ГЕОМЕТРИЯ
Лобачевского
И РАЗВИТИЕ ЕЕ ИДЕИ

Ж. АДАМАР

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ В ТЕОРИИ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Геометрические знания составили основу всей точной науки, а самобытность геометрии Лобачевского — зарю самостоятельного развития наук в России. Посев научный взойдет для жатвы народной.

Д. И. Менделеев

ГЕОМЕТРИЯ *Лобачевского* И РАЗВИТИЕ ЕЕ ИДЕЙ

Под общей редакцией
В. Ф. КАГАНА

VI

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва—Ленинград
1951

Ж. АДАМАР

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ В ТЕОРИИ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва-Ленинград
1951

11-5-4

Редактор *И. Н. Бронштейн.* Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Подписано к печати 14/VI 1951 г. Бумага $84 \times 108/_{32}$. 2,125 бум. л. 6,97 печ. л. 7,43 уч.-изд. л. 42 630 тип. зн. в печ. л. Т-03193. Тираж 4000 экз. Цена книги 4 руб. 45 коп. Переплет 50 коп. Заказ № 2473.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград. Измайловский пр., 29.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В редакционном предисловии к V выпуску настоящей серии — книге Б. А. Фукса «Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений» — уже было сказано о том, что статья известного французского математика Ж. Адамара, составляющая содержание настоящей книги, была написана в двадцатых годах в связи с подготовкой издания полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского. Перевод с присланной автором рукописи был сделан А. В. Васильевым и отредактирован Б. А. Фуксом.

Статья Адамара носит обзорный характер; высказываемые предложения даются в ней обычно без доказательства. Это потребовало ряда примечаний, составленных Б. А. Фуксом.

Перед чтением настоящей статьи рекомендуется прочесть указанную выше книгу Б. А. Фукса, которая может служить введением к статье Адамара.

Возможность установления внутри любой односвязной области плоскости комплексного переменного метрики Лобачевского послужила в свое время толчком к открытию автоморфных функций. Указанная метрика играла существенную, а подчас и первенствующую роль почти на всех этапах построения грандиозного здания теории этих функций, имеющих столь важные приложения во многих вопросах математического анализа.

Показ фундаментального значения метрики Лобачевского в теории автоморфных функций является основной целью настоящей небольшой книги известного французского математика Ж. Адамара.

В книге Адамара доказательства теорем, как правило, не приводятся, хотя их идеи, иногда схемы, чаще всего указываются. При этом обычно подчеркивается значение для каждого рассуждения (или факт использования в нем) предложений геометрии Лобачевского.

Таким образом, книга Адамара не может служить учебником по теории автоморфных функций. Ее следует рекомендовать лицам, уже имеющим известное представление об этой теории. Такое представление можно, например, получить по VII и VIII главам недавно вышедшей вторым изданием книги В. В. Голубева *). Необходимые для понимания книги Адамара сведения о метрике Лобачевского, устанавливаемой внутри односвязных областей плоскости комплексного переменного, о порождаемой этой метрикой группе движений и ее собственно разрывных подгруппах можно также найти во II и III главах книги, составляющей предыдущий выпуск настоящей серии **).

I глава книги Адамара «Группа движений на плоскости Лобачевского и ее собственно разрывные подгруппы» имеет вводный характер. В ней указываются используемые далее реализации плоской геометрии Лобачевского, сопоставляются важнейшие свойства собственно разрывных подгрупп группы движений, в частности выясняются характерные особенности их приведенных областей.

II глава «Разрывные группы в трех геометриях. Фуксовы группы» посвящена изучению собственно разрывных подгрупп групп движений геометрий Римана, Евклида и Лобачевского (в частности, в ней рассматриваются условия, при выполнении которых многоугольник плоскости Лобачевского может служить приведенной областью собственно разрывной подгруппы группы движений этой плоскости).

Дальнейшие две главы посвящены функциям Л. Фукса (III глава) и Ф. Клейна (IV глава); в частности, они содержат теорию тета-рядов Пуанкаре.

---

*) В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М. — Л., 1950.

**) Б. А. Фукс, Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений, серия «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей», вып. V, Гостехиздат, М. — Л., 1951.

Наконец, в V главе рассматриваются приложения построенных в предыдущих главах автоморфных функций к задаче униформизации алгебраических кривых и к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами.

Последняя, сравнительно небольшая по объёму, VI глава «Фуксовы группы и геодезические линии» носит характер дополнения.

Как уже указывалось выше, книга Адамара — обзорная. В ряде мест она сама содержит указания на сочинения, в которых читатель может найти обстоятельное изложение затрагиваемых вопросов. В других случаях такие литературные указания можно найти в примечаниях редактора.

ГЛАВА I

ГРУППА ДВИЖЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО И ЕЕ СОБСТВЕННО РАЗРЫВНЫЕ ПОДГРУППЫ

Возникновение и развитие геометрии Лобачевского явилось первым в истории математической науки примером использования научного метода, применение которого благодаря работам Гильберта стало столь обычным в настоящее время,— метода изучения системы аксиом, в частности с точки зрения ее непротиворечивости. Для установления такой непротиворечивости обычно подыскивается система вещей, обладающих всеми свойствами, выражаемыми данными аксиомами; когда такая система найдена, то тем самым доказано, что аксиомы могут одновременно выполняться, а следовательно, не заключают никакого противоречия. Таким образом, в случае геометрии Лобачевского нужно было вновь образовать понятия «конгруентных фигур», «расстояния», «прямой линии», «угла». Мы намеренно говорим «вновь образовать», потому что эти понятия должны были отличаться от понятий, обыкновенно обозначаемых этими же словами; эти новые понятия должны были строиться так, чтобы соответствующая им геометрия была геометрией Лобачевского.

Методы, применявшиеся для достижения указанной цели, были двух различных родов. Результаты, полученные вслед за Гауссом в дифференциальной геометрии, позволяют достигать этой цели, по крайней мере отчасти, не прибегая к только что сформулированной идее во всем ее объеме, т. е. не изменяя радикально основных понятий. Для этого достаточно рассматривать фигуры не на плоскости, но на подходящим образом выбранной поверхности, причем прямые линии заменяются линиями кратчайшего расстояния между точками этой поверхности, т. е. геодезическими линиями. В этих условиях расстояние заменяется геодезическим расстоянием, угол остается определенным так, как в элементарной геометрии. Весь вопрос заключается в том, чтобы подыскать поверхность, на которой таким образом построенные понятия удовлетворяли бы всем аксиомам евклидовой геометрии за исключением аксиомы о параллельных линиях.

Путь, которым нужно было итти далее, освещался примером сферической геометрии. Не будучи «настоящей» неевклидовой геометрией потому, что в ней не только не исполняется требование евклидовой аксиомы о параллельных, но вопреки еще другой аксиоме Евклида две «прямые» (т. е. два больших круга) заключают между собой пространство (часть сферы), сферическая геометрия, однако, представляет очевидную аналогию с геометрией Лобачевского. Различие между ними состоит только в том, что в сферической геометрии сумма углов треугольника больше двух прямых, в то время как в геометрии Лобачевского она, напротив, меньше двух прямых.

Отметим еще, что при построении сферической геометрии сфера с одним ограничением, совпадающим с тем, которое мы встретим и в случае геометрии Лобачевского для псевдосферы, может быть заменена какой-либо другой наложимой на нее поверхностью, или, говоря иначе, произвольной поверхностью с постоянной положительной кривизной.

Следуя указанному примеру, мы возьмем вместо поверхности, наложимой на сферу действительного диаметра a, поверхность, наложимую на сферу диаметра ia, т. е. поверхность, обладающую постоянной отрицательной кривизной, равной $-\frac{4}{a^2}$. Мы обнаружим, что в этом случае суммы внутренних углов треугольников, образованных геодезическими линиями, оказываются меньшими двух прямых. Дальнейшее рассмотрение устанавливает далеко идущее совпадение свойств фигур, изображенных на этой поверхности, со свойствами фигур на плоскости Лобачевского. Все это имеет место, например, на псевдосфере Бельтрами, образуемой вращением трактрисы около ее асимптоты.

С первого взгляда можно предположить, что таким образом получается вполне удовлетворительная реализация, если не всей геометрии Лобачевского, что потребовало бы рассмотрения областей трех измерений, то по крайней мере плоской геометрии Лобачевского. Это предположение, однако, не оправдывается: псевдосфера Бельтрами отличается от плоскости Лобачевского, во-первых, существованием особой линии — кругового ребра, во-вторых, своими топологическими свойствами: на ней существуют замкнутые линии, например параллели, не сводящиеся к точкам непрерывной деформацией на поверхности. Геометрия на псевдосфере совпадает с плоской геометрией Лобачевского не в целом, а лишь локально, в достаточно малых окрестностях точек псевдосферы. Мы имеем здесь дело с неисправимым недостатком.

Поставленная цель полностью достигается методом другого рода, указанным Риманом в его знаменитом мемуаре 1854 г. «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» *). Недостаточно рассматривать ту или иную поверхность и измерять на ней длины, углы и площади обычным образом; напротив, именно метрика должна быть заменена другой. Раз мы решились на этот шаг, форма поверхности, или, точнее, многообразия, на котором мы оперируем (нет необходимости рассматривать это многообразие материализованным в виде поверхности или в случае трех измерений — в виде определенного объема), имеет лишь второстепенное значение и проявляется только своими топологическими свойствами.

Эта концепция Римана позволяет построить не только геометрию Лобачевского, но и несравненно более общие геометрии, играющие столь большую роль в современных физических теориях.

Рассмотрим обыкновенную плоскость или трехмерное пространство, но положим в основу всех измерений линейный элемент:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)}, \tag{1}$$

где a — некоторое действительное число, r — расстояние от

*) Этот мемуар можно найти в книге [1] на стр. 279—293. (*Прим. ред.*)

неподвижной точки O до переменной точки плоскости или пространства,

$$ds_0^2 = \begin{cases} dX^2 + dY^2 & \text{(для плоскости)}, \\ dX^2 + dY^2 + dZ^2 & \text{(для пространства) *)}. \end{cases} \qquad (2)$$

Мы получим «риманову» геометрию двух или трех измерений, сходную со сферической. В ней сумма углов геодезического треугольника больше двух прямых, причем этот избыток пропорционален площади такого треугольника. Мы сохраняем в этом случае название риманова геометрия, хотя оно несправедливо по отношению к Риману; этим его грандиозная общая концепция как бы сводится к незначительному частному случаю.

Равным образом легко, как показал Бельтрами в 1868 г., образовать линейный элемент, приводящий к геометрии Лобачевского. Элемент Бельтрами (в случае, если кривизна равна $-\frac{4}{a^2}$) имеет вид **)

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2}. \qquad (3)$$

Здесь величины a, r, ds_0 имеют прежний смысл. В случае, когда число измерений равно двум, знаменатель выражения (3) является левой частью уравнения действительной [а не мнимой, как в формуле (1)] окружности $S^2 = X^2 + Y^2 - a^2 = 0$, а в случае, когда число измерений равно трем,— действительной сферы $S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2 = 0$.

Сам Бельтрами рассматривал линейный элемент, получающийся из (3) путем замены окружности или сферы $S^2 = 0$ прямой или соответственно плоскостью $Y = 0$. Тогда линей-

---

*) Здесь и во всем последующем изложении декартовы прямоугольные координаты обозначаются прописными буквами X, Y, Z.

**) Линейный элемент (3) получается в двумерном случае из линейного элемента (2.1), рассмотренного в книге [2], если там за область D взять круг $|z| < a$ и положить $\rho = \frac{4}{a^2}$. (*Прим. ред.*)

ный элемент (3) переходит в линейный элемент *)

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{4Y^2}. \tag{4}$$

Мы полагаем здесь $a = 1$. Формы (3) и (4) не различаются существенно между собой и легко переходят одна в другую.

Заметим, что как в случае мероопределения (3), так и в случае мероопределения (4) предполагается, что точка (X, Y) или (X, Y, Z) находится в определенной области плоскости или пространства. В двумерном случае этой областью при пользовании метрикой (3) является круг $X^2 + Y^2 < a^2$, при пользовании линейным элементом (4) — одна из полуплоскостей $Y > 0$ или $Y < 0$. На линиях, ограничивающих эти области, — окружности $X^2 + Y^2 = a^2$ или прямой $Y = 0$ — коэффициенты линейного элемента становятся бесконечными; эти линии оказываются состоящими из бесконечно удалённых в смысле метрики (3) или (4) точек. Мы далее называем эти линии *абсолютами* геометрий, рассматриваемых в соответствующих областях.

В трехмерном случае аналогичную роль для метрики (3) играет шар $X^2 + Y^2 + Z^2 < a^2$, для метрики (4) — полупространство $Y > 0$ или $Y < 0$. На поверхностях, ограничивающих эти области, — сфере $X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2$ или плоскости $Y = 0$ — коэффициенты линейного элемента становятся бесконечными. Мы далее называем эти поверхности *абсолютами* геометрий, рассматриваемых в соответствующих областях пространства.

Как в геометрии Римана, так и в геометрии Лобачевского остаются в силе все те предложения евклидовой геометрии, которые не связаны с аксиомой параллельности, с тем, однако, ограничением, что в римановой геометрии две прямые могут пересекаться в двух точках, не совпадая одна с другой. Наиболее существенное из этих предложений состоит в том, что неизменяемая «твердая» фигура может бесконечным числом способов перемещаться на плоскости или в пространстве.

*) Линейный элемент (4) получается в двумерном случае из линейного элемента (2.1), рассмотренного в книге [2], если там положить $\rho = \frac{4}{a^2}$. (*Прим. ред.*)

Иначе говоря, каждое из пространств или каждая из плоскостей (Евклида, Лобачевского или Римана) могут быть наложены сами на себя бесконечным числом (∞^6 в случае пространства, ∞^3 в случае плоскости) способов. Дальнейший анализ показывает, что линейные элементы (1), (2), (3) или (4) остаются неизмененными при всех преобразованиях некоторой непрерывной группы преобразований G с тремя параметрами в случае плоскости и шестью параметрами в случае пространства. Эта непрерывная группа называется *группой движений* соответствующей геометрии.

И на плоскости, и в пространстве группа G транзитивна относительно точек области, в которой установлена соответствующая геометрия: она содержит преобразования, позволяющие перевести произвольную точку A этой области в другую произвольную точку B этой же области (число таких преобразований ∞^1 в случае плоскости и ∞^3 в случае пространства). Вместе с тем группа G не является дважды транзитивной: ее преобразования, примененные одновременно к двум точкам рассматриваемой области A и A', имеют инвариант — «расстояние» AA'. Группа G тогда и только тогда содержит преобразование, переводящее одновременно точку A в точку B, точку A' в точку B', когда расстояние AA' равно расстоянию BB'.

В случае плоской геометрии, если точки A и A' различны и указанное условие выполнено, преобразование, о котором идет речь, единственно. Оно непрерывно изменяется при изменении положений данных точек, пока общее значение расстояний AA' и BB' не приближается к нулю.

Более точно: преобразование группы G, переводящее точки A и A' в точки B_1 и B_1' (где расстояние $B_1B_1' = BB' = AA'$) в ограниченной области, содержащей точки A и A', как угодно мало отличается от преобразования группы G, переводящего точки A и A' в точки B и B', если расстояния BB_1 и $B'B_1'$ достаточно малы, а расстояние AA', напротив, больше некоторой положительной величины.

Аналогичный смысл имеет условие непрерывности при одновременном изменении положения всех четырех точек A, A', B, B'. Эта непрерывность легко устанавливается, исходя из аналитических выражений групп G рассматриваемых геометрий. Она просто устанавливается и чисто геометрическим путем *).

В случае пространственной геометрии мы однозначно определим преобразование группы G, если потребуем, чтобы оно переводило некоторый треугольник $AA'A''$ в новое положение $BB'B''$. При этом само собой разумеется, что соответственные стороны этих треугольников должны быть равными между собой, точки A, A', A'' не должны лежать на одной прямой линии. Определяемое таким образом преобразование непрерывно изменяется при перемещении рассматриваемых точек, если только при этом перемещении расстояние AA' и расстояние точки A'' от прямой AA' превышают некоторую положительную величину.

---

*) Рассмотрим подробнее случай геометрии Лобачевского. Достаточно заметить, что новое преобразование составляется из первоначального перемещения и перемещения G, переводящего точки B и B' в точки B_1 и B_1'. Затем перемещение G можно свести к следующим:

1) Если прямые Лобачевского BB' и B_1B_1' пересекаются в конечной (в смысле рассматриваемой геометрии Лобачевского) точке P, — к повороту Лобачевского вокруг этой точки, совмещающему прямую Лобачевского BB' с прямой Лобачевского B_1B_1', и затем к сдвигу Лобачевского вдоль прямой Лобачевского, окончательно совмещающего данные точки.

2) Если прямые Лобачевского BB' и B_1B_1' параллельны в смысле Лобачевского, — к предельному вращению Лобачевского (оставляющему неподвижным общий конец этих прямых Лобачевского на абсолюте), совмещающему прямую Лобачевского BB' с прямой Лобачевского B_1B_1', и затем — к сдвигу Лобачевского вдоль прямой Лобачевского B_1B_1', приводящему к совмещению рассматриваемых точек.

3) Если прямые Лобачевского BB' и B_1B_1' расходятся, — к сдвигу Лобачевского вдоль прямой Лобачевского, перпендикулярной к ним, до совмещения прямых Лобачевского BB' и B_1B_1' и затем — к сдвигу Лобачевского вдоль прямой Лобачевского B_1B_1', приводящему к совпадению данных точек.

Если расстояния Лобачевского $D_0(B_1B_1)$ и $D_0(B_1'B_1')$ достаточно малы, то все указанные выше движения Лобачевского будут как угодно мало отличаться от тождественного преобразования. По поводу упомянутых здесь движений Лобачевского см. [2], гл. III, § 1. (*Прим. ред.*)

Непрерывная группа движений G не исчерпывает всех преобразований, оставляющих неизменными наши линейные элементы. К ним можно присоединить еще другие преобразования, так называемые движения второго рода, тоже обладающие рассматриваемым свойством. Эти преобразования образуют непрерывные семейства, которые мы будем обозначать через H. Семейства преобразований H зависят на плоскости от трех, в пространстве — от шести параметров. Мы называем преобразования семейств *H движениями второго рода* в отличие от преобразований группы G, называемых *движениями* или иногда *движениями первого рода.* Отметим еще, что само семейство H не является группой; однако преобразования, входившие в G и в H, снова составляют (смешанную) группу. Преобразования, составляющие семейство H, чрезвычайно полезны благодаря той простоте, с которой из них получаются движения G. Каждое из последних получается соединением двух подходящим образом выбранных движений второго рода из семейства H.

Группа G хорошо известна и в евклидовой и в римановой геометриях: она состоит в двумерном случае из скольжений евклидовой плоскости по себе самой или из движений вращений сферы по себе самой. Что касается группы движений первого рода и семейства движений второго рода плоскости Лобачевского, то их можно задать в двух различных формах — *аналагматической* *) и *проективной*; обе эти формы фигурируют в мемуарах Пуанкаре об автоморфных функциях и, с другой стороны, были глубоко изучены Клейном. Аналагматическая форма выводится прямо из выражений (3) и (4) для линейного элемента. В случае этой реализации плоской геометрии Лобачевского геодезическими линиями оказываются окружности, ортогональные к окружности $X^2+Y^2=a^2$ или к прямой $Y=0$. Мы называем эти геодезические линии *прямыми Лобачевского* [некоторые из прямых Лобачевского являются обыкновенными прямыми, например, к их числу принадлежат в случае, соответствующем метрике (3), прямые Лобачевского, проходящие через точку $(0, 0)$]. «Расстояние» между двумя точками A и B

*) То есть в виде дробно-линейных отображений соответственно первого или второго рода на плоскости комплексного переменного $z=X+iY$. (*Прим. ред.*)

круга $X^2+Y^2<a^2$ или полуплоскости $Y>0$ — мы называем его расстоянием Лобачевского — отличается только постоянным множителем $\left[\text{равным } \frac{1}{2} \text{ в случае линейного элемента (3) при } a=1\right]$ от логарифма ангармонического отношения четырех точек: A, B и точек пересечения прямой Лобачевского AB с абсолютом *). Угол между двумя пересекающимися линиями определяется как соответствующий угол евклидовой геометрии. Роль «отражения» по отношению к прямой Лобачевского играет в этой реализации инверсия (симметрия) относительно окружности или прямой, представляющей эту прямую Лобачевского. Всякое преобразование группы G (движение Лобачевского) получается — и притом бесконечно большим числом способов — как комбинация двух подходящим образом выбранных инверсий, всякое преобразование семейства H (движение Лобачевского второго рода) — как комбинация движения Лобачевского первого рода с раз навсегда выбранной инверсией **).

Проективная форма просто получается из только рассмотренной с помощью точечного преобразования ***). В этом случае роль абсолюта играет некоторое коническое сечение, рассматривается только часть плоскости, находящаяся внутри этого конического сечения. Прямыми Лобачевского оказываются отрезки евклидовых прямых, попадающие внутрь абсолюта. Расстояние Лобачевского будет снова пропорциональным логарифму ангармонического отношения четырех точек: A, B и точек пересечения прямой Лобачевского AB с абсо-

---

*) Именно в смысле этого «расстояния Лобачевского» окружность $X^2+Y^2=a^2$ или прямая $Y=0$ состоит из точек, бесконечно удаленных от внутренних точек круга $X^2+Y^2<a^2$ или полуплоскости $Y>0$. (*Прим. ред.*)

**) Затронутые здесь вопросы рассмотрены в книге [2], гл. II, §§ 2 и 3. (*Прим. ред.*)

***) Например, в двумерном случае для метрики (3) можно поступить так: надо стереографически спроектировать круг $X^2+Y^2<a^2$ на сферу, для которой окружность $X^2+Y^2=a^2$ является большим кругом, и затем вернуться на плоскость XOY с помощью ортогонального проектирования. При таком преобразовании роль абсолюта сохраняется за окружностью $X^2+Y^2=a^2$; опять рассматриваются только точки плоскости XOY, лежащие внутри этой окружности.

лютом *). В отличие от аналагматической реализации определение угла отличается от евклидового. Здесь он оказывается с точностью до постоянного мнимого множителя равным логарифму ангармонического отношения, образуемого в соответствии с известной формулой Лагерра. При этом роль изотропных прямых играют мнимые касательные, проведенные к абсолюту из вершин угла **).

Отражение точки C в прямой Лобачевского a теперь сводится к нахождению на прямой AC (A — полюс прямой a относительно абсолюта) точки C_1, гармонически сопряженной с C относительно пары точек A и B (B — точка пересечения прямых a и AC). Преобразования группы G (движения Лобачевского) составляются из двух отражений; преобразования семейства H (движения Лобачевского второго рода) получаются как комбинация преобразований группы G с одним раз навсегда взятым отражением. В своей совокупности преобразования G и H объединяют все проективные преобразования, отображающие на себя часть плоскости, ограниченную абсолютом (такое проективное преобразование принадлежит к семейству G или H, смотря по тому, сохраняет ли оно направление обхода на абсолюте или нет). Эта проективная реализация не будет, вообще говоря, встречаться в последующем изложении, в котором главную роль будет играть аналагматическая точка зрения.

Какой из двух описанных методов мы ни употребляли бы, всякий факт геометрии Лобачевского может быть переведен в факт обыкновенной, евклидовой геометрии, и мы можем по нашему усмотрению пользоваться внутри абсолюта любой из этих геометрий и переходить от одной из них к другой. Очевидно, что при пользовании геометрией Лобачевского особое значение приобретает абсолют — линия, все точки которой с точки зрения метрики Лобачевского должны рассма-

*) Множитель пропорциональности равен половине множителя пропорциональности у аналогичного логарифма в аналагматическом случае, если проективная реализация получена так, как указано в предыдущей сноске.

**) Если a, b — прямые Лобачевского, между которыми определяется угол, а C_1, C_2 — мнимые касательные к абсолюту, проведенные из точки пересечения данных прямых Лобачевского, то за угол Лобачевского принимается величина $ki \ln (a, b, c_1, c_2)$. (*Прим. ред.*)

триваться как бесконечно удаленные от точек, лежащих внутри абсолюта. Как мы уже указывали выше, эта линия определяется как геометрическое место точек, в которых обращается в нуль знаменатель линейного элемента. В случае аналагматической реализации она является окружностью, которая для метрики (4) обращается в прямую линию. Получаемую таким образом прямую не следует смешивать с бесконечно удаленной прямой обычной проективной геометрии. В случае проективной реализации роль абсолюта всегда играет некоторое коническое сечение. «Обычная» бесконечно удаленная точка *), т. е. бесконечно удаленная точка плоскости комплексного переменного $Z = X + iY$, может нам встретиться только при рассмотрении абсолюта и то только тогда, когда этот абсолют является прямой линией для метрики (4) **). Однако и в этом случае мы при всех рассуждениях, связанных с понятием расстояния, а следовательно, о соседстве, о пределах и т. п., будем переходить от подобной точки к конечной точке плоскости z с помощью подходящего дробно-линейного отображения.

Важно обратить внимание на то, что в соседстве с абсолютом различие между метриками Евклида и Лобачевского неограниченно увеличивается. В этом смысле все фигуры геометрии Лобачевского, рассмотренные с точки зрения евклидовой метрики, будут казаться бесконечно уменьшенными. В частности, окружность $\varkappa$ с радиусом Лобачевского, равным λ, делается в евклидовом смысле сколь угодно малой, если ее центр достаточно приближается к абсолюту ***).

*) Известно, что в евклидовой аналагматической геометрии (как и в теории функций) нет бесконечно удаленной линии, а имеется лишь бесконечно удаленная точка.

**) Если абсолют — окружность [для метрики (3)], то ее внешняя область тоже может рассматриваться как плоскость Лобачевского. При этом бесконечно удаленная точка не будет чем-либо отличаться от всякой другой точки.

***) Между величиной λ, расстоянием Лобачевского R от центра абсолюта до центра Лобачевского окружности $\varkappa$ и евклидовым радиусом l окружности $\varkappa$ существует соотношение

$$2l = \operatorname{th}(R + \lambda) - \operatorname{th}(R - l) = \frac{\operatorname{sh} 2\lambda}{\operatorname{ch}(R + \lambda)\operatorname{ch}(R - \lambda)}.$$

[В этом легко убедиться на основании формул (2.79) из книги [2]. (*Прим. ред.*)]

Перейдем теперь к вопросу о том, каким образом рассмотренные нами движения, в частности движения Лобачевского, могут быть представлены с помощью дробно-линейных преобразований на плоскости комплексного переменного z и затем использованы в теории функций одного комплексного переменного.

Для евклидовой геометрии этот вопрос решается весьма просто. Если $z = X + iY$ есть аффикс точки (X, Y), то всякое преобразование группы G, т. е. движение, заключающее в себе вращение только в принятом направлении *), определяется уравнением вида

$$z^* = \alpha z + \beta. \tag{5}$$

Здесь α и β — постоянные, причем $|\alpha| = 1$ **). Движения второго рода (составляющие семейство H) получаются из преобразований (5) в результате замены там z или z^* на сопряженную величину.

В случае сферической или римановой геометрии на сфере $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ следует прежде всего сопоставить каждой точке этой сферы с помощью стереографической проекции точку плоскости $z = X + iY$. Тогда комплексное число z, аффикс этой точки плоскости, может рассматриваться и как координата соответствующей точки сферы. После этого группа движений G сферической геометрии будет определяться уравнением ***)

$$z^* = \frac{\alpha z - \bar{\gamma}}{\gamma z + \bar{\alpha}}, \tag{6}$$

где $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Чтобы получить движения второго рода (составляющие семейство H), достаточно заменить в формуле (6) z на $\bar{z}$ или z^* на $\bar{z}^*$.

Перейдем теперь к геометрии Лобачевского — опять только для двух измерений. Мы уже указывали на то, что в этом

---

*) Принятое направление вращения — это то направление, в котором следует поворачивать положительную полуось x до совпадения с положительной полуосью y (через первую четверть). (*Прим. ред.*)

**) При $|\alpha| \neq 1$ мы имели бы подобие, а не равенство фигур.

***) Доказательство этого предложения можно найти в книге Л. Форда [3] на стр. 131—133. (*Прим. ред.*)

случае всякое преобразование группы G может быть представлено как комбинация двух инверсий, каждое преобразование семейства H — как комбинация трех инверсий (из них одна фиксирована и сама входит в состав семейства H; это преобразование мы представляем с помощью одной инверсии). Отсюда следует, что если $z = X + iY$ — аффикс произвольной точки плоскости, то всякое преобразование группы G представится для случая метрики (3) в круге $|z| < 1$ с помощью равенства

$$z^* = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - z\bar{\alpha}}. \tag{7}$$

Здесь $|\alpha| < 1$. Всякое преобразование семейства H может быть получено из (7) в результате замены в формуле (7) z на $\bar{z}$ или z^* на $\bar{z}^*$.

В случае метрики (4) группа G будет состоять из дробно-линейных преобразований

$$z^* = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{8}$$

где α, β, γ, δ — произвольные действительные числа лишь с тем ограничением, что определитель $\Delta = \alpha\delta - \gamma\beta$ должен быть положительным [это условие обеспечивает отсутствие перемещений точек при преобразовании (8) между верхней и нижней полуплоскостями] *). Отметим, что во всех рассмотренных случаях группа движений G оказалась зависящей от трех действительных параметров.

Значение рассмотренных непрерывных групп для последующего изложения определяется наличием у них **собственно разрывных** подгрупп.

Напомним важнейшие свойства этих собственно разрывных групп **).

Казалось бы, собственно разрывная группа только должна быть группой не непрерывной, т. е. подстановки этой группы (для простоты мы будем предполагать их дробно-линейными; этот случай — единственный, нас интересующий) не должны

---

*) Для получения преобразований семейства H достаточно в уравнении (8) заменить z на $-\bar{z}$ или z^* на $-\bar{z}^*$. (*Прим. ред.*)
**) См. [2], гл. III, § 2. (*Прим. ред.*)

зависеть от непрерывно изменяющихся параметров. Будем смотреть на коэффициенты α, β, γ, δ подстановки

$$z^* = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{9}$$

как на координаты точки евклидового пространства трех измерений или (принимая во внимание, что мы имеем дело с комплексными числами) определим с помощью их отношений действительную точку пространства шести измерений; тогда среди точек пространства, представляющих эти подстановки, не должно содержаться всех точек дуги некоторой жордановой (в общем смысле этого слова) линии или, тем более, всех точек части некоторой поверхности. Такова, например, группа, образуемая всеми дробно-линейными преобразованиями с действительными, рациональными (или, что то же, с действительными целыми) коэффициентами.

На самом деле, для того чтобы группа называлась собственно разрывной, требуют, чтобы она не заключала преобразований, бесконечно близких друг к другу. Иначе говоря, точки пространства шести измерений, представляющие подстановки группы, должны быть, вообще говоря *), изолированными: каждая из этих точек должна заключаться в области, внутри которой, кроме самой этой точки, не должно находиться никакой другой точки, представляющей преобразование группы. Легко видеть, что это условие значительно сильнее предыдущего. Например, только что упомянутая группа дробно-линейных преобразований с соизмеримыми коэффициентами ему не удовлетворяет.

Так как рассматриваемая группа содержит тождественное преобразование, то она, в частности, не должна содержать бесконечно малых подстановок, т. е. подстановок, бесконечно близких к тождественной подстановке.

Но, в свою очередь, и это условие недостаточно для того, чтобы группа могла считаться собственно разрывной. Изолированными должны быть не только точки шестимерного пространства, изображающие подстановки, но это же должно

---

*) Исключение могут составить точки, представляющие вырожденные подстановки, т. е. подстановки, определитель которых равен нулю.

иметь место в плоскости комплексной переменной z для точек, получающихся преобразованием произвольной точки P. Всякая такая точка, вообще говоря, должна быть центром круга (или шара, если идет речь о преобразованиях пространства), не содержащего никакой иной точки, получающейся преобразованием точки P (кроме ее самой). Это новое условие нисколько не является необходимым следствием отсутствия бесконечно малых преобразований. Действительно, каждая из рассмотренных подстановок имеет двойные точки, т. е. точки, остающиеся неизменными при преобразовании. Поэтому, если существует бесконечно большое число двойных точек подстановок группы, неограниченно приближающихся к некоторой точке P, то точки, получающиеся из P соответствующими преобразованиями группы, будут также бесконечно близки к P.

Далее мы будем рассматривать собственно разрывные группы, для которых подобная возможность не имеет места по крайней мере для произвольно взятой точки P. Напротив, она может иметь место в случае собственно разрывной группы для некоторых исключительных точек P, которые и будут называться *особыми точками* группы.

Теперь дадим другое определение особой точки собственно разрывной группы.

Точка P называется *особой точкой* собственно разрывной группы, если можно найти бесконечное множество пар точек M, M', гомологичных между собой относительно группы и неограниченно приближающихся к точке P; при этом предполагается, что подстановки, каждая из которых переводит точку M в гомологичную с ней M', все различны между собой.

Заметим, что во всех тех случаях, которые нам придется рассматривать, оба данных нами определения особой точки эквивалентны.

В интересующем нас случае подгрупп группы движений можно показать, что *все особые точки необходимо лежат на абсолюте*. Мы будем исходить из второго определения особой точки; доказательство будем вести от противного. Пусть P — конечная*) особая точка группы. Всякой паре гомологичных точек M, M', лежащих в окрестности точки P, соответствует точка P', гомологичная точке P, для которой

*) В смысле рассматриваемой геометрии. (*Прим. ред.*)

расстояние $P'M' = PM$; эта точка P' также будет весьма близка к точке P. (Заметим еще, что точка P' может и совпадать с точкой P, если точка P является двойной точкой бесконечного множества преобразований группы; и в этом случае мы будем считать точку P особой).

Пусть теперь Q — некоторая другая точка, лежащая на конечном, отличном от нуля, расстоянии от точки P.

Подстановка, преобразующая точку P в точку P', преобразует точку Q в точку Q', которая находится также на конечном расстоянии от точки P. Так как подобных точек Q', находящихся на конечном расстоянии от точки P, оказывается бесконечно много, то у них существует по крайней мере одна предельная точка Q'_0. Следовательно, существует бесконечное множество подстановок группы, преобразующих точку P в точку P', сколь угодно близкую к P, и Q — в точку Q', сколь угодно близкую к точке Q'_0. Но мы знаем, что преобразование группы G вполне определено, если даны новые положения двух различных точек P, Q, и что это преобразование непрерывно изменяется при изменении положений этих точек. Следовательно, должно существовать бесконечное множество подстановок группы G, как угодно близких одна к другой. Однако мы рассматриваем группу, не содержащую бесконечно близких подстановок. Поэтому наше допущение должно быть отвергнуто. Мы доказали, что все особые точки группы G лежат на абсолюте.

Согласно определению группы наша группа содержит тождественное преобразование *); вместе с каждым преобразованием она содержит соответствующее обратное преобразование.

Поэтому: 1) если точка P гомологична точке P' относительно рассматриваемой группы, то и обратно, точка P' гомологична точке P; 2) две точки, гомологичные третьей точке, гомологичны между собой.

Это двойное следствие имеет основное значение для нашего исследования (равно как и во всех исследованиях по теории

*) Известно, что это свойство, равно как и свойство группы состоять из попарно взаимно обратных подстановок, не вытекает непосредственно из требования принадлежности к группе произведения ее элементов (см., например, книгу Л. Эйзенхарта [4], стр. 20—23). Наличие этих свойств предусматривается в общепринятом в настоящее время определении группы. (*Прим. ред.*)

групп), так как оно позволяет определить для данной собственно разрывной группы G *приведенную* или *фундаментальную область*, т. е. такую часть D_0 плоскости или пространства, в которой содержится одна и, вообще говоря, только одна точка, гомологичная всякой (неособой) точке. Исключение составляют только те точки, чьи гомологи находятся на границе области D_0 и которые имеют в таком случае одну или несколько других гомологичных точек на этой же границе. Как известно, именно такой приведенной областью является параллелограмм периодов эллиптической функции. Первый пример использования собственно разрывных групп в теории функций связан именно с этим фактом.

Приведенная область может быть выбрана для каждой данной группы бесконечным числом способов. Прежде всего ясно, что после того, как найдена какая-нибудь приведенная область D_0, мы можем отнять от нее некоторую часть Δ, заменив ее областью Δ', являющейся одной из областей, получающихся путем преобразования из Δ. Эту область Δ' можно избрать так, чтобы она прилегала к открытому множеству $D_0 - \Delta$, если пожелать, чтобы новая приведенная область $D_0 - \Delta + \Delta'$ была связной *).

Описываемый далее метод построения приведенной области обнаруживает, сколько произвола заключает в себе ее определение.

Будем исходить из произвольной, ограниченной снизу функции F точки P. Единственное условие, которому должна сверх того удовлетворять эта функция, заключается в том, что она не должна оставаться инвариантной при преобразованиях группы, т. е. ни для одного из преобразований T группы G, переводящего произвольную точку P в P', не должно быть (тождественно по отношению к P)

$$F(P) = F(P'). \tag{10}$$

После того как такая функция F выбрана, должны быть вычислены ее значения для всех гомологов каждой произвольной неособой точки P; тогда тот из гомологов точки P, для

*) Обыкновенно стараются, чтобы приведенная область удовлетворяла этому условию, хотя, строго говоря, это нисколько не необходимо.

которого это значение есть наименьшее,— точка P_0 — будет приведенной точкой. Мы получим ту же самую приведенную точку, если вместо точки P возьмем любой из ее гомологов — точку P' — так как на основании предыдущего совокупность гомологов точки P совпадает с совокупностью гомологов точки P'.

Определение приведенной точки окажется непригодным, если значения функции F (по предположению, ограниченные снизу) не имеют действительно достижимого минимума и стремятся к своей нижней границе, когда точки, гомологичные точке P, стремятся к некоторым предельным точкам, являющимся особыми точками группы.

Что касается до тех частных положений точки P, для которых два или более значений функции F в гомологичных ей точках окажутся равными между собой (тот случай, когда число этих значений будет бесконечно велико, входит в предыдущий случай), то они соответствуют точкам границы приведенной области.

Если функция F не удовлетворяет наложенному на нее условию *), то предшествующий метод приведет к нескольким гомологам точки P, дающим функции F минимальное значение. В результате объединения всех таких приведенных точек, следовательно, получится область, заключающая в себе несколько гомологов каждой произвольной точки P. Но тогда из этой области можно вывести другую, меньшую область D_0', которая будет действительно приведенной по отношению к группе G. Для этого достаточно в свою очередь привести D_0 по отношению к группе G', рассматривая другую функцию F_1, изменяющуюся при всякой подстановке группы G', и выбирая между различными гомологами точки P, заключенными в D_0, тот из них, для которого функция F_1 имеет наименьшее значение.

Как легко видеть, наша операция приведения не относится необходимо целиком ко всей плоскости (Евклида, Лобачевского или Римана), но может быть применена и к некоторой

*) То-есть если данная группа G содержит (в конечном или бесконечно большом числе) подстановки, для которых имеет место тождественное (по отношению к точке P) соотношение (10); при этом такие подстановки, очевидно, составляют подгруппу G' группы G.

области R этой плоскости, лишь бы эта область была инвариантна для группы, по отношению к которой она подвергается операции приведения. Это замечание, в частности, найдет приложение в дальнейшем, когда нам придется ограничивать изучение группы частью плоскости. Как мы покажем, это обстоятельство не встречается в теории фуксовых групп и, напротив, на него необходимо будет обратить внимание при переходе к группам Клейна.

Наиболее простая и чаще всего употребляемая форма предыдущего метода — метод излучения. Пусть C — некоторая фиксированная точка. За функцию F мы возьмем расстояние *) от точки C до произвольной точки P, определяемое, конечно, соответственно рассматриваемой геометрии. Соответствующая приведенная область называется тогда для сокращения *областью точки* C. В этом случае приведенным гомологом P_0 точки P является ближайший к точке C гомолог точки P. Тогда его можно определить и иначе — условием большей близости к точке C, чем к какому-либо из гомологов C_1, C_2, ... этой точки; действительно, например, для гомолога C_1, получающегося из C преобразованием T_1 группы, расстояние P_0C_1 равно расстоянию от точки C до точки $T_1^{-1}P_0$. Однако это последнее по условию больше (или в виде исключения равно) расстоянию P_0C. Отсюда видно, что область точки C находится целиком по одну сторону (по которую лежит и C) от каждой из прямых, проведенных перпендикулярно к линиям, соединяющим точку C с ее гомологами C_1, C_2, ... в серединах сегментов CC_1, CC_2, CC_3, ... Эта область, следовательно, является прямолинейным (в смысле рассматриваемой геометрии) выпуклым, могущим уходить в бесконечность многоугольником, ограниченным известным числом сторон, лежащих на упомянутых перпендикулярах. До сих пор (по крайней мере, насколько нам известно) интересовались преимущественно случаем, когда число этих сторон конечно, и мы также им ограничимся.

Каждый из гомологов точки C, например точка C_1, будет иметь свою область, образованную посредством операции T

*) Минимум F, без сомнения, действительно достигается в этом случае; то же самое имеет место вообще для всякой функции F, имеющей значение $+\infty$ на абсолюте, потому что каждая особая точка нашей группы расположена именно на этой линии.

из области точки C и состоящую из точек, для которых ближайшим гомологом точки C является точка C_1. Всякая точка плоскости принадлежит, таким образом, к одному из этих образов области точки C и притом, вообще говоря, только к одному. Плоскость (аналогично — пространство), таким образом, разделяется без пустот и без перекрытий на области, гомологичные между собой, полученные преобразованиями одной и той же начальной области. Эти области в случае метода излучения являются все прямолинейными и выпуклыми многоугольниками; их стороны составлены из точек, находящихся на равном расстоянии от двух гомологов начальной точки C; их вершины находятся на одинаковом расстоянии от нескольких из этих гомологов.

Все сказанное выше предполагает, что точка C не остается инвариантной ни при одной из подстановок группы, так как в противном случае оставались бы инвариантными и расстояния CP, что противоречит сделанному выше предположению. Однако мы видели, что и в этом случае можно, исходя из области D_C точки C, получить приведенную область по отношению к нашей группе, если мы в свою очередь приведем D_C по отношению к подгруппе, оставляющей точку C инвариантной. Такая подгруппа состоит из вращений около точки C; эти вращения необходимо являются степенями одного из них, сводящегося к повороту на угол $\frac{2\pi}{n}$, где n — некоторое целое число. Для получения приведенной области нашей группы достаточно разбить область D_C на части сторонами углов с вершиной в точке C, равных $\frac{2\pi}{n}$. При этом указанные углы всегда можно взять так, что их стороны пройдут через вершины многоугольника D_C. Несмотря на некоторое усложнение (ввиду необходимости двух последовательных редукций), понятно, что такой выбор точки C часто приводит к наиболее интересным формам приведенных областей.

Одна из наиболее замечательных особенностей творчества Пуанкаре в этих вопросах состоит в чисто геометрическом характере, приданном им отправному пункту теории собственно разрывных групп дробно-линейных подстановок, целиком основанной на понятии приведенной области. Выражение «производящий многоугольник», употребляемое Пуанкаре для обозначения приведенной области, уже само по себе чрезвычайно характерно.

Мы видели, что вся область R (плоскость или пространство или иногда часть плоскости или пространства) покрывается без пробелов и перекрытий последовательно получающимися образами первоначальной приведенной области. Другими словами, с каждой точкой плоскости (за исключением особых точек или точек, принадлежащих к нескольким областям) связана определенная подстановка группы — та, которую нужно применить, чтобы перейти от этой точки к ее приведенной.

Благодаря этому обстоятельству мы можем, следуя Пуанкаре, построить всю группу и получить все ее существенные свойства, исходя исключительно из приведенной области D_0 — в частности, из производящего многоугольника.

Заметим прежде всего, что стороны, ограничивающие такой многоугольник, могут быть двух родов, смотря по тому, отделяют ли они его от соседнего многоугольника или же составляют часть границы области, в которой должна находиться переменная точка — области, разумеется, инвариантной по отношению к рассматриваемой группе. Если на конечных (в смысле рассматриваемой геометрии) расстояниях изменение точки P не встречает никаких препятствий, то сторонами второго рода могут быть только отрезки абсолюта; возможность существования этих сторон второго рода необходимо принимать во внимание в геометрии Лобачевского и даже в геометрии Евклида.

Пусть AB — сторона первого рода, отделяющая данную приведенную область D_0 от одного из ее образов D_1. Преобразование T группы, переводящее многоугольник D_0 в многоугольник D_1, будет известно, если будет указана сторона A_1B_1 многоугольника D_0, которая при этом преобразовании переходит в сторону AB и, следовательно, должна равняться стороне A_1B_1. Действительно, с каким бы типом геометрии мы ни имели дело, всегда существует перемещение группы G и притом единственное, преобразующее данный сегмент A_1B_1 в другой данный сегмент AB при условии, что указан порядок, в котором расположены и, следовательно, должны соответствовать друг другу концы этих отрезков. Сторона A_1B_1 производящего многоугольника D называется *сопряженной* стороне AB; предполагается, что когда задается многоугольник D, то вместе с тем устанавливается и распределение его сторон в сопряженные пары*). Что касается порядка, в котором соответствуют друг другу вершины, то он известен без особого указания: если мы идем по стороне A_1B_1 от вершины A_1, соответствующей вершине A, к вершине B_1, соответствующей вершине B, то на периметре производящего многоугольника это направление должно быть противоположным направлению сегмента AB (потому что оно должно совпадать с направлением сегмента AB, рассматриваемого как часть периметра многоугольника D_1, смежного с D_0).

Итак, задание производящего многоугольника с распределением сторон первого рода на сопряженные пары определяет преобразования группы, преобразующие первоначальный производящий многоугольник в непосредственно граничащие с ним гомологичные многоугольники.

Эти последние преобразования являются *фундаментальными подстановками* (иногда их называют *основными подстановками*) рассматриваемой собственно разрывной группы. Перемножая их между собой всеми различными способами, мы сможем найти все остальные подстановки группы. Другими словами, с помощью указанных произведений этих подстановок можно перейти от первоначальной приведенной области D_0 к ее любому образу относительно преобразований собственно разрывной группы G. Действительно, пусть, например, D_2 — многоугольник, гомологичный D_0, смежный с D_1 и, следовательно, получающийся преобразованием T из многоугольника D_1, смежного с многоугольником D_0; тогда от многоугольника D_0 к многоугольнику D_2 мы сможем перейти с помощью перемещения T_1T. Здесь T_1 — преобразование группы G, переводящее многоугольник D_0 в многоугольник D_1; оно, следовательно, принадлежит к числу фундаментальных преобразований группы. Если затем мы хотим перейти от D_2 к третьему, соседнему с D_2 многоугольнику, то нам придется умножить подобным же образом слева уже

*) Иногда это является ненужным, как, например, в случае параллелограмма периодов эллиптических функций; если этот параллелограмм не есть ромб, то существует только одна сторона A_1B_1, равная AB.

полученное перемещение $T_1 T$ на перемещение того же рода (отличное от двух первых или совпадающее с одним из них, подобно тому как и перемещения T и T_1 могли быть различными или одинаковыми). Наше заключение может поэтому считаться доказанным.

Фундаментальные подстановки, из которых выводится вся группа, вообще говоря, не независимы между собой; между ними существуют некоторые соотношения. Наша геометрическая иллюстрация позволяет их без труда получить. Для этого достаточно рассмотреть цепи последовательно получающихся образов многоугольника D_0, которые начинаются с многоугольника D_0 и им же оканчиваются; ясно, что, применяя к такой цепи только что указанный метод определения подстановок, мы составим произведение фундаментальных подстановок, которое будет эквивалентно тождественной подстановке. Наиболее простая цепь, которую только можно себе представить, получится, если мы перейдем от многоугольника D_0 к соседнему многоугольнику D_1 и затем снова вернемся к D_0 по тому же самому пути; в результате мы установим, что две фундаментальные подстановки, соответствующие двум сопряженным сторонам, взаимно обратны.

К последней операции (достаточное число раз повторенной) можно привести и перемещение вперед и назад по цепи, состоящей из произвольного числа последовательно примыкающих друг к другу многоугольников, или перемещение вдоль подобной замкнутой цепи, не заключающей внутри себя ни одной вершины.

Но сверх этих цепей необходимо рассмотреть с той же точки зрения и замкнутые цепи, заключающие внутри одну вершину (те цепи, которые заключают в себе несколько вершин, рассматриваются как комбинация более простых цепей; мы предполагаем, что эта вершина принадлежит области R). Все полученные таким образом соотношения, будучи преобразованы подстановками группы, имеют своим следствием новые соотношения.

Пуанкаре называет те вершины, о которых только что шла речь, *вершинами первой категории*; они окружены замкнутыми цепями многоугольников и являются конечными точками. В них соединяются две стороны первого рода многоугольника D_0.

Пусть A — некоторая вершина первой категории. Совершим обход вокруг этой вершины и последовательно отметим все исходящие из нее стороны многоугольников, имеющих упомянутую точку своей вершиной. Затем заменим каждую из этих сторон гомологичной ей стороной многоугольника D_0. Эта операция приводит нас к правилу образования циклов, сформулированному Пуанкаре в следующих словах: исходя из вершины A и следуя по периметру многоугольника D_0 в определенном направлении, мы прежде всего рассматриваем сторону AB, следующую за вершиной A в избранном направлении; далее — сопряженную со стороной AB сторону $B'A'$, далее — вершину A' и следующую за вершиной A' в принятом направлении сторону многоугольника D_0, потом сторону, с ней сопряженную, и т. д.

Гомологичные между собой вершины A, A_1', ... составляют *цикл*; различные стороны, следующие одна за другой, дают (как выше было указано) ряд фундаментальных подстановок, произведение которых приводит к тождественной подстановке.

При рассмотрении таких циклов нам могут представиться два случая:

1) Положение вершины A первой категории изменяется вместе с изменением положения центра излучения (или, выражаясь более общо, вместе со способом образования производящего многоугольника). Такая вершина A может, следовательно, для одной и той же группы занимать произвольное положение (примером могут служить вершины параллелограмма периодов эллиптической функции). Подобная вершина называется *случайной вершиной*. В этом случае обход вершин, составляющих цикл, с возвращением к первоначальной вершине A соответствует полному обороту около точки A. Встречающиеся при этом стороны, а следовательно, и фундаментальные подстановки, произведение которых равно единице, все различны между собой.

2) Но может случиться иное: прежде чем будет сделан полный оборот около точки A, нам встретится такой новый многоугольник, соответствующий первому, что при преобразовании, устанавливающем соответствие между ними, вершина A окажется гомологичной самой себе. Тогда точка A является двойной точкой этой подстановки группы и поэтому уже не будет произвольной.

Обратно, всякая конечная двойная точка некоторой подстановки рассматриваемой группы имеет гомолог, являющийся вершиной производящего многоугольника — мы назовем ее *эллиптической вершиной*; такие вершины в противоположность случайным вершинам будут необходимыми вершинами.

Действительно, мы знаем, что каждая из этих точек имеет приведенную гомологичную точку. Пусть A — подобная приведенная точка. Преобразование группы, оставляющее точку A неподвижной, необходимо является поворотом (в смысле рассматриваемой геометрии) вокруг точки A на угол (см. стр. 64), соизмеримый с 2π. Не уменьшая общности, мы можем считать этот угол равным $\frac{2\pi}{n}$, где n — некоторое целое число. Пусть тогда точка C — центр излучения, с помощью которого мы получаем наш приведенный многоугольник. Применяя к точке C последовательно $n-1$ раз поворот около точки A на угол $\frac{2\pi}{n}$, мы получим $n-1$ гомологов точки C — точки $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Все они находятся на равных расстояниях от точки A.

Отсюда следует, что точка A есть одна из вершин приведенного многоугольника, отвечающего точке C.

Если кроме точек $C_1, \ldots, C_{n-1}$ у точки C нет других гомологов, отстоящих от точки A на расстоянии AC, то приведенный многоугольник, содержащий точку C, ограничен по крайней мере двумя перпендикулярами, проведенными из точки A к прямым CC_1, $CC_2, \ldots,$ — именно теми, которые составляют с прямой AC наименьший возможный угол, равный $\frac{2\pi}{2n}$. Таким образом, внутренний угол при вершине A приведенного многоугольника не больше чем $\frac{2\pi}{n}$ *).

Случай, когда $n=2$, заслуживает особого рассмотрения: тогда угол, о котором идет речь, равен π.

---

*) Внутренний угол многоугольника при вершине A может быть меньше чем $\frac{2\pi}{n}$, если существуют гомологи точки C, отличные от ее образов при рассмотренном вращении и находящиеся на расстоянии AC от точки A; этот случай может встретиться при некотором выборе точки C. Тогда точка A является в одно и то же время и случайной и эллиптической вершиной.

Условимся и в этом случае считать точку A эллиптической вершиной, хотя обе стороны AB и AB', выходящие из вершины A, являются одна продолжением другой; действительно, в этом случае не отрезок BB' является стороной, сопряженной с другой стороной многоугольника, но половина AB отрезка BB' сопряжена с его другой половиной AB', так как в этом случае вращение на угол π около точки A есть одно из перемещений группы. Такое вращение (симметрия относительно точки) называется *транспозицией*.

Эллиптической вершине соответствует цикл, который должен быть пройден n раз для того, чтобы он соответствовал полному обороту около этой вершины. Такому циклу соответствует произведение фундаментальных подстановок, n-я степень которого равна единице. Число n часто называется *порядком* цикла, вершины или соответствующего вращения.

Наконец, отметим, что существует столько же соотношений между фундаментальными подстановками, сколько существует различных циклов первой категории; все прочие соотношения между этими подстановками будут комбинациями первых.

Что касается вершин, расположенных на абсолюте, то Пуанкаре разделяет их в свою очередь на две категории. Одни — *вершины второй категории* — принадлежат одновременно двум сторонам первого рода. Они, будучи нормальными к окружности, играющей роль абсолюта (здесь речь идет о случае геометрии Лобачевского), будут в такой вершине касаться друг друга. Вторые — *вершины третьей категории* — принадлежат одновременно к стороне первого рода и стороне второго рода (эти две стороны ортогональны друг другу).

Вершины третьей категории не дают настоящих циклов, или, точнее, эти циклы остаются незамкнутыми (проходя по периметру многоугольника, как выше было указано, мы в конце концов доходим до стороны второго рода, на которой операция необходимо останавливается).

Вершины же второй категории разобьются, совершенно так же, как и вершины первой категории, на циклы, составленные исключительно из гомологичных между собой вершин второй категории. Эти циклы образуются так же, как циклы, состоящие из вершин первой категории. Они тоже соответствуют цепям производящих многоугольников; эти цепи состоят из смежных многоугольников, группирующихся около общей вершины второй категории. Но в этом случае их число бесконечно велико, так как каждый из примыкающих к этой вершине углов равен нулю; поэтому цикл, состоящий из конечного *) числа q членов, повторяется бесконечно большое число раз. Итак, в вершине второй категории, или, иначе, в *параболической* вершине, мы встречаемся с тем же расположением примыкающих к ней производящих многоугольников, как и в эллиптической вершине, но число n, которое ранее было конечным числом, теперь равно ∞.

Геометрический метод, которым мы пользуемся, позволяет выяснить и многие другие свойства собственно разрывных групп.

Если мы образуем, исходя из одной и той же функции F (например, расстояния от одного и того же центра C), приведенные области, соответствующие собственно разрывной группе G и одной из ее подгрупп G_1, то вторая область будет заключать внутри себя первую. При этом можно так построить эти две приведенные области, что вторая из них окажется покрытой без пробелов и перекрытий образами первой (в конечном или бесконечно большом числе). Действительно, можно сопоставить с подстановками подгруппы G_1

$$S_0 = 1, \quad S_1, \; S_2, \; \ldots \tag{11}$$

некоторый ряд подстановок группы G

$$T_0 = 1, \quad T_1, \; T_2, \; \ldots, \tag{12}$$

такой, что каждая подстановка группы C сможет быть представлена и притом только одним способом в форме $T_i S_k$; рассуждение, которое можно найти у Серре **) для групп,

*) Напомним, что рассмотрение ограничивается производящими многоугольниками, имеющими конечное число вершин. Этому циклу соответствуют фундаментальные подстановки, дающие в произведении некоторую параболическую подстановку T, входящую в состав нашей группы. (*Прим. ред.*)

**) См. также книгу А. К. Сушкевича [5], стр. 341. (*Прим. ред.*)

состоящих из конечного числа подстановок, распространяется и на группы, составленные из бесконечно большого числа подстановок, если множество подстановок счетно. Зная этот ряд, мы сможем получить приведенную область для подгруппы G_1, присоединяя к области D, приведенной по отношению к группе G, все ее образы, получаемые с помощью подстановок T. Этим мы докажем наше утверждение. Тот же результат можно получить, исходя из приведенной области D_1, для подгруппы G_1, если известна функция F_1, инвариантная для подстановок G_1, но изменяющаяся при всякой другой подстановке группы G; достаточно, оперируя с этой функцией так, как было указано выше, привести область D_1 по отношению к группе G.

Обратно, если произведено замощение области D_1 образами области D, то можно отсюда получить подстановки ряда (12), так как каждая из них преобразует область D в один из ее образов, расположенных в области D_1. Эти соотношения между собственно разрывными группами и их подгруппами играют весьма важную роль в мемуаре Пуанкаре.

Интересна связь, которая существует между этими исследованиями и теми, которые занимали Пуанкаре в самом начале его научной деятельности; в них Пуанкаре с исключительным успехом разъяснил прекрасные, но парадоксальные и искусственные арифметические методы Эрмита; Пуанкаре показал [6], что эти арифметические методы сводятся по существу к «приведению» группы G по отношению к одной из ее подгрупп G_1 (в этом случае, однако, группа G является группой непрерывной, тогда как G_1 — разрывная группа) методом, вполне аналогичным только что рассмотренному.

В тесной связи со сказанным находится и распространение изложенной теории на более общие собственно разрывные группы, в которые входят не только движения первого рода из группы G, но и движения второго рода из семейства H. Такая собственно разрывная группа Γ состоит из двух частей: одна G, взятая из группы G, другая H — из H. Так как произведение двух подстановок семейства H всегда принадлежит к группе G, то ряд (12) для перехода от подгруппы G к группе Γ будет заключать в себе только два преобразования (одним из них будет тождественная подстановка). Наиболее интересен случай, когда такая группа заключает в себе инверсию по отношению к некоторой прямой d и, следовательно, инверсию по отношению к образам этой прямой d. Тогда точки подобных прямых одинаково отстоят от произвольной точки C и одного из ее гомологов. Поэтому отрезок такой прямой d необходимо принадлежит к приведенной области (полученной, например, по методу излучения) и притом будет границей этой области. Инверсия по отношению к прямой d может в этом случае рассматриваться как вторая операция из ряда (12); тогда приведенная область группы G будет состоять из двух симметричных по отношению к прямой d половин.

Вместо того, чтобы ставить в соответствие каждой точке полной области определения группы ее гомолог в приведенной области, можно условиться рассматривать все точки, гомологичные между собой, как не отличающиеся друг от друга. Образование приведенного многоугольника в том виде, в каком оно было выше изложено, равносильно тогда соглашению считать различными только гомологичные точки, лежащие на периметре приведенного многоугольника. Но и к ним можно применить то же соглашение и мысленно рассматривать как совпадающие соответствующие точки, взятые на каких-либо двух сопряженных сторонах. Для этого надо согнуть многоугольники, приведя к совпадению каждые две сопряженные стороны, и затем склеить друг с другом стороны каждой пары. Если производящий многоугольник имеет только вершины первой категории, то он в результате преобразуется в замкнутое многообразие.

Например, параллелограмм периодов системы эллиптических функций следует согнуть сначала так, чтобы две противоположные стороны совпали. В результате получается нечто вроде цилиндрической поверхности, которую в свою очередь надо согнуть так, чтобы совпали две другие стороны, ставшие после первой операции основаниями цилиндра; таким образом, в конце концов получается нечто вроде тора.

Если, напротив, имеются и стороны второй категории, то получившееся многообразие M останется открытым (соответствующие стороны второй категории будут играть роль краев); иногда (но не всегда) многообразие рассматривается как открытое также и в вершинах второй категории.

Мы говорим «многообразие», а не «поверхность», потому что само собой разумеется, что M, если только не обращать внимания на склеивание сопряженных сторон, сохраняет все геометрические свойства (линейный элемент, кривизну) той неевклидовой плоскости, из которой оно получилось; это не имело бы места, если бы изгибание действительно происходило в самом пространстве Лобачевского (если говорить о случае плоскости Лобачевского).

В вершине производящего многоугольника окажутся в результате описанной операции склеенными вместе все вершины и стороны, составляющие цикл. Если дело идет о цикле случайных вершин, то прилегающая к этой точке часть многообразия M не отличается от окрестности любой вершины в первоначальной плоскости. Иное имеет место в случае эллиптического цикла: после того как мы склеим последовательно друг с другом сопряженные стороны, составляющие этот цикл, и в конце концов последнюю сторону с первой (чем и завершится цикл), то преобразованная таким образом часть плоскости окажется, как мы видели, только n-й частью полного оборота около соответствующей вершины. Многообразие тогда должно рассматриваться как имеющее в этом месте нечто вроде конической точки. Еще с бóльшим основанием мы должны считать, что нечто подобное имеет место в вершине второй категории, где угол, равный π, представляется в M углом, равным нулю.

При всех этих второстепенных отличиях многообразие M дает адэкватное представление плоскости, приведенной по отношению к нашей группе.

Обратно, если дано многообразие M, то можно восстановить приведенный многоугольник, производя в M нужные разрезы. Но природа этих разрезов будет существенно зависеть от нового элемента, введенного нашими операциями сгибания и склеивания, а именно — от топологических свойств многообразия M. Если р о д многообразия M равен нулю, то достаточно разрезать это многообразие по открытой ломаной линии, последовательно соединяющей одну за другой конические точки (не возвращаясь к первой из них). Но если этот род не равен нулю, то необходимо к этим разрезам присоединить и те хорошо известные разрезы, которые делают многообразие M односвязным. Известно, что эти разрезы необходимо соединяются попарно, составляя хорошо известную фигуру «возвратного сечения», каждый раз пересекаясь в одной, впрочем произвольной, точке многообразия M. Легко видеть, что такая точка необходимо соответствует циклу из четырех случайных вершин; простейший пример такого случая представляет единственный цикл, образуемый вершинами параллелограмма периодов в случае эллиптических функций. Появление случайных вершин (иногда совпадающих, как мы объяснили, с эллиптическими вершинами) необходимо, таким образом, всякий раз, когда род группы, т. е. род многообразия M, отличен от нуля.

Рассмотрение многообразия M является, очевидно, необходимым вообще в теории собственно разрывных групп, а не только в теории групп дробно-линейных преобразований, где оно так просто и естественно вытекает из понятия о приведенном многоугольнике.

Большинство предыдущих исследований может быть легко распространено на весьма общие разрывные группы. Это распространение вполне осуществимо *), если только по отношению к данной группе существует инвариант, играющий ту же самую роль, какую в предыдущем исследовании играло расстояние. Таким образом, получаются группы, не имеющие прямой связи с началами геометрии, но не нужно забывать, что только геометрия, и, в частности, неевклидова геометрия, могла навести на идею подобных исследований.

С другой стороны, все предыдущее подчинено вопросу о самом существовании группы. После того как мы описали те операции, которые должны, исходя от производящего многоугольника, привести к разрывной группе (предполагая, что такая группа существует), остается установить, осуществимо ли это последнее условие. Это-то исследование особенно тесно связано с вопросом о началах неевклидовой геометрии.

Прежде чем перейти к нему, может быть полезно хотя бы в общих чертах, не входя пока в подробности, указать

---

*) См. замечательные лекции Жиро [7]; это сочинение знаменует важный успех в изложении рассматриваемой теории. Оно оказало нам большую услугу при составлении настоящей статьи.

на связь, существующую между всем вышесказанным и теорией функций. Эта связь вытекает из того, что (в отличие от полной непрерывной группы, из которой мы исходим) собственно разрывные группы имеют инварианты. Другими словами, существуют такие функции координат точки P, которые не изменяются при переходе от этой точки к одному из ее гомологов. Прежде всего ясно, что таким инвариантом является функция $H(P)$, определенная во всей плоскости условием $H(P)=H(P_0)$, где H обозначает произвольную, но вполне определенную функцию в приведенной области, а P_0 — приведенную точку, соответствующую точке P. Но такая функция, очевидно, будет разрывной: она будет, вообще говоря, скачкообразно изменять свое значение всякий раз, когда точка P перейдет от положения, занимаемого ею в одном из образов приведенной области, к соседнему, находящемуся в другом образе той же области. Напротив, получится инвариантная непрерывная функция, если мы возьмем симметрическую функцию от различных точек P, P', ..., получающихся преобразованием первой из них с помощью различных подстановок группы.

Мы не будем сейчас касаться вопроса о том, может ли быть действительно построена такая функция, когда число точек P, P', ... бесконечно велико, но ограничимся только указанием на то, что именно таким образом поступал Вейерштрасс, когда он определил функцию $\wp(z)$ равенством

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\Sigma'\left(\frac{1}{z_i^2}-\frac{1}{\alpha_i^2}\right), \tag{13}$$

где величина

$$z_i=z+\alpha_i=z+2ma+2nb \tag{14}$$

$$(m,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\quad m^2+n^2\neq 0),$$

очевидно, получается из z с помощью какого-либо перемещения группы, определяемой двумя данными периодами.

Во всяком случае искомый инвариант не может существовать, если данная группа не является собственно разрывной в том смысле, который был нами придан выше этому термину.

Доказательство этого положения — по крайней мере для аналитических функций комплексной переменной z, подвергающейся преобразованиям группы, — точно совпадает с доказательством классической теоремы (заметим, что она является частным случаем той общей теоремы, о которой идет речь), по которой аналитическая однозначная функция не может иметь более двух периодов: если бы произвольная точка P с аффиксом z имела бесконечное множество бесконечно близких к ней гомологов, то в этой точке производная от инвариантной аналитической функции равнялась бы нулю. Тогда эта инвариантная аналитическая функция (поскольку сказанное имеет место для произвольной точки) свелась бы к постоянной величине.

Но можно доказать и большее. Пусть P — особая точка собственно разрывной группы дробно-линейных отображений; тогда можно показать *), что в ближайшем соседстве с точкой P будут иметься гомологи любой другой конечной точки Q. Следовательно, если бы инвариантная функция не обращалась в постоянную, то она должна была бы быть вполне неопределенной в точке P.

Это рассуждение действительно не только в случае аналитических функций: оно показывает, что всякая особая точка группы необходимо является и особой точкой инвариантной функции.

Пример эллиптических функций показывает, что наряду с собственными (абсолютными) инвариантами приходится рассматривать, как и в классической теории инвариантов, инварианты относительные, т. е. функции F, которые не остаются вполне неизменными при преобразованиях группы, но только умножаются на некоторый простой множитель. Таковы в теории эллиптических функций тета-функции Якоби: в этом случае, как и в тех, которые встретятся дальше, абсолютный инвариант (эллиптическая функция) получается в виде частного двух относительных инвариантов, получающих один и тот же множитель при преобразованиях группы.

Укажем также, каким образом устанавливается связь инвариантов собственно разрывных групп дробно-линейных преобразований с теорией линейных дифференциальных уравнений.

---

*) См. [2], стр. 96. (*Прим. ред.*)

Всякое дробно-линейное преобразование (9) переменной z равносильно однородному линейному преобразованию

$$\left.\begin{aligned} v_1^{(1)} &= \alpha v_1 + \beta v_2, \\ v_2^{(2)} &= \gamma v_1 + \delta v_2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

двух переменных v_1 и v_2, отношение которых равно z; однако точно такая же линейная подстановка с постоянными коэффициентами появляется и при переходе от одной системы фундаментальных решений линейного уравнения второго порядка (которому удовлетворяют v_1 и v_2, рассматриваемые как функции некоторого переменного x) к другой фундаментальной системе решений того же уравнения.

С другой стороны, если мы применим дробно-линейную подстановку (9) к переменной $z = \frac{v_1}{v_2}$, рассматривая последнюю как функцию x, то найдем, что группа подстановок (9) имеет дифференциальный инвариант — так называемую *шварцеву производную*

$$\{z\}_x = \frac{d^2}{dx^2}\left(\ln \frac{dz}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{dz}{dx}\right)\right]^2 = \\ = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2. \tag{16}$$

Это выражение *) остается инвариантным при замене функции $z(x)$ выражением $\frac{\alpha z(x) + \beta}{\gamma z(x) + \delta}$, где α, β, γ, δ — постоянные числа и $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Предположим теперь, что переменная величина x, рассматриваемая как функция z [обратная для $z(x)$], является инвариантом одной из изучаемых нами собственно разрывных групп G дробно-линейных преобразований; тогда шварцева производная (16) будет инвариантом той же самой группы G.

Предположим сверх того, что z, как упоминалось выше, рассматривается как отношение двух решений линейного диф-

---

*) Как было указано самим Шварцем, оно встречается уже у Лагранжа (см. [8], стр. 161—185).

ференциального уравнения

$$\frac{d^2v}{dx^2}+p\frac{dv}{dx}+qv=0, \tag{17}$$

где x является независимой переменной. Тогда оказывается, что величина

$$\{z\}_x=2q-\frac{p^2}{2}-\frac{dp}{dx}. \tag{18}$$

На основании этого соотношения и основного свойства выражения $\{z\}_x$ мы заключаем, что если x и p, представленные как функции z, инвариантны по отношению к группе G, то тем же свойством будет обладать и величина q.

После всех этих указаний, которые должны дать представление о цели дальнейших исследований, мы возвращаемся снова к рассмотрению собственно разрывных групп.

ГЛАВА II

РАЗРЫВНЫЕ ГРУППЫ В ТРЕХ ГЕОМЕТРИЯХ. ФУКСОВЫ ГРУППЫ

Три геометрии — Римана, Евклида и Лобачевского — доставляют разрывные группы, но их важность и научное значение весьма не одинаковы.

Случай римановой геометрии может быть, как мы уже говорили, отождествлен со случаем сферической геометрии. Но с первого взгляда далеко не очевидно, что все риманово многообразие может быть целиком наложено на сферу, хотя линейный элемент такого многообразия тождествен с линейным элементом сферы. На деле, однако, это имеет место. Это доказывается как путем прямого изучения геометрии Римана, так и исходя из общих принципов теории поверхностей *). Предполагая, что кривизна рассматриваемого многообразия равна единице, мы найдем, что линейный элемент, отнесенный к геодезическим линиям, выходящим из некоторой фиксированной точки O, имеет вид

$$ds^2 = du^2 + c^2\,dv^2, \tag{19}$$

где

$$c = \sin u. \tag{20}$$

Тот факт, что коэффициент c обращается в нуль для $u = \pi$, показывает, что соответствующая точка является *сопряженным фокусом* исходной точки O для семейства геодезических линий, из нее исходящих. Отсюда вытекают два следствия:

---

*) См. Н. В. Ефимов [9], гл. 5. (*Прим. ред.*)

Во-первых, многообразие ограничено, так как каждая точка этого многообразия может быть соединена с точкой O путем, длина которого равна или менее π.

Во-вторых, положение сопряженного фокуса [который поэтому будет абсолютным фокусом *)] не зависит от выбора геодезической линии, если только дана исходная точка (вследствие того, что длина дуги, заключенной между двумя фокусами, есть величина одинаковая для всех рассматриваемых геодезических линий).

Действительно, перемещение фокуса, происходящее от изменения второй координаты v, должно равняться (на основании известной формулы, дающей вариацию длины геодезической дуги) величине, на которую изменяется дуга, заключенная между сопряженными фокусами, т. е. величине, тождественно равной нулю.

Рассматриваемое многообразие может быть, таким образом, целиком получено, если мы будем изменять u между 0 и π и v — между 0 и 2π.

Мы должны еще поставить вопрос — не может ли случиться, что одной и той же точке рассматриваемого риманова многообразия будет соответствовать несколько точек на сфере. В таком случае полная кривизна (curvatura integra) нашего многообразия должна быть меньше 4π. Это не может иметь места, если рассматриваемое риманово многообразие двустороннее и полное. Напротив, проективная плоскость (или сфера, в которой две диаметрально противоположные точки условно считаются за одну) представляет пример замкнутого (но одностороннего) риманова многообразия, наложимого на полусферу.

Если же мы знаем, что наше многообразие является двусторонним, то можно считать установленным, что оно наложимо на сферу, т. е. находится со сферой во взаимно однозначном соответствии при сохранении линейного элемента; таким образом, не существует никакой разницы между геометриями сферы и двустороннего риманова многообразия.

Обратимся теперь к рассмотрению сферы; движениями в таком случае будут вращения сферы около осей, проходящих через ее центр; каждому такому вращению, как мы уже

*) См. книгу Ж. Адамара [10], стр. 111.

указывали (см. стр. 20), соответствует некоторое дробно-линейное преобразование.

Собственно разрывная группа, состоящая из таких движений, необходимо состоит из конечного их числа, ибо она должна соответствовать разделению сферы на сферические (приведенные) многоугольники, равные между собой. Поэтому число операций группы N должно равняться частному от деления площади сферы на площадь приведенного многоугольника. Задача определения собственно разрывных групп движений сферы равносильна разысканию конечных групп дробно-линейных подстановок на плоскости z. Однако на эти подстановки следует наложить дополнительные условия, обеспечивающие вещественность соответствующих вращений сферы. На деле оказывается, что эти дополнительные условия не изменяют существенно результата; другими словами, всякая группа, составленная из конечного числа комплексных вращений сферы, подобна группе, составленной из конечного числа ее действительных вращений *).

Каждому вращению сферы, входящему в состав рассматриваемой группы, соответствуют две точки P, Q, которые мы назовем *полюсами вращения*; это — диаметрально противоположные точки, в которых ось вращения пересекает поверхность сферы. Каждому полюсу P соответствует в этой группе, вообще говоря, несколько вращений, отличающихся между собой по величине и направлению угла вращения. Благодаря условиям, определяющим группу, наличие в ее составе вращения сферы на угол α с полюсом P влечет за собой и принадлежность к ней обратного вращения (вращения на угол $-\alpha$) и степеней этого вращения (их можно было бы назвать кратными вращениями, т. е. вращениями на углы, кратные α). Подобным же образом, если к группе принадлежит еще другое вращение на угол β с теми же полюсами, то в ней должны содержаться и вращения на углы $\beta - p\alpha$, где p обозначает какое угодно целое число. Но, согласно нашему предположению, рассматриваемая группа конечна. Отсюда следует, что в составе этой группы среди вращений с полюсом P имеется вращение с наименьшим углом поворота α_0; все другие вращения группы с полюсом P должны

*) См. [3], стр. 144—146. (*Прим. ред.*)

иметь углы поворота, кратные α_0. Так как это относится и к тождественному преобразованию, которое можно рассматривать как вращение на угол, равный 2π, то $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Здесь n — некоторое целое число. Оно называется *порядком* этого минимального вращения и вместе с тем соответствующего полюса.

Переходим теперь к перечислению полюсов вращения.

Если число N есть порядок группы (т. е. число ее подстановок), то всякая точка P сферы имеет N гомологов, которые получатся, если применить к этой точке N перемещений группы (включая сюда и тождественное преобразование). Если P не является одним из полюсов вращения, то все эти гомологи различны. Если, напротив, P является полюсом вращения порядка n для принадлежащего к группе вращения R $\left(\text{на угол } \frac{2\pi}{n}\right)$ и его степеней $R^2, \ldots, R^{n-1}$, то точка P будет совпадать с $n-1$ из своих гомологов. Сверх того, всякий другой гомолог P' точки P, получающийся из точки P перемещением S нашей группы и не совпадающий с P, также будет полюсом вращения порядка n; поэтому число гомологов P, совпадающих с точкой P, равно n. Таким образом, все N гомологов точки P представляются некоторой системой точек сферы, из которых каждая соответствует n гомологам. Отсюда следует, что число N должно делиться нацело на n и что точка P (полюс порядка n) имеет $\frac{N}{n}$ различных гомологов (в числе их считается и сама точка P).

Отсюда легко выводится соотношение между порядком N группы и порядками различных полюсов вращения.

Пусть P_1 — некоторый полюс вращения порядка n_1; мы только что видели, что эта точка имеет $\frac{N}{n_1}$ различных гомологов. Но, с другой стороны, P_1 — полюс, общий n_1-1 вращениям; мы имеем, таким образом,

$$(n_1-1)\frac{N}{n_1} = N\left(1 - \frac{n}{n_1}\right)$$

вращений около P_1 и его гомологов. Если существует полюс P_2, не гомологичный полюсу P_1 и имеющий порядок n_2 (причем число n_2 может быть равным n_1, из чего, конечно, не вытекает гомологичности точек P_1 и P_2), то эта точка будет иметь $\frac{N}{n_2}$ различных гомологов, которые дадут $N\left(1-\frac{1}{n_2}\right)$ вращений. Повторяя это рассуждение, мы получим для общего числа вращений выражение вида

$$N\left(1-\frac{1}{n_1}\right)+\ \dots\ +N\left(1-\frac{1}{n_k}\right). \tag{21}$$

Здесь не учтено тождественное перемещение, но каждое из $N-1$ других перемещений группы принято во внимание два раза (и только два раза) — по одному разу для каждого из двух полюсов, которые оно имеет. Окончательно мы получаем, что

$$N\left(1-\frac{1}{n_1}\right)+\ \dots\ +N\left(1-\frac{1}{n_k}\right)=2\,(N-1), \tag{22}$$

или, деля на N,

$$\left(1-\frac{1}{n_1}\right)+\ \dots\ +\left(1-\frac{1}{n_k}\right)=2-\frac{2}{N}. \tag{23}$$

Достаточно найти целые положительные (бóльшие единицы) числа $n_1, \dots, n_k, N$, удовлетворяющие этому уравнению.

Так как все $n_i \geqslant 2$, то каждая из скобок левой части уравнения (23) по меньшей мере равна $\frac{1}{2}$; однако правая часть уравнения (23) меньше двух (равенство исключается); поэтому число скобок k в левой части уравнения (23) должно быть непременно меньше четырех.

С другой стороны, так как правая часть уравнения (23) не меньше единицы (равенство может иметь место только при $N=2$), между тем как каждая из скобок левой части уравнения (23) меньше единицы, то k не может равняться единице.

Итак, k равно двум или трем.

1) Если $k=2$, то уравнение (23) принимает вид

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{2}{N}. \tag{24}$$

Другого решения кроме $n_1=n_2=N$ здесь быть не может, ибо иначе одно из чисел n_1, n_2 должно было бы быть больше N; но это невозможно, так как N делится и на n_1 и на n_2.

Если же $n_1 = n_2 = N$, то существуют только два полюса вращения $\left(\frac{N}{n_1} = \frac{N}{n_2} = 1\right)$ и, следовательно, только одна ось. Вращения около этой оси суть степени одного из них, и ясно, что они составляют группу. Приведенная область оказывается двуугольником с углом, равным $\frac{2\pi}{n}$ и имеющим вершинами оба полюса вращения. Это — случай *циклической* группы.

2) Если $k = 3$, то по крайней мере одно из чисел n_1, n_2, n_3 равно 2.

Действительно, если все $n_i \geqslant 3$ $(i = 1, 2, 3)$, то каждая из скобок левой части уравнения не меньше $\frac{2}{3}$. Тогда их сумма не может быть меньше двух, как этого требует уравнение (23).

Положим, что $n_3 = 2$. Тогда соотношение (23) заменится равенством

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{N} + \frac{1}{2}. \tag{25}$$

Первая серия решений получается, если положить здесь $n_1 = 2, \quad n_2 = \frac{N}{2}$.

Группы, получаемые таким образом, носят название *диэдрических* и выводятся из полученных выше присоединением к ним n_2 транспозиций (поворотов на 180°) вокруг осей, расположенных в экваториальной плоскости, т. е. в плоскости, перпендикулярной к оси вращений порядка n_2, и составляющих друг с другом разные углы. Приведенный многоугольник для этого случая получится из сферического двуугольника (приведенного многоугольника для предыдущего случая), если последний разрезать по экваториальной плоскости. Таким образом, этот приведенный многоугольник оказывается сферическим треугольником с двумя прямыми углами.

Если ни один из знаменателей, стоящих в левой части (25), не равен двум, то один из них будет непременно равен трем, откуда непосредственно находятся единственно возможные в этом случае комбинации *):

$$\left.\begin{array}{llll} \text{I)}\ n_1=3, & n_2=3, & n_3=2, & N=12; \\ \text{II)}\ n_1=4, & n_2=3, & n_3=2, & N=24; \\ \text{III)}\ n_1=5, & n_2=3, & n_3=2, & N=60. \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Эти три комбинации соответствуют трем группам вращения, получающимся из рассмотрения классических правильных многоугольников. Группа *тетраэдра*, т. е. группа вращений, которые оставляют неизменным правильный тетраэдр, соответствует случаю I); *группа, общая кубу и сопряженному с ним октаэдру*, — случаю II); *группа додекаэдра и икосаэдра* — случаю III).

Нам остается еще удостовериться в том, что перечисленные группы вращения многогранников суть единственно возможные. Мы должны показать, оставляя в стороне два простейших случая, рассмотренных выше, что ни одна из комбинаций (26) не дает группы, отличной от групп вращений правильных многогранников.

Применим метод излучения и будем исходить из точки A — полюса вращения порядка n_1. Мы получим область D, инвариантную относительно вращений порядка n_1 с полюсом в точке A, входящих в состав группы. Область D будет иметь своими вершинами n_1 полюсов B_s вращений порядка n_2 с углами в этих вершинах, не превышающими величины $\frac{2\pi}{n_2}$.

Далее, на периметре этого многоугольника D должны лежать n_1 полюсов C_t вращений порядка 2.

В тех случаях, когда угол многоугольника D при вершине C оказывается равным π, сторона, проходящая через эту точку, будет нормальной к дуге большого круга AC.

Определим теперь площадь многоугольника D с помощью классической теоремы о площади сферического многоугольника. В силу этой теоремы площадь выпуклого сферического многоугольника равна избытку числа 4 над суммой внешних углов этого многоугольника (предполагая, что за единицу угла взят прямой угол, за единицу площади принята площадь

---

*) См. [8], стр. 140—144. (*Прим. ред.*)

сферического треугольника, у которого все три угла прямые). Если за единицу угла принять полную окружность, то площадь многоугольника будет равна избытку единицы над суммой внешних углов многоугольника (при этом мы берем и единицу площади, бо́льшую прежней в четыре раза, т. е. равную полусфере. Тогда площадь области D выразится числом $\frac{2n_1}{N}$ (так как она в n_1 раз больше площади приведенной области).

Область D имеет по крайней мере n_1 внешних углов (у полюсов вращений порядка n_2), не меньших величины $\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}$. Следовательно, у нас

$$n_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right) \leqslant 1-\frac{2n_1}{N}. \tag{27}$$

Соотношение (27) оказывается равенством в том и только в том случае, если у области D нет других вершин кроме тех, о которых мы только что говорили, и если каждый из соответствующих углов равен в принятой нами мере $\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}$; формула (25) показывает, что именно это как раз и имеет место. Итак, многоугольник D имеет ровно n_1 вершин (в точках B) с внутренними углами в этих точках, равными $\frac{1}{n_2}$. Следовательно, этот многоугольник D имеет ровно n_1 сторон, каждая из которых является дугой большого круга, проходящей через один из n_1 полюсов C (т. е. ближайших к точке A полюсов второго порядка), ортогональной к соответствующей дуге AC.

Таким образом, мы действительно получаем правильный сферический многоугольник: в нем нетрудно узнать один из тех многоугольников, на которые, как хорошо известно, всякий правильный многогранник позволяет разделить описанную около него сферу. С другой стороны, очевидно, что предшествующие данные полностью определяют сферический треугольник ABC (вершины B и C — ближайшие к вершине A), потому что они позволяют найти углы этого треугольника.

Таким образом, доказано, что каждая из комбинаций (26) соответствует только одной группе. Приведенная область, соответствующая каждой из этих групп, образуется приведением многоугольника D по отношению к вращению вокруг полюса A. Она оказывается сферическим равнобедренным треугольником, получающимся присоединением к прямоугольному треугольнику ABC симметричного ему треугольника по отношению к стороне AC. Эта область обладает осями симметрии, так что наши группы могут быть расширены, как это было указано в главе I, посредством присоединения преобразований H. Аналогичное обстоятельство имеет место и для рассмотренных нами в начале групп простейших двух типов.

Соображений, приведенных до сих пор, не вполне достаточно для того, чтобы найти все группы дробно-линейных преобразований переменной z, составленные из конечного числа подстановок. Вследствие их геометрической формы они применимы только к подстановкам, соответствующим действительным вращениям сферы; чтобы избавиться от этого ограничения, нужно придать нашим рассуждениям аналитическую форму. Мы дадим самые краткие указания по этому вопросу, которому посвящено классическое сочинение Клейна [11].

Аналитическое рассуждение не представляет никакой трудности, пока дело идет о первой части решения задачи, т. е. об образовании уравнения (23) и его решении: каждое из дробно-линейных преобразований рассматриваемой группы оставляет неизменными два значения переменной, что и соответствует двум полюсам вращения, только что введенным; обозначая буквой n порядок (по предположению конечный) такого преобразования, т. е. число его различных степеней, включая сюда и тождественное преобразование, можно без труда применить к числам n_i и общему порядку группы N все предыдущие соображения.

Напротив, метод, посредством которого мы построили группу, соответствующую каждой из комбинаций (26), неприложим вне действительной области. Метод, который необходимо применить здесь для получения соответствующего результата, основывается на использовании инвариантов группы и на том отношении между настоящей теорией и теорией линейных дифференциальных уравнений, которое было указано в конце предыдущей главы.

Инварианты группы получаются без труда как симметрические функции от переменного z и его различных образов

$z_1 = f_1(z), \ldots, z_k = f_k(z), \ldots$ [индекс k принимает все значение от 0, которое соответствует тождественному преобразованию $f_0(z) = z$, до $N-1$].

Рассмотрим произведение количеств $z_i - a$, где a обозначает какую-либо постоянную, или, более общо, вводя вторую произвольную постоянную b, рассмотрим произведение количеств $\frac{z_i - a}{z_i - b}$ (первый случай можно, впрочем, рассматривать как предельный для второго, отвечающий значению $b = \infty$).

Этот инвариант

$$\Phi(z) = \prod_{i=0}^{N-1} \left(\frac{z_i - a}{z_i - b}\right) \tag{28}$$

вполне характеризует группу. Иначе говоря, группа может быть определена как совокупность операций, производимых над переменным z и не изменяющих значения $\Phi(z)$.

Очевидно, что функция $\Phi(z)$ является частным двух многочленов степени N относительно z. Приравнивая ее некоторому числу, мы получим N значений переменного, переходящих друг в друга при преобразованиях нашей группы. Отсюда следует, что вообще всякая рациональная функция z, инвариантная относительно этой группы, есть рациональная функция величины

$$\Phi(z) = x. \tag{29}$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае шварцева производная

$$\{z\}_x = \frac{d^2}{dx^2}\left(\ln \frac{dz}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{dz}{dx}\right)\right]^2 \tag{30}$$

как раз является рациональной функцией, обладающей, как мы видели выше, этим свойством инвариантности. Она, следовательно, оказывается рациональной функцией x. Так как ее единственные особые точки соответствуют полюсам вращения [производная $\frac{dz}{dx}$ может сделаться бесконечной только в этих точках, так как только в них производная $\frac{dx}{dz}$ обращается в нуль *)], то мы можем **), предполагая, что эти полюсы соответствуют значениям $x = 0,\ 1,\ \infty$ (чего всегда можно достигнуть, заменяя x выражением вида $\frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — подходящим образом подобранные числа), составить ее точное выражение. Соответствующая группа будет необходимо группой линейного дифференциального уравнения второго порядка. Его можно будет написать, чем и решится вопрос о характере группы.

Построенные таким образом, исходя из сферической геометрии, группы имеют весьма важное значение; они позволяют указать все линейные дифференциальные уравнения второго порядка, общий интеграл которых является алгебраической функцией, ибо ***) группа такого уравнения необходимо состоит из конечного числа линейных однородных подстановок относительно двух переменных. Полученные здесь результаты послужили образцом для аналогичных исследований в теории дифференциальных уравнений высших порядков ****). С другой стороны, получающиеся дифференциальные уравнения второго порядка оказываются уравнениями гипергеометрического типа; последние и были найдены Шварцем в классическом мемуаре «Über diejenigen Fälle in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt». В этом мемуаре Шварц построил теорию, эквивалентную предыдущей; в нем он, несомненно, предстает перед нами в качестве одного из предшественников Пуанкаре как создателя теории фуксовых функций; он указал там впервые (на примере неевклидова треугольника) на роль производящего многоугольника, хотя и не дал полного доказательства возможности покрыть всю неевклидову плоскость его последовательными образами, что впоследствии сделал Пуанкаре.

---

*) Если значение $z = \zeta$ — кратный корень уравнения $\Phi(z) = a$, то $\Phi'(\zeta) = 0$. (*Прим. ред.*)

**) См. [11], часть I, гл. III.

***) См. [12].

****) См. мемуары Жордана [13] и [14].

Собственно разрывные группы обыкновенной евклидовой геометрии также могут быть легко перечислены *).

Первый случай — тот, когда группа состоит только из вращений около одного центра. Между этими вращениями одно должно отвечать наименьшему углу поворота вида $\frac{2\pi}{n}$, где n — целое число (иначе в группу входили бы бесконечно малые вращения). Все остальные вращения, входящие в состав рассматриваемой группы, должны являться степенями этого вращения. Приведенная область здесь, очевидно, будет углом величины $\frac{2\pi}{n}$ с вершиной в центре рассматриваемых вращений. Если этот центр находится в начале координат, то z^n есть инвариант группы — инвариант, вполне ее характеризующий.

Противоположный случай — тот, когда группа состоит только из поступательных перемещений. Если все они суть степени одного из них, то приведенная область является полосой между двумя параллельными прямыми. Указанное перемещение переводит одну из этих параллельных прямых в другую.

Если состоящая из поступательных перемещений группа — не циклическая, то она не может содержать более двух различных поступательных перемещений: все остальные перемещения группы должны быть линейными комбинациями этих двух с целыми коэффициентами. Иначе группа содержала бы бесконечно малые поступательные перемещения. Точно так же доказывается, что если в составе группы имеется два различных поступательных перемещения, то они должны иметь различные направления. Но за этим исключением эти два перемещения могут быть совершенно произвольными. Эта группа соответствует случаю эллиптических функций. Последние являются инвариантами разрывной группы рассматриваемого типа. В противоположность тому, что имелось в двух предыдущих случаях, приведенная область оказывается ограниченной: перед нами хорошо известный параллелограмм периодов эллиптической функции **).

---

*) См. по поводу дальнейшего книгу Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена [15], гл. II. (*Прим. ред.*)

**) В этом случае вершины производящего многоугольника (все они случайные) составляют один цикл: соответствующее соотношение выражает, что две основные операции переместительны.

Известно, что группа в этом случае не характеризуется одним инвариантом. Предположим, что мы образовали эллиптическую функцию, а именно функцию, мероморфную и инвариантную относительно нашей группы, например функцию Вейерштрасса $\wp(z)$. Тогда равенства

$$\wp(z_i)=\wp(z) \tag{31}$$

имеют место всегда, когда

$$z_i=z+2ma+2nb. \tag{32}$$

Здесь $2a$, $2b$ — некоторые комплексные числа, характеризующие наши поступательные перемещения (периоды эллиптической функции); $m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Равенства (31) полностью еще не характеризуют группу и из них нельзя однозначно определить величины a и b *). Для этого необходимо и достаточно присоединить к равенствам (31) аналогичные соотношения, выраженные с помощью какой-нибудь другой эллиптической функции с теми же периодами, например уравнения

$$\wp'(z_i)=\wp'(z). \tag{33}$$

Эллиптические функции, участвующие в этих или подобных соотношениях, всегда связаны между собой некоторым алгебраическим соотношением. Заменяя в нем эти эллиптические функции переменными x и y, мы получим уравнение некоторой алгебраической кривой первого рода **)

$$F(x,\ y)=0. \tag{34}$$

Эту кривую можно задать в параметрической форме уравнениями

$$x=\varphi(z),\quad y=\psi(z), \tag{35}$$

*) Вследствие классической теоремы, устанавливающей, что всякая эллиптическая функция принимает одно и то же значение по крайней мере два раза в параллелограмме периодов.

**) Родом алгебраической кривой называется разность между максимальным числом двойных точек, которые может иметь нераспадающаяся кривая того же порядка, что и данная, и числом двойных точек, которые имеет данная кривая. (*Прим. ред.*)

где φ и ψ суть две эллиптические функции с одними и теми же (надлежащим образом выбранными) периодами $2a$ и $2b$. Обратно, соотношения (35) определяют величину z с точностью до периода. Иначе говоря, два каких-нибудь значения z, являющихся решениями этих уравнений с фиксированными x и y (если идет речь о кратных точках кривой, то необходимы дополнительные условия), связаны соотношением вида (32). Дальнейший анализ показывает, что переменное z выражается через связанный с кривой (34) интеграл вида $\int\limits_x R(x, y)\,dx$, где R — рациональная функция от величин x и y [предполагается, что $F(x, y) = 0$], всегда приводящаяся к эллиптическому интегралу.

Необходимо отметить, что не всякий эллиптический интеграл, связанный с кривой, может быть взят в качестве переменного z в уравнениях (35). Эти уравнения получаются только в том случае, если z является эллиптическим интегралом первого рода. По отношению к другому интегралу x и y могут не быть однозначными функциями.

Случай двоякой периодичности — наиболее интересный в теории групп евклидовых перемещений. Напротив, можно ограничиться лишь беглым очерком групп, содержащих и поступательные перемещения и вращения.

Рассмотрим, например, группу, содержащую по крайней мере два вращения T, U с различными центрами A, B. Тогда эта группа будет содержать преобразование UTU^{-1}. Последнее является вращением с центром в точке A', получающейся из точки A поворотом U. Угол поворота вокруг точки A' при вращении UTU^{-1} равен углу поворота вокруг точки A при вращении T. Далее мы возьмем тоже принадлежащую к нашей группе операцию $UTU^{-1}T^{-1}$. Она уже будет поступательным перемещением. Таким образом, очевидно, получаются два различных поступательных перемещения (второе имеет вид $TUT^{-1}U^{-1}$). Исключение составляет случай, когда все вращения сводятся к транспозициям *). Поэтому в общем случае инвариантная функция является двоякопериодической, и мы снова приходим к теории эллиптических функций.

---

*) Соответствующая группа будет тогда иметь инвариантом косинус от z или от полинома первой степени относительно z.

Полное рассмотрение подобных групп приводится *) без особого труда: проще всего положить в его основу соотношение

$$\left(1-\frac{1}{n_1}\right)+\left(1-\frac{1}{n_2}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n_k}\right)=2(1-p). \qquad (36)$$

Это соотношение, очевидно аналогичное равенству (23), получается путем применения известной теоремы о полной кривизне поверхности или замкнутого многообразия к многообразию M, соответствующему искомой группе. Здесь p обозначает род многообразия, k — число эллиптических циклов, а n_i — их порядки; каждый такой цикл соответствует конической точке многообразия M **).

Так как левая часть равенства (36) не отрицательна, то $p \leqslant 1$. Таким образом, возможны два случая: $p=1$ и $p=0$. В случае $p=1$ группа не содержит вращений. Мы получаем уже рассмотренный случай эллиптических функций. Если же $p=0$, то мы без труда находим следующие четыре

---

*) См. по этому поводу книгу Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена [15] (*Прим. ред.*)

**) См. Кронекер [16], Пуанкаре [17], стр. 192—263. Теорема, о которой идет речь в тексте, получается в результате комбинации обобщенной теоремы Эйлера (на которой основано понятие о роде) с основным соотношением между геодезической и полной кривизной многообразия — так называемой формулой Бонне (см., например, [18]) т. е. исходя из равенства

$$\int K\,d\sigma = 4\pi(1-p).$$

Здесь K — кривизна многообразия, $d\sigma$ — элемент его площади. Кривизна многообразия M, вообще говоря, равна нулю, так как оно локально совпадает с евклидовой плоскостью; исключение составляют только конические точки, отвечающие эллиптическим циклам нашей группы. Части интеграла $\int K\,d\sigma$, соответствующие этим точкам, сведутся (после необходимого здесь предельного перехода) к величинам $2\pi\left(1-\dfrac{1}{n_i}\right)$, после чего и получится формула (36).

Уравнение (36) имеет решение $n_1=n_2=2$, $n_3=\infty$, что соответствует группе с инвариантом $\cos z$, упомянутой в сноске на стр. 57.

возможные комбинации:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I)} & k=4, \quad n_1=n_2=n_3=n_4=2;\\ \text{II)} & k=3, \quad n_1=n_2=4, \ n_3=2;\\ \text{III)} & k=3, \quad n_1=6, \ n_2=3, \ n_3=2;\\ \text{IV)} & k=3, \quad n_1=n_2=n_3=3.\end{array}\right\} \tag{37}$$

Первый случай, как легко усмотреть, приводит к группе

$$z_i = \pm z + 2ma + 2nb \tag{38}$$
$$(m, \ n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ \ldots),$$

т. е. к группе, сохраняющей функцию $\wp(z)$.

Три других случая соответствуют хорошо известным правильным паркетам: квадратному, гексагональному или треугольному (эти паркеты сопряжены между собой наподобие правильных многогранников) и гемиэдрическому треугольному паркету (треугольники, составляющие паркет, последовательно закрашены двумя красками, и только треугольники одного цвета являются гомологичными друг другу) *). Тот факт, что каждый из этих трех последних видов паркета порождает только один тип групп, вытекает также из соотношения, соответствующего в нашем случае соотношению (27); в нем теперь отсутствует член со знаменателем N и оно выражает теорему о сумме внешних углов многоугольника; это соотношение, как и в прежних случаях, осуществляется для комбинаций II—IV только со знаком равенства.

Мы не будем, однако, останавливаться дольше на этих группах; их рассмотрение не выводит нас за пределы теории эллиптических функций.

Итак, собственно разрывные группы движений, соответствующие геометриям Римана и Евклида, сводятся к нескольким простым типам (что, однако, не лишает их ни

---

*) Нужно заметить, что многоугольники, составляющие паркет, не всегда являются приведенными. Например, для группы II каждый входящий в состав паркета квадрат является областью своего центра — общей вершины четырех равнобедренных треугольников (на которые этот квадрат разделяется своими диагоналями); именно эти треугольники и являются приведенными многоугольниками группы.

интереса, ни значения для многих вопросов анализа). Напротив, собственно разрывные группы движений геометрии Лобачевского — так называемые *фуксовы группы* *) — представляют чудесное разнообразие для математического исследования и именно благодаря этому разнообразию оказываются пригодными для разрешения наиболее важных задач теории алгебраических функций и теории дифференциальных линейных уравнений с алгебраическими коэффициентами.

Известно, что дробно-линейное преобразование одного комплексного переменного z **)

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{39}$$

в случае, если его двойные точки τ' и τ'' различны, может быть записано в виде

$$\frac{z_1 - \tau'}{z_1 - \tau''} = s\,\frac{z - \tau'}{z - \tau''}, \tag{40}$$

т. е. является подобным преобразованию вида

$$u_1 = su, \tag{41}$$

из которого оно получается заменой

$$u = \frac{z - \tau'}{z - \tau''}. \tag{42}$$

Точки τ' и τ'' находятся в результате решения некоторого квадратного уравнения; вместе с ними определяется и величина s. Для нее тоже получается квадратное уравнение; произведение корней этого уравнения оказывается равным единице. Выбор одного из корней этого уравнения за s соответствует выбору одной из неподвижных точек за τ', а другой — за τ''.

---

*) Их назвал «фуксовыми группами» А. Пуанкаре по имени берлинского математика второй половины XIX столетия Л. Фукса (L. Fuchs), известного своими работами в аналитической теории дифференциальных уравнений. (*Прим. ред.*)

**) По этому поводу см. [2], гл. III, § 1. Там соответствующие вычисления проведены во всех деталях для случая группы движения плоской геометрии Лобачевского. См. еще примечание на стр. 39 той же книги. (*Прим. ред.*)

Формула (41) — это каноническая форма дробно-линейного преобразования, т. е. простейшая форма, к которой оно может быть приведено с помощью вспомогательной подстановки; эта каноническая форма — одна и та же для всех подобных друг другу дробно-линейных преобразований. Необходимое и достаточное условие для подобия двух дробно-линейных преобразований S и T (и у того и у другого двойные точки различны) заключается в совпадении соответствующих им значений величины s.

В случае, когда двойные точки преобразования сливаются в одну точку τ, оно может быть записано в виде

$$\frac{1}{z_1-\tau}=\frac{1}{z-\tau}+h. \tag{43}$$

Это преобразование, таким образом, оказывается подобным поступательному перемещению

$$u_1=u+h. \tag{44}$$

В этом последнем случае дробно-линейное преобразование называется *параболической подстановкой* или *обобщенным поступательным перемещением*. Преобразование (44) может быть получено (в плоскости u) комбинацией двух симметрий относительно двух параллельных прямых; преобразование (43) получится поэтому (в плоскости z) комбинацией двух инверсий относительно двух касающихся окружностей.

k-я степень преобразования (43) или (44) получается путем замены в нем параметра h величиной kh. Эта k-я степень преобразования (44) получается комбинированием двух симметрий по отношению к двум параллельным прямым, из которых одна остается неподвижной, между тем как другая неограниченно удаляется в том или другом направлении (ее расстояние от первой изменяется в арифметической прогрессии), по мере того как показатель, положительный или отрицательный, увеличивается по абсолютной величине. Последовательные гомологи некоторой определенной точки будут также неограниченно удаляться в направлении вектора h. Поэтому в плоскости z последовательные степени параболической подстановки (43) получатся каждая комбинацией двух инверсий по отношению к окружностям (касающимся друг друга), из которых одна остается неизменной, между тем как радиус другой стремится к нулю; последовательные гомологи такой точки стремятся вдоль одной и той же окружности, ортогональной к двум первым, к двойной точке τ — точке касания двух первых окружностей.

Все степени параболической подстановки различны между собой. Для группы, которую они составляют, приведенной областью в плоскости u является полоса, содержащаяся между двумя параллельными прямыми, а в плоскости z — область, заключающаяся между двумя касательными окружностями.

Перейдем теперь к случаю, когда двойные точки преобразования различны. Если подстановка (39) имеет действительные коэффициенты и ее определитель $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ положителен (при этом, очевидно, он может без нарушения общности считаться, если это понадобится, равным единице), то значения s будут или оба действительными, или оба мнимыми, сопряженными друг другу и имеющими модуль, равный 1 (потому что их произведение должно равняться единице).

В первом случае приведенная подстановка (41) есть *расширение*; подобная же ей подстановка (40) называется *гиперболической подстановкой* или *обобщенным расширением*.

Так как обыкновенное расширение (41) можно получить комбинацией двух инверсий по отношению к двум концентрическим кругам, то гиперболическое преобразование получается (и притом бесконечным числом способов) комбинацией двух инверсий по отношению к окружностям C', C'', не имеющим общих точек. Обратно, соединение всякой пары инверсий по отношению к двум окружностям без общих точек дает гиперболическое преобразование, потому что две окружности без общих точек могут быть всегда преобразованы в две концентрические окружности посредством одной и той же инверсии. В плоскости u точки, являющиеся последовательными гомологами одной и той же точки, преобразуемые одна в другую степенями преобразования (41), стремятся или к началу, или к бесконечности вдоль прямых, проходящих через начало. В плоскости z последовательные гомологи будут стремиться, в зависимости от того, будем ли мы брать положительные или отрицательные степени исходного преобразования, к той или другой из его двойных точек вдоль окружностей, ортогональных к окружностям C' и C''. Все эти окружности, ортогональные к C' и C'', проходят через двойные точки и инвариантны по отношению к преобразованию (40). Ангармоническое отношение четырех точек — произвольной точки плоскости z, ее образа z_1 при отображении (40) и двойных точек τ' и τ'' — не зависит от положения точки z и равно множителю s. По отношению к окружностям C' и C'' двойные точки являются «предельными точками Понселе», т. е. окружностями нулевого радиуса, имеющими общую с ними радикальную ось.

Для групп, составленных степенями (положительными и отрицательными) гиперболической подстановки (41), приведенная область в плоскости u ограничена двумя кривыми, определяемыми уравнениями в полярных координатах вида

$$r = f(\omega), \quad r = s f(\omega). \tag{45}$$

Здесь $f(\omega)$ — произвольная функция аргумента ω. Ее достаточно задать на интервале $0 < \omega < \pi$, если мы ограничиваемся рассмотрением движений плоскости Лобачевского, которая отождествляется с верхней полуплоскостью. Беря за функцию $f(\omega)$ постоянную величину, мы получим в качестве приведенной области кольцо, заключенное между двумя окружностями с центром в начале координат (отношение радиусов его граничных окружностей равно s), а для движений Лобачевского в верхней полуплоскости — половину указанного кольца. Этот же результат можно получить методом излучения *).

Отсюда вытекает, что в плоскости z приведенной областью группы, составленной степенями гиперболического движения Лобачевского с действительными коэффициентами (ее можно построить методом излучения), будет полукольцо, ограниченное двумя окружностями (являющимися образами рассмотренных

*) Действительно, если A' — точка, соответствующая точке A при преобразовании (41), то существует окружность с центром в начале координат радиуса $OA\sqrt{s}$ (являющаяся, таким образом, прямой Лобачевского в верхней полуплоскости), по отношению к которой точки A и A' симметричны; равным образом A и точка, ей соответствующая, при преобразовании, обратном преобразованию (41), симметричны друг другу по отношению к окружности, концентрической с первой радиуса $OA : \sqrt{s}$. Окружности, играющие аналогичную роль для высших степеней подстановки (41), проходят вне кольца, ограниченного первыми двумя.

окружностей при соответствующей подстановке) и действительной осью (играющей роль абсолюта). То обстоятельство, что двойные точки рассматриваемой гиперболической подстановки остаются вне приведенной замкнутой области, имеет важное значение в некоторых стадиях теории*). Вообще приведенная область гиперболического движения Лобачевского, имеющего в общем случае комплексные коэффициенты (эту область можно получить по методу излучения), является «полукольцом», ограниченным двумя прямыми Лобачевского и отрезком абсолюта.

Если в преобразовании (41) s есть комплексное число с модулем, равным единице, т. е. $s=e^{2i\vartheta}$, то преобразование (41) является вращением в плоскости u. Подстановка (40) тогда называется ***эллиптической подстановкой*** или ***обобщенным вращением***. Так как преобразование (41) может быть получено комбинацией двух симметрий по отношению к прямым, встречающимся в начале координат и составляющим угол ϑ, то преобразование (40) получается (бесконечным числом способов) комбинацией двух инверсий по отношению к окружностям, проходящим через его двойные точки. Все гомологи одной и той же точки относительно степеней преобразования (40) или (41) расположены в случае преобразования (41) на одной и той же окружности γ с центром в начале координат, инвариантной для рассматриваемой подстановки; в случае же преобразования (40) они расположены на окружности, имеющей общую радикальную ось с окружностями нулевого радиуса — точками τ' и τ''. Расположение указанных гомологов на окружности зависит от соизмеримости угла вращения и угла, равного π. Для того чтобы точки не заполняли всюду плотно всю окружность γ, т. е. для того, чтобы между степенями преобразования (40) или (41) не нашлись бы повороты на бесконечно малые углы, необходимо, чтобы ϑ было соизмеримо с π; можно даже, не изменяя группы, потребовать, чтобы ϑ было n-й частью π. Степени рассматриваемого вращения в конечном числе составляют

---

*) Можно было бы получить для группы, составленной степенями подстановки (41), приведенную область, примыкающую к началу, проводя через начало координат кривые вида (45). Пуанкаре специально исследовал возникающие в связи с этим трудности.

тогда группу; приведенная область этой группы будет [в случае (41)] углом величины 2ϑ, имеющим вершину в начале, или же [в случае (40)] чечевицеобразной *) областью, заключенной между двумя дугами окружностей, проходящими через точки τ' и τ'' и пересекающимися под углом 2ϑ. В случае, если (40) — эллиптическое движение Лобачевского в некотором круге, мы получим в качестве приведенной одну из частей, на которые эта область делится абсолютом.

Если $s=-1$, то подстановка (40) или (41) по определению является эллиптической. Однако по характеру производимых ею на плоскости z изменений она сходна с гиперболическим преобразованием, так как преобразование (41), являющееся при $s=-1$ транспозицией около начала координат, переводит всякую фигуру в симметричную ей относительно начала координат.

Если коэффициенты α, β, γ, δ в формуле (39) — комплексные числа, то, вообще говоря, преобразование (39) не сведется ни к одному из рассмотренных до сих пор случаев. В этом случае $s=\sigma e^{2i\vartheta}$, причем σ отлично от 1 и, вообще говоря, ϑ неисоизмеримо π. Такая подстановка носит название *локсодромической* (ее можно рассматривать как произведение эллиптической и гиперболической подстановок с одними и теми же двойными точками). Ей никогда не может быть подобна подстановка (39) с действительными коэффициентами α, β, γ и δ (при $\alpha\delta-\beta\gamma>0$); она не оставляет инвариантным ни один круг. Поэтому такие подстановки не могут представлять движений плоской геометрии Лобачевского.

В случае проективной реализации геометрии Лобачевского эллиптическое движение может быть получено как произведение двух симметрий Лобачевского, оси которых пересекаются в точке, лежащей внутри абсолюта и являющейся неподвижной точкой преобразования. Гиперболическое движение эквивалентно произведению двух симметрий Лобачевского по отношению к осям, пересекающимся в «идеальной» точке, т. е. в точке, лежащей вне абсолюта и поэтому не существующей с точки зрения рассматриваемой геометрии Лобачевского; неподвижными точками этой подстановки будут тогда точки касания касательных, приведенных из этой идеальной

*) Эту приведенную область легко найти методом излучения.

точки к коническому сечению. Наконец, параболическое движение можно получить как произведение двух симметрий Лобачевского по отношению к двум осям, пересекающимся на коническом сечении; эта точка пересечения и будет двойной точкой подстановки. Как было выше указано, локсодромические подстановки в числе движений Лобачевского не встретятся.

Всякое дробно-линейное (в том числе и локсодромическое) преобразование может быть получено в результате комбинации трех симметрий по отношению к прямым и одной инверсии относительно окружности (исключение здесь составляет преобразование подобия $z_1 = sz$, где $s > 0$; его мы рассматривали выше).

Действительно, выражение (39) может быть написано в виде

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = -\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\Delta}{\gamma^2\left(z + \frac{\delta}{\gamma}\right)} + \frac{\alpha + \delta}{\gamma}, \tag{46}$$

где

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Но геометрический смысл формулы (46) и состоит в комбинации:

1) инверсии U по отношению к окружности с центром в точке

$$z_0 = -\frac{\delta}{\gamma} \tag{47}$$

радиуса

$$\mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|\gamma|}; \tag{48}$$

2) симметрии Σ относительно прямой, параллельной действительной оси, проходящей через точку $z = z_0$;

3) поворота R вокруг этой точки $\left(\text{на угол, равный } \arg\frac{\Delta}{\gamma^2}\right)$;

4) поступательного перемещения, представленного по величине и направлению вектором $\frac{\alpha + \delta}{\gamma}$.

Эти операции и дают в совокупности указанный выше результат, так как Σ и R комбинируются в одно симметрирование, а поступательное перемещение может быть заменено двумя последовательными симметрированиями относительно надлежащим образом выбранных осей.

Таковы элементы, разнообразные комбинации которых могут дать фуксовы группы, т. е. собственно разрывные группы подстановок, сохраняющих или действительную ось и каждую из полуплоскостей, этой осью ограничиваемых, или (что сводится к тому же) внутреннюю (или внешнюю) область определенной окружности. Эта область называется *фундаментальной* областью группы. Иначе говоря, фуксовы группы — это собственно разрывные группы движений геометрии Лобачевского, для которой только что упомянутая окружность играет роль абсолюта.

Такая группа будет состоять из бесконечного числа подстановок (исключая случай конечной циклической группы вращений Лобачевского). Всякая точка, лежащая в фундаментальном круге, будет иметь относительно этой группы бесконечное множество гомологов, и так как все они лежат в ограниченной области [мы говорим сейчас о случае геометрии (3); фундаментальная область является ограниченной с точки зрения евклидовой геометрии плоскости z], то необходимо должны существовать точки накопления этих гомологов, т. е. особые точки группы. Мы видели, что эти особые точки лежат на абсолюте. Во всякой точке, лежащей внутри фундаментального круга, т. е. в каждой конечной точке, с точки зрения рассматриваемой геометрии Лобачевского, группа является собственно разрывной.

С другой стороны, всякая точка P абсолюта, не принадлежащая к периметру какого-либо многоугольника D, гомологичного производящему многоугольнику D_0, является особой точкой; то же самое имеет место для всякой точки P абсолюта, являющейся вершиной второй категории многоугольника D_0.

Действительно, при обоих предположениях всякий круг γ, содержащий точку P, как бы мал он ни был (мы будем далее предполагать, что окружность γ ортогональна к абсолюту), будет содержать также (целиком или частично) бесконечное множество многоугольников D, гомологичных многоугольнику D_0. В противном случае часть области, общей кругу γ и фундаментальному кругу, осталась бы не покрытая многоугольниками D. Находя для частей многоугольников D, заключенных в круге γ, их гомологи внутри многоугольника D_0, мы получим там множество многоугольников D_j^0, гомологичных этим частям. Каждый из многоугольников D_j^0 будет иметь по крайней мере одну вершину, совпадающую с одной из вершин многоугольника D_0 (если прямая Лобачевского γ пересекается с периметром некоторого многоугольника D, то она обязательно пересекается не менее чем с двумя его сторонами). Многоугольники D_j^0, имеющие общую вершину A (а множество таких многоугольников всегда бесконечно), обладают тем свойством, что любое их число всегда имеет общую часть. Отсюда следует, что в круге γ существует бесконечное множество пар точек M и M', гомологичных друг другу относительно различных преобразований группы.

Можно задать вопрос — имеются ли пары гомологичных точек, бесконечно близких к точке P, на самом абсолюте? Чтобы убедиться в существовании подобных точек, рассмотрим помимо точки P еще другую точку Q абсолюта; пусть Q' — образ точки Q при преобразовании, переводящем точку M в точку M'. Если существуют точки Q', сколь угодно близкие к P, то наше утверждение доказано. В противном случае прямые Лобачевского QM, $Q'M'$ пересекут еще раз абсолют в точках m, m', удовлетворяющих требуемым условиям.

Если общая вершина A многоугольников D_j^0 не находится на абсолюте, то, как можно убедиться непосредственно, всякая конечная точка B имеет гомологи, сколь угодно близкие к точке P. Пусть M_0 и M — одна из только что рассмотренных пар гомологичных друг другу точек, и расстояние Лобачевского AM меньше некоторой наперед заданной величины. Рассмотрим круг C_0 с центром Лобачевского в точке M_0, содержащий внутри себя точку B; для этого надо взять радиус Лобачевского этого круга больше расстояния Лобачевского MB. Образ точки B при преобразовании, переводящем точку M_0 в M, будет находиться внутри круга, являющегося образом круга C_0 при этом преобразовании. Очевидно, что круг C содержит точку M; его радиус стремится к нулю, когда точка M стремится к точке P. Отсюда следует наше утверждение.

Это заключение остается верным и в том случае, когда точка A является вершиной второй категории: оно тогда следует из того, что в области γ имеется бесконечное множество точек a, гомологичных точке A, и что, с другой стороны, каждая из этих точек a, как двойная параболическая точка, должна быть предельной точкой для множества гомологов точки B. Как мы еще указывали в главе I, вершины приведенной области, не лежащие на абсолюте (вершины первой категории), оказываются либо случайными точками, нисколько не характерными для группы, либо являются двойными точками эллиптических подстановок конечного порядка, принадлежащих к группе.

Вершины, лежащие на абсолюте, могут быть или двойными точками принадлежащих к группе параболических подстановок (вершины второй категории), или точками, не имеющими никакого специального значения для группы. Что касается двойных точек, принадлежащих к группе гиперболических подстановок, то они не могут оказаться в числе вершин производящих многоугольников.

Переходим теперь к изучению условий, которым должен удовлетворять выпуклый многоугольник, ограниченный прямыми Лобачевского, для того чтобы он мог быть производящим многоугольником группы того вида, который нас интересует.

Как мы знаем, для этого нужно, чтобы данный многоугольник и совокупность его образов, построенных указанным выше способом, покрыли без пробелов и перекрытий некоторую, неопределенную пока область R (мы увидим далее, что этой областью будет вся плоскость Лобачевского). Обратно, если можно покрыть область, о которой идет речь, системой конгруентных друг другу (по Лобачевскому) выпуклых многоугольников, то совокупность движений Лобачевского, оставляющих без изменений полученную таким образом фигуру (включая совокупность линий, разделяющих эту область на наши многоугольники), составляет группу, для которой данный многоугольник является производящим. Мы должны теперь приступить к решению следующих вопросов:

1) Будут ли последовательные образы данного многоугольника примыкать друг к другу без перекрытий?

2) Какова будет область R, ими покрытая?

Для того чтобы ответить на первый вопрос, рассмотрим окружность, имеющую вершину A данного многоугольника D_0 своим центром и настолько малый радиус, что эта окружность не содержит ни внутри себя, ни на своем периметре никакой другой вершины; затем построим, как было сказано, ряд последовательных образов данного многоугольника, пересекаемых этой окружностью. Необходимо, чтобы получаемый таким образом последний многоугольник прилегал к многоугольнику D_0, не захватывая его. Это обстоятельство обеспечивалось ранее соотношением между фундаментальными подстановками. Если теперь мы обратим внимание на геометрическое значение этих преобразований, то получим гораздо более простую форму искомого условия: оказывается, что сумма последовательно встречаемых таким образом углов многоугольников должна быть равна 2π. С другой стороны, мы знаем, что все углы, сгруппированные около вершины, встречаются один раз при вершинах многоугольника D_0, составляющих цикл, если дело идет о случайной вершине, и n раз в случае эллиптической вершины порядка n. Итак, мы приходим вместе с Пуанкаре к следующему необходимому условию:

Сумма углов данного многоугольника при вершинах всякого цикла первой категории должна равняться 2π, *если цикл состоит из случайных вершин, и* $\frac{2\pi}{n}$, *если цикл состоит из эллиптических вершин.*

Мы докажем, что если область R односвязна, то найденное необходимое условие будет вместе с тем и достаточным.

Пусть A — некоторая фиксированная точка, взятая внутри многоугольника D_0; B — другая точка, принадлежащая области R. Тогда, по предположению, должна существовать по крайней мере одна такая цепь прилегающих друг к другу многоугольников, последовательно получающихся в качестве образов первого многоугольника, что последний многоугольник D' этой цепи содержит внутри точку B (если точка B окажется лежащей на его периметре, то мы, слегка изменяя ее положение, сдвинем ее внутрь этого многоугольника). Соединим точки A и B путем L, последовательно пересекающим рассматриваемые многоугольники (для упрощения допускаем также, что путь L не проходит ни через одну из вершин этих многоугольников); можно рассматривать нашу цепь многоугольников D как определенную этим путем L. Нам нужно доказать, что, соединяя точки A и B другим путем L', также лежащим внутри R, мы получим, вообще говоря, новую цепь многоугольников, всегда оканчивающуюся тем же многоугольником D'.

Иначе: рассматривая замкнутый контур $L+L'$, который мы обходим, переходя от точки A к точке B по пути L и возвращаясь из точки B в точку A по пути L', мы должны убедиться в том, что если исходным многоугольником соответствующей цепи, содержащим точку A, был многоугольник D_0, то тот же многоугольник D_0 будет заключать эту цепь. Если это обстоятельство имеет место для всякого замкнутого контура, лежащего внутри области R и состоящего из конечных (в смысле геометрии Лобачевского) точек, то наше утверждение доказано.

Но, по предположению, это обстоятельство уже имеет место для всякого контура, содержащего внутри себя только одну вершину сети многоугольников (в этой вершине углы будут равны углам в гомологичных вершинах многоугольника D_0). Другими словами, это будет иметь место для всякого контура, ограничивающего область с диаметром по Лобачевскому (наибольшее расстояние Лобачевского между двумя ее точками), меньшим наименьшей (в смысле геометрии Лобачевского) стороны данного многоугольника.

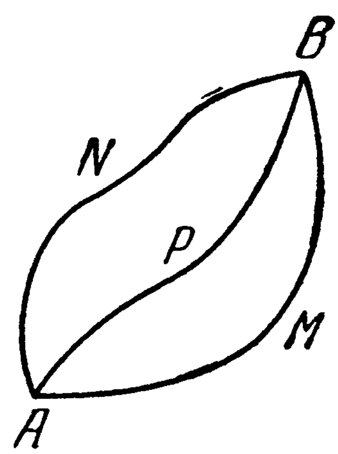

Рис. 1.

С другой стороны, если это имеет место для двух контуров $AMBPA$, $APBNA$ (рис. 1), которые имеют общую дугу APB, то это будет иметь место также и для контура $AMBNA$, составленного из этих контуров. Действительно, если D_0 — исходный многоугольник, содержащий точку A, а дуга AMB приводит к некоторому многоугольнику D', содержащему точку B, то, по предположению, движение вдоль дуги BPA приведет нас по возращении в точку A к первоначальному многоугольнику D_0. Если затем мы опишем в обратном направлении дугу APB, то в качестве многоугольника, содержащего точку B, мы получим многоугольник D'; движение вдоль дуги BNA приведет нас к первоначальному многоугольнику D_0. Другими словами, мы получаем многоугольник D_0, перемещаясь из точки A сначала по дуге AMB (что приводит к многоугольнику D'), а затем возвращаясь в точку A по дуге BNA.

Всякий замкнутый контур, состоящий из конечных (в смысле рассматриваемой геометрии Лобачевского) точек и лежащий в области R, может быть, так как область R предполагается односвязной, разложен (предыдущее замечание разъясняет это слово) на сколь угодно малые контуры, расположенные в области R. В частности, все эти контуры могут быть взяты так, что их диаметры будут менее наименьшей (всё — в смысле рассматриваемой геометрии Лобачевского) стороны производящего многоугольника. Таким образом, взятый нами контур всегда будет удовлетворять требуемому условию. Итак, мы доказали, что область R (которую мы предположили односвязной) будет без налеганий покрыта рассматриваемыми многоугольниками.

Остается установить, что́ представляет собой область R. Мы увидим (и в этом вопросе рассмотрение геометрии Лобачевского было особенно полезно Пуанкаре), что эта область совпадает со всей плоскостью Лобачевского — по крайней мере в том случае, если стороны второго рода данного многоугольника, т. е. стороны, не сопряженные с другими и не порождающие фундаментальных подстановок, все являются дугами абсолюта.

Предположим снова, что мы исходим из точки A, расположенной в первоначальной приведенной области; пусть B — другая точка, находящаяся на конечном расстоянии Лобачевского от первой. Эти две точки могут быть соединены линией L, имеющей конечную длину l в смысле рассматриваемой геометрии Лобачевского, например отрезком некоторой прямой Лобачевского. Рассмотрение этой линии L и дало возможность Пуанкаре доказать упомянутое положение.

Необходимо доказать, что рассматриваемая линия может пересечь только конечное число наших многоугольников. Мы можем посчитать, что она никогда не пересекается два раза с одним и тем же многоугольником нашей системы потому, что это заведомо имеет место, если линия L — прямая Лобачевского. Линия L, пересекая многоугольник нашей системы, необходимо войдет в него через одну сторону и выйдет через другую. Предположим сначала, что эти две стороны не имеют общей вершины, т. е. не прилегают одна к другой. Расстояние между двумя точками этих сторон многоугольника D_0 (или какого-либо из его образов) не может быть в этом случае бесконечно малым и имеет нижнюю грань k, отличную от нуля. Всякий многоугольник, пересекаемый в этих условиях линией L, вырезает из нее отрезок, имеющий длину Лобачевского, по крайней мере равную k. Это может случиться только конечное число раз, не большее, чем величина $\frac{l}{k}$.

Поэтому, для того чтобы наше утверждение не имело места, необходимо, чтобы, начиная с некоторого момента, линия L выходила из каждого последовательно встречаемого многоугольника нашей системы через сторону, прилегающую к стороне входа, или, как мы скажем, следуя Пуанкаре, чтобы путь L стягивал вершину этого многоугольника, общую двум пересекаемым сторонам. Предположим сначала, что стягиваемая вершина в первом многоугольнике D' не совпадает со стягиваемой вершиной в следующем непосредственно за ним на нашем пути L многоугольнике D''. Тогда фигура, составленная из многоугольников D' и D'', будет конгруентна в смысле Лобачевского фигуре, составленной первоначальным производящим многоугольником D_0 и смежным ему многоугольником D_1, — фигуре, в которой три стороны, последовательно пересекаемые нашим путем, представлены тремя (гомологичными соответственным сторонам многоугольников D' и D'') сторонами ab, bc, cd (рис. 2). Крайние стороны ab, cd не имеют общих точек, и следовательно, расстояние Лобачевского между принадлежащими к ним точками имеет нижнюю грань, отличную от нуля. Пусть k' — наименьшее возможное значение этих нижних граней для всех многоугольников D_j, прилегающих к многоугольнику D_0, и всех пар сторон, расположенных в многоугольниках D_0 и D_j так, как расположены стороны ab и cd в многоугольниках D_0 и D_1. Теперь очевидно, что если путь L последовательно пересекает многоугольники D', D'', стягивая в них различные вершины, то это обстоятельство не может случиться более чем $\frac{l}{k'}$ раз.

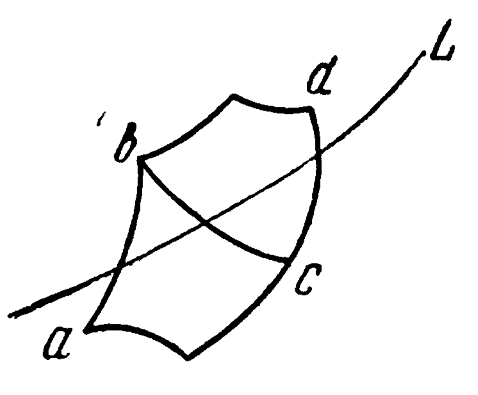

Рис. 2.

Итак, необходимо допустить, что, начиная с какого-либо момента, стянутая вершина остается одной и той же, и наш путь пересекается только со сторонами, последовательно выходящими из этой вершины.

Если бы мы имели дело только с вершинами первой категории, то уже отсюда вытекало бы, что линия L пересекается лишь с конечным числом многоугольников нашей системы.

Предположим, напротив, что мы имеем дело с вершиной τ, лежащей на абсолюте. Две соседние стороны τa, τb, выходящие из этой вершины, не будут необходимо сопряжены между собой; но так как вершина τ составляет часть цикла, всегда состоящего из конечного числа q вершин *), то наш путь должен встретить после q пересечений сторону $\tau a'$, гомологичную стороне τa и получающуюся из нее преобразованием посредством некоторой подстановки T нашей группы (эта подстановка необходимо параболическая) **). Стороны $\tau a'$, $\tau a''$, ..., являющиеся образами стороны τa и последовательно получающиеся из нее с помощью степеней параболической подстановки T, лежат на окружностях, проходящих через точку τ; радиусы этих окружностей стремятся к нулю при возрастании степени подстановки T. Очевидно, что путь L может пересечь только конечное число этих сторон. Если мы предположим, что наш линейный элемент рассматриваемой геометрии Лобачевского имеет вид формы (4), то число этих пересечений будет непременно меньше величины $\frac{2l}{hY_0}$ ***). Здесь Y_0 означает наименьшее значение координаты Y вдоль пути L,

---

*) Напомним, что рассмотрение постоянно ограничивается многоугольниками, имеющими конечное число вершин. (*Прим. ред.*)

**) Случай производящих многоугольников, имеющих вершиной двойную точку гиперболического преобразования, входящего в состав группы, представлял в изложении Пуанкаре некоторую трудность. Последующие работы показали, что рассмотрение этого случая излишне. [См. по этому поводу у П. Фату в книге Аппель-Гурса [19] на стр. 106—107. (*Прим. ред.*)].

***) Действительно, две выходящие из точки τ стороны, переходящие одна в другую при преобразовании T, получаются из двух прямых, параллельных мнимой оси и расположенных одна от другой на расстоянии h, с помощью инверсии относительно окружности $|z-\tau|=1$. Поэтому расстояние между двумя точками M и M', взятыми на этих сторонах, и тем более длина отрезка пути L между этими точками, будет больше чем $h \cdot \tau M \cdot \tau M'$, а длина Лобачевского

h — параметр, характеризующий параболическую подстановку T в ее канонической форме (43).

Таким образом, мы можем считать наше утверждение доказанным.

Мы объединим итоги нашего исследования в следующем предложении:

Пусть нам дан выпуклый (в смысле Лобачевского) многоугольник, имеющий сторонами либо отрезки абсолюта, либо попарно конгруентные (в смысле Лобачевского) отрезки прямых Лобачевского. Эти попарно конгруентные стороны мы называем сопряженными; движения Лобачевского, переводящие одну сопряженную сторону в другую, являются фундаментальными подстановками некоторой группы преобразований. Каждую совокупность вершин данного многоугольника, гомологичных друг другу при преобразованиях этой группы, мы называем циклом.

Пусть сумма углов при вершинах многоугольника, образующих любой из циклов, равна 2π или $\frac{2\pi}{n}$. Тогда совокупность образов данного многоугольника при преобразованиях построенной нами группы движений Лобачевского

этого отрезка будет больше, чем $\frac{h}{2}\frac{\tau M\cdot\tau M'}{Y_0}$ или $\frac{h}{2}Y_0$ (так как евклидовы длины отрезков τM и $\tau M'$ больше величины Y_0 для прямой Лобачевского MM').

[То обстоятельство, что расстояние MM' больше, чем $h\cdot\tau M\cdot\tau M'$, можно установить следующим образом. Перенесем начало координат в точку τ. Пусть $\frac{1}{A}e^{i\alpha}$ и $\frac{1}{B}e^{i\beta}$ — аффиксы точек M и M', а следовательно, $Ae^{i\alpha}$, $Be^{i\beta}$ — аффиксы точек, соответствующих им при рассматриваемой инверсии (мы помещаем начало координат в точку τ). Тогда по условию

$$|Ae^{i\alpha}-Be^{i\beta}|>h;$$

отсюда

$$\left|\frac{1}{A}e^{i\alpha}-\frac{1}{B}e^{i\beta}\right|=\frac{|Be^{i\alpha}-Ae^{i\beta}|}{AB}=\frac{|Be^{i\beta}-Ae^{i\alpha}|}{AB}>h\cdot\tau M\cdot\tau M'.$$

Равенство

$$|Be^{i\alpha}-Ae^{i\beta}|=|Ae^{i\alpha}-Be^{i\beta}|$$

проверяется непосредственно; оно легко усматривается и геометрически. (*Прим. ред.*)].

покроет без пробелов и перекрытий плоскость Лобачевского. Получившееся таким образом разбиение плоскости будет инвариантно по отношению к построенной нами собственно разрывной группе движений Лобачевского, иначе говоря — по отношению к фуксовой группе, для которой данный многоугольник служит производящим.

Оставим в стороне случаи, рассмотренные в начале настоящей главы и соответствующие группам вращений сферы; тогда число операций группы всегда будет бесконечным, и группа будет обязательно иметь особые точки. Как мы доказали, эти особые точки расположены на абсолюте.

Анализ различных возможностей, которые могут представиться в отношении расположения этих особых точек, является одним из наиболее интересных разделов нашей теории.

В первый раз математики встретились с фуксовыми функциями в связи с теорией модулярных эллиптических функций в том ее виде, который она приобрела в работах Эрмита.

У всякой системы эллиптических функций наряду с парой периодов $2a$, $2b$ имеется бесконечное множество других пар периодов, эквивалентных первой паре. При этом если мы положим $\omega = \frac{b}{a}$, то различные значения отношения ω_1 новых периодов, которые могут заменить первоначальную пару периодов, связаны с z соотношением

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \tag{49}$$

где α, β, γ, δ — целые действительные числа, причем определитель $\Delta = \alpha\delta - \gamma\beta = 1$. Обратно, эти подстановки — единственные, с помощью которых можно от отношения первоначальных периодов перейти к отношению периодов, составляющих пару, эквивалентную первой, и притом расположенную в том порядке, при котором отношение периодов интегралов первого и второго вида равно $\frac{i\pi}{2}$. Эти подстановки составляют арифметическую группу. Эрмит, рассматривая коэффициенты в радикале, стоящем под знаком эллиптического интеграла как функции ω, пришел к однозначным функциям от ω, инвариантным по отношению к преобразованиям группы (49). Отсюда, как заметил Пуанкаре, непосредственно следует, что подстановки (49) образуют собственно разрывную группу. Эта группа состоит из дробно-линейных подстановок с действительными коэффициентами и положительным определителем и поэтому оставляет инвариантными обе (верхнюю и нижнюю) полуплоскости, ограниченные действительной осью. Итак, рассматриваемые подстановки (49) составляют фуксову группу. Приведенная область этой группы хорошо известна; она имеет вид смешанного треугольника, две стороны которого параллельны оси Y и симметричны по отношению к этой оси, а третья сторона является дугой окружности радиуса, равного 1, с центром в начале координат *).

Но рассматриваемая группа остается собственно разрывной только при $\operatorname{Im} z \neq 0$ (таково, как известно, отношение периодов эллиптической функции). Она не будет собственно разрывной для действительных значений переменной z. Теория непрерывных дробей показывает, ка́к можно найти подстановку (49) с целыми коэффициентами и с определителем, равным 1, которая, будучи применена к действительному числу z, приводит к действительному числу z_1, сколь угодно близкому к другому наперед заданному действительному числу z'. Другими словами, гомологи действительного числа z всюду плотно расположены на действительной оси. Это показывает, как мы уже об этом говорили, что свойство группы быть собственно разрывной не является, по крайней мере в действительной области, необходимым следствием отсутствия у нее бесконечно малых подстановок. У арифметической группы нет бесконечно малых подстановок, иначе она не была бы нигде собственно разрывной. Однако она не является собственно разрывной группой ни для одного действительного значения переменного z.

Будучи геометрическим местом особых точек группы, действительная ось является для инвариантной функции Эрмита *особой линией* или *купюрой*, в соседстве с каждой точкой

---

*) Число сторон этого производящего многоугольника оказывается четным благодаря наличию у него эллиптических вершин порядка $n=2$. По этому поводу см. Форд [3], стр. 88—91. (*Прим. ред.*)

которой функция на основании предыдущего становится неопределенной. Понятие особой линии, в настоящее время сделавшееся обычным, только что появилось в науке в то время, когда развивалась теория модулярных функций, и появился результат Эрмита, дававший замечательный пример особой линии. Теория фуксовых групп, дополненная, как будет указано далее, теорией фуксовых функций, позволяет прибавить к этому примеру сколько угодно других, весьма различных между собой. Функция будет иметь купюру вдоль действительной оси или другой окружности (смотря по тому, какая линия будет абсолютом), если особые точки группы всюду плотно расположены на этой линии. Но именно это и будет иметь место всякий раз, когда производящий многоугольник лишен сторон второго рода, потому что всякая точка абсолюта, не принадлежащая к стороне второго рода, является особой точкой. Например, в случае арифметической группы производящий многоугольник имеет только одну вершину в бесконечности, именно — бесконечно удаленную точку оси Y (двойную точку параболической подстановки $z_1 = z + 1$). Особая линия тем более появится, когда производящий многоугольник имеет только вершины первого рода и, таким образом, целиком состоит из конечных (в смысле рассматриваемой геометрии Лобачевского) точек.

Предположим, напротив, что производящий многоугольник имеет стороны второго рода. Всякая точка, лежащая на одной из этих сторон, является обыкновенной точкой группы. Этот случай представляется с первого взгляда более простым и более соответствующим прежде найденным результатам; на самом деле он еще более парадоксален. В нем заложено начало еще более серьезной революции в математических понятиях: с ним вошло в науку понятие о *совершенном разрывном множестве*, теорию которого позже дал Г. Кантор (в 1883 г.).

Заметим прежде всего, что множество особых точек E обязательно замкнуто по терминологии Кантора, т. е. всякая точка m, предельная для точек $m_1 \in E$, снова принадлежит к множеству E и, следовательно, тоже является особой точкой. Это обстоятельство очевидно в наших условиях: если как угодно близко к точке m лежат особые точки m_1, в любой окрестности которых имеется бесконечное множество пар точек, гомологичных между собой относительно различных преобразований группы, то такие пары гомологов можно найти и в любой окрестности точки m.

Расстояние двух точек, взятых на абсолюте, измеряется при этом в смысле евклидовой геометрии плоскости z.

Далее, пусть mn — сегмент абсолюта, не содержащий внутри себя особых точек. Этот сегмент не может совпадать со всем абсолютом, если только число преобразований группы бесконечно велико. Можно предположить, что этот сегмент взят настолько большим, насколько это возможно, т. е. что непосредственно за его концами m и n находятся особые точки группы. В этих условиях на основании сказанного эти концы m и n сами являются особыми точками группы.

Применим теперь к дуге mn последовательно все преобразования нашей группы; мы получим бесконечное множество *) сегментов абсолюта: m_1n_1, m_2n_2, ... Их концы будут особыми точками, но внутри этих сегментов нет точек множества E. Используя это обстоятельство, можно показать, что множество E является совершенным, всюду неплотным множеством **).

Мы воспроизводим, таким образом, классическое построение совершенного, всюду разрывного множества в том виде, как оно указано в работах Кантора.

---

*) Исключение составит случай, когда все точки m_i, n_i совпадают с m или n, т. е. когда группа состоит из степеней гиперболической или параболической подстановки.

**) По поводу структуры множества E см. книгу В. В. Голубева [20], стр. 343—349. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА III

ФУКСОВЫ ФУНКЦИИ

Геометрическая теория фуксовой группы позволяет построить функции, инвариантные для этой группы.

Метод, которым Пуанкаре строит подобные функции, после того как образована та или другая группа, весьма прост и аналогичен приему, употребляемому для этой цели в теории эллиптических функций.

Пусть точки

$$z_k = f_k(z) \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{50}$$

являются образами точки z при преобразованиях некоторой собственно разрывной группы. При этом мы полагаем $f_0(z) = z$. Пусть, далее, $H(z)$ — некоторая однозначная функция в рассматриваемой области. Если ряд

$$\sum H(z_k) \tag{51}$$

абсолютно сходится, то его сумма, очевидно, и является искомым инвариантом группы. Как известно, именно так и поступают для образования двоякопериодических функций, полагая $H(z) = \frac{1}{z^3}$. В общем случае фуксовых функций Пуанкаре был вынужден, для того чтобы получить абсолютно сходящийся ряд, придавать его общему члену более сложный вид. Он рассматривает ряд

$$\theta(z) = \sum_k H(z_k)\left(\frac{dz_k}{dz}\right)^m = \sum_k H(f_k(z))\,[f'_k(z)]^m, \tag{52}$$

где m — постоянный показатель, называемый *весом* ряда *).

---

*) Обычно за m берут целое число. (*Прим. ред.*)

Предположим, что нам удалось найти этот показатель так, что ряд (52) оказался абсолютно сходящимся. Заменим в нем z через z_i. В силу определения группы, для каждого преобразования нашей группы $z_k = f_k(z)$ можно найти в ее составе такое преобразование $z_l = f_l(z)$, что

$$f_k[f_i(z)] = f_l(z). \tag{53}$$

Поэтому в результате замены переменной z на z_i ряд (52) примет вид

$$\sum_l H(z_l)\left(\frac{dz_l}{dz_i}\right)^m. \tag{54}$$

Здесь z_l — те же величины z_k, но расположенные в другом порядке. Однако

$$\frac{dz_l}{dz_i} = \frac{dz_l}{dz} : \frac{dz_i}{dz}. \tag{55}$$

Поэтому сумма ряда (54) равна произведению суммы ряда (52) на величину $\left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{-m}$. Таким образом, оказывается, что

$$\theta(z_i) = \left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{-m} \theta(z). \tag{56}$$

В силу этого соотношения функция $\theta(z)$ является относительным инвариантом группы.

Пусть затем $\theta_1(z)$ — другой относительный инвариант, соответствующий другому выбору функции H (причем показатель m остается без изменения). Мы получим тогда, что

$$\theta_1(z_i) = \left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{-m} \theta_1(z), \tag{57}$$

и следовательно, частное $\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}$ оказывается инвариантным при всех подстановках группы. Мы найдем, таким образом, один из искомых инвариантов рассматриваемой группы.

Предыдущее рассуждение носит весьма общий характер *). Оно может быть непосредственно распространено на разрывные группы для многих переменных. Пусть, например, в трехмерном евклидовом пространстве некоторое преобразование такой группы переводит произвольную точку (X, Y, Z) в новую точку (X_i, Y_i, Z_i), координаты которой являются функциями X, Y, Z. Мы получим ряд, аналогичный ряду (52), если будем исходить из функции $H(X, Y, Z)$ и заменим множитель $\left(\frac{dz_k}{dz}\right)^m$ m-й степенью якобиана соответствующей подстановки группы. Все рассуждения будут сходны с только что проведенными, так как при замене переменных якобиан ведет себя совершенно так же, как производная функция.

При применении рассмотренного метода нужно каждый раз устанавливать, можно ли выбрать показатель m (а в известных случаях и функцию H) так, что ряд (54) оказывается благодаря этому сходящимся.

В случае фуксовых функций подобное исследование не представляет затруднений. Пусть переменные выбраны так,

---

*) Следуя Клейну, ему можно придать еще более общую форму. Ассоциируем с каждой подстановкой группы $z_i = f_i(z)$ множитель $\psi_l(z)$, постоянный или зависящий от z, так что каждому произведению двух каких-либо подстановок группы $f_i[f_k(z)] = f_l(z)$ будет соответствовать тождество

$$\psi_i(z)\ \psi_k(f_i(z)) = \psi_l(z).$$

Всякий раз, когда эти множители $\psi_l(z)$ могут быть выбраны так, что ряд

$$\Phi(z) = \sum_k \psi_k(z) H[f_k(z)]$$

будет сходящимся, удовлетворится тождество

$$\Phi[f_i(z)] = \frac{1}{\psi_i(z)} \Phi(z).$$

Функции $\left(\frac{dz_k}{dz}\right)^m$ как раз составляют подобную систему множителей $\psi_k(z)$. Клейн в некоторых частях своей теории пользовался другими системами функции $\psi_k(z)$, присоединяя к величинам $\left(\frac{dz_k}{dz}\right)^m$ подходящие постоянные множители.

Построение классических тета-функций основывается на подобном же принципе.

что роль абсолюта играет некоторая окружность, роль плоскости Лобачевского — круг, ограниченный этой окружностью. Мы обозначим буквой S евклидову площадь названного круга. Как известно из теории аналитических функций, $\left|\frac{dz_k}{dz}\right|$, т. е. величина

$$\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k}\right)\right| = \left|\frac{1}{(\gamma_k z+\delta_k)^2}\right| \tag{58}$$

(для упрощения вычислений мы подбираем здесь так коэффициенты α_k, β_k, γ_k, δ_k, что $\alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k = 1$), равна

$$\lim_{\sigma\to 0}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma}}. \tag{59}$$

Здесь σ — евклидова площадь некоторой окрестности точки z; σ_k — евклидова площадь образа этой окрестности при отображении

$$z_k = \frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k} \tag{60}$$

(таким образом, σ_k — евклидова площадь соответствующей окрестности точки z_k). При образовании выражения (59) предполагается, что рассматриваемая окрестность точки z стягивается к этой точке (отчего $\sigma\to 0$).

Если мы не будем стягивать этой окрестности к рассматриваемой точке и предположим, что ее площадь σ конечна, то значение выражения $\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma}}$ совпадет со значением величины $\left|\frac{dz_k}{dz}\right|$ в какой-то точке этой окрестности. Отсюда можно усмотреть, что величина $\left|\frac{dz_k}{dz}\right|_{z=z_0}$ отличается от $\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma}}$ на некоторый множитель, ограниченный и сверху и снизу (легко указать эти границы). Поэтому ряд

$$\sum_k \left|\frac{dz_k}{dz}\right|^m \tag{61}$$

будет абсолютно сходиться, если окажется абсолютно сходящимся ряд

$$\sigma^{\frac{m}{2}} + \sigma_1^{\frac{m}{2}} + \ldots + \sigma_k^{\frac{m}{2}} + \ldots \tag{62}$$

Окрестность точки z_0 можно всегда выбрать так, что ряд (62) будет абсолютно сходиться для значений $m \leqslant 2$. Для этого достаточно взять за эту окрестность часть приведенного многоугольника с центром в точке z_0. Тогда образы указанной окрестности при преобразованиях (60) составят соответственно части приведенных многоугольников с центрами в точках z_k и все будут внешними по отношению друг к другу. Поэтому сумма ряда (62) при $m=2$, а тем более при $m<2$, будет меньше величины S — евклидовой площади фундаментального круга *).

Умножение членов ряда (61) на величины $H(z_k)$ не нарушает его сходимости, если только точка z не является одной из особых точек функции $H(z)$ или каким-либо гомологом подобной точки и функция $H(z)$ не имеет особых точек на абсолюте. Действительно, в этих условиях величины $H(z_k)$ будут не только конечны, но и ограничены в своей совокупности, так как точки z_k скапливаются только у абсолюта, где функция $H(z)$ предполагается регулярной и, следовательно, ограниченной. Таким образом, ряд (52) при выполнении условий, наложенных нами на выбор точки z и функции $H(z)$, будет сходиться для всех значений $m \geqslant 2$. Это заключение можно при некоторых условиях распространить и на точки z, лежащие вне фундаментального круга (такие точки z не должны быть гомологами бесконечно удаленной точки плоскости), и на точки z, лежащие внутри сторон второго рода фундаментального многоугольника.

При подходящем выборе веса m и некоторых добавочных предположениях наш вывод можно обобщить на случай функции $H(z)$, имеющей полюсы на абсолюте.

---

*) При $m=1$ ряды (61) и (62), вообще говоря, расходятся. Они могут оказаться сходящимися, если будут выполнены некоторые условия, указанные впервые Шоттки и Бернсайдом (см. книгу Фрике и Клейна [21], ч. I, гл. 1, 3, 4 и 5). Фрике дал также пример рядов (61) и (62), сходящихся при $m=\frac{1}{2}$ (см. [22]).

Пуанкаре показал, что проведенное нами рассуждение можно с пользой для дела изложить в терминах геометрии Лобачевского. Напомним прежде всего, что если круг $|z|<1$ является фундаментальным [кривизна метрики Лобачевского (3) тогда равна —4], то окружность $|z|=\rho$ будет иметь радиус Лобачевского R, связанный с евклидовым радиусом ρ соотношением *)

$$\rho=\frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1}=\operatorname{th} R, \tag{63}$$

а площадь Лобачевского ограниченного ею круга будет равна величине $\pi\operatorname{sh}^2 R$.

Напомнив эти формулы, возьмем снова некоторую малую окрестность точки z, не содержащую ее гомологов, и рассмотрим ее площадь Лобачевского Σ и ее диаметр Лобачевского λ (таким образом, λ — верхняя грань расстояний Лобачевского между точками этой области). Эти величины не изменяются при переходе от взятой нами окрестности к какому-либо из ее образов при преобразовании посредством подстановок нашей группы.

Число гомологов точки z, лежащих в некотором круге радиуса Лобачевского R, всегда меньше, чем величина

$$\frac{\pi}{\Sigma}\operatorname{sh}^2(R+\lambda). \tag{64}$$

Это вытекает из того, что каждый подобный гомолог лежит в соответствующем образе нашей окрестности с площадью Лобачевского, равной Σ, причем все эти образы являются внешними один по отношению к другому и находятся внутри круга с радиусом Лобачевского, равным

$$R'=R+\lambda. \tag{65}$$

С другой стороны, величина $\left|\frac{dz_k}{dz}\right|$ является коэффициентом линейного искажения при отображении (60) в точке z.

---

*) См. формулу (2.81) в книге [2]. В этой формуле следует положить $\rho=4$, чтобы получить формулу (63) настоящей книги. В формуле (2.81) евклидов радиус рассматриваемой окружности обозначен буквой r_1, а в формуле (63) — буквой ρ. (*Прим. ред.*).

С точки зрения рассматриваемой нами геометрии Лобачевского размеры всех фигур при отображении (60) остаются неизменными. Поэтому согласно формуле (3)

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{|dz_k|^2}{(1-|z_k|^2)^2}. \tag{66}$$

Обозначая расстояния Лобачевского от начала координат до точек z и z_k через R_0 и R_k и пользуясь соотношением (63), мы найдем отсюда, что

$$\left|\frac{dz_k}{dz}\right| = \frac{\operatorname{ch}^2 R_0}{\operatorname{ch}^2 R_k}. \tag{67}$$

Для исследования ряда (52) построим серию кругов с радиусами Лобачевского, изменяющимися в арифметической прогрессии, т. е. равными величинам

$$R_n = nR_0 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{68}$$

Эти круги разделят фундаментальный круг на серию круговых колец. Число гомологов точки z, заключенных внутри n-го круга, и тем более число гомологов точки z, заключенных в n-м кольце, будет меньше величины

$$\frac{\pi}{\Sigma} \operatorname{sh}^2 (nR_0 + \lambda). \tag{69}$$

Модуль $\left|\frac{dz_k}{dz}\right|$ в каждом из этих колец будет меньше величины $\operatorname{ch}^2 R_0 \operatorname{ch}^{-2} (n-1) R_0$. Поэтому точкам z_k, лежащим в n-м кольце, будет соответствовать в ряде (52) сумма, меньшая по модулю величины

$$\frac{(H)\,\pi}{\Sigma} \frac{\operatorname{sh}^2 (nR_0 + \lambda) \operatorname{ch}^{2m} R_0}{\operatorname{ch}^{2m} (n-1) R_0} \tag{70}$$

[здесь (H) — постоянное число, большее всех $|H(z_k)|$, входящих в ряд (52)], и тем более меньшая величины

$$Ke^{-2n(m-1)R_0}, \tag{71}$$

где K есть некоторое постоянное число. Но выражение (71) является при $m > 1$ общим членом убывающей геометрической прогрессии. Итак, исследуемый ряд сходится.

Это рассуждение имеет то преимущество сравнительно с предыдущим, что оно дает представление о быстроте сходимости рассматриваемого ряда; как мы увидим далее, это обстоятельство важно при изучении других аналогичных рядов, например дзета-фуксовых рядов.

Оба рассмотренных нами метода одинаково в состоянии показать, что ряд (52) равномерно сходится в каждой области, не содержащей ни одной особой точки функции H и ни одного из гомологов подобной точки.

Поэтому в силу известной теоремы теории функций в подобной области сумма ряда (52) является регулярной функцией z.

Возьмем теперь за $H(z)$ рациональную функцию, не имеющую ни одного полюса на абсолюте; можно даже для большей общности исходить из какой-нибудь функции, мероморфной на всей плоскости, или из функции, мероморфной только внутри фундаментального круга (если мы рассматриваем только точки, лежащие внутри этого круга). В этих случаях может существовать только конечное число членов ряда (52), теряющих свою регулярность в некоторой точке z, лежащей внутри фундаментального круга. С подобным нарушением регулярности мы, например, встретимся во внутренней точке z приведенного многоугольника D_0, гомологичной какому-либо полюсу функции $H(z)$ [заметим, что подобная точка z может быть гомологичной только конечному числу полюсов функции $H(z)$].

Члены ряда (52), которые при этом становятся бесконечно большими, составляют главную часть функции в окрестности этой точки z. Совокупность остальных членов ряда (52) (к ним может быть применено предыдущее доказательство) остается там регулярной.

Ряд (52), образованный с помощью рациональной функции $H(z)$, не имеющей полюсов на фундаментальной окружности, называется *тета-фуксовой функцией*; она, подобно функции Якоби, является относительным инвариантом. Легко видеть, что такая тета-фуксова функция мероморфна внутри фундаментального круга. Напротив, на окружности круга она необходимо будет иметь особенности более сложной природы.

Знание полярных особенностей функции $\theta(z)$ позволяет устранить одну трудность, которая без того могла бы возникнуть в рассматриваемой теории. Нельзя было не опасаться того, что она повиснет в воздухе вследствие тождественного обращения в нуль только что составленного относительного инварианта.

Действительно, это может произойти при некотором выборе функции H. Изучение тех случаев, когда подобное обстоятельство имеет место, было предметом нескольких позднейших работ. Но можно убедиться в том, что этого затруднения не встретится, если функция $H(z)$ имеет полюсы внутри круга: лёгко установить, что в каждом из этих полюсов или в какомнибудь из его гомологов тета-фуксова функция обращается в бесконечность. Противное может иметь место только в виде исключения, когда два или более полюсов функции $H(z)$ помещаются в точках, гомологичных друг другу; тогда нужно удостовериться в том, что соответствующие главные части взаимно не уничтожаются в ряде (52).

Эта проверка не представляет каких-либо затруднений.

Напротив, если функция $H(z)$ не имеет полюсов в фундаментальном круге и, следовательно, функция $\theta(z)$ голоморфна во всякой внутренней точке указанного круга (это — так называемая *тета-фуксова функция второго рода*), то на самом деле возникает вопрос, не равна ли функция $\theta(z)$ тождественно нулю. Действительно, оказывается, что все функции второго рода суть линейные комбинации некоторого конечного числа этих функций.

Можно показать, что существуют тета-фуксовы функции второго рода, не равные тождественно нулю *); легко выбрать функцию $H(z)$ так, чтобы в некоторой произвольно выбранной точке $z=z_0$ один из членов ряда превышал по абсолютному значению сумму всех прочих членов, вместе взятых.

Частное двух тета-фуксовых функций, соответствующих одному и тому же показателю m, но двум различным функциям $H(z)$, или, более общо, всякая однородная функция нулевой степени по отношению к нескольким тета-фуксовым функциям с одним и тем же весом m дает фуксову функцию, инвариантную для рассматриваемой группы.

Существует другой подход к рассмотренным нами функциям, предложенный Клейном. Он имеет своим исходным пунктом задачу Дирихле и свойства конформного отображения. При пользовании им в общем случае он требует сложных

*) См. сочинение Жиро [7], гл. I, пп. 15, 16.

рассмотрений, в которых важную роль играет альтернирующий метод, имеющий, как известно, большое значение для вопросов, связанных с задачей Дирихле. Этот подход, однако, становится весьма простым в случае, когда производящий многоугольник *) (который мы для возможно большего упрощения дальнейших рассуждений предположим состоящим из конечных в смысле рассматриваемой геометрии точек и, следовательно, имеющим только вершины первой категории) имеет ось симметрии в смысле рассматриваемой геометрии Лобачевского. Тогда, как это было объяснено выше, к группе перемещений может быть присоединено некоторое семейство H движений второго рода.

Рассмотрим в этом случае производящий «полумногоугольник», ограниченный, помимо сторон первоначального многоугольника, еще осью симметрии, т. е. производящий многоугольник группы $G+H$. Этот новый многоугольник будет иметь своими сторонами ряд прямых Лобачевского, т. е. ряд дуг окружностей, нормальных к абсолюту. Как известно, такой многоугольник может быть конформно отображен на верхнюю полуплоскость. Периметр нашего полумногоугольника будет соответствовать при этом отображении самой действительной оси; три точки на этой оси, соответствующие вершинам, могут быть выбраны произвольно — в частности, можно предположить, что два конца диагонали d, являющейся осью симметрии, перейдут в точки 0 и ∞, а образы других вершин будут иметь положительные абсциссы.

Применим к этой фигуре принцип симметрии или аналитического продолжения Шварца, играющий столь важную роль в теории конформного отображения. В силу этого принципа функция $\Phi(z)$, отображающая на верхнюю полуплоскость некоторую область E, к границе которой принадлежит отрезок окружности, переходящий в действительную ось, может быть продолжена на область E', симметричную области E относительно указанного отрезка окружности. Для этого следует приписать функции $\Phi(z)$ в точках ξ области E' значения, сопряженные ее значениям в точках z области E, симметричных точкам ξ.

*) Этот многоугольник предполагается, сверх того, односвязным, что, очевидно, имеет место, если он образован по методу излучения: тогда он является выпуклым,

Мы присоединим к исходному полумногоугольнику другой симметричный ему по отношению к оси d, т. е. присоединим другую половину производящего многоугольника группы G и продолжим функцию $\Phi(z)$ на весь этот многоугольник. Тогда очевидно, что благодаря принятому нами способу продолжения значения функции $\Phi(z)$ на сопряженных сторонах окажутся действительными и, следовательно, равными между собой. Если $z_1=f(z)$ — движение Лобачевского, переводящее одну из сопряженных сторон в другую (существование подобного движения Лобачевского вытекает из конгруентности этих сторон по Лобачевскому), то функции $\Phi(z)$ и $\Phi[f(z)]$ равны между собой во всех точках первой из указанных сторон; отсюда благодаря аналитичности этих функций вытекает, что они равны между собой во всей области существования. Таким образом, функция $\Phi(z)$ оказывается инвариантной относительно всех фундаментальных подстановок группы G, поскольку они определяются соответствием между сопряженными сторонами. По самому своему построению эта функция однозначна в исходном полумногоугольнике, включая и внутренние точки его сторон. Эта функция будет однозначна и в окрестности его вершин, если выполнено сформулированное выше условие относительно углов при вершинах, составляющих цикл. Действительно, тогда повторное применение принципа Шварца при отражении в сторонах, сходящихся к одной из этих вершин, не может привести к двум различным значениям функции $\Phi(z)$ в одной и той же точке. Определяемая таким образом функция Φ не имеет ни внутри многоугольника, ни на его границах существенно особых точек (так как в каждой из них, в том числе и в граничных, она имеет вполне определенные значения). Итак, эта функция Φ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функциям Фукса.

Отметим, что метод конформного отображения применялся и даже играл основную роль уже в мемуаре Шоттки, помещенном в журнале Крелля (том 83, 1877 г.), содержавшем зачатки интересующей нас теории. Там Шоттки рассматривал задачу конформного отображения многосвязных областей. Он хотел установить, что в отличие от односвязных областей конформное отображение одной n-связной области на другую n-связную область, вообще говоря, невозможно; оно осуществимо только при соблюдении некоторых условий. С этой целью он оперирует с областью, ограниченной n окружностями: одной — внешней и $n-1$ внутренними, не имеющими между собой общих точек. Эта область играет роль того полумногоугольника, о котором мы только что говорили. Получая отсюда путем инверсии по отношению к одному из внутренних кругов весь многоугольник, мы находим область, с помощью которой Шоттки строит поверхность Римана, конформно отображаемую на данную область.

Рассмотренный нами метод конформного отображения приводит — как в том простом случае, который мы только что рассмотрели, так и в общем случае (при внесении в этот метод необходимых изменений) — к образованию фуксовых функций. Однако следует заметить, что этот метод не имеет того значения, как предыдущий. Метод конформного отображения дает только доказательство существования функции, между тем как первый метод — через посредство рядов для тета-фуксовых функций — приводит к явному выражению искомых величин, строго говоря, дающему возможность их численного вычисления. Это подчеркивал Клейн *), хотя указывал, что тета-фуксовы функции представляются медленно сходящимися рядами и не могут с этой точки зрения выдержать сравнения не только с тета-рядами теории эллиптических функций, но и с классическими рядами, выражающими элементарные трансцендентные функции. Только будущее может решить, возможно ли в этом направлении достигнуть бóльших успехов, в частности путем изучения отношений между фуксовой группой и ее подгруппами **).

После того как фуксовы функции образованы, возникает задача изучения их аналитических свойств и тех приложений, которые они могут иметь к известным проблемам анализа. И здесь естественно следовать примеру классической теории эллиптических функций.

---

*) См. [23], стр. 416.

**) Как замечает Клейн (в книге [21], т. II, конец гл. 4), ряд (52) тем быстрее сходится, чем большую часть евклидовой площади фундаментального круга составляет площадь производящего многоугольника. Таким образом, эту сходимость наверное можно улучшать и часто значительно, если известна отдельно сумма группы членов ряда, относящихся к гомологам точки z, содержащимся в приведенной области одной из подгрупп.

Сначала мы обратимся к определению числа нулей фуксовой функции; для этого мы прежде должны найти число нулей тета-фуксовой функции. Под числом таких нулей мы должны естественно принимать число нулей, негомологичных между собой: из каждого такого нуля мы можем получать бесконечное множество других, прилагая все преобразования группы. Поэтому мы будем только искать нули, расположенные внутри определенного приведенного многоугольника; что касается нулей, расположенных на его границе, то по этому поводу придется ввести специальное ограничение *).

Метод, служащий для нахождения числа нулей фуксовой функции

$$\Phi(z)=\frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)}, \tag{72}$$

где $\theta_1(z)$ и $\theta_2(z)$ суть два тета-фуксовых ряда, можно применить к определению числа нулей функции

$$\Phi(z)-a=\frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)}-a=\frac{\theta_1(z)-a\,\theta_2(z)}{\theta_2(z)}, \tag{73}$$

где a — произвольная постоянная: этот метод позволит, таким образом, установить, *сколько раз функция Л. Фукса принимает каждое определенное значение внутри приведенной области.*

В случае односвязного приведенного многоугольника, обладающего осью симметрии в смысле геометрии Лобачевского и той фуксовой функции, с помощью которой производится рассмотренное конформное отображение, искомое число равно единице. Это вытекает из самого определения функции $\Phi(z)$; тут каждое число $\zeta=\zeta'+i\zeta''$ при $\zeta''>0$ является значением функции $\Phi(z)$ в одной и только одной точке z, лежащей внутри первого полумногоугольника; точно так же, каждое число $\zeta=\zeta'+i\zeta''$ при $\zeta'<0$ соответствует при отображении $\zeta=\Phi(z)$ одной и только одной точке z во втором полумногоугольнике. В этом случае определенная

---

*) Можно всегда предположить, что на периметре приведенного многоугольника нет нулей. Возможно, что для этого окажется необходимым произвести над ним одну из допустимых деформаций; указанный способ неприменим к эллиптическим или параболическим вершинам, в которых тета-фуксов ряд обращается в нуль.

таким образом фуксова функция $\Phi(z)$ вполне характеризует группу, т. е. все значения z_i переменной z, для которых

$$\Phi(z_i) = \Phi(z_0) \tag{74}$$

(где z_0 — некоторая произвольная точка фундаментального круга) получаются из z_0 различными преобразованиями группы. Таким образом, условие (74) необходимо и достаточно для гомологичности двух точек z.

В общем случае вопрос решается более сложно; однако и здесь можно показать, что искомое число a-значений функции $\Phi(z)$ конечно.

Это очевидно для производящих многоугольников, имеющих только вершины первой категории, потому что в таком многоугольнике функция мероморфна. Это имеет место — и на том же основании — в случае, когда приведенный многоугольник имеет стороны второго рода, если только концы последних являются обыкновенными точками группы. Наконец, можно показать, что число нулей остается конечным и тогда, когда производящий многоугольник имеет на абсолюте одну или несколько параболических вершин.

Подсчет числа нулей производится, как и в теории эллиптических функций, путем применения принципа аргумента к периметру производящего многоугольника (отрезая от этого многоугольника малые окрестности его эллиптических или параболических вершин, в которых функция обращается в нуль).

Необходимо, однако, существенным образом различать производящие многоугольники, лишенные сторон второй категории (первое, второе и шестое семейства Пуанкаре), от многоугольников, имеющих такие стороны (третье, четвертое и пятое семейства). В первом случае абсолют является купюрой, т. е. линией, на которой останавливается продолжение нашей функции; таким образом, это изучение, как мы и поступали до сих пор, ограничивается нашей плоскостью Лобачевского. Если, напротив, существуют стороны второго рода, все точки которых, за исключением концов, оказываются обыкновенными точками функции, то мы должны рассматривать эту функцию и вне фундаментального круга. В этом случае часть плоскости, лежащая вне фундаментальной окружности, должна рассматриваться как вторая плоскость Лобачевского, в которой мы можем изучать нашу группу так же, как мы изучали ее в первой. В этой второй плоскости снова определяется производящий многоугольник, за который можно принять отражение первого многоугольника относительно фундаментальной окружности. Для него мы должны снова образовать тета-фуксов ряд (52); бесконечно удаленная точка плоскости является внутренней, конечной точкой второй плоскости Лобачевского; наличие этой точки не создает каких-либо затруднений при доказательстве сходимости ряда (52), если только рассматриваемая точка не является ее гомологом *).

Для тета-фуксовых функций этого рода производящий многоугольник, который мы до сих пор рассматривали (целиком находящийся внутри фундаментального круга), теперь недостаточен и должен быть заменен областью, возникающей при объединении многоугольника D_0 (с его отражением в фундаментальной окружности — многоугольником D_0'). Теперь мы должны определить число нулей ряда (52) в области $D_0 + D_0'$ путем приложения принципа аргумента к ее периметру.

Но какой бы случай мы ни рассматривали, всегда искомое число нулей выражается через порядки циклов производящего многоугольника и веса тета-фуксовой функции, т. е. числа m, фигурирующего в ряде (52) **). Отсюда следует, что для функции (73) оно постоянно, каково бы ни было число a. Это, впрочем, с очевидностью следует из хорошо известного рассуждения (его Пуанкаре также применил к тета-функциям от многих переменных), которое показывает, что при непрерывном изменении параметра a всякий раз, когда нуль функции (73) входит в производящий многоугольник, пересекая одну из его сторон, другой нуль обязательно выходит через сопряженную сторону, и наоборот.

Таким образом, данная функция принимает всякое значение, за некоторыми исключениями, одно и то же число раз

---

*) Бесконечно удаленная точка плоскости z, будучи обыкновенной точкой группы, будет иметь свою приведенную область, периметр которой состоит целиком из конечных в смысле евклидовой геометрии точек плоскости z. В рассуждении, которым в настоящем случае доказывается сходимость ряда (52), величина S (фигурирующая в предыдущем рассуждении Пуанкаре) заменяется площадью области между этим периметром и фундаментальной окружностью.

**) См. Форд [3], стр. 121—125. (*Прим. ред.*)

в каждом приведенном многоугольнике $D_0 + D_0'$ или D_0 — смотря по тому, существуют стороны второго рода или нет.

Вообще, т. е. за исключением некоторых частных видов производящих многоугольников, это число не будет равно единице ни для одной из фуксовых функций, и поэтому ни одна из этих функций не характеризует полностью рассматриваемую группу. Для того чтобы получить полную характеристику производящей области, обычно бывает необходимым, так же как это делается в теории эллиптических функций, добавить к соотношению (74) другое аналогичное соотношение

$$\Psi(z_i) = \Psi(z_0), \tag{75}$$

где $\Psi(z)$ — другая фуксова функция, инвариантная относительно той же группы.

Функция $\Psi(z)$ тоже принимает конечное и определенное число раз одно и то же произвольное определенное значение в приведенной области.

Так же как и в случае эллиптических функций, этого факта достаточно, чтобы утверждать справедливость следующего основного предложения:

Две произвольные фуксовы функции, инвариантные относительно одной и той же группы, связаны между собой алгебраическим соотношением.

Эта основная теорема объясняет причину, по которой большая часть фуксовых групп не имеет инвариантных функций, принимающих только один раз каждое значение в производящем многоугольнике: если $t = t(z)$ была бы подобной функцией, то всякая другая фуксова функция, инвариантная относительно той же группы, представлялась бы как рациональная функция t. Поэтому если x и y суть две функции этого рода, то алгебраическое соотношение

$$F(x, y) = 0, \tag{76}$$

которому они удовлетворяют, должно быть уравнением уникурсальной кривой.

Род получающейся кривой играет, как это уже можно предвидеть сейчас, существенную роль и в общем случае.

Это свойство группы, как и предыдущие, легко обнаруживается при рассмотрении производящего многоугольника.

Пусть фуксовы функции

$$x = \Phi(z),\ y = \Psi(z) \tag{77}$$

совместно характеризуют группу; иначе говоря, пусть из уравнений

$$x_0 = \Phi(z_i) = \Phi(z_0),\ y_0 = \Psi(z_i) = \Psi(z_0) \tag{78}$$

следует, что точки z_i и z_0 гомологичны друг другу [по крайней мере в том случае, если (x_0, y_0) — обыкновенная точка кривой (76)]. Тогда поверхность Римана, соответствующая той же самой алгебраической кривой (76), будет находиться во взаимно однозначном соответствии с производящим многоугольником или, точнее говоря, с многообразием M, получающимся, как было указано выше, сгибанием этого многоугольника (многоугольника D_0, если нет сторон второго рода, или же двойного многоугольника $D_0 + D_0'$ в другом случае; в обоих случаях мы получаем замкнутое многообразие M).

Итак, род поверхности Римана должен быть равен роду многообразия M; этот последний без труда определяется классическими методами геометрии с помощью обобщенной теоремы Эйлера. Он равен нулю для рассмотренного выше производящего многоугольника, обладающего осью симметрии в смысле геометрии Лобачевского, по крайней мере в том случае, когда ось симметрии является диагональю приведенного многоугольника. Тогда, сгибая около этой диагонали указанный многоугольник так, чтобы совпадали стороны, симметричные по отношению к этой диагонали, мы получим фигуру, топологически эквивалентную сфере. Этим и объясняется тот факт, что в данном случае существует фуксова функция, принимающая на указанном многообразии один и только один раз каждое значение, действительное или мнимое.

Все могущество новой теории становится особенно ясным, при ее сравнении с теорией эллиптических функций.

Оперируя подобным же образом с группой (14) и функциями $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ Вейерштрасса, мы приходим к алгебраическому соотношению рода 1; обратно, всякое алгебраическое соотношение рода 1 может быть представлено в форме (77) с помощью эллиптических функций, если ввести в качестве параметра подходящим образом выбранный эллиптический интеграл первого рода.

Но, в то время как возможность параметрического представления с помощью эллиптических функций ограничена, таким образом, алгебраическими кривыми рода 1, род фуксовой группы и, следовательно, алгебраических кривых, ей соответствующих, может быть каким угодно.

Но имеет место не только это обобщение. Пуанкаре доказал, что определяемая уравнением (76) алгебраическая кривая может быть какой угодно кривой своего рода, — необходимо лишь подходящим образом выбрать фуксову группу.

Перейдем теперь к рассмотрению той связи, которая, как мы уже предвидели, существует между занимающими нас функциями и интегрированием линейных дифференциальных уравнений. Эта связь была причиной появления всей теории и поводом для того названия, которое ей дал Пуанкаре.

Действительно, теория наших функций тесно связана с найденными Л. Фуксом свойствами линейных дифференциальных уравнений. Вслед за хорошо известными результатами, полученными им для особых точек подобных уравнений, Л. Фукс поставил вопрос об условиях, при которых, решая относительно x уравнение

$$z = z(x) = \frac{v_1(x)}{v_2(x)}, \tag{79}$$

мы получим x в качестве однозначной функции z. Здесь $v_1(x)$ и $v_2(x)$, как и прежде, — два различных решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2v}{dx^2} + p(x)\frac{dv}{dx} + q(x)\,v = 0. \tag{80}$$

Но мы уже видели, что функция $z(x)$, определенная равенством (79), удовлетворяет дифференциальному уравнению третьего порядка

$$\{z\}_x = \frac{d^2}{dx^2}\left(\ln\frac{dz}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{dz}{dx}\right)\right]^2 = 2q - \frac{p^2}{2} - p', \tag{81}$$

где p, q — коэффициенты дифференциального уравнения (80).

Обратно, каждому данному уравнению типа (79) всегда соответствует бесконечное множество дифференциальных уравнений вида (80); это вполне естественно, так как z не изменяется, если мы умножим v на произвольную функцию от x. В частности, мы можем, пользуясь этим произволом, положить в уравнении (80) $p=0$. С другой стороны, известно, что любые два решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2v}{dx^2}+q(x)\,v=0 \tag{82}$$

связаны друг с другом соотношением

$$v_2\frac{dv_1}{dx}-v_1\frac{dv_2}{dx}=c, \tag{83}$$

где c — некоторая произвольная постоянная, которую мы будем считать равной 1 (так как всегда можно умножить функцию v_1 на подходящую постоянную).

Левая часть равенства (83) является числителем выражения для производной $\frac{dz}{dx}$; поэтому соотношение (83) играет большую роль в работах Л. Фукса. Благодаря ему

1) достаточно знать функцию z, чтобы найти оба решения v_1 и v_2 дифференциального уравнения (82); из соотношения (79) действительно находим, что

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{v_2^2}, \tag{84}$$

откуда

$$v_2=\sqrt{\frac{dx}{dz}},\quad v_1=z\sqrt{\frac{dx}{dz}}; \tag{85}$$

2) обыкновенная точка уравнения (82) не может быть критической точкой (точкой разветвления) для функции $x(z)$; действительно, по предположению, z — регулярная функция x, и к ней применима теорема о неявных функциях (так как производная $\frac{dz}{dx}$ отлична от нуля).

С другой стороны, необходимое и достаточное условие для того, чтобы в окрестности некоторой особой точки дифференциального уравнения (82) функция $x(z)$ была однозначной, непосредственно вытекает из прежних результатов Л. Фукса. Это условие заключается в том, что разность корней известного определяющего уравнения*) должна равняться $\frac{1}{p}$, где p — целое положительное число. Это целое число может быть и бесконечно большим; в последнем случае z является логарифмической функцией x, а следовательно, x представится экспоненциальной функцией z, т. е. в виде простейшей автоморфной функции.

В общем случае величина $x(z)$ оказывается инвариантной относительно преобразований, составляющих «группу дифференциального уравнения (80)», т. е. снова автоморфной функцией. При этом под **группой дифференциального уравнения** типа (80) понимается группа, образуемая преобразованиями (15) $\left(\text{или соответствующими им преобразованиями переменной } z = \frac{v_1}{v_2}\right)$ интегралов этого дифференциального уравнения при перемещениях переменного x вдоль всевозможных замкнутых путей.

Упомянутая выше система условий Фукса оказывается необходимой и достаточной; этим выясняется наиболее существенное в рассматриваемом вопросе.

Пуанкаре в самом начале своих исследований по автоморфным функциям указал Клейну на возможность наличия у функций, получающихся в теории Л. Фукса, особенностей, сходных с теми, которые нам встречались в предыдущем рассмотрении. Для Пуанкаре этим самым была поставлена задача интегрирования линейных дифференциальных уравнений с помощью введения группы этого уравнения. Пуанкаре поэтому считал, что он обязан Л. Фуксу происхождением своих работ, о чем он неоднократно и писал Клейну.

Обратно, если исходить из фуксовой группы и из фуксовой функции $x(z)$, соответствующей этой группе, то связь с линейным дифференциальным уравнением обнаруживается без труда. Мы знаем, что шварцева производная $\{z\}_x$ сама инвариантна по отношению к группе, т. е. не изменяет своего значения, если мы переходим от точки с аффиксом z к одному из ее гомологов. Но так как эта производная является в то же время мероморфной функцией z [после замены

*) См. Форд [3], стр. 312—318. (*Прим. ред.*)

$x = x(z)$], то она будет фуксовой функцией, а следовательно, и алгебраической функцией от x (другой фуксовой функции). Поэтому, если мы составим по формулам (85) величины v_1 и v_2, то они благодаря соотношению (79) будут удовлетворять (по отношению к x) одному и тому же дифференциальному уравнению вида (80). В нем коэффициент q окажется алгебраической функцией x в силу уже упомянутого соотношения (81).

Рассматривая эти обстоятельства, Пуанкаре естественно пришел к обратной задаче — переходу от данного дифференциального уравнения (82) к соответствующей фуксовой функции (предполагая, что таковая существует) и к еще более общей проблеме — к вопросу о связи уравнения (82) с уравнением, интегрируемым в фуксовых функциях. Но, прежде чем говорить об этой важной проблеме, увенчавшей весь ряд исследований, мы дадим резюме параллельной теории клейновых функций.

ГЛАВА IV

КЛЕЙНОВЫ ГРУППЫ И ФУНКЦИИ

В случае, когда коэффициенты рассматриваемых дробно-линейных преобразований не являются действительными или, в более общем выражении, когда эти преобразования не оставляют неизменным некоторый фундаментальный круг, с первого взгляда может показаться, что все предшествовавшие рассуждения, связанные с геометрией Лобачевского, оказываются неприложимыми.

Между тем это не так: результат, который не может быть достигнут в этом случае с помощью плоской геометрии Лобачевского, был получен Пуанкаре с помощью геометрии Лобачевского трех измерений *).

Дробно-линейные подстановки на плоскости $z = X + iY$, из которых состоит данная группа G, как мы знаем, представляются в виде комбинаций инверсий относительно окружностей плоскости z (эти окружности в частном случае могут оказаться прямыми линиями). Подобные инверсии относительно окружностей могут рассматриваться как проявление на данной плоскости инверсий в пространстве переменных X, Y, Z по отношению к сферам, имеющим указанные окружности своими большими кругами. Мы будем рассматривать данную плоскость z как абсолют пространственной геометрии Лобачевского, которую мы установим в одном из полупространств ($Z > 0$ или $Z < 0$), ею ограниченных. В этой геометрии половины всех сфер с центрами на данной плоскости, относительно которых происходят инверсии, играют роль

*) См. Голубев [20], стр. 419—424. (*Прим. ред.*)

плоскостей; соответствующие инверсии сводятся к отражениям в них в смысле рассматриваемой геометрии Лобачевского.

Всякое преобразование, являющееся результатом комбинации нечетного числа инверсий, будет движением Лобачевского второго рода. Их совокупность мы будем попрежнему обозначать буквой H.

Всякая операция данной группы G дробно-линейных подстановок может быть получена с помощью двух или четырех инверсий. В случае двух инверсий мы получаем эллиптические, параболические или гиперболические подстановки, уже рассмотренные нами. Первые будут сохранять не только, как было указано ранее, две точки плоскости — две двойные точки, но при переходе ко всему пространству переменных X, Y, Z — всю окружность, проходящую через них и ортогональную к плоскости z, а при рассмотрении геометрии Лобачевского в полупространстве (с одной из сторон плоскости z) — полуокружность, ортогональную к плоскости. Две двойные точки эллиптического преобразования занимают на этой окружности диаметрально противоположное положение. Эта полуокружность является прямой Лобачевского, и эллиптическая подстановка определяет вращение Лобачевского вокруг нее как оси.

Параболическая подстановка при переходе к пространству даст комбинацию инверсий по отношению к двум сферам с центрами в плоскости z, касающимся одна другой в точке этой плоскости. Она попрежнему может рассматриваться как обобщенное поступательное перемещение со всеми теми свойствами, которые оно имело в плоскости.

Точно так же гиперболическая подстановка при переходе к пространству определит преобразование, которое снова естественно рассматривать как обобщенное расширение. Оно сохраняет дуги окружностей, проведенных через двойные точки A и B данной гиперболической подстановки. Если M — произвольная точка подобной дуги, M^* — точка той же дуги, являющаяся образом первой при рассматриваемом отображении, то ангармоническое отношение (AMM^*B) имеет определенное, фиксированное для данного преобразования, значение.

Группы преобразований пространства, соответствующие совокупности степеней гиперболической или параболической подстановки, будут, как и прежде, собственно разрывными группами. Их единственными особыми точками будут двойные точки исходных подстановок. Соответствующие приведенные области будут аналогичны уже найденным для плоскости; для группы, порожденной параболической подстановкой, такой областью будет объем, ограниченный двумя сферами с центрами на абсолюте, касающимися друг друга в двойной точке преобразования, и куском абсолюта, заключенным между ними. Для гиперболической подстановки аналогичная область заключена между абсолютом и двумя полусферами с центрами на абсолюте, для которых предельными точками Понселе являются двойные точки подстановки. И в этом случае двойные точки (так же как на плоскости) лежат вне приведенной области. Эллиптическая подстановка будет определять своими степенями собственно разрывную группу только в том случае, если угол поворота равен произведению 2π на несократимую дробь $\frac{p}{q}$. В этом случае соответствующая приведенная область ограничена двумя частями сфер, имеющих центры на абсолюте, заключенными каждая между осью поворота и абсолютом. Угол между этими сферами равен $\frac{2\pi}{q}$.

Но в рассматриваемом нами случае нет основания ожидать, что исходные подстановки могут быть только эллиптическими, параболическими или гиперболическими; напротив, очевидно, что здесь могут встретиться и локсодромические подстановки. Действительно, доказано *), что необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторая группа дробно-линейных подстановок не содержала локсодромических подстановок, состоит в том, чтобы все преобразования этой группы оставляли инвариантным какой-то круг. Мы предполагаем теперь, что условие, вообще говоря, не выполнено.

Новые собственно разрывные группы, вводимые теперь под названием *клейновых*, могут иметь особенности только на абсолюте. Это вытекает из отсутствия у них бесконечно малых подстановок и доказывается так же, как для фуксовых групп. Однако и здесь проявляется различие, существующее между собственно разрывной группой и группой, не содержащей бесконечно малых преобразований. Точно так же, как

---

*) См. заметку Вакселя [24].

существуют фуксовы группы, являющиеся собственно разрывными для комплексных значений переменных, но перестающие быть таковыми на действительной оси, существуют и группы движений Лобачевского, собственно разрывные в пространстве и не являющиеся таковыми ни в одной точке абсолюта *).

Наиболее известная из таких групп изучена Пикаром. Она состоит из всех дробно-линейных подстановок (9) с коэффициентами вида $A' + iA''$, где A' и A'' суть действительные целые числа (положительные, отрицательные или нуль), причем для подстановки (9), входящей в группу,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i, \quad \pm 1.$$

Часть подстановок группы G состоит из целых линейных подстановок, сохраняющих бесконечно удаленную точку плоскости z. Они составляют подгруппу G' группы G и соответствуют нулевым значениям коэффициента γ в формуле (9). В силу условия, наложенного на величину $\alpha\delta - \beta\gamma$, произведение модулей коэффициентов α и δ для такой подстановки должно равняться единице; таким образом, коэффициенты α и δ могут быть равны только ± 1 или $\pm i$. Итак, подстановки этой подгруппы имеют вид

$$z_1 = \alpha z + \beta' + i\beta'', \tag{86}$$

где α имеет одно из четырех значений ± 1, $\pm i$, а β' и β'' суть любые целые числа.

Полученная подгруппа с точки зрения евклидовой геометрии на плоскости z состоит из поступательных перемещений и вращений на угол, равный половине или четверти полного оборота. Мы получили, очевидно, группу II таблицы (37) (стр. 59) собственно разрывных групп евклидовых перемещений — ту группу, при которой сохраняется решетка, составленная точками с целыми координатами.

Прочие подстановки группы Пикара могут, как мы видели, рассматриваться как комбинации симметрий относительно прямых плоскости z (или в пространстве относительно плоскостей, перпендикулярных к абсолютной плоскости) с одной един-

*) См. по этому поводу выше, стр. 77. (*Прим. ред.*)

ственной инверсией относительно окружности (в пространстве относительно сферы), имеющей центром точку $-\frac{\delta}{\gamma}$ [см. формулу (47)] радиуса $\mu = \frac{1}{|\gamma|^2}$ [см. формулу (48); в ней надо положить $\Delta = 1$]. Так как $\gamma = \gamma' + i\gamma''$, где γ' и γ'' — целые числа, то радиус окружности (или сферы) Σ, относительно которой происходит эта инверсия, не может превышать единицы; и если этот радиус меньше единицы, то он не может быть больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Первый случай возможной окружности (или сферы) Σ_1, отвечающий значению $\mu = 1$, получается, когда одно из целых чисел γ' и γ'' равно ± 1, другое же равно нулю. Тогда центр окружности (или сферы) Σ_1 является одной из вершин квадратов, входящих в состав нашей решетки. Второй случай, отвечающий значению $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получается, когда каждое из целых чисел γ' и γ'' равно ± 1, так что можно положить $\gamma = 1 \pm i$; тогда одно из целых чисел δ' и δ'' (где $\delta = \delta' + i\delta''$) должно быть непременно четным, другое нечетным, так как иначе [ввиду того, что $2i = (1 + i)^2$] целые комплексные числа γ и δ имели бы общий множитель $1 + i$, что невозможно при данных в качестве возможных значениях определителя Δ. Окружность (или сфера) Σ_2, получающаяся в этом втором случае, следовательно, будет иметь своим центром середину какой-то стороны решетки.

Нетрудно показать, что рассматриваемая группа собственно разрывна в пространстве: построим для этого ее приведенную область. Между гомологами некоторой точки P будем искать точку, наиболее удаленную от абсолютной плоскости. Ясно, что координата Z любой точки остается неизменной при преобразованиях подгруппы G'; всякое другое преобразование группы G увеличивает или уменьшает эту координату, смотря по тому, будет ли исходная точка лежать внутри или вне сферы Σ, относительно которой происходит инверсия. Итак, необходимым и достаточным условием того, что гомолог P_0 точки P имеет наибольшую координату Z, является принадлежность этой точки P_0 к области D, внешней по отношению ко всем сферам Σ, которые отвечают преобразованиям, входящим в состав группы G.

Легко показать, что граница области D состоит исключительно из частей сфер Σ_1, т. е. сфер Σ, радиус которых равен 1. Действительно, четыре такие сферы, наиболее близкие друг к другу, т. е. имеющие центры в вершинах одного и того же квадрата Q нашей решетки, пересекаются в точке с аппликатой, равной $\frac{1}{\sqrt{2}}$, лежащей точно над центром квадрата Q.

Эта точка, наиболее близкая к абсолютной плоскости из всех точек замкнутой области D, будет вместе с тем внешней точкой по отношению ко всем сферам Σ_1 и тем более внешней ко всем другим сферам Σ, радиус которых меньше радиуса сфер Σ_1. Напомним, что сферы радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеют свои центры в серединах сторон нашей решетки.

В области D или по крайней мере на границе этой области каждая произвольная точка P, конечно, будет иметь гомологи. Именно там находятся те ее гомологи, для которых Z имеет наибольшую величину *). Число этих гомологов будет бесконечно велико; все они получаются один из другого с помощью подстановок подгруппы G'.

Чтобы получить окончательно приведенную область группы G, остается только привести область D по отношению к подгруппе G', т. е. взять ее пересечение с прямой призмой, имеющей своим основанием приведенный многоугольник группы G' в плоскости z (эту призму можно всегда выбрать так, что она пересечет только одну из сфер Σ_1).

---

*) Необходимо, однако, доказать, что максимум Z действительно достигается, т. е. что не существует бесконечного ряда гомологов точки P, координаты Z которых стремятся, возрастая, к пределу (конечному или бесконечному), не достигая его. В последнем случае соответствующие точки должны были бы иметь по крайней мере одну предельную точку, являющуюся особой точкой группы и потому лежащую на абсолюте. Всегда можно предположить, что координаты X и Y этих предельных точек конечны (ибо их можно привести по отношению к подгруппе G'). Тогда пределом координаты Z может быть только нуль или бесконечность. Первая возможность исключается, так как дело идет о максимуме, вторая — потому, что, как установлено выше, значение Z может только убывать при операциях группы, коль скоро оно превзошло единицу.

Таким образом, группа G Пикара собственно разрывна в пространстве переменных X, Y, Z. Отсюда вытекает, что установленное выше различие между значениями, которые могли бы придаваться термину «собственно разрывная группа», необходимо не только по отношению к группам дробно-линейных подстановок с действительным аргументом, как мы это видели на примере группы Эрмита, но и в плоскости комплексных чисел.

Действительно, группа Пикара не будет собственно разрывной ни в одной точке абсолютной плоскости. Последнее вытекает из того факта, что приведенная область группы Пикара, имея с плоскостью z только одну общую точку в бесконечности, не содержит какой-либо конечной части этой плоскости z. Надлежащее рассуждение показывает, что в любой окрестности точки P плоскости z находится не только сколь угодно много гомологичных пар точек M, M' пространства, но и аналогичных пар точек m, m', расположенных на абсолютной плоскости.

Итак, наша группа не является собственно разрывной ни в одной точке плоскости z и в то же время она не имеет бесконечно малых подстановок и оказывается собственно разрывной во всех точках пространства, лежащих вне этой плоскости.

Напротив, как и раньше, группа, составленная из движений Лобачевского и не содержащая бесконечно малых преобразований, не имеет ни одной особой точки вне абсолютной плоскости. Чтобы это установить, нужно только несколько дополнить доказательство, данное для случая плоскости, присоединяя к гипотетической особой точке A не одну, но две точки B, C, не лежащие на одной прямой Лобачевского с первой.

Группы, являющиеся, подобно группе Пикара, собственно разрывными во всем пространстве, за исключением одной плоскости, очевидно, можно использовать для построения в случае функций многих переменных теории, аналогичной изложенной выше.

Приведенные или производящие многогранники подобных групп, сходные с тем, который только что был образован, позволяют построить всю группу, определив сначала фундаментальные подстановки с их взаимными соотношениями.

Они приведут к распределению вершин в циклы [мы должны будем теперь расширить соответствующим образом значение этого слова *)]; каждый из этих циклов различных родов даст соотношение между фундаментальными подстановками и вместе с тем необходимое условие для существования группы и для того, чтобы она была собственно разрывной. Обратно, если эти условия будут выполнены, последовательные образы производящего многогранника заполнят — и заполнят только однократно — область, которая по тем же основаниям, как и раньше, будет всем полупространством. Наконец, для такой группы могут быть построены инвариантные функции от X, Y, Z; метод, который служил выше для этой цели, может быть использован и здесь. Вместо множителей $\left(\frac{dz_k}{dz}\right)^m$, фигурировавших в ряде (52), мы теперь возьмем подходящие степени якобианов преобразований группы.

Для того чтобы обеспечить сходимость получаемого таким образом ряда, может понадобиться инверсия всей фундаментальной области; в результате этой инверсии наше полупространство заменится сферой конечного радиуса.

Предположим, напротив, что наша группа собственно разрывна и в абсолютной плоскости; тогда прозводящий многогранник должен иметь с этой плоскостью общую грань, аналогичную сторонам второго рода производящих фуксовых многоугольников. Подобная грань A должна быть ограничена дугами окружностей конечных размеров; если бы длины этих дуг как угодно близко приближались к нулю, то нашлась бы малая сфера, имеющая центр в абсолютной плоскости и пересекающая бесконечное множество образов производящего многогранника группы.

Последний вывод приводит нас к противоречию с исходным предположением.

Теория такой группы сходна с предыдущей; в частности, она включает и построение производящего многоугольника на плоскости z методом излучения. Таким многоугольником, очевидно, окажется область, которую мы только что назвали A. Она образуется в пересечении абсолютной плоскости z с производящим многогранником в пространстве.

---

*) См. Жиро [7], стр. 31, п. 25.

Эта группа, далее, приведет к системе тета-клейновых, а затем и клейновых функций; эти последние будут связаны между собой алгебраическими соотношениями — факт, еще отмеченный Шоттки в упомянутом мемуаре 1877 г., — и будут удовлетворять дифференциальным уравнениям с алгебраическими коэффициентами.

Теория клейновых функций важна не только для математика, интересы которого сосредоточены на теории аналитических функций: ее результаты имеют значение и в теории функций действительного переменного и существенны для изучения кривых Жордана.

Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть специальную категорию клейновых групп. Рассмотрим различные инверсии в плоскости относительно окружностей

$$C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$$

и скомбинируем их всевозможным образом и в различном порядке. Мы получим группу $G+H$, которая будет заключать дробно-линейные подстановки как первого, так и второго рода (так как рассматриваемые инверсии соединяются в преобразования как в четном, так и в нечетном числе).

Характер получающейся группы будет зависеть от относительного расположения данных окружностей.

Исключим прежде всего случай пересекающихся окружностей; в этом случае получающаяся группа не всегда будет собственно разрывной *).

Если данные окружности не имеют общих точек, то получается случай, рассмотренный Шоттки **). Мы приходим к клейновой функции (или, если существует окружность, ортогональная к данным окружностям, - к фуксовой функции; эта функция осуществляет конформное отображение области, получающейся из плоскости после удаления внутренностей рассматриваемых окружностей с присоединением ее образа при одной инверсии на риманову поверхность рода $n-1$).

Мы рассмотрим промежуточный случай, когда взятые нами окружности последовательно касаются друг друга и составляют

*) См. заметку Пуанкаре [25].

**) См. Голубев [20], стр. 424—427. (*Прим. ред.*)

замкнутую цепь (рис. 3), причем каждая из этих окружностей касается предыдущей и последующей.

Предположим для определенности, что все эти касания являются внешними (этого всегда можно достигнуть с помощью подходящей инверсии, примененной ко всей фигуре). Каждая из двух областей — D_0 и D_0', внутренняя и внешняя

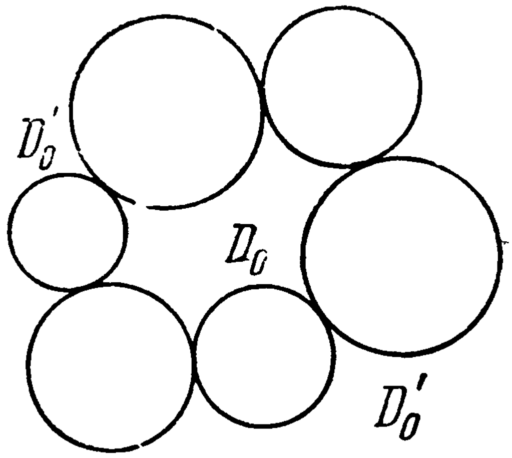

Рис. 3.

по отношению к цепи, — составит производящий многоугольник нашей группы или, если мы ограничимся группой G, полумногоугольник.

Инверсия по отношению к какой-нибудь из наших окружностей, например к C_0, даст новую цепь окружностей $C_{0,1}$, $C_{0,2}$, ..., $C_{0,n-1}$; применяя ту же операцию ко всем данным окружностям, мы получим вторичную цепь из $n(n-1)$ новых окружностей, внутреннюю по отношению к первоначальной цепи. Из этой вторичной цепи с помощью инверсии мы в свою очередь получим цепь третьего порядка, опять-таки внутреннюю по отношению ко вторичной — и так далее неопределенно большое число раз. Мы убедимся без труда в следующем: радиусы получающихся таким образом окружностей стремятся к нулю по мере того, как мы переходим к цепям высшего порядка; точки же соприкосновения этих окружностей стремятся к некоторой линии L, отделяющей область, покрытую образами (при проведенных инверсиях) первоначальной внутренней области D_0, от области, покрытой образами внешней области D_0'. На этой линии L лежат все точки соприкосновения последовательно получающихся окружностей и все предельные точки множества указанных точек соприкосновения. Каждая из этих предельных точек лежит внутри бесконечного множества кругов, входящих в цепи неограниченно возрастающего порядка.

Полученная таким образом линия является кривой Жордана, т. е. декартовы координаты ее точек могут быть заданы непрерывными функциями некоторого действительного параметра t. Пусть, например, $n-1=10$. Мы припишем последовательным точкам касания первоначальных окружностей значения параметра

$$t=0;\ 0{,}1;\ \ldots;\ 0{,}9;\ 1{,}0,$$

а последовательным точкам касания окружностей вторичной цепи, лежащим, например, внутри круга C_0, — значения параметра

$$t=0{,}01;\ \ldots;\ 0{,}09.$$

Подобным образом мы поставим в соответствие всем точкам касания окружностей, принадлежащих к последовательным цепям, в качестве значений параметра t десятичные дроби с конечным числом знаков. Ясно, что точка кривой, соответствующая десятичной дроби с бесконечным числом знаков, явится пределом некоторого ряда точек, соответствующих каким-то конечным десятичным дробям; такой ряд точек сходится по построению. Так как точки, соответствующие значениям t, совпадающим вплоть до p-го десятичного знака, все находятся в одной и той же окружности, радиус которой стремится к нулю вместе с $\frac{1}{p}$, то координаты точек кривой L будут непрерывными функциями параметра t.

Для значения $n-1$, отличного от 10, можно действовать аналогично, используя другую соответствующую систему счисления.

Тот случай, когда десятичная дробь будет периодической, заслуживает особого упоминания. Этот случай соответствует двойным точкам некоторой подстановки группы; указанные точки получаются как предельные точки образов одной и той же точки для степеней соответствующей подстановки.

Кривая L не имеет двойных точек. Действительно, двум значениям t, отличающимся друг от друга первым знаком, отвечают точки, из которых одна лежит внутри одного из первоначальных кругов, другая же — или в другом круге, внешнем по отношению к первому или по крайней мере касающемся этого первого круга извне. Двум значениям t, отличающимся друг от друга вторым знаком, соответствуют точки, не расположенные в одном и том же вторичном круге, и т. д.

Эта кривая Жордана, если она не является окружностью, т. е. если мы не имеем дела с фуксовой группой, может иметь весьма сложную форму (которую наше воображение и не может себе представить). Самый факт существования подобных кривых был неизвестен геометрии, пока современная наука не выдвинула их на сцену. В точке касания двух окружностей цепи (точка, соответствующая десятичной дроби с конечным числом знаков) полученная нами кривая имеет касательную, а именно — общую нормаль к двум касающимся в этой точке окружностям. Однако можно без труда показать, что кривая L в этой точке не может иметь определенного радиуса кривизны.

Напротив, в других точках (если не во всех, то в бесконечном их множестве) полученная нами кривая не может иметь определенной касательной. Это вытекает из того, что 1) кривая L по самому своему определению инвариантна относительно группы; 2) группа необходимо включает (см. упомянутую выше теорему Вакселя) локсодромические подстановки T, двойные точки которых принадлежат кривой L.

Действительно, пусть P — подобная двойная точка, M — какая-нибудь другая точка кривой L, не совпадающая со второй двойной точкой той же подстановки. Линия L будет содержать все образы точки M, получающиеся из нее с помощью последовательных степеней преобразования T. Эти точки будут стремиться к точке P, но так как подстановка T — локсодромическая, то последовательные образы точки M — точки M_i — приближаются к точке P по спирали; последовательно получающиеся векторы PM_i составляют друг с другом углы, не соизмеримые с π.

Конечно, в настоящее время известно много примеров кривых, не имеющих касательных, но рассмотренный нами случай получения подобной кривой является до сих пор—или, точнее, до новейших исследований по итерации функций *)—

*) Напоминаем, что статья Ж. Адамара была написана в двадцатых годах настоящего столетия. (*Прим. ред.*)

первым и единственным фактом появления такой кривой в задаче, которая не была поставлена специально для получения кривой подобного типа. Все другие до сих пор известные примеры кривых без касательных были, напротив, искусственно созданы в целях, если позволено так выразиться, математической тератологии (учение об уродствах); эти примеры показывали, что кривые без касательных существуют и что их можно найти, если их искать. Здесь же мы видим, что на них можно натолкнуться и не отыскивая их, что они необходимо появляются при изучении столь классической проблемы, как проблема интегрирования линейных уравнений с алгебраическими коэффициентами. В то же время этот факт показывает всю глубину указанной проблемы и всю трудность исследований, предпринятых для ее разрешения.

ГЛАВА V

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Переходим теперь к основной задаче, поставленной предыдущей теорией.

Как мы видели, с каждой фуксовой группой связана алгебраическая кривая, координаты точек которой параметрически представляются с помощью двух фуксовых функций, инвариантных по отношению к этой группе. Эта кривая может быть сколь угодно высокого рода.

Может ли быть представлена таким образом всякая алгебраическая кривая?

С другой стороны, каждая фуксова функция приводит к дифференциальному линейному уравнению с алгебраическими коэффициентами. Для этого надо данную фуксову функцию принять за независимую переменную и пытаться представить первоначальную независимую переменную как отношение двух интегралов некоторого обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Может ли быть этим путем проинтегрировано всякое обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с алгебраическими коэффициентами?

Такова двойная исключительно важная проблема, которую поставил себе Пуанкаре при самом начале своих исследований и решение которой он дал *) с помощью одного из самых деликатных методов анализа.

Напомним, что доказанная им теорема, относящаяся к алгебраическим кривым, может рассматриваться как частный

*) См. статью Пуанкаре [26].

случай его же знаменитой теоремы об униформизации, применимой к аналитическим функциям самой общей природы *). В силу этой теоремы, если y — некоторая аналитическая функция x, вообще говоря, не однозначная, то всегда существует вспомогательная переменная t, с помощью которой можно представить x и y как аналитические (с точностью до полюсов) *однозначные* функции от t.

Выбор вспомогательной переменной t, применимой для униформизации данной алгебраической кривой (рода, не равного нулю), в высшей степени произволен, так как ничто не мешает заменить подобный параметр t однозначной функцией t или другого аналогичного переменного. Среди всех этих параметров наиболее удобны и важны те, в качестве однозначных функций которых может быть представлен любой другой «униформизирующий параметр» данной кривой.

Однако и такой параметр можно определить только с точностью до дробно-линейного преобразования. Последнее должно конформно отображать на себя, вообще говоря, не многосвязную риманову поверхность, связанную с данной аналитической функцией $y(x)$, а ее *поверхность наложения*; эта поверхность получается из данной римановой поверхности, если ее покрыть бесконечным множеством листов, соответствующим топологически различным путям, ведущим на ней к ее точкам из некоторой ее же фиксированной точки. Переход от точки, лежащей на одном листе этой поверхности, к соответствующей точке в другом ее листе как раз соответствует дробно-линейному преобразованию избранной переменной t. Таким образом, мы получаем преобразования фуксовой группы, оставляющие инвариантными функции $x(t)$ и $y(t)$.

Можно получить тот же результат и для решений данного на этой римановой поверхности дифференциального линейного уравнения, присоединяя к униформизируемым функциям его интегралы или, вернее, их отношение.

Для решения поставленной задачи Пуанкаре избрал путь, при котором не только сразу делается очевидной природа возникающих здесь трудностей, но именно она становится исходным пунктом исследования.

---

*) См. Курант [27], гл. IX, стр. 336—347. (*Прим. ред.*)

Выше мы указывали (см. стр. 57), что при обращении эллиптических интегралов, связанных с некоторой алгебраической кривой первого рода, для получения однозначных функций следует брать за независимое переменное не произвольный эллиптический интеграл, относящийся к данной кривой, а обязательно эллиптический интеграл первого рода. Подобным же образом не всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с алгебраическими коэффициентами определяет в виде отношения своих интегралов такую функцию $z(x)$, что ее обратная функция $x(z)$ является фуксовой функцией.

Вопрос о том, когда это будет иметь место, не может быть решен, исходя только из тех принципов, которые лежат в основе исследования Л. Фукса, послужившего, как мы уже говорили, поводом к работам Пуанкаре.

Для получения искомой фуксовой функции $x(z)$ мы должны ввести в рассмотрение новый элемент, весьма важный, но и не менее трудный для изучения, а именно — соотношение между фундаментальными интегралами, относящимися к двум различным особым точкам. Таким образом, к условиям, первоначально найденным Л. Фуксом, присоединяются новые, настолько же скрытые, насколько первые были очевидны.

Пусть нам дано дифференциальное уравнение

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + q(x, y)v = 0, \qquad (87)$$

где q — рациональная функция переменных x, y и y — алгебраическая функция x, определяемая уравнением

$$F(x, y) = 0. \qquad (88)$$

Следуя Пуанкаре, необходимо ассоциировать с уравнением (E) другое уравнение (E_1), соответствующее некоторой фуксовой группе и построенное так, что его разрешение приводит к интегрированию данного уравнения (поскольку оно определяет необходимую для этого фуксову функцию).

Если мы начнем с подсчета неопределенных коэффициентов, то можем констатировать, что число параметров, находящихся в нашем распоряжении, точно равно числу условий, которым нам нужно удовлетворить. Другими словами, нужно установить соответствие между двумя многообразиями M и M_1 одного и того же измерения. Сверх того, Пуанкаре показал, что если уравнение (E_1) существует, то оно — единственное; иначе говоря, уравнения, определяющие точку многообразия M, когда дана соответствующая точка многообразия M_1, не могут иметь более одного решения. Теперь в силу классической теоремы, позднее найденной Шенфлисом *), мы знаем, что существование единственного решения системы, о которой идет речь, возможно только при выполнении некоторых добавочных условий. С этим обстоятельством сталкивается и Пуанкаре. Он вынужден рассмотреть только что упомянутые дополнительные условия, или, другими словами, изучить края многообразий M и M_1.

Мы не будем входить в подробности этого смелого «метода непрерывности», с помощью которого был вполне решен поставленный вопрос **). Этот метод не использует соображений, на которые мы хотим обратить внимание читателя. Напротив, именно эти соображения играют большую роль в другом методе, предложенном позже для той же цели Шварцем ***).

Путь, предложенный Шварцем, состоит в том, что вместо фуксовой функции $x(z)$ определяется как функция z, величина

$$U = e^{u(\xi, \eta)} \tag{89}$$

— отношение между элементом длины метрики Лобачевского в области изменения переменного z [фундаментальной области фуксовой функции $x(z)$] и евклидовым элементом длины в соответствующей точке на римановой поверхности переменного $x = \xi + i\eta$. Таким образом, оказывается возможным ввести в рассмотрение уравнение с частными производными, играющее на плоскости Лобачевского ту же роль, что и классическое уравнение Лапласа на евклидовой плоскости. Это уравнение уже встречалось ранее в классических исследованиях Бельтрами и получается, исходя из известного выражения гауссовой кривизны, записывающейся для линейного элемента

$$ds^2 = U(d\xi^2 + d\eta^2) = e^{u(\xi, \eta)}(d\xi^2 + d\eta^2) \tag{90}$$

---

*) См. [28].

**) См. еще по этому поводу у Фату [19], стр. 432—433, Фрике и Клейна [21], т. II, стр. 285 и след., Пуанкаре [29], стр. 276 и след. (*Прим. ред.*)

***) См. [21], стр. 440—446. (*Прим. ред.*)

в виде выражения *)

$$-\frac{1}{2e^u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right). \tag{91}$$

Так как форма (94) определяет линейный элемент метрики Лобачевского, то последняя должна иметь постоянную кривизну, равную —4. Следовательно, функция $u(\xi, \eta)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Delta u=8e^u. \tag{92}$$

Дальнейшее рассмотрение позволяет найти особые точки функции $u(\xi, \eta)$ и определить характер ее поведения в их окрестности. Эти особые точки некоторым определенным образом соответствуют особым точкам поверхности Римана, рассматриваемой как геометрическое место точек с аффиксом $\xi+i\eta$, и особенностям интегралов линейного дифференциального уравнения, заданного на этой поверхности.

Вся совокупность этих условий определяет искомую функцию u, и наши настоящие познания в области теории уравнений в частных производных позволяют построить эту функцию или по крайней мере доказать ее существование так же, как это делает Пикар **) с помощью метода последовательных приближений; Пуанкаре пришел к тому же методу в мемуаре, опубликованном вслед за мемуаром Пикара ***).

И методом непрерывности Пуанкаре и методом Шварца доказывается возможность выражения искомых функций, удовлетворяющих данному дифференциальному уравнению (87) через фуксовы функции. Для последних граница фундаментальной области может оказаться купюрой — тогда они существуют только в пределах этой области, или же эти функции могут оказаться продолжаемыми на всю плоскость. Прибавим

*) По поводу возможности представления линейного элемента в форме (90) см. в книге В. Ф. Кагана [30], стр. 476. Выражение (91) можно легко получить из любой формулы для гауссовой кривизны (см. там же, стр. 350—351). (*Прим. ред.*)

**) См. [31], [32].

***) См. его работу [31, 2)]. Этот вопрос был затем снова рассмотрен Лихтенштейном [33]. (*Прим. ред.*)]

еще, что поставленная задача была бы разрешима легче, если бы мы решили удовлетвориться выражениями, построенными с помощью клейновых функций, т. е. отказались, от предъявления к искомым группам требования сохранять определенную окружность. Задача допускала бы тогда бесконечное множество решений.

Едва ли нужно указывать на громадное значение найденного результата для анализа. Оставляя на минуту в стороне его значение для теории дифференциальных уравнений, напомним еще раз, что этим путем получается параметрическое представление самой общей алгебраической кривой. Ранее такие представления удавалось строить только для кривых рода нуль с помощью рациональных функций и для кривых рода 1 с помощью эллиптических функций. Прекрасная теорема Пикара показывает, почему такое представление и не могло быть получено ранее для кривых высшего рода; по теореме Пикара его нельзя построить с помощью функций, обладающих лишь изолированными особенностями. Только с помощью фуксовых функций, обладающих бесконечным множеством особых точек на фундаментальной окружности, можно было получить такое представление.

Эти функции доставили Пуанкаре, по прекрасному выражению Умбэра (Humbert) «ключи алгебраического мира». С их помощью были затем открыты многие глубоко лежащие факты, которые иначе и не были бы замечены. Так, Пуанкаре показал существование особых соотношений между периодами абелевых интегралов, относящихся к алгебраической кривой в том случае, если эта кривая определяет решение линейного дифференциального уравнения. Умбэр получил явное выражение суммы интегралов, фигурирующих в теореме Абеля. Полученные здесь предложения были доказаны позднее и прямым путем, но во всяком случае до решения проблемы униформизации с помощью фуксовых функций об их существовании даже и не подозревали *).

*) Список этих вопросов, вероятно, еще далеко не исчерпан. Я не знаю, в частности, связывали ли с фуксовыми функциями точки Вейерштрасса — эти столь таинственные особенности, инвариантные при всяком бирациональном преобразовании и находящиеся в тесной связи с знаменитой теоремой о пробелах, которой Вейерштрасс обогатил теорию алгебраических функций.

Так решен был вопрос о параметрическом представлении алгебраической кривой.

Обратимся теперь к линейным дифференциальным уравнениям p-го порядка с алгебраическими коэффициентами. Рассмотрение мы будем вести на соответствующей римановой поверхности *).

И в этом случае нам окажет большую услугу аналогия с теорией эллиптических функций. Эллиптический интеграл второго рода, как мы уже указывали, не может играть роли независимой переменной при решении соответствующей проблемы униформизации; но раз эта независимая переменная (в случае эллиптических функций — интеграл первого рода) найдена, интеграл второго рода выражается с ее помощью в виде однозначной функции. Эта однозначная функция, когда независимая переменная увеличивается на период, также увеличивается на постоянную величину.

Сходные свойства обнаруживаются у функций, которые Пуанкаре связал с теорией фуксовых групп и назвал по аналогии с эллиптическими функциями *дзета-фуксовыми функциями.* Подобную систему p дзета-фуксовых функций можно составить, если дана группа $\mathbf{G}$ линейных и однородных подстановок с p независимыми переменными, изоморфная с G. Каждой подстановке S_i группы G соответствует определенная подстановка $\mathbf{S}_i$ новой группы (это соответствие по самому определению изоморфизма сохраняется при умножении подстановок); мы потребуем, что каждый раз, когда мы переходим от значения z к его образу с помощью подстановки S_i, новые функции, однозначные относительно z, подвергались бы соответствующему преобразованию $\mathbf{S}_i$ **).

С этой целью числители дзета-фуксовых функций определяются рядами, составленными с помощью произвольных рациональных функций $H^{(\mu)}(z)$ $(\mu = 1, \ldots, p)$:

$$\xi_\mu(z) = \sum_k \mathbf{S}_k^{-1}\, [H^{(\mu)}(z_k)] \left(\frac{dz_k}{dz}\right) \quad (\mu = 1, \ldots, p). \tag{93}$$

---

*) Последнее необходимо для того, чтобы знать, какие именно однозначные ветви этих алгебраических функций принимаются во внимание. (*Прим. ред.*)

**) См. Пуанкаре [84], стр. 209 и след. (*Прим. ред.*)

Здесь выражения

$$S_k^{-1}[H^{(\mu)}(z)] \quad (\mu = 1, \ldots, p) \tag{94}$$

обозначают p величин, получаемых из функций $H^{(\mu)}(z)$ в результате применения к ним обратных (по отношению к подстановкам S_k) линейных преобразований.

Обратимся к исследованию сходимости рядов (93). Здесь снова обнаруживается полезность геометрии Лобачевского для нашей теории.

Чтобы установить сходимость рядов (93), надо найти верхний предел модулей коэффициентов линейной подстановки S_k^{-1}. В силу предположенного свойства изоморфизма каждая такая подстановка составляется из конечного числа основных подстановок

$$S_1^{(0)}, \quad S_2^{(0)}, \ldots \tag{95}$$

путем умножения их друг на друга в произвольном числе и произвольном порядке. Например, пусть

$$S_k^{-1} = S_{j_1}^{(0)} S_{j_2}^{(0)} \ldots \tag{96}$$

совершенно так же, как соответствующая подстановка группы G

$$S_k^{-1} = S_{j_1}^0 S_{j_2}^0 \ldots \tag{97}$$

Если мы сумеем найти *показатель*, соответствующий подстановке S_k^{-1}, т. е. число множителей (различных или нет), фигурирующих в произведении (96), или, точнее, верхний предел этого показателя для всех k, то этим самым мы найдем и верхний предел модулей коэффициентов S_k^{-1}, а именно величину

$$\frac{1}{p}(Mp)^\alpha. \tag{98}$$

Здесь буквой M обозначен верхний предел модулей коэффициентов в основных подстановках (95) и им обратных, а буквой α — упомянутый только что показатель.

Но если мы вспомним процесс образования фуксовой группы путем построения последовательных образов приведенного многоугольника D_0, то увидим, что показатель α не может превысить числа многоугольников, гомологичных D_0 и пересекаемых, например, прямой Лобачевского L, соединяющей некоторую точку многоугольника D_0 с точкой, получающейся из нее с помощью подстановки S_k^{-1}.

Предположим для начала, что фуксова группа принадлежит к первому семейству Пуанкаре, т. е. что ее производящий многоугольник целиком находится в конечной части плоскости Лобачевского. Тогда на основании предыдущего число областей, пересеченных прямой Лобачевского L, а следовательно, и показатель α будут менее частного от деления длины пути L (в смысле геометрии Лобачевского) на определенную постоянную величину. Для всех гомологов точки $z_0 \in D_0$, лежащих в круге радиуса (Лобачевского) R, концентрическом фундаментальному кругу, это число будет меньше величины $K_1 R$ (где K_1 — некоторое постоянное число). Но, с другой стороны, мы видели, что число гомологов произвольной точки $z_0 \in D_0$, лежащих в этом круге, всегда менее $K_2 e^{2R}$, где K_2 — тоже некоторая постоянная величина. Совокупность соответствующих членов ряда (93), следовательно, будет по своему абсолютному значению *) менее величины

$$K_3 \sum R\,(Mp)^{K_1 R} e^{-2mR} \quad (\text{где } R = R_0,\ 2R_0,\ \ldots,\ nR_0). \tag{99}$$

Отсюда на основании сказанного выше о величине $\left|\frac{dz_k}{dz}\right|$ вытекает, что ряд (93) будет сходиться, если мы возьмем число m достаточно большим.

Пуанкаре удалось (тоже с помощью геометрии Лобачевского) доказать сходимость ряда (93) и для некоторых типов производящих многоугольников, обладающих вершинами второй категории. Сторонам, оканчивающимся в такой вершине, и тем сторонам, которые составляют вместе с ними часть одного и того же цикла, соответствуют основные подстановки группы G, дающие в произведении параболическую подстановку T (см. стр. 35). В изоморфной группе $\boldsymbol{G}$ им соответствуют подстановки, произведение которых $\boldsymbol{T}$ соответствующее преобразованию T, Пуанкаре называет *критической подстановкой*. Условие, определяющее производящие многоугольники групп, для которых доказывается сходимость рядов (97),

---

*) Число K_3 — это произведение числа K_2 на величину $\mathrm{ch}^2 R_0$, встречающуюся в формуле (67), и на верхнюю границу (H) модулей функций H в области D_0.

касается именно этих критических подстановок. Предположим, что критическая подстановка приведена к канонической форме *), т. е. будем рассматривать подобную подстановку V, переводящую некоторые подходящим образом выбранные переменные z_i' $(i=1, \ldots, p)$ либо в

$$s_i z_i', \tag{100}$$

либо, если уравнение для величины s (которое получается при приведении рассматриваемой подстановки) имеет кратные корни, в

$$s_i (z_i' + \varepsilon_i z_{i-1}'). \tag{101}$$

Здесь ε_i равны или 1 или 0; последнее имеет место всякий раз, когда $s_i \neq s_{i-1}$. С помощью приведенной подстановки V преобразование T может быть представлено в виде

$$T = U^{-1} V U, \tag{102}$$

где U — линейная подстановка, переводящая переменные z_i' в первоначальные переменные z.

Мы предположим, что все множители s_i для критической подстановки по модулю равны единице. Если это так, то множители s_i для всякой степени V^β подстановки V в случае, отвечающем соотношению (100), тоже будут равны по модулю единице; в случае же, отвечающем соотношению (101) с $\varepsilon_i = 1$, коэффициенты подстановки V^β будут иметь несколько более сложную структуру. Подстановка T^β, очевидно, может быть представлена в виде

$$T^\beta = U^{-1} V^\beta U. \tag{103}$$

На основании сказанного можно установить, что абсолютные значения ее коэффициентов ограничены сверху величинами вида $M\beta^n$, где множитель M зависит от коэффициентов подстановок V, U, U^{-1}, а n — постоянное число, равное нулю, если все ε_i равны нулю.

Пользуясь сделанным дополнительным предположением, легко распространить доказательство сходимости рядов (97), данное для предыдущего случая, на рассматриваемый случай.

---

*) По поводу приведения линейной подстановки к каноническому виду см., например, Гельфанд [35], стр. 169. (*Прим. ред.*)

Обозначим через R длину по Лобачевскому пути, соединяющего точку $z \in D_0$ с одной из гомологичных ей точек z_k. Эту длину Лобачевского, если она достаточно велика, мы можем для наших целей отождествить с расстоянием Лобачевского от точки z_k до центра фундаментального круга. Мы легко усматриваем, что рассматриваемый нами путь пересекает самое большее

1) как и прежде, K_1R областей D', являющихся образами многоугольника D_0 при последовательно применяемых основных некритических подстановках S_k;

2) сверх того — Nq областей D'', являющихся образами q областей D' при преобразованиях с помощью первых N последовательных степеней параболической подстановки T; число N не превышает произведения некоторой постоянной величины на минимальное евклидово расстояние от рассматриваемого пути до окружности фундаментального круга, т. е. величины $A \operatorname{ch}^2 R$ (где A — тоже некоторая постоянная величина).

Наше рассуждение должно быть только дополнено в случае, если среди областей D'' имеются такие, которым соответствуют в выражении (96) для S_k^{-1} множители вида T^N. Но, исходя из сделанного нами дополнительного предположения относительно множителей s_i, легко усмотреть, что наличие таких множителей может увеличить коэффициенты подстановки S_k^{-1} в размерах, отвечающих их умножению на некоторую степень N, т. е. на показательную функцию R. Мы знаем, однако, что влияние такого множителя может быть уравновешено подходящим выбором веса m, чем и обеспечивается сходимость соответствующего ряда (93).

Напротив, если модули множителей s_i не все равны единице, то коэффициенты последовательных степеней подстановки V будут расти в геометрической прогрессии, что приведет к расходимости ряда (93). Здесь остается только пытаться изменить способ составления рядов (93). То же самое нужно сказать о случае, когда производящий многоугольник имеет стороны второго рода.

После того как установлена сходимость рядов (93), их фундаментальное свойство находится непосредственно; оно состоит в том, что в результате применения к переменной z какой-либо из подстановок группы G эти ряды преобразуются посредством соответствующей линейной подстановки S_i и затем умножаются на множитель $\left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{-m}$. Теперь видно, что для получения искомых дзета-фуксовых функций достаточно разделить суммы рядов (93) на соответствующую тета-фуксову функцию того же самого веса m (этим уничтожается только что упомянутый множитель).

Прибавим еще, что Пуанкаре пользуется геометрией Лобачевского для изучения дзета-фуксовых функций (как и для изучения фуксовых функций) и в том случае, когда приведенный многоугольник рассматриваемой группы обладает вершинами второй категории.

Составим теперь линейное дифференциальное уравнение p-го порядка, которому будут удовлетворять p дзета-фуксовых функций (93) [если за независимую переменную взять фуксову функцию $x(z)$], отвечающих той же самой группе G. Коэффициенты этого уравнения будут мероморфными функциями, инвариантными относительно преобразований группы G. Поэтому они будут фуксовыми функциями переменной z, следовательно, алгебраическими функциями переменного x.

Итак, этим путем получаются линейные дифференциальные уравнения с алгебраическими коэффициентами. Они могли получиться только в виде исключения в теории, ограничивающейся одними фуксовыми функциями. Пуанкаре мог, таким образом, решить задачу более общую, чем он себе поставил.

Мы надеемся, что нам удалось показать, ка́к открытие Лобачевского пронизывает насквозь всё замечательное творение Пуанкаре, для которого оно, по мысли самого Пуанкаре, явилось фундаментом. Мы уверены, что открытие Лобачевского еще будет играть большую роль и на дальнейших этапах развития рассмотренной нами теории.

ГЛАВА VI

ФУКСОВЫ ГРУППЫ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

Теория фуксовых функций связывает геометрию Лобачевского еще с другой главой теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Нам удобнее исходить здесь из проективной реализации геометрии Лобачевского, так как в ней прямые Лобачевского изображаются прямыми линиями. Подобно прямым в евклидовой геометрии, они являются геодезическими линиями для линейного элемента геометрии Лобачевского. Таким образом, получается общий интеграл дифференциального уравнения второго порядка, определяющего эти геодезические линии, и рассмотрение этого дифференциального уравнения можно считать законченным.

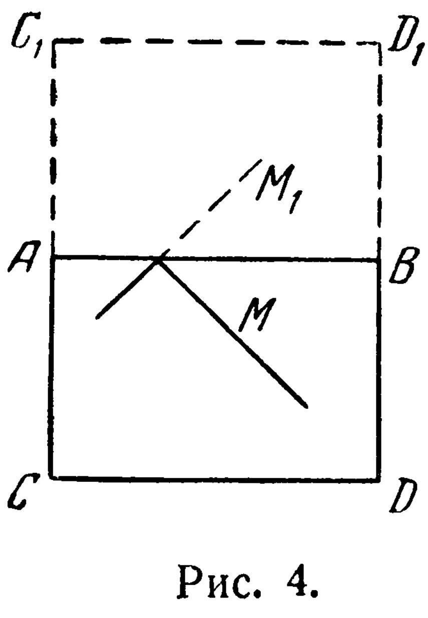

Рис. 4.

Однако изучение прямолинейного движения на обыкновенной плоскости приводит нас к новым соображениям. Рассмотрим, как в игре на бильярде, материальную точку, которая может двигаться внутри прямоугольника (периметр его изображает край бильярда). Такая точка без вмешательства какой-либо силы будет двигаться по прямой линии, пока не попадет на периметр этого прямоугольника. В последнем случае она отклонится и отразится по закону равенства углов падения и отражения. Но если мы будем рассматривать отражение прямоугольника $ABDC$ (рис. 4) в стороне AB, т. е. прямоугольник ABD_1C_1, то движение точки после отражения в первоначальном прямоугольнике может быть заменено фиктивным движением по продолжению прямой линии в новом прямоугольнике: каждому положению M_1 движущейся точки в фиктивном движении в прямоугольнике ABD_1C_1 будет отвечать положение этой точки M в первоначальном многоугольнике в фактическом движении.

Это фиктивное движение будет оставаться прямолинейным, пока движущаяся точка не встретит нового края. Тогда, очевидно, мы сможем повторить наше рассуждение, строя последовательно отражения нашего прямоугольника и всех прямоугольников, которые здесь получаются в соответствующих сторонах. В случае произвольного четырехугольника или многоугольника последовательные отображения в конце концов станут налегать друг на друга; для прямоугольника этого не случится, и мы получим, таким образом, группу $G+H$ перемещений и отражений, причем участвующая здесь группа перемещений G совпадает с группой I таблицы (37). Это — группа эллиптической функции $\wp(z)$. Ее приведенной областью является прямоугольник CDD_1C_1, получающийся в результате соединения прямоугольников $ABDC$ и ABD_1C_1. Если мы преобразуем указанную приведенную область в многообразие M, то движение на бильярде может рассматриваться как прямолинейное движение на этом многообразии.

Возможность распространения сказанного на геометрию Лобачевского очевидна. Рассмотрим внутри фундаментального конического сечения фуксову группу, приведенную область которой мы, как и прежде, обозначим символом D_0. Какое-либо прямолинейное движение на плоскости Лобачевского, т. е. движение внутри фундаментального конического сечения, может рассматриваться как движение на многообразии M, получаемом из D_0 сгибанием: достаточно условиться, что две какие-либо точки плоскости Лобачевского тождественны, если они гомологичны друг другу по отношению к рассматриваемой группе. Аналогия с проблемой бильярда, из которой мы исходили, будет совершенно полной, если предположить, что производящий многоугольник D_0 симметричен и, следовательно, составлен из двух полумногоугольников, D_0' и D_0''. Один из этих полумногоугольников, например D_0', и будет играть роль «бильярда Лобачевского». Движущаяся точка, принужденная оставаться внутри D_0', будет всякий раз, когда она встречается с одной из его сторон, отклоняться от этой стороны в соответствии с законом, указанным вначале (причем отражение понимается в геометрии Лобачевского).

Такое движение ничем не отличается от прямолинейного движения на евклидовой плоскости, пока мы рассматриваем ограниченный, достаточно малый интервал времени. Это отличие становится явным, когда мы начинаем рассматривать все движение в целом, давая времени t всевозможные значения от $t=0$ до $t=\infty$. Тогда должны быть приняты во внимание топологические свойства многообразия M. Впрочем, законы этого движения могут быть изучены довольно полно, как мы это показали в одной из наших работ *), благодаря тому, что кривизна линейного элемента плоскости Лобачевского всегда отрицательна.

Если производящий многоугольник имеет только вершины первой категории (первое семейство Пуанкаре), то многообразие M, над которым мы оперируем, замкнуто.

Противоположная ситуация, которую мы сейчас и рассмотрим, возникает, если производящий многоугольник обладает сторонами второго рода. Тогда мы будем иметь на соответствующем многообразии M области, которые (разумеется, с точки зрения геометрии Лобачевского, поскольку мы рассматриваем соответствующий линейный элемент) удаляются в бесконечность и поэтому играют роль бесконечных полостей, соответствующие дуги основного конического сечения будут, когда понадобится топологически охарактеризовать наше многообразие M, рассматриваться как его края **).

В другом случае производящий многоугольник может иметь в бесконечности вершину второй категории, общую его двум прямолинейным сторонам. Мы исключим из рассмотрения этот вид нерасширяющихся бесконечных полостей; на многообразия такого вида следует смотреть как на вырожденные (получающиеся из многообразий первого типа путем предельного перехода); при первоначальном изучении

*) См. нашу статью [36], а также [37].

**) На этот раз производящий многоугольник уже не предполагается, как это мы считали ранее, продолженным за дугу абсолюта, внутри которого мы всегда остаемся (как этого и требует проективное представление).

их можно не принимать во внимание. То обстоятельство, что производящий многоугольник может иметь стороны второго рода, избавляет нас от необходимости ограничиваться в своем рассмотрении только что упомянутым случаем вполне замкнутых многообразий, когда ни одна из геодезических линий не уходит в бесконечность. Итак, предположим, что производящий многоугольник не имеет ни одной вершины второй категории и что, напротив, имеется по крайней мере одна сторона второй категории. Иначе говоря, на фундаментальном коническом сечении имеется по крайней мере одна дуга, состоящая из обыкновенных точек группы (только концы этой дуги могут являться ее особыми точками).

Возьмем какую-нибудь геодезическую линию, т. е. прямую Лобачевского, и рассмотрим ее сначала в том виде, как она представляется на всей плоскости Лобачевского, не перенося ее на многообразие M.

Мы будем различать два случая:

Первый из них будет иметь место, когда прямая Лобачевского (или, точнее говоря, полупрямая, потому, что мы двигаемся только в одном определенном направлении вдоль нашей геодезической линии) пересекает только конечное число образов производящего многоугольника; в этом случае она окончится на фундаментальном коническом сечении обыкновенной точкой.

В противоположном случае наша прямая пересечет бесконечное множество образов производящего многоугольника и она закончится в особой точке на абсолюте. Эти особые точки, как мы знаем, бывают различных родов. Между ними имеются двойные точки гиперболических подстановок группы. Наиболее простые геодезические линии, целиком состоящие из конечных точек, получаются, если мы соединим две двойные точки A, B одной и той же гиперболической подстановки S.

Прямая Лобачевского, соединяющая эти точки, инвариантна относительно преобразования S и содержит бесконечное множество гомологичных между собой точек, которые, если мы перенесем их на многообразие M, все совпадут друг с другом.

Одним словом, на многообразии M мы получим *замкнутую* геодезическую линию.

С другой стороны, соединяя прямой Лобачевского какую-либо внутреннюю точку O с одной из этих двойных точек, например с A, мы получим, как известно, одну из двух параллелей Лобачевского, проведенных через точку O к прямой BA, т. е. прямую, асимптотически приближающуюся к прямой BA. Если мы перенесем нашу фигуру на многообразие M, то получим на ней геодезическую линию, отвечающую прямой линии OA, асимптотически приближающуюся к замкнутой геодезической, отвечающей линии AB.

Все гиперболические подстановки группы дают, таким образом, замкнутые геодезические линии, к которым можно присоединить пучки других к ним асимптотически приближающихся геодезических линий.

Но сверх этих особых гиперболических точек группа может иметь бесконечное множество других, предельных для первых. Для каждой такой точки выводятся семейства геодезических линий, асимптотически приближающихся к линиям первого семейства, гораздо более сложной формы, чем предыдущие.

Так можно шаг за шагом найти в этом частном случае все результаты, к которым приводит общее изучение геодезических линий в случае отрицательной кривизны; в частности, получается и результат, имеющий особо выдающееся значение: углы, образуемые касательными, проведенными в определенной точке O к геодезическим линиям, выходящим из этой точки и не уходящим в бесконечность с некоторым фиксированным направлением, составляют совершенно разрывное множество. Действительно, все подобные геодезические линии получаются в результате соединения точки O с особыми точками группы; но эти последние как раз и образуют множество указанного типа.

Точно так же можно непосредственно удостовериться в том, что всякая геодезическая линия, не уходящая в бесконечность, неустойчива в смысле, приданном этому слову Ляпуновым; другими словами, изменения в поведении этой линии, вызванные сколь угодно малым отклонением ее направления в начальной точке, могут быть весьма значительными. Это обстоятельство вытекает из того факта, что подобная геодезическая линия соответствует полупрямой, пересекающей абсолют в особой точке группы (эти точки образуют совершенно разрывное множество).

Сложный и подчас парадоксальный характер хода геодезических линий на поверхностях отрицательной кривизны делает чрезвычайно интересной задачу их полного построения в каком-нибудь частном случае. Можно надеяться, что в результате подобного построения удастся дополнить результаты рассмотрения некоторых объектов, трудно доступных исследованию в общем виде — например, геодезических линий, не замкнутых и асимптотически не приближающихся к замкнутым геодезическим линиям.

Способ получения подобных геодезических линий можно легко указать, в частности, для производящих многоугольников с непересекающимися сторонами, т. е. со сторонами, пересекающимися вне фундаментального конического сечения*); для замощения плоскости Лобачевского подобными многоугольниками приходится (если мы для упрощения дела будем исходить из многоугольника, обладающего осью симметрии) совершать отражения в этих сторонах. Следует приписать номер каждой из этих сторон в порядке встречи с ними при обходе многоугольника в определенном направлении; тогда, как мы уже видели при рассмотрении клейновых групп (см. стр. 111), каждая подстановка группы будет соответствовать конечной десятичной дроби. Благодаря этому каждая двойная гиперболическая точка будет отвечать периодической десятичной дроби; другие особые точки — непериодическим десятичным дробям.

Было бы целесообразно рассмотреть на этом примере, прежде чем приступать к их изучению в общем виде, и ряд других возникающих здесь трудных и тонких вопросов — например, проблемы, связанные с теми возвратными траекториями, обязательное появление которых было доказано Биркгофом.

*) Производящие многоугольники такого рода образуют так называемое третье семейство Пуанкаре.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Риман, Избранные сочинения. Гостехиздат, М. — Л., 1948.

[2] Б. А. Фукс, Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений. Серия «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей», вып. V. Гостехиздат, М. — Л., 1951.

[3] Л. Форд, Автоморфные функции. ОНТИ, М. — Л., 1936.

[4] Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований. Госиноиздат, М., 1947.

[5] А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры, 4-е изд. Гостехиздат, М. — Л., 1941.

[6] H. Poincaré, Sur le formes cubiques ternaires. C. R. d. Acad. d. Sciences, Paris, **90** (июнь 1880 г.), стр. 1336—1339.

[7] G. Giraud, Leçons sur les fonctions automorphes. Gauthier-Villars, Paris, 1920.

[8] J. Lagrange, Nouvaux mémoires de l'Acad. royale des Sciences et Belles Lettres, Paris, 1779.

[9] Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, 2-е изд. Гостехиздат, М. — Л., 1949.

[10] J. Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. Hermann, Paris, 1910.

[11] F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder. Teubner, Leipzig, 1884.

[12] C. Jordan, Cours d'Analyse, т. III. Gautier-Villars, Paris, 1893.

[13] C. Jordan, Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. J. f. reine u. angew. Math., т. 84 (1878), стр. 89—216.

[14] C. Jordan, Atti Acad. Napoli, 1880.

[15] Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия. Гостехиздат, М. — Л., 1951.

[16] L. Kroneker, Ueber Systeme von Funktionen meherer Variabeln, Monatsber. d. Berliner Akad. der Wissenschaften (1869), стр. 689.

[17] А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, М. — Л., 1947.

[18] В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, т. I. ОНТИ, М. — Л., 1935.

[19] T. Appel — E. Goursat, Théorie des fonctions algébriques d'une variable, т. II — «Fonctions automorphes» par P. Fatou. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

[20] В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2-е изд. Гостехиздат, М. — Л., 1950.

[21] R. Fricke und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, т. I, II, Springer. Berlin, 1926.

[22] R. Fricke, Ueber die Poincaré'schen Reihen der (—1)-ten Dimension. Dedekind Festschrift, 1901.

[23] F. Klein, литографированные лекции «Ueber lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung». Teubner, Leipzig, 1906.

[24] Vaksely, C. R. Acad. des Sciences, Paris, т. 178 (1924), стр. 1135.

[25] H. Poincaré, Sur les fonctions fuchsiennes. C. R. Acad. des Sciences de Paris, т. 92 (июнь, 1888), стр. 859.

[26] H. Poincaré, Sur le fonctions fuchsiennes. Bull. de la Soc. Math. de France, т. XI (1883), стр. 112.

[27] Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной. ОНТИ, М. — Л., 1934.

[28] A. Schoenflies, Ueber die Kreisbogenpolygone. Math. Annalen, **42** (1893), стр. 377, **44** (1895), стр. 105.

[29] H. Poincaré, Sur les groupes des équations linéaires. Acta. Mathem., т. 4 (1883), стр. 201—302.

[30] В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, т. I. Гостехиздат, М. — Л., 1947.

[31] E. Picard, 1) Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. J. d. Math. pures et appl., 4 сер., т. 6 (1890), стр. 145—211; тот же журнал, 4 сер., т. 9 (1893), стр. 217—273; 2) Sur l'équation $\Delta u = ke^u$; тот же журнал, 4 сер., т. 9 (1893), стр. 273—293; тот же журнал, 5 сер., т. 4 (1898), стр. 313—317; J. f. reine u. angew. Math., т. 130 (1905), стр. 243—258.

[32] E. Picard, Traité d'Analyse, т. 3. Gauthier-Villars (1926), Paris.

[33] L. Lichtenstein, Integration der Differentialgleichungen $\Delta u = ke^u$ auf geschlossenen Flächen. Acta. Math., т. 40 (1916), стр. 1—34.

[34] H. Poincaré, Mémoire sur les fonctions zéta-fuchsiennes. Acta Math., т. 5 (1884), стр. 209—278.

[35] И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре. Гостехиздат, М. — Л., 1948.

[36] J. Hadamard, Les surfaces à courbure opposées et leurs lignes géodesiques. J. d. Math. pures et appl., 5 сер., т. IV (1898), стр. 27—75.

[37] J. Hadamard, Proc. de la Soc. des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux (1898).

СОДЕРЖАНИЕ