin z}{z(z+2i)}dz.$
2. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1/2} \frac{e^{2z}}{\sin z}dz.$
3. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{1-2z^2+3z^3}{4z^3}dz.$
4. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz.$
5. $\displaystyle\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z+\pi)^2}{\sin z}dz.$
6. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}dz.$
7. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}dz.$
8. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin(1/z)}{z}dz.$
9. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{3z}-z}{z^3}dz.$
10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4-2z^2+5}{z^3}dz.$
11. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}dz.$
12. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} z^3\cos\frac{2i}{z}dz.$

13. $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{1}{z(z^2+1)}dz.$

14. $\oint\limits_{|z-3|=1} \dfrac{\sin 2z+3}{z^3(z-\pi)}dz.$

15. $\oint\limits_{|z+1|=2} \dfrac{\sin^2 z-2}{z^2+2\pi z}dz.$

16. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \dfrac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz.$

17. $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{e^{2z^2}-1}{z^3}dz.$

18. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{2z^4-3z^3+7}{z^4}dz.$

19. $\oint\limits_{|z|=2} z^2\sin\dfrac{i}{z^2}dz.$

20. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^{1/z}+1}{z}dz.$

21. $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{2z^5-3z^3+4}{z^6}dz.$

22. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos iz-1}{z^3}dz.$

23. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{ze^z-z-1}{z^3}dz.$

24. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{iz}-1}{z^3}dz.$

25. $\oint\limits_{|z|=1/3} \dfrac{2-3z^4+z^5}{z^3}dz.$

26. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz.$

27. $\oint\limits_{|z-1|=3} \dfrac{ze^z}{\sin z}dz.$

28. $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \dfrac{1}{z(z^2+4)}dz.$

29. $\oint\limits_{|z|=\pi/2} \dfrac{z^2+z+3}{\sin z(z+\pi)}dz.$

30. $\oint\limits_{|z-2|=3} \dfrac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz.$

Пример 1.10.2. Вычислить интеграл, используя вычет в бесконечно удаленной точке:

1) $I_1 = \oint\limits_{|z+1|=1,5} \dfrac{z^4-2z^2}{z^3-1}dz;$ 2) $I_2 = \oint\limits_{|z|=2} \dfrac{(z^3+z^5)e^{1/z}}{(z^4-2)}dz.$

Решение. 1) Подынтегральная функция имеет конечное число изолированных особых точек: корни уравнения $z^3-1=0$. Корень $z_1=1$ — простой полюс — лежит вне контура интегрирования $|z+1|=1,5$; остальные $z_{2,3} = -(1\pm\sqrt{3}i)/2$ — внутри. По теореме 1.9.1 искомый интеграл равен

$$I_1 = 2\pi i(\operatorname*{res}_{z_2} f(z) + \operatorname*{res}_{z_3} f(z)) = -2\pi i(\operatorname*{res}_{z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z)). \qquad (1.10.1)$$

Найдем вычеты в точках $z_1=1$ и $z=\infty$, лежащих вне контура интегрирования.

Вычет в полюсе 1-го порядка $z_1 = 1$ равен

$$\operatorname*{res}_1 f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(z^4 - 2z^2)(z-1)}{(z^3-1)} = \lim_{z\to 1} \frac{z^4-2z^2}{z^2+z+1} = -\frac{1}{3}.$$

Найдем коэффициент c_{-1} при z^{-1} в лорановском разложении подынтегральной функции в окрестности точки $z = \infty$. Сделаем замену $z = \dfrac{1}{\zeta}$ и воспользуемся разложением $\dfrac{1}{1-\zeta} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \zeta^n$, $|\zeta| < 1$:

$$f(z) = \frac{z^4-2z^2}{z^3-1} = \left(z - \frac{2}{z}\right)\frac{1}{1-1/z^3} = \left(\frac{1}{\zeta} - 2\zeta\right)\frac{1}{1-\zeta^3} =$$

$$= \left(\frac{1}{\zeta} - 2\zeta\right)(1 + \zeta^3 + \zeta^6 + \ldots) = \ldots + (-2)\zeta + \ldots = \ldots - 2z^{-1} + \ldots .$$

Отсюда следует, что $\operatorname*{res}_\infty f(z) = -c_{-1} = 2$. Искомый интеграл (см. формулу (1.10.1)) равен

$$I_1 = -2\pi i\left(-\frac{1}{3} + 2\right) = -\frac{10\pi i}{3}.$$

2) Подынтегральная функция имеет конечное число изолированных особых точек: четыре корня z_n, $n = \overline{1,4}$ уравнения $z^4 - 2 = 0$, лежащих на окружности радиуса $\sqrt[4]{2} < 2$, и точка $z_0 = 0$. Все эти точки лежат внутри контура интегрирования $|z| = 2$.

По теореме 1.9.1 искомый интеграл равен

$$I_2 = 2\pi i \sum_{n=0}^{4} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) = -2\pi i \operatorname*{res}_\infty f(z). \qquad (1.10.2)$$

Найдем коэффициент c_{-1} при z^{-1} в лорановском разложении подынтегральной функции в окрестности точки $z = \infty$. Сделаем замену $z = 1/\zeta$ и воспользуемся разложениями

$$e^\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!}, \qquad \frac{1}{1-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n, \quad |z| < 1 :$$

$$f(z) = \frac{(z^3+z^5)e^{1/z}}{(z^4-2)} = \left(\frac{1}{z} + z\right) e^{1/z} \frac{1}{1-2/z^4} =$$

$$= \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(1 + \zeta + \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^3}{3!} + \ldots\right)(1 + 2\zeta^4 + 4\zeta^8 + \ldots) =$$

$$= \ldots + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\zeta + \ldots = \ldots + \frac{3}{2} z^{-1} + \ldots .$$

Отсюда следует, что $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = -3/2$. Искомый интеграл (см. формулу (1.10.2)) равен

$$I_2 = -2\pi i\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\pi i.$$

Ответ. 1) $I_1 = -\dfrac{10\pi i}{3}$; 2) $I_2 = 3\pi i$.

Задача 1.10.2. Вычислить интеграл, используя вычет в бесконечно удаленной точке.

1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^{17}}{(z^2+1)^3(z^3+2)^4}dz.$

2. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{1}{(z^4-1)(z+2)}dz.$

3. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1,5} \frac{1}{(z^4-1)(z-2)}dz.$

4. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^{15}+z^3}{z^4+2}dz.$

5. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^8}{z^9-1}dz.$

6. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^{15}}{(z^2+2)^2(z^3+3)^4}dz.$

7. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1,5} \frac{z^3}{(z^2-1)(z^2-2z+2)}dz.$

8. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1,5} \frac{z^4}{(z^3+1)(z^2-2z+2)}dz.$

9. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^6+z^4}{z^5+1}dz.$

10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^7+z^{15}}{z^8-1}dz.$

11. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^{17}+z^{15}}{(z^2-2)^2(z^3+3)^4}dz.$

12. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1,5} \frac{z^3}{(z^3-1)(z+2)}dz.$

13. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1,5} \frac{z^7+z^4+1}{(z^3+1)z(z-2)}dz.$

14. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{3z^{12}+z^5}{z^6+1}dz.$

15. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z^5+z^3)e^{1/z}}{(z^2+4)^2}dz.$

16. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^{17}-z^{14}}{(z^3+2)(z^4-1)^3}dz.$

17. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1,5} \frac{z^4}{(z^3-1)(z^2+2z+2)}dz.$

18. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1,5} \frac{z^5}{(z^4-1)(z^2+2z+2)}dz.$

19. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{3z^{13}+z^6}{z^7+1}dz.$

20. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z^5+z^2)e^{1/z}}{(z^2-1)^2}dz.$

21. $\oint\limits_{|z+1|=1,5} \frac{(z^8+1)\sin(1/z)}{(z^4-1)^2}dz.$ 22. $\oint\limits_{|z-1|=1,5} \frac{z^5}{(z^4-1)(z^2-2z+2)}dz.$

23. $\oint\limits_{|z+1|=1,5} \frac{1}{(z^4-1)(z^2+2z+2)(z-2)}dz.$ 24. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{3z^{15}+z^7}{z^8+1}dz.$

25. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1+z^9}{1+z^{10}}dz.$ 26. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1+z^{10}}{1+z^{11}}dz.$

27. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^9+2}{z^{10}-1}dz.$ 28. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^{11}e^{1/z}}{1+z^{12}}dz.$

29. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^8}{(z^2+2)^3(z-2)^3}dz.$ 30. $\oint\limits_{|z-1|=1,5} \frac{(z^8+1)\sin(1/z)}{z^4-1}dz.$

1.11. Вычисление интегралов $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция переменных u, v, не имеющая особых точек на окружности $u^2+v^2=1$.

Непосредственное вычисление такого вида интегралов может быть достаточно трудоемким, поэтому их часто сводят к интегралам по замкнутому контуру от функций комплексного переменного.

Введем комплексную переменную $z=e^{i\varphi}$. Тогда интервал интегрирования $[0, 2\pi]$ отобразится в окружность $|z|=1$, $0 \le \arg z \le 2\pi$. По формулам Эйлера имеем

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Поскольку $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, то $d\varphi = \dfrac{dz}{iz}$. Подставляя в исходный интеграл, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}; \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} = \oint\limits_{|z|=1} f(z)dz,$$

где последний интеграл вычисляется с помощью вычетов.

Пример 1.11.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5+3\sin\varphi)^2}$.

Решение. Сделав замену $z = e^{i\varphi}$, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5+3\sin\varphi)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left[5+\dfrac{3(z^2-1)}{2iz}\right]^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{4iz\,dz}{(3z^2+10iz-3)^2}.$$

Подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{4iz}{(3z^2+10iz-3)^2} = \frac{4iz}{9\,(z+i/3)^2\,(z+3i)^2}$$

имеет две особые точки $z_1 = -i/3$ и $z_2 = -3i$ — полюса 2-го порядка. Внутри контура $|z| = 1$ находится лишь $z_1 = -i/3$. Вычислим вычет $f(z)$ в точке z_1:

$$\operatorname{res} f(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}[f(z)(z-z_1)^2] = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left[\frac{4iz}{9(z-z_2)^2}\right] = \frac{4i(-z_1-z_2)}{9(z_1-z_2)^3} = \frac{5}{64i}.$$

Следовательно, по теореме 1.10.1

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+3\sin x)^2} = \oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res} f(z_1) = \frac{5\pi}{32}.$$

Ответ. $5\pi/32$.

Задача 1.11.1. Вычислить интеграл.

1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{(4+2\sqrt{3}\sin\varphi)^2} d\varphi.$
2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\varphi} d\varphi.$
3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(5+3\cos\varphi)^2} d\varphi.$
4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(4+\sqrt{15}\sin\varphi)^2} d\varphi.$
5. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\varphi} d\varphi.$
6. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{(3+\sqrt{5}\cos\varphi)^2} d\varphi.$
7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{(3+2\sqrt{2}\sin\varphi)^2} d\varphi.$
8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\varphi} d\varphi.$
9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(3+\sqrt{5}\cos\varphi)^2} d\varphi.$
10. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(4+\sqrt{7}\sin\varphi)^2} d\varphi.$

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin\varphi}d\varphi.$

12. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{(4+2\sqrt{3}\cos\varphi)^2}d\varphi.$

13. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{(5+4\sin\varphi)^2}d\varphi.$

14. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sqrt{2}\cos\varphi}d\varphi.$

15. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\sqrt{3}\cos\varphi)^2}d\varphi.$

16. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+2\sqrt{6}\sin\varphi)^2}d\varphi.$

17. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+2\sqrt{3}\sin\varphi}d\varphi.$

18. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{(3+2\sqrt{2}\cos\varphi)^2}d\varphi.$

19. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{(3+\sqrt{5}\sin\varphi)^2}d\varphi.$

20. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+2\sqrt{3}\cos\varphi}d\varphi.$

21. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+2\sqrt{6}\cos\varphi)^2}d\varphi.$

22. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(4+2\sqrt{3}\sin\varphi)^2}d\varphi.$

23. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sqrt{2}\sin\varphi}d\varphi.$

24. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{(5+2\sqrt{6}\cos\varphi)^2}d\varphi.$

25. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{(5+3\sin\varphi)^2}d\varphi.$

26. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\sqrt{5}\cos\varphi}d\varphi.$

27. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(4+\sqrt{7}\cos\varphi)^2}d\varphi.$

28. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3+2\sqrt{2}\sin\varphi)^2}d\varphi.$

29. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+\sqrt{21}\sin\varphi}d\varphi.$

30. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{(5+3\cos\varphi)^2}d\varphi.$

1.12. Вычисление некоторых несобственных интегралов

Теорема 1.12.1. Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая всюду в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, кроме конечного числа особых точек z_k, $k=\overline{1,n}$, лежащих в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$, $k=\overline{1,n}$), и

$$\lim_{R\to\infty}\max_{z\in C_R}|z\,f(z)| = 0, \tag{1.12.1}$$

где $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z). \qquad (1.12.2)$$

Замечание. Несобственный интеграл в левой части уравнения (1.12.2) понимается *в смысле главного значения*, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим положительно ориентированный кусочно-гладкий контур $\gamma = [-R, R] \cup C_R$ (рис. 1.12.1).

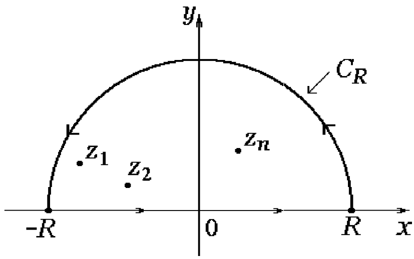


Рис. 1.12.1

Согласно теореме 1.10.1

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $R \to \infty$, приняв во внимание формулу (1.12.1) ($|zf(z)| < \varepsilon$) и оценку интеграла

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \le \int_{C_R} |z\, f(z)| \left| \frac{dz}{z} \right| \le \varepsilon \frac{\pi R}{R} = \pi\varepsilon.$$

Получим формулу (1.12.2).

Лемма Жордана. Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая всюду в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \ge 0$, кроме конечного числа особых точек z_k, $k = \overline{1, n}$, лежащих в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = \overline{1, n}$), и

$$\lim_{R\to\infty} \max_{z\in C_R} |f(z)| = 0, \qquad (1.12.3)$$

где $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Тогда $\forall \lambda > 0$ выполняется

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)e^{i\lambda z} dz = 0. \tag{1.12.4}$$

Доказательство. Учитывая известное неравенство $\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ при $\varphi \in [0, \pi/2]$ и формулу (1.12.3) ($|f(z)| < \varepsilon$), оценим интеграл

$$\left| \int\limits_{C_R} f(z)e^{i\lambda z} dz \right| \leq \int\limits_0^\pi |f(z)|\, |e^{i\lambda R\cos\varphi}| e^{-\lambda R\sin\varphi} R |e^{i\varphi} i| d\varphi \leq$$

$$\leq \varepsilon R \int\limits_0^\pi e^{-\lambda R \sin\varphi} d\varphi \leq 2\varepsilon R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R/\pi} d\varphi = \frac{\varepsilon\pi}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R}).$$

Из полученной оценки следует выражение (1.12.4).

Теорема 1.12.2. Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая всюду в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, кроме конечного числа особых точек z_k, $k = \overline{1, n}$, лежащих в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = \overline{1, n}$), и выполняется условие (1.12.3). Тогда $\forall \lambda > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k}(f(z)e^{i\lambda z}). \tag{1.12.5}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.12.1 с учетом леммы Жордана.

Замечание. Из формулы (1.12.5) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k}(f(z)e^{i\lambda z})\right), \tag{1.12.6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k}(f(z)e^{i\lambda z})\right), \tag{1.12.7}$$

Теорема 1.12.3. Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая всюду в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, кроме конечного числа особых точек z_k, $k = \overline{1, n}$, лежащих в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = \overline{1, n}$), и кроме полюсов 1-го порядка α_m, $m = \overline{1, l}$, лежащих на действительной оси ($\operatorname{Im} \alpha_m = 0$, $m = \overline{1, l}$). Пусть $f(z)$ удовлетворяют условию (1.12.1). Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) + \pi i \sum_{m=1}^{l} \operatorname{res} f(\alpha_m). \tag{1.12.8}$$

Доказательство. Пусть α — полюс 1-го порядка, лежащий на действительной оси ($\operatorname{Im}\alpha = 0$). Рассмотрим положительно ориентированный кусочно-гладкий контур $\gamma = [-R, \alpha - r] \cup [\alpha + r, R] \cup C_R \cup C_r$, изображенный на рис. 1.12.2.

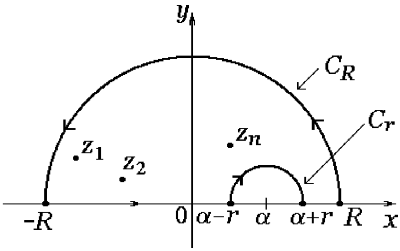


Рис. 1.12.2

Согласно теореме 1.10.1

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{\alpha-r} f(x)dx + \int\limits_{\alpha+r}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{C_r} f(z)dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z). \tag{1.12.9}$$

В кольце $0 < |z-\alpha| \le r$ по теореме 1.7.2 (Лорана) функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \varphi(z),$$

где $c_{-1} = \operatorname*{res}_{\alpha} f(z)$, а функция $\varphi(z)$ аналитична и, следовательно, ограничена $|\varphi(z)| \le M$ при $z \in C_r$. Отсюда получим

$$\int\limits_{C_r} f(z)dz = c_{-1}\int\limits_{C_r} \frac{dz}{z-\alpha} + \int\limits_{C_r} \varphi(z)dz = -i\pi \operatorname*{res}_{\alpha} f(z) + \int\limits_{C_r} \varphi(z)dz,$$

$$\left| \int\limits_{C_r} \varphi(z)dz \right| \le \int\limits_{C_r} |\varphi(z)|\,|dz| \le Mr\pi \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ и $r \to 0$ в формуле (1.12.9), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) + \pi i \operatorname*{res}_{\alpha} f(z).$$

Теорема 1.12.4. Пусть функция $f(z)$ однозначная и аналитическая всюду в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, кроме конечного числа особых точек z_k, $k = \overline{1,n}$, лежащих в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = \overline{1,n}$), и кроме полюсов 1-го порядка α_m, $m = \overline{1,l}$, лежащих на действительной оси ($\operatorname{Im} \alpha_m = 0$, $m = \overline{1,l}$). Пусть $f(z)$ удовлетворяет условию (1.12.3). Тогда $\forall \lambda > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k}(f(z)e^{i\lambda z}) + \pi i \sum_{m=1}^{l} \operatorname*{res}_{\alpha_m}(f(z)e^{i\lambda z}). \qquad (1.12.10)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.12.3 с учетом леммы Жордана.

Пример 1.12.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2+1}{(x^2+10x+29)^2}dx.$

Решение. Введем функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z^2+10z+29)^2} = \frac{z^2+1}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2},$$

где $z_1 = -5+2i$, $z_2 = -5-2i$ — особые точки $f(z)$ — полюса 2-го порядка. В верхней полуплоскости расположена единственная особая точка $z_1 = -5+2i$.

Заметим, что условие (1.12.1) выполнено. По теореме 1.12.1

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1} f(z).$$

Подсчитаем вычет $f(z)$ в точке z_1:

$$\operatorname*{res}_{z_1} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[f(z)(z-z_1)^2\right] = \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+1}{(z-z_2)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{-2(zz_2+1)}{(z-z_2)^3} = -\frac{2(z_1z_2+1)}{(z_1-z_2)^3} = -\frac{2(29+1)}{(4i)^3} = \frac{15}{16i}.$$

По формуле (1.12.2) получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+10x+29)^2}dx = 2\pi i\frac{15}{16i} = \frac{15\pi}{8}.$$

Ответ. $15\pi/8$.

Задача 1.12.1. Вычислить интеграл.

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+12)^2}dx.$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+2}{x^4+10x^2+9}dx.$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx.$

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^4+1)^2}dx.$

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^4}dx.$

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx.$

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx.$

8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+10x^2+9}dx.$

9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^5}dx.$

10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx.$

11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+7x^2+12}dx.$

12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+9)(x+1)^2}dx.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx.$

15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx.$

16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx.$

17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx.$

18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx.$

19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx.$

20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}dx.$

21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2)(x^2+3)^2}dx.$

22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx.$

23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+9)(x^2+4)^2}dx.$

24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}dx.$

25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)^2}dx.$

26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+4)^2}dx.$

27. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+16)}dx.$

28. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}dx.$

29. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+4)^2}dx.$

30. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2-10x+29)^2}dx.$

Пример 1.12.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx.$

Решение. Поскольку подынтегральная функция четная, исходный интеграл равен

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx.$$

Функция $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ удовлетворяет условию (1.12.3) теоремы 1.12.2. Воспользуемся следствием (1.12.6) этой теоремы. Вычислим вычеты функции $f(z)e^{i2z}$ в особых точках $z_1 = i$ и $z_2 = 2i$, лежащих в верхней полуплоскости:

$$\operatorname*{res}_{z_1} f(z)e^{i2z} = \lim_{z\to i} \frac{e^{i2z}(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{e^{-2}}{6i},$$

$$\operatorname*{res}_{z_2} f(z)e^{i2z} = \lim_{z\to 2i} \frac{e^{i2z}(z-2i)}{(z^2+1)(z^2+4)} = -\frac{e^{-4}}{12i}.$$

По формуле (1.12.5)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-2}}{6i} - \frac{e^{-4}}{12i}\right) = \frac{\pi}{6}\ \frac{(2e^2-1)}{e^4}.$$

По формуле (1.12.6) находим искомый интеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\pi(2e^2-1)}{6e^4}\right] =$$

$$= \frac{\pi(2e^2-1)}{12e^4}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi(2e^2-1)}{12e^4}.$

Задача 1.12.2. Вычислить интеграл.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx.$

2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^2}dx.$

3. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+1)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}dx.$

9. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx.$

10. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx.$

11. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx.$

12. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3-2)\cos x}{(x^2+1)^2}dx.$

13. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx.$

14. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx.$

15. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx.$

16. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx.$

17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx.$

18. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx.$

19. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx.$

20. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx.$

21. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}dx.$

22. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx.$

23. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx.$

24. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx.$

25. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx.$

26. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+4}dx.$

27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx.$

28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{x^4+10x^2+9}dx.$

29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx.$

30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx.$

Пример 1.12.3. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x+1)(x^2+9)}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2-4)}dx.$

Решение. 1) Введем функцию $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z^2+9)}$. Она имеет особую точку $z_1 = 3i$ — полюс 1-го порядка, лежащий в верхней полуплоскости, и $\alpha_1 = -1$ — полюс 1-го порядка, лежащий на действительной оси. Функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.12.3, следовательно, по формуле (1.12.8) интеграл равен

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{3i} f(z) + \pi i \operatorname*{res}_{-1} f(z).$$

Вычислим вычеты

$$\operatorname*{res}_{3i} f(z) = \lim_{z\to 3i} \frac{z(z-3i)}{(z+1)(z^2+9)} = \frac{1-3i}{20},$$

$$\operatorname*{res}_{-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{z(z+1)}{(z+1)(z^2+9)} = -\frac{1}{10}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x+1)(x^2+9)}dx = 2\pi i\frac{1-3i}{20} + \pi i\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}.$$

2) Поскольку подынтегральная функция четная, имеем

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2-4)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2-4)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2-4)}dx.$$

Рассмотрим функцию $f(z)e^{iz} = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2-4)}$. Она имеет полюс 1-го порядка $z_1 = i$ в верхней полуплоскости и полюса 1-го порядка

$\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -2$, лежащие на действительной оси. Функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.12.4, следовательно, по формуле (1.12.10)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2-4)}dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1}(f(z)e^{iz}) + \pi i \left[\operatorname*{res}_{\alpha_1}(f(z)e^{iz}) + \operatorname*{res}_{\alpha_2}(f(z)e^{iz})\right].$$

Вычислим вычеты в точках $z_1 = i$, $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -2$:

$$\operatorname*{res}_{i}(f(z)e^{iz}) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}(z-i)}{(z^2+1)(z^2-4)} = -\frac{e^{-1}}{10i},$$

$$\operatorname*{res}_{2}(f(z)e^{iz}) = \lim_{z\to 2}\frac{e^{iz}(z-2)}{(z^2+1)(z^2-4)} = \frac{e^{2i}}{20},$$

$$\operatorname*{res}_{-2}(f(z)e^{iz}) = \lim_{z\to -2}\frac{e^{iz}(z+2)}{(z^2+1)(z^2-4)} = -\frac{e^{-2i}}{20}.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2-4)}dx = 2\pi i\left(-\frac{e^{-1}}{10i}\right) + \pi i\left(\frac{e^{2i}}{20} - \frac{e^{-2i}}{20}\right) = -\frac{\pi}{10}(2e^{-1}+\sin 2).$$

Искомый интеграл равен

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2-4)}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\frac{\pi}{10}(2e^{-1}+\sin 2)\right] = -\frac{\pi}{20}(2e^{-1}+\sin 2).$$

Ответ. 1) $\dfrac{3\pi}{10}$; 2) $-\dfrac{\pi(2e^{-1}+\sin 2)}{20}$.

Задача 1.12.3. Вычислить интеграл.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx.$

2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4-1}dx.$

3. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^3-1}dx.$

4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x+1}dx.$

5. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+3}{x(x^2+1)}dx.$

6. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)(x-1)}dx.$

7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx.$

8. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2+4)(x-1)}dx.$

9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+4)} dx.$

10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-1)(x^2+1)} dx.$

11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2-1)} dx.$

12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3-1} dx.$

13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2-1)(x^2+1)} dx.$

14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x-1} dx.$

15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x-1}{x(x^2+4)} dx.$

16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x-1)x} dx.$

17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^3-8} dx.$

18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx.$

19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^4-16)} dx.$

20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x-1)} dx.$

21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+2}{x(x^2+4)} dx.$

22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^4-1} dx.$

23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3-8} dx.$

24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+2} dx.$

25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+4)} dx.$

26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)(x-2)} dx.$

27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x+1)(x^2+9)} dx.$

28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x+1)(x^2+9)} dx.$

29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x+2)(x^2+4)} dx.$

30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^3-27} dx.$

1.13. Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Задача Дирихле (*первая краевая задача*). Найти функцию $u(x,y) \in \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую в области D уравнению Лапласа

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in D$$

и принимающую на границе ∂D заданные уравнения

$$u\Big|_{\partial D} = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial D.$$

Решение задачи Дирихле в круге $D = (0 \le r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi)$ представляется в виде интеграла Пуассона:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,u(1,\theta)\,d\theta.$$

Если ввести комплексные переменные $z = re^{i\varphi}$, $\varsigma = e^{i\theta}$, эту формулу можно записать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\varsigma|=1} u(\varsigma)\frac{\varsigma+z}{(\varsigma-z)\varsigma}\,d\varsigma, \quad |z|<1, \tag{1.13.1}$$

где окружность $|\varsigma| = 1$ ориентирована против часовой стрелки.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}$ представляется в виде интеграла Пуассона:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\cdot u(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt, \tag{1.13.2}$$

где функция $|u(t,0)| < A < +\infty$ ограничена.

Если ввести комплексные переменные $z = x+iy$, $\varsigma = t+is$, формулу (1.13.2) можно записать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t,0)}{t-z}\,dt.$$

Замечание. Для сходимости этого интеграла достаточно потребовать ограниченность $|t|^\alpha|u(t,0)| < A < \infty$, где $\alpha > 0$.

В том случае, когда граничное условие задается в виде рациональной функции $u\Big|_{y=0} = R(x), \quad |R(x)| < \dfrac{A}{|x|}$ при $x \to \infty$ и не имеющей особых точек на действительной оси, интеграл можно вычислить с помощью вычетов в особых точках ς_k, расположенных в нижней полуплоскости

$$u(z) = -2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{\operatorname{Im}\varsigma_k<0}\left(\frac{R(\varsigma_k)}{\varsigma_k - z}\right). \tag{1.13.3}$$

Пример 1.13.1.* С помощью интеграла Пуассона найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\left.\begin{aligned} &\triangle u = 0, \quad (0 \le r < 1, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi), \qquad (1.13.4)\\ &u\Big|_{r=1} = g(\varphi), \quad (0 \le \varphi \le 2\pi): \qquad (1.13.5)\end{aligned}\right\}$$

1) $g(\varphi) = \cos 4\varphi$;   2) $g(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$.

Решение. 1) В новых переменных граничное условие (1.13.5) примет вид

$$u\Big|_{r=1} = \cos 4\theta = \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2} = u(\varsigma) = \frac{\varsigma^4 + \varsigma^{-4}}{2} = \frac{\varsigma^8 + 1}{2\varsigma^4}.$$

Вычислим интеграл

$$I = \oint\limits_{|\varsigma|=1} \frac{(\varsigma^8 + 1)(\varsigma + z)}{2\varsigma^4(\varsigma - z)\varsigma}\, d\varsigma = \oint\limits_{|\varsigma|=1} f(\varsigma)\, d\varsigma. \tag{1.13.6}$$

Подынтегральная функция $f(\varsigma)$ имеет особые точки $\varsigma = 0$ и $\varsigma = z$, лежащие внутри окружности $|\varsigma| = 1$, и особую точку $\varsigma = \infty$. По теореме Коши о вычетах $I = 2\pi i(\operatorname*{res}_0 f(\varsigma) + \operatorname*{res}_z f(\varsigma))$ или $I = 2\pi i(-\operatorname*{res}_\infty f(\varsigma))$. Найдем вычет функции $f(\varsigma)$ в бесконечно удаленной точке $\varsigma = \infty$.

Разложим функцию $f(\varsigma)$ в окрестности $\varsigma = \infty$:

$$f(\varsigma) = \frac{\varsigma^9(1 + 1/\varsigma^8)(1 + z/\varsigma)}{2\varsigma^6(1 - z/\varsigma)} = \frac{1}{2}\left(\varsigma^3 + \varsigma^2 z + \frac{1}{\varsigma^5} + \frac{z}{\varsigma^6}\right)\frac{1}{1 - z/\varsigma} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varsigma^3 + \varsigma^2 z + \frac{1}{\varsigma^5} + \frac{z}{\varsigma^6}\right)\left(1 + \frac{z}{\varsigma} + \frac{z^2}{\varsigma^2} + \frac{z^3}{\varsigma^3} + \frac{z^4}{\varsigma^4} + \ldots\right) =$$

$$= \ldots + \frac{1}{\varsigma}\left(\frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{2}z^4\right) + \ldots .$$

Отсюда находим $c_{-1} = z^4$ — коэффициент при $1/\varsigma$, следовательно, $\operatorname*{res}_\infty f(\varsigma) = -c_{-1} = -z^4$. Интеграл (1.13.6) равен

$$I = -2\pi i \operatorname*{res}_\infty f(\varsigma) = 2\pi i z^4.$$

Таким образом, искомое решение задачи (1.13.4), (1.13.5) будет

$$u(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}2\pi i z^4\right) = \operatorname{Re}\left(r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)\right) = r^4\cos 4\varphi.$$

2) Граничное условие (1.13.5) примет вид при $\varsigma = e^{i\theta}$

$$u\Big|_{r=1} = \frac{\sin 2\theta}{5 + 3\cos\theta} = u(\varsigma) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{\varsigma^2 - 1/\varsigma^2}{5 + 3\left(\varsigma + 1/\varsigma\right)/2} =$$

$$= \frac{(\varsigma^4 - 1)\varsigma}{i\varsigma^2(3\varsigma^2 + 10\varsigma + 3)} = \frac{\varsigma^4 - 1}{i3(\varsigma + 3)(\varsigma + 1/3)\varsigma}.$$

Вычислим интеграл

$$I = \oint\limits_{|\varsigma|=1} \frac{(\varsigma^4-1)(\varsigma+z)}{3i\varsigma^2(\varsigma+3)(\varsigma+1/3)(\varsigma-z)}\, d\varsigma = \oint\limits_{|\varsigma|=1} f(\varsigma)\, d\varsigma. \qquad (1.13.7)$$

Подынтегральная функция $f(\varsigma)$ имеет особые точки $\varsigma = 0$, $\varsigma = -1/3$, $\varsigma = z$, лежащие внутри окружности $|\varsigma| = 1$, полюс первого порядка $\varsigma = -3$ вне окружности $|\varsigma| = 1$ и устранимую особую точку $\varsigma = \infty$. По теореме Коши о вычетах $I = 2\pi i(\operatorname*{res}\limits_0 f(\varsigma) + \operatorname*{res}\limits_{-1/3} f(\varsigma) + \operatorname*{res}\limits_z f(\varsigma))$ или $I = 2\pi i(-\operatorname*{res}\limits_{-3} f(\varsigma) - \operatorname*{res}\limits_{\infty} f(\varsigma))$.

Найдем вычет функции $f(\varsigma)$ в полюсе первого порядка $\varsigma = -3$:

$$\operatorname*{res}_{-3} f(\varsigma) = \lim_{\varsigma\to -3} \frac{(\varsigma^4-1)(\varsigma+3)(\varsigma+z)}{3i\varsigma^2(\varsigma+3)(\varsigma+1/3)(\varsigma-z)} = \frac{10(z-3)}{9i(z+3)}.$$

Найдем вычет функции $f(\varsigma)$ в устранимой особой точке $\varsigma = \infty$. Разложим функцию $f(\varsigma)$ в окрестности $\varsigma = \infty$:

$$f(\varsigma) = \frac{\varsigma^5\left(1-1/\varsigma^4\right)\left(1+z/\varsigma\right)}{3i\varsigma^5\left(1+3/\varsigma\right)\left(1+1/(3\varsigma)\right)\left(1-z/\varsigma\right)} =$$

$$= \frac{1}{3i}\left(1+\frac{z}{\varsigma}-\frac{1}{\varsigma^4}-\frac{z}{\varsigma^5}\right)\left(1-\frac{3}{\varsigma}+\frac{3^2}{\varsigma^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{3\varsigma}+\frac{1}{3^2\varsigma^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{3}{\varsigma}+\frac{z^2}{\varsigma^2}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3i}\left(\ldots+\frac{1}{\varsigma}\left(z-3-\frac{1}{3}+z\right)+\ldots\right) = \ldots+\frac{1}{\varsigma}\cdot\frac{1}{3i}\left(2z-\frac{10}{3}\right)+\ldots .$$

Отсюда находим $c_{-1} = (6z-10)/(9i)$ — коэффициент при $1/\varsigma$, следовательно, $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(\varsigma) = -c_{-1} = -(6z-10)/(9i)$. Интеграл (1.13.7) равен

$$I = -2\pi i(\operatorname*{res}_{-3} f(\varsigma) + \operatorname*{res}_{\infty} f(\varsigma)) = 2\pi i\left[-\frac{10(z-3)}{9i(z+3)} + \frac{6z-10}{9i}\right] = 2\pi\frac{(6z^2-2z)}{9(z+3)}.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$u(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}2\pi\,\frac{2(3z^2-z)}{9(z+3)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{9i}\cdot\frac{(3z^2-z)(\overline{z}+3)}{|z+3|^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{3z|z|^2-|z|^2+9z^2-3z}{|z+3|^2}\right) = \frac{2}{9}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{3r^3e^{i\varphi}-r^2+9r^2e^{i2\varphi}-3re^{i\varphi}}{r^2+6r\cos\varphi+9}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{3r^3\sin\varphi+9r^2\sin 2\varphi-3r\sin\varphi}{r^2+6r\cos\varphi+9}.$$

Ответ. 1) $u(r,\varphi) = r^4 \cos 4\varphi$;

$$2)\ u(r,\varphi) = \frac{2}{3} \cdot \frac{r^3 \sin \varphi + 3r^2 \sin 2\varphi - r \sin \varphi}{r^2 + 6r \cos \varphi + 9}.$$

Задача 1.13.1.* С помощью интеграла Пуассона найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad (0 \le r < 1, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi), \\ u\Big|_{r=1} = g(\varphi), \quad (0 \le \varphi \le 2\pi). \end{array}\right\}$$

1. $g(\varphi) = 3 + \cos 2\varphi$.
2. $g(\varphi) = 2 + \sin 3\varphi$.
3. $g(\varphi) = \dfrac{1}{3\cos\varphi - 5}$.
4. $g(\varphi) = \dfrac{\cos 2\varphi}{3\cos\varphi - 5}$.
5. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{3\cos\varphi - 5}$.
6. $g(\varphi) = \dfrac{1}{4\sin\varphi + 5}$.
7. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{4\sin\varphi + 5}$.
8. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{4\sin\varphi + 5}$.
9. $g(\varphi) = \cos^2\varphi$.
10. $g(\varphi) = \sin^2\varphi$.
11. $g(\varphi) = \dfrac{1}{5 + 4\cos\varphi}$.
12. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{5 + 4\cos\varphi}$.
13. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{5 + 4\cos\varphi}$.
14. $g(\varphi) = \dfrac{1}{3\sin\varphi + 5}$.
15. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{3\sin\varphi + 5}$.
16. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{3\sin\varphi + 5}$.
17. $g(\varphi) = 1 + \cos 3\varphi$.
18. $g(\varphi) = 1 + \sin 2\varphi$.
19. $g(\varphi) = \dfrac{1}{4\cos\varphi - 5}$.
20. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{4\cos\varphi - 5}$.
21. $g(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{4\cos\varphi - 5}$.
22. $g(\varphi) = \dfrac{1}{3\sin\varphi - 5}$.
23. $g(\varphi) = \dfrac{\cos\varphi}{3\sin\varphi - 5}$.
24. $g(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{3\sin\varphi - 5}$.
25. $g(\varphi) = 2 + \sin 4\varphi$.
26. $g(\varphi) = \dfrac{1}{5 + 3\cos\varphi}$.
27. $g(\varphi) = \dfrac{\cos 2\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$.
28. $g(\varphi) = \dfrac{1}{4\sin\varphi - 5}$.
29. $g(\varphi) = \dfrac{\cos 2\varphi}{4\sin\varphi - 5}$.
30. $g(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{4\sin\varphi - 5}$.

Пример 1.13.2.* С помощью интеграла Пуассона найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D

$$\triangle u = 0, \quad (x,y) \in D:$$

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ -\infty < x < +\infty, \ y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$;

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ x > 0, \ y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x) - \theta(x-1), \ u\Big|_{x=0} = 1$;

3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ -\infty < x < +\infty, \ 0 < y < 1\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x)$,

$u\Big|_{y=1} = \theta(x) - \theta(x-1)$;

4) $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2: \ 0 < r < 1, \ 0 < \varphi < \pi\}, \quad u\Big|_{r=1} = 1$,

$u\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad u\Big|_{\varphi=\pi} = 1$;

5) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ -\infty < x < +\infty, \ y > 0, \ y \notin [0,1]\}$,

$u\Big|_{y=0} = \theta(x+1) - \theta(x), \quad u\Big|_{\substack{x=+0,\\ 0\le y\le 1}} = 1, \quad u\Big|_{\substack{x=-0,\\ 0\le y\le 1}} = 0$;

6) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ y > 0, \ (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \quad u\Big|_{y=0} = 0$,

$u\Big|_{x=\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=-\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 0$;

7) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ (y-1)^2 + x^2 < 1, \ (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\}$,

$u\Big|_{(y-1)^2+x^2=1} = 0, \quad u\Big|_{x=\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 0, \quad u\Big|_{x=-\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 1.$

Решение. 1) Воспользуемся формулой (1.13.3), учитывая, что $(x^2+2x+3) = (x+1+i\sqrt{2})(x+1-i\sqrt{2})$:

$$u(z) = -2\,\mathrm{Re}\ \mathrm{res}\ \frac{1}{(\varsigma+1+i\sqrt{2})(\varsigma+1-i\sqrt{2})(\varsigma-z)}\Bigg|_{\varsigma=-1-i\sqrt{2}} =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{(-i2\sqrt{2})(-1-i\sqrt{2}-z)} = -\,\mathrm{Re}\,\frac{(1+x)-i(\sqrt{2}+y)}{i\sqrt{2}((1+x)^2+(\sqrt{2}+y)^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+y}{(1+x)^2+(\sqrt{2}+y)^2}.$$

2) Введем комплексную переменную $z = x + iy$. Отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Re} z > 0, \;\; \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = z^2$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$ (рис. 1.13.1, *а*).

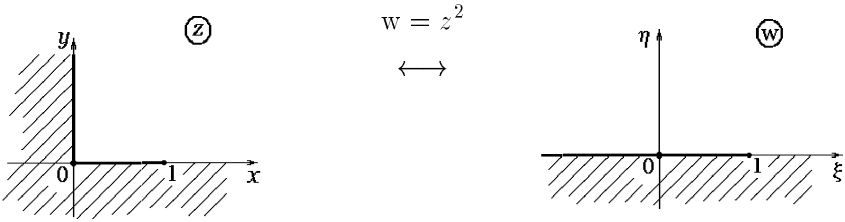


Рис. 1.13.1, *а*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x, y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x, y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(1 - \xi). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (1.13.2)

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot \tilde{u}(t, 0)}{(t - \xi)^2 + \eta^2}\, dt = \frac{\eta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{t - \xi}{\eta}\right)\Big|_{-\infty}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \xi}{\eta}\right) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \xi}{\eta}\right).$$

Так как $\mathrm{w} = z^2 \;\Rightarrow\; \xi + i\eta = x^2 - y^2 + 2iy \;\Rightarrow\; \xi = x^2 - y^2, \;\eta = 2xy$. Возвращаясь к первоначальным переменным (x, y), получим

$$\tilde{u}(x^2 - y^2, 2xy) = u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - x^2 + y^2}{2xy}\right).$$

3) Введем комплексную переменную $z = x + iy$. Отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = \exp(\pi z)$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$ (рис. 1.13.1, *б*).

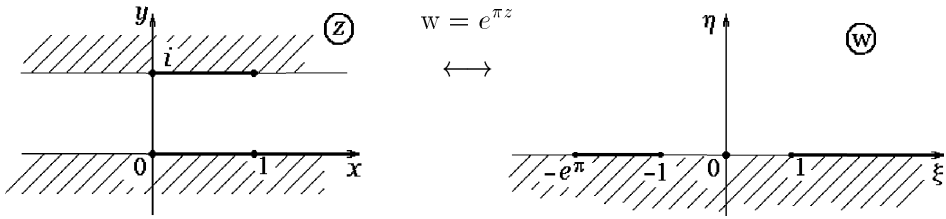


Рис. 1.13.1, *б*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x, y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x, y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi + e^{\pi}) - \theta(\xi + 1) + \theta(\xi - 1). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (1.13.2)

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot \tilde{u}(t, 0)}{(t - \xi)^2 + \eta^2}\, dt = \frac{\eta}{\pi} \left[\int\limits_{-e^{\pi}}^{-1} \frac{dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{t - \xi}{\eta} \right) \Bigg|_{-e^{\pi}}^{-1} + \operatorname{arctg} \left(\frac{t - \xi}{\eta} \right) \Bigg|_{1}^{+\infty} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{e^{\pi} + \xi}{\eta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \xi}{\eta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \xi}{\eta} \right) \right].$$

Так как $\mathrm{w} = \exp(\pi z) \ \Rightarrow\ \xi + i\eta = \exp(\pi x)(\cos(\pi y) + i \sin(\pi y))$, получим выражение новых переменных через старые $\xi = \exp(\pi x) \cos(\pi y)$, $\eta = \exp(\pi x) \sin(\pi y))$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получим

$$u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{\pi} + e^{\pi x} \cos(\pi y)}{e^{\pi x} \sin(\pi y)} \right) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + e^{\pi x} \cos(\pi y)}{e^{\pi x} \sin(\pi y)} \right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - e^{\pi x} \cos(\pi y)}{e^{\pi x} \sin(\pi y)} \right).$$

4) Введем комплексную переменную $z = re^{i\varphi}$. Отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ |z| < 1, \ \ \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \ \ \operatorname{Im} \mathrm{w} > 0\}$ (рис. 1.13.1, *в*).

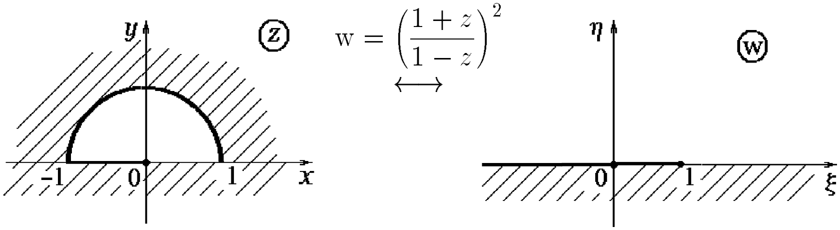


Рис. 1.13.1, *в*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x, y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x, y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(1-\xi). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (1.13.2)

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot \tilde{u}(t, 0)}{(t-\xi)^2 + \eta^2}\, dt = \frac{\eta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dt}{(t-\xi)^2 + \eta^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right).$$

Так как

$$\mathrm{w} = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \left(\frac{1+re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right)^2 = \left(\frac{(1+re^{i\varphi})(1-re^{-i\varphi})}{(1-re^{i\varphi})(1-re^{-i\varphi})}\right)^2 =$$

$$= \frac{(1 - r^2 + 2ir\sin\varphi)^2}{(1 + r^2 - 2r\cos\varphi)^2},$$

получим выражение новых переменных через старые:

$$\xi = \frac{(1-r^2)^2 - 4r^2\sin^2\varphi}{(1+r^2-2r\cos\varphi)^2}, \qquad \eta = \frac{4r(1-r^2)\sin\varphi}{(1+r^2-2r\cos\varphi)^2}. \qquad (1.13.8)$$

Замечание. Можно было рассмотреть конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость с помощью функции Жуковского $\mathrm{w} = -(z + 1/z)/2$. Исходная краевая задача после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi + 1). \end{cases}$$

Решение этой задачи представляется в виде интеграла Пуассона

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot \tilde{u}(t, 0)}{(t - \xi)^2 + \eta^2}\, dt = \frac{\eta}{\pi} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \xi}{\eta}\right),$$

где

$$\mathrm{w} = \xi + i\eta = -\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = -\frac{(1 + r^2)}{2r}\cos\varphi + i\frac{(1 - r^2)}{2r}\sin\varphi.$$

5) Введем комплексную переменную $z = x + iy$. Отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Im}\, z > 0, \ \ z \notin [0, i]\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = \sqrt[2]{z^2 + 1}$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 0\}$, где $\mathrm{w} = \sqrt[2]{\cdot}$ — нулевая ветвь квадратного корня (рис. 1.13.1, *г*).

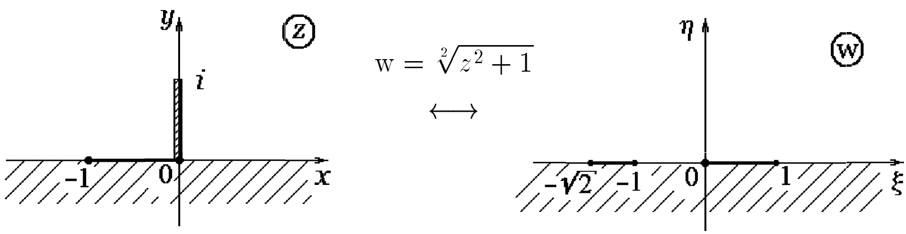


Рис. 1.13.1, *г*

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x, y)$ отличны от нуля.

Исходная краевая задача для функции $u(x, y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi + \sqrt{2}) - \theta(\xi + 1) + \theta(\xi) - \theta(\xi - 1). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (1.13.2)

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\cdot\tilde{u}(t,0)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}\frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t-\xi}{\eta}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{-1}+\operatorname{arctg}\left(\frac{t-\xi}{\eta}\right)\Big|_{0}^{1}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}+\xi}{\eta}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\xi}{\eta}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right].$$

Так как

$$\mathrm{w}=\sqrt[2]{z^2+1}=\sqrt[2]{x^2+1-y^2+2ixy}=\sqrt[4]{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}\,\exp\left(i\frac{\psi}{2}\right),$$

где

$$\psi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2xy}{x^2+1-y^2}\right), & \text{если } x^2+1-y^2>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2xy}{x^2+1-y^2}\right), & \text{если } x^2+1-y^2<0,\ x\geq 0,\\ -\pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2xy}{x^2+1-y^2}\right), & \text{если } x^2+1-y^2<0,\ x<0,\\ \pi/2, & \text{если } x^2+1-y^2=0,\ x>0,\\ -\pi/2, & \text{если } x^2+1-y^2=0,\ x<0,\end{cases}$$

получим выражение новых переменных через старые:

$$\begin{aligned}\xi&=\sqrt[4]{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}\,\cos(\psi/2),\\ \eta&=\sqrt[4]{(x^2+1-y^2)^2+4x^2y^2}\,\sin(\psi/2).\end{aligned}\tag{1.13.9}$$

6) Введем комплексную переменную $z=x+iy$. Отобразим область $D=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Im}\,z>0,\ \ |z-i/2|>1/2\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w}=e^{(1/z+i)\pi}=-e^{\pi/z}$ на верхнюю полуплоскость $G=\{\mathrm{w}:\ \mathrm{w}\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Im}\,\mathrm{w}>0\}$ (рис. 1.13.1, ∂).

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x,y)$ отличны от нуля.

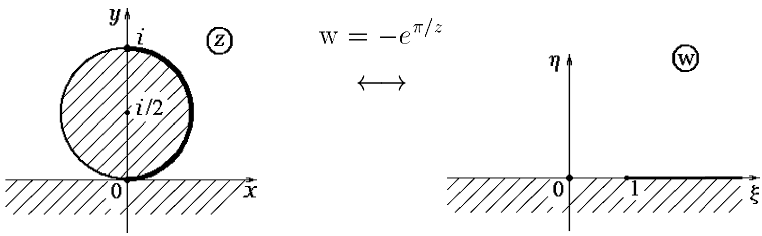


Рис. 1.13.1, *д*

Исходная краевая задача для функции $u(x,y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle\tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi - 1). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (1.13.2)

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\cdot\tilde{u}(t,0)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right)\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right).$$

Так как $\mathrm{w} = -e^{\pi/z} = -e^{\pi(x-iy)/(x^2+y^2)} = -e^{\pi x/(x^2+y^2)}e^{-i\pi y/(x^2+y^2)}$, получим выражение новых переменных через старые:

$$\begin{aligned} \xi &= -e^{\pi x/(x^2+y^2)}\cos(\pi y/(x^2+y^2)), \\ \eta &= e^{\pi x/(x^2+y^2)}\sin(\pi y/(x^2+y^2)). \end{aligned} \tag{1.13.10}$$

7) Введем комплексную переменную $z = x + iy$. Отобразим область $D = \{z : z \in \mathbb{C} \;\; |z - i/2| > 1/2, \;\; |z - i| < 1\}$ комплексной плоскости с помощью конформного преобразования $\mathrm{w} = e^{2\pi/z}$ на верхнюю полуплоскость $G = \{\mathrm{w} : \mathrm{w} \in \mathbb{C} \;\; \operatorname{Im}\mathrm{w} > 0\}$ (рис. 1.13.1, *е*).

На рисунке выделены участки границ областей, на которых граничные значения функции $u(x,y)$ отличны от нуля.

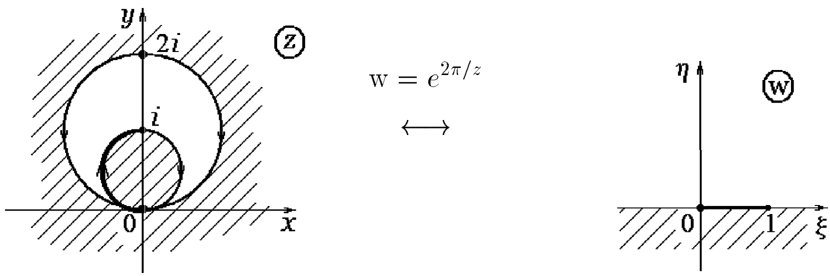


Рис. 1.13.1, *е*

Исходная краевая задача для функции $u(x,y)$ после замены переменных $u(z) = u(z(\mathrm{w})) \equiv \tilde{u}(\mathrm{w})$ примет вид

$$\begin{cases} \triangle \tilde{u} = 0, \quad \mathrm{w} \in G, \\ \tilde{u}\Big|_{\eta=0} = \theta(\xi) - \theta(\xi - 1). \end{cases}$$

Решение этой задачи Дирихле в верхней полуплоскости представляется в виде интеграла Пуассона (1.13.2)

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot \tilde{u}(t,0)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1} \frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-\xi}{\eta}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right).$$

Так как $\mathrm{w} = e^{2\pi/z} = e^{2\pi(x-iy)/(x^2+y^2)} = e^{2\pi x/(x^2+y^2)} \cdot e^{-i2\pi y/(x^2+y^2)}$, получим выражение новых переменных через старые:

$$\xi = e^{2\pi x/(x^2+y^2)}\cos(2\pi y/(x^2+y^2)), \tag{1.13.11}$$

$$\eta = -e^{2\pi x/(x^2+y^2)}\sin(2\pi y/(x^2+y^2)).$$

Ответ. 1) $u(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+y}{(1+x)^2+(\sqrt{2}+y)^2}$;

2) $u(x,y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-x^2+y^2}{2xy}\right)$;

3) $u(x,y) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{e^{\pi} + e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x}\sin(\pi y)}\right) -$

$$-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 + e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x}\sin(\pi y)}\right) - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 - e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x}\sin(\pi y)}\right);$$

4) $u(r,\varphi) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-\xi}{\eta}\right)$, где ξ и η заданы формулами (1.13.8);

5) $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\left[\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{2}+\xi}{\eta}\right) - \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1+\xi}{\eta}\right) + \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-\xi}{\eta}\right) -\right.$

$\left.- \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)\right]$, где ξ и η заданы формулами (1.13.9);

6) $u(x,y) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-\xi}{\eta}\right)$, где ξ и η заданы формулами (1.13.10);

7) $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-\xi}{\eta}\right) + \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)\right)$, где ξ и η заданы формулами (1.13.11).

Задача 1.13.2.* С помощью интеграла Пуассона найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D

$$\triangle u = 0, \quad (x,y) \in D.$$

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\infty < x < +\infty, \ y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{x}{2+x^2}.$
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x-1), \quad u\Big|_{x=0} = 0.$
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\infty < x < +\infty, \ 0 < y < 3\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x),$

   $u\Big|_{y=3} = 0.$
4. $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < r < 1, \ 0 < \varphi < \pi\}, \quad u\Big|_{r=1} = 1,$

   $u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0.$
5. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\infty < x < +\infty, \ y > 0, \ y \notin [0,1]\},$

   $u\Big|_{y=0} = \theta(x) - \theta(x-1), \quad u\Big|_{\substack{x=-0,\\ 0\le y\le 1}} = 0, \quad u\Big|_{\substack{x=+0,\\ 0\le y\le 1}} = 1.$

6. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \qquad u\Big|_{y=0} = 0,$

$u\Big|_{x=-\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 0.$

7. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y-1)^2 + x^2 < 1, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\},$

$u\Big|_{(y-1)^2+x^2=1} = 0, \quad u\Big|_{x=\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=-\sqrt{1/4-(y-1/2)^2}} = 0.$

8. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}, \qquad u\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{x^2+x+1}.$

9. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x > 0, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{x=0} = \theta(y-1).$

10. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 2\}, \quad u\Big|_{y=0} = 0,$

$u\Big|_{y=2} = \theta(x).$

11. $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi\}, \quad u\Big|_{r=1} = 0,$

$u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 1.$

12. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \quad y \notin [0,1]\},$

$u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{\substack{x=\pm 0,\\ 0\le y\le 1}} = 1.$

13. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x),$

$u\Big|_{(y-1/2)^2+x^2=1/4} = 0.$

14. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y-1)^2 + x^2 < 1, \quad (y-1/2)^2 + x^2 > 1/4\},$

$u\Big|_{x=\sqrt{1-(y-1)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=-\sqrt{1-(y-1)^2}} = 0, \quad u\Big|_{(y-1/2)^2+x^2=1/4} = 0.$

15. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{x}{4+x^2}.$

16. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x > 0, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x-1), \quad u\Big|_{x=0} = \theta(y-1).$

17. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 1\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x),$

$u\Big|_{y=1} = \theta(x).$

18. $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi\}, \quad u\Big|_{r=1} = 0,$

$u\Big|_{\varphi=0} = 1, \quad u\Big|_{\varphi=\pi} = 0.$

19. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \quad y \notin [0, 1]\},$

$u\Big|_{y=0} = \theta(x) - \theta(x-1), \quad u\Big|_{\substack{x=+0,\\ 0\le y\le 1}} = 1, \quad u\Big|_{\substack{x=-0,\\ 0\le y\le 1}} = 0.$

20. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad (y - 1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(-x),$

$u\Big|_{(y-1/2)^2+x^2=1/4} = 0.$

21. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y-1)^2 + x^2 < 1, \quad (y - 1/2)^2 + x^2 > 1/4\},$

$u\Big|_{x=-\sqrt{1-(y-1)^2}} = 1, \quad u\Big|_{x=\sqrt{1-(y-1)^2}} = u\Big|_{x^2+(y-1/2)^2=1/4} = 0.$

22. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}.$

23. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x > 0, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(x) - \theta(x-1), \quad u\Big|_{x=0} = 0.$

24. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 2\}, \quad u\Big|_{y=0} = \theta(-x),$

$u\Big|_{y=2} = 0.$

25. $D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi\},$

$u\Big|_{r=1} = \theta(\varphi - \pi/2), \quad u\Big|_{\varphi=0} = u\Big|_{\varphi=\pi} = 0.$

26. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \quad y \notin [0, 1]\},$

$u\Big|_{y=0} = 1, \quad u\Big|_{\substack{x=\pm 0,\\ 0\le y\le 1}} = 0.$

27. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad (y - 1/2)^2 + x^2 > 1/4\}, \quad u\Big|_{y=0} = 1,$

$u\Big|_{(y-1/2)^2+x^2=1/4} = 0.$

28. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y-1)^2 + x^2 < 1, \quad (y - 1/2)^2 + x^2 > 1/4\},$

$u\Big|_{(y-1)^2+x^2=1/4} = 1, \quad u\Big|_{(y-1)^2+x^2=1} = 0.$

29. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = \dfrac{x}{1 + 4x^2}.$

30. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad x > 0, \quad y > 0\}, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{x=0} = \theta(y) - \theta(y - 1).$

1.14. Принцип аргумента. Теорема Руше. Критерий Михайлова устойчивости решений дифференциальных уравнений

Теорема 1.14.1 (*принцип аргумента*). Пусть ограниченная область D имеет кусочно-гладкую жорданову границу ∂D. Пусть функция $f(z)$ однозначна, аналитична всюду в D, кроме конечного числа полюсов, и не имеет нулей и полюсов на ∂D. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P = \frac{1}{2\pi} \underset{\partial D}{\triangle} \arg f(z), \tag{1.14.1}$$

где N и P — полное число нулей и полюсов (т.е. каждый ноль и полюс считаются столько раз, каков их порядок); $\underset{\partial D}{\triangle} \arg f(z)$ — полное приращение $\arg f(z)$ при обходе границы ∂D один раз.

Замечание. Правая часть формулы (1.14.1) равна числу оборотов радиус-вектора $\mathrm{w} = f(z)$ вокруг начала координат $\mathrm{w} = 0$, когда переменная z пробегает один раз границу ∂D против часовой стрелки.

Следствием принципа аргумента является следующая теорема.

Теорема 1.14.2. Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична всюду в области D и не имеет нулей и полюсов на границе ∂D. Тогда полное число нулей функции $f(z)$ в области D равно

$$N = \frac{1}{2\pi} \underset{\partial D}{\triangle} \arg f(z). \tag{1.14.2}$$

Другим следствием принципа аргумента является следующая теорема.

Теорема 1.14.3 (*Руше*). Пусть область D ограничена кусочно-гладкой жордановой кривой ∂D. Предположим, что $f(z)$ и $g(z)$ однозначны и аналитичны в $\overline{D}$, причем на границе

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \partial D. \tag{1.14.3}$$

Тогда функции $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей.

Теорема 1.14.2 дает возможность найти условия, при которых все нули многочлена лежат в левой полуплоскости. Эта проблема связана с вопросом устойчивости колебаний.

А.М. Ляпуновым установлен критерий устойчивости и неустойчивости по первому линейному приближению для нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}x_j + (...), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.14.4}$$

где в правой части сходящиеся степенные ряды по $x_1, ..., x_n$, a_{ij} — постоянны, а $(...)$ обозначены члены 2-го порядка и выше относительно $x_1, ..., x_n$.

Теорема 1.14.4 (*Ляпунова*). Нулевое решение системы (1.14.4) будет устойчиво (и притом асимптотически), если матрица $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ имеет все характеристические числа с отрицательными вещественными частями, и неустойчивым, если хотя бы одно из этих характеристических чисел имеет положительную вещественную часть.

Замечание. Дисперсионное уравнение для нахождения характеристических чисел представляет собой многочлен степени n относительно λ

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0.$$

Рассмотрим приведенный многочлен с действительными коэффициентами $a_i \in \mathbb{R}$:

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0.$$

Пусть $P_n(z)$ не имеет нулей на мнимой оси.

Замечание. Имеет место *необходимое условие Стодолы.* Если все нули многочлена лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то все коэффициенты многочлена положительны.

Определение. Образ мнимой оси $z = iy$ $(-\infty < y < \infty)$ на комплексной плоскости $\mathrm{w} = P_n(iy) = u(y) + iv(y)$ называется *кривой (годографом) Михайлова.*

Свойства кривой Михайлова:

а) кривая Михайлова симметрична относительно действительной оси $v = 0$;

б) кривая Михайлова не проходит через начало координат $\mathrm{w} = 0$, если $P_n(z)$ не имеет нулей на мнимой оси;

в) значения y, при которых кривая Михайлова $\mathrm{w} = P_n(iy)$ пересекает оси координат, являются действительными корнями уравнений $u(y) = 0$ и $v(y) = 0$;

г) если многочлен $P_n(z)$ не имеет корней на мнимой оси, то число оборотов вектора $\mathrm{w} = P_n(iy)$ вокруг точки $\mathrm{w} = 0$ против часовой стрелки при возрастании y от $-\infty$ до $+\infty$ равно

$$\frac{1}{2\pi} \underset{-\infty<y<+\infty}{\triangle} \arg P_n(iy) = \frac{1}{2}(n_{\text{л}} - n_{\text{п}}), \tag{1.14.5}$$

где $n_{\text{л}}$ и $n_{\text{п}}$ — число нулей многочлена $P_n(z)$ соответственно в левой ($\operatorname{Re} z < 0$) и правой ($\operatorname{Re} z > 0$) полуплоскостях.

Доказательство. Рассмотрим кусочно-гладкий контур $\partial D = C_R \cup [-iR, iR]$, где $C_R = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| = R,\ \operatorname{Re} z \leq 0\}$ и R достаточно большое. По теореме 1.14.2 при $f(z) = P_n(z)$ получим

$$n_{\text{л}} = \frac{1}{2\pi}\Big[\underset{-R<y<R}{\triangle} \arg P_n(iy) + \underset{C_R}{\triangle} \arg P_n(z)\Big]. \tag{1.14.6}$$

Преобразуем

$$\arg P_n(z) = \arg\left[z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right)\right] = n\arg z + \arg(1 + \ldots).$$

Отсюда получаем приращение $\arg P_n(z)$ при движении по C_R при $R \to \infty$

$$\underset{C_R}{\triangle} \arg P_n(z) = n\pi + 0. \tag{1.14.7}$$

Подставим выражение (1.14.7) в (1.14.6) при $R \to \infty$, получим

$$\frac{1}{2\pi} \underset{-\infty<y<+\infty}{\triangle} \arg P_n(iy) = n_{\text{л}} - \frac{n\pi}{2\pi} = n_{\text{л}} - \frac{n_{\text{л}} + n_{\text{п}}}{2} = \frac{1}{2}(n_{\text{л}} - n_{\text{п}}). \quad \square$$

Из формулы (1.14.5) следует следующая теорема.

Теорема 1.14.5 (*Михайлова*). Многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами и не имеющий нулей на мнимой оси имеет все нули в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда радиус-вектор кривой Михайлова $\mathrm{w} = P_n(iy)$ при возрастании параметра y ($-\infty < y < +\infty$) совершит ровно $n/2$ оборотов против часовой стрелки вокруг точки $\mathrm{w} = 0$.

Пример 1.14.1. С помощью теоремы 1.14.3 (Руше) найти число корней уравнения в указанной области:

1) $z^3 + \operatorname{ch} z + 4 = 0$ в $1 < |z| < 2$;

2) $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ в $1 < |z| < 2$.

Решение. 1) Найдем сначала число корней внутри окружности C_1 : $|z| = 2$. Положим $f_1(z) = z^3$ и $g_1(z) = \operatorname{ch} z + 4$. На окружности C_1 имеем

$$|f_1(z)| = |z|^3 = 8,$$

$$|g_1(z)| = |\operatorname{ch} z + 4| \le |\operatorname{ch} z| + 4 = \left|\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right| + 4 \le \frac{|e^{x+iy}| + |e^{-x-iy}|}{2} + 4 =$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 4 \le \frac{e^2 + e^{-2}}{2} + 4 \approx 7,72.$$

Итак, $|f_1(z)| > |g_1(z)|$ на окружности C_1. Уравнение $f_1(z) = z^3 = 0$ имеет внутри C_1 три корня. По теореме Руше уравнение $f_1(z)+g_1(z) = z^3 + \operatorname{ch} z + 4 = 0$ внутри C_1 имеет тоже три корня.

Найдем число корней внутри окружности C_2 : $|z| = 1$. Положим $f_2(z) = z^3 + 4$ и $g_2(z) = \operatorname{ch} z$. На окружности C_2

$$|f_2(z)| = |z^3 + 4| \ge \left||z|^3 - 4\right| = |1 - 4| = 3,$$

$$|g_2(z)| = |\operatorname{ch} z| \le \frac{e^x + e^{-x}}{2} \le \frac{e + e^{-1}}{2} \le 1,54.$$

Итак, $|f_2(z)| > |g_2(z)|$ на окружности C_2. Уравнение $f_2(z) = z^3 + 4 = 0$ не имеет корней внутри окружности C_2, так как все корни $|z| > 1$. По теореме Руше уравнение $f_2(z) + g_2(z) = z^3 + 4 + \operatorname{ch} z = 0$ тоже не имеет корней внутри окружности C_2.

Следовательно, внутри кольца $1 < |z| < 2$ исходное уравнение имеет три корня.

2) Рассмотрим окружность C_1 : $|z| = 1$. Пусть $f_1(z) = 12$, $g_1(z) = z^7 - 5z^3$. На C_1 имеем

$$|f_1(z)| = 12,$$

$$|g_1(z)| = |z^7 - 5z^3| \le |z^7| + |5z^3| \le 6.$$

Итак, $|f_1(z)| > |g_1(z)|$ на окружности C_1. По теореме Руше уравнение $f_1(z) + g_1(z) = z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ имеет одно и то же число корней внутри C_1, что и уравнение $f_1(z) = 12 = 0$, т.е. внутри C_1 нет корней.

Рассмотрим окружность $C_2 : |z| = 2$. Пусть $f_2(z) = z^7$, $g_2(z) = 12 - 5z^3$. На C_2 имеем

$$|f_2(z)| = |z^7| = 2^7 = 128,$$

$$|g_2(z)| = |12 - 5z^3| \le |12| + |5z^3| \le 12 + 5 \cdot 2^3 = 52.$$

Итак, $|f_2(z)| > |g_2(z)|$ на C_2. По теореме Руше уравнение $f_2(z) + g_2(z) = z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ имеет столько же корней внутри C_2, что и уравнение $f_2(z) = z^7 = 0$, т.е. семь корней. Следовательно, внутри кольца $1 < |z| < 2$ лежат все семь корней.

Ответ. 1) 3 корня; 2) 7 корней.

Задача 1.14.1. С помощью теоремы 1.14.3 (Руше) найти число корней в указанной области.

1. $z^4 - 3z^2 - 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
2. $z^8 - 7z^5 - 3z^3 + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
3. $e^{z-1} - 3z - 1 = 0, \quad 1 < |z| < 3.$
4. $z^4 - 3z^2 - 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
5. $z^4 - 3z + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
6. $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0, \quad 2 < |z| < 3.$
7. $z^5 + 3z^2 + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
8. $2z^4 - 5z + 2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
9. $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
10. $z^3 - 12z + 2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
11. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
12. $z^8 + 6z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
13. $z^4 - 9z + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
14. $z^6 - 6z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
15. $z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 3.$
16. $z^6 - 8z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 3.$
17. $27z^{11} - 16z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
18. $e^{z-2} - z = 0, \quad 1 < |z| < 2.$
19. $2z^2 - \cos z = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

20. $z^4 - 5z + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

21. $e^{z-3} - z = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

22. $z^8 - 6z^6 - z^3 + 2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

23. $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

24. $\operatorname{ch} z - z^2 - 4z = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

25. $z^3 - \sin z = 0, \quad 2 < |z| < 3.$

26. $e^z - 3z^2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

27. $z^7 - 8z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 3.$

28. $e^{z-5} - z = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

29. $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

30. $e^z - 4z^4 + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$

Пример 1.14.2. Исследовать на устойчивость с помощью критерия Михайлова тривиальное решение дифференциального уравнения

$$y^{IV} + y''' + 4y'' + 2y' + 3y = 0.$$

Решение. Характеристический многочлен имеет вид

$$P_4(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3.$$

Построим образ мнимой оси при отображении $\mathrm{w} = P_4(z)$. Так как

$$P_4(iy) = y^4 - iy^3 - 4y^2 + 2iy + 3 = y^4 - 4y^2 + 3 + i(2y - y^3),$$

то

$$\begin{cases} u(y) = y^4 - 4y^2 + 3, \\ v(y) = 2y - y^3. \end{cases}$$

Последнюю запись можно рассматривать как параметрические уравнения кривой Михайлова, если изменять y от $-\infty$ до $+\infty$. Определим значения y, при которых кривая пересекает действительную и мнимую оси:

$$y^4 - 4y^2 + 3 = 0 \ \Rightarrow \ y = \pm\sqrt{3}, \quad y = \pm 1$$

— это значения параметра, при которых кривая пересекает мнимую ось;

$$2y - y^3 = 0 \ \Rightarrow \ y = 0, \quad y = \pm\sqrt{2}$$

— это значения параметра, при которых кривая пересекает действительную ось.

Кривая Михайлова изображена на рис. 1.14.1.

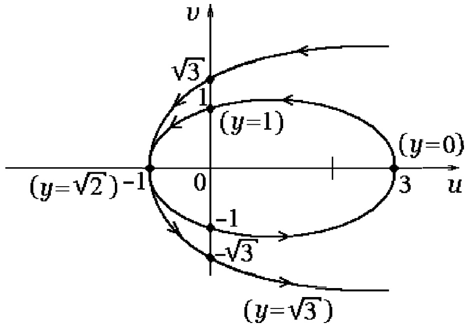


Рис. 1.14.1

При обходе кривой радиус-вектор точки $\mathrm{w} = P_4(iy) = u(y) + iv(y)$ делает два оборота против часовой стрелки вокруг начала координат.

По теореме 1.14.5 (Михайлова) при $n = 4$ получаем, что все нули характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости и, следовательно, тривиальное решение дифференциального уравнения асимптотически устойчиво.

Тот же результат можно было получить из формулы (1.14.5):

$$\frac{n_\text{л} - n_\text{п}}{2} = 2 \ \Rightarrow \ \begin{cases} n_\text{л} - n_\text{п} = 4, \\ n_\text{л} + n_\text{п} = 4 \end{cases} \ \Rightarrow \ \begin{cases} n_\text{л} = 4, \\ n_\text{п} = 0. \end{cases}$$

Все нули характеристического многочлена лежат в левой полуплоскости, следовательно, решения уравнения асимптотически устойчивы.

Ответ. Решения уравнения асимптотически устойчивы.

Задача 1.14.2. Исследовать на устойчивость с помощью критерия Михайлова тривиальное решение дифференциального уравнения.

1. 1) $y''' + 2y'' + y' + 6y = 0$;

   2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + y' + 2y = 0$.

2. 1) $y''' + 2y'' + 2y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + 2y = 0.$

3. 1) $y''' + 2y'' + 3y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0.$

4. 1) $y''' + 2y'' + 4y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0.$

5. 1) $y''' + 2y'' + 5y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 5y' + 2y = 0.$

6. 1) $y''' + 2y'' + 6y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 6y' + 2y = 0.$

7. 1) $y''' + 2y'' + 7y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$

8. 1) $y''' + 2y'' + 8y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 8y' + 2y = 0.$

9. 1) $y''' + 2y'' + 9y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 9y' + 2y = 0.$

10. 1) $y''' + 5y'' + y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 5y''' + 3y'' + y' + 2y = 0.$

11. 1) $y''' + 3y'' + y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' + 2y = 0.$

12. 1) $y''' + 3y'' + 2y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 2y' + 2y = 0.$

13. 1) $y''' + 3y'' + 3y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0.$

14. 1) $y''' + 3y'' + 4y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0.$

15. 1) $y''' + 3y'' + 5y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 5y' + 2y = 0.$

16. 1) $y''' + 3y'' + 6y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 6y' + 2y = 0.$

17. 1) $y''' + 3y'' + 7y' + 6y = 0;$
2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$

18. 1) $y''' + 3y'' + 8y' + 6y = 0$;
   2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 8y' + 2y = 0$.

19. 1) $y''' + 3y'' + 9y' + 6y = 0$;
   2) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 9y' + 2y = 0$.

20. 1) $y''' + 6y'' + y' + 6y = 0$;
   2) $y^{IV} + 6y''' + 3y'' + y' + 2y = 0$.

21. 1) $y''' + 4y'' + y' + 6y = 0$;
   2) $y^{IV} + 4y''' + 3y'' + y' + 2y = 0$.

22. 1) $y''' + 4y'' + 2y' + 6y = 0$;
   2) $y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 2y' + 2y = 0$.

23. 1) $y''' + 4y'' + 3y' + 6y = 0$;
   2) $y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0$.

24. 1) $y''' + 4y'' + 4y' + 6y = 0$;
   2) $y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 4y' + 7y = 0$.

25. 1) $y''' + 4y'' + 5y' + 6y = 0$;
   2) $y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 5y' + 2y = 0$.

26. 1) $y''' + y'' + 4y' + y = 0$;
   2) $y^{V} + y^{IV} + 20y''' + 10y'' + 64y' + 9y = 0$.

27. 1) $y''' + y'' + 5y' + 4y = 0$;
   2) $y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 6y'' + 12y' + 5y = 0$.

28. 1) $y''' + y'' + 2y' + y = 0$;
   2) $y^{V} + y^{IV} + 6y''' + 10y'' + 8y' + 9y = 0$.

29. 1) $y''' + y'' + 9y' + y = 0$;
   2) $y^{V} + y^{IV} + 6y''' + 4y'' + 8y' + 3y = 0$.

30. 1) $y''' + y'' + 2y' + 4y = 0$;
   2) $y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 5y'' + 10y' + 4y = 0$.

Пример 1.14.3. С помощью кривой Михайлова найти число нулей в правой $\operatorname{Re} z > 0$ и левой $\operatorname{Re} z < 0$ полуплоскостях для многочлена:

1) $P_4(z) = z^4 + 2z^2 + 2z + 1$;

2) $P_5(z) = z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 8$.

Решение. 1) Построим образ мнимой оси при отображении $\mathrm{w} = P_4(z)$. На мнимой оси $z = iy$, поэтому

$$P_4(iy) = y^4 - 2y^2 + 2iy + 1 = u(y) + iv(y),$$

а многочлены $u(y) = y^4 - 2y^2 + 1$ и $v(y) = 2y$ имеют нули соответственно $y = \pm 1$ и $y = 0$.

Кривая Михайлова изображена на рис. 1.14.2.

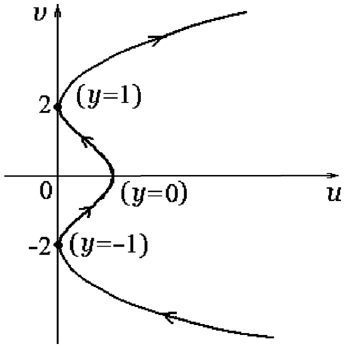


Рис. 1.14.2

Радиус-вектор точки кривой $\mathrm{w} = P_4(iy) = u(y) + iv(y)$ не совершает ни одного оборота вокруг начала координат, поэтому

$$\frac{n_{\text{л}} - n_{\text{п}}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} n_{\text{л}} - n_{\text{п}} = 0, \\ n_{\text{л}} + n_{\text{п}} = 4 \end{cases} \;\Rightarrow\; n_{\text{л}} = n_{\text{п}} = 2.$$

2) Выясним, имеет ли многочлен нули на мнимой оси $z = iy$, $(-\infty < y < +\infty)$:

$$P_5(iy) = iy^5 + 2y^4 - 4iy^3 - 10y^2 + 8 = \tilde{u}(y) + i\tilde{v}(y).$$

Многочлены
$$\begin{cases} \tilde{u}(y) = 2y^4 - 10y^2 + 8, \\ \tilde{v}(y) = y^5 - 4y^3 \end{cases}$$
обращаются в ноль одновременно при $y = \pm 2$, следовательно, точки $z_{1,2} = \pm i2$ являются нулями $P_5(z)$. Разложим $P_5(z)$ на множители

$$P_5(z) = (z^2 + 4)(z^3 + 2z^2 + 2)$$

и исследуем расположение нулей многочлена $P_3(z) = z^3 + 2z^2 + 2$.

На мнимой оси $z = iy$, поэтому

$$P_3(iy) = -iy^3 - 2y^2 + 2 = u(y) + iv(y),$$

а многочлены $u(y) = -2y^2+2$ и $v(y) = -y^3$ имеют нули соответственно $y = \pm 1$ и $y = 0$. Кривая Михайлова изображена на рис. 1.14.3.

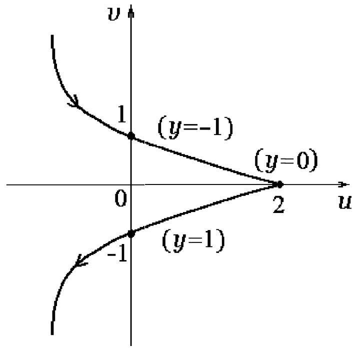


Рис. 1.14.3

Радиус-вектор кривой w $= P_3(iy) = u(y) + iv(y)$ совершает полоборота по часовой стрелке вокруг начала координат, поэтому

$$\frac{n_{\text{л}} - n_{\text{п}}}{2} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} n_{\text{л}} - n_{\text{п}} = 1, \\ n_{\text{л}} + n_{\text{п}} = 3 \end{cases} \;\Rightarrow\; n_{\text{л}} = 1, \quad n_{\text{п}} = 2.$$

Ответ. 1) $n_{\text{л}} = n_{\text{п}} = 2$; 2) $n_{\text{л}} = 1$, $n_{\text{п}} = 2$, два нуля на мнимой оси.

Задача 1.14.3. С помощью кривой Михайлова найти число нулей в правой $\operatorname{Re} z > 0$ и левой $\operatorname{Re} z < 0$ полуплоскостях для многочлена.

1. $z^6 + 3z^4 + 8z^3 + 7z^2 + 8z + 5.$
2. $z^4 + z^3 + 2z^2 + 9z - 3.$
3. $z^4 + 2z^2 + z + 1.$
4. $z^8 - z^7 + 7.$
5. $z^4 + z^3 + z + 1.$
6. $z^4 + 2z^2 + 6z + 3.$
7. $z^6 + z^5 + 3z^4 + 5z^3 - z^2 + 4z - 3.$
8. $z^4 + 4z^2 + 2z + 4.$
9. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2.$

10. $z^5 + 2z^4 + z^3 - 2.$

11. $z^4 + 2z^2 + 10z + 7.$

12. $z^4 + z^3 + 2z^2 + 16z - 3.$

13. $.z^6 + 10z^4 + z^3 + 33z^2 + 4z + 36$

14. $z^4 + 6z^3 + 15z^2 + 18z + 10.$

15. $z^5 + 3z^4 + 2z^3 - 3.$

16. $z^6 + 5z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 4z + 9.$

17. $z^4 + z^3 + z^2 + 9z - 2.$

18. $z^4 + 8z^2 + 3z + 16.$

19. $z^{10} - z^9 + 2.$

20. $z^5 + 4z^4 + 3z^3 - 4.$

21. $z^4 + 2z^2 + 3z + 5.$

22. $z^6 + z^5 + 5z^4 + 8z^3 + 2z^2 + 16z - 8.$

23. $z^4 + 10z^2 + 3z + 25.$

24. $2z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 3z + 1.$

25. $z^5 + 5z^4 + 2z^3 - 5.$

26. $z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1.$

27. $z^7 - 2z - 5.$

28. $z^{12} - z + 1.$

29. $z^6 + 3z^5 + 8z^4 + 15z^3 + 17z^2 + 12z + 4.$

30. $z^6 + 7z^5 + 13z^4 + 30z^3 + 22z^2 + 23z + 10.$

1.15. Комплексный потенциал. Задача обтекания кругового цилиндра и течения в криволинейной полуплоскости

Пусть дано стационарное, плоское векторное поле $\mathbf{A}(x, y) = (A_1(x, y), A_2(x, y))$, $(x, y) \in D$. Будем предполагать, что $\mathbf{A}(x, y)$ непрерывно дифференцируемо, за исключением изолированных точек. Зададим векторное поле с помощью комплекснозначной функции $\mathbf{A}(x, y) = A_1(x, y) + iA_2(x, y)$.

Определение. *Силовыми линиями* векторного поля $\mathbf{A}(x, y)$ называются фазовые траектории системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{A}(x, y) \ \Leftrightarrow \ \frac{dx}{dt} = A_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = A_2(x, y).$$

Точка (x_0, y_0), в которой $|\mathbf{A}(x_0, y_0)|^2 = A_1^2(x_0, y_0) + A_2^2(x_0, y_0) = 0$, называется *точкой покоя* системы (*критической точкой*).

Определение. *Потоком* векторного поля $\mathbf{A}$ через кривую γ называется

$$N = \oint_\gamma (\mathbf{A}, \mathbf{n}) ds.$$

Циркуляцией векторного поля $\mathbf{A}$ вдоль кривой γ называется

$$\mathit{\Gamma} = \oint_\gamma (\mathbf{A}, \mathbf{s}) ds,$$

где $\mathbf{n}, \mathbf{s}$ — единичные векторы соответственно внешней нормали и касательной.

Заметим, что

$$\oint_\gamma \overline{\mathbf{A}}\, dz = \oint_\gamma (A_1 dx + A_2 dy) + i \oint_\gamma (-A_2 dx + A_1 dy) = \mathit{\Gamma} + iN.$$

Определение. Векторное поле $\mathbf{A}$ называется *соленоидальным* (*без источников и стоков*), если

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad \text{в} \ \ D,$$

и *потенциальным* (*безвихревым*), если

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 \quad \text{в} \ \ D.$$

Если γ совпадает с границей ∂D области D, то по формуле Грина

$$\mathit{\Gamma} = \oint_{\partial D} (A_1 dx + A_2 dy) = \iint_D \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{A}\, dx dy,$$

$$N = \oint_{\partial D} (-A_2 dx + A_1 dy) = \iint_D \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{A}\, dx dy.$$

Отсюда следует, что соленоидальность означает равенство нулю потока через границу, а потенциальность означает равенство нулю циркуляции вдоль границы любой ограниченной области, в замыкании которой поле определено.

Если поле $\mathbf{A}$ потенциально, то $A_1dx+A_2dy = du(x,y)$ — полный дифференциал функции $u(x,y)$, которая называется *потенциалом.* Если поле $\mathbf{A}$ соленоидально, то $-A_2dx + A_1dy = dv(x,y)$ — полный дифференциал функции $v(x,y)$, которая называется *функцией тока.*

Определение. Векторное поле $\mathbf{A}$ называется *гармоническим*, если оно потенциально и соленоидально, а функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ называется *комплексным потенциалом* векторного поля $\mathbf{A}$.

Теорема. Пусть векторное поле $\mathbf{A}$ гармоническое в области D, тогда:

а) потенциал и функция тока связаны условиями Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

б) потенциал $u(x,y)$ и функция тока $v(x,y)$ являются сопряженными гармоническими функциями;

в) все характеристики поля $\mathbf{A}$ выражаются с помощью комплексного потенциала

$$\mathbf{A}(x,y) = A_1(x,y) + iA_2(x,y) = \overline{f'(x)}, \tag{1.15.1}$$

$$\mathit{\Gamma} + iN = \oint_{\gamma} f'(z)\,dz. \tag{1.15.2}$$

Замечание. (*Гидродинамическая интерпретация.*) Векторное поле $\mathbf{A}(x,y)$ можно рассматривать как поле скоростей установившегося безвихревого течения идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости в области D с идеальной границей ∂D, которая считается линией тока $v = \mathrm{const}$. Условие соленоидальности означает отсутствие источников и стоков.

(*Электростатическая интерпретация.*) Векторное поле $\mathbf{A}(x,y)$ можно рассматривать как напряженность электрического поля (т.е. силу, с которой поле действует на единичный пробный заряд). По теореме Гаусса полный электрический заряд внутри области D равен $N/(4\pi)$, следовательно, условие соленоидальности означает отсутствие зарядов в D. Условие потенциальности (отсутствие вихрей) означает равенство нулю циркуляции $\mathit{\Gamma}$ вдоль ∂D, т.е. равенство нулю работы поля по перемещению пробного заряда вдоль ∂D. Функция $u = \mathrm{Re}\, f(z)$ называется потенциалом электрического поля $\mathbf{A}$. На границе идеального проводника ∂D нужно считать $u = \mathrm{const}$.

(*Стационарная теплопроводность.*) Пусть $u(x,y)$ — установившаяся температура в области D. Тогда функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle u = 0$, а векторное поле $\mathbf{A} = \operatorname{grad} u(x,y)$. На границе ∂D задают либо температуру $u(x,y)$ (задача Дирихле), либо поток тепла $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ (задача Неймана).

Пример 1.15.1.* Движение несжимаемой невязкой жидкости задается комплексным потенциалом:

1) $f(z) = az, \quad a \in \mathbb{C}$;
2) $f(z) = b\ln z, \quad b \in \mathbb{R}$;
3) $f(z) = ci\ln z, \quad c \in \mathbb{R}$;
4) $f(z) = \dfrac{m}{z}, \quad m \in \mathbb{R}$;
5) $f(z) = \ln(z^2-1)$;
6) $f(z) = i\ln(z^2-1)$;
7) $f(z) = \ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$;
8) $f(z) = i\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$;
9) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$;
10) $f(z) = z + i\ln z$;
11) $f(z) = z - \ln z$;
12) $f(z) = z + \ln z$;
13) $f(z) = z - \dfrac{1}{z}$;
14) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

Найти потенциал скоростей $u(z)$, функцию тока $v(z)$, линии тока и равного потенциала, скорость жидкости $\mathbf{V}(z)$ и критические точки течения, в которых $\mathbf{V}(z) = 0$. Начертить качественно линии тока.

Решение. 1) Плоскопараллельное течение. $f(z) = az$, где $a = a_1 + ia_2$. Потенциал скоростей $u(z) = \operatorname{Re} f(z) = a_1x - a_2y$, функция тока $v(z) = \operatorname{Im} f(z) = a_1y + a_2x$. Линии тока определяются уравнениями $v(z) = \mathrm{const}$, т.е. прямыми линиями $a_1y + a_2x = C$. Линии равного потенциала определяются уравнением $u(z) = \mathrm{const}$, т.е. семейством прямых $a_1x - a_2y = C$, ортогональных линиям тока.

Скорости жидкости по формуле (1.15.1) $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \overline{a} = a_1 - ia_2$. Качественно картина линий тока изображена на рис. 1.15.1, *а* при $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

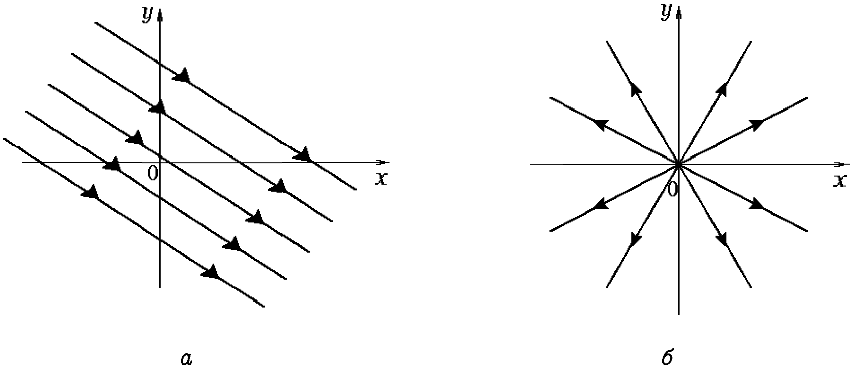


Рис. 1.15.1

2) Источник (сток). $f(z) = b \ln z$, $b \in \mathbb{R}$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, тогда потенциал скоростей $u(z) = \operatorname{Re} f(z) = b \ln r$, функция тока $v(z) = \operatorname{Im} f(z) = b\varphi$. Линии тока определяются уравнениями $v(z) = \text{const}$, $\varphi = C$ — лучи, выходящие из начала координат. Линии равного потенциала определяются уравнением $u(z) = \text{const}$, т.е. семейством окружностей $r = C$, ортогональных линиям тока. Скорость жидкости по формуле (1.15.1) $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \dfrac{b}{\overline{z}} = \dfrac{b}{r}e^{i\varphi}$, например, $\mathbf{V}(1) = b$, $\mathbf{V}(i) = ib$. Вычислим интеграл (1.15.2):

$$\oint_\gamma f'(z)dz = \varGamma + iN = b\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ если начало координат вне } \gamma; \\ 2\pi i b, \text{ если начало координат внутри } \gamma. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем $\varGamma = 0$, $|2\pi b|$ — мощность источника (стока). Качественно картина линий тока изображена на рис. 1.15.1, *б* при $b > 0$.

3) Вихрь. $f(z) = ci \ln z$, $c \in \mathbb{R}$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, тогда потенциал скоростей $u(z) = \operatorname{Re} f(z) = -c\varphi$, функция тока $v(z) = \operatorname{Im} f(z) = c \ln r$. Линии тока определяются уравнениями $v(z) = \text{const}$, т.е. $r = C$ — семейство окружностей с центром в начале координат. Линии равного потенциала определяются уравнением $u(z) = \text{const}$, т.е. семейством лучей $\varphi = C$, ортогональных линиям тока. Скорость жидкости находим по формуле (1.15.1) $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = -\dfrac{ic}{\overline{z}} = \dfrac{c}{r}e^{i(\varphi - \pi/2)}$, например, $\mathbf{V}(1) = -ic$, $\mathbf{V}(i) = c$. Вычислим интеграл (1.15.2):

$$\oint_\gamma f'(z)dz = \Gamma + iN = ic\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ если начало координат вне } \gamma; \\ -2\pi c, \text{ если начало координат внутри } \gamma. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем $N = 0$, $|2\pi c|$ — мощность вихря (завихрение по часовой стрелке при $c > 0$, против часовой стрелки при $c < 0$). Качественно картина линий тока изображена на рис. 1.15.2, *а* при $c > 0$.

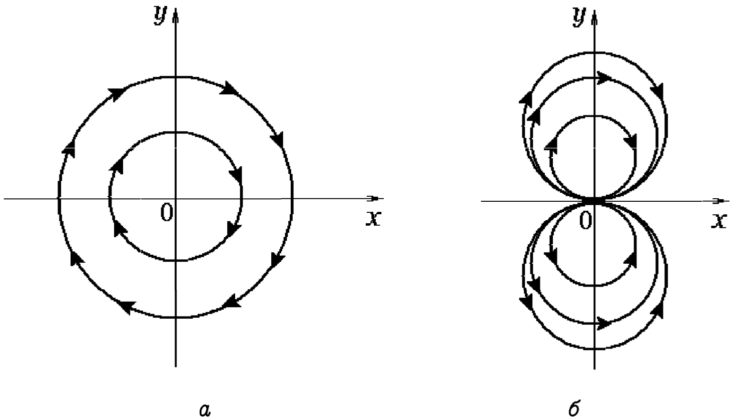


Рис. 1.15.2

4) Диполь. $f(z) = \dfrac{m}{z}$, $m \in \mathbb{R}$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, тогда потенциал скоростей $u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \dfrac{m}{r}\cos\varphi$, функция тока $v(z) = \operatorname{Im} f(z) = -\dfrac{m}{r}\sin\varphi$. Линии тока определяются уравнением $v(z) = \text{const}$, т.е. $r = C\sin\varphi$ — семейство окружностей, проходящих через начало координат с центрами на мнимой оси. Линии равного потенциала определяются уравнениями $u(z) = \text{const}$, т.е. $r = C\cos\varphi$ — семейство окружностей, проходящих через начало координат с центрами на действительной оси и ортогональных линиям тока. Скорость жидкости находим по формуле (1.15.1) $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = -\dfrac{m}{\bar{z}^2} = \dfrac{m}{r^2}e^{i(2\varphi+\pi)}$, например, $\mathbf{V}(-i) = m$, $\mathbf{V}(i) = m$. Вычислим интеграл (1.15.2):

$$\oint_\gamma f'(z)dz = \Gamma + iN = -m\oint_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Отсюда $N = 0$, $\Gamma = 0$. Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.2, *б* для момента диполя $m > 0$.

5) $f(z) = \ln(z^2 - 1)$. Потенциал скоростей $u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \ln|z^2 - 1|$, функция тока $v(z) = \operatorname{Im} f(z) = \arg(z^2 - 1)$. Линии равного потенциала определяются уравнением $u(z) = \mathrm{const}$, т.е. $|z+1|\cdot|z-1| = C$ — геометрическое место точек, для которых произведение расстояний до точек $(-1,0)$ и $(1,0)$ постоянно. Это так называемые овалы Кассини (подробнее о них в следующем примере). Линии тока определяются уравнением $v(z) = \mathrm{const}$, т.е. $\arg(z^2 - 1) = C$. Отсюда получаем уравнения линий тока $2xy = C(x^2 - y^2 - 1)$. Скорость жидкости

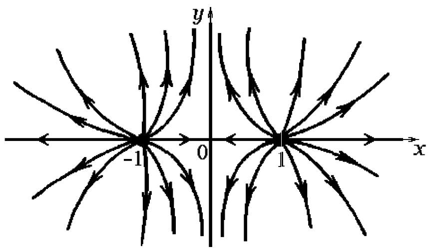
$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \frac{2\overline{z}}{\overline{z}^2 - 1} = \frac{2\Big\{x(x^2 - y^2 - 1) + 2xy^2 + i[2x^2 y - y(x^2 - y^2 - 1)]\Big\}}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2} =$$

$$= \frac{2[x(x^2 + y^2 - 1) + iy(x^2 + y^2 + 1)]}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}.$$

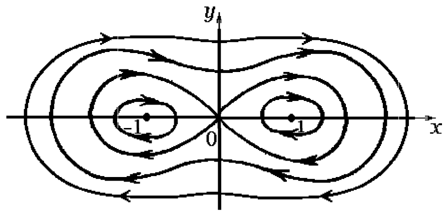
Критические точки течения находятся из условия $\mathbf{V}(z) = 0$, отсюда $0 + i0$ — критическая точка.

Поле скоростей представляет собой композицию полей двух источников мощности 2π, расположенных в точках $z = 1$ и $z = -1$.

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.3, *а*.



а



б

Рис. 1.15.3

6) $f(z) = i\ln(z^2 - 1)$. Потенциал скоростей $u(z) = -\arg(z^2 - 1)$, функция тока $v(z) = \ln|z^2 - 1|$. Линии равного потенциала $2xy = C(x^2 - y^2 - 1)$. Линии тока $|z+1|\cdot|z-1| = C$ — овалы Кассини.

Овалы Кассини определяются уравнениями $(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = C^4$ и являются геометрическим местом точек, для которых произведение расстояний до точек $(-a,0)$ и $(a,0)$ равно C^2. При $C^2 = 0$ — это пара точек, при $0 < C^2 < a^2$ — это две кривые, при $C^2 = a^2$ — лемниската Бернулли, при $a^2 < C^2$ представляет собой одну замкнутую кривую.

В нашем случае линии тока задаются уравнениями $(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = C^4$ и изображены на рис. 1.15.3, *б*.

Скорость жидкости

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = -\frac{2i\overline{z}}{\overline{z}^2 - 1} = \frac{2[y(x^2 + y^2 + 1) - ix(x^2 + y^2 - 1)]}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2},$$

например, $\mathbf{V}(i) = 1$, $\mathbf{V}(-i) = -1$.

Поле скоростей представляет собой композицию полей двух вихрей одного направления и одинаковой интенсивности.

7) $f(z) = \ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$. Потенциал скоростей $u(z) = \ln\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|$, функция тока $v(z) = \arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$. Линии равного потенциала $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = C$ — геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ постоянно. Это так называемые окружности Аполлония (подробнее о них в следующем примере). Линии тока определяются уравнениями $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = C$, задающими окружности, проходящие через точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Действительно, при дробно-линейном отображении $\mathrm{w} = \dfrac{z-1}{z+1}$ точка $z_1 = 1$ отображается в $\mathrm{w}_1 = 0$, а точка $z_2 = -1$ отображается в $\mathrm{w}_2 = \infty$. По свойству дробно-линейного отображения лучу $\arg \mathrm{w} = \arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = C$ соответствует дуга окружности, проходящая через точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Нетрудно получить уравнения этих окружностей:

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = C \;\Rightarrow\; \arg\left(\frac{x^2 + y^2 - 1 + 2iy}{(x+1)^2 + y^2}\right) = C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right) = C \;\Rightarrow\; \widetilde{C}\cdot 2y = (x^2 + y^2 - 1) \;\Rightarrow\; x^2 + (y - \widetilde{C})^2 = 1 + \widetilde{C}^2.$$

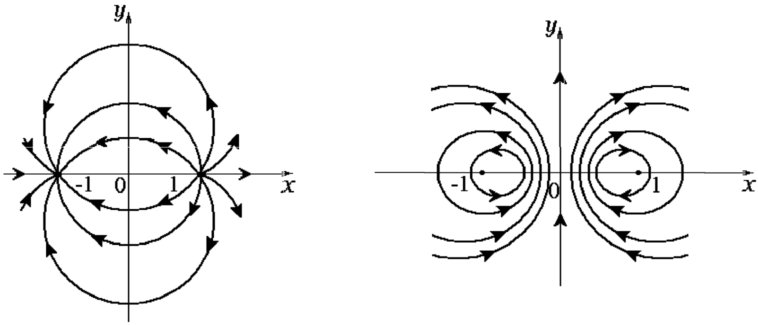
Скорость жидкости

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \frac{1}{\overline{z} - 1} - \frac{1}{\overline{z} + 1} = \frac{2}{\overline{z}^2 - 1} = \frac{2(x^2 - y^2 - 1 + 2ixy)}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4xy},$$

например, $\mathbf{V}(i) = \mathbf{V}(-i) = -1$.

Поле скоростей представляет собой композицию полей источника мощности 2π, расположенного в точке $z = 1$, и стока мощности 2π, расположенного в точке $z = -1$.

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.4, *а*.



а *б*

Рис. 1.15.4

8) $f(z) = i\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$. Потенциал скоростей $u(z) = -\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$, функция тока $v(z) = \ln\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|$. Линии равного потенциала $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = C$ совпадают с линиями тока предыдущей задачи. Линии тока $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = C$ — окружности Аполлония.

Окружности Аполлония — геометрическое место точек z, для которых отношение расстояний до точек z_1 и z_2 постоянно: $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = \text{const}$.

Действительно, при дробно-линейном отображении $\mathrm{w} = \dfrac{z-1}{z+1}$ точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ переходят соответственно в точки $\mathrm{w}_1 = 0$ и $\mathrm{w}_2 = \infty$, симметричные относительно окружности $|\mathrm{w}| = C$, прообразом которой в плоскости $\mathbb{C}$ является окружность, относительно которой точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ симметричны. Нетрудно получить уравнения этих окружностей:

$$\left(x + \frac{C+1}{C-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C+1}{C-1}\right)^2 - 1.$$

Скорость жидкости

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \frac{2i}{1-\overline{z}^2} = \frac{2[2xy - i(x^2-y^2-1)]}{(x^2-y^2-1)^2 + 4x^2y^2},$$

например, $\mathbf{V}(\pm 2) = -\dfrac{2}{3}i$.

Поле скоростей представляет собой композицию полей вихрей одинаковой интенсивности, расположенных в точках $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$, но противоположно направленных.

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.4, *б*.

9) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$. Потенциал скоростей и функция тока имеют вид

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2-1}{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}; \qquad u(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}.$$

Эквипотенциальные линии определяются уравнениями

$$(x^2+y^2)^2-(C+2)(x^2-y^2)+C+1=0, \quad x^2-y^2=1,$$

линии тока — уравнениями

$$(x^2+y^2)-2(x^2-y^2)+2Cxy+1=0, \quad xy=0.$$

Скорость потока

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \frac{-2\overline{z}}{(1-\overline{z}^2)^2},$$

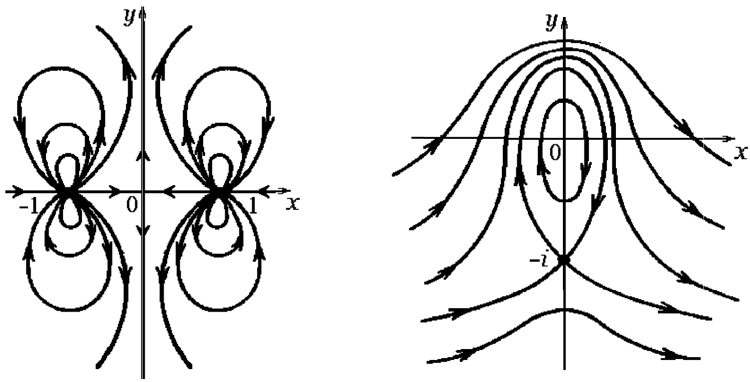
например, $\mathbf{V}(\pm 2) = \mp\dfrac{4}{9}$, $\mathbf{V}(\pm i) = \pm\dfrac{i}{2}$.

Отсюда находится критическая точка $z=0$, в которой $\mathbf{V}(z)=0$.

Поле скоростей представляет собой композицию полей диполей, расположенных в точках $z=1$ и $z=-1$ с моментами $m=1/2$ и $m=-1/2$, так как

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}.$$

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.5, *а*.



а *б*

Рис. 1.15.5

10) $f(z) = z + i\ln z$. Потенциал скоростей и функция тока имеют вид

$$u = x - \arg z, \qquad v = y + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

Эквипотенциальные линии определяются уравнениями $r\cos\varphi - \varphi = C$, линии тока — уравнениями $r\sin\varphi + \ln r = C$.

Скорость потока $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \dfrac{\overline{z} - i}{\overline{z}}$ обращается в ноль в точке $z = -i$, а $\mathbf{V}(i) = 2$.

Поле скоростей представляет собой композицию поля плоскопараллельного течения и поля скоростей вихря.

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.5, *б*.

11) $f(z) = z - \ln z$. Потенциал скоростей и функция тока имеют вид

$$u = x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), \qquad v = y - \arg z.$$

Эквипотенциальные линии определяются уравнениями $r\cos\varphi - \ln r = C$, линии тока — уравнениями $r\sin\varphi - \varphi = C$.

Скорость потока $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = 1 - \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$ обращается в ноль в точке $z = 1$.

Поле скоростей представляет собой композицию поля плоскопараллельного течения и поля стока мощности 2π, расположенного в точке $z = 0$.

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.6, *а*.

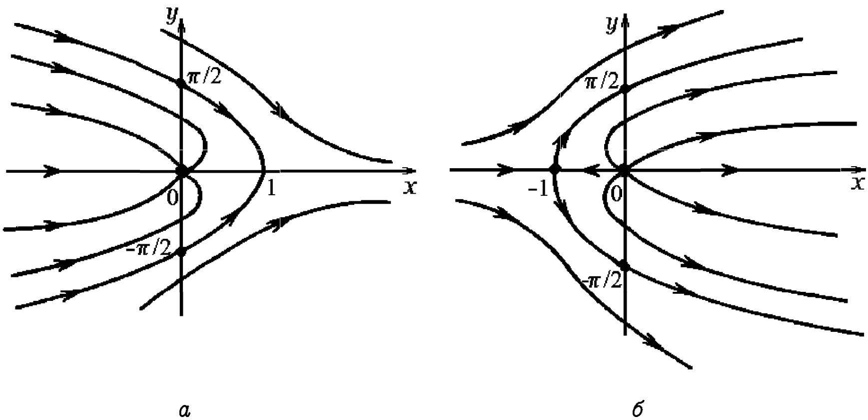


Рис. 1.15.6

12) $f(z) = z + \ln z$. Потенциал скоростей и функция тока имеют вид

$$u = x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), \qquad v = y + \arg z.$$

Эквипотенциальные линии определяются уравнениями $r\cos\varphi + \ln r = C$, линии тока — уравнениями $r\sin\varphi + \varphi = C$.

Скорость потока $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = 1 + \frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}$ обращается в ноль в точке $z = -1$.

Поле скоростей представляет собой композицию поля плоскопараллельного течения и поля скоростей источника мощности 2π, расположенного в точке $z = 0$.

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.6, *б*.

13) $f(z) = z - \frac{1}{z}$. Потенциал скоростей и функция тока имеют вид

$$u = x - \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = y + \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Эквипотенциальные линии определяются уравнениями $x(x^2 + y^2 - 1) = C(x^2 + y^2)$, линии тока — уравнениями $y(x^2 + y^2 + 1) = C(x^2 + y^2)$.

Скорость потока $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \frac{\overline{z}^2 + 1}{\overline{z}^2}$ обращается в ноль в точках $z = \pm i$.

Поле скоростей представляет собой композицию поля плоскопараллельного течения и поля диполя с моментом $m = -1$, расположенного в точке $z = 0$.

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.7, *а*.

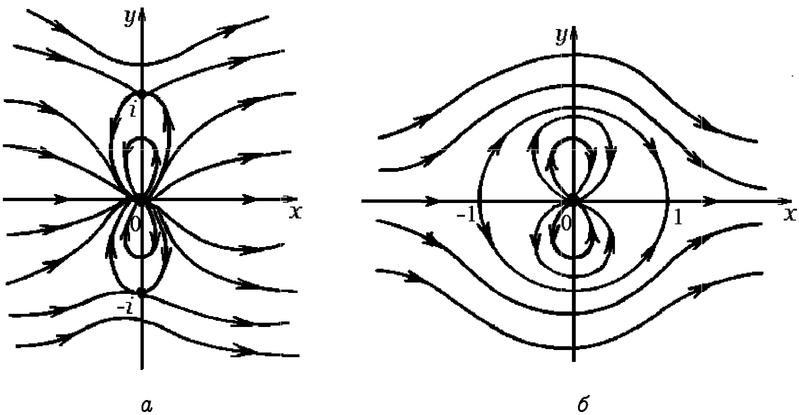


Рис. 1.15.7

14) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$. Потенциал скоростей и функция тока имеют вид

$$u = x + \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v = y - \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Эквипотенциальные линии определяются уравнениями $x(x^2+y^2+1) = C(x^2+y^2)$, линии тока — уравнениями $y(x^2+y^2-1) = C(x^2+y^2)$.

Скорость потока $\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = \dfrac{\overline{z}^2 - 1}{\overline{z}^2}$ обращается в ноль в точках $z = \pm 1$.

Поле скоростей представляет собой композицию поля плоскопараллельного течения и поля диполя с моментом $m = 1$, расположенного в точке $z = 0$.

Качественная картина линий тока изображена на рис. 1.15.7, *б*.

Задача 1.15.1.* Движение несжимаемой невязкой жидкости задается комплексным потенциалом $f(z)$. Найти потенциал скоростей $u(z)$, функцию тока $v(z)$, линии тока и равного потенциала, скорость жидкости $\mathbf{V}(z)$ и критические точки течения, в которых $\mathbf{V}(z) = 0$. Начертить качественно вид линий тока.

1. $f(z) = \ln(z^2+1)$.
2. $f(z) = i\ln(z^2+1)$.
3. $f(z) = \ln\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$.
4. $f(z) = i\ln\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$.
5. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.
6. $f(z) = iz - \ln z$.
7. $f(z) = iz - i\ln z$.
8. $f(z) = iz + i\ln z$.
9. $f(z) = iz - \dfrac{i}{z}$.
10. $f(z) = iz + \dfrac{i}{z}$.
11. $f(z) = \ln(z^2 - i)$.
12. $f(z) = i\ln(z^2 - i)$.
13. $f(z) = \ln\left(\dfrac{z+2}{z-2}\right)$.
14. $f(z) = i\ln\left(\dfrac{z+2}{z-2}\right)$.
15. $f(z) = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{z^2-i}$.
16. $f(z) = \ln z - iz$.
17. $f(z) = \ln z - z$.
18. $f(z) = -\ln z - z$.
19. $f(z) = \dfrac{1}{z} - z$.
20. $f(z) = -\dfrac{1}{z} - z$.
21. $f(z) = \ln(z^2 + i)$.
22. $f(z) = i\ln(z^2 + i)$.

23. $f(z) = \ln\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)$.

24. $f(z) = i\ln\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)$.

25. $f(z) = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{z^2+i}$.

26. $f(z) = -z - i\ln z$.

27. $f(z) = -iz + i\ln z$.

28. $f(z) = -iz - i\ln z$.

29. $f(z) = \dfrac{i}{z} - iz$.

30. $f(z) = -iz - \dfrac{i}{z}$.

Пример 1.15.2.* Рассмотреть задачу обтекания кругового цилиндра радиуса $R = 2$ потоком несжимаемой невязкой жидкости плотности ρ, имеющим на бесконечности скорость $\mathbf{V}_\infty = (1, 0)$ и циркуляцию $\Gamma_\infty = -4\pi$. Найти силу $\mathbf{P}$, действующую на цилиндр со стороны потока, комплексный потенциал $f(z)$, скорость $\mathbf{V}(z)$, давление в жидкости $p(z)$ в нижней и верхней точках цилиндра и критические точки потока, в которых $\mathbf{V}(z) = 0$. Изобразить качественное поведение линий тока.

Решение. Сила, действующая со стороны потока на цилиндр, определяется формулой Жуковского

$$\mathbf{P} = P_x + iP_y = -i\rho\mathbf{V}_\infty\Gamma_\infty = -i\rho(1+i0)(-4\pi) = i4\pi\rho.$$

Сила сопротивления $P_x = 0$, подъемная сила $P_y = 4\pi\rho$.

Комплексный потенциал задачи обтекания кругового цилиндра имеет вид

$$f(z) = \overline{\mathbf{V}}_\infty z + \frac{\mathbf{V}_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\ln z = z + \frac{4}{z} + i2\ln z.$$

Скорость жидкости

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = 1 - \frac{4}{\overline{z}^2} - \frac{2i}{\overline{z}} = 1 - \frac{4}{r^2}e^{i2\varphi} - \frac{2}{r}e^{i(\varphi+\pi/2)}, \quad \text{где } z = re^{i\varphi}.$$

Давление определяется формулой Бернулли—Эйлера $p(z) = A - |\mathbf{V}(z)|^2\dfrac{\rho}{2}$, где A — константа.

Найдем $|\mathbf{V}(z)|^2$ в точках цилиндра $z_{\text{в}} = 2\exp(i\pi/2) = 2i$ и $z_{\text{н}} = 2\exp(-i\pi/2) = -2i$:

$$|\mathbf{V}(re^{i\varphi})|^2 = \left(1 - \frac{4}{r^2}\cos 2\varphi + \frac{2}{r}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{4}{r^2}\sin 2\varphi + \frac{2}{r}\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{4}{r^2} + \frac{16}{r^4} - \frac{8}{r^2}\cos 2\varphi + \left(1 + \frac{4}{r^2}\right)\frac{4}{r}\sin\varphi,$$

$$|\mathbf{V}(z_{\text{в}})|^2 = 9, \qquad |\mathbf{V}(z_{\text{н}})|^2 = 1.$$

Таким образом:

$$p(z_{\text{в}}) = A - \frac{9}{2}\rho, \qquad\qquad p(z_{\text{н}}) = A - \frac{1}{2}\rho.$$

Теперь найдем координаты критических точек, т.е. точек, в которых $\mathbf{V}(z) = 0$. Критические точки являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 + \frac{\Gamma_\infty}{i2\pi\mathbf{V}_\infty}z - R^2 = 0.$$

Их расположение зависит от значения дискриминанта

$$\triangle = R^2 - \frac{\Gamma_\infty^2}{16\pi^2\mathbf{V}_\infty^2}, \quad (\triangle < 0, \ \triangle = 0, \ \triangle > 0).$$

В нашем случае $\triangle = 3 > 0$, следовательно:

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma_\infty}{4\pi\mathbf{V}_\infty} \pm \sqrt{\triangle} = \pm\sqrt{3} - i.$$

Заметим, что $|z_{1,2}| = 2 = R$, т.е. критические точки лежат на цилиндре. Качественный вид линий тока изображен на рис. 1.15.8.

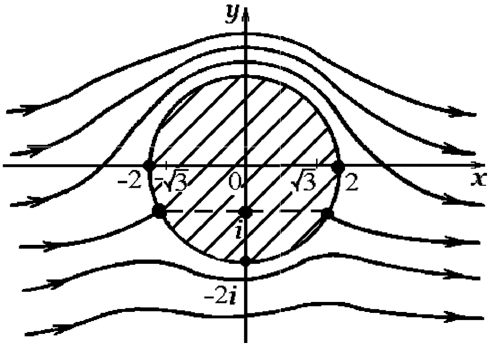


Рис. 1.15.8

Ответ. $\mathbf{P} = i4\pi\rho$, $\quad f(z) = z + \dfrac{4}{z} + i2\ln z$, $\quad \mathbf{V}(re^{i\varphi}) = 1 - \dfrac{4}{r^2}e^{i2\varphi} - \dfrac{2}{r}e^{i(\varphi+\pi/2)}$, $\quad p(z_{\text{в}}) = A - \dfrac{9\rho}{2}$, $\quad p(z_{\text{н}}) = A - \dfrac{\rho}{2}$, $\quad z_{1,2} = \pm\sqrt{3} - i$.

Задача 1.15.2.* Рассмотреть задачу обтекания кругового цилиндра радиуса R потоком несжимаемой невязкой жидкости плотности ρ, имеющим на бесконечности скорость $\mathbf{V}_\infty = (v, 0)$ и циркуляцию Γ_∞. Найти силу $\mathbf{P}$, комплексный потенциал $f(z)$, скорость $\mathbf{V}(z)$, давление

$p(z)$ жидкости в нижней и верхней точках цилиндра и критические точки потока, в которых $\mathbf{V}(z) = 0$. Изобразить качественно вид линий тока.

1. $R = 3$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = 16\pi$.
2. $R = 3$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 12\pi$.
3. $R = 2$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = 24\pi$.
4. $R = 3$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -8\pi$.
5. $R = 5$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -20\pi$.
6. $R = 1$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = -16\pi$.
7. $R = 6$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 12\pi$.
8. $R = 3$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = 24\pi$.
9. $R = 1$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 8\pi$.
10. $R = 6$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -20\pi$.
11. $R = 2$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = -16\pi$.
12. $R = 2$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -12\pi$.
13. $R = 6$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = 24\pi$.
14. $R = 2$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 8\pi$.
15. $R = 4$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 20\pi$.
16. $R = 3$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = -16\pi$.
17. $R = 3$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -12\pi$.
18. $R = 2$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = -24\pi$.
19. $R = 3$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 8\pi$.
20. $R = 5$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 20\pi$.
21. $R = 1$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = 16\pi$.
22. $R = 6$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -12\pi$.
23. $R = 3$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = -24\pi$.
24. $R = 1$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -8\pi$.
25. $R = 6$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 20\pi$.
26. $R = 2$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = 16\pi$.
27. $R = 2$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = 12\pi$.
28. $R = 6$, $v = 2$, $\Gamma_\infty = -24\pi$.
29. $R = 2$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -8\pi$.
30. $R = 4$, $v = 1$, $\Gamma_\infty = -20\pi$.

Пример 1.15.3.* Найти комплексный потенциал $f(z)$ установившегося течения невязкой жидкости в области D, если скорость течения на бесконечности $\mathbf{V}(-\infty) = (v_\infty, 0)$. Найти вектор поля скорости $\mathbf{V}(z)$ в точках z_i. Вычислить разность давлений $p(z_n) - p(z_k)$.

1) $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $z_{1,2} = \pm 1$, $z_3 = i$. Найти линию тока, проходящую через точку $z = 2i$ и ее асимптоту при $x \to \pm\infty$.

2) $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 \cup \operatorname{Im} z > 0\}$, $z_{1,2} = \pm 1$, $z_3 = 0$, $z_4 = -i$; $z_n = 0$, $z_k = -i$.

3) $D = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z > 0, \ (\operatorname{Im} z)^2 > 2\operatorname{Re} z + 1 > 0\}$, $z_1 = -1/2$, $z_2 = -1$; $z_n = -1$, $z_k = -1/2$. Найти уравнение линий тока, проходящих через точки $z_3 = i$ и $z_4 = 2i$.

4) $D = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z > 0, \ z \notin [0, i]\}$, $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 0$; $z_n = 0$, $z_k = 2i$.

5) $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - i| > 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$; $z_n = 0$, $z_k = 2i$.

6) $D = \{z \in \mathbb{C}: \ (z < 0, \ \mathrm{Im}\, z > 0) \cup (\mathrm{Re}\, z > 0, \ \mathrm{Im}\, z > 1)\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z = a + i$, $a > 0$; $z_n = 0$, $z_k = a + i$.

Решение. 1) Комплексный потенциал $f(z)$ течения в криволинейной полуплоскости D реализует конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость при условии, что:

а) $f(\infty) = \infty$; б) $|\overline{f'(\infty)}| = |\mathbf{V}(\infty)|$.

Функция $\mathrm{w} = a(z + 1/z)$, $a > 0$ осуществляет конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, \mathrm{w} > 0$, причем первое условие $f(\infty) = \infty$ выполняется (рис. 1.15.9).

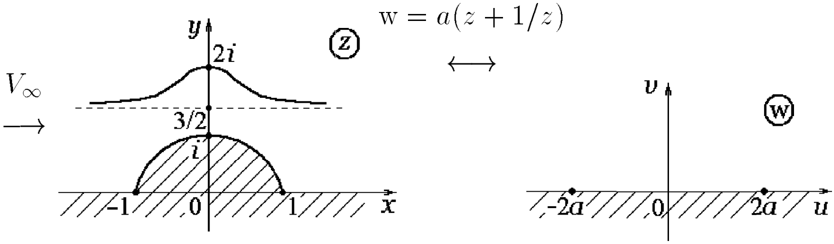


Рис. 1.15.9

Найдем значение a, при котором выполняется второе условие на бесконечности:

$$f'(z)\Big|_{z=\infty} = a(1 - 1/z^2)\Big|_{z=\infty} = a \ \Rightarrow \ |\overline{f'(\infty)}| = |\mathbf{V}(\infty)| = v_\infty \ \Rightarrow \ a = v_\infty.$$

Итак, $f(z) = v_\infty(z + 1/z)$ — комплексный потенциал течения.

Поле скоростей определяется выражением

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = v_\infty \left(1 - \frac{1}{\overline{z}^2}\right).$$

Скорость в точках $z = \pm 1$ и $z = i$ равна $\mathbf{V}(\pm 1) = 0$, $\mathbf{V}(i) = 2v_\infty$.

Линии тока определяются уравнениями

$$\mathrm{Im}\, f(z) = \mathrm{const} \ \Rightarrow \ y - \frac{y}{x^2 + y^2} = C.$$

Найдем значение константы C, соответствующее линии тока, проходящей через точку $z = 2i$. Положим в уравнении линий тока $y = 2$, $x = 0$, получим $C = 3/2$, т.е. линия тока $y - \dfrac{y}{x^2 + y^2} = \dfrac{3}{2}$ проходит через точку $z = 2i$. Если существует асимптота $y = kx + b$ этой кривой при $x \to \pm\infty$, то

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (y(x) - kx).$$

Нетрудно найти эти пределы:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{2x} + \frac{y/x}{x^2(1 + y^2/x^2)} \ \Rightarrow\ k = 0, \quad y = \frac{3}{2} + \frac{y/x}{x(1 + y^2/x^2)} \ \Rightarrow\ b = \frac{3}{2}.$$

Итак, асимптотой при $x \to \pm\infty$ этой линии тока является прямая $y = 3/2$.

Рассуждая аналогично, можно показать, что для линии тока $y - \dfrac{y}{x^2 + y^2} = C$ асимптотой при $x \to \pm\infty$ является прямая $y = C$. Отсюда легко найти точку пересечения $z = iy$ с осью Oy линии тока, имеющей асимптоту $y = 2$ при $x \to \pm\infty$. При $x = 0$ из уравнения линии тока $y - \dfrac{y}{x^2 + y^2} = 2$ получим уравнение $y^2 - 2y - 1 = 0 \ \Rightarrow\ y = 1 + \sqrt{2}$.

2) Комплексный потенциал $f(z)$ течения в криволинейной полуплоскости D реализует конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость при условии, что:

а) $f(\infty) = \infty$; б) $|\overline{f'(\infty)}| = |\mathbf{V}(\infty)|$.

Композиция дробно-линейного отображения $\mathrm{w}_1 = \dfrac{z - 1}{z + 1}$ и степенного $\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_1^{2/3}$ (выбирается ветвь, отображающая точку $\mathrm{w}_1 = -i$ в $\mathrm{w}_2 = -1$, т.е. ветвь $\mathrm{w}_2 = |\mathrm{w}_1|^{2/3} \exp(i2 \arg \mathrm{w}_1/3)$, $0 < \arg \mathrm{w}_1 < 2\pi$) отображает область D на верхнюю полуплоскость, но условие $f(\infty) = \infty$ не выполняется, так как точка $A = \infty$ отображается в точку $A'' = 1$ (рис. 1.15.10).

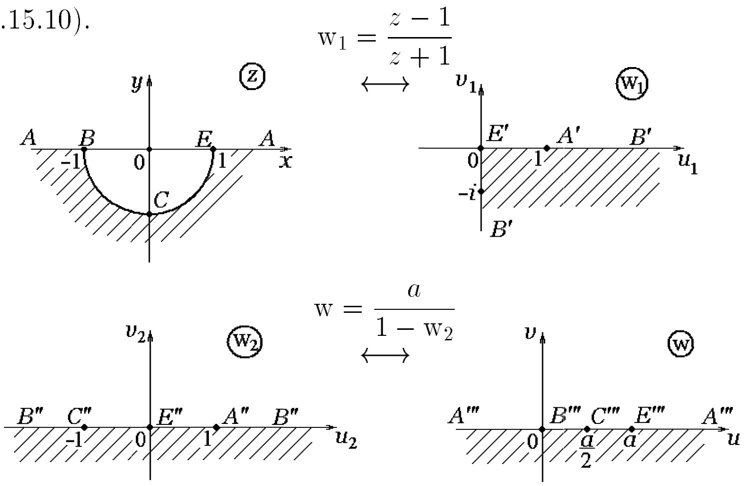


Рис. 1.15.10

Функция $\mathrm{w} = \dfrac{a}{1-\mathrm{w}_2}$, $a > 0$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\mathrm{w}_2 > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, при этом точка $A = \infty$ переходит в точку $A''' = \infty$, т.е. выполняется первое условие на бесконечности $f(\infty) = \infty$. Таким образом:

$$\mathrm{w} = f(z) = a\frac{(z+1)^{2/3}}{(z+1)^{2/3} - (z-1)^{2/3}}.$$

Найдем значение a, при котором выполняется второе условие на бесконечности $|\overline{f'(\infty)}| = |\mathbf{V}(\infty)|$:

$$f'(z) = \frac{4a}{3[(z+1)^{2/3} - (z-1)^{2/3}]^2(z-1)^{1/3}(z+1)^{1/3}}.$$

Легко показать, что $\lim\limits_{z\to\infty} f'(z) = 3a/4$, т.е. $a = 4v_\infty/3$. Действительно,

$$f'(z) = \frac{4a}{3}\,\frac{[(z+1)^{4/3} + (z^2-1)^{2/3} + (z-1)^{4/3}]^2}{[(z+1)^2 - (z-1)^2]^2(z-1)^{1/3}(z+1)^{1/3}} =$$

$$= \frac{a}{12}\,\frac{[(1+1/z)^{4/3} + (1-1/z^2)^{2/3} + (1-1/z)^{4/3}]^2}{(1-1/z)^{1/3}(1+1/z)^{1/3}}.$$

Отсюда получаем при $z \to \pm\infty$ $f'(\infty) = 3a/4$. Таким образом, комплексный потенциал течения равен

$$f(z) = \frac{4v_\infty}{3}\,\frac{(z+1)^{2/3}}{(z+1)^{2/3} - (z-1)^{2/3}}.$$

Найдем скорость жидкости в точках $z = \pm 1$, $z = 0$, $z = -i$:

$$|\mathbf{V}(\pm 1)| = |\overline{f'(\pm 1)}| = \infty.$$

Замечание. По закону Бернулли $\dfrac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} = \mathrm{const}$, где ρ — плотность жидкости. В точках $z = \pm 1$ давление равно $p(\pm 1) = -\infty$, чего быть не может. Для того, чтобы обойти эту неприятность, Гельмгольц предложил рассматривать в этих точках отрывное течение.

$$\mathbf{V}(0) = \overline{f'(0)} = \frac{16v_\infty}{9}\,\frac{1}{(1-e^{-i2\pi/3})^2 e^{-i\pi/3}} = \frac{16v_\infty}{9}\,\frac{1}{(e^{-i\pi/3} - 2e^{-i\pi} + e^{-i5\pi/3})} =$$

$$= \frac{16v_\infty}{9}\,\frac{1}{(2+2\cos(\pi/3))} = \frac{16v_\infty}{27};$$

$$\mathbf{V}(-i)=\overline{f'(-i)}=\frac{16v_\infty}{9}\,\frac{1}{(2^{1/3}e^{-i7\pi/3}-2^{1/3}e^{-i5\pi/6})^2 2^{1/6}e^{-i5\pi/12}2^{1/6}e^{-i7\pi/12}}=$$

$$=\frac{16v_\infty}{9}\,\frac{1}{(e^{-i7\pi/3}+e^{-i5\pi/3}-2e^{-2\pi})e^{-i\pi}2}=\frac{8v_\infty}{9}\,\frac{1}{(2-2\cos(\pi/3))}=\frac{8v_\infty}{9}.$$

Из закона Бернулли $\dfrac{|\mathbf{V}|^2}{2}+\dfrac{p}{\rho}=\mathrm{const}$, где ρ — плотность жидкости, находим разность давлений в точках $z=0$ и $z=-i$:

$$p(0)-p(-i)=\frac{\rho v_\infty^2}{2}\left(\frac{64}{81}-\frac{256}{729}\right)=\frac{160}{729}\rho v_\infty^2.$$

3) Комплексный потенциал $f(z)$ течения в криволинейной полуплоскости D реализует конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость при условии, что:

а) $f(\infty)=\infty$; б) $|\overline{f'(\infty)}|=|\mathbf{V}(\infty)|$.

Граница области D при $\operatorname{Re} z>-1/2$ представляет собой параболу $y^2=2(x+1/2)$, где $z=x+iy$. Известно, что функция $\mathrm{w}_1=\sqrt{z}$ отображает параболы $y^2=2p(x+p/2)$, $p>0$ в прямые линии $\operatorname{Im}\mathrm{w}_1=\sqrt{p/2}$. Следовательно, функция $\mathrm{w}_2=\sqrt{z}-i\sqrt{1/2}$ отображает область D на первую четверть $\{\operatorname{Re}\mathrm{w}_2>0,\ \operatorname{Im}\mathrm{w}_2>0\}$, а функция $\mathrm{w}=f(z)=a(\sqrt{z}-i/\sqrt{2})^2=a(z-1/2-i\sqrt{2z})$ отображает область D на верхнюю полуплоскость, причем первое условие на бесконечности $f(\infty)=\infty$ выполняется (рис. 1.15.11).

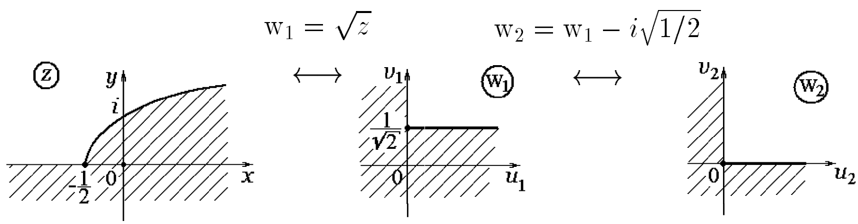


Рис. 1.15.11

Найдем значение a, при котором выполняется второе условие на бесконечности:

$$f'(z)=a\left(1-\frac{i}{\sqrt{2z}}\right)\ \Rightarrow\ |\overline{f'(\infty)}|=|\mathbf{V}(\infty)|=v_\infty=a.$$

Итак, комплексный потенциал течения имеет вид

$$f(z) = v_\infty(z - 1/2 - i\sqrt{2z}).$$

Найдем поле скоростей жидкости

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(z)} = v_\infty\overline{(1 - i/\sqrt{2z})}.$$

Скорости жидкости в точках $z = -1/2$ и $z = -1$ равны $\mathbf{V}(-1/2) = 0$, $\mathbf{V}(-1) = v_\infty(1 - 1/\sqrt{2})$. По закону Бернулли $\dfrac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} = \mathrm{const}$, где ρ — плотность жидкости. Отсюда найдем $p(-1) - p(-1/2) = \rho v_\infty^2(3 - 2\sqrt{2})/4$.

Линии тока определяются уравнениями $\operatorname{Im} f(z) = C$, т.е.

$$r\sin\varphi - \sqrt{2r}\cos(\varphi/2) = C, \quad \text{где} \quad z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < \pi.$$

Найдем C, соответствующее линии тока, проходящей через точку $z = i = e^{i\pi/2}$:

$$\sin(\pi/2) - \sqrt{2}\cos(\pi/4) = C \ \Rightarrow\ C = 0.$$

Уравнение линии тока, проходящей через точку $z = i$, имеет вид

$$r\sin\varphi - \sqrt{2r}\cos(\varphi/2) = 0 \ \Rightarrow\ r = \frac{1}{2\sin^2(\varphi/2)}.$$

Это уравнение параболы — границы области D.

Аналогично находим линию тока, проходящую через точку $z = 2i = 2e^{i\pi/2}$:

$$r\sin\varphi - \sqrt{2r}\cos(\varphi/2) = 2 - \sqrt{2}.$$

4) Комплексный потенциал $f(z)$ течения в криволинейной полуплоскости D реализует конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость при условии, что:

а) $f(\infty) = \infty$; б) $|\overline{f'(\infty)}| = |\mathbf{V}(\infty)|$.

Функция $\mathrm{w} = f(z) = a\sqrt{z^2+1}$ отображает область D на верхнюю полуплоскость, причем первое условие на бесконечности $f(\infty) = \infty$ выполняется (рис. 1.15.12).

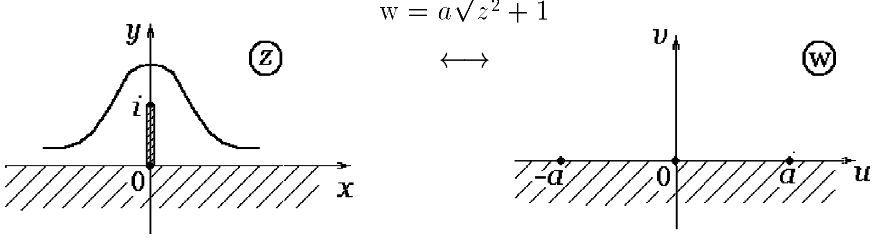


Рис. 1.15.12

Найдем значение a, при котором выполняется второе условие на бесконечности

$$f'(z) = \frac{az}{\sqrt{z^2+1}} \Rightarrow f'(z) = \frac{a}{\sqrt{1+1/z^2}} \Rightarrow |\overline{f'(\infty)}| = |\mathbf{V}(\infty)| = v_\infty = a.$$

Итак, комплексный потенциал течения имеет вид

$$\mathrm{w} = f(z) = v_\infty \sqrt{z^2+1}.$$

Найдем поле скоростей жидкости:

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(\infty)} = v_\infty \overline{\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}}.$$

Скорости жидкости в точках $z = 2i$, $z = i$, $z = 0$ равны $\mathbf{V}(2i) = v_\infty 2/\sqrt{3}$, $|\mathbf{V}(i)| = \infty$, $|\mathbf{V}(0)| = 0$. Скорость жидкости на острой кромке $z = i$ обращается в бесконечность (см. замечание по этому поводу в примере выше). По закону Бернулли $\dfrac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} = \mathrm{const}$, где ρ — плотность жидкости. Отсюда найдем $p(0) - p(2i) = \rho v_\infty^2 4/3$.

5) Комплексный потенциал $f(z)$ течения в криволинейной полуплоскости D реализует конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость при условии, что:

а) $f(\infty) = \infty$; б) $|\overline{f'(\infty)}| = |\mathbf{V}(\infty)|$.

Функция $\mathrm{w}_1 = 1/z$ осуществляет конформное отображение области D на полосу $-1/2 < \operatorname{Im} \mathrm{w}_1 < 0$ (рис. 1.15.13).

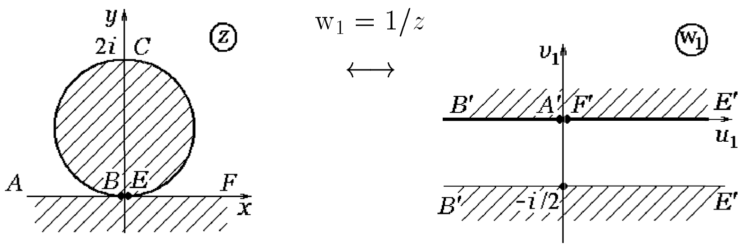


Рис. 1.15.13

Функция $\mathrm{w}_2 = \exp(-2\pi \mathrm{w}_1)$ отображает эту полосу на верхнюю полуплоскость, но условия на бесконечности не выполнены.

Рассмотрим дробно-линейную функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость так, чтобы точка $A'' = 1$

отображалась в бесконечно удаленную точку, а точка $C'' = -1$ в ноль. Очевидно, что функция имеет вид $\mathrm{w} = a(1+\mathrm{w}_2)/(1-\mathrm{w}_2)$, $a > 0$, причем первое условие на бесконечности будет выполнено (рис. 1.15.14).

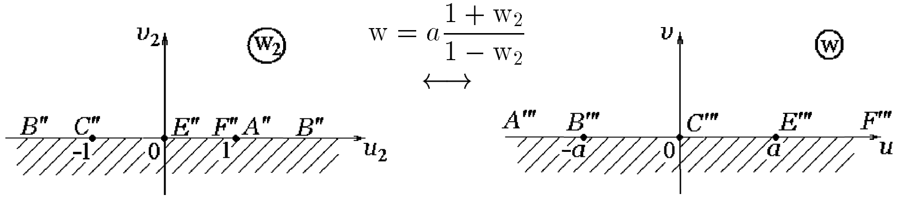


Рис. 1.15.14

Найдем значение a, при котором выполняется второе условие на бесконечности

$$\mathrm{w} = f(z) = a\frac{1+e^{-2\pi/z}}{1-e^{-2\pi/z}};$$

$$f'(z) = \frac{4a\pi e^{-2\pi/z}}{(1-e^{-2\pi/z})z^2} \;\Rightarrow\; |\overline{f'(\infty)}| = \frac{a}{\pi} = |\mathbf{V}(\infty)| = v_\infty.$$

Отсюда $a = \pi v_\infty$.

Итак, комплексный потенциал течения имеет вид

$$f(z) = \pi v_\infty \frac{1+e^{-2\pi/z}}{1-e^{-2\pi/z}} = \pi v_\infty \coth(\pi/z).$$

Найдем поле скоростей жидкости:

$$\mathbf{V}(z) = \overline{f'(\infty)} = \pi^2 v_\infty \overline{\frac{1}{z^2 \operatorname{sh}^2(\pi/z)}}.$$

Скорости жидкости в точках $z = 0$ и $z = 2i$ равны $\mathbf{V}(0) = 0$, $\mathbf{V}(2i) = \pi^2 v_\infty/4$.

По закону Бернулли $\dfrac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} = \mathrm{const}$, где ρ — плотность жидкости. Отсюда найдем $p(0) - p(2i) = \rho v_\infty^2 \pi^4/32$.

6) Комплексный потенциал $f(z)$ течения в криволинейной полуплоскости D реализует конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость при условии, что:

а) $f(\infty) = \infty$; б) $|\overline{f'(\infty)}| = |\mathbf{V}(\infty)|$.

С помощью интеграла Кристоффеля—Шварца [6, 7] отобразим верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \mathrm{w} > 0$ на область D (рис. 1.15.15).

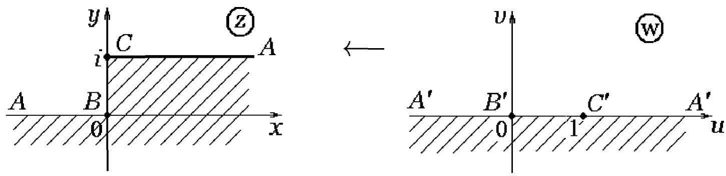


Рис. 1.15.15

Пусть точки $A = \infty$, $B = 0$, $C = i$ являются образами $A' = \infty$, $B' = 0$, $C' = 1$. Углы "треугольника" D равны $\angle A = -\pi$, $\angle B = \pi/2$, $\angle C = 3\pi/2$.

Интеграл Кристофеля—Шварца примет вид

$$z = C_1 \int (\mathrm{w} - 0)^{1/2-1} (\mathrm{w} - 1)^{3/2-1} d\mathrm{w} + C_2 = C_1 \int \sqrt{\frac{\mathrm{w} - 1}{\mathrm{w}}} d\mathrm{w} + C_2 =$$

$$= C_1 \left[\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w} - 1)} - \frac{1}{2} \ln \left(\mathrm{w} - \frac{1}{2} + \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w} - 1)} \right) \right] + C_2.$$

Здесь выбрана однозначная ветвь логарифма $\ln(\mathrm{w}) = \ln|\mathrm{w}| + i \arg \mathrm{w}$, где $0 \le \arg \mathrm{w} \le \pi$, а однозначная ветвь многозначной функции $\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w} - 1)}$ в верхней полуплоскости определяется следующим образом:

$$\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w} - 1)} = \sqrt{r_1 r_2} \exp(i(\theta_1 + \theta_2)/2),$$

где $\mathrm{w} = r_1 \exp(i\theta_1)$, $\mathrm{w} - 1 = r_2 \exp(i\theta_2)$, $0 \le \theta_1, \theta_2 \le \pi$.

Замечание. Здесь нельзя выделить однозначную ветвь с помощью выбора знака перед квадратным корнем. Так, например, в различных точках действительной оси $\mathrm{w} = u + i0$ значения выбранной однозначной ветви будут следующими:

а) если $u > 1$, то $\theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w} - 1)} = \sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{u(u - 1)}$;

б) если $0 < u < 1$, то $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi \Rightarrow \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w} - 1)} = i\sqrt{r_1 r_2} =$ $= i\sqrt{u(1 - u)}$;

в) если $u < 0$, то $\theta_1 = \theta_2 = \pi \Rightarrow \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w} - 1)} = -\sqrt{r_1 r_2} = -\sqrt{u(u - 1)}$.

Определим константы C_1 и C_2 из соответствия точек $B = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow B' = 0$ и $C = i \Leftrightarrow C' = 1$:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \left[-\dfrac{1}{2} \ln(-1/2) \right] + C_2, \\ i = C_1 \left[-\dfrac{1}{2} \ln(1/2) \right] + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2/\pi, \\ C_2 = i - \ln 2/\pi. \end{cases}$$

Таким образом, искомое отображение, удовлетворяющее первому условию на бесконечности, имеет вид

$$z = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)} - \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{w} - \frac{1}{2} + \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)}\right)\right] + i - \frac{\ln 2}{\pi}.$$

В плоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{w}}$ комплексного переменного w мы имеем плоскопараллельный поток со скоростью v, поэтому комплексный потенциал $f(z) = f(z(\mathrm{w})) \equiv F(\mathrm{w})$ имеет вид $F(\mathrm{w}) = v\mathrm{w}$.

Найдем поле скоростей жидкости

$$\mathbf{V}(z) = \overline{\frac{df}{dz}} = \overline{\frac{dF(\mathrm{w})}{dz}} = \overline{\frac{dF}{d\mathrm{w}} \cdot \frac{d\mathrm{w}}{dz}} = v\frac{\pi}{2}\,\overline{\frac{\mathrm{w}}{\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)}}},$$

так как из интеграла Кристоффеля—Шварца следует, что

$$\frac{d\mathrm{w}}{dz} = \frac{1}{\left(\dfrac{dz}{d\mathrm{w}}\right)} = \frac{1}{\left(C_1\sqrt{\dfrac{\mathrm{w}-1}{\mathrm{w}}}\right)}.$$

Заметим, что отсюда $\mathbf{V}(0) = 0$ и $|\mathbf{V}(i)| = \infty$ (см. замечание по поводу обращения скорости в бесконечность в примере выше).

Из второго условия на бесконечности при $z \to -\infty$ или $\mathrm{w} \to -\infty$ скорость $\mathbf{V}(z) \to v_\infty + i0$, действительно:

$$\lim_{\mathrm{w}\to-\infty} \mathbf{V}(z) = \lim_{\mathrm{w}\to-\infty}\left(-v\frac{\pi}{2}\,\overline{\frac{\mathrm{w}}{\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)}}}\right) = \lim_{\mathrm{w}\to-\infty}\left(v\frac{\pi}{2}\,\overline{\frac{1}{\sqrt{1-1/\mathrm{w}}}}\right) =$$

$$= v\frac{\pi}{2} = v_\infty.$$

Заметим, что при вычислении предела учтено выражение для выделенной ветви функции $\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)}$ при $\mathrm{w} = u + i0$, $u < 0$. Отсюда находим $v = 2v_\infty/\pi$.

Итак, выражение для комплексного потенциала в плоскости $\mathbb{C}_{\mathrm{w}}$ вместе с установленной выше зависимостью $z = z(\mathrm{w})$ дает параметрическое решение

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{2v_\infty}{\pi}\mathrm{w}, \\ z = \dfrac{2}{\pi}\left[\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{w} - \dfrac{1}{2} + \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)}\right)\right] + i - \dfrac{\ln 2}{\pi}. \end{cases}$$

Выражение для искомой скорости потока задается также параметрически:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(z) = v_\infty \sqrt{\dfrac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}-1}}, \\ z = \dfrac{2}{\pi}\left[\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{w} - \dfrac{1}{2} + \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)}\right)\right] + i - \dfrac{\ln 2}{\pi}. \end{cases}$$

Пусть, например, $\mathrm{w} = 2$. Тогда скорость $\mathbf{V}(a+i) = v_\infty\sqrt{2}$, где $a = \dfrac{2}{\pi}\left[\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\right] - \dfrac{\ln 2}{\pi}$.

По закону Бернулли $\dfrac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} = \mathrm{const}$, где ρ — плотность жидкости. Отсюда найдем $p(0) - p(a+i) = \rho v_\infty^2$.

Ответы.

1) $f(z) = v_\infty(z + 1/z)$; $\mathrm{V}(\pm 1) = 0$, $\mathrm{V}(i) = 2v_\infty$; линия тока, проходящая через точку $z = 2i$, задается уравнением $y - \dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{2}$ и имеет асимптоту $y = 3/2$ при $x \to \pm\infty$; линия тока, имеющая асимптоту $y = 2$ при $x \to \pm\infty$, задается уравнением $y - \dfrac{y}{x^2+y^2} = 2$ и проходит через точку $z = i(1+\sqrt{2})$.

2) $f(z) = \dfrac{4v_\infty}{3}\,\dfrac{(z+1)^{2/3}}{(z+1)^{2/3} - (z-1)^{2/3}}$; $|\mathbf{V}(\pm 1)| = \infty$, $\mathbf{V}(0) = \dfrac{16v_\infty}{27}$, $\mathbf{V}(-i) = \dfrac{8v_\infty}{9}$; $p(0) - p(-i) = \dfrac{160}{729}\rho v_\infty^2$.

3) $f(z) = v_\infty\left(z - \dfrac{1}{2} - i\sqrt{2z}\right)$; $\mathbf{V}(-1/2) = 0$, $\mathbf{V}(-1) = v_\infty\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $p(-1) - p(-1/2) = \rho v_\infty^2\dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{4}$, $r = \dfrac{1}{2\sin^2(\varphi/2)}$,
$r\sin\varphi - \sqrt{2r}\cos(\varphi/2) = 2 - \sqrt{2}$.

4) $f(z) = v_\infty\sqrt{z^2+1}$; $|\mathbf{V}(i)| = \infty$, $\mathbf{V}(2i) = v_\infty\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $|\mathbf{V}(0)| = 0$; $p(0) - p(2i) = \rho v_\infty^2\dfrac{4}{3}$.

5) $f(z) = \pi v_\infty \coth(\pi/z)$; $\mathbf{V}(0) = 0$, $\mathbf{V}(2i) = \dfrac{\pi^2 v_\infty}{4}$,
$p(0) - p(2i) = \rho v_\infty^2\dfrac{\pi^4}{32}$.

6) $\begin{cases} f(z) = \dfrac{2v_\infty}{\pi}\mathrm{w}, \\ z = \dfrac{2}{\pi}\left[\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{w} - \dfrac{1}{2} + \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)}\right)\right] + i - \dfrac{\ln 2}{\pi}. \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathbf{V}(z) = v_\infty\overline{\sqrt{\dfrac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}-1}}}, \\ z = \dfrac{2}{\pi}\left[\sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{w} - \dfrac{1}{2} + \sqrt{\mathrm{w}(\mathrm{w}-1)}\right)\right] + i - \dfrac{\ln 2}{\pi}. \end{cases}$$

$\mathbf{V}(0) = 0$, $|\mathbf{V}(i)| = \infty$, $\mathbf{V}(a+i) = v_\infty\sqrt{2}$; $p(0) - p(a+i) = \rho v_\infty^2$, где $a = \dfrac{2}{\pi}\left[\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\right] - \dfrac{\ln 2}{\pi}$.

Задача 1.15.3.* Найти комплексный потенциал $f(z)$ установившегося течения невязкой жидкости в области D, если скорость течения на бесконечности $\mathbf{V}(-\infty) = (v_\infty, 0)$. Найти вектор поля скорости $\mathbf{V}(z)$ в точках z_i. Вычислить разность давлений $p(z_1) - p(z_2)$ в точках z_1 и z_2.

1. $D = \{|z| > 2,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $z_1 = -2$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 2$.
2. $D = \{|z| < 2 \cup \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = -2i$, $z_{3,4} = \pm 2$.
3. $D = \{\mathrm{Im}\, z > 0,\ (\mathrm{Im}\, z)^2 > 4(\mathrm{Re}\, z + 1)\}$, $z_1 = -1$, $z_2 = -2$.
4. $D = \{(\mathrm{Re}\, z < 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0) \cup (\mathrm{Re}\, z \geq 0,\ \mathrm{Im}\, z > 2)\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$, $z_3 = a + 2i$, $a > 0$.
5. $D = \{|z - 2i| > 2,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 4i$.
6. $D = \{\mathrm{Im}\, z > 0,\ z \notin [0, 2i]\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 4i$.
7. $D = \{|z| > 3,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $z_1 = -3$, $z_2 = 3i$, $z_3 = 3$.
8. $D = \{|z| < 3 \cup \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = -3i$, $z_{3,4} = \pm 3$.
9. $D = \{\mathrm{Im}\, z > 0,\ (\mathrm{Im}\, z)^2 > 6(\mathrm{Re}\, z + 3/2)\}$, $z_1 = -3/2$, $z_2 = -5/2$.
10. $D = \{(\mathrm{Re}\, z < 0,\ \mathrm{Im}\, z > 2) \cup (\mathrm{Re}\, z \geq 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0)\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$, $z_3 = a + 2i$, $a < 0$.
11. $D = \{|z - 3i| > 3,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 6i$.
12. $D = \{\mathrm{Im}\, z > 0,\ z \notin [0, 3i]\}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 3i$, $z_3 = 4i$.
13. $D = \{|z| > 4,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $z_1 = -4$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 4$.

14. $D=\{|z|<4\cup \operatorname{Im} z>0\}, \quad z_1=0, \quad z_2=-4i, \quad z_{3,4}=\pm 4.$

15. $D=\{\operatorname{Im} z>0,\ (\operatorname{Im} z)^2>8(\operatorname{Re} z+2)\}, \quad z_1=-2, \quad z_2=-3.$

16. $D=\{(\operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Im} z>0)\cup(\operatorname{Re} z\geq 0,\ \operatorname{Im} z>3)\}, \quad z_1=0,$
$z_2=3i, \quad z_3=a+3i,\ a>0.$

17. $D=\{|z-4i|>4,\ \operatorname{Im} z>0\}, \quad z_1=0, \quad z_2=8i.$

18. $D=\{\operatorname{Im} z>0,\ z\notin[0,4i]\}, \quad z_1=0, \quad z_2=4i, \quad z_3=6i.$

19. $D=\{|z|>5,\ \operatorname{Im} z>0\}, \quad z_1=-5, \quad z_2=5i, \quad z_3=5.$

20. $D=\{|z|<5\cup \operatorname{Im} z>0\}, \quad z_1=0, \quad z_2=-5i, \quad z_{3,4}=\pm 5.$

21. $D=\{\operatorname{Im} z>0,\ (\operatorname{Im} z)^2>10(\operatorname{Re} z+5/2)\}, \quad z_1=-5/2, \quad z_2=-7/2.$

22. $D=\{(\operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Im} z>3)\cup(\operatorname{Re} z\geq 0,\ \operatorname{Im} z>0)\}, \quad z_1=0,$
$z_2=3i, \quad z_3=a+3i,\ a<0.$

23. $D=\{|z-5i|>5,\ \operatorname{Im} z>0\}, \quad z_1=0, \quad z_2=10i.$

24. $D=\{\operatorname{Im} z>0,\ z\notin[0,5i]\}, \quad z_1=0, \quad z_2=5i, \quad z_3=7i.$

25. $D=\{|z|>6,\ \operatorname{Im} z>0\}, \quad z_1=-6, \quad z_2=6i, \quad z_3=6.$

26. $D=\{|z|<6\cup \operatorname{Im} z>0\}, \quad z_1=0, \quad z_2=-6i, \quad z_{3,4}=\pm 6.$

27. $D=\{\operatorname{Im} z>0,\ (\operatorname{Im} z)^2>12(\operatorname{Re} z+3)\}, \quad z_1=-3, \quad z_2=-4.$

28. $D=\{(\operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Im} z>0)\cup(\operatorname{Re} z\geq 0,\ \operatorname{Im} z>4)\}, \quad z_1=0,$
$z_2=4i, \quad z_3=a+4i,\ a>0.$

29. $D=\{|z-6i|>6,\ \operatorname{Im} z>0\}, \quad z_1=0, \quad z_2=12i.$

30. $D=\{\operatorname{Im} z>0,\ z\notin[0,6i]\}, \quad z_1=0, \quad z_2=6i, \quad z_3=8i.$

2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Определение. *Преобразованием Лапласа* [1, 4—6, 9] комплекснозначной функции $f(t)$ действительного аргумента $t \geq 0$ (или *изображением* функции $f(t)$) называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$:

$$L[f(t)] = F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{2.1}$$

Определение. *Функцией-оригиналом* называется функция $f(t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $f(t) = 0$ для всех $t < 0$;

б) $f(t)$ кусочно непрерывна, т.е. на любом конечном отрезке $[a, b]$ имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;

в) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные $M > 0$, $s > 0$, что

$$|f(t)| < Me^{st} \quad \text{при } t > 0.$$

Число $s_0 = \inf s$ называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Теорема. Если $f(t)$ — функция-оригинал, то интеграл Лапласа (2.1) сходится абсолютно в области $\operatorname{Re} p > s_0$, а в любом замкнутом подмножестве $\operatorname{Re} p = s \geq a > s_0$ сходится равномерно относительно p и определяет аналитическую функцию $F(p)$, которая стремится к нулю при $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$.

По известному изображению $F(p)$ оригинал $f(t)$ в точках непрерывности находится с помощью *обратного преобразования Лапласа*

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

где $\operatorname{Re} p = a > s_0$. В точках $t \neq 0$ разрыва первого рода функции $f(t)$ интеграл равен $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ и $\dfrac{f(+0)}{2}$ при $t = 0$.

Для обозначения соответствия изображения и оригинала будем использовать $F(p) = L[f(t)]$ и $f(t) = L^{-1}[F(p)]$.

Пример. Найти изображения:

1) единичной функции Хэвисайда $\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$

2) единичной функции Хэвисайда $\theta(t-\tau)=\begin{cases}1 & \text{при } t\ge\tau,\\ 0 & \text{при } t<\tau;\end{cases}$

3) прямоугольного импульса $\delta_h=\dfrac{1}{h}(\theta(t)-\theta(t-h))$;

4) синусоидального колебания $e^{\alpha t}\theta(t)$ с частотой $\omega=\operatorname{Im}\alpha$.

В дальнейшем для сокращения записи будем писать $f(t)$ вместо $f(t)\theta(t)$, считая, что $f(t)$ продолжена нулем для $t<0$.

Решение. 1) По определению преобразования Лапласа (2.1) имеем

$$L[\theta(t)]=\int\limits_0^\infty \theta(t)e^{-pt}dt=\int\limits_0^\infty e^{-pt}dt=\frac{e^{-pt}}{-p}\bigg|_0^\infty=\frac{1}{p}$$

при условии, когда $e^{-pt}\to 0$ при $t\to\infty$, т.е. если $\operatorname{Re}p>s_0=0$.

2) По определению (2.1) имеем

$$L[\theta(t-\tau)]=\int\limits_0^\infty \theta(t-\tau)e^{-pt}dt=\int\limits_\tau^\infty e^{-pt}dt=\frac{e^{-pt}}{p}\bigg|_\tau^\infty=\frac{e^{-\tau p}}{p}$$

при $\operatorname{Re}p>s_0=0$.

3) По определению (2.1) имеем

$$L[\delta_h(t)]=\frac{1}{h}\int\limits_0^\infty(\theta(t)-\theta(t-h))e^{-pt}dt=\frac{1}{h}\int\limits_0^h e^{-pt}dt=\frac{1-e^{-ph}}{ph}. \qquad (2.3)$$

4) По определению (2.1) имеем

$$L[e^{\alpha t}]=\int\limits_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt=\frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p}\bigg|_0^\infty=\frac{1}{p-\alpha}$$

при $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\alpha=s_0$.

Замечание. В технической литературе вводят понятие *δ-функции Дирака* как предел $\delta(t)=\theta'(t)=\lim\limits_{h\to 0}\delta_h(t)$. Переходя к пределу при $h\to 0$, в формуле (2.3) получим изображение

$$L[\delta(t)]=\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-ph}}{ph}=\lim_{h\to 0}\frac{pe^{-ph}}{p}=1.$$

В обычном смысле классического анализа $\delta(t)$ не является функцией, а является так называемой обобщенной функцией [4—6]. Необходимое условие для изображения $F(p)\to 0$ при $\operatorname{Re}p\to\infty$ для нее не выполняется.

Замечание. В механике и теории автоматического регулирования о поведении физической системы получают представление по отклику на возбуждения специального вида, легко осуществляемые технически. В качестве таких возбуждений используют функцию единичного скачка $\theta(t)$, мгновенного импульса $\delta(t)$ или синусоидальное колебание $e^{i\omega t}$.

Зная отклики системы на эти возбуждения, с помощью формул Бореля и Дюамеля можно определить отклик на любое возбуждение $f(t)$.

В прил. 1 (табл. П1.2) приведены изображения для основных элементарных функций.

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ формулу (2.2) обычно не применяют. Ниже будут изложены различные способы нахождения оригинала по известному изображению.

2.1. Нахождение изображений с помощью свойств преобразования Лапласа

Свойства преобразования Лапласа (прил. 1 (табл. П1.1)).

1°. *Линейность.* Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы с показателями роста s_1 и s_2 и $F(p) = L[f(t)]$, $G(p) = L[g(t)]$. Тогда для любых комплекснозначных констант α и β функция $\alpha f(t) + \beta g(t)$ также является оригиналом и справедливо равенство

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p) \tag{2.1.1}$$

при $\mathrm{Re} p > \max\{s_1, s_2\}$.

Справедливо и обратное утверждение: пусть $F(p)$ и $G(p)$ — изображения для $f(t)$ и $g(t)$ соответственно, тогда

$$L^{-1}[\alpha F(p) + \beta G(p)] = \alpha L^{-1}[F(p)] + \beta L^{-1}[G(p)] = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

Замечание. Важно то, что каждое слагаемое является оригиналом и изображением, например, $f(t) + g(t) = \left(\dfrac{\cos t - 1}{t^2}\right)\theta(t)$ является оригиналом, а $f(t) = \dfrac{\cos t}{t^2}\theta(t)$ и $g(t) = \dfrac{\theta(t)}{t^2}$ не являются.

Аналогично $F(p)+G(p)=\dfrac{1}{p-1}$ — изображение, а $F(p)=\dfrac{p^2}{p-1}$ и $G(p)=-(p+1)$ не являются изображениями, так как $F(p)\not\to 0$, $G(p)\not\to 0$ при $\operatorname{Re}p\to\infty$.

2°. *Теорема подобия.* Пусть $f(t)$ — оригинал с показателем роста s_0 и $F(p)=L[f(t)]$, тогда $\forall a>0$

$$\begin{aligned} &L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}p>as_0,\\ &L^{-1}[F(ap)]=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

3°. *Теорема смещения (затухания).* При любом комплексном p_0 из $L[f(t)]=F(p)$ следует

$$L[e^{p_0t}f(t)]=F(p-p_0) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(p-p_0)>s_0. \tag{2.1.3}$$

4°. *Теорема запаздывания.* При любом $\tau>0$ из $L[f(t)]=F(p)$ следует

$$L[\theta(t-\tau)f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}p>s_0. \tag{2.1.4}$$

5°. *Дифференцирование оригинала.* Предположим, что наивысшая встречающаяся в формулах производная $f^{(n)}(t)$ при $t>0$ существует, обладает изображением и $L[f(t)]=F(p)$, тогда

$$\begin{aligned} &L[f'(t)]=pF(p)-f(+0),\\ &L[f''(t)]=p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0),\\ &\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-\ldots-f^{(n-1)}(+0), \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

где $f^{(k)}(+0)=\lim\limits_{t\to+0}f^{(k)}(t)$, $k=\overline{0,n-1}$.

Замечание. В приведенных формулах важно предположение о существовании производной при $\forall t>0$. Контрпример: $f(t)=\theta(t-\tau)$, $\tau>0$. Очевидно, $\theta'(t-\tau)=0$ всюду $\forall t\neq\tau$. По определению (2.1) $L[\theta'(t-\tau)]=0$, по формуле (2.1.5) получим противоречие $0=p\dfrac{e^{-\tau p}}{p}-0$.

6°. *Дифференцирование изображения.* Если $L[f(t)] = F(p)$, то

$$\begin{aligned} &L[-tf(t)] = F'(p), \\ &L[t^2 f(t)] = F''(p), \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &L[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(p). \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

7°. *Теорема интегрирования для оригинала.* Если $L[f(t)] = F(p)$, то

$$L\left[\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(p)}{p} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > s_0. \tag{2.1.7}$$

8°. *Интегрирование изображение.* Если функция $f(t)/t$ является оригиналом и $L[f(t)] = F(p)$, то

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int\limits_p^\infty F(p)dp, \tag{2.1.8}$$

где $\operatorname{Re} p > s_0$ и путь интегрирования (p, ∞) представляет собой любой луч, исходящий из точки p и образующий острый угол с вещественной осью.

9°. *Теорема Бореля умножения изображений.* Пусть $L[f(t)] = F(p)$, $L[g(t)] = G(p)$, тогда

$$L[f(t) * g(t)] = F(p) \cdot G(p), \tag{2.1.9}$$

где функция $f(t) * g(t)$ называется *сверткой* оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ и определяется формулой

$$f(t) * g(t) = \int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{2.1.10}$$

10°. *Интеграл Дюамеля.* Следствием теоремы Бореля и свойства 5° дифференцирования оригинала является интеграл Дюамеля

$$pF(p)G(p) = L[(f(t) * g(t))'];$$

$$\frac{d}{dt}(f(t) * g(t)) = f(0)g(t) + \int\limits_0^t f'(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

На основании свойства симметрии свертки можно также записать

$$\frac{d}{dt}(f(t) * g(t)) = g(0)f(t) + \int\limits_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем интеграл Дюамеля

$$L^{-1}[pF(p)G(p)] =$$
$$= f(0)g(t) + \int_0^t f'(t-\tau)g(\tau)d\tau = g(0)f(t) + \int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{2.1.11}$$

Пример 2.1.1. Пусть $f(t) = t^3$, $g(t) = e^t - 1$. С помощью свойств преобразования Лапласа 1°—10° найти изображения:

1) $L[f(at) + g(bt)]$; 2) $L[e^{p_0 t}g(bt)]$; 3) $L[t^2 f(at) + tg(bt)]$;

4) $L[\theta(t-\tau)f(a(t-\tau))]$; 5) $L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]$; 6) $L\left[\frac{g(t)}{t}\right]$;

7) $L[(f+g)*g]$.

Решение. Из прил. 1 (табл. П1.2) находим преобразования Лапласа:

$$L[f(t)] = L[t^3] = F(p) = \frac{3!}{p^4}; \qquad L[g(t)] = L[e^t - 1] = G(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

1) По свойству линейности (2.1.1) и теореме подобия (2.1.2) находим

$$L[f(at) + g(bt)] = L[f(at)] + L[g(bt)] = \frac{1}{a}F(p/a) + \frac{1}{b}G(p/b) =$$
$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{3!a^4}{p^4} + \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p} = \frac{6a^3}{p^4} + \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p}.$$

2) По теореме смещения (2.1.3) находим

$$L[e^{p_0 t}g(bt)] = \frac{1}{p-p_0-b} - \frac{1}{p-p_0}.$$

3) По свойствам линейности и дифференцирования изображения (2.1.1), (2.1.6)

$$L[t^2 f(at) + tg(bt)] = \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{6a^3}{p^4}\right) - \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p}\right) =$$
$$= \frac{120a^3}{p^6} + \frac{1}{(p-b)^2} - \frac{1}{p^2}.$$

4) По теореме запаздывания (2.1.4)

$$L[\theta(t-\tau)f(a(t-\tau))] = e^{-p\tau}\frac{6a^3}{p^4}.$$

5) По теореме интегрирования оригинала (2.1.7)

$$L\left[\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{3!}{p^5} = \frac{6}{p^5}.$$

6) По теореме интегрирования изображения (2.1.8)

$$L\left[\frac{g(t)}{t}\right] = \int\limits_p^\infty \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) dp = \ln\left(\frac{p-1}{p}\right)\Big|_p^\infty = \ln\frac{p}{p-1}.$$

7) По свойству линейности (2.1.1) и по теореме Бореля (2.1.9) получим

$$L[(f+g)*g] = L[f*g+g*g] = L[f*g]+L[g*g] = F(p)G(p)+G(p)G(p) =$$

$$= \frac{6}{p^4}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{6}{p^5(p-1)} + \frac{1}{(p-1)^2p^2} = \frac{p^3+6p-6}{p^5(p-1)^2}.$$

Ответ. 1) $\dfrac{6a^3}{p^4} + \dfrac{1}{p-b} - \dfrac{1}{p}$; 2) $\dfrac{1}{p-p_0-b} - \dfrac{1}{p-p_0}$;

3) $\dfrac{120a^3}{p^6} + \dfrac{1}{(p-b)^2} - \dfrac{1}{p^2}$; 4) $e^{-p\tau}\dfrac{6a^3}{p^4}$; 5) $\dfrac{6}{p^5}$;

6) $\ln\dfrac{p}{p-1}$; 7) $\dfrac{p^3+6p-6}{p^5(p-1)^2}$.

Задача 2.1.1. С помощью свойств преобразования Лапласа 1°—10° найти изображения:

1) $L[f(at)+g(bt)]$; 2) $L[e^{p_0t}g(bt)]$; 3) $L[t^2f(at)+t\,g(bt)]$;

4) $L[\theta(t-\tau)f(a(t-\tau))]$; 5) $L\left[\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right]$; 6) $L\left[\dfrac{g(t)}{t}\right]$;

7) $L[(f+g)*g]$.

1. $f(t)=t^2,\ g(t)=\sin t$. 2. $f(t)=e^t,\ g(t)=\cos t-1$.

3. $f(t)=\sin t,\ g(t)=\operatorname{sh} t$. 4. $f(t)=\cos t,\ g(t)=\operatorname{ch} t-1$.

5. $f(t)=\operatorname{sh} t,\ g(t)=e^t-1$. 6. $f(t)=\operatorname{ch} t,\ g(t)=\sin t$.

7. $f(t)=t^2,\ g(t)=\cos t-1$. 8. $f(t)=e^t,\ g(t)=\operatorname{sh} t$.

9. $f(t)=\sin t,\ g(t)=\operatorname{ch} t-1$. 10. $f(t)=\cos t,\ g(t)=e^t-1$.

11. $f(t) = \operatorname{sh} t,\ g(t) = \sin t.$

12. $f(t) = \operatorname{ch} t,\ g(t) = \cos t - 1.$

13. $f(t) = t^2,\ g(t) = \operatorname{sh} t.$

14. $f(t) = e^t,\ g(t) = \operatorname{ch} t - 1.$

15. $f(t) = \sin t,\ g(t) = e^t - 1.$

16. $f(t) = \cos t,\ g(t) = \sin t.$

17. $f(t) = \operatorname{sh} t,\ g(t) = \cos t - 1.$

18. $f(t) = \operatorname{ch} t,\ g(t) = \operatorname{sh} t.$

19. $f(t) = t^2,\ g(t) = \operatorname{ch} t - 1.$

20. $f(t) = e^t,\ g(t) = e^t - 1.$

21. $f(t) = \sin t,\ g(t) = \sin t.$

22. $f(t) = \cos t,\ g(t) = \cos t - 1.$

23. $f(t) = \operatorname{sh} t,\ g(t) = \operatorname{sh} t.$

24. $f(t) = \operatorname{ch} t,\ g(t) = \operatorname{ch} t - 1.$

25. $f(t) = t^2,\ g(t) = e^t - 1.$

26. $f(t) = e^t,\ g(t) = \sin t.$

27. $f(t) = \sin t,\ g(t) = \cos t - 1.$

28. $f(t) = \cos t,\ g(t) = \operatorname{sh} t.$

29. $f(t) = \operatorname{sh} t,\ g(t) = \operatorname{ch} t - 1.$

30. $f(t) = \operatorname{ch} t,\ g(t) = e^t - 1.$

Пример 2.1.2. Найти изображение функций:

1) $f(t) = t \operatorname{sh} t \sin t$; 2) $f(t) = \dfrac{\sin 3t \sin 5t}{t}$.

Решение. 1) Рассмотрим $g(t) = \operatorname{sh} t \sin t = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \sin t$. Из прил. 1 (табл. П1.2) имеем $L[\sin t] = \dfrac{1}{p^2+1}$. По свойству линейности (2.1.1) и теореме смещения (2.1.3) имеем

$$L[g(t)] = G(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-1)^2+1} - \frac{1}{(p+1)^2+1}\right] = \frac{2p}{p^4+4}.$$

По теореме дифференцирования изображения (2.1.6) находим

$$L[f(t)] = L[t\, g(t)] = -\frac{d}{dp}G(p) = -\left(\frac{2p}{p^4+4}\right)' = \frac{2(3p^4-4)}{(p^4+4)^2}.$$

2) Функция $f(t)$ имеет устранимую особую точку $t = 0$, так как существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+0} f(t) = 0$. Следовательно, $f(t)$ — функция-оригинал. Рассмотрим $g(t) = \sin 3t \sin 5t = \dfrac{1}{2}(\cos 2t - \cos 8t)$. Используя табличное изображение $L[\cos \omega t] = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ (см. прил. 1 (табл. П1.2)) и свойство линейности (2.1.1), получим

$$L[g(t)] = G(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+64}\right).$$

По теореме интегрирования изображения (2.1.8)

$$L[f(t)] = L\left[\frac{g(t)}{t}\right] = \int\limits_p^\infty G(p)dp = \frac{1}{2}\int\limits_p^\infty \left(\frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+64}\right) dp = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+64}{p^2+4}.$$

Ответ. 1) $\dfrac{2(3p^4-4)}{(p^4+4)^2}$; 2) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+64}{p^2+4}$.

Задача 2.1.2. Найти изображение функций.

1. $f(t) = t\,\mathrm{ch}\,t\cos 2t$.
2. $f(t) = e^{2t}\cos^2 t$.
3. $f(t) = t^2e^{2t}$.
4. $f(t) = (e^{2t} - e^t)/t$.
5. $f(t) = t^2\,\mathrm{ch}\,2t$.
6. $f(t) = e^{3t}\sin^2 t$.
7. $f(t) = (\sin^2 t)/t$.
8. $f(t) = t^2\,\mathrm{sh}\,2t$.
9. $f(t) = t\,\mathrm{sh}\,2t\sin 2t$.
10. $f(t) = (e^{-t}\sin t)/t$.
11. $f(t) = e^{-2t}\sin 3t\cos 2t$.
12. $f(t) = t\,\mathrm{ch}\,t\cos t$.
13. $f(t) = (\cos 2t - \cos t)/t$.
14. $f(t) = \mathrm{sh}\,t\cos 2t\cos 3t$.
15. $f(t) = te^{2t}\sin t$.
16. $f(t) = (\mathrm{sh}^2\,t)/t$.
17. $f(t) = t^2e^{3t}$.
18. $f(t) = te^{2t}\cos t$.
19. $f(t) = (1 - \mathrm{ch}\,2t)/t$.
20. $f(t) = t\,\mathrm{sh}\,2t\sin t$.
21. $f(t) = t\sin^3 t$.
22. $f(t) = (\cos 3t - \cos t)/t$.
23. $f(t) = e^t\cos^2 2t$.
24. $f(t) = t\cos^3 t$.
25. $f(t) = (\sin 7t\sin 3t)/t$.
26. $f(t) = t^2e^{-t}$.
27. $f(t) = t^2\,\mathrm{sh}\,t$.
28. $f(t) = (e^t\sin^2 t)/t$.
29. $f(t) = t\,\mathrm{ch}\,2t\cos t$.
30. $f(t) = te^{2t}\sin^2 t$.

2.2. Изображения кусочно-непрерывных и периодических оригиналов

С помощью теоремы запаздывания и функции Хевисайда можно находить изображения функций, которые заданы разными аналитическими выражениями на разных участках. Если функция задана как составная в виде

$$f(t) = \begin{cases} f_i(t), & \tau_{i-1} < t < \tau_i, \ i = \overline{1,n}; \\ f_{n+1}(t) & t > \tau_n, \end{cases}$$

то при помощи функций Хевисайда ее можно представить в виде суммы

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)[\theta(t-\tau_{k-1}) - \theta(t-\tau_k)] + f_{n+1}(t)\theta(t-\tau_n),$$

поскольку

$$\theta(t-\tau_{k-1}) - \theta(t-\tau_k) = \left[\begin{array}{ll} 0, & t < \tau_{k-1}, \\ 1, & \tau_{k-1} < t < \tau_k, \\ 0, & t > \tau_k \end{array} \right.$$

и каждая функция "включается" только на соответствующем участке.

Такое представление упрощает переход к изображениям. Чтобы воспользоваться теоремой запаздывания, нужно каждое из слагаемых привести к виду $g(t-\tau)\theta(t-\tau) = L^{-1}[e^{-p\tau}G(p)]$.

Пример 2.2.1. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, где:

1) $f(t) = \left[\begin{array}{ll} t, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 3-t, & 2 < t < 3, \\ 0, & t > 3; \end{array} \right.$ 2) $f(t) = \left[\begin{array}{ll} t^2, & 0 < t < 1, \\ 2-t, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2; \end{array} \right.$

3) $f(t) = \left[\begin{array}{ll} \sin t, & 0 < t < \pi/3, \\ 0, & t > \pi/3; \end{array} \right.$ 4) $f(t) = |\sin t|$.

Решение. 1) Запишем функцию-оригинал $f(t)$ одним аналитическим выражением

$$f(t) = t[\theta(t) - \theta(t-1)] + 1[\theta(t-1) - \theta(t-2)] + (3-t)[\theta(t-2) - \theta(t-3)] =$$

$$= t\theta(t) - (t-1)\theta(t-1) - (t-2)\theta(t-2) + (t-3)\theta(t-3).$$

Из прил. 1 (табл. П1.2) находим $L[t] = \dfrac{1}{p^2}$, тогда по теореме запаздывания (2.1.4) $L[(t-\tau)\theta(t-\tau)] = \dfrac{e^{-p\tau}}{p^2}$. Искомое изображение имеет вид

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2}.$$

Можно было бы найти изображение, исходя из определения преобразования Лапласа (2.1):

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^1 te^{-pt}dt + \int\limits_1^2 1\cdot e^{-pt}dt + \int\limits_2^3 (3-t)e^{-pt}dt =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(te^{-pt} + \frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{p}e^{-pt}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{p}\left((3-t)e^{-pt} - \frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}(e^{-2p} - e^{-p}) - \frac{1}{p}\left(-e^{-2p} - \frac{1}{p}(e^{-3p} - e^{-2p})\right) =$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2}.$$

2) Запишем функцию-оригинал $f(t)$ в виде

$$f(t) = t^2[\theta(t) - \theta(t-1)] + (2-t)[\theta(t-1) - \theta(t-2)] =$$

$$= t^2\theta(t) + (-t^2 - t + 2)\theta(t-1) - (t-2)\theta(t-2).$$

Чтобы воспользоваться теоремой запаздывания оригинала (2.1.4), представим

$$-t^2 - t + 2 = -[(t-1)+1]^2 - (t-1) + 1 = -(t-1)^2 - 3(t-1).$$

Итак:

$$f(t) = t^2\theta(t) - (t-1)^2\theta(t-1) - 3(t-1)\theta(t-1) - (t-2)\theta(t-2).$$

Переходя к изображениям, получим

$$F(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{2e^{-p}}{p^3} - \frac{3e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

Можно найти изображение, исходя из определения преобразования Лапласа (2.1):

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^1 t^2e^{-pt}dt + \int\limits_1^2 (2-t)e^{-pt}dt =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(t^2e^{-pt} + \frac{2}{p}te^{-pt} + \frac{2}{p^2}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{p}\left((2-t)e^{-pt} - \frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{p^3} - \frac{2e^{-p}}{p^3} - \frac{3e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

3) Запишем функцию-оригинал $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sin t[\theta(t) - \theta(t - \pi/3)] = \sin(t)\theta(t) - \sin(t)\theta(t - \pi/3).$$

Представим $\sin t$ как функцию аргумента $t - \pi/3$:

$$\sin t = \sin\Big((t - \pi/3) + \pi/3\Big) = \frac{1}{2}\sin(t - \pi/3) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t - \pi/3).$$

Итак:

$$f(t) = \sin t\theta(t) - \frac{1}{2}\sin(t - \pi/3)\theta(t - \pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t - \pi/3)\theta(t - \pi/3).$$

Тогда по теореме запаздывания (2.1.4) имеем

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{2}\frac{e^{-p\pi/3}}{p^2 + 1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-p\pi/3}p}{p^2 + 1}.$$

Можно найти изображение, исходя из определения преобразования Лапласа (2.1):

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{\pi/3} \sin te^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p^2 + 1}(\cos t + p\sin t)\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{1}{2(p^2 + 1)}(2 - e^{-p\pi/3} - \sqrt{3}pe^{-p\pi/3}).$$

4) Если $f(t)$ — периодическая функция-оригинал при $t > 0$ с периодом $T > 0$, т.е. $f(t+T) = f(t)$, $\forall t > 0$, то ее изображение $F(p) = \dfrac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}$, где $F_0(p) = \int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt$.

Действительно, поскольку

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-pt}dt = \Big[\ t = \tau + kT\ \Big] = \int\limits_0^T f(\tau + kT)e^{-p(\tau + kT)}d\tau =$$

$$= e^{-pkT}\int\limits_0^T f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = e^{-pkT}F_0(p),$$

то

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-pt}dt = F_0(p)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}},$$

где ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} = 1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \ldots = \dfrac{1}{1 - e^{-pT}}$, так как $|e^{-pT}| = e^{-sT} < 1$ при $\operatorname{Re} p = s > 0$.

Поскольку $f(t+\pi) = |\sin(t+\pi)| = |\sin t| = f(t)$, то $f(t)$ — периодическая функция с периодом $T = \pi$. Рассмотрим

$$f_0(t) = \left[\begin{array}{ll} \sin t, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{array}\right.$$

Найдем $F_0(p)$ — изображение $f_0(t)$. Представим

$$f_0(t) = \sin t[\theta(t) - \theta(t-\pi)] = \sin t\theta(t) - \sin t\theta(t-\pi) =$$

$$= \sin t\theta(t) + \sin(t-\pi)\theta(t-\pi).$$

Тогда по теореме запаздывания оригинала (2.1.4)

$$F_0(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{e^{-\pi p}}{p^2+1} = \frac{1 + e^{-\pi p}}{p^2+1}.$$

Следовательно, $F(p) = \dfrac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}} = \dfrac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1 - e^{-\pi p})}$.

Ответ.

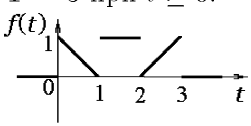
1) $\dfrac{1}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p})$; 2) $\dfrac{1}{p^2}\left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{2e^{-p}}{p} - 3e^{-p} - e^{-2p}\right)$;

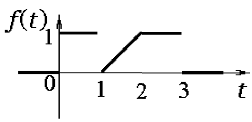
3) $\dfrac{1}{2(p^2+1)}(2 - e^{-p\pi/3} - \sqrt{3}pe^{-p\pi/3})$; 4) $\dfrac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1 - e^{-\pi p})}$.

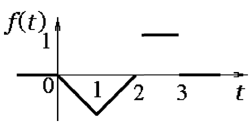
Задача 2.2.1. Найти изображение:

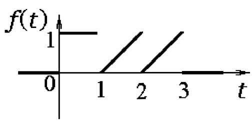
1) функции $f(t)$, заданной графиком;

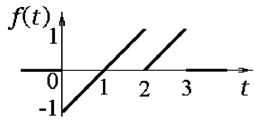
2) функции, являющейся периодическим продолжением $f(t)$ с периодом $T = 3$ при $t \geq 0$.

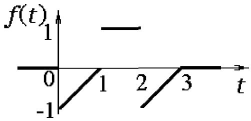
1.


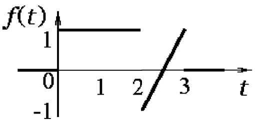
2.


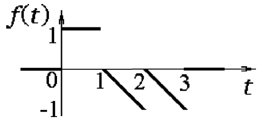
3.


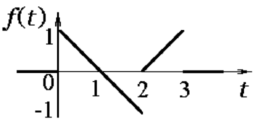
4.


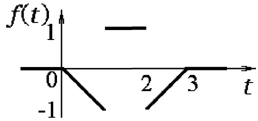
5. 

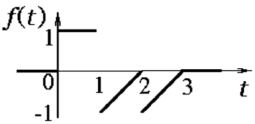
6. 

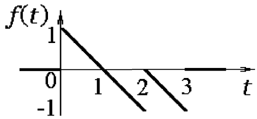
7. 

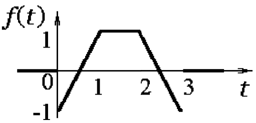
8. 

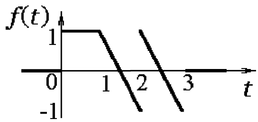
9. 

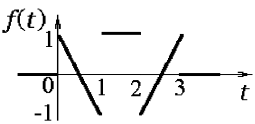
10. 

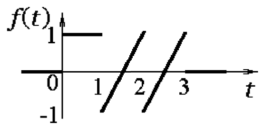
11. 

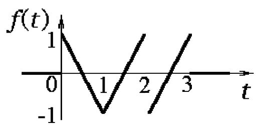
12. 

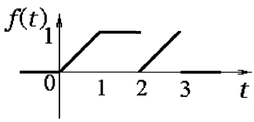
13. 

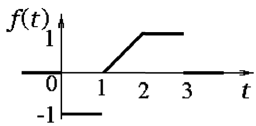
14. 

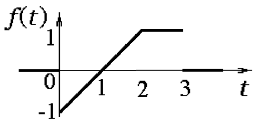
15. 

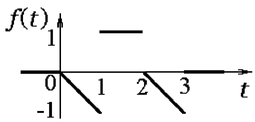
16. 

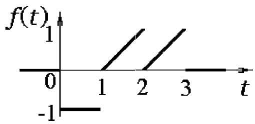
17. 

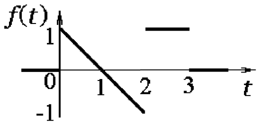
18. 

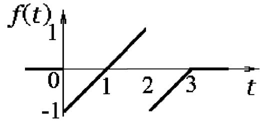
19. 

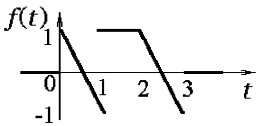
20. 

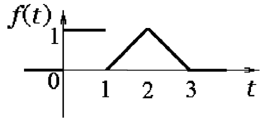
21. 

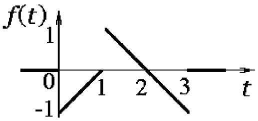
22. 

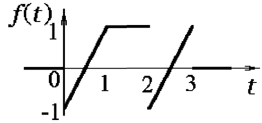
23. 

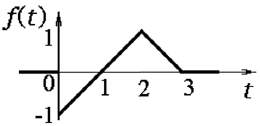
24. 

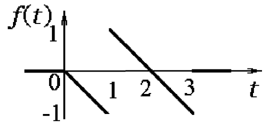
25. 

26. 

27. 

28. 

29. 

30. 

2.3. Отыскание оригинала по известному изображению

Для отыскания оригинала по известному изображению в операционном исчислении используются:

1) таблица соответствий оригиналов и изображений (см. прил. 1 (табл. П1.2));

2) так называемые *теоремы разложения*;

3) теорема Бореля для произведения изображений (2.1.9) (если это возможно).

Сформулируем теоремы разложения.

Первая теорема разложения. Если комплекснозначная функция $F(p)$ разлагается в окрестности бесконечно удаленной точки $|p| > s_0$ в ряд Лорана

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}},$$

то оригиналом $f(t) = L^{-1}[F(p)]$ служит функция

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!}, \tag{2.3.1}$$

умноженная на $\theta(t)$, причем степенной ряд сходится $\forall t$ и $|f(t)| < Ms_0 e^{s_0 t}$.

Вторая теорема разложения. Пусть комплекснозначная функция $F(p)$:

а) аналитична при $\mathrm{Re}\, p > s_0$;

б) имеет счетное множество изолированных особых точек p_k, $k = \overline{1,\infty}$ в комплексной плоскости;

в) $F(p) \to 0$ при $R \to \infty \quad \forall p \in \{|p| = R\}$;

г) $F(p)$ — абсолютно интегрируема вдоль любой прямой $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$, т.е.

$$\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)|\,|dp| < +\infty.$$

Тогда оригинал $f(t) = L^{-1}[F(p)]$ может быть найден по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{p_k}\{e^{pt}F(p)\}. \tag{2.3.2}$$

Третья теорема разложения. Если комплекснозначная функция $F(p)$ является правильной рациональной функцией, т.е.

$$F(p) = \frac{P_n(p)}{Q_l(p)},$$

где $P_n(p)$, $Q_l(p)$ — многочлены степеней $n < l$, и корни многочлена $Q_l(p)$ известны: p_k, $k = \overline{1,r}$ кратностей μ_k $(\sum\limits_{k=1}^{r} \mu_k = l)$, тогда $F(p)$ можно разложить на элементарные дроби:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{\mu_k} \frac{A_{km}}{(p-p_k)^{\mu_k - m+1}},$$

где коэффициенты разложения можно найти по формулам

$$A_{km} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p\to p_k} \left[\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \Big((p-p_k)^{\mu_m} F(p) \Big) \right].$$

Тогда оригинал $f(t) = L^{-1}[F(p)]$ может быть найден по свойству линейности (2.1.1) и с учетом

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-p_k)^{\mu_k - m+1}} \right] = \frac{1}{(\mu_k - m)!} t^{\mu_k - m} e^{p_k t}$$

в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{\mu_k} \frac{A_{km}}{(\mu_k - m)!} t^{\mu_k - m} e^{p_k t}. \tag{2.3.3}$$

Пример 2.3.1. Пусть $F(p) = \dfrac{2}{p^2+4}$, $G(p) = \dfrac{p}{p^2-1}$. Найти оригинал для $F(p)G(p)$:

1) с помощью теоремы Бореля (2.1.9) для произведения изображений;

2) с помощью второй теоремы разложения (2.3.2);

3) с помощью третьей теоремы разложения (2.3.3);

4) с помощью свойства дифференцирования оригинала (2.1.5) и найти оригиналы для $pF(p)G(p)$ и $p^2F(p)G(p)$;

5) с помощью свойства интегрирования оригинала (2.1.7) и найти оригинал для $\dfrac{1}{p}F(p)G(p)$ и $\dfrac{1}{p^2}F(p)G(p)$.

Решение. 1) Из прил. 1 (табл. П1.2) находим

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sin 2t, \qquad g(t) = L^{-1}[G(p)] = \operatorname{ch} t.$$

По теореме Бореля (2.1.9)

$$L^{-1}[F(p)G(p)] = \int\limits_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t \operatorname{ch}\tau \sin 2(t-\tau)d\tau = I(t).$$

Вычислим интеграл два раза по частям:

$$I(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch}\tau\sin 2(t-\tau)d\tau = \operatorname{sh}\tau\sin 2(t-\tau)\Big|_0^t + 2\int\limits_0^t \operatorname{sh}\tau\cos 2(t-\tau)d\tau =$$

$$= 2\Big[\operatorname{ch}\tau\cos 2(t-\tau)\Big|_0^t - 2\int\limits_0^t \operatorname{ch}\tau\sin 2(t-\tau)d\tau\Big] = 2[\operatorname{ch} t - \cos 2t] - 4I(t).$$

Отсюда $I(t) = \dfrac{2}{5}(\operatorname{ch} t - \cos 2t) = L^{-1}[F(p)G(p)]$.

2) Функция $F(p)G(p) = \dfrac{2p}{(p^2+4)(p^2-1)}$ имеет четыре особые точки $p_{1,2} = \pm 2i$, $p_{3,4} = \pm 1$ — полюсы первого порядка. Найдем вычеты:

$$\operatorname*{res}_{2i}\left(e^{pt}\frac{2p}{(p^2+4)(p^2-1)}\right) = \lim_{p\to 2i}\left(e^{pt}\frac{2p(p-2i)}{(p-2i)(p+2i)(p^2-1)}\right) = -\frac{1}{5}e^{2ti},$$

$$\operatorname*{res}_{-2i}\left(e^{pt}\frac{2p}{(p^2+4)(p^2-1)}\right) = \lim_{p\to -2i}\left(e^{pt}\frac{2p(p+2i)}{(p+2i)(p-2i)(p^2-1)}\right) = -\frac{1}{5}e^{-2ti},$$

$$\operatorname*{res}_{1}\left(e^{pt}\frac{2p}{(p^2+4)(p^2-1)}\right) = \lim_{p\to 1}\left(e^{pt}\frac{2p(p-1)}{(p-1)(p+1)(p^2+4)}\right) = \frac{1}{5}e^{t},$$

$$\operatorname*{res}_{-1}\left(e^{pt}\frac{2p}{(p^2+4)(p^2-1)}\right)=\lim_{p\to-1}\left(e^{pt}\frac{2p(p+1)}{(p+1)(p-1)(p^2+4)}\right)=\frac{1}{5}e^{-t}.$$

По формуле (2.3.2) находим искомый оригинал:

$$L^{-1}[F(p)G(p)]=\frac{2}{5}\,\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}-\frac{2}{5}\,\frac{e^{2ti}+e^{-2ti}}{2}=\frac{2}{5}(\operatorname{ch}t-\cos 2t).$$

3) Разложим функцию $F(p)G(p)$ на элементарные дроби:

$$F(p)G(p)=\frac{2p}{(p^2+4)(p^2-1)}=\frac{Ap+B}{p^2+4}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{p+1}=$$

$$=\frac{(A+C+D)p^3+(B+C-D)p^2+(-A+4C+4D)p+(-B+4C-4D)}{(p^2+4)(p^2-1)}.$$

Для определения A, B, C, D получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A+C+D=0\\ B+C-D=0\\ -A+4C+4D=2\\ -B+4C-4D=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad A=-\frac{2}{5},\ B=0,\ C=\frac{1}{5},\ D=\frac{1}{5}.$$

Следовательно:

$$F(p)G(p)=-\frac{2}{5}\,\frac{p}{p^2+4}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right).$$

Из прил. 1 (табл. П1.2) находим для каждой дроби соответствующий оригинал:

$$L^{-1}[F(p)G(p)]=-\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{1}{5}(e^{t}+e^{-t})=\frac{2}{5}(\operatorname{ch}t-\cos 2t).$$

4) По свойству дифференцирования оригинала (2.1.5) находим

$$L^{-1}[pF(p)G(p)]=\frac{d}{dt}I(t)=\frac{2}{5}(\operatorname{sh}t+2\sin 2t),$$

$$L^{-1}[p^2F(p)G(p)]=\frac{d^2}{dt^2}I(t)=\frac{2}{5}(\operatorname{ch}t+4\cos 2t).$$

5) По свойству интегрирования оригинала (2.1.7) находим

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p}F(p)G(p)\right]=\int\limits_0^t I(\tau)d\tau=\frac{2}{5}\int\limits_0^t(\operatorname{ch}\tau-\cos 2\tau)d\tau=\frac{2}{5}\left(\operatorname{sh}t-\frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}F(p)G(p)\right]=\frac{2}{5}\int\limits_0^t\left(\operatorname{sh}\tau-\frac{1}{2}\sin 2\tau\right)d\tau=\frac{2}{5}\left(\operatorname{ch}t+\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{5}{4}\right).$$

Ответ.

1) $\dfrac{2(\operatorname{ch}t-\cos 2t)}{5}$; 2) $\dfrac{2(\operatorname{ch}t-\cos 2t)}{5}$; 3) $\dfrac{2(\operatorname{ch}t-\cos 2t)}{5}$;

4) $\dfrac{2(\operatorname{sh}t+2\sin 2t)}{5}$, $\dfrac{2(\operatorname{ch}t+4\cos 2t)}{5}$;

5) $\dfrac{2\operatorname{sh}t-\sin 2t}{5}$, $\dfrac{4\operatorname{ch}t+\cos 2t-5}{10}$.

Задача 2.3.1. Найти оригинал для $F(p)G(p)$:

1) с помощью теоремы Бореля (2.1.9);

2) с помощью второй теоремы разложения (2.3.2);

3) с помощью третьей теоремы разложения (2.3.3);

4) с помощью свойства дифференцирования оригинала (2.1.5) и найти оригиналы для $pF(p)G(p)$ и $p^2F(p)G(p)$;

5) с помощью свойства интегрирования оригинала (2.1.7) и найти оригиналы для $\dfrac{1}{p}F(p)G(p)$ и $\dfrac{1}{p^2}F(p)G(p)$.

1. $F(p)=\dfrac{1}{p-1}$, $G(p)=\dfrac{1}{p+2}$.

2. $F(p)=\dfrac{1}{p+1}$, $G(p)=\dfrac{2}{p^2+4}$.

3. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$, $G(p)=\dfrac{2}{p^2+4}$.

4. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$, $G(p)=\dfrac{p}{p^2+4}$.

5. $F(p)=\dfrac{1}{p-1}$, $G(p)=\dfrac{p}{p^2+4}$.

6. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$, $G(p)=\dfrac{p}{p^2+4}$.

7. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$, $G(p)=\dfrac{2}{p^2-4}$.

8. $F(p)=\dfrac{1}{p-1}$, $G(p)=\dfrac{2}{p^2-4}$.

9. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}, \qquad G(p)=\dfrac{2}{p^2-4}.$

10. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-4}.$

11. $F(p)=\dfrac{1}{p-1}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-4}.$

12. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-4}.$

13. $F(p)=\dfrac{1}{p^2-1}, \qquad G(p)=\dfrac{2}{p^2-4}.$

14. $F(p)=\dfrac{1}{p^2-1}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-4}.$

15. $F(p)=\dfrac{p}{p^2-1}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-4}.$

16. $F(p)=\dfrac{1}{p+1}, \qquad G(p)=\dfrac{1}{p-2}.$

17. $F(p)=\dfrac{1}{p-2}, \qquad G(p)=\dfrac{1}{p^2-1}.$

18. $F(p)=\dfrac{3}{p^2+9}, \qquad G(p)=\dfrac{1}{p^2+1}.$

19. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+9}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2+1}.$

20. $F(p)=\dfrac{1}{p-2}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2+1}.$

21. $F(p)=\dfrac{3}{p^2+9}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2+1}.$

22. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+9}, \qquad G(p)=\dfrac{1}{p^2-1}.$

23. $F(p)=\dfrac{1}{p-2}, \qquad G(p)=\dfrac{1}{p^2-1}.$

24. $F(p)=\dfrac{3}{p^2+9}, \qquad G(p)=\dfrac{1}{p^2-1}.$

25. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+9}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-1}.$

26. $F(p)=\dfrac{1}{p-2}, \qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-1}.$

27. $F(p)=\dfrac{3}{p^2+9}$, $\qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-1}$.

28. $F(p)=\dfrac{3}{p^2-9}$, $\qquad G(p)=\dfrac{1}{p^2-1}$.

29. $F(p)=\dfrac{3}{p^2-9}$, $\qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-1}$.

30. $F(p)=\dfrac{p}{p^2-9}$, $\qquad G(p)=\dfrac{p}{p^2-1}$.

Пример 2.3.2. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)$:

1) $F(p)=\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$; $\qquad$ 2) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$;

3) $F(p)=\dfrac{p^2e^{-2p}}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

Решение. 1) Воспользуемся третьей теоремой разложения (2.3.3). Разложим $F(p)$ на сумму простейших дробей:

$$F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+5}.$$

Находя коэффициенты A, B, C по стандартной схеме, получим

$$F(p)=\frac{1}{p-1}+\frac{-p+2}{p^2+2p+5}.$$

Преобразуем вторую дробь, чтобы воспользоваться теоремой смещения (2.1.3):

$$\frac{-p+2}{p^2+2p+5}=\frac{-(p+1)+3}{(p+1)^2+2^2}=-\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{3}{2}\,\frac{2}{(p+1)^2+2^2}.$$

Окончательно

$$F(p)=\frac{1}{p-1}-\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{3}{2}\,\frac{2}{(p+1)^2+2^2}.$$

Оригиналы для каждого из слагаемых легко находятся из прил. 1 (табл. П1.2). По свойству линейности (2.1.1) имеем

$$f(t)=e^t-e^{-t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

2) Продемонстрируем на примере $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$ применение различных способов нахождения оригинала.

1 *способ.* Воспользуемся теоремой умножения изображений Бореля (2.1.9) и тем, что $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+1}\right] = \sin t$. Имеем

$$L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+1)}\,\frac{1}{(p^2+1)}\right] = \int\limits_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t [\cos(2\tau - t) - \cos t]d\tau = \frac{1}{4}\sin(2\tau - t)\Big|_0^t - \frac{1}{2}\cos t\cdot\tau\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

2 *способ.* Воспользуемся первой теоремой разложения. Разложим $F(p)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^4(1+1/p^2)^2} = \frac{1}{p^4}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{1}{p^4}\left[1 + \frac{(-2)}{p^2} + \frac{(-2)(-3)}{2!p^4} + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!p^6} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{p^4}\left(1 - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p^4} - \frac{4}{p^6} + \ldots\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)}{p^{2k+4}}, \qquad (|p|>1).$$

Тогда по первой теореме разложения (2.3.1) имеем

$$L^{-1}[F(p)] = f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)t^{2k+3}}{(2k+3)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2)t^{2k+3}}{(2k+3)!} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+2}}{(2k+2)!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+3}}{(2k+3)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - \ldots\right) - \left(\frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} - \ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[t(1-\cos t) - (t - \sin t)] = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

3 *способ.* Воспользуемся второй теоремой разложения (2.3.2):

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p_k}(F(p)e^{p}),$$

где p_k — особые точки функции $F(p)$.

Функция $F(p)e^{pt} = \dfrac{e^{pt}}{(p^2+1)^2}$ имеет две особые точки $p_1 = i$, $p_2 = -i$ — полюса 2-го порядка. Подсчитаем:

$$\operatorname*{res}_{i} F(p)e^{pt} = \lim_{p\to i} \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}(p-i)^2}{(p+i)^2(p-i)^2}\right] = \frac{1}{4}te^{it} + \frac{1}{4}\frac{e^{it}}{i},$$

$$\operatorname*{res}_{-i} F(p)e^{pt} = \lim_{p\to -i} \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}(p+i)^2}{(p-i)^2(p+i)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{-it} - \frac{1}{4}\frac{e^{-it}}{i}.$$

Тогда

$$f(t) = -\frac{1}{2}t\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

4 *способ.* Воспользуемся третьей теоремой разложения (2.3.3). Разложим на сумму простейших дробей (допуская, что корни знаменателя и коэффициенты могут быть комплексные):

$$F(p) = \frac{1}{(p-i)^2(p+i)^2} = \frac{A}{p-i} + \frac{B}{(p-i)^2} + \frac{C}{p+i} + \frac{D}{(p+i)^2}.$$

Находя коэффициенты A, B, C, D, получим

$$F(p) = -\frac{i}{4}\frac{1}{p-i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(p-i)^2} + \frac{i}{4}\frac{1}{p+i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(p+i)^2}.$$

Используя свойство линейности (2.1.1), находим

$$L^{-1}[F(p)] = f(t) = -\frac{i}{4}e^{it} - \frac{1}{4}te^{it} + \frac{i}{4}e^{-it} - \frac{1}{4}te^{-it} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} - \frac{1}{2}t\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

5 *способ.* По теореме о дифференцировании изображения (2.1.6)

$$L[t\sin t] = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

Тогда по теореме об интегрировании оригинала (2.1.7) имеем

$$\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{p}\,\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right]=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\tau\sin\tau d\tau=-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t.$$

Замечание. По теореме подобия тогда легко получить более общую формулу, которая часто бывает полезна:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+w^2)^2}\right]=\frac{1}{2w^3}(\sin wt-wt\cos wt).$$

3) Для изображения $F(p)=\dfrac{p^2e^{-2p}}{(p^2+4)(p^2+9)}$ наличие множителя e^{-2p} указывает на необходимость применения теоремы запаздывания (2.1.4):

$$L^{-1}[e^{-2p}G(p)]=g(t-2)\theta(t-2),$$

где $L^{-1}[G(p)]=g(t)$.

Найдем оригинал $g(t)$ для изображения $G(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$. Воспользуемся, например, теоремой умножения Бореля (2.1.9). Представим $G(p)=\dfrac{p}{p^2+4}\,\dfrac{p}{p^2+9}$. Из прил. 1 (табл. П1.2) находим $L[\cos 2t]=$ $=\dfrac{p}{p^2+4}$, $L[\cos 3t]=\dfrac{p}{p^2+9}$. Вычисляя свертку оригиналов, получим

$$L^{-1}[G(p)]=g(t)=\int\limits_0^t\cos 2\tau\cos(3t-3\tau)d\tau=\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t).$$

По теореме запаздывания (2.1.4) для искомого оригинала имеем

$$f(t)=g(t-2)\theta(t-2)=\frac{1}{5}(3\sin(3t-6)-2\sin(2t-4))\theta(t-2).$$

Ответ. 1) $e^t-e^{-t}\cos 2t+\dfrac{3}{2}e^{-t}\sin 2t$; 2) $\dfrac{\sin t-t\cos t}{2}$;
3) $\dfrac{1}{5}(3\sin(3t-6)-2\sin(2t-4))\theta(t-2)$.

Задача 2.3.2. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$.

1. $F(p)=\dfrac{pe^{-p}}{p^2-4}$.
2. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.
3. $F(p)=\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$.
4. $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{p^2(p^2-1)}$.

3. $F(p) = \dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$.

4. $F(p) = \dfrac{e^{-4p}}{p^2(p^2-1)}$.

5. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

6. $F(p) = \dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

7. $F(p) = \dfrac{pe^{-\pi p}}{(p^2+4)^2}$.

8. $F(p) = \dfrac{p}{p^4-1}$.

9. $F(p) = \dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$.

10. $F(p) = \dfrac{pe^{-2p}}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

11. $F(p) = \dfrac{4}{(p^2+4)^2}$.

12. $F(p) = \dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$.

13. $F(p) = \dfrac{e^{-4p}}{p(p^2+9)}$.

14. $F(p) = \dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.

15. $F(p) = \dfrac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$.

16. $F(p) = \dfrac{pe^{-p}}{(p^2+9)^2}$.

17. $F(p) = \dfrac{9}{(p^2+9)^2}$.

18. $F(p) = \dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

19. $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^4-1}$.

20. $F(p) = \dfrac{4}{p^3+8}$.

21. $F(p) = \dfrac{6}{p^3-8}$.

22. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p(p^2+4)}$.

23. $F(p) = \dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

24. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

25. $F(p) = \dfrac{pe^{-2p}}{p^2-9}$.

26. $F(p) = \dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

27. $F(p) = \dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$.

28. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2(p^2-4)}$.

29. $F(p) = \dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$.

30. $F(p) = \dfrac{p}{p^4-1}$.

2.4. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем

Пусть дано дифференциальное уравнение (для простоты 2-го порядка) с постоянными коэффициентами и начальные условия:

$$D[x] \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0. \tag{2.4.1}$$

Будем считать, что функция $f(t)$ и искомая функция $x(t)$ вместе с ее производными до 2-го порядка являются оригиналами. Пусть $L[x(t)] = X(p)$, $L[f(t)] = F(p)$. Применяя к обеим частям уравнения (2.4.1) преобразование Лапласа (2.1) и используя теорему о дифференцировании оригинала (2.1.5) и свойство линейности (2.1.1), вместо дифференциального уравнения с начальными условиями получим операторное уравнение

$$p^2X(p) - px_0 - x'_0 + a_1(pX(p) - x_0) + a_2X(p) = F(p)$$

или

$$(p^2 + a_1p + a_2)X(p) = F(p) + (px_0 + x'_0 + a_1x_0),$$

или

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p),$$

где $A(p)$, $B(p)$ — заданные многочлены. Решая это уравнение, найдем операторное решение:

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \tag{2.4.2}$$

Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, тем самым найдем искомую функцию $x(t)$ — решение задачи Коши (2.4.1).

Представим операторное решение (2.4.2) в виде суммы:

$$X(p) = Y(p) + Z(p), \quad \text{где} \;\; Y(p) = \frac{F(p)}{A(p)}, \quad Z(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

Теперь видно, что $Y(p)$ — операторное решение задачи Коши для исходного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$D[y] = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{2.4.3}$$

а $Z(p)$ — операторное решение задачи Коши для соответствующего однородного уравнения и заданных начальных условий

$$D[z] = 0, \quad z(0) = x_0, \quad z'(0) = x'_0, \tag{2.4.4}$$

Тогда решение исходной задачи (2.4.1) всегда можно представить в виде суммы решений двух вспомогательных задач (2.4.3) и (2.4.4):

$$x(t) = y(t) + z(t).$$

Остановимся подробнее на решении задачи Коши с нулевыми начальными условиями (2.4.3). Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$D[y_1] = 1, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0 \tag{2.4.5}$$

— задачу для уравнения с той же левой частью и правой частью, равной 1 при нулевых начальных условиях.

Для этой задачи операторное решение имеет вид

$$Y_1(p) = \frac{1}{pA(p)}.$$

Тогда операторное решение задачи (2.4.3) может быть записано в виде

$$Y(p) = \frac{F(p)}{A(p)} = pF(p)Y_1(p).$$

Для перехода к оригиналам используем интеграл Дюамеля (2.1.11)

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)y_1'(t-\tau)d\tau \tag{2.4.6}$$

(здесь учтено, что согласно начальным условиям $y_1(0) = 0$) или

$$y(t) = y_1(t)f(0) + \int_0^t y_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau. \tag{2.4.7}$$

Формулы (2.4.6) и (2.4.7), выражающие решение $y(t)$ задачи Коши (2.4.3) через решение вспомогательной задачи (2.4.5), называются формулами Дюамеля.

Общий случай решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка принципиально ничем не отличается от случая $n = 2$.

Пример 2.4.1. Операционным методом решить задачу Коши:

$$x'' + 4x = \sin 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$$

Решение. Пусть $L[x(t)] = X(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала (2.1.5) найдем изображения производных

$$L[x'(t)] = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$
$$L[x''(t)] = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p + 2$$

и изображение правой части (см. прил. 1 (табл. П1.2))

$$L[\sin 2t] = \frac{2}{p^2+4}.$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получим операторное уравнение

$$p^2X(p) - p + 2 + 4X(p) = \frac{2}{p^2+4},$$

решая которое, получим

$$X(p) = \frac{2}{(p^2+4)^2} + \frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+4}.$$

Найдем оригинал $x(t)$ для операторного решения $X(p)$. Последние два слагаемые — табличные (см. прил. 1 (табл. П1.2)):

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right] = \cos 2t, \qquad L^{-1}\left[\frac{2}{p^2+4}\right] = \sin 2t.$$

Для нахождения оригинала для функции $\dfrac{2}{(p^2+4)^2}$ воспользуемся теоремой умножения изображений Бореля (2.1.9):

$$\frac{2}{(p^2+4)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{2}{p^2+4} = \frac{1}{2}L\left[\int\limits_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau)d\tau\right].$$

Вычисляем свертку

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int\limits_0^t [\cos(4\tau - 2t) - \cos 2t]d\tau = \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t.$$

Окончательно имеем

$$x(t) = \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t + \cos 2t - \sin 2t = \cos 2t - \frac{7}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t.$$

Ответ. $x(t) = \cos 2t - \dfrac{7}{8}\sin 2t - \dfrac{1}{4}t\cos 2t.$

Задача 2.4.1. Операционным методом решить задачу Коши.

1. $x'' - 2x' - 3x = 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$
2. $x'' + 4x = \cos 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
3. $2x'' + 5x' = 29\cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$
4. $x'' + x' + x = t^2 + t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -3.$
5. $x'' + 4x = \operatorname{ch} 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
6. $x'' - x' - 6x = 2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
7. $x'' + 4x = 4e^{2t} + 4t^2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$
8. $x'' + 4x' + 4x = t^3e^{2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$

9. $x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 6.$
10. $x'' + 4x = 3\sin t + 10\cos 3t, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 3.$
11. $x'' + 2x' + 10x = 2e^{-t}\cos 3t, \quad x(0) = 5, \quad x'(0) = 1.$
12. $x'' + 3x' - 10x = 47\cos 3t - \sin 3t, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -1.$
13. $x'' + x' - 2x = e^{-t}, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$
14. $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3), \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 2.$
15. $x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
16. $x'' - x = 4\sin t + 5\cos 2t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -2.$
17. $x'' - x' = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
18. $x'' + x = 6e^{-t}, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 1.$
19. $x'' - x = \cos 3t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$
20. $x'' + x' = t^2 + 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -2.$
21. $x'' + x' - 2x = -2(t + 1), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$
22. $x'' + x' + x = 7e^{2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 4.$
23. $x'' + 2x' = 2 + e^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$
24. $x'' - 9x = \sin t - \cos t, \quad x(0) = -3, \quad x'(0) = 2.$
25. $2x'' - x' = \sin 3t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$
26. $x'' + 2x' = \sin(t/2), \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 4.$
27. $2x'' + 3x' + x = 3e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
28. $x'' - 3x' + 2x = e^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$
29. $x'' + 2x' = 2t + 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 21.$
30. $x'' - 3x' + 2x = t + 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$

Пример 2.4.2. Решить задачу Коши:

$$x'' + x = \frac{1}{2 + \cos t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Решение. Поскольку нахождение изображения правой части затруднительно, то хотелось бы воспользоваться формулой Дюамеля, но она применима к задачам с нулевыми начальными условиями. Воспользуемся принципом суперпозиции решений и представим решение в виде суммы $x(t) = y(t) + z(t)$, где $z(t)$ — решение однородного уравнения с данными начальными условиями, $y(t)$ — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

Функция $z(t)$ находится как решение задачи Коши:

$$z'' + z = 0, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 2.$$

Применяя операционный метод, полагая $L[z(t)] = Z(p)$, получим

$$p^2 Z(p) - p - 2 + Z(p) = 0, \quad Z(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p^2+1},$$

откуда $z(t) = \cos t + 2\sin t$.

Функцию $y(t)$ ищем как решение задачи Коши:

$$y'' + y = \frac{1}{2+\cos t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$y_1'' + y_1 = 1, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0.$$

Применяя операционный метод, получим

$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{p^2+1} = L[\sin t]$, то по теореме об интегрировании оригинала (2.1.7)

$$y_1(t) = \int_0^t \sin\tau d\tau = 1 - \cos t.$$

Тогда по формуле Дюамеля (2.4.6)

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) y_1'(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{2+\cos\tau} d\tau =$$

$$= \sin t \int_0^t \frac{\cos\tau}{2+\cos\tau} d\tau - \cos t \int_0^t \frac{\sin\tau}{2+\cos\tau} d\tau.$$

Подсчитаем соответствующие интегралы:

$$\int_0^t \frac{\cos\tau}{2+\cos\tau} d\tau = \int_0^t \left(1 - \frac{2}{2+\cos\tau}\right) d\tau = t - 2\int_0^t \frac{d\tau}{2+\cos\tau} = \Big[\ \operatorname{tg}(\tau/2) = u\ \Big] =$$

$$= t - 4 \int_0^{\operatorname{tg}(t/2)} \frac{du}{3+u^2} = t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\operatorname{tg}(t/2)} = t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\sqrt{3}};$$

$$\int_0^t \frac{\sin\tau}{2+\cos\tau} d\tau = -\ln(2+\cos\tau)\Big|_0^t = \ln\frac{3}{2+\cos t}.$$

Следовательно:

$$y(t) = \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\sqrt{3}}\right) \sin t - \cos t \ln \frac{3}{2+\cos t}.$$

Окончательно находим решение исходной задачи:

$$x(t) = y(t) + z(t) = \left(2 + t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\sqrt{3}}\right) \sin t + \cos t \left(1 - \ln \frac{3}{2+\cos t}\right).$$

Ответ.

$$x(t) = \left(2 + t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\sqrt{3}}\right) \sin t + \cos t \left(1 - \ln \frac{3}{2+\cos t}\right).$$

Задача 2.4.2. Решить задачу Коши.

1. $x'' - x' = \dfrac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$
2. $x'' + x = \dfrac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$
3. $x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$
4. $x'' - x' = \dfrac{e^t}{1+e^t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
5. $x'' + 4x = \dfrac{1}{2+\cos 2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
6. $x'' - 4x = \operatorname{th}^2 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$
7. $x'' + x = \dfrac{1}{3+\cos t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$
8. $x'' - 2x' + x = \dfrac{e^t}{1+t^2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$
9. $x'' + x' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
10. $x'' - 4x' + 4x = \dfrac{e^{2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
11. $x'' - x' = \dfrac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
12. $x'' + x = \dfrac{1}{1+\sin^2 t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$
13. $x'' - x = \operatorname{th}^2 t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$

14. $x'' - 2x' + x = \dfrac{e^t}{t+1}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

15. $x'' + 4x = \dfrac{1}{2 + \sin 2t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

16. $x'' - x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$

17. $x'' + 2x' + x = \dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$

18. $x'' - 4x = \dfrac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{ch}^2 2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$

19. $x'' + x' = \dfrac{e^{2t}}{3 + e^t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

20. $x'' - x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{ch} t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$

21. $x'' + x = \dfrac{1}{2 + \sin t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$

22. $x'' + x = \dfrac{1}{4 + \operatorname{tg}^2 t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

23. $x'' - 4x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

24. $x'' + x' = \dfrac{1}{(1 + e^t)^2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$

25. $x'' - x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$

26. $x'' + 2x' = \dfrac{1}{1 + e^{2t}}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$

27. $x'' - 4x = \operatorname{th} 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

28. $x'' + 4x' + 4x = \dfrac{e^{-2t}}{(2t+1)^2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

29. $x'' - x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$

30. $x'' + 2x' + x = \dfrac{te^{-t}}{t+1}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$

Пример 2.4.3.* Решить задачу Коши:

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad \text{где} \quad f(t) = \left[\begin{array}{ll} t, & 0 \le t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t < 2, \\ 0, & t \ge 2. \end{array}\right.$$

Решение. Запишем $f(t)$ одним аналитическим выражением

$$f(t) = t\Big(\theta(t) - \theta(t-1)\Big) + (2-t)\Big(\theta(t-1) - \theta(t-2)\Big) =$$

$$= t\theta(t) - 2(t-1)\theta(t-1) + (t-2)\theta(t-2).$$

По теореме запаздывания оригинала (2.1.4), применяя формулу

$$L[g(t-\tau)\theta(t-\tau)] = e^{-p\tau}G(p),$$

получим

$$L[f(t)] = \frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

Полагая $L[x(t)] = X(p)$ и учитывая начальные условия, получим операторное уравнение

$$p^2 X(p) - 1 + X(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2(p^2+1)}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}).$$

Поскольку $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+1}$, то $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}\right] = (t - \sin t)\theta(t)$.

Еще раз используя теорему запаздывания (2.1.4), имеем

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+1)}e^{-p}\right] = [(t-1) - \sin(t-1)]\theta(t-1) \quad \text{и}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+1)}e^{-2p}\right] = [(t-2) - \sin(t-2)]\theta(t-2).$$

Тогда

$$x(t) = t\theta(t) - 2[(t-1) - \sin(t-1)]\theta(t-1) + [(t-2) - \sin(t-2)]\theta(t-2)$$

или

$$x(t) = \left[\begin{array}{ll} t, & 0 \le t < 1, \\ -t + 2 + 2\sin(t-1), & 1 \le t < 2, \\ 2\sin(t-1) - \sin(t-2), & t \ge 2. \end{array}\right.$$

Задача 2.4.3.* Решить задачу Коши с однородными начальными условиями

$$D[x] = f(x), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

где дифференциальный оператор тот же, что в задаче 2.4.1 (соответствующего варианта), а правая часть уравнения задана графически в задаче 2.2.1.

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом выполняется по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения.

Пример 2.4.4. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + y - \cos t - 2\sin t, & x(0) = 2, \\ y' = 3x - y - 2\cos t + \sin t, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Пусть $L[x(t)] = X(p)$, $L[y(t)] = Y(p)$. Переходя к изображениям, получим операторную систему

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = X(p) + Y(p) - \dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{2}{p^2+1}, \\ pY(p) - 1 = 3X(p) - Y(p) - \dfrac{2p}{p^2+1} + \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - Y(p) = \dfrac{2p^2-p}{p^2+1}, \\ -3X(p) + (p+1)Y(p) = \dfrac{p^2-2p+2}{p^2+1}. \end{cases}$$

Решим эту систему, используя правило Крамера. Подсчитаем определители:

$$\triangle = \begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ -3 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 - 4;$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{2p^2-p}{p^2+1} & -1 \\ \dfrac{p^2-2p+2}{p^2+1} & p+1 \end{vmatrix} = \frac{2p^3+2p^2-3p+2}{p^2+1};$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{2p^2-p}{p^2+1} \\ -3 & \dfrac{p^2-2p+2}{p^2+1} \end{vmatrix} = \frac{p^3+3p^2+p-2}{p^2+1}.$$

Тогда

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{\triangle_1}{\triangle} = \dfrac{2p^3+2p^2-3p+2}{(p^2+1)(p^2-4)} = \dfrac{1}{p-2} + \dfrac{p}{p^2+1}, \\ Y(p) = \dfrac{\triangle_2}{\triangle} = \dfrac{p^3+3p^2+p-2}{(p^2+1)(p^2-4)} = \dfrac{1}{p-2} + \dfrac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Переходя к оригиналам, получим ответ.

Ответ. $\begin{cases} x(t) = e^{2t} + \cos t, \\ y(t) = e^{2t} + \sin t. \end{cases}$

Задача 2.4.4. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y + 1; \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$ $\quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$

3. $\begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 2; \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

4. $\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2; \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

5. $\begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x; \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

6. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9; \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

7. $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

8. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -5x - 3y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

9. $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

10. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

12. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, \\ y' = 2x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

13. $\begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

14. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

15. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

16. $\begin{cases} x' = -x + y + 2, \\ y' = -x - y + 2t; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$

17. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x; \end{cases}$ $x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

18. $\begin{cases} x' = 2x - y + 3 - 2t, \\ y' = -x - 2y + 4 + t; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

19. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

20. $\begin{cases} x' = -x + y + \sin t, \\ y' = -2x + \sin t; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

21. $\begin{cases} x' = -3 - 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

22. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

23. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1; \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

24. $\begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ $\qquad x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$

25. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1, \\ y' = 4x - y; \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

26. $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1; \end{cases}$ $\qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

27. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y; \end{cases}$ $\qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

28. $\begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ $\qquad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

29. $\begin{cases} x' = -x + y + e^t, \\ y' = x - y + e^t; \end{cases}$ $\qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

30. $\begin{cases} x' = x + 2y + t, \\ y' = 2x + y + t; \end{cases}$ $\qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

2.5. Решение начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x: \ 0 < x < l\}, \quad t > 0 \tag{2.5.1}$$

с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x) \tag{2.5.2}$$

и неоднородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0; \\ &\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = \mu_2(t), \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Для решения используем преобразование Лапласа по переменной t. Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $f(x,t)$, $\mu_i(t)$ являются оригиналами. Положим $U(x,p)=L[u]$, $F(x,p)=L[f]$, $M_i(p)=L[\mu_i]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (2.5.1) и учтем свойство дифференцирования оригинала (2.1.5):

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=pU(x,p)-u\Big|_{t=0}=pU(x,p)-g(x).$$

Приходим к ОДУ второго порядка с параметром p:

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2}-pU(x,p)=-F(x,p)-g(x). \tag{2.5.4}$$

Применяя преобразование Лапласа к граничным условиям (2.5.3), получим

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_1\frac{\partial U}{\partial x}+\beta_1 U\right)\Big|_{x=0}=M_1(p);\\ &\left(\alpha_2\frac{\partial U}{\partial x}+\beta_2 U\right)\Big|_{x=l}=M_2(p).\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Решаем задачу (2.5.4), (2.5.5), находим изображение $U(x,p)$. Применяем обратное преобразование Лапласа, находим искомое решение $u(x,t)=L^{-1}[U]$.

Пример 2.5.1.* Решить начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad D=\{x:\ 0<x<\pi/4\},\quad t>0 \tag{2.5.6}$$

с граничными условиями на ∂D

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\qquad u\Big|_{x=\pi/4}=0,\qquad t\geq 0, \tag{2.5.7}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0}=g(x)=2\cos 2x-3\cos 6x,\qquad 0\leq x\leq \pi/4. \tag{2.5.8}$$

Решение. Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являются оригиналами. Положим $U(x,p)=L[u]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (2.5.6) и граничным условиям (2.5.7), учтем свойство дифференцирования оригинала (2.1.5), приходим к ОДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -2\cos\,2x - 3\cos\,6x \qquad (2.5.9)$$

с граничными условиями

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.U\right|_{x=\pi/4} = 0. \qquad (2.5.10)$$

Общее решение ДУ (2.5.9) ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения $U_{\text{оо}}$ и частных решений неоднородного ДУ $U_{\text{ч}1}$ и $U_{\text{ч}2}$, соответствующих слагаемым в правой части уравнения (2.5.9):

$$U(x,p) = U_{\text{оо}} + U_{\text{ч}1} + U_{\text{ч}2}. \qquad (2.5.11)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (2.5.9) имеет вид

$$U_{\text{оо}} = \widetilde{C}_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Лучше его записать в виде линейной комбинации фундаментальных решений, одно из которых удовлетворяет первому граничному условию (2.5.10), а другое — второму граничному условию:

$$U_{\text{оо}} = C_1\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + C_2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right). \qquad (2.5.12)$$

Частное решение $U_{\text{ч}1}$ ищем в виде

$$U_{\text{ч}1} = A\cos\,2x + B\sin\,2x.$$

Подставим его в ДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -2\cos\,2x,$$

в результате получим

$$a^2(-4A\cos\,2x - 4B\sin\,2x) - p(A\cos\,2x + B\sin\,2x) = -2\cos\,2x.$$

Найдем

$$A = \frac{2}{p+4a^2}, \quad B = 0.$$

Следовательно:

$$U_{\text{ч}1} = \frac{2}{p+4a^2}\cos\,2x.$$

Аналогично находим

$$U_{\text{ч}2} = \frac{3}{p+36a^2}\cos\,6x.$$

Общее решение (2.5.11) ОДУ (2.5.9) имеет вид

$$U(x,p) = C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \\ + \frac{2}{p+4a^2}\cos 2x + \frac{3}{p+36a^2}\cos 6x. \tag{2.5.13}$$

Подставим (2.5.13) в граничные условия (2.5.10), найдем $C_1 = C_2 = 0$. Итак:

$$U(x,p) = \frac{2}{p+4a^2}\cos 2x + \frac{3}{p+36a^2}\cos 6x.$$

Применим обратное преобразование Лапласа, учитывая соотношение (см. прил. 1 (табл. П1.2, п. 3)):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right] = e^{-at},$$

находим искомое решение $u(x,t)$.

Ответ.

$$u(x,t) = 2e^{-4a^2t}\cos 2x + 3e^{-36a^2t}\cos 6x. \tag{2.5.14}$$

Задача 2.5.1.* Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с однородными граничными условиями и заданным начальным условием.

1. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\sin 2x - \sin 3x.$
2. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\sin x - 3\sin 5x.$
3. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\cos x + 3\cos 3x.$
4. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3 + \cos x - 5\cos 2x.$
5. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) - \sin x.$
6. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\sin(x/2) - \sin(3x/2).$
7. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos(x/2) - 2\cos(5x/2).$
8. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 1 + \cos 2x - 2\cos 4x.$

9. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(x/2) - 3\sin\, x.$

10. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\sin(x/4) - \sin(3x/4).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\cos(x/4) - \cos(3x/4).$

12. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\cos(x/2) - \cos\, x.$

13. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\, x - 2\sin\, 3x.$

14. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\sin\, x - \sin\, 3x.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos\, x - 3\cos\, 5x.$

16. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2 - \cos\, x + 3\cos\, 2x.$

17. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(x/2) + 3\sin\, 2x.$

18. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(x/2) + 2\sin(5x/2).$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\cos(x/2) + \cos(3x/2).$

20. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2 - \cos\, 2x + \cos\, 6x.$

21. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 3\sin(x/2) + \sin\, x.$

22. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(x/4) - \sin(5x/4).$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos(x/4) - 2\cos(5x/4).$

24. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos\, x - 3\cos\, 2x.$

25. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\, 2x - \sin\, 5x.$

26. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\, x + 2\sin\, 3x.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \cos\, x + 2\cos\, 3x.$

28. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 2\cos\, x - \cos\, 3x.$

29. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin\, x - 3\sin\, 5x.$

30. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin(3x/2) - \sin(5x/2).$

Пример 2.5.2.* Решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < \pi/4\}, \ \ 0 < t \tag{2.5.15}$$

с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=\pi/4} = 0, \ \ 0 \le t \tag{2.5.16}$$

и начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x) = 2\cos\, 2x - 3\cos\, 6x, \ \ 0 \le x \le \pi/4, \tag{2.5.17}$$

где функция

$$f(x,t) = \sin\, t \cos\, 10x. \tag{2.5.18}$$

Решение. Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности (2.5.15)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2.5.19}$$

с однородными граничными и начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/4} = u\Big|_{t=0} = 0, \tag{2.5.20}$$

где

$$f(x,t) = \sin\, t \cos\, 10x. \tag{2.5.21}$$

Решение задачи (2.5.15)—(2.5.18) является суммой решения задачи (2.5.19)—(2.5.21) и решения задачи (2.5.6)—(2.5.8), найденного в предыдущем примере 2.5.1.

Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $f(x,t)$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, $F(x,p) = L[f]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (2.5.19) и граничным условиям (2.5.20), учтем свойство дифференцирования оригинала (2.1.5) и $L[\sin t] = \dfrac{1}{p^2+1}$ (см. прил. 1 (табл. П1.2, п. 7)), приходим к ОДУ

$$a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - pU = -\frac{1}{p^2+1}\cos 10x \qquad (2.5.22)$$

с граничными условиями

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.U\right|_{x=\pi/4} = 0. \qquad (2.5.23)$$

Общее решение ДУ (2.5.22) имеет вид

$$\begin{aligned} U(x,p) = C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \\ + \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p+(10a)^2}\cos 10x. \end{aligned} \qquad (2.5.24)$$

Подставим (2.5.24) в граничные условия (2.5.23), найдем $C_1 = C_2 = 0$. Итак:

$$U(x,p) = \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p+(10a)^2}\cos 10x.$$

Применим обратное преобразование Лапласа, учитывая теорему умножения Бореля (2.1.9) и соответствие оригиналов и изображений (см. прил. 1 (табл. П1.2, п. 3, 7)):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] = \sin t, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p+(10a)^2}\right] = e^{-(10a)^2 t}.$$

Находим решение задачи (2.5.19)—(2.5.21):

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^t \sin \tau e^{-(10a)^2(t-\tau)} d\tau \cdot \cos 10x = \\ = \frac{\left((10a)^2 \sin t - \cos t + e^{-(10a)^2 t}\right)\cos 10x}{(1+(10a)^4)}. \end{aligned} \qquad (2.5.25)$$

Решение задачи (2.5.15)—(2.5.18) представляет собой сумму решений (2.5.14) и (2.5.25).

Ответ. $u(x,t) = \dfrac{\left((10a)^2 \sin t - \cos t + e^{-(10a)^2 t}\right)\cos 10x}{(1+(10a)^4)} +$

$$+2e^{-4a^2 t}\cos 2x + 3e^{-36a^2 t}\cos 6x.$$

Задача 2.5.2.* Решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x: \ 0 < x < l\}, \quad 0 < t$$

с однородными граничными условиями и заданным начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x), \quad (0 < x < l).$$

1. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

   $f(x,t) = \sin x \cos t, \quad g(x) = 3\sin 2x - \sin 3x.$

2. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

   $f(x,t) = 2\sin 3x \cos t, \quad g(x) = 2\sin x - 3\sin 5x.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

   $f(x,t) = \cos 5x \sin t, \quad g(x) = 2\cos x + 3\cos 3x.$

4. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

   $f(x,t) = 2\cos 3x \sin t, \quad g(x) = 3 + \cos x - 5\cos 2x.$

5. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

   $f(x,t) = \sin x \cos t, \quad g(x) = 2\sin(x/2) - \sin x.$

6. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

   $f(x,t) = \sin(5x/2) \sin t, \quad g(x) = 3\sin(x/2) - \sin(3x/2).$

7. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

   $f(x,t) = \cos(3x/2) \cos t, \quad g(x) = \cos(x/2) - 2\cos(5x/2).$

8. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

   $f(x,t) = 2\cos 2x \cos t, \quad g(x) = 1 + \cos 2x - 2\cos 4x.$

9. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

   $f(x,t) = 2\sin x \sin 3t, \quad g(x) = \sin(x/2) - 3\sin x.$

10. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(x/4)\sin\, 2t, \quad g(x) = 2\sin(x/4) - \sin(3x/4).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(x/4)\sin\, t, \quad g(x) = 3\cos(x/4) - \cos(3x/4).$

12. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\cos\, 2x\cos\, t, \quad g(x) = 2\cos(x/2) - \cos\, x.$

13. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, 2x \cdot t, \quad g(x) = \sin\, x - 2\sin\, 3x.$

14. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, x\sin\, t, \quad g(x) = 3\sin\, x - \sin\, 3x.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, 3x\sin\, t, \quad g(x) = \cos\, x - 3\cos\, 5x.$

16. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, x\cos\, t, \quad g(x) = 2 - \cos\, x + 3\cos\, 2x.$

17. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\, x \cdot t, \quad g(x) = \sin(x/2) + 3\sin\, 2x.$

18. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\sin(3x/2)\sin\, t, \quad g(x) = \sin(x/2) + 2\sin(5x/2).$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(x/2)\sin\, 2t, \quad g(x) = 2\cos(x/2) + \cos(3x/2).$

20. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\, 4x\sin\, t, \quad g(x) = 2 - \cos\, 2x + \cos\, 6x.$

21. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 3\sin\, 2x\sin\, t, \quad g(x) = 3\sin(x/2) + \sin\, x.$

22. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(x/4)\cos t, \quad g(x) = \sin(x/4) - \sin(5x/4).$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\cos(3x/4)\cos t, \quad g(x) = \cos(x/4) - 2\cos(5x/4).$

24. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 3\cos x \sin t, \quad g(x) = \cos x - 3\cos 2x.$

25. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin x \sin t, \quad g(x) = \sin 2x - \sin 5x.$

26. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \sin 5x \cdot t, \quad g(x) = \sin x + 2\sin 3x.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos x \cos t, \quad g(x) = \cos x + 2\cos 3x.$

28. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = 3\cos 2x \sin 2t, \quad g(x) = 2\cos x - \cos 3x.$

29. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin 2x \sin t, \quad g(x) = \sin x - 3\sin 5x.$

30. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(x/2)\cos t, \quad g(x) = \sin(3x/2) - \sin(5x/2).$

Пример 2.5.3.* Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < +\infty\}, \quad t > 0 \tag{2.5.26}$$

с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x) = \sin x \tag{2.5.27}$$

и граничным условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu(t) = \cos t, \tag{2.5.28}$$

где

$$f(x,t) = 1 \cdot e^{-x}. \tag{2.5.29}$$

Решение. Рассмотрим три задачи:

I. $$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad \text{в } D, \quad t > 0, && (2.5.30)\\ &u_1\Big|_{t=0} = g(x) = \sin x, && (2.5.31)\\ &\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; && (2.5.32) \end{aligned}\right\}$$

II. $$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t), \quad \text{в } D, \quad t > 0, && (2.5.33)\\ &u_2\Big|_{t=0} = 0, && (2.5.34)\\ &\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; && (2.5.35) \end{aligned}\right\}$$

III. $$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_3}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}, \quad \text{в } D, \quad t > 0, && (2.5.36)\\ &u_3\Big|_{t=0} = 0, && (2.5.37)\\ &\left.\frac{\partial u_3}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu(t) = \cos t. && (2.5.38) \end{aligned}\right\}$$

Тогда функция

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) \tag{2.5.39}$$

является решением задачи (2.5.26)—(2.5.29).

Решим задачу I (2.5.30)—(2.5.32).

Предположим, что $u(x,t)$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (2.5.30), граничному условию (2.5.32) и учтем свойство дифференцирования оригинала (2.1.5). Приходим к ОДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -\sin\,x \tag{2.5.40}$$

с граничным условием

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0. \tag{2.5.41}$$

Общее решение ДУ (2.5.40) ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного ДУ и частного решения неоднородного:

$$U(x,p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \frac{1}{p+a^2}\sin\,x.$$

Здесь должно быть $C_2 = 0$, иначе $U(x,p)$ будет неограниченно возрастать при $x \to +\infty$. Граничное условие (2.5.41) дает тогда $C_1 = a\frac{1}{p+a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}$, следовательно:

$$U(x,p) = a\frac{1}{p+a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \frac{1}{p+a^2}\sin\,x. \tag{2.5.42}$$

Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой умножения Бореля (2.1.9) и таблицей соответствия оригиналов и изображений (см. прил. 1 (табл. П1.2, п. 3, 12)):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p+a^2}\right] = e^{-a^2t}, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right).$$

Применим обратное преобразование Лапласа к (2.5.42), получим решение задачи I (2.5.30)—(2.5.32):

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}e^{-a^2(t-\tau)}d\tau + e^{-a^2t}\sin\,x = \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int\limits_0^t e^{a^2\tau-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + e^{-a^2t}\sin\,x. \end{aligned} \tag{2.5.43}$$

Решим задачу II (2.5.33)—(2.5.35), (2.5.29).

Применим преобразование Лапласа к уравнению (2.5.33) и граничному условию (2.5.35) и получим

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = -\frac{1}{p}e^{-x}, \qquad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0. \tag{2.5.44}$$

Общее решение уравнения (2.5.44) есть

$$U(x,t) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-a^2}e^{-x};$$

здесь должно быть $C_2 = 0$, иначе $U(x,p)$ будет неограниченно возрастать при $x \to +\infty$. Из граничного условия (3.3.40) находим $C_1 = -a\dfrac{1}{p^{3/2}}\cdot\dfrac{1}{p-a^2}$, следовательно:

$$U(x,t) = -a\frac{1}{p^{3/2}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\frac{1}{p-a^2} + \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-a^2}e^{-x}. \tag{2.5.45}$$

Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой Бореля (2.1.9) и таблицей соответствия оригиналов и изображений (см. прил. 1 (табл. П1.2, п. 13, 3)):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^{3/2}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right] = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) - \frac{x}{a}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p-a^2}\right] = e^{a^2t}.$$

Применим обратное преобразование Лапласа к (2.5.45) и получим решение задачи II (2.5.33)—(2.5.35):

$$\begin{gathered}u_2(x,t) = -\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \sqrt{\tau}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}e^{a^2(t-\tau)}d\tau + x\int\limits_0^t \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)e^{a^2(t-\tau)}d\tau + \\ + \int\limits_0^t e^{a^2(t-\tau)}d\tau\cdot e^{-x}.\end{gathered} \tag{2.5.46}$$

Замечание. Найденное решение, соответствующее неоднородности ДУ $f(x,t) = 1\cdot e^{-x}$, позволяет найти решения задачи (2.5.33)—(2.5.35) с неоднородностями вида $f(x,t) = \tilde{f}(t)e^{-x}$ с помощью интеграла Дюамеля (2.1.11):

$$\tilde{u}(x,t) = L^{-1}\left[p\tilde{F}(p)U(p)\right] = u_2(0)\tilde{f}(t) + \int\limits_0^t \tilde{f}(\tau)u_2'(t-\tau)d\tau,$$

где $\tilde{F}(p) = L[\tilde{f}]$.

Решим задачу III (2.5.30)—(2.5.38).

Применим преобразование Лапласа к уравнению (2.5.30) и граничному условию (2.5.38) и получим

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - pU = 0, \qquad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=0} = M(p),$$

где $L[\mu(t)] = M(p)$. Общее решение ДУ есть

$$U(x,t) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

здесь $C_2 = 0$, так как функция U должна быть ограничена при $x \to +\infty$. Из граничного условия находим $C_1 = -aM(p)\dfrac{1}{\sqrt{p}}$, следовательно:

$$U(x,t) = -aM(p)\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{2.5.47}$$

Для нахождения оригинала используем интеграл Дюамеля (2.1.11):

$$u(x,t) = L^{-1}[pM(p)U_1(p)] = u_1(0)\mu(t) + \int\limits_0^t \mu(\tau)u_1'(t-\tau)d\tau, \tag{2.5.48}$$

где $u_1(x,t) = L^{-1}[U_1]$ — решение соответствующей задачи при $\mu(t) \equiv 1$, тогда $M(p) = \dfrac{1}{p}$ в (2.5.47) и, следовательно:

$$U_1(p) = -a\frac{1}{p^{3/2}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Из таблицы соответствия оригиналов и изображений (см. прил. 1 (табл. П1.2, п. 13)) находим

$$u_1(t) = -\frac{a2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + x\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Заметим, что $u_1(0) = 0$, так как $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$:

$$u_1'(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Из интеграла Дюамеля (2.1.11) получаем решение задачи III (2.5.36)—(2.5.38):

$$\begin{aligned} u_3(x,t) &= -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \mu(\tau)\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau = \\ &= -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \cos\tau\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau. \end{aligned} \tag{2.5.49}$$

Решение исходной задачи (2.5.26)—(2.5.29) находится по формулам (2.5.43), (2.5.46) и (2.5.49).

Ответ.

$$u(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t} \int\limits_0^t e^{a^2\tau - \frac{x^2}{4a\tau}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau + e^{-a^2 t} \sin x + \int\limits_0^t e^{a^2(t-\tau)} d\tau \cdot e^{-x} -$$

$$-\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \sqrt{\tau} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} e^{a^2(t-\tau)} d\tau + x \int\limits_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right) e^{a^2(t-\tau)} d\tau -$$

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \cos \tau \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Задача 2.5.3.* Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x : \ 0 < x < +\infty\}, \quad t > 0$$

с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = g(x), \quad 0 \le x < +\infty$$

и граничным условием первого или второго родов при $x = 0$.

1. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin x, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$
2. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$
3. $f(x,t) = \sin x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos t.$
4. $f(x,t) = \sin x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos t.$
5. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos x, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin t.$
6. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin t.$
7. $f(x,t) = \cos x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$
8. $f(x,t) = \cos x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$
9. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos t.$
10. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos t.$

11. $f(x,t) = e^{-x}, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

12. $f(x,t) = e^{-x}, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

13. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin\, x, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

14. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin\, x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

15. $f(x,t) = \sin\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

16. $f(x,t) = \sin\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

17. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos\, x, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

18. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos\, x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

19. $f(x,t) = \cos\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

20. $f(x,t) = \cos\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

21. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

22. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = e^{-x}, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

23. $f(x,t) = e^{-x}, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

24. $f(x,t) = e^{-x}, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

25. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin\, x, \qquad u\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

26. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \sin\, x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \sin\, t.$

27. $f(x,t) = \sin\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

28. $f(x,t) = \sin\, x, \qquad g(x) \equiv 0, \qquad u_x\Big|_{x=0} = e^{-t}.$

29. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos\, x, \qquad u\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

30. $f(x,t) \equiv 0, \qquad g(x) = \cos\, x, \qquad u_x\Big|_{x=0} = \cos\, t.$

Пример 2.5.4.* Решить начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.5.50}$$
с однородными граничными условиями
$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi/2} = 0, \qquad t \geq 0 \tag{2.5.51}$$
и начальными условиями
$$u\Big|_{t=0} = 2\sin 3x + \sin 5x, \tag{2.5.52}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{2.5.53}$$

Решение. Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (2.5.50) и граничным условиям (2.5.51), учтем свойство дифференцирования оригинала (2.1.5), приходим к ОДУ
$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - p^2 U = -p(2\sin 3x + \sin 5x) \tag{2.5.54}$$
с граничными условиями
$$U\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=\pi/2} = 0. \tag{2.5.55}$$

Общее решение ДУ (2.5.54) ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $U_{\text{оо}}$ и частных решений неоднородного ДУ $U_{\text{ч1}}$ и $U_{\text{ч2}}$, соответствующих слагаемым в правой части уравнения (2.5.54):
$$U(x,p) = U_{\text{оо}} + U_{\text{ч1}} + U_{\text{ч2}}. \tag{2.5.56}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (2.5.54) имеет вид
$$U_{\text{оо}} = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x}.$$

Лучше его записать в виде линейной комбинации фундаментальных решений, одно из которых удовлетворяет первому граничному условию (2.5.55), а другое — второму граничному условию

$$U_{\text{оо}} = C_1 \operatorname{sh}\left(\frac{p}{a}x\right) + C_2 \operatorname{ch}\left(\frac{p}{a}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{2.5.57}$$

Частное решение $U_{\text{ч}1}$ ищем в виде

$$U_{\text{ч}1} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Подставим его в ДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - p^2U = -2p\sin 3x$$

и получим

$$a^2(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) - p^2(A\cos 3x + B\sin 3x) = -2p\sin 3x.$$

Найдем

$$B = \frac{2p}{p^2+9a^2}, \quad A = 0.$$

Следовательно:

$$U_{\text{ч}1} = \frac{2p}{p^2+9a^2}\sin 3x.$$

Аналогично находим

$$U_{\text{ч}2} = \frac{p}{p^2+25a^2}\sin 5x.$$

Общее решение (2.5.56) ОДУ (2.5.54) имеет вид

$$\begin{gathered}U(x,p) = C_1 \operatorname{sh}\left(\frac{p}{a}x\right) + C_2 \operatorname{ch}\left(\frac{p}{a}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \\ + \frac{2p}{p^2+9a^2}\sin 3x + \frac{p}{p^2+25a^2}\sin 5x.\end{gathered} \tag{2.5.58}$$

Подставим (2.5.58) в граничные условия (2.5.55), найдем $C_1 = C_2 = 0$.

Итак:

$$U(x,p) = \frac{2p}{p^2+9a^2}\sin 3x + \frac{p}{p^2+25a^2}\sin 5x.$$

Применим обратное преобразование Лапласа, учитывая соотношение оригинала и изображения (см. прил. 1 (табл. П1.2, п. 8)):

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+a^2}\right] = \cos at,$$

находим искомое решение $u(x,t)$.

Ответ.

$$u(x,t) = 2\cos(3at)\sin 3x + \cos(5at)\sin 5x. \tag{2.5.59}$$

Задача 2.5.4.* Решить начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
с однородными граничными и начальными условиями.

1. $u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi/2} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = \sin x - 2\sin 3x.$
2. $u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi/2} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = \cos x - 3\cos 3x.$
3. $u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = \cos x + 3\cos 2x.$
4. $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = \sin(x/2) + 2\sin x.$
5. $u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \sin(x/2) + 2\sin(3x/2).$
6. $u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = 2\cos(x/2) - \cos(5x/2).$
7. $u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi/2} = u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \cos 2x + \cos 4x.$
8. $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = 2\sin(x/2) + \sin x.$
9. $u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=2\pi} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = \sin(x/4) + 2\sin(3x/4).$
10. $u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = 2\cos(x/4) + 3\cos(3x/4).$
11. $u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=2\pi} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = \cos(x/2) + 2\cos x.$
12. $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = 3\sin x + \sin 3x.$
13. $u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi/2} = u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \sin x + 3\sin 5x.$
14. $u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi/2} = u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = 3\cos x + \cos 5x.$
15. $u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \cos x - \cos 2x.$
16. $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=2\pi} = u\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=0} = 3\sin(x/2) - \sin 2x.$

17. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) - \sin(5x/2).$

18. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos(x/2) - \cos(3x/2).$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos 2x - \cos 4x.$

20. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) - 3\sin x.$

21. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 3\sin(x/4) + 2\sin(3x/4).$

22. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 5\cos(x/4) + \cos(3x/4).$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 3\cos x + 2\cos 3x.$

24. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 2\sin x - \sin 3x.$

25. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 5\sin x - \sin 3x.$

26. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = 2\cos x - \cos 3x.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\Big|_{t=0} = \cos x + \cos 3x.$

28. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \sin x - 3\sin 3x.$

29. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = 2\sin(x/2) + 3\sin(3x/2).$

30. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \sin 2x + \sin 3x.$

Пример 2.5.5.* Решить начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x:\ 0 < x < \pi/2\}, \quad 0 < t \tag{2.5.60}$$

с однородными граничными условиями

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi/2} = 0, \quad (0 \le t) \tag{2.5.61}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(x) = 2\sin 3x + \sin 5x, \quad (0 \le x \le \pi/2), \tag{2.5.62}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = p(x) \equiv 0, \quad (0 \le x \le \pi/2), \tag{2.5.63}$$

где

$$f(x,t) = 3e^{-t}\sin x. \tag{2.5.64}$$

Решение. Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения (2.5.60)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2.5.65}$$

с однородными граничными и начальными условиями

$$\left.u\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi/2} = \left.u\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{2.5.66}$$

где

$$f(x,t) = 3e^{-t}\sin x. \tag{2.5.67}$$

Решение задачи (2.5.60)—(2.5.64) является суммой решения задачи (2.5.65)—(2.5.67) и решения (2.5.59) задачи (2.5.50)—(2.5.53), найденного в примере 2.5.4.

Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $f(x,t)$ являются оригиналами. Положим $U(x,p) = L[u]$, $F(x,p) = L[f]$, применим преобразование Лапласа к уравнению (2.5.65) и граничным условиям (2.5.66), приходим к ОДУ

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2} - p^2U = -\frac{3}{p+1}\sin x \tag{2.5.68}$$

с граничными условиями

$$\left.U\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=\pi/2} = 0. \tag{2.5.69}$$

Общее решение ДУ (2.5.69) имеет вид

$$\begin{aligned} U(x,p) = C_1\,\mathrm{sh}\left(\frac{p}{a}x\right) + C_2\,\mathrm{ch}\left(\frac{p}{a}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \\ + \frac{3}{p+1}\cdot\frac{1}{p^2+a^2}\sin x. \end{aligned} \tag{2.5.70}$$

Подставим (2.5.70) в граничные условия (2.5.69), найдем $C_1 = C_2 = 0$.

Итак:

$$U(x,p) = \frac{3}{p+1}\cdot\frac{1}{p^2+a^2}\sin x.$$

Применим обратное преобразование Лапласа, учитывая теорему умножения Бореля (2.1.9) и соответствия оригиналов и изображений (см. прил. 1 (табл. П1.2, п. 7, 3)):

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] = e^{-t}, \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+a^2}\right] = \frac{1}{a}\sin(at).$$

Находим решение задачи (2.5.65)—(2.5.67):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{3}{a}\int_0^t \sin(a\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau \cdot \sin x = \\ &= 3\left(\frac{1}{a}\sin(at) - \cos(at) + e^{-t}\right)\frac{\sin x}{1+a^2}. \end{aligned} \tag{2.5.71}$$

Решение задачи (2.5.60)—(2.5.64) представляет собой сумму решений (2.5.59) и (2.5.71).

Ответ. $u(x,t) = 3\left(\frac{1}{a}\sin(at) - \cos(at) + e^{-t}\right)\frac{\sin x}{1+a^2} +$

$$+2\cos(3at)\sin 3x + \cos(5at)\sin 5x.$$

Задача 2.5.5.* Решить начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad D = \{x: \ 0 < x < l\}, \quad 0 < t$$

с однородными граничными и заданными начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = g(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = p(x) \quad (0 \le x \le l).$$

1. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

   $f(x,t) = \sin 5xe^{-t}t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \sin x - 2\sin 3x.$

2. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

   $f(x,t) = 2\cos 5xt^2, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos x - 3\cos 3x.$

3. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

   $f(x,t) = 2\cos 3x \operatorname{sh} t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos x + 3\cos 2x.$

4. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin\ xe^{-t}t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \sin(x/2) + 2\sin\ x.$

5. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin(5x/2)\,\mathrm{sh}\ t, \quad g(x) = \sin(x/2) + 2\sin(3x/2), \quad p(x) = 0.$

6. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = \cos(3x/2)3t^2, \quad g(x) = 2\cos(x/2) - \cos(5x/2), \quad p(x) = 0.$

7. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$
$f(x,t) = \cos\ 2x\,\mathrm{ch}\ t, \quad g(x) = \cos\ 2x + \cos\ 4x, \quad p(x) = 0.$

8. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin\ x(t^2 + t), \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\sin(x/2) + \sin\ x.$

9. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin(x/4)e^{-t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \sin(x/4) + 2\sin(3x/4).$

10. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$
$f(x,t) = \cos(x/4)t^2, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\cos(x/4) + 3\cos(3x/4).$

11. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$
$f(x,t) = 2\cos\ 2xte^{-2t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos(x/2) + 2\cos\ x.$

12. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin\ 2xe^{-2t}, \quad g(x) = 3\sin\ x + \sin\ 3x, \quad p(x) = 0.$

13. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$
$f(x,t) = \sin\ x(t^2 - t), \quad g(x) = \sin\ x + 3\sin\ 5x, \quad p(x) = 0.$

14. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$
$f(x,t) = \cos\ 3x\,\mathrm{sh}\ t, \quad g(x) = 3\cos\ x + \cos\ 5x, \quad p(x) = 0.$

15. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = 2\cos\ xt^2, \quad g(x) = \cos\ x - \cos\ 2x, \quad p(x) = 0.$

16. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin\ x\,\mathrm{ch}\ t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 3\sin(x/2) - \sin\ 2x.$

17. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin(3x/2)e^{-t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\sin(x/2) - \sin(5x/2).$

18. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(x/2)(t - t^2), \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos(x/2) - \cos(3x/2).$

19. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\,4xte^{-3t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos\,2x - \cos\,4x.$

20. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\,2xt^3, \quad g(x) = 2\sin(x/2) - 3\sin\,x, \quad p(x) = 0.$

21. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\sin(x/4)e^{-2t}, \quad g(x) = 3\sin(x/4) + 2\sin(3x/4), \quad p(x) = 0.$

22. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos(3x/4)e^{-2t}, \quad g(x) = 5\cos(x/4) + \cos(3x/4), \quad p(x) = 0.$

23. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos\,xte^{-t}, \quad g(x) = 3\cos\,x + 2\cos\,3x, \quad p(x) = 0.$

24. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\sin\,xe^{-t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\sin\,x - \sin\,3x.$

25. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = 3\sin\,5xt^2, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 5\sin\,x - \sin\,3x.$

26. $u_x\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi/2} = 0,$

$f(x,t) = \cos\,x\,\mathrm{sh}\,t, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = 2\cos\,x - \cos\,3x.$

27. $u_x\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = \cos\,2xte^{-2t}, \quad g(x) = 0, \quad p(x) = \cos\,x + \cos\,3x.$

28. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=2\pi} = 0,$

$f(x,t) = \sin\,2xte^{-3t}, \quad g(x) = \sin\,x - 3\sin\,3x, \quad p(x) = 0.$

29. $u\Big|_{x=0} = u_x\Big|_{x=\pi} = 0,$

$f(x,t) = 2\sin(x/2)t^2, \quad g(x) = 2\sin(x/2) + 3\sin(3x/2), \quad p(x) = 0.$

30. $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0,$
$f(x,t) = \sin\, x \,\mathrm{sh}\, t, \quad g(x) = \sin\, 2x + \sin\, 3x, \quad p(x) = 0.$

2.6. Применение операционного исчисления к прикладным задачам

Рассмотрим на примерах применение преобразования Лапласа к некоторым задачам из механики, физики, техники.

Пример 2.6.1.* Задача об одномерном движении материальной частицы под действием упругой силы, вязкого сопротивления и внешней возмущающей силы.

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей квазиупругой силы λx, пропорциональной смещению x от точки 0 (исходной точки покоя), силы вязкого сопротивления μV, пропорциональной скорости V и направленной против движения и внешней возмущающей силы $F(t) = \beta \sin \Omega t$. Определить закон движения частицы $x = x(t)$, если в момент времени $t = 0$ частица находилась на расстоянии x_0 от положения равновесия и имела скорость V_0 (рис. 2.6.1).

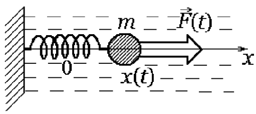


Рис. 2.6.1

Решение. Согласно второму закону Ньютона уравнение движения частицы имеет следующий вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{dx}{dt} - \lambda x + \beta \sin \Omega t \tag{2.6.1}$$

и начальные условия

$$x(0) = x_0, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = V_0. \tag{2.6.2}$$

Перепишем (2.6.1) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2b\frac{dx}{dt} - cx + a\sin\omega t, \tag{2.6.3}$$

где коэффициент $c = \dfrac{\lambda}{m}$ отвечает за квазиупругую силу, $b = \dfrac{\mu}{2m}$ — за вязкое сопротивление, $a = \dfrac{\beta}{m}$ — за внешнюю нагрузку с частотой Ω.

Применим к уравнению (2.6.3) преобразование Лапласа. Пусть $L[x(t)] = X(p)$, тогда $L\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = pX(p) - x_0$, $L\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}\right] = p^2X(p) - px_0 - V_0$ в силу начальных условий (2.6.3). Учитывая, что $L[\sin\Omega t] = \dfrac{\Omega}{p^2+\Omega^2}$, получим операторное уравнение

$$p^2X(p) - px_0 - V_0 = -2b(pX(p) - x_0) - cX(p) + a\frac{\Omega}{p^2+\Omega^2}, \qquad (2.6.4)$$

решая которое, найдем $X(p)$:

$$X(p) = \frac{(p+2b)x_0 + V_0}{p^2+2bp+c} + a\frac{1}{p^2+2bp+c}\cdot\frac{\Omega}{p^2+\Omega^2}. \qquad (2.6.5)$$

Поскольку $p^2+2bp+c = (p+b)^2+c-b^2$, то обозначим $c-b^2 = \omega^2 \neq 0$. Перепишем операторное решение (2.6.5) в виде

$$\begin{gathered} X(p) = x_0\frac{p+b}{(p+b)^2+\omega^2} + \frac{bx_0+V_0}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+b)^2+\omega^2}+ \\ +\frac{a}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+b)^2+\omega^2}\cdot\frac{\Omega}{p^2+\Omega^2}. \end{gathered} \qquad (2.6.6)$$

В силу линейности преобразования Лапласа, используя прил. 1 (табл. П1.1) и теорему Бореля о свертке, получим общее решение исходной задачи (2.6.1), (2.6.2):

$$\begin{gathered} x(t) = x_0e^{-bt}\cos\omega t + \frac{bx_0+V_0}{\omega}e^{-bt}\sin\omega t+ \\ +\frac{a}{\omega}\int\limits_0^t e^{-b\tau}\sin\omega\tau\ \sin(\Omega(t-\tau))d\tau. \end{gathered} \qquad (2.6.7)$$

Проведем анализ этого решения для некоторых частных случаев.

1. Пусть $b=0$, $a=0$ — свободное движение при отсутствии сопротивления. Тогда из решения (2.6.7) имеем

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t \qquad (2.6.8)$$

или

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (2.6.9)$$

где $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{V_0}{\omega}\right)^2}$ — амплитуда, $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \dfrac{x_0\omega}{V_0}$ — начальная фаза.

Частица совершает гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{c} = \sqrt{\dfrac{\lambda}{m}}$ (определяемой жесткостью λ пружины и массой m частицы) и периодом $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{c}}$ относительно положения равновесия. Заметим, если начальная скорость $V_0 = 0$, то амплитуда A колебаний равна начальному расстоянию x_0, а если $V_0 \neq 0$, то амплитуда будет больше x_0.

2. Пусть $b \neq 0, a = 0$ — свободное движение при вязком сопротивлении.

а) Пусть $\omega^2 = c - b^2 > 0$ (малая вязкость). Тогда решение (2.6.7) примет вид

$$x(t) = e^{-bt}\left[x_0 \cos\omega t + \frac{bx_0 + V_0}{\omega}\sin\omega t\right] \tag{2.6.10}$$

или

$$x(t) = Ae^{-bt}\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Точка совершает колебания с частотой $\omega = \sqrt{c - b^2}$ относительно положения исходного равновесия, но размахи колебаний, благодаря наличию множителя e^{-bt}, убывают со временем, стремясь к нулю при $t \to +\infty$. Период затухающих колебаний $T_1 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{c - b^2}} > T$, т.е. наличие сопротивления несколько увеличивает период колебаний.

б) Пусть $\omega^2 = c - b^2 < 0$ (достаточно большая вязкость). Обозначим $\omega_1^2 = b^2 - c$, тогда $\omega = i\omega_1$, где ω_1 — действительное положительное число. Получим формально из (2.6.10)

$$x(t) = e^{-bt}\left[x_0 \cos i\omega_1 t + \frac{bx_0 + V_0}{i\omega_1}\sin i\omega_1 t\right].$$

Учитывая, что $\cos i\omega_1 t = \operatorname{ch}\omega_1 t$, $\sin i\omega_1 t = i\operatorname{sh}\omega_1 t$, имеем

$$x(t) = e^{-bt}\left[x_0 \operatorname{ch}\omega_1 t + \frac{bx_0 + V_0}{\omega_1}\operatorname{sh}\omega_1 t\right]. \tag{2.6.11}$$

Поскольку $\omega_1 < b$, то легко видеть, что частица с течением времени асимптотически приближается к притягивающему центру, колебания вокруг него отсутствуют.

3. Пусть $b = 0$, $a \neq 0$ — вынужденные колебания при отсутствии сопротивления. Из общего решения (2.6.7) имеем

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{a}{\omega}\int\limits_0^t \sin\omega\tau\, \sin(\Omega(t - \tau))d\tau. \tag{2.6.12}$$

а) Пусть $\Omega \neq \omega$. Подсчитаем отдельно интеграл в правой части (2.6.12). Имеем

$$I = \int\limits_0^t \sin\omega\tau \, \sin(\Omega(t-\tau))d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Big[\cos((\omega+\Omega)\tau - \Omega t) - \cos((\omega-\Omega)\tau + \Omega t)\Big]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega+\Omega}(\sin\omega t + \sin\Omega t) - \frac{1}{\omega-\Omega}(\sin\omega t - \sin\Omega t)\right] =$$

$$= -\frac{\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\sin\omega t + \frac{\omega}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t.$$

Тогда из (2.6.12) получим

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \left(\frac{V_0}{\omega} - \frac{\Omega a}{\omega(\omega^2-\Omega^2)}\right)\sin\omega t + \frac{a}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t \qquad (2.6.13)$$

или

$$x(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin\Omega t, \qquad (2.6.14)$$

где постоянные A_1, φ_1 — амплитуда и начальная фаза, легко вычисляются, амплитуда $A_2 = \dfrac{a}{\omega^2-\Omega^2}$.

Частица совершает сложное колебание, которое является наложением двух колебаний: собственных колебаний с частотой ω и вынужденных колебаний с частотой Ω, равной частоте возмущающей силы. Заметим, что амплитуда вынужденных колебаний A_2 (в отличии от амплитуды A_1 собственных колебаний) не зависит от начальных условий. С увеличением частоты возмущающей силы Ω амплитуда A_2 вынужденных колебаний стремится к нулю, т.е. действие возмущающей силы, частота Ω которой много больше, чем частота ω собственных колебаний, почти не нарушает режима собственных колебаний.

б) Пусть $\Omega = \omega$ — частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний. Подсчитаем отдельно интеграл в правой части решения (2.6.12). Имеем

$$I = \int\limits_0^t \sin\omega\tau \, \sin(\omega(t-\tau))d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Big[\cos(\omega(2\tau - t)) - \cos\omega t\Big]d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\omega}\sin(\omega(2\tau-t))\Big|_{\tau=0}^{t} - \frac{1}{2}\cos\omega t\cdot\tau\Big|_{\tau=0}^{t} = \frac{1}{2\omega}\sin\omega t - \frac{1}{2}t\cos\omega t.$$

Тогда решение (2.6.12) примет вид

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{a}{2\omega^2}\sin\omega t - \frac{a}{2\omega^2}t\cos\omega t \tag{2.6.15}$$

или

$$x(t) = A_3\sin(\omega t + \varphi_3) + A_4 t\cos\omega t, \tag{2.6.16}$$

где постоянные A_3, φ_3 — амплитуда и начальная фаза собственного гармонического колебания (легко вычисляются), $A_4 = -\dfrac{a}{2\omega^2}$. Наличие множителя t в последнем слагаемом (2.6.16) показывает, что амплитуда (размах) вынужденных колебаний в этом случае будет неограниченно возрастать при $t \to +\infty$. Этот эффект называется *резонансом.*

4. Пусть $b \neq 0$, $a \neq 0$ — вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления.

Решение в этом случае задается соотношением (2.6.7). Пусть $\omega^2 = c - b^2 > 0$ (малая вязкость).

Подсчитаем отдельно интеграл в правой части (2.6.7):

$$\begin{gathered} I = \int_0^t e^{-b\tau}\sin\omega\tau\ \sin(\Omega(t-\tau))d\tau = \\ = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-b\tau}\Big[\cos((\omega+\Omega)\tau - \Omega t) - \cos((\omega-\Omega)\tau + \Omega t)\Big]d\tau = \\ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-b\tau + i[(\omega+\Omega)\tau - \Omega t]}d\tau - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-b\tau + i[(\omega-\Omega)\tau + \Omega t]}d\tau = \\ = \frac{1}{2}(I_1 - I_2), \end{gathered} \tag{2.6.17}$$

где

$$I_1 = \mathrm{Re}\left\{e^{-i\Omega t}\int_0^t e^{(-b+i(\omega+\Omega))\tau}d\tau\right\} = \mathrm{Re}\left\{e^{-i\Omega t}\frac{1}{-b+i(\omega+\Omega)}e^{(-b+i(\omega+\Omega))\tau}\Big|_{\tau=0}^{t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{-b-i(\omega+\Omega)}{b^2+(\omega+\Omega)^2}\left[e^{(-b+i\omega)t} - e^{-i\Omega t}\right]\right\} = \tag{2.6.18}$$

$$= \frac{1}{b^2+(\omega+\Omega)^2}\Big[-be^{-bt}\cos\omega t + e^{-bt}(\omega+\Omega)\sin\omega t + b\cos\Omega t + (\omega+\Omega)\sin\Omega t\Big].$$

Аналогично

$$I_2=\operatorname{Re}\left\{e^{i\Omega t}\int\limits_0^t e^{(-b+i(\omega-\Omega))\tau}d\tau\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{-b-i(\omega-\Omega)}{b^2+(\omega-\Omega)^2}\left[e^{(-b+i\omega)t}-e^{i\Omega t}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{b^2+(\omega-\Omega)^2}\Big[-be^{-bt}\cos\omega t+e^{-bt}(\omega-\Omega)\sin\omega t+b\cos\Omega t-(\omega-\Omega)\sin\Omega t\Big]. \tag{2.6.19}$$

Подставляя выражение для интеграла I в формулу (2.6.7), получим

$$\begin{gathered}x(t)=x_0e^{-bt}\cos\omega t+\frac{bx_0+V_0}{\omega}e^{-bt}\sin\omega t+\\+\frac{a}{2\omega}\left\{\left[\frac{-b}{b^2+(\omega+\Omega)^2}+\frac{b}{b^2+(\omega-\Omega)^2}\right]e^{-bt}\cos\omega t+\right.\\+\left[\frac{\omega+\Omega}{b^2+(\omega+\Omega)^2}-\frac{\omega-\Omega}{b^2+(\omega-\Omega)^2}\right]e^{-bt}\sin\omega t+\\+\left[\frac{b}{b^2+(\omega+\Omega)^2}-\frac{b}{b^2+(\omega-\Omega)^2}\right]\cos\omega t+\\\left.+\left[\frac{\omega+\Omega}{b^2+(\omega+\Omega)^2}+\frac{\omega-\Omega}{b^2+(\omega-\Omega)^2}\right]\sin\omega t\right\}.\end{gathered} \tag{2.6.20}$$

Учитывая, что $[b^2+(\omega+\Omega)^2]\,[b^2+(\omega-\Omega)^2]=(\omega^2+b^2-\Omega^2)^2+4b^2\Omega^2$, после небольших упрощений имеем

$$\begin{gathered}x(t)=\left[x_0+\frac{2ab\Omega}{(\omega^2+b^2-\Omega^2)^2+4b^2\Omega^2}\right]e^{-bt}\cos\omega t+\\+\left[\frac{bx_0+V_0}{\omega}-\frac{a\Omega[\omega^2-b^2-\Omega^2]}{\omega((\omega^2+b^2-\Omega^2)^2+4b^2\Omega^2)}\right]e^{-bt}\sin\omega t-\\-\frac{2ab}{(\omega^2+b^2-\Omega^2)^2+4b^2\Omega^2}\cos\omega t+\frac{a(\omega^2+b^2-\Omega^2)}{(\omega^2+b^2-\Omega^2)^2+4b^2\Omega^2}\sin\omega t\end{gathered} \tag{2.6.21}$$

или

$$x(t)=A_5e^{-bt}\sin(\omega t+\varphi_5)+A_6\sin(\Omega t-\varphi_6), \tag{2.6.22}$$

где A_5, φ_5 — амплитуда и начальная фаза затухающих собственных колебаний (они легко подсчитываются), A_6 — амплитуда, φ_6 — начальная фаза незатухающих вынужденных колебаний. Имеем

$$A_6=\frac{a}{\sqrt{(\omega^2+b^2-\Omega^2)+4b^2\Omega^2}};\qquad \varphi_6=\operatorname{arctg}\left(\frac{2b\Omega}{\omega^2+b^2-\Omega^2}\right). \tag{2.6.23}$$

Из решения (2.6.22) сразу видно, что через некоторый промежуток времени частица практически будет совершать только вынужденные колебания (поскольку множитель $e^{-bt} \to 0$ при $t \to +\infty$)) с частотой Ω возмущающей силы. Заметим, что A_6 и φ_6 не зависят от начальных условий.

Выясним, как будет изменяться амплитуда A_6 вынужденных колебаний в зависимости от частоты Ω возмущающей силы. Для этого рассмотрим подкоренное выражение в знаменателе A_6

$$g(\Omega) = (\omega^2 + b^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2.$$

Вычислим производную

$$g'(\Omega) = 2(\omega^2+b^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8b^2\Omega = 4\Omega(b^2-\omega^2+\Omega^2) = 4\Omega(\Omega-\Omega_1)(\Omega-\Omega_2).$$

Критические точки, где $g'(\Omega) = 0$, есть $\Omega = 0$, $\Omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}$, $\omega_2 = -\sqrt{\omega^2 - b^2}$. Теперь по знаку производной в окрестности этих точек легко видеть, что $g(\Omega)$ достигает максимума в точке $\Omega_0 = 0$, а точки Ω_1, Ω_2 — точки минимума. Следовательно, при $\Omega = \Omega_1$ амплитуда A_6 имеет максимум, т.е. при $\Omega = \Omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} = \sqrt{c - 2b^2}$ наступает резонанс.

В случае, когда вязкое сопротивление мало $(2b^2 \ll c)$, можно считать, что $\Omega_1 \approx \sqrt{c}$ и что резонанс в этом случае наступает, когда частота возмущающей силы близка к частоте собственных колебаний.

Случай $\omega^2 = c - b^2 < 0$ (большая вязкость) рассматривается аналогично. Положим $\omega = i\omega_1$, где $\omega_1 = \sqrt{b^2 - c}$ — действительное положительное число. Тогда из решения (2.6.21), учитывая, что $\cos\omega t = \cos i\omega_1 t = \operatorname{ch}\omega_1 t$, $\sin\omega t = \sin i\omega_1 t = i\operatorname{sh}\omega_1 t$ сразу получим

$$x(t) = \left[x_0 + \frac{2ab\Omega}{(b^2 - \omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}\right] e^{-bt}\operatorname{ch}\omega_1 t +$$
$$+\left[\frac{bx_0 + V_0}{\omega_1} + \frac{a\Omega(b^2 + \omega_1^2 + \Omega^2)}{\omega_1((b^2 - \omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2)}\right] e^{-bt}\operatorname{sh}\omega_1 t - \tag{2.6.24}$$
$$-\frac{2ab}{(b^2 - \omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}\cos\Omega t + \frac{a(b^2 - \omega_1^2 - \Omega^2)}{(b^2 - \omega_1^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}\sin\Omega t.$$

Несложный анализ этого решения, аналогичный предыдущему, и выяснение условий резонанса предоставляем любознательному читателю.

Заметим, что операционный метод позволяет сразу записать общее решение этой задачи в интегральном виде (2.6.7) для всех рассмотренных выше частных случаев.

Теория вынужденных колебаний, рассмотренная в этом простейшем примере, имеет много важных приложений в различных областях науки и техники (акустика, радиотехника, сейсмография и многое другое). При этом широко используется явление резонанса. В одних ситуациях резонанс бывает чрезвычайно выгодным, в других его целенаправленно пытаются избежать.

Пример 2.6.2.* Задача о колебаниях двойного маятника.

Исследовать малые колебания около положения устойчивого равновесия двойного маятника, состоящего из масс m_1 и m_2, сосредоточенных на концах A и B двух невесомых абсолютно твердых стержней OA и AB длиной l_1 и l_2 в поле сил тяжести. Трение в точках закрепления и сопротивление среды отсутствует (рис. 2.6.2).

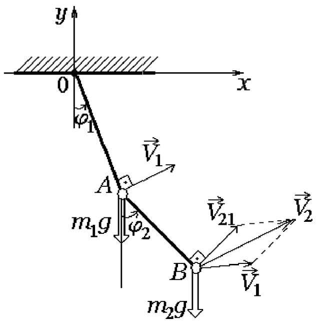


Рис. 2.6.2

Решение. В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1 и φ_2, которые стержни образуют с вертикалью.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2),$$

где $\vec{V}_1 = [\vec{\omega}_1, \overrightarrow{OA}]$. В проекциях на оси координат с учетом $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1$, $\omega_{2z} = \dot{\varphi}_2$ (где точкой сверху обозначим производную по времени t) получим

$$V_{1x} = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1, \qquad V_{1y} = l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1.$$

Имеем также $\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_{21} = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_2, \overrightarrow{AB}]$, что в проекциях на оси координат дает

$$V_{2x} = V_{1x} + l_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 = l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2,$$

$$V_{2y} = V_{1y} + l_2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 = l_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2.$$

Выражение для потенциальной энергии сил тяжести имеет вид

$$\Pi = -m_1gl_1\cos\varphi_1 - m_2g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2),$$

где g — ускорение свободного падения.

Тогда функция Лагранжа примет следующий вид:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\Big(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\Big) +$$

$$+m_1gl_1\cos\varphi_1 + m_2g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2).$$

Запишем уравнения Лагранжа для консервативной системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi_1} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi_2} = 0. \end{cases} \tag{2.6.25}$$

Вычислим производные, входящие в эти уравнения:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2\dot{\varphi}_2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} = m_2l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2\dot{\varphi}_1l_1l_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2\ddot{\varphi}_2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)l_1l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} = m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2\ddot{\varphi}_1l_1l_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)l_1l_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = m_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2l_1l_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - gl_1(m_1 + m_2)\sin\varphi_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_2} = m_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2l_1l_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - gl_2m_2\sin\varphi_2.$$

В результате система уравнений (2.6.25) примет вид

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2\ddot{\varphi}_2 l_1 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)- \\ \qquad -m_2\dot{\varphi}_2^2 l_1 l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1) + gl_1(m_1+m_2)\sin\varphi_1 = 0, \\ m_2 l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2\ddot{\varphi}_1 l_1 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2\dot{\varphi}_1^2 l_1 l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+ \\ \qquad +gl_2 m_2\sin\varphi_2 = 0. \end{cases} \tag{2.6.26}$$

Как видим, получена довольно сложная система нелинейных ОДУ.

Рассмотрим простейший случай, когда $m_1=m_2=m$, $l_1=l_2=l$. Для малых углов, полагая $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1-\varphi^2/2$, получим линеаризованную систему

$$\begin{cases} 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + 2k^2\varphi_1 = 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + k^2\varphi_2 = 0, \end{cases} \tag{2.6.27}$$

где $k=\sqrt{g/l}$.

Рассмотрим простейший случай начальных условий:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(0)=\varphi_1^0, \qquad & \dot{\varphi}_1(0)=0, \\ \varphi_2(0)=\varphi_2^0, \qquad & \dot{\varphi}_2(0)=0, \end{array} \tag{2.6.28}$$

т.е. система выведена из положения равновесия и отпущена без начальных скоростей.

Применим к уравнениям (2.6.27) преобразование Лапласа. Обозначим $L[\varphi_1(t)]=\Phi_1(p)$, $L[\varphi_2(t)]=\Phi_2(p)$, тогда в силу начальных условий (2.6.28) имеем

$$L[\ddot{\varphi}_1(t)] = p^2\Phi_1(p) - p\varphi_1^0, \qquad L[\ddot{\varphi}_2(t)] = p^2\Phi_2(p) - p\varphi_2^0.$$

По свойству линейности преобразования Лапласа получим следующую операторную систему:

$$\begin{cases} 2(p^2+k^2)\Phi_1(p) + p^2\Phi_2(p) = 2p\varphi_1^0 + p\varphi_2^0, \\ p^2\Phi_1(p) + (p^2+k^2)\Phi_2(p) = p\varphi_1^0 + p\varphi_2^0. \end{cases} \tag{2.6.29}$$

Решая ее с помощью правила Крамера, получим операторное решение

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \dfrac{p(\varphi_1^0 p^2 + (2\varphi_1^0+\varphi_2^0)k^2)}{2(p^2+k^2)^2 - p^4}, \\ \Phi_2(p) = \dfrac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \dfrac{p(\varphi_2^0 p^2 + 2(\varphi_1^0+\varphi_2^0)k^2)}{2(p^2+k^2)^2 - p^4}. \end{cases} \tag{2.6.30}$$

Заметим, что $\Phi_1(p)$, $\Phi_2(p)$ — правильные рациональные дроби, и для нахождения их оригиналов $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ удобно воспользоваться второй теоремой разложения, согласно которой в случае, если все полюса p_n $\Phi_i(p) = \dfrac{\Delta_i(p)}{\Delta(p)}$ простые:

$$\varphi_i(t) = L^{-1}[\Phi_i(p)] = \sum_{n=1}^{m} \frac{\Delta_i(p_n)}{\Delta'(p_n}) e^{p_n t}, \quad i = 1, 2. \tag{2.6.31}$$

Найдем полюса p_n как корни уравнения $\Delta(p) = 0$. Имеем

$$\Delta(p) = 2(p^2 + k^2) - p^4 = (\sqrt{2}(p^2 + k^2) - p^2)(\sqrt{2}(p^2 + k^2) + p^2) =$$

$$= ((\sqrt{2} - 1)p^2 + \sqrt{2}k^2)((\sqrt{2} + 1)p^2 + \sqrt{2}k^2),$$

откуда для полюсов p_n, $n = \overline{1,4}$ получим

$$p_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}} k = \pm i \sqrt{2 + \sqrt{2}} k,$$

$$p_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}} k = \pm i \sqrt{2 - \sqrt{2}} k.$$

Заметим, что

$$p_{1,2}^2 = (-2 - \sqrt{2})k^2, \qquad p_{3,4}^2 = (-2 + \sqrt{2})k^2,$$

$$\Delta'(p) = 4(p^2 + k^2)2p - 4p^3 = 4p(p^2 + 2k^2).$$

Тогда по формуле (2.6.31) имеем

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=1}^{4} \frac{p_n(\varphi_1^0 p_n^2 + (2\varphi_1^0 + \varphi_2^0)k^2)}{4p_n(p_n^2 + 2k^2)} e^{p_n t} =$$

$$= \frac{k^2}{4} \left\{ \frac{(\varphi_1^0(-2 - \sqrt{2}) + 2\varphi_1^0 + \varphi_2^0)}{(-2 - \sqrt{2})k^2 + 2k^2} e^{i\sqrt{2+\sqrt{2}}\,kt} + \right.$$

$$+ \frac{(\varphi_1^0(-2 - \sqrt{2}) + 2\varphi_1^0 + \varphi_2^0)}{(-2 - \sqrt{2})k^2 + 2k^2} e^{-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\,kt} +$$

$$+ \frac{(\varphi_1^0(-2 + \sqrt{2}) + 2\varphi_1^0 + \varphi_2^0)}{(-2 + \sqrt{2})k^2 + 2k^2} e^{i\sqrt{2-\sqrt{2}}\,kt} +$$

$$+\frac{(\varphi_1^0(-2+\sqrt{2})+2\varphi_1^0+\varphi_2^0)}{(-2+\sqrt{2})k^2+2k^2}e^{-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\,kt}\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{-\sqrt{2}\varphi_1^0+\varphi_2^0}{\sqrt{2}}\left(e^{i\sqrt{2+\sqrt{2}}\,kt}+e^{-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\,kt}\right)+\right. \tag{2.6.32}$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}\varphi_1^0+\varphi_2^0}{\sqrt{2}}\left(e^{i\sqrt{2-\sqrt{2}}\,kt}+e^{-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\,kt}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\varphi_1^0-\varphi_2^0)\cos(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,kt)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\varphi_1^0+\varphi_2^0)\cos(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,kt)\right\}.$$

Аналогично

$$\varphi_2(t)=\sum_{n=1}^{4}\frac{p_n(\varphi_2^0p_n^2+(2\varphi_1^0+2\varphi_2^0)k^2)}{4p_n(p_n^2+2k^2)}e^{p_nt}=\ldots= \tag{2.6.33}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(\varphi_2^0-\sqrt{2}\varphi_1^0)\cos(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,kt)+(\varphi_2^0+\sqrt{2}\varphi_1^0)\cos(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,kt)\right\}.$$

Обозначим $k_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,k$, $k_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,k$, $A_1=\sqrt{2}\varphi_1^0+\varphi_2^0$, $A_2=\sqrt{2}\varphi_1^0-\varphi_2^0$. Тогда соотношения (2.6.32), (2.6.33) примут следующий вид:

$$\begin{cases}\varphi_1(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(A_1\cos k_1t+A_2\cos k_2t),\\[2mm] \varphi_2(t)=\dfrac{1}{2}(A_1\cos k_1t-A_2\cos k_2t).\end{cases} \tag{2.6.34}$$

Теперь видно, что решение (2.6.34) определяет закон сложных незатухающих колебаний около положения устойчивого равновесия. Эти колебания всегда могут быть представлены как результат наложения двух колебаний с частотой k_1 (первое главное колебание) и с частотой k_2 (второе главное колебание).

При соответствующих начальных условиях система может совершать одно из главных колебаний в чистом виде.

При $\varphi_2^0=\sqrt{2}\varphi_1^0$ имеем $A_2=0$. Тогда из (2.6.34) получаем

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}A_1\cos k_1t,\qquad \varphi_2(t)=\frac{1}{2}A_1\cos k_1t, \tag{2.6.35}$$

т.е. при первом главном колебании (колебании с меньшей частотой k_1) стержни в любой момент времени отклонены от вертикали в одну и ту же сторону.

При $\varphi_2^0 = -\sqrt{2}\varphi_1^0$ имеем $A_1 = 0$. Из (2.6.34) получим

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} A_2 \cos k_2 t, \qquad \varphi_2(t) = -\frac{1}{2} A_2 \cos k_2 t, \tag{2.6.36}$$

т.е. при втором главном колебании с частотой k_2 стержни в любой момент времени отклонены от вертикали в разные стороны.

Пример 2.6.3.* Задача о движении заряженной частицы в вязкой среде в присутствии однородного магнитного поля.

Пусть в момент времени $t = 0$ частица массой m и зарядом q имеет скорость $\vec{V}_0$, причем $\vec{V}_0$ направлен перпендикулярно $\vec{B}$, где $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции. Сила сопротивления движению частицы $\vec{R} = -\mu\vec{V}$ пропорциональна скорости и направлена против движения.

Требуется описать траекторию частицы, определить время до полной остановки и путь, которая она при этом пройдет.

Решение. Составим уравнения движения частицы. Кроме силы сопротивления $\vec{R}$ на частицу будет действовать сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}]$. Как легко видеть из направлений векторов $\vec{F}$ и $\vec{R}$, движение частицы будет происходить в плоскости, проходящей через начальную точку и имеющей вектор $\vec{B}$ в качестве нормали. Введем на этой плоскости декартову систему координат Oxy, направив ось Oy вдоль вектора $\vec{V}_0$ (рис. 2.6.3) и дополним ее осью Oz, направленной вдоль вектора $\vec{B}$.

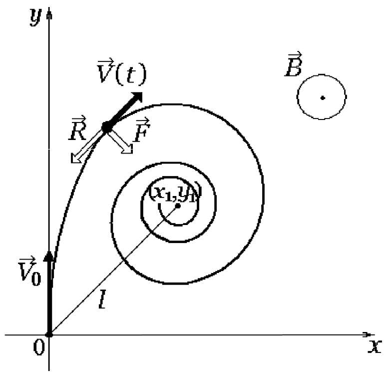


Рис. 2.6.3

В этой системе $\vec{V}_0 = \{0, V_0, 0\}$, $\vec{V}(t)$ — вектор скорости частицы в момент времени t есть $\vec{V} = \{V_x, V_y, 0\}$, $\vec{B} = \{0, 0, B\}$.

Уравнение движения (в нашем случае — второй закон Ньютона) будет иметь вид

$$m\frac{d}{dt}\vec{V} = -\mu\vec{V} + q[\vec{V}, \vec{B}]. \tag{2.6.37}$$

Записывая по координатам, учитывая что $[\vec{V}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_x & V_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} =$
$= \{BV_y, -BV_x, 0\}$, получим систему ОЛДУ

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}V_x = -\dfrac{\beta}{m}V_x + \dfrac{qB}{m}V_y, \\ \dfrac{d}{dt}V_y = -\dfrac{\beta}{m}V_y - \dfrac{qB}{m}V_y \end{cases} \tag{2.6.38}$$

и начальные условия

$$V_x(0) = 0, \qquad V_y(0) = V_0. \tag{2.6.39}$$

Обозначим $\omega = \dfrac{qB}{m}$, $\gamma = \dfrac{\mu}{m}$, тогда система (2.6.38) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}V_x + \gamma V_x - \omega V_y = 0, \\ \dfrac{d}{dt}V_y + \omega V_x + \gamma V_y = 0. \end{cases} \tag{2.6.40}$$

Применим преобразование Лапласа к системе (2.6.40). Пусть $L[V_x(t)] = F(p)$, $L[V_y(t)] = G(p)$. Тогда по свойству линейности и по теореме о дифференциаровании оригинала с учетом начальных условий (2.6.39) получим операторную систему

$$\begin{cases} (p+\gamma)F(p) - \omega G(p) = 0, \\ \omega F(p) + (p+\gamma)G(p) = V_0. \end{cases} \tag{2.6.41}$$

Решая ее, например, методом Крамера, получим операторное решение

$$\begin{cases} F(p) = V_0\dfrac{\omega}{(p+\gamma)^2 + \omega^2}, \\ G(p) = V_0\dfrac{p+\gamma}{(p+\gamma)^2 + \omega^2}. \end{cases} \tag{2.6.42}$$

Используя прил. 1 (табл. П1.2) или непосредственно по теореме о смещении изображения, находим соответствующие оригиналы:

$$\begin{aligned} V_x(t) &= L^{-1}[F(p)] = V_0 e^{-\gamma t}\sin\omega t = \mathrm{Im}\,\{V_0 e^{-\gamma t + i\omega t}\}, \\ V_y(t) &= L^{-1}[G(p)] = V_0 e^{-\gamma t}\cos\omega t = \mathrm{Re}\,\{V_0 e^{-\gamma t + i\omega t}\}. \end{aligned} \tag{2.6.43}$$

Откуда, интегрируя по времени t, получим закон движения частицы, т.е. ее координаты $\{x(t), y(t)\}$ в момент времени t:

$$x(t) = \int_0^t V_x dt = \mathrm{Im} \int_0^t V_0 e^{(-\gamma+i\omega)t} dt = \mathrm{Im} \frac{V_0}{-\gamma+i\omega} e^{(-\gamma+i\omega)t}\Big|_0^t =$$

$$= \mathrm{Im} \frac{V_0(-\gamma-i\omega)}{\gamma^2+\omega^2}\Big[e^{-\gamma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t) - 1\Big] = \tag{2.6.44}$$

$$= \frac{V_0}{\gamma^2+\omega^2}\Big[e^{-\gamma t}(-\gamma\sin\omega t - \omega\cos\omega t) + \omega\Big].$$

Аналогично

$$y(t) = \int_0^t V_y dt = \mathrm{Re} \int_0^t V_0 e^{(-\gamma+i\omega)t} dt = \ldots =$$

$$= \frac{V_0}{\gamma^2+\omega^2}\Big[e^{-\gamma t}(-\gamma\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + \gamma\Big]. \tag{2.6.45}$$

Как легко видеть, траектория движения частицы — логарифмическая спираль, закручивающаяся к некоторой точке (x_1, y_1), в которой материальная частица остановится при $t = +\infty$. Переходя в формулах (2.6.44) и (2.6.45) к пределу при $t \to +\infty$, получим координаты точки остановки:

$$x_1 = \frac{V_0\omega}{\gamma^2+\omega^2}, \qquad y_1 = \frac{V_0\gamma}{\gamma^2+\omega^2}. \tag{2.6.46}$$

Расстояние l от начальной точки до точки остановки

$$l = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \frac{V_0}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}. \tag{2.6.47}$$

Хотя, как легко видеть, число оборотов частицы вокруг точки остановки бесконечно, причем период T каждого оборота один и тот же — $T = 2\pi/\omega$, но путь L, пройденный частицей до точки остановки, конечен:

$$L = \int_0^\infty \sqrt{V_x^2+V_y^2}\, dt = \int_0^\infty V_0 e^{-\gamma t} dt = \frac{V_0}{-\gamma} e^{-\gamma t}\Big|_0^\infty = \frac{V_0}{\gamma}. \tag{2.6.48}$$

Полученные результаты кажутся, на первый взгляд, парадоксальными, но математика и физика может их объяснить.

Пример 2.6.4.* В схеме, изображенной на рис. 2.6.4, при нулевых условиях замыкают ключ. Пусть $e(t)$ — электродвижущая сила источников (ЭДС), внутреннее сопротивление которого равно нулю, $z_1 = C$ — емкость, $z_2 = R = 0$ — сопротивление, $z_3 = L$ — индуктивность, $z_4 = C$ — емкость. Используя метод контурных токов, найти ток $i_2(t)$ и напряжение $u_{ab}(t)$ на зажимах ab. Рассмотреть различные зависимости ЭДС:

$$\text{а) } e(t) = E_0 \sin(\omega t); \quad \text{б) } e(t) = E_0; \quad \text{в) } e(t) = \left[\begin{array}{ll} t, & 0 \le t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t < 2, \\ 0, & 2 \le t. \end{array} \right.$$

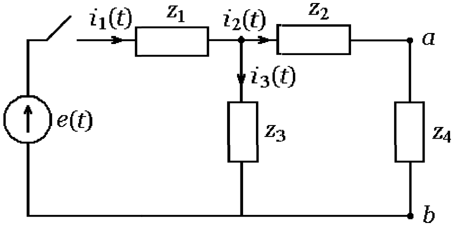


Рис. 2.6.4

Решение. Электрическая схема нашей задачи изображена на рис. 2.6.5.

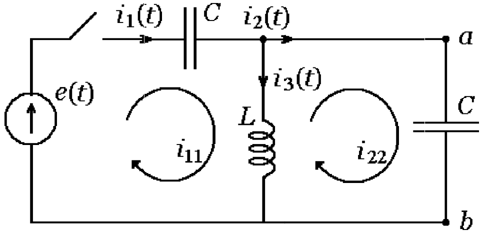


Рис. 2.6.5

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю. Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС. В методе контурных токов за искомые величины принимают контурные токи, полагая, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Пусть $i_{11}(t)$ и

$i_{22}(t)$ — контурные токи. Применим второй закон Кирхгофа к каждому контуру:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C}\int i_{11}(t)dt + L\dfrac{di_{11}}{dt} - L\dfrac{di_{22}}{dt} = e(t), \\ L\dfrac{di_{11}}{dt} + \dfrac{1}{C}\int i_{22}(t)dt + L\dfrac{di_{22}}{dt} = 0. \end{cases} \tag{2.6.49}$$

Заметим, что $i_1(t) = i_{11}(t)$, $i_2(t) = i_{22}(t)$, $i_3(t) = i_{11}(t) - i_{22}(t)$, $u_{ab}(t) = \dfrac{1}{C}\int i_{22}(t)dt$. Применим преобразование Лапласа к уравнениям (2.6.49), обозначим $L[i_{11}(t)] = I_1(p)$, $L[i_{22}(t)] = I_2(p)$, $L[e(t)] = E(p)$ и учтем начальные данные $i_1(0) = i_2(0) = 0$. Получим систему для операторных токов

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{Cp} + Lp\right) I_1(p) - LpI_2(p) = E(p), \\ -LpI_1(p) + \left(\dfrac{1}{Cp} + L\right) I_2(p) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим операторный ток

$$I_2(p) = \frac{C}{2}\,\frac{p^3}{p^2+\Omega^2}E(p), \tag{2.6.50}$$

где $\Omega^2 = \dfrac{1}{2LC}$.

а) Пусть $e(t) = E_0\sin\omega t$, тогда $E(p) = \dfrac{E_0\omega}{p^2+\omega^2}$, а операторный ток

$$I_2(p) = \frac{E_0C}{2}\,\frac{p^3}{p^2+\Omega^2}\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{E_0C}{2}\left(p - \Omega^2\frac{p}{p^2+\Omega^2}\right)\frac{\omega}{p^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{E_0C}{2}\left(\omega\frac{p}{p^2+\omega^2} - \Omega^2\frac{p}{p^2+\Omega^2}\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right).$$

Применим обратное преобразование Лапласа. Предположим, что $\omega \neq \Omega$, и используем теорему умножения Бореля для нахождения оригинала второго слагаемого:

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right] = \int\limits_0^t \cos(\Omega\tau)\sin(\omega(t-\tau))d\tau =$$

$$= \frac{\omega}{\Omega^2-\omega^2}(\cos\omega t - \cos\Omega t).$$

Находим искомый ток

$$i_{22}(t) = i_2(t) = \frac{E_0C}{2}\left(\omega\cos\omega t - \frac{\Omega^2\omega}{\Omega^2-\omega^2}(\cos\omega t - \cos\Omega t)\right) = \\ = \frac{E_0C}{2}\frac{\omega}{\Omega^2-\omega^2}(\Omega^2\cos\Omega t - \omega^2\cos\omega t). \tag{2.6.51}$$

При $\omega \to \Omega$ по правилу Лопиталя легко найти резонансный ток:

$$i_2(t) \to \frac{E_0C}{4}((2\Omega - \Omega^2)\cos\omega t - \Omega^2 t\sin\Omega t).$$

Из (2.6.51) находим напряжение на зажимах ab:

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{C}\int\limits_0^t i_{22}(t)dt = \frac{E_0}{2}\frac{\omega}{\Omega^2-\omega^2}(\Omega\sin\Omega t - \omega\sin\omega t).$$

б) Пусть $e(t) = E_0$, тогда $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$, а операторный ток (2.6.50)

$$I_2(p) = \frac{E_0C}{2}\frac{p^2}{p^2+\Omega^2} = \frac{E_0C}{2}\left(1 - \frac{\Omega_2}{p^2+\Omega^2}\right).$$

Применим обратное преобразование Лапласа и учтем $L^{-1}[1] = \delta(t) = \theta'(t)$ (см. с. 201). Находим искомый ток

$$i_{22}(t) = i_2(t) = \frac{E_0C}{2}(\delta(t) - \sin\Omega t),$$

где первое слагаемое представляет собой зарядный ток емкостей.

Напряжение на зажимах ab равно

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{C}\int\limits_0^t i_{22}(t)dt = \frac{E_0C}{2}\left(1 + \frac{1}{\Omega}(\cos\Omega t - 1)\right).$$

в) Пусть $e(t) = \left[\begin{array}{ll} t, & 0 \le t < 1, \\ 2-t, & 1 \le t < 2, \\ 0, & 2 \le t. \end{array}\right.$

Запишем $e(t)$ одним аналитическим выражением

$$e(t) = t\theta(t) - 2(t-1)\theta(t-1) + (t-2)\theta(t-2)$$

(см. с. 209). По теореме запаздывания оригинала (2.1.4) находим преобразование Лапласа

$$L[e(t)] = E(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}).$$

Операторный ток (2.6.50) примет вид

$$I_2(p) = \frac{C}{2}\,\frac{p}{p^2 + \Omega^2}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}).$$

Учитывая $L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2 + \Omega^2}\right] = \cos\Omega t\theta(t)$, еще раз применяя теорему запаздывания, находим искомый ток

$$i_{22}(t) = i_2(t) = \frac{C}{2}\Big[\cos\Omega t\theta(t) - 2\cos\Omega(t-1)\theta(t-1) + \cos\Omega(t-2)\theta(t-2)\Big]$$

или

$$e_2(t) = \frac{C}{2}\left[\begin{array}{ll} \cos\Omega t, & 0 \le t < 1, \\ \cos\Omega t - 2\cos\Omega(t-1), & 1 \le t < 2, \\ \cos\Omega t - 2\cos\Omega(t-1) + \cos\Omega(t-2), & 2 \le t. \end{array}\right.$$

Напряжение на зажимах ab равно

$$U_{ab}(t) = \frac{1}{2\Omega}\left[\begin{array}{ll} \sin\Omega t, & 0 \le t < 1, \\ \sin\Omega t - 2\sin\Omega(t-1), & 1 \le t < 2, \\ \sin\Omega t - 2\sin\Omega(t-1) + \sin\Omega(t-2), & 2 \le t. \end{array}\right.$$

Задача 2.6.*

1. Тяжелая однородная цепочка массы m и длины $2l$ лежит на абсолютно гладком столе так, что половина ее свешивается со стола. Определить закон движения нижнего конца цепочки во время ее соскальзывания со стола и найти время соскальзывания.

2. Две частицы с массами M и m соединены между собой пружиной жесткости k и находятся в состоянии покоя на гладкой горизонтальной плоскости. Частица массой M получает импульс P по направлению к другой частице. Определить закон движения частицы с массой M.

3. Частица массы m брошена вертикально вверх со скоростью V_0. На нее действует сила тяжести mg и сила сопротивления среды $R = -\mu V$, где g — ускорение свободного падения, V — скорость частицы. Найти закон движения частицы.

4. Найти закон движения заряженной частицы с массой m и зарядом q, находящейся в электрическом поле с вектором напряженности $\vec{E} = \{E, 0, 0\}$ и магнитном поле с вектором магнитной индукции $\vec{B} = \{0, 0, B\}$. Частица с момент времени $t = 0$ имеет скорость $\vec{V_0} = \{u_0, v_0, w_0\}$ и находится в начале координат.

5. На материальную точку массы m действует сила сопротивления $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, где $\vec{V}$ — скорость частицы. Какое расстояние пройдет точка до полной остановки, если ей сообщена начальная скорость V_0?

6. Частица массы m может совершать малые колебания относительно положения равновесия и находится под воздействием восстанавливающей силы λx, пропорциональной смещению x. Она выводится из состояния покоя силой F_0, действующей в течении времени T. Найти амплитуду колебаний при $t > T$.

7. Неподвижный центр O притягивает частицу массы m с силой $F = \lambda r$, где r — расстояние от частицы до этого центра, $\lambda > 0$ — постоянная. В начальный момент времени $r(0) = r_0$, $V(0) = V_0$. Через какое время точка достигнет центра O?

8. Точка массы m находится на прямой, проходящей через два центра A и B, расстояние между которыми равно $2l$. Центры притягивают точку с силами, прямо пропорциональными расстоянию до центра; коэффициент пропорциональности $\lambda > 0$ одинаков для обоих центров. В начальный момент точка находится на расстоянии a от середины O отрезка AB, не имея начальной скорости. Определить закон движения частицы.

9. Материальная точка массы m движется прямолинейно по оси Ox, отталкиваясь от точки O с силой $F = kx$, пропорциональной расстоянию x от точки до начала координат. На точку действует сила сопротивления среды $R = -\mu V$, пропорциональная скорости V. В начальный момент $x(0) = x_0$, $V(0) = V_0$. Найти закон движения $x = x(t)$ материальной точки.

10. Материальная точка m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $F = -\lambda x$, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону и силы сопротивления $R = -\mu V$, пропорциональной скорости V. В момент $t = 0$ частица

находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью V_0. Найти закон движения $x = x(t)$ частицы.

11. Тяжелая однородная цепочка массы m и длины l подвешена на абсолютно гладком гвозде так, что один ее свисающий кусок в два раза длиннее другого. Определить закон движения нижнего конца цепочки во время соскальзывания с гвоздя и найти время соскальзывания.

12. Две одинаковые частицы с массой m каждая могут перемещаться по прямой и соединены между собой пружиной жесткости k. В момент времени $t = 0$, когда обе частицы находятся в состоянии покоя и пружина не напряжена, к одной из них приложена сила F_0, направленная к другой частице. Определить перемещение второй частицы относительно первоначального положения.

13. Решить задачу о колебаниях двойного маятника (пример 2.6.2), отклоненного из положения равновесия без начальных скоростей. Определить условия, при которых колебания будут периодическими. $m_1 = m_2 = m,\ \ 2l_1 = l_2 = l.$

14. Решить задачу о колебаниях двойного маятника (пример 2.6.2), отклоненного из положения равновесия без начальных скоростей. Определить условия, при которых колебания будут периодическими. $m_1 = 2m_2 = 2m,\ \ l_1 = l_2 = l.$

15. Решить задачу о колебаниях двойного маятника (пример 2.6.2), отклоненного из положения равновесия без начальных скоростей. Определить условия, при которых колебания будут периодическими. $2m_1 = m_2 = 2m,\ \ l_1 = l_2 = l.$

В схеме, изображенной на рис. 2.6.4, при нулевых условиях замыкают ключ. Используя метод контурных токов, найти ток $i_2(t)$ и напряжение $u_{ab}(t)$ на зажимах ab. Рассмотреть различные зависимости ЭДС:

а) $e(t) = E_0 \sin \omega t$;
б) $e(t) = E_0$;
в) $e(t) = f(t)$, где $f(t)$ задана графически в задаче 2.2.1.

16. $z_1 = z_2 = L,\ \ z_3 = z_4 = R.$

17. $z_1 = z_2 = L,\ \ z_3 = z_4 = C.$

18. $z_1 = z_2 = C, \ \ z_3 = z_4 = R.$

19. $z_1 = z_2 = C, \ \ z_3 = z_4 = L.$

20. $z_1 = z_4 = R, \ \ z_3 = C, \ \ z_2 = L.$

21. $z_1 = z_3 = z_4 = R, \ \ z_2 = L.$

22. $z_1 = z_3 = z_4 = R, \ \ z_2 = C.$

23. $z_1 = z_3 = C, \ \ z_2 = L, \ \ z_4 = R.$

24. $z_1 = z_4 = C, \ \ z_2 = z_3 = L.$

25. $z_1 = L, \ \ z_2 = R_1 = 0, \ \ z_3 = R, \ \ z_4 = C.$

26. $z_1 = z_3 = L, \ \ z_2 = R_1 = 0, \ \ z_4 = C.$

27. $z_1 = z_2 = L, \ \ z_3 = z_4 = R.$

28. $z_1 = z_2 = L, \ \ z_3 = z_4 = C.$

29. $z_1 = z_2 = C, \ \ z_3 = z_4 = R.$

30. $z_1 = z_2 = C, \ \ z_3 = z_4 = L.$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Основные свойства преобразования Лапласа

Таблица П1.1

№ п/п	Оригинал	Изображение	Свойство
1	$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$	Линейность
2	$f(t/a), \quad a > 0$	$aF(ap)$	Теорема подобия
3	$f'(t)$ $f''(t)$	$pF(p) - f(+0)$ $p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0)$	Дифференцирование оригинала
4	$t^n f(t), \quad n \in N$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$	Дифференцирование изображения
5	$e^{at} f(t)$	$F(p - a)$	Теорема смещения
6	$f(t - \tau)\theta(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$	Теорема запаздывания
7	$\int\limits_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau$	$F(p)G(p)$	Теорема умножения Бореля
8	$\int\limits_0^t f(\tau)g'(t - \tau)\, d\tau + g(0)f(t)$	$pF(p)G(p)$	Интеграл Дюамеля

Таблица П1.2

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\theta(t)$	$1/p$
3	t^n	$n!/p^{n+1}, \quad n \in N$
4	e^{-at}	$1/(p + a)$
5	$t^n e^{-at}, \;\; n = \overline{1, \infty}$	$n!/(p + a)^{n+1}$
6	$(e^{-at} - e^{-bt})/(b - a)$	$1/(p + a)(p + b)$
7	$(ae^{-at} - be^{-bt})/(a - b)$	$p/(p + a)(p + b)$
8	$\sin at$	$a/(p^2 + a^2)$
9	$\cos at$	$p/(p^2 + a^2)$
10	$\mathrm{sh}\, at$	$a/(p^2 - a^2)$
11	$\mathrm{ch}\, at$	$p/(p^2 - a^2)$

12	$e^{-at}\sin\omega t$	$\omega/((p+a)^2+\omega^2)$
13	$e^{-at}\cos\omega t$	$(p+a)/((p+a)^2+\omega^2)$
14	$t\,\mathrm{sh}\;at$	$2pa/(p^2-a^2)^2$
15	$t\,\mathrm{ch}\;at$	$(p^2+a^2)/(p^2-a^2)^2$
16	$\mathrm{erf}\,(\sqrt{kt})$	$\sqrt{k}/(p\sqrt{p}+k)$
17	$\mathrm{erfc}\,(k/(2\sqrt{t}))$	$e^{-k\sqrt{p}}/p,\quad k\geq 0$
18	$\exp\,(-k^2/(4t))/\sqrt{\pi t}$	$e^{-k\sqrt{p}}/\sqrt{p},\quad k\geq 0$
19	$2\sqrt{t}\exp(-k^2/(4t))/\sqrt{\pi}-k\cdot\mathrm{erfc}\,(k/(2\sqrt{t}))$	$e^{-k\sqrt{p}}/p^{3/2},\quad k\geq 0$
20	$e^t\mathrm{erfc}\,(\sqrt{t})$	$1/(p+\sqrt{p})$
21	$1/\sqrt{\pi t}-e^t\mathrm{erfc}\,(\sqrt{t})$	$1/(1+\sqrt{p})$
22	$e^{-kt}/\sqrt{\pi t}+\sqrt{k}\mathrm{erf}\,(\sqrt{kt})$	$\sqrt{p+k}/p$

Приложение 2

Попов Л.Г. Воспоминания о Киселеве А.И.

Друг, оставь покурить,
А в ответ — тишина...
Он вчера не вернулся из боя!

В.С. Высоцкий

Скажу сразу, не ходил по архивам, не расспрашивал соратников, свидетелей, очевидцев и соучастников. Этот рассказ — дань уважения одному замечательному человеку, с которым мы дружили более тридцати лет. Пишу по памяти, в поезде. Так что если привру, то немного и без злого умысла. Кстати, не по этой ли простой схеме создавались легенды и мифы о всех былинных героях?..

С Киселевым Александром Ивановичем (далее А.И.) я познакомился в конце семидесятых годов прошлого века, когда после окончания аспирантуры мехмата пришел работать на кафедру высшей математики МЭИ. Это был сухощавый, подтянутый, русоволосый мужчина чуть ниже среднего роста. Одет был, как правило, в строгий деловой костюм, светлую рубашку, галстук носил редко. Осанку имел ровную, выражение лица почти всегда было немного задумчивое. Потом я понял, что это свойство многих преподавателей, старающихся сосредоточиться перед лекцией. Однако когда он начинал с кем-нибудь разговаривать, то глаза неожиданно начинали улыбаться собеседнику, а по речи, манере ведения разговора, лексике, подбору и построению фразы, вы сразу понимали, что перед вами добрый, интеллигентный, хорошо образованный и воспитанный человек. Он был всегда внешне спокоен. Ни разу за все время знакомства я не слышал, чтобы он повысил голос.

Когда через несколько первых дней работы я подошел к нему представиться, то мы сразу нашли много общих знакомых. Одни из моих преподавателей (Полосуев А.М. — мат. анализ, Галин Г.Я. — гидромеханика и др.) учились вместе с А.И., а другие (Александров П.С., Седов Л.И., Проскуряков И.В. и др.) читали лекции нам обоим, правда, с интервалом более четверти века.

Вперед, дорогой читатель! Перейдем к биографии нашего героя, ибо в ней любознательный ум может найти много поучительного.

Родился А.И. в августе 1917 г. в семье инженера-строителя. Мать, как было принято в то время, занималась детьми и хозяйством, т.е.

по-нашему, не работала. Детство провел в Москве, которую знал досконально. Уже потом, будучи почти слепым, он устраивал мне воображаемые экскурсии по центру города и подробно, со вкусом рассказывал про каждый дом, церковь, магазин, ресторан или театр.

Репрессии 1930-х гг. миновали его семью, хотя, по воспоминаниям А.И., нескольких близких коллег отца арестовали. Спасло его родных, по-видимому, то обстоятельство, что в начале тридцатых годов отец был на несколько лет командирован за границу, работал в Германии, Дании и Чехословакии, где А.И. заканчивал обучение в средней школе.

В 1938 г. наш герой был призван на военную службу, которую начинал проходить на подводных кораблях Черноморского флота (Севастополь), а затем был переведен в надводный Северный флот (Мурманск). Учили на флоте тогда неплохо, ибо и в 90 лет А.И. мог с закрытыми глазами починить кран, исправить электропроводку, отремонтировать или вскрыть любой замок. Ему оставалось служить около года (на флоте тогда служили пять лет), когда началась война...

Отец А.И. добровольцем пошел на фронт и был убит в первые месяцы войны. Младший брат умер почти сразу после победы от фронтовых ран.

Флотский экипаж, где служил А.И., был переброшен на оборону Кольского полуострова. Осенью 1942 г. они были отозваны с позиций, их привезли на базу, дали день отдыха, хорошо накормили, а поутру построили на плацу. "Краснофлотцы, город Сталина, символ нашей социалистической родины, в опасности! Добровольцы — шаг вперед!", — и, как вспоминал А.И., все флотские "коробочки" продвинулись на один шаг. Еще вечером политрук каждому лично рассказал, что будет с тем, кто этот шаг не сделает. Когда я спросил А.И., а что именно, он сказал: "Да просто расстреляли бы перед строем". Так наш герой оказался в морской пехоте, в славных рядах которой прошел от Сталинграда до Вены. Ему повезло, ранен был всего несколько раз, да и то, по его словам, ранения были достаточно легкие, по-видимому, кроме удачи сказался его предыдущий армейский опыт.

Вот навскидку несколько высказываний А.И. о войне.

"Леня, — говорил он мне, — это только в советских фильмах фашистов показывали глупыми, слабыми, трусливыми и ленивыми. Это не так! На нас шли молодые, здоровые, храбрые, хорошо обученные, прекрасно вооруженные, имеющие большой боевой опыт, сытые парни, которые, как им казалось, воевали за правое дело. Их вели опытные, образованные командиры. Драться с таким противником было очень тяжело..."

"Многие ругали "шмайсер", мол, иногда заклинивает патрон. Я дошел с этим автоматом до Вены и он ни разу меня не подводил. Его только надо разбирать и смазывать хотя бы раз в неделю, а так машина надежная..."

"Война — это, прежде всего, большой, тяжелый, ответственный труд... Как же я тогда уставал..."

"Очень жалко было сдавать в Берлине трофейный "Вальтер". Я прошел с ним полвойны, привык к нему, хотел оставить на память..."

Однажды, когда А.И. был уже на пенсии и оказался в военном госпитале, я, придя навестить его, стал свидетелем такой сцены. Другой "ветеран" с бронзой в голосе спрашивал А.И., сколько именно фашистов тот убил лично. А.И. постарался вежливо закончить разговор, а когда мы вышли в коридор, сказал: "Только дураки считают убитых врагов, я никогда не считал, и сейчас сплю спокойно..."

Воевал, по-видимому, неплохо. Награжден стандартным набором солдатских медалей. Ордена тогдашним рядовым стали давать уже далеко после войны к юбилейным датам.

Морскую пехоту, солдат в сухопутной форме и морских тельняшках, по словам А.И., немцы всегда считали достойным противником.

Когда закончилась война, герою нашего рассказа было 28 лет, девять с половиной из которых он провел в рядах непобедимых и легендарных Красной Армии и Военно-Морского флота. Все его мысли были о гражданской жизни. Надо было получать специальность, начинать работать, заводить семью. Их часть несла гарнизонную службу в Берлине, когда его вызвал командир роты и сказал: "Саша, ты неплохо воевал, в нашей роте кроме тебя и меня от первоначального состава остались пять человек, но ты еще не отдал долг Родине до конца. На действительной службе ты провел всего четыре года, война в счет не идет. Так что служить тебе еще год". Это был тяжелый, по словам А.И., в моральном смысле год, все мысли были уже в Москве.

Демобилизовавшись в 1947 г., он приехал к маме, два месяца проработал механиком в трамвайном депо и поступил без экзаменов на рабфак МГУ (военный набор). Математикой, по его словам, он заболел еще в конце средней школы, и, чтобы не забыть, таскал школьные учебники своего знаменитого однофамильца в солдатском сидоре.

Учили на мехмате тогда хорошо (одно перечисление знаменитых фамилий академиков и профессоров, читающих тогда лекции, заняло бы полстраницы). Тяга к знаниям, острое желание наверстать упущенное время, по словам А.И., у него и его однокурсников было огромное. Там, в стенах славного Московского университета, он познакомился с Красновым М.Л., своим будущим замечательным другом, соратником и соавтором.

После окончания МГУ А.И. несколько лет проработал в расчетном отделе курчатовского института, а затем перешел работать на кафедру высшей математики МЭИ.

Он женился. Его жена Нина Никифоровна — замечательная, красивая, добрая, умная, русская женщина имела дочку от первого брака, а затем родила А.И. еще одну дочь. С женой А.И. повезло... Всю жизнь она старалась сберечь его от жизненных неприятностей, неустанно заботилась о нем, его питании, распорядке дня, одежде и обуви. Она прекрасно рисовала и чертила. Все рисунки в первых изданиях его учебных пособий сделаны ее рукой.

Здесь, в МЭИ, судьба снова свела А.И. с Красновым М.Л., а затем и с Макаренко Г.И., чьи судьбы были достаточно похожи на судьбу нашего героя. Вместе они славно поработали. Их учебные пособия "Дифференциальные уравнения", "Теория устойчивости", "Интегральные уравнения", "Вариационное исчисление", "Векторный анализ", "Функции комплексного переменного", "Операционное исчисление", многие из которых были неоднократно переизданы и переведены на все основные языки мира, давно стали "классическими". Причем, как видно по названиям, темы они выбирали, как правило, такие, которые в основном курсе математики для инженеров вызывают определенные трудности в освоении или, из-за недостатка времени, освещаются неполно. Их шеститомник "Вся высшая математика" — лауреат конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России. Будучи в Англии мне было приятно, когда на полке в библиотеке Брунельского университета я увидел их книги на английском, испанском, японском и некоторых других языках. Я обнаружил их двухтомник "Математический анализ для инженеров" на английском языке в списке рекомендованной литературы для студентов. Они втроем придумали и воплотили в жизнь достаточно простую, как нам всем теперь кажется, идею: учить математике будущих инженеров при минимальном изложении теории на рассмотрении подробных решений тщательно подобранных типовых задач. Это сейчас кажется все ясно, а тогда, в 50–60-е годы это действительно было новым шагом, в правильности чего им пришлось многих убеждать...

Эту дружбу и совместную плодотворную работу они продолжали до конца жизни.

Студенты любили А.И. Его лекции и практические занятия всегда отличались безукоризненной строгостью, доступностью, продуманностью излагаемого материала. Он умел находить яркие, неординарные аналогии и сравнения при изложении достаточно сложных вещей.

Вспоминаю такой эпизод. Я как молодой и неопытный преподаватель должен был посетить несколько занятий своих старших коллег. Будучи на занятии по определенному интегралу у А.И. стал свидетелем, как студент-вечерник, здоровенный верзила, запутался у доски в арифметических вычислениях с дробями при применении формулы Ньютона—Лейбница. Ему нужно было сложить $\frac{1}{8}+\frac{3}{7}$. После его нескольких неудачных попыток А.И. вежливо остановил его и предложил следующую задачу: "Вы выпили вчетвером бутылку, а затем встретили еще троих друзей и взяли на семерых шесть бутылок. Сколько ты выпил?" Студент-вечерник быстро перевел все в граммы и стаканы. Сказал правильный приближенный ответ. "Вот видишь, — сказал А.И. под хохот аудитории, — ты знаешь дроби, просто не умеешь ими пользоваться".

Ушел на пенсию А.И. в 80 лет. Испытания на его жизненном пути, к сожалению, на этом не закончились. За три года до этого трагически погибла его младшая дочь. Ему, ветерану войны, сделали бесплатно операцию на обоих глазах и неудачно. Четыре года он был фактически слепым, но после еще двух операций стал немного видеть.

С моим другом Айрапетяном Г.С., бывшим инженером нашей лаборатории, мы иногда навещали А.И. Нина Никифоровна была хлебосольной хозяйкой. До последних дней А.И. сохранил ясную голову и прекрасную память. Тепло, с яркими подробностями вспоминал всех наших общих коллег, всегда передавал привет каждому поименно. Всю жизнь он собирал книги. У него была неплохая библиотека, очень жалел, что не сумел перечитать ее на пенсии.

Он не сдавался. Армейская закалка и добрый солдатский юмор не покидали его до конца жизни. "Леня, — говорил неоднократно он мне, — в госпитале я первым делом проверяю кровать, столовую и места общего пользования. Если более-менее нормально, я знаю, что здесь меня вылечат".

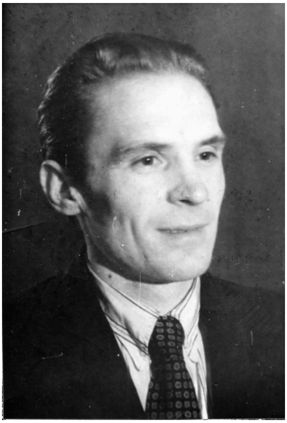
Умер А.И. в 2009 г. в возрасте 92 лет. За год до него ушла из жизни Нина Никифоровна, и за ним ухаживала его дочь Виктория.

Ушел легко, заснул в кресле и не проснулся. Видимо, Бог его тоже по-своему любил и простил старому солдату все его грехи.

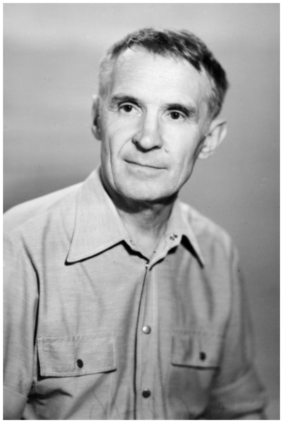
Хоронили его холодным весенним днем. От кафедры на похоронах было человек шесть. Многие из "стариков" уже ушли, а "молодые" его уже не знали.

Отпевали в Николо-Архангельском. Похоронен на Ваганьковском.

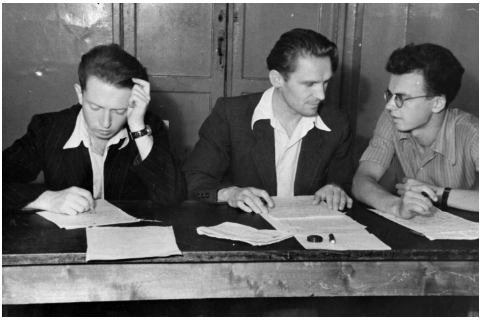
3-5 сентября 2010 г., Москва—Севастополь.



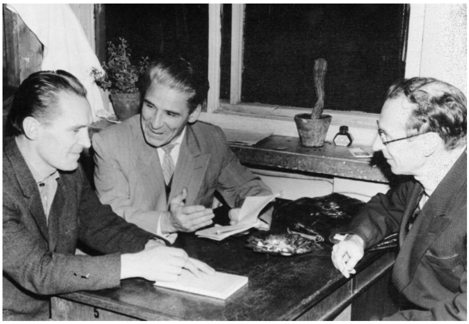
Студент мехмата МГУ. 1951 г.



1984 г.



На экзамене. 1956 г.



Обсуждение учебных планов.
Киселев А.И., Жуков В.С., Краснов М.Л.

На субботнике. 1974 г.

С супругой Ниной Никифоровной на праздновании 90-летия Киселева А.И. 2007 г.

Приложение 3

Попов Л.Г. Воспоминания о Краснове М.Л.

Считает враг — морально мы слабы.
За ним и лес, и города сожжены.
Вы лучше лес рубите на гробы —
В прорыв идут штрафные батальоны!

В.С. Высоцкий

Долго не решался начать этот рассказ об одном замечательном человеке, с которым меня свела судьба, — о Михаиле Леонтьевиче Краснове. Уж очень тема казалась мне сложной и деликатной. Но сейчас понял, что время уходит, и скоро совсем не останется людей, которые его помнят.

С Михаилом Леонтьевичем Красновым (далее М.Л.) я познакомился в 1979 г. Это был худощавый, чуть выше среднего роста, немного сутулый мужчина в очках. Невольно отметил некоторое сходство с Паганелем из фильма "Дети капитана Гранта" в исполнении Н.Черкасова. Мы представились и пожали друг другу руки. Ладонь у М.Л. оказалась неожиданно сухой и твердой, само пожатие кратким, но достаточно жестким. Взгляд из-под очков был немного колючим, оценивающим. Этот древний обычай, пожать друг другу руки при встрече, играет важную ритуальную, почти мистическую роль, а первое впечатление, как известно, часто бывает самым верным. Знал одного пожилого бригадира плотников, который после первого рукопожатия и взгляда в глаза, мог дать развернутую характеристику человеку, которого он видел первый раз в жизни, и практически никогда не ошибался.

Такими способностями не обладаю, но сразу понял, что передо мной интересный, очень непростой человек и, естественно, захотел познакомиться поближе.

За почти четверть века нашего знакомства мы не стали друзьями, скорее добрыми приятелями, но всегда, если была необходимость, помогали друг другу.

Однако хочу начать по порядку.

Михаил Леонтьевич Краснов родился 30 ноября 1925 г. в г.Чкалов (ныне Оренбург). Отец — Краснов Леонтий Михайлович — работал сначала учителем в сельской школе (естественно-научные предметы), а после революции и Гражданской войны — преподавателем в оренбургском пединституте. Мать — Елена Михайловна — сначала была сельской учительницей (словесность), а потом домохозяйкой. Это были хорошо образованные, интеллигентные люди, и ту атмосферу любви к хорошей литературе, поэзии, интерес к истории, которая царила в их доме, М.Л. пронес через всю жизнь. Миша был единственным ребенком в семье. Родители его умерли в 1970 г.

В 1933 г. Миша поступил в школу. Учился хорошо, с интересом. Однако школу так и не закончил, поскольку в июне 1943 г. пошел добровольцем на фронт. Отец отговаривал его, просил хотя бы закончить школу, но потом все-таки согласился, что у каждого человека есть право защищать свою Родину.

М.Л. не любил рассказывать о войне, поэтому пишу со слов его друга — Александра Ивановича Киселева.

Летом 1943 г. рядового Краснова послали на лошади с донесением в соседнюю часть. Дорога шла по лесу, попал под артналет, лошадь под ним убило осколком, его самого контузило. Пошел пешком, но скоро понял, что неожиданно началось немецкое наступление, и он оказался на вражеской территории. Донесение уничтожил и сам два дня выходил к нашим войскам. Хотя вышел с винтовкой, был направлен в контрразведку (СМЕРШ), где был допрошен и жестоко избит. По-видимому, там считали, что за эти два дня он превратился в фашистского шпиона-диверсанта. Был приговорен к расстрелу, который заменили штрафбатом. Трудно представить, сколько пережил и передумал за эти несколько дней семнадцатилетний паренек.

Так продолжилась служба в рядах Красной армии. Командир батальона отметил его смелость, находчивость, что он был ранен и "кровью искупил вину перед Родиной", а может быть, просто пожалел молодого "очкарика" из интеллигентной семьи, и командование неожиданно для М.Л. направило его в военное училище. Сказалась, по-видимому, нехватка младших командиров в частях и то, что М.Л. имел хоть неоконченное, но среднее образование. Училище оказалось в Оренбурге, и курсант Краснов сумел повидаться с родителями, что во время войны было большой редкостью.

После окончания училища младший лейтенант Краснов был направлен командиром взвода в 1941-й артиллерийский полк 10-го корпуса

1-го Украинского фронта, в составе которого находился до октября 1945 г. Воевал, по-видимому, хорошо, был несколько раз ранен, за спины солдат не прятался. Как известно, штрафники — "пушечное мясо", и им доставалась самая грязная, тяжелая и страшная работа на войне. Бог миловал М.Л. — он выжил. Награжден медалью "За победу над Германией" Штрафникам медали давали очень неохотно...

В 1946 г. поступил на механико-математический факультет МГУ им. Ломоносова. По рассказам его однокурсника Г.Я. Галина (кстати, моего преподавателя гидромеханики, поэтому и узнал эту историю) учился М.Л. прекрасно, был одним из лучших студентов курса, хотя страдал определенным психическим недугом. Регулярно, раз в два месяца, он на два-три дня "уходил в себя". Сидел один в комнате общежития, пил "горькую" и ни с кем не разговаривал. Через три дня снова приступал к учебе, восстанавливал пропущенное, снова становился лучшим студентом в группе. Это только сейчас стали говорить о "вьетнамском синдроме", о том, что участники боевых действий должны проходить специальный курс психологической реабилитации. А на той войне, как известно, основным лекарством от всех болезней служили "наркомовские" сто грамм. Я знал многих, кто придя с войны, продолжил эту традицию, иногда существенно увеличивая дозу. Ясно одно, что такого ужаса, смерти, крови и страданий, которых М.Л. насмотрелся на войне, хватило бы на несколько жизней, и, когда от воспоминаний уже было некуда деться, М.Л. избавлялся от них старым проверенным "народным способом".

В 1951 г. М.Л. с отличием закончил Университет, и ему была "присвоена квалификация научного работника в области математических наук, преподавателя вуза и звание учителя средней школы". В этом же году по распределению он пришел работать на кафедру высшей математики МЭИ. Ассистент Краснов, судя по характеристикам, показал себя хорошим специалистом, имеющим склонность к научной и педагогической деятельности. В 1952 г. он решил избавиться от своего недуга, добровольно прошел курс лечения в стационаре неврологического диспансера. За всю оставшуюся жизнь М.Л. не выпил ни одного грамма спиртного. Начался новый этап его большой жизни.

В 1953 г. М.Л. поступил в аспирантуру кафедры высшей математики МЭИ, которую окончил в 1956 г., и продолжил работать ассистентом. В 1957 г. защитил кандидатскую диссертацию, посвященную некоторым вопросам, связанным с уравнениями эллиптического типа. Профессор М.И. Вишик, научный руководитель М.Л., всегда с уважением отзывался о результатах, полученных в этой работе. О самой защите мне рассказал член-корреспондент РАН С.И. Похожаев.

Случилось так, что один из оппонентов предложил по результатам, полученным в диссертации, присвоить М.Л. ученую степень доктора наук, и многие из членов Ученого совета были готовы поддержать это предложение. Но М.И. Вишик сказал, что это преждевременно, поскольку тогда у диссертанта станет меньше стимулов к дальнейшему росту. В результате проголосовали за кандидатскую.

Свою научную работу М.Л. продолжил и после защиты. Он автор полутора десятков научных статей, посвященных уравнениям в частных производных и некоторым прикладным задачам. Однако продолжить плодотворную научную работу ему помешало его другое увлечение, ставшее, на мой взгляд, главным в его жизни, — преподавание математики. Но об этом лучше рассказать по порядку.

Одновременно с М.Л. в МЭИ был распределен его однокурсник — Григорий Иванович Макаренко, тоже бывший фронтовик. Затем на кафедру ВМ пришел работать Александр Иванович Киселев, бывший "морпех". Так судьба свела вместе этих трех замечательных людей, и результаты их дружбы и совместной работы до сих пор остаются для многих предметом глубокого уважения.

Страна восстанавливалась после военной разрухи. Были поставлены большие задачи: ядерный щит, покорение космоса, восстановление и развитие промышленности, энергетики, сельского хозяйства. Для этого требовалось большое количество специалистов. В стране был настоящий "бум высшего образования". Инженер в то время был одной из самых уважаемых и высокооплачиваемых специальностей. Хороших учебников, как и всегда, не хватало. И вот наши друзья придумали и осуществили в общем-то простую, но, в то же время гениальную идею — учить будущих инженеров сложным разделам высшей математики при минимальном изложении теории на рассмотрении подробных решений тщательно подобранных типовых примеров.

В результате более чем тридцатилетней совместной работы ими написаны такие, ставшие уже "классическими", учебные пособия: "Дифференциальные уравнения", "Теория устойчивости", "Интегральные уравнения", "Вариационное исчисление", "Векторный анализ", "Функции комплексного переменного", "Операционное исчисление" и др.

Все эти книги проверены временем, переизданы не один десяток раз у нас в стране, переведены и изданы на английском, французском, японском, польском, португальском, испанском и др. языках. Причем, как видно из названий, темы выбраны достаточно сложные, на которые в основном курсе высшей математики в техническом вузе, как правило, остаётся мало времени, а здесь уже каждый желающий мог самостоятельно изучить соответствующий раздел и, главное, научиться решать задачи.

Их шеститомник "Вся высшая математика" стал лауреатом конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России. Большим уважением у специалистов пользуется их двухтомник "Математический анализ для инженеров", изданный на английском языке.

В 1961 г. М.Л. присвоено звание доцента кафедры высшей математики.

Студенты любили М.Л. Я был на нескольких его лекциях. Поражал блестящий контакт с аудиторией, творческая атмосфера, которую он мог создать, ведя диалог со слушателями. Большинство определений, новых понятий появлялось в результате совместного обсуждения некоторых достаточно простых примеров и контрпримеров. У студентов создавалось впечатление, что это они сами придумывают что-то новое в математике. Такую манеру чтения лекций я больше не встречал ни у кого.

Он уважал студентов. Даже если ставил кому-то "двойку" и начинал распекать нерадивого, то делал это так, что студент, унося "пустую" зачетку, всегда благодарил М.Л.

Профессор Ю.А. Дубинский, который всегда отзывался о М.Л. как о талантливом математике и блестящем педагоге, как-то рассказал такой случай.

Однажды, в начале 1960-х годов, ему пришлось принимать экзамен у студентов-вечерников на потоке М.Л. Студент, отвечающий Дубинскому, "поплыл", и в это время к ним подошел М.Л. Он сразу понял ситуацию, а речь шла об условиях почленного дифференцирования функционального ряда, и задал следующий вопрос: "Правильно ли, что ряд из производных также должен удовлетворять дополнительным условиям? А какой он должен быть?" Студент ответил: "Правильным".

Это был верный ответ, поскольку тогда для вечерников понятие "равномерной сходимости" заменяли для простоты на "правильную сходимость". После экзамена М.Л. сказал Дубинскому, что в самом вопросе для сообразительного студента всегда должен быть элемент подсказки.

Со своими коллегами по работе у М.Л. всегда были добрые, дружественные отношения. Никогда не отказывался помочь. Я несколько раз обращался к нему за консультациями и всегда поражался его энциклопедическим знаниям почти по всем разделам математики. Когда я попросил его быть редактором книги "Кратные интегралы. Векторный анализ", то удивился тому, с какой ответственностью он отнесся к этой работе. Почти вся рукопись пестрела его пометками. Он добивался ясности и четкости в каждом предложении.

Главной его страстью помимо работы были книги. Он был страстный библиофил. О его библиотеке, о тех редкостях, которые ему удалось собрать, ходили легенды: дореволюционные издания энциклопедического словаря Брокгауза и Ефрона, прижизненные издания Пушкина, Лермонтова, Тютчева, Некрасова, Толстого, книги по всемирной истории, а особенно по истории Москвы. Очень любил русскую поэзию XIX — начала XX вв. Мог цитировать по памяти целые главы из "Евгения Онегина", при этом подробно комментируя все непонятные слова и рассказывая исторические анекдоты о лицах, которые там упоминаются.

Одевался и жил М.Л. всегда скромно, почти вся его зарплата и гонорары от издания учебников уходили на эту коллекцию. Многие букинисты Москвы издалека узнавали его худую, немного сутулую фигуру и вытаскивали из-под прилавка специально для него оставленную редкую книгу. Дружил на этой почве с И.Г. Петровским, в то время ректором МГУ, известным математиком и страстным собирателем книг.

Память у М.Л. была феноменальной. Многие сотрудники кафедры с восторгом вспоминают почти полуторачасовую лекцию о Пушкине, которую М.Л. экспромтом прочитал как-то в Доме отдыха МЭИ во время дружеской беседы после ужина.

Мне лично запомнился цикл его заметок по истории Лефортова, опубликованных в 1980-х годах в нашей стенной газете "Математик". В них М.Л. подробно, со вкусом, прошёлся от Владимирского тракта до здания Военно-Исторического архива, по пути рассказывая о каждом старом здании, о людях, которые там бывали или жили, заглянул в церковь Петра и Павла, на старое немецкое кладбище, в Алексеевские казармы, в Екатерининский дворец... Как жаль, что не сохранил тогда эти заметки!

Добрую роль в жизни М.Л. сыграл тогдашний заведующий кафедрой высшей математики профессор С.И. Похожаев. Из его рассказа я узнал, что как-то в конце 1960-х годов он первый раз пришел к М.Л., который с момента поступления на работу жил в студенческом общежитии МЭИ. Очень удивился, что доцент, кандидат наук, фронтовик, автор книг, переведенных на многие языки, скромно живет в комнате 9 м^2, почти полностью заставленной книгами, так что раскладушка, на которой М.Л. спал, не полностью могла быть разложена. Похожаев помог, хотя и с большим трудом, М.Л. получить однокомнатную квартиру в доме преподавателей МЭИ.

В 1980 г., опять же по инициативе С.И. Похожаева, который высоко ценил и уважал М.Л., Краснову было присвоено звание профессора.

Личная жизнь М.Л. не сложилась. Он всю жизнь был холост. Я еще застал на кафедре какие-то смутные воспоминания о романе М.Л. с одной молодой доцентшей. Вся кафедра с трепетом наблюдала за развитием их отношений, искренне желая им счастья. Но что-то не сложилось...

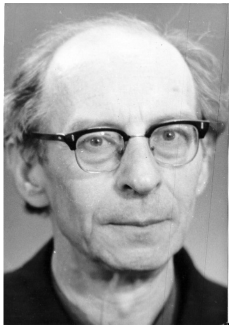
Последние лет двадцать с ним жила Галина Панасовна, которую он называл "моя хозяйка". По-видимому, на излете жизни просто "встретились два одиночества". Это была простая, малообразованная женщина, которая всегда ругала М.Л. за то, что он тратит деньги на никому ненужные книги и очень много расходует электричества, когда работает над рукописями. Но, по-видимому, они по-своему любили друг друга, а главное, были друг другу нужны.

В 1986 г. М.Л. по состоянию здоровья ушел на пенсию, хотя продолжал работать в МЭИ до 1991 г. на четверть ставки профессора. В это время он как раз работал над шеститомником "Вся высшая математика". Был членом Редакционного совета МЭИ, работал в Совете по математическому образованию при Минвузе.

Я еще два раза встречался с М.Л. Один раз по его просьбе помог доехать из госпиталя, где он лечился. Второй раз, уже перед самой кончиной, он пригласил Н.В. Гуличева, доцента кафедры, и меня к себе домой поговорить. За несколько месяцев до того умерла Галина Панасовна. М.Л. тяжело заболел, за ним ухаживали дальние родственники Панасовны, которым М.Л. "отписал" все свое имущество. Болел тяжело, сильно исхудал и ослаб. Поговорили часа два. В основном рассказывали ему о делах на кафедре. Светлая голова и блестящая память оставались у М.Л. до конца жизни.

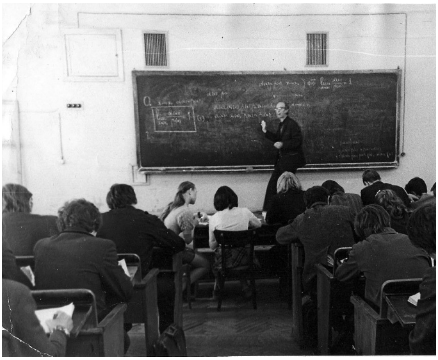
Умер он в мае 2002 г. Похоронен на Щербинском кладбище. Когда ехал с кладбища (а М.Л. провожали только вдова Г.И. Макаренко, жена А.И. Киселева, я и родственники Галины Панасовны), то подумал, как быстро проходит человеческая слава. Но, с другой стороны, ведь остались его учебники. Мне всегда приятно, когда вижу их в руках студентов.

15 сентября 2011 г., Москва.



Студент МГУ М.Л. Краснов. 1950 г.

Профессор М.Л. Краснов. 1987 г.



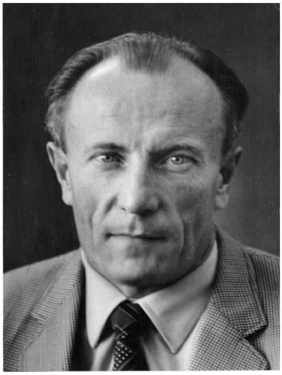
На лекции. 1979 г.

На экзамене. 1982 г.

На экзамене. 1987 г.

Юбилей М.Л. 1985 г.

На заседании кафедры. 1986 г.



Профессор С.И. Похожаев,
зав. каф. ВМ МЭИ в 1971—1990 гг.

Кафедра высшей математики МЭИ. 1986 г.

1 ряд. Краснов М.Л., Пикулин В.П., Васин А.П., Похожаев С.И., Петрушко И.М., Громова П.С., Мягкова М.П., Цуцерова Н.А., Андреева М.Н., Соколова Н.С. *2 ряд.* Жуков А.Ф., Павлов А.Л., Зимина О.В., Чугунникова А.Н., Спирина З.Н., Богомолова Е.П., Кириллов А.И., Крупин В.Г., Романов В.А. *3 ряд.* Айрапетян Г.С., Мякишев Ю.В., Богословская М.К., Черных А.Г., Седаева А.К., Достойнова Г.А., Туганбаев А.А. *4 ряд.* Попов Л.Г., Илларионов М.А., Кузнецов Л.А., Хрусталева А.И., Чудесенко В.Ф., Гуличев Н.В., Лебедев А.К. *5 ряд.* Шмелев П.А., Индионков А.В., Соколов А.Г., Крылов А.Н., Чубров Е.В., Рыженцов Л.И.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Волков И.К.** Интегральные преобразования и операционное исчисление / И.К. Волков, А.Н. Канатников. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. — 228 с.

2. **Волковысский Л.И.** Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковысский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. — М.: Наука, 1970. — 320 с.

3. **Евграфов М.А.** Сборник задач по теории аналитических функций / М.А. Евграфов, К.А. Бежанов, Ю.В. Сидоров и др. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

4. **Карслоу Х.** Операционные методы в прикладной математике / Х. Карслоу, Д. Егер. — М.: Иностранная литература, 1948. — 249 с.

5. **Краснов М.Л.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. — М.: Наука, 1971. — 256 с.

6. **Лаврентьев М.А.** Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1988. — 688 с.

7. **Морозова В.Д.** Теория функций комплексного переменного / В.Д. Морозова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 520 с.

8. **Привалов И.И.** Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. — М.: Высшая школа, 1999. — 432 с.

9. **Свешников А.Г.** Теория функций комплексного переменного / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. — М.: Наука, 1979. — 319 с.

10. **Чудесенко В.Ф.** Сборник заданий по специальным курсам высшей математики / В.Ф. Чудесенко. — М.: Высшая школа, 1999. — 126 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Крупин Владимир Григорьевич
Павлов Александр Леонидович
Попов Леонид Глебович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ

Учебное пособие по курсу «Высшая математика»
для студентов МЭИ, обучающихся по всем направлениям подготовки

Редактор издательства Г.Ф. Раджабова

Темплан издания МЭИ 2012, учебн.		Подписано в печать 05.03.12
Печать офсетная	Формат 60×84/16	Физ. печ. л. 19,0
Тираж 516 экз. (2-й завод 317-516 экз.)		Изд. № 105 Заказ

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14

Отпечатано ПЦ МЭИ (ТУ), 111250, Москва, Красноказарменная, д. 13