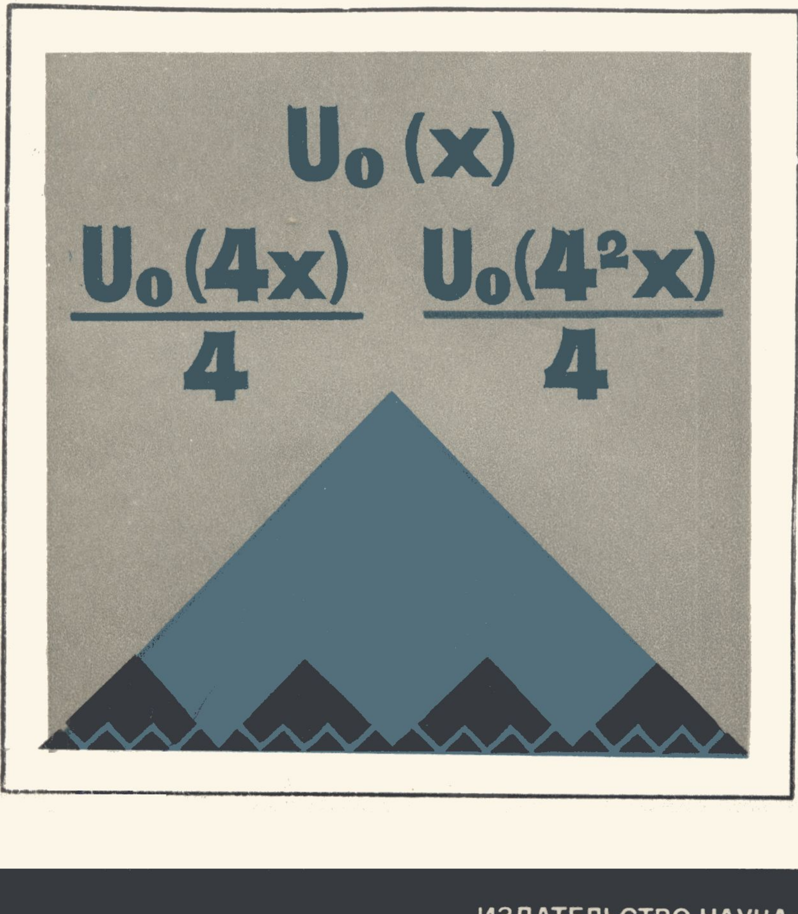
Л.С. ФРЕЙМАН

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО·НАУКА·

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Серия «Проблемы современной науки
и научно-технического прогресса»

Л.С. ФРЕЙМАН

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1971

Теоремы существования рассматривают условия, при соблюдении которых существует тот или иной математический объект — производная, неопределенный интеграл, определенный интеграл или решение уравнения и т. п. Что касается дифференциальных уравнений, то одновременно с условиями существования решения рассматриваются и условия, гарантирующие единственность найденного решения.

Автор рассматривает лишь важнейшие теоремы существования, причем изложение ведется в возможно более доступной форме с тем расчетом, чтобы книга могла служить вспомогательным пособием для студентов технических институтов. Работа будет полезна и молодым преподавателям тех же институтов, а также широкому кругу лиц, интересующихся проблемами высшей математики.

2-2-3
31-70 НПЛ

ОТ АВТОРА

Жизнь идет вперед, техника усложняется, инженеру все чаще приходится прибегать к математике. И странная вещь: то, что в годы учения было понятным, теперь, при попытках самостоятельного применения, оказывается неясным. Надо вычислить интеграл — и, как на зло, от такой функции, подобную которой никогда не приходилось даже видеть. Есть ли у нее интеграл? Надо проинтегрировать дифференциальное уравнение и вот возникает вопрос, сколько решений имеет уравнение? А решается ли вообще это уравнение? Таких и подобных им вопросов возникает множество. Все они относятся к области, которую за недостатком времени в технических институтах почти не рассматривают. Эта область — теоремы существования, которые устанавливают, при каких условиях существуют решения различных математических задач.

Предлагаемая читателю книга и посвящена подобным вопросам. В ней разобрано много примеров, которые иллюстрируют случаи, почти не затрагиваемые в общих курсах математики, где ограничиваются, например, утверждением, что такая-то функция непрерывна, а следовательно, ее можно дифференцировать; такая-то функция разрывна, а следовательно, ее нельзя интегрировать. О возможных в этих случаях осложнениях почти не упоминают. В книге приведены функции непрерывные и нигде не дифференцируемые; разрывные, но имеющие интеграл. Есть, конечно, и другие примеры. Приведены некоторые сведения из таких отделов математики, которые необходимы при основательных исследованиях теорем существования, но которые в обычных курсах математики не изучаются.

В конце книги указана литература, не претендующая, впрочем, на полноту. Читатель, который захотел бы углубить свои познания в области проблем существования, может почерпнуть из нее дополнительный материал. Имеющихся на русском языке книг по этому вопросу вполне достаточно.

Книга, популярно излагающая вопросы существования, автору неизвестна, поэтому он не мог опереться на чей-либо опыт и будет благодарен за критику по существу содержания книги.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

1.0. Некоторые сведения из теории множеств

При изложении некоторых вопросов существования (существование функции, определенного интеграла и др.) приходится использовать некоторые сведения из теории множеств. В этом параграфе приводятся только те из них, которые используются в дальнейшем изложении. Потребуются главным образом два понятия, связанные с количественной оценкой множеств: мощность множества и его мера.

Множество и его мощность. «Множество» как понятие первоначальное не объясняется, т. е. не сводится к более простым. Поэтому и не дается определения этого понятия. Его содержание показывается на примерах. Мы условимся называть элементами те предметы, совокупность которых образует данное множество. Примеры приводятся ниже.

Множествами, состоящими из небольшого числа элементов, являются, например, множество сторон треугольника, множество букв в данном предложении; множество может иметь и большое (даже очень большое), но ограниченное число элементов, например множество зерен пшеницы в данном элеваторе или множество атомов металла в данном металлическом предмете; множество может иметь и бесконечное число элементов: множество всех рациональных чисел, множество всех непрерывных функций, множество всех точек на данном отрезке прямой.

Принято обозначать множество прописными буквами; иногда рядом с буквой, обозначающей множество, ставят (обычно в фигурных скобках) строчную букву, означающую элемент этого множества,— M или $M\{x_i\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым.

Множества делятся на конечные и бесконечные, в зависимости от того, конечно или нет число элементов, образующих множество.

Бесконечные множества подразделяются на счетные и несчетные. Все элементы счетного множества могут быть перенумерованы последовательностью натуральных чисел. Если это сделать невозможно, множество называется несчетным. Примером счетного множества служит натуральный ряд чисел, примером несчетного — точки отрезка прямой. Одно из несчетных множеств — это континуум [1], т. е. как раз множество всех точек отрезка прямой, послужившее нам примером несчетного множества.

Мощность множества. Для двух конечных множеств равенство их мощностей есть не что иное, как равенство чисел их элементов: $n_1 = n_2$. Если множества бесконечны, то критерий численности элементов к ним неприменим. Для бесконечных множеств предварительно вводится понятие эквивалентности: два множества $M\{m\}$ и $N\{n\}$ эквивалентны, если их элементы можно привести во взаимно однозначное соответствие; эквивалентны, например, два следующих множества (n — натуральное число):

$$M\{n\} \sim N\{2n\}.$$

Действительно, каждому элементу множества M соответствует один и только один элемент множества N. Обратно, каждому элементу множества N, например $2n_1$, соответствует один и только один элемент множества M, именно n_1. Такие два множества и называются эквивалентными или равномощными.

Можно доказать, что множеству всех точек отрезка прямой эквивалентны другие множества, например множество всех иррациональных точек того же отрезка, множество всех трансцендентных точек этого отрезка, множество всех точек любого другого отрезка и даже множество всех точек прямой, простирающейся бесконечно в обе стороны. Тому же множеству эквивалентны множества всех точек квадрата, параллелепипеда и многие другие. О каждом из этих множеств говорят, что оно имеет мощность континуума.

---

[1] Это название подчеркивает непрерывность отрезка прямой: continuum (*лат.*) — непрерывное.

Мощность в теории множеств есть обобщение понятия числа элементов, так как последнее непригодно в случае бесконечного множества. Ведь относительно такого множества нельзя сказать, что у него есть некоторое число элементов.

Важность понятия «мощность множества» вытекает из того факта, что ему можно придать численную характеристику, причем оказывается, что множествам различных мощностей соответствуют различные числа. Именно, если два бесконечных множества M и M' таковы, что одно из них, скажем M, эквивалентно лишь части другого множества, т. е. части M', то говорят, что

$$\mu < \mu',$$

где μ и μ' — числа, характеризующие мощности множеств M и M'.

Возможность сравнивать множества между собой (другими словами, сравнивать множества, различные по мощности) невольно приводит к вопросу: какова наименьшая мощность бесконечного множества? Или, если угодно, приводит к другой редакции того же вопроса: какое бесконечное множество имеет наименьшую мощность? Подробное рассмотрение этого вопроса приводит к следующему заключению: наименьшей мощностью (среди бесконечных множеств; в дальнейшем будут рассматриваться только бесконечные множества и такая оговорка повторяться не будет) обладает множество натуральных чисел 1, 2, 3... Основатель теории множеств Георг Кантор ввел для него название «счетное множество» (множество натуральных чисел) и обозначил его мощность через A. Таким образом, теория множеств располагает следующим положением: из бесконечных множеств наименьшей мощностью обладает счетное и все, эквивалентные ему.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство счетных множеств: сумма счетного множества счетных множеств есть счетное множество. Для доказательства этого свойства можно воспользоваться следующей теоремой (приводим ее без доказательства): множество, у которого каждый элемент занумерован конечной системой натуральных чисел, есть или конечное, или, самое большее, счетное множество. Иными словами, если каждый элемент множества имеет вид

$$x_{p, q, r, \ldots, u, v},$$

где p, q, r, . . . , u, v — конечная система индексов, то множество

$$M\{x_{p, q, r, \ldots, u, v}\}$$

самое большее, счетно.

Для того, чтобы применить эту теорему к нашему случаю, достаточно показать, что сумма счетного множества счетных множеств может быть записана как множество элементов с конечной системой индексов. Это делается следующим образом. Пусть множества-слагаемые имеют вид

$$A_1 \ \{a_{11};\ a_{12}; \ldots;\ a_{1i}; \ldots\},$$
$$A_2 \ \{a_{21};\ a_{22}; \ldots;\ a_{2i}; \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k \ \{a_{k1};\ a_{k2}; \ldots;\ a_{ki} \ldots\}.$$

Элемент каждого множества-слагаемого снабжен двумя индексами — k и i. Первый из них указывает, к какому слагаемому относится данный элемент, второй — какое по порядку место он занимает в слагаемом-множестве. Так, например, a_{23} есть элемент, принадлежащий второму слагаемому и обозначенный в нем номером 3. Сумму всех множеств можно записать так

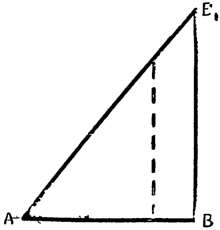
$$A = \sum_{1}^{\infty} A_k = A\{a_{ki}\}.$$

Если i и k пробегают значения от 1 до ∞, то A есть множество, элементы которого занумерованы двойной, следовательно, конечной системой индексов. Такое множество, согласно приведенной выше без доказательства теореме, есть (поскольку k и i возрастают неограниченно) счетное множество.

После счетных идут несчетные множества. Первое из них, ближайшее к счетному, есть множество, имеющее мощность континуума. Такое множество обладает тем свойством, что все его точки нельзя занумеровать числами натурального ряда — всегда на данном отрезке (мы для наглядности остановимся на отрезке прямой) останутся точки, не попавшие под нумерацию.

На первый взгляд кажется, что чем длинней отрезок, тем больше в нем точек. В действительности так рассуждать нельзя и вообще не следует переносить манеру рассуждения арифметики конечных величин на область бесконечностей. Следующий пример показывает, что эта предосторожность отнюдь не лишняя.

Рис. 1. Каждой точке на отрезке AB_1 соответствует одна и только одна точка на AB



Представим себе два отрезка — AB и AB_1 — разной длины. Построим из этих отрезков острый угол BAB_1 так, чтобы основанием перпендикуляра, опущенного из точки B_1 на отрезок AB, служила точка B (рис. 1). Тогда, конечно, для перпендикуляра, опущенного из любой точки отрезка AB_1 на отрезок AB, найдется основание среди точек этого отрезка AB и, таким образом, каждой точке отрезка AB_1 соответствует одна и только одна точка на AB. Ясно, что перпендикуляр из любой точки отрезка AB укажет одну и только одну точку отрезка AB_1, соответствующую выбранной точке на AB. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между двумя множествами — множеством точек отрезка AB и множеством точек отрезка AB_1. Следовательно, эти два множества равномощны: множество всех точек одного отрезка имеет ту же мощность, что и множество точек любого другого отрезка. Мы выше говорили, что множеству всех точек одного (любого) отрезка эквивалентны многие другие множества. Теперь ту же мысль можно высказать иначе: все такие множества имеют мощность континуума или C (буквой C обозначают мощность континуума).

Из предыдущих рассуждений следует, что $C > A$.

Отметим несколько свойств множеств.

Сумма конечного или счетного количества счетных множеств есть счетное множество (это свойство обсуждено выше).

Пусть даны два множества — $M' \{x'\}$ и $M'' \{x''\}$ — с мощностями соответственно μ' и μ''. Произведением M' и M'' называется множество M, составленное из всевозможных пар множества x' и x''; в каждую пару входит один любой элемент множества M' и один любой элемент множества M''. Таким образом,

$$M = M'M'' = M \{x', x''\}.$$

Мощность множества M будет тогда $\mu = \mu' \mu''$. Справедлива следующая теорема: произведение счетного множества на конечное число или на счетное множество есть счетное множество.

Что касается несчетных множеств, в частности множеств мощности C, то для них справедливо следующее предложение: прибавляя или отнимая от любого несчетного множества любую счетную часть, невозможно увеличить или уменьшить мощность этого (несчетного) множества.

Пусть M есть несчетное, а M_1 — счетное множество и пусть

$$M = N + M_1.$$

Если бы N было счетным, то, как указано выше, и M было бы как сумма конечного числа (двух) счетных множеств счетным множеством, что противоречит условию. Следовательно, N есть несчетное множество. Прибавим теперь к обеим частям равенства по счетному множеству A:

$$M + A = N + (M_1 + A).$$

Но мощность $M_1 + A$ равна мощности M_1 (мощность суммы двух счетных множеств равна мощности любого счетного множества, значит, мощности одного слагаемого). Следовательно, от прибавления счетной мощности не изменилась мощность правой части равенства, а значит, — и левой.

В дальнейшем нам потребуется еще следующая теорема: если мощности крайних множеств равны, то и всякое промежуточное множество имеет ту же мощность.

В том случае, если для трех множеств — M_1, M_0, M_2 — справедливы неравенства

$$M_1 \geqslant M_0 \geqslant M_2,$$

т. е. если множество M_1 заключает в себе множество M_0 («множество M_1 объемлет множество M_0»), и то же справедливо относительно множеств M_0 и M_2, то множества M_1 и M_2 можно назвать крайними, а множество M_0 — промежуточным (относительно M_1 и M_2). Теорема утверждает, что если $\mu_1 = \mu_2$, то справедливо равенство

$$\mu_1 = \mu_0 = \mu_2.$$

Также найдет ниже применение теорема: множество всех частей данного множества M имеет мощность бо́льшую, чем имеет M:

$$m > \mu,$$

где μ — мощность множества M, а m — мощность множества всех частей данного множества M.

Убедимся в справедливости сказанного на конечном множестве, когда возможен непосредственный подсчет. Вспомним, что мощность конечного множества есть число его элементов. В это число принято включать и само множество, и пустое множество.

Представим себе множество M, состоящее из трех элементов, $n = 3$. Обозначим эти элементы 1, 2, 3. Число частей M будет: 1, 2, 3; $1 + 2$, $1 + 3$, $2 + 3$ — всего 6 частей; присоединяя самое множество M и пустое множество, получаем всего 8 частей. Это полное число частей заданного множества M представляем как

$$8 = 2^3 = 2^n.$$

Кроме полученной зависимости между числом элементов множества (n) и числом его частей (2^n), запишем еще одну: когда число элементов множества увеличивается на единицу, число его частей увеличивается вдвое, т. е. вместо 2^n получаем 2^{n+1}. Если в нашем примере вместо трех элементов взять четыре, то к вышеперечисленным частям присоединятся еще части, куда вошел четвертый элемент, и старое значение множества M $\{1, 2, 3\}$: 1, 2, 3, 4; $1 + 2$, $1 + 3$, $1 + 4$; $2 + 3$; $2 + 4$; $3 + 4$;

$1 + 2 + 3$; $1 + 2 + 4$; $1 + 3 + 4$; $2 + 3 + 4$ — всего 14 частей, а вместе с множеством M $\{1, 2, 3, 4\}$ и пустым — 16, т. е.

$$16 = 2^4 = 2^{3+1} = 2 \cdot 2^3,$$

т. е. число частей увеличилось ровно вдвое. Полученное выражение 2^n для числа частей множества с n элементами, или зависимость

$$m = 2^n > \mu,$$

переносится и на случай бесконечных множеств. Так, например, оказывается, что мощность A счетного множества связана с мощностью множества его частей формулой

$$2^A = C,$$

т. е. мощность множества всех частей счетного множества равна мощности континуума.

Мера множества. Понятие меры множества есть обобщение понятия длины отрезка [1] и применяется для характеристики множеств, лежащих на сегменте. Простейший случай — мера сегмента, интервала, полуинтервала. Мерой сегмента считается его длина:

$$m\,[a, b] = b - a.$$

Так как изъятие двух (в данном случае крайних) точек не может изменить длины отрезка, то мера интервала равна мере сегмента:

$$m\,(a, b) = b - a = m\,[a, b].$$

Напомним теперь строгое определение меры множества. Считаем, что некоторый сегмент $[0, 1]$ (то, что взят сегмент вполне определенной длины, не нарушает общности рассуждений) включает множество E. Это — множество, состоящее из точек данного сегмента; следовательно, множество ограниченное. Все точки сегмента, не входящие в E, образуют дополнительное (к E) множество CE.

Заключим все точки множества E в систему интервалов α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ Число интервалов или конечно, или,

---

[1] Речь, конечно, идет о мере линейного множества.

самое большее, они образуют счетное (потому что все α занумерованы) множество. Очевидно,

$$\Sigma\alpha > 0.$$

Так как способов построения такой системы интервалов бесконечно много, то множество значений Σ бесконечно. Все они больше нуля и, следовательно, множество имеет нижнюю грань. Она называется в н е ш н е й м е р о й множества E, т. е. m^*E. Такую же характеристику можно присвоить и дополнительному множеству CE. Разность между мерой сегмента, т. е. $b - a$, и внешней мерой E, т. е. $m^*(CE)$, называется в н у т р е н н е й м е р о й множества E, m_*E:

$$(b - a) - m^*(CE) = m_*(E).$$

Так как множество CE содержится в сегменте $[a, b]$, то $m_* E > 0$ и, следовательно, обе меры множества CE не могут быть меньше нуля.

Меры множества обладают тем свойством, что внутренняя мера не может превзойти внешнюю.

Теорема: внешняя мера множества E не может быть меньше внутренней меры того же множества.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как m^*E есть нижняя грань множества значений суммы $\Sigma\alpha$, то при любом $\delta > 0$ можно добиться, чтобы было

$$\sum_k \alpha_k < m^*E + \delta.$$

Так же и для CE:

$$\sum_k \beta_k < m^*(CE) + \delta;$$

отсюда

$$\sum \alpha_k + \sum \beta_k < m^*E + m^*(CE) + 2\delta.$$

Суммы левой части неравенства покрывают весь сегмент. Поэтому

$$(b - a) < m^*E + m^*(CE) + 2\delta$$

или

$$(b - a) - m^* E - 2\delta < m^* (CE).$$

Но

$$(b - a) - m^* (CE) = m_* (E),$$

поэтому

$$m_* E - 2\delta < m^* E.$$

Так как $\delta > 0$ произвольно малое число, то окончательно

$$m_* E < m^* E,$$

что и требовалось доказать.

Если внешняя и внутренняя меры множества E совпадают, то множество называется измеримым (по Лебегу). Мерой множества является общее значение внешней и внутренней мер:

$$mE = m^* E = m_* E.$$

Очевидно,

$$m [a, b] = m (a, b) = b - a.$$

Теорема: всякое счетное множество измеримо; его мера равна нулю.

Интуитивно это положение понятно без дальнейших пояснений, так как любое число дискретных точек имеет общую длину, равную 0, но теорема может быть строго доказана.

Пусть на $[a, b]$ дано счетное множество E:

$$E [x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots].$$

Заключим $x \in E$ в интервал

$$\alpha_n < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда

$$m^* E \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \sum \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Следовательно, и m_*E, которое не может быть больше m^*E, также $\leqslant\varepsilon$, так что

$$0 \leqslant m_*E \leqslant m^*E < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно малое число, то

$$m_* E = m^*E = 0$$

и теорема доказана. Ясно, что множества, дополнительные к счетным $mE = 0$, также измеримы и имеют меру $>1 - \varepsilon$.

1.1. Функции

Эта книга рассматривает некоторые действия, производимые над функциями. Так как функций бесконечно много, то вопрос «сколько есть функций?» не имеет смысла, но вопрос о сравнении мощностей множеств различных функций имеет ответ. Рассмотрим сперва вопрос о множестве непрерывных функций. Оказывается, таких функций не так уж много или, чтобы выразиться правильнее, мощность множества непрерывных функций не так уж велика. Как будет показано, множество всех непрерывных функций $f(x)$ имеет мощность континуума, т. е. первую из известных мощностей, которые превышают наименьшую мощность бесконечных множеств, а именно, мощность A счетного множества. Доказательство высказанного утверждения использует теорему о мощности промежуточного множества: надо указать два таких множества, чтобы множество непрерывных функций было промежуточным относительно этих множеств и чтобы их мощности были равными. Тем самым определится и искомая мощность.

Одним из крайних множеств является множество, входящее как часть в изучаемое множество $M\{f(x)\}$: это — множество всех действительных констант, которые, конечно, являются частным случаем непрерывных функций. Множество действительных чисел имеет, как известно, мощность континуума. С другой стороны, всякая непрерывная функция может быть нанесена в виде совокупности точек (кривой) на плоскость и, следовательно, изображается как счетная последовательность

$$e(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots),$$

где y — действительные числа, нумерующие рациональные числовые значения функции $f(x)$ (можно ограничиться только перечислением рациональных значений ввиду непрерывности функции). Но последовательность e, помеченную счетным множеством чисел y (напоминаем, что рациональная последовательность может иметь мощность, не бо́льшую, чем счетная A), можно трактовать как точку счетномерного пространства [1]. Следовательно, множество $M\ \{f(x)\}$ непрерывных функций отображается на часть счетномерного пространства. Мощность счетномерного пространства (и его части) есть мощность континуума — и это есть мощность второго крайнего множества. Значит, и мощность множества $M\ \{f(x)\}$ всех непрерывных функций есть мощность континуума:

$$\mu\, [M\ \{f(x)\}] = C.$$

Обращаемся теперь к несравненно более широкому типу функций: к охвату всех функций — и непрерывных, и разрывных. Подчеркнем, что рассматриваются функции от аргумента x, изменяющегося вдоль всей числовой оси:

$$-\infty < x < +\infty.$$

При рассмотрении этого вопроса опираемся на теорему о мощности всех частей множества (см. 1.0) Мощность множества всех функций равна мощности всех частей прямой (мощность множества всех точек которой есть C — мощность континуума) и, следовательно, выражается числом

$$\mu\, [M\ \{f(x)\}] = 2^C.$$

---

[1] Счетномерное пространство — множество всех точек $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причем $x_1, x_2, \ldots$ — бесконечная последовательность действительных чисел, называемых координатами точки P. Две точки — P' и P'' — различны, если различны хотя бы две соответствующие координаты, т. е. $x'_k \neq x''_k$. Можно сказать короче, что счетномерное пространство — это пространство счетного множества измерений (подобно тому, как трехмерное пространство есть пространство трех измерений).

Приведем более подробное рассуждение, доказывающее справедливость нашего утверждения. Оно будет построено так же, как предыдущее: находятся два множества с равными мощностями и такие, что $M\{f(x)\}$ является промежуточным.

Рассматривается сперва часть множества M, именно множество M_1 таких функций, каждая из которых принимает только два значения: 1 или 0. Вся числовая прямая для такой функции делится на две части: на часть E_1, на которой $f(x) = 0$, и для всех точек второй части E_2 — значение функции $f(x) = 1$. Обратно, если вся числовая прямая разбита на две части — E_1 и E_2, то, положив значения некоторой функции для $x \in E_1$ равными нулю и ее же значения для $x \in E_2$ равными единице, мы получим как раз функцию рассматриваемого вида. Следовательно, мощность множества функций рассматриваемого вида равна мощности всех возможных частей числовой прямой, и так как мощность множества точек прямой равна C (мощности континуума), то мощность множества всех частей прямой есть 2^C. Таким образом, мощность одного крайнего множества определена. С другой стороны, всякую функцию $f(x)$ можно изобразить на плоскости в виде совокупности точек, и эта совокупность есть одна из частей плоскости. Следовательно, все множество $M\{f(x)\}$ эквивалентно множеству некоторого количества частей плоскости (в данном случае нельзя изобразить функцию как точку счетномерного пространства, так как она может иметь разрыв). Известно, что мощность множества точек плоскости равна мощности множества точек прямой, т. е. C. В таком случае мощность множества частей плоскости (как и мощность множества частей прямой) равна 2^C. Так как множество $M\{f(x)\}$ эквивалентно множеству частей плоскости и в свою очередь содержит множество функций, принимающих значения 1 и 0, то оно является промежуточным относительно этих множеств. И так как оба эти множества имеют мощность, равную 2^C, то такова же и мощность множества всех функций:

$$\mu\,[M\{f(x)\}] = 2^C.$$

Все эти рассуждения подтверждают тот общеизвестный факт, что непрерывные функции представляют только небольшую часть всех возможных функций, правда, как показывает опыт, наиболее простую и самую важную для человеческой практики. Разрывных же функций, как видно, намного больше, чем непрерывных ($2^C > C$). Поэтому в дальнейшем будет уделено значительное внимание разрывным функциям.

1.2. Существование обратной функции

Определение. Пусть дана функция $y = f(x)$. Обратной по отношению к y называется функция $x = \varphi(y)$ такая, что $f[\varphi, (y)]$ дает тождественное выражение $y = y$.

Пример: $y = f(x) = 2x - 3$; отсюда $x = \frac{y+3}{2} = \varphi(y)$; тогда

$$f[\varphi(y)] = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y,$$

что и требуется по определению. Следовательно, $x = \varphi(y)$ есть в данном примере функция, обратная $y = f(x)$.

Нам предстоит выяснить, при каких условиях данная функция $y = f(x)$ имеет обратную. Ответ (неполный) дает следующая теорема: всякая строго монотонная функция имеет обратную.

Пусть дана строго монотонная функция $f(x)$ и пусть для определенности она возрастает, т. е.

$$f(x_2) > f(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Отсюда следует, что каждому y соответствует одно и только одно значение x. Следовательно, существует функция $x = \varphi(y)$, обратная по отношению к y. Теорема доказана.

Областью определения $\varphi(y)$ служит интервал значений y. Можно то же выразить иначе: областью определения $\varphi(y)$ служит множество M такое, что $y \in M$. Для существования обратной функции необязательна непрерывность заданной. Пусть задана функция

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x & -1 \leqslant x < 0, \\ x & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Обратная функция имеет вид (рис. 2)

$$x = \varphi(y) = \begin{cases} y & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1 - y & 1 < y \leqslant 2. \end{cases}$$

Таким образом, непрерывность функции *не* необходима для того, чтобы функция имела обратную. Для непрерывных же функций действительна следующая теорема: если функция непрерывна на $[a, b]$, то для существования обратной функции необходимо и достаточно, чтобы функция была монотонной (в строгом смысле) на $[a, b]$.

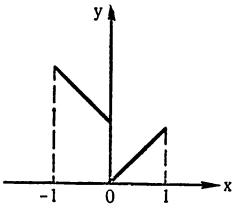


Рис. 2. Разрыв функции $y=f(x)$ не мешает ей иметь однозначную обратную функцию $x = \varphi(y)$

Необходимость. Допустим, что функция не монотонна. Тогда на $[a, b]$ найдутся такие x_1, x_2 и x_3, что

$$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$$

(остановимся для определенности на том случае, когда график $f(x)$ имеет выпуклость кверху). В этом случае на кривой $y = f(x)$ найдется такое значение $f(x)$, что будет справедливо

$$f(x_1) < f(c) < f(x_2),\ f(x_3) < f(d) < f(x_2),\ f(c) = f(d)$$

(рис. 3), т. е. одному значению $f(x)$ соответствуют два значения x: $x = c$ и $x = d$, и обратной однозначной функции, следовательно, нет. Отсюда и получаем, что монотонность исходной функции необходима.

Достаточность следует из теоремы на стр. 18.

Примеры. 1. $y = x^2$; $x = \pm\sqrt{y}$. Каждому значению исходной функции соответствуют два значения аргумента. Следовательно, y не имеет обратной функции.

2. $y = e^x$; $x = \ln y$; x является обратной функцией y.

3. Функция Дирихле на $[a, b]$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ рациональное} \\ 1, & \text{если } x \text{ иррациональное} \end{cases}$$

не имеет обратной, так как одному значению y, а именно $y = 0$, соответствует бесчисленное множество значений x (все рациональные x на $[a, b]$). По этому значению y невозможно построить все значения соответствующих x. Аналогичные соображения показывают, что не строго

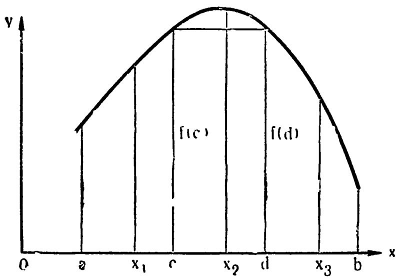


Рис. 3. Немонотонная функция $y = f(x)$ не имеет однозначной обратной функции $x = \varphi(y)$: каждому значению y, например $f(y) = f(d)$, соответствуют два значения x: $x = c$ и $x = d$

монотонная функция тоже не имеет обратной. Можно доказать справедливость следующей теоремы: у строго монотонной непрерывной на $[a, b]$ функции $y = f(x)$ обратная функция $x = \varphi(y)$ тоже строго монотонна и однозначна на интервале $[f(a), f(b)]$.

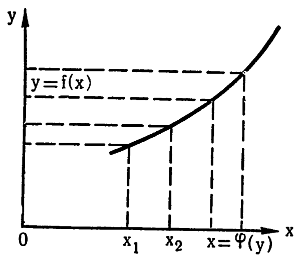


Рис. 4. Рисунок наглядно показывает свойства взаимно обратных функций: их монотонность, непрерывность и т. п.

Все утверждения относительно прямых и обратных строго монотонных функций легко поясняются (и подтверждаются) при рассмотрении чертежа (рис. 4): монотонность обратной функции (считать ли исходной $f(x)$ или $\varphi(y)$); ее однозначность, непрерывность и т. д.

1.3. Существование неявной функции

Функция $y = f(x)$ называется **неявной**, если она задана при помощи неразрешенного относительно y уравнения

$$F(x, y) = 0.$$

Мы рассмотрим вопрос о существовании неявной функции и скажем несколько слов о существовании неявной функции, задаваемой уравнением типа

$$F(x, y, z) = 0.$$

а) Неявная функция одного переменного.

Теорема: пусть функция $F(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям.

1) Она определена и непрерывна в прямоугольнике

$$D = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta;\ y_0 - \Delta', y_0 + \Delta'].$$

2) В центре указанного прямоугольника (x_0, y_0) функция обращается в нуль: $F(x_0, y_0) = 0$.

3) При $x = \text{const}$ производная функция > 0: $F'_y(x, y) > 0$ (может быть и $F'_y(x, y) < 0$).

При этих предположениях уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как однозначную функцию x: $y = f(x)$; эта функция непрерывна и при $x = x_0$ принимает значение

$$y_0 = f(x_0).$$

Мы видим, что теорема формулирует условия существования неявной функции. Переходим к доказательству.

Функция $F(x_0, y)$ равна нулю при $y = y_0$ (условие 2). Так как эта функция возрастает (условие 3), будучи непрерывной (условие 1), то при $y < y_0$ функция $F(x_0, y) < 0$, а при $y > y_0$ эта функция положительна. В силу того же условия непрерывности $F(x, y)$ можно указать на уровне $y - \Delta'$ окрестность $(x \pm \delta, y - \Delta'; 0 < \delta \leqslant \Delta)$, где функция $F(x, y)$ отрицательна, на уровне же $y + \Delta'$ функция положительна в некоторой окрестности $(x \pm \delta, y + \Delta')$. В силу того же условия 1) между $y - \Delta'$ и $y + \Delta'$ обязательно найдется такое значение y, при котором $F(x, y) = 0$[1]. Так как $F(x, y)$ монотонна по y (условие 3), то при любом x внутри промежутка $(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$ найдется только одна точка, в которой $F(x, y) = 0$. Итак, внутри прямоугольника D функция $F(x, y)$ определяет y как однозначную функцию x, т. е. $y = f(x)$. Установим теперь непрерывность функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0). Для $x = x_0$ всегда можно указать такое $\varepsilon > 0$, что $|y - y_0| < \varepsilon$, как только $|x - x_0| < \delta$ (условие 1), а это и доказывает непрерывность функции $f(x)$ в точке. Внутри прямоугольника D можно провести аналогичное доказательство для любого значения x $(x - \delta < x < x + \delta,\ 0 < \delta \leqslant \Delta)$, а это и устанавливает, что уравнение $F(x, y) = 0$ определяет однозначную и непрерывную функцию $y = f(x)$ в D, если соблюдаются перечисленные в теореме условия.

б) Неявная функция двух переменных.

Условия для того, чтобы уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяло z как неявную функцию переменных x, y, отличаются от предыдущего случая лишь тем, что на функцию $F(x, y, z)$ накладывается условие $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, в то время как $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ при непрерывности обеих величин — F и F'_z — в точке (x_0, y_0, z_0).

Допустим, что $F'_z > 0$, т. е. что функция $F(x, y, z)$ возрастает в некоторой достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0, z_0). При достаточно малом $h > 0$ имеем

$$F(x_0, y_0, z_0 + h) > 0,$$
$$F(x_0, y_0, z_0 - h) < 0.$$

В силу непрерывности функции $F(x, y, z)$ можно указать такое η, что при $|x - x_0| < \eta$ и $|y - y_0| < \eta$ указанное свойство функции F будет сохраняться. Ввиду $F'_z \neq 0$, между $z - h$ и $z + h$ найдется одно значение z и притом **точно одно**, удовлетворяющее уравнению

$$F(x, y, z) = 0.$$

Изучение функции в пределах первой заданной окрестности $x_0 \pm \eta$, $y_0 \pm \eta$, $z \pm h$ не означает, что невозможен

[1] Это утверждение опирается на известную теорему, гласящую, что непрерывная функция, принимающая значения разных знаков, обязательно проходит через значение, равное нулю.

выход за пределы этой окрестности. Достаточно от z_0 перейти к другой точке, находящейся в пределах тех же окрестностей $x_0 \pm \eta$, $y_0 \pm \eta$. Рассуждая так же, как и для точки (x_0, y_0, z_0), находим некоторое z_1 и, следовательно, будем иметь для новой области центр (x_1, y_1, z_1) [1]. Эта область будет иметь участки, выходящие за границы первой области с центром в (x_0, y_0, z_0). Переходя таким образом от одной точки к следующей, продвигаемся вдоль линии $L(x, y)$, на которой задана функция $z = f(x, y)$, до тех пор, пока $F'(z) \neq 0$. Таким образом, граница первой области не определяет, вообще говоря, всей области возможного исследования.

[1] Не забудем, что условия теоремы справедливы внутри всей области $x \pm \eta$, $y \pm \eta$.

ГЛАВА ВТОРАЯ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

2.1. Существование производной обратной функции

Функция, обратная заданной $f(x)$, при некоторых условиях обладает производной, находящейся в определенной связи с производной $f'(x)$ заданной функции. Эта связь устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы параграфа 1.2 и, следовательно, имеет непрерывную обратную на $[f(a),\ f(b)]$ функцию. Кроме того, пусть в точке $(x_0,\ y_0)$ существует $0 \neq f'(x) \neq \infty$. Тогда обратная функция $x = \varphi(y)$ обладает в этой точке производной $\varphi'(y) = 1/f'(x)$.

Для получения производной dx/dy надо составить отношение $\Delta x/\Delta y$. Вследствие непрерывности функции $y = f(x)$, $\Delta x \neq 0$, когда $\Delta y \neq 0$. Отношение $\Delta x/\Delta y$ можно выразить через $\Delta y/\Delta x$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}};$$

если положить теперь $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности функции будет стремиться к нулю и Δx, так что предел знаменателя правой части: $\lim \Delta y/\Delta x = f'(x)$.

Одновременно стремится к пределу и левая часть равенства. Этот предел и есть искомая производная:

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi_y'(y).$$

Можно доказать, что производная обратной функции непрерывна на $[f(a),\ f(b)]$. Геометрический смысл теоремы сводится к следующему. Производная $y'(x)$ исходной функции дает, как известно, числовое значение тангенса угла α наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке касания; но эта же касательная образует угол β с осью y (рис. 5), которая является осью аргументов для функции $x = \varphi(y)$. Формула, связывающая производные обеих функций, принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \text{или} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1,$$

т. е. совпадает с известной формулой тригонометрии, связывающей тангенсы углов, сумма которых равна $\pi/2$.

Рассмотрим теперь случай, когда $f'(x) = 0$ в точке (на отрезке производная не может равняться нулю, так как в этом случае $f(x) = \text{const}$ на этом отрезке и, значит, одному значению y соответствует множество значений x, что противоречит предыдущему). Здесь возможны два случая. В первом из них производная меняет в этой точке знак, функция имеет максимум (минимум) и, следовательно, не является монотонной. Этот случай также

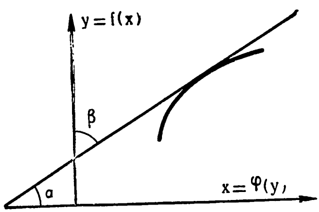


Рис. 5. Геометрическое толкование теоремы о производных взаимно обратных функций: $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$

исключается. Остается одна возможность: производная сохраняет знак, функция монотонна при $x = x_0$ и в окрестности. Примерами могут служить функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^3$ вблизи точки $x_0 = 0$. Функция y_1 здесь имеет минимум и обратной функции в точке и ее окрестности не имеет, функция же y_2 имеет обратную, только в точке $x_0 = 0$ ее производная равна бесконечности, что, между прочим, легко «прочитать» на графике функции $y = x^3$ при $x = 0$: касательная к кривой $x = x(y)$ в этой точке совпадает с осью x и, значит, «вертикальна» относительно оси y.

2.2. Существование производной неявной функции

Пусть дана функция $F(x, y)$, удовлетворяющая условиям теоремы параграфа 1.3; пусть, кроме того, в точке x_0, y_0 существуют непрерывные частные производные F'_x и F'_y, причем $F'_y \neq 0$. В этом случае определяемая уравнением $F(x, y) = 0$ функция $y = f(x)$ имеет в точке (x_0, y_0) непрерывную производную. Справедливость этого положения можно доказать прямым путем, задавая приращение и производя дальнейшие вычисления. Мы приведем более короткое, но не менее строгое доказательство. Известно, что

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F'_x \frac{dx}{dx} + F'_y \frac{dy}{dx} = F'_x + F'_y \cdot y'.$$

Так как в точке (x_0, y_0) функция $F(x, y)$ равна тождественно нулю, то ее полная производная тоже равна нулю:

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0,$$

откуда получается искомая формула для производной в том случае, когда функция одной переменной задана в неявном виде:

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Непрерывность производной y' следует из того, что в ее выражении $\left(y' = -\frac{F'_x}{F'_y}\right)$ в числителе и знаменателе дроби стоят непрерывные функции, причем $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, как то предусмотрено условиями теоремы.

Пример. Пусть функция $y = f(x)$ задана в неявном виде уравнением

$$F(x, y) = e^{x+y} + y - x = 0.$$

Для того, чтобы вычислить производную y как явной функции, надо решить заданное уравнение относительно y, что далеко не просто. Используя формулу для производной неявной функции, легко найти

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^{x+y}-1}{e^{x+y}+1}.$$

Формулы этого параграфа легко обобщаются на случай неявной функции многих переменных. Так, например, при соблюдении условий (эти условия представляют собой расширение условий предыдущей теоремы на случай многих переменных) функция $F\ (x,\ y,\ldots,\ z,\ u)$ определяет одну из переменных, скажем u, как функцию остальных. Можно доказать, что (опять-таки при условиях, аналогичных условиям доказанной теоремы) эта переменная непрерывна и имеет непрерывные производные (в данном случае это будут частные производные) $u'_x,\ u'_y,\ldots,\ u'_z$ по всем аргументам вблизи заданной многомерной точки $(x_0,\ y_0,\ldots,z_0)$.

Следуя той же схеме, нетрудно получить и вторую производную неявной функции, заданной уравнением $F(x,\ y)=0$. Пусть функция $F\ (x,\ y)$ имеет непрерывные производные второго порядка. Тогда выражение для y' мы можем дифференцировать по x, в результате чего получим вторую производную y''. Выполнив дифференцирование, найдем

$$y'' = -\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}y')\,F'_y-(F''_{xy}+F''_{yy}y')\,F'_x}{F'^2_y}.$$

Заменим всюду y' ее выражением и упростим результат. Окончательно получим

$$y'' = -\frac{F''_{xx}F'^2_y-2F'_xF'_yF''_{xy}+F'^2_xF''_{yy}}{F'^3_y}.$$

Аналогично можно вычислить третью производную непосредственным дифференцированием y'' и т. д. Непрерывность производных неявной функции обеспечивается непрерывностью производных функции $F\ (x,\ y)$.

2.3. Пример всюду непрерывной функции, ни в одной точке не имеющей производной

Как известно, непрерывность функции на $[a, b]$ есть необходимое условие существования производной функции на этом промежутке. Издавна было известно, что непрерывная функция может не иметь производной в некоторых точках, например в точках возврата, в прочик же «хороших» точках, где функция изображается «гладкой» кривой, непрерывная функция обладает, вообще говоря, производной. Коротко выражался этот взгляд на существование производной примерно так: «Всякая непрерывная функция обладает производной всюду, за исключением, может быть, некоторых точек». Так обстояло дело до тех пор, пока Вейерштрасс не построил функцию непрерывную, но не имеющую производной ни в одной точке. Этим была доказана независимость двух свойств функции — ее непрерывности и дифференцируемости [1].

После Вейерштрасса такие функции находили (или, если угодно, строили) разные авторы [2]. Ниже приводится функция Ван дер Вардена, также всюду непрерывная и ни в одной точке не имеющая производной.

Введем функцию

$$u_0 = |x - s|,$$

где s — ближайшее к x целое число. Функция u_0 возрастает от нуля до половины, а затем уменьшается до нуля, когда x сравнивается со следующим целым числом. Таким образом, u_0 — периодическая функция с периодом 1 и на протяжении одного периода представляет собой «двускатную крышу». Угловой коэффициент скатов равен $+1$ или -1.

Вводится, далее, последовательность функций u_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$):

$$u_k = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

Каждая функция u_k линейна в промежутке $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$. Ее период равен $1/4^k$. Она непрерывна, представляет со-

[1] На эту независимость указывал Н. И. Лобачевский.

[2] Впрочем, Риман на лекциях приводил примеры подобных функций.

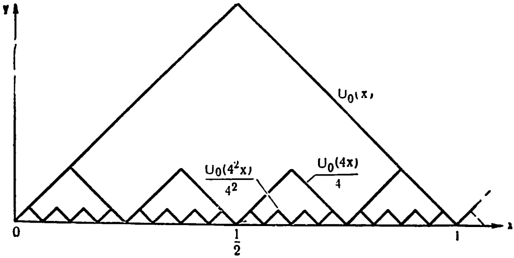


Рис. 6. Графики составляющих функции Ван дер Вардена. Амплитуда и период каждой составляющей в 4 раза меньше амплитуды и периода предшествующей составляющей и в 4 раза больше амплитуды и периода последующей составляющей

бой «двускатную крышу» на протяжении каждого периода. Угловой коэффициент каждого ската равен, как и у u_0, ± 1. Графики функций u_0, u_1, u_2 на промежутке $[0,1]$ изображены на рис. 6. Легко видеть, что функция u_{k+1} имеет период, в 4 раза меньший, чем период функции u_k; ее наибольшее значение в 4 раза меньше, чем у функции u_k.

Введем функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Так как $0 \leqslant u_k < \frac{1}{2 \cdot 4^k}$, то ряд мажорируется геометрической прогрессией $\Sigma \frac{1}{2 \cdot 4^k}$. Известно, что сходимость мажорирующего ряда достаточна для того, чтобы мажорируемый сходился и притом равномерно. Поэтому левая часть последнего равенства имеет смысл: функция $f(x)$ существует и непрерывна. Для вычисления производной в произвольной точке x_0 надо вычислить предел выражения

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Покажем, что $x_n \to x_0$. Для каждого x_0 можно образовать последовательность x_n такую, что

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Действительно, один «скат» опирается на отрезок $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k$:

$$\frac{s+1}{2\cdot 4^n}-\frac{s}{2\cdot 4^n}=\frac{1}{2\cdot 4^n}.$$

Для любого x_0, расположенного на n-ном скате, можно найти такое x_n, что расстояние $|x_n - x_0|$ будет равно половине найденной длины опоры «ската», т. е. $1/4^{n+1}$. Для $n = 1, 2, 3,\ldots$ получаем таблицу:

$$|x_1 - x_0| = \frac{1}{4^{1+1}} = \frac{1}{4^2}$$

$$|x_2 - x_0| = \frac{1}{4^{2+1}} = \frac{1}{4^3}$$

$$|x_3 - x_0| = \frac{1}{4^{3+1}} = \frac{1}{4^4}$$

. . . .

Таблица показывает, что $|x_n - x_0| \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь вычислим величину одного члена последнего ряда. Рассмотрим сперва случай $k < n$; $u_k(x_n)$ и $u_k(x_0)$ находятся на одном «скате». При этом $(x_n > x_0)$:

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\frac{u_0(4^kx_n)-u_0(4^kx_0)}{x_n-x_0}=$$

$$=\frac{1}{x_n-x_0}\left(\frac{|4^kx_n-s|}{4^k}-\frac{|4^kx_0-s|}{4^k}\right)=$$

$$=\frac{4^k|x_n-x_0|}{(x_n-x_0)4^k}=1.$$

В числителе стоит модуль выражения, поэтому знак частного определяется знаком знаменателя, отсюда при $x_n < x_0$ дробь равна -1. Обратимся к случаю $k > n$. Мы знаем, что $|x_n - x_0| = 1/4^{n+1}$.

Положим, для простоты, $x_n > x_0$ и поэтому $|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}}$, как показано выше. Тогда

$$|4^kx_n - s| - |4^kx_0 - s| = 4^kx_n - 4^kx_0 = 4^{k-n-1}$$

есть целое число и, следовательно, член ряда равен нулю. Таким образом, бесконечный ряд превращается в конечный от $k = 0$ до $k = n$ и его величина равна

$$\sum_{k=0}^{n} \pm 1,$$

так что

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{0}^{n} \pm 1.$$

Когда n растет, сумма меняется по величине, будучи четной при n нечетном и нечетной при n четном. Следовательно, левая часть равенства не стремится к определенному пределу и функция $f(x)$ при $x = x_0$ производной не имеет. Грубо, «на пальцах», это можно объяснить так: ломаная, имеющая угловую точку, в этой точке производной не имеет. В то же время ряд таков, что, при каком бы x ни взять точку на графике ряда, обязательно «наткнешься» на угловую точку и поэтому для этой точки производная не вычисляется. Но число членов ряда бесконечно и поэтому в с е точки графика ряда — угловые точки. В результате $f(x)$ не имеет производной ни в одной точке.

На рис. 7 представлен график суммы $u_0 + u_1 + u_2$; при включении последующих «гармоник» угловые точки будут располагаться все гуще и число точек, в которых нет производной, будет неограниченно увеличиваться.

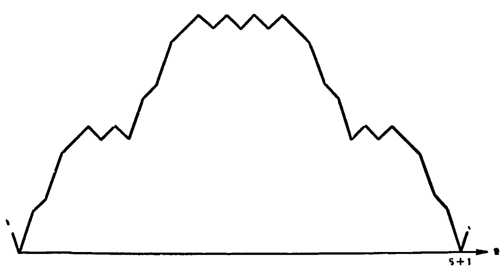


Рис. 7. Начало построения функции Ван дер Вардена. Сложены 3 составляющие. По мере увеличения числа слагаемых количество вершин, в которых функция не имеет производной, неограниченно возрастает.

В заключение скажем несколько слов о функции Вейерштрасса

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty} a^n \cos (b^n \pi x).$$

Как видно, функция Ван дер Вардена построена по тому же принципу, только «волнующийся» косинус заменен зигзагообразной ломаной. Производную для $f(x)$ ни в одной точке построить нельзя, потому что тангенс угла наклона касательной не стремится к определенному пределу: этому препятствует множитель b^n (b — целое нечетное число), появляющийся вне косинуса при дифференцировании. В то же время при условии, что $a<1$ и $ab>1+3/2\pi$ функция $f(x)$ (сумма ряда) существует и непрерывна всюду.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1. Суммы и интегралы Дарбу

Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на некотором отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок произвольным образом на части точками:

$$a = x_0, \ x_1, \ x_2, \ldots, \ x_{n-1}, \ x_n = b.$$

Для каждого частичного промежутка $x_{i+1} - x_i$ обозначим наименьшее значение функции m_i, наибольшее — M_i. Составим суммы

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

где Δx_i — длина i-го промежутка, т. е. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (так как x_i выбраны в порядке возрастания, то всегда $\Delta x > 0$). Разбиение $[a, b]$ произвольно, и Δx, вообще говоря, разной длины. Обозначим через $\Delta_{\max}$ длину наибольшего участка при данном разбиении.

Суммы s и S называются суммами Дарбу — нижней и верхней. Произвольно выбранную на Δx_i точку обозначим ξ_i, так что

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}.$$

По определению величин m_i и M_i имеем:

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i,$$

откуда следует (после умножения на Δx_i и суммирования):

$$s \leqslant \sum f(\xi_i) \, \Delta x_i \leqslant S,$$

что можно выразить так: суммы Дарбу служат точными нижней и верхней границами интегральных сумм, составляемых при всяком разбиении.

Для использования сумм Дарбу существенны их следующие свойства:

1) При увеличении числа точек деления отрезка $[a, b]$ нижняя сумма Дарбу может разве только увеличиваться, верхняя — разве только уменьшаться.

Представим себе, что между точками x_k и x_{k+1} отмечена новая точка x':

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

В новой сумме S' появятся два слагаемых:

$$M_{k_1}(x' - x_k) \qquad \text{и} \qquad M_{k_2}(x_{k+1} - x')$$

вместо одного $M_k(x_{k+1} - x_k)$, бывшего в старой сумме. Наибольшее значение функции на старом отрезке $x_{k+1} - x_k$ равно M_k. Наибольшие значения на двух новых отрезках:

$$M_{k_1} \leqslant M_k \qquad \text{и} \qquad M_{k_2} \leqslant M_k,$$

поэтому

$$M_{k_1}(x' - x_k) + M_{k_2}(x_{k+1} - x') \leqslant$$
$$\leqslant M_k(x' - x_k) + M_k(x_{k+1} - x')$$

или

$$M_{k_1}(x' - x_k) + M_{k_2}(x_{k+1} - x') \leqslant M_k(x_{k+1} - x_k),$$

что и требовалось доказать. Подобным же образом строится доказательство для s.

2) Каждая нижняя сумма не превосходит любой верхней суммы, хотя бы и отвечающей другому разбиению.

Для двух не связанных между собой, т. е. взаимно независимых разбиений, имеем значения s_1 и S_1; s_2 и S_2. Совместим оба разбиения и получим суммы s_3 и S_3. Рассматривая третье разбиение как результат присоединения второго к первому, заключаем на основании первого свойства, что $s_1 \leqslant S_3$. С другой стороны, можно считать, что третье разбиение есть результат присоединения первого разбиения ко второму и, следовательно (на основании, опять-таки, 1-го свойства),

$$S_3 \leqslant S_2.$$

Так как, наконец, $s_1 \leqslant S_3 \leqslant S_2$, то из последних трех неравенств получаем

$$s_1 < S_2,$$

что и доказывает второе свойство сумм Дарбу.

Свойства сумм Дарбу показывают, что множество нижних сумм ограничено сверху, а множество верхних — снизу. Пусть точная верхняя граница s будет I_*, точная нижняя граница S будет I^*. Из предыдущего следует, что $I_* \leqslant I^*$ и, кроме того,

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S.$$

Числа I^* и I_* — верхний и нижний интегралы Дарбу.

Общее условие существования интеграла. Если при некотором разбиении отрезка $[a, b]$ неограниченно увеличивать число n частичных промежутков разбиения, то суммы Дарбу будут стремиться к своим пределам I_* и I^*. В том случае, когда

$$I_* = I^* = I,$$

этот общий предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на $[a, b]$. Приведем теорему, дающую условие существования интеграла.

Теорема. Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{\Delta_{\max}\to 0} (S - s) = 0.$$

3.2. Существование определенного интеграла от непрерывной на [, b] функции

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то определенный интеграл от этой функции на $[a, b]$ существует (говорят также, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$).

Для доказательства потребуется следующее утверждение из учения о непрерывных: для непрерывной на $[a, b]$

функции по любому $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое $\delta > 0$, что при произвольном разбиении на частичные промежутки всегда будет $\omega_i < \varepsilon$, если $\Delta_{\max} < \delta$; при этом ω_i — разность между наибольшим M_i и наименьшим m_i значениями $f(x)$ на участке Δx_i.

Доказательство. Допустим, что произведено разбиение такое, что условие «$\varepsilon - \delta$» выполнено. Тогда

$$\sum_0^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum \Delta x = \varepsilon (b - a).$$

Так как $b - a = \text{const}$, то по теореме о бесконечно малых

$$\lim \Sigma \omega \Delta x = 0,$$

что и доказывает теорему. Переходим теперь к интегрированию разрывных функций. Начнем с простейшего случая.

3.3. Существование определенного интеграла от функции, имеющей конечное число разрывов

Теорема. Если функция $f(x)$ на $[a, b]$ имеет конечное число разрывов, то она интегрируема.

Допустим, что функция имеет k точек разрыва. Обозначим эти точки $x', x'', \ldots, x^{(k)}$. Окружим эти точки окрестностями $\varepsilon^{(i)}$. Обращаем внимание на то, что точек разрыва — конечное число и что они отделены одна от другой, так что каждую из них можно окружить такими окрестностями, взяв отрезок $\varepsilon^{(i)}$ соответственно малым. Пусть длина каждого из отрезков меньше ε. Выберем теперь δ такое, что $0 < \delta < \varepsilon$, и разобьем $[a, b]$ на частичные участки, каждый из которых меньше δ. Те участки, где нет точек разрыва, дают обычные суммы Дарбу:

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon_2 \sum \Delta x = \varepsilon (b - a).$$

Здесь через $\varepsilon_2 > 0$ обозначена верхняя грань функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Иначе обстоит дело с теми точками, где $f(x)$ терпит разрыв. Здесь нельзя полагать, что колебание ω_i на частичном интервале Δx_i меньше любого назначенного числа, как бы мало оно ни было: в этих точках мгновенное изменение значения функции может быть сколь угодно большим. Можно только считать, что изменение к о н е ч н о. Пусть колебание функции на отрезке $[a, b]$ будет Ω,

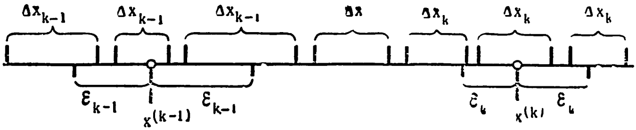


Рис. 8. Покрытие числовой оси x участками Δx произвольной длины; $x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}$ — $(k-1)$-я и k-я точки разрыва; Δx — участок, покрывающий область, где функция непрерывна

Если во всех частичных интервалах колебание ω_i заменить полным колебанием Ω, то, так как $\omega_i \leqslant \Omega$, можно записать для тех частичных интервалов, где точки разрыва окружены окрестностями:

$$\sum \omega_i \Delta x_i \leqslant \Omega \sum \Delta x_i,$$

где Ω уже находится вне нашей власти, но длину Δx_i мы можем менять по желанию. Длину этих участков постараемся выразить через $\varepsilon^{(i)}$-окрестности. Частичные участки Δx_i могут покрывать точки разрыва $x^{(i)}$ с их окрестностями по-разному. Во-первых, некоторые Δx_i могут попасть целиком на частичный участок, содержащий точку разрыва. Таких участков может быть, очевидно, не больше k (напоминаем, что k — число точек разрыва). Во-вторых, некоторые Δx_i могут покрывать участок с точкой разрыва частично — одни слева от точки разрыва, другие — справа. Таких может быть не более $2k$ (рис. 8), а всего — не более $3k$, так что можно составить неравенство

$$\sum \omega_i \Delta x_i \leqslant \Omega \sum \Delta x_i \leqslant \Omega 3k\varepsilon_1.$$

Полная интегральная сумма, распространенная на весь отрезок $[a, b]$, дает:

$$\sum \omega_i'' \Delta x_i + \sum \omega_i' \Delta x_i < \varepsilon_2 (b-a) + \varepsilon_1 \Omega 3k.$$

Отметим, что сколь угодно малые величины ε_1 и ε_2 имеют совершенно различную природу: ε_1 — длина участка; ε_2 — предельное значение колебания функции при данном разбиении *непрерывных* частей $f(x)$ на $[a, b]$. Однако у ε_1 и ε_2 то общее, что оба эти числа — сколь угодно малые, а следовательно, и правая часть последнего неравенства — величина, сколь угодно малая. Отсюда следует, что левая часть неравенства удовлетворяет условию интегрируемости функции (см., например, 3.2) и, таким образом, теорема 3.3 доказана: функция с конечным числом точек разрыва интегрируема. Читатель помнит, конечно, что непрерывная функция тоже интегрируема, так что последняя теорема просто устанавливает, что конечное число разрывов на результат интегрирования не влияет. Однако Риман доказал, что имеются многочисленные случаи, когда интегрируемости функции не мешает и бесконечное множество разрывов. Простейший из этих случаев дается следующей теоремой: монотонная функция $f(x)$ всегда интегрируема. Замечание: в формулировке теоремы ничего не говорится о непрерывности!

Для определенности примем, что $f(x)$ — монотонно возрастающая функция. Ее колебание на Δx_i будет

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = \omega_i,$$

потому что наибольшее значение монотонно возрастающей функции располагается в правой точке замкнутого интервала, а наименьшее — в левой. При некотором $\varepsilon > 0$ пусть

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

При Δx меньше δ будет

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta [f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

и, таким образом, теорема доказана.

3.4. Случай счетного числа разрывов на $[a, b]$. Условие интегрируемости по Риману (R-интегрируемости)

Приведем прежде всего доказательство интегрируемости разрывной функции, принадлежащее самому Риману. Мы сохраняем его собственные формулировки, заменив обозначения и названия общепринятыми в настоящее время.

Промежуток $[a, b]$ разбивается на произвольное число частичных промежутков Δx_i. Через ω_1 обозначается «наибольшее колебание функции между a и x_1, т. е. разность между наибольшим и наименьшим из значений функции в этом промежутке»; так же вводятся «наибольшие колебания» ω_i на остальных частичных промежутках. Так как функция ограничена, то все ω_i конечны, а потому сумма

$$(*)\ \Delta x_1\omega_1 + \Delta x_2\omega_2 + \ldots + \Delta x_n\omega_n$$

стремится к нулю, когда $\Delta x_{\max} \to 0$, где $\Delta x_{\max}$ — наибольший из частичных промежутков при данном разбиении. В процессе уменьшения Δx_i наступит такой момент, что каждый Δx будет меньше d; допустим, что сумма $(*)$ не может при этом превзойти величину Δ ($\Delta \to 0$, когда $d \to 0$). Пусть задана некоторая величина $\sigma > 0$. Тогда пусть сумма длин промежутков, на которых встречаются точки разрыва с колебаниями больше σ, равна s; ясно, что величина $s\sigma$ не может превзойти сумму $(*)$, а значит, и Δ:

$$s\sigma \leqslant \Delta \text{ или } s \leqslant \Delta/\sigma.$$

Но σ — величина заданная, а Δ уменьшается до нуля, когда $d \to 0$. Поэтому и s будет неограниченно уменьшаться, когда $\Delta \to 0$. Все это формулировано Риманом в следующей теореме: для того, чтобы сумма s (интегральная, или риманова сумма заданной функции) сходилась к пределу при $\Delta x_{\max} \to 0$, требуется, чтобы сумма всех промежутков, в которых колебание больше σ, для любого σ при надлежащем выборе d могла быть сделана как угодно малой.

Риман доказал также и теорему, обратную только что установленной:

если функция $f(x)$ конечна и при неограниченном уменьшении всех величин Δx общая сумма s тех промежутков, в которых колебание функции ω_i больше, чем данная величина σ, стремится к нулю, то сумма s стремится к пределу.

Риман заключает: «Мы установили, таким образом, условия, которые необходимы и достаточны для того, чтобы сумма s при неограниченном убывании величин Δx стремилась к определенному пределу и чтобы можно было говорить об интеграле... между a и b от функции $f(x)$».

О характере множества точек разрыва функции Риман, конечно, не говорит ничего, так как в его время теория множеств еще не была разработана, но А. Лебег перевел условие интегрируемости Римана на язык теории множеств (см. 3.6).

Приведем теперь современное доказательство утверждения Римана, использующее идею сумм Дарбу.

На стр. 35, в конце 3.1, сформулировано общее условие существования определенного интеграла. Это центральная теорема теории определенного интеграла. Ввиду важности этой теоремы дадим еще ее формулировку на языке «ε — δ»: для того, чтобы функция была интегрируемой на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что

$$S - s < \varepsilon,$$

когда $\Delta_{\max} < \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что существует $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\Delta x_i < \delta$ будет

$$\left|\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

для произвольного ξ_i. Но так как $s \leqslant \Sigma \leqslant S$, то справедливо

$$I - \varepsilon \leqslant s \leqslant S \leqslant I + \varepsilon,$$

откуда ясно, что $\lim s = \lim S = I$, что и доказывает необходимость.

Столь же просто доказывается и достаточность условия. Допустим, что установлено

$$\lim (S - s) = 0.$$

Это значит, что $S - s < \varepsilon$, или так как $\Sigma f(\xi_i) \Delta x_i$ заключена между s и S, то $| \Sigma f(\xi_i) \Delta x_i - I | < \varepsilon$, где I — общий предел s и S. Последнее неравенство дает

$$\lim_{\Delta_{\max} \to 0} \sum f(\xi_i) \Delta x_i = I,$$

т. е. I — действительно определенный интеграл.

Вспоминая, что $M_i - m_i = \omega_i$, имеем

$$S - s = \sum (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum \omega_i \Delta x_i.$$

При этих обозначениях теорема существования определенного интеграла записывается следующим образом:

$$\lim_{\Delta_{\max} \to 0} \sum \omega_i \Delta x_i = 0.$$

В последней формулировке не только не говорится о том, какое влияние оказывают на условие существования разрывы (если они имеются) функции, но они вовсе не упоминаются. Вместе с тем ясно, что если у непрерывных функций интеграл имеется *всегда*, то вопрос о существовании интеграла ставится только для разрывных функций. В следующем параграфе приводится римановское условие существования интеграла в редакции, данной Лебегом. В этой формулировке разрывы функции выдвинуты на первое место и поэтому условия существования интеграла вытекают непосредственно из того, какими свойствами характеризуется множество точек разрыва.

3.5. Условие интегрируемости функции в смысле Римана (R-интегрируемости) в формулировке Лебега

При внимательном чтении условий интегрируемости функции на $[a, b]$ в формулировке Римана можно заметить, что эта формулировка поддается переводу на язык теории множеств, ибо такое свойство, как возможность заключить множество точек разрыва в интервал определенной длины (в обсуждаемом случае длина интервала равна нулю), конечно, легко выразить в теоретико-множественных терминах. И, действительно, Лебегу принадлежит следующая формулировка условий интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$ в смысле Римана, или, как принято выражаться более сжато, условия R-интегрируемости функции:

«Функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда множество D ее точек разрыва *имеет меру нуль*».

Доказательство этой теоремы строится следующим образом:

а) доказывается, что если мера множества D больше нуля, то функция $f(x)$ неинтегрируема; б) затем доказывается, что если $f(x)$ неинтегрируема, то мера множества D, $m(D)$ больше нуля. Из двух доказанных положений следует, что при $m(D) = 0$ функция может быть только интегрируемой. В самом деле, из б) следует, что если функция неинтегрируема, то $m(D)$ может быть только больше нуля. Следовательно, при $m(D) = 0$ функция может быть только интегрируемой или, другими словами, не может быть неинтегрируемой; с другой стороны, из а) следует, что при $m(D) > 0$ функция *не может быть* интегрируемой. Из совокупности перечисленных ограничений и вытекает редакция (формулировка) Лебега «..тогда и только тогда...»

Докажем теперь а) и б).

а) Покажем, что если множество D имеет меру больше нуля, $m(D) > 0$, то функция $f(x)$ неинтегрируема.

Пусть

$$m(D) = m > 0$$

(мера множества D больше нуля).

Весь промежуток $[a, b]$ разобьем на интервалы точками:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_i < \ldots < a_n = b.$$

Каждые две соседние точки ограничивают один интервал:

$$(*) \qquad a_1 - a_0; \quad a_2 - a_1; \ldots; a_{i+1} - a_i; \ldots$$

Обозначим наибольшее значение функции на протяжении i-го интервала — M_i, наименьшее — m_i; колебание функции на этом интервале

$$\omega_i = M_i - m_i.$$

Меру множества разрывов $|b - a|$ мы обозначили m. Из множества D может выпасть лишь конечное число точек разрыва, случайно совпавших с точками $a_0, a_1, \ldots, a_n$, число которых конечно. Исключение из множества конечного числа точек не изменяет, как известно, меру этого множества.

Пусть Σ' — сумма по тем интервалам, в которых встречаются разрывы. В каждом интервале $a_{i+1} - a_i$, вообще говоря, возможны такие колебания ω_i, что разрыв, имеющийся в этом интервале, меньше колебания в этом интервале. С другой стороны, достаточное раздробление интервалов непрерывной функции может уменьшить колебание на одном интервале до любой заранее намеченной величины. Мы предполагаем, что интервалы таковы, что н е п р е р ы в н ы е участки функции в каждом интервале имеют колебания, меньшие, чем разрыв функции в том же интервале, так что колебание ω_i данного интервала отождествляется с разрывом в данном интервале. Считая, как и раньше, что S и s — верхняя и нижняя суммы Дарбу, можно записать:

$$S - s = \sum (a_{i+1} - a_i)\,\omega_i \geqslant \sum{}' (a_{i+1} - a_i)\,\omega_i.$$

Введем такую величину ξ (она вскоре получит конкретное значение), что колебания в интервалах суммы Σ', т. е. разрывы каждый в отдельности больше этого ξ:

$$\omega_i > \xi.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1}{}' (a_{i+1} - a_i)\,\omega_i > \xi \sum{}' (a_{i+1} - a_i).$$

Последняя сумма равна или превосходит (во всяком случае не меньше) меру множества D:

$$\xi \sum{}' (a_{i+1} - a_i) \geqslant \xi m$$

или

$$S - s \geqslant \xi m.$$

Неравенство показывает, что при наличии разрывов, у которых мера множества $m > 0$, верхняя и нижняя суммы Дарбу не могут стремиться к общему пределу, следовательно (см. 3.1, стр. 25), $f(x)$ неинтегрируема на $[a, b]$. Значит, функция $f(x)$ может быть интегрируемой только и исключительно при $m = 0$; это, между прочим, говорит о необходимости условия $m = 0$ для того, чтобы $f(x)$ была интегрируемой на $[a, b]$.

б) Покажем теперь, что если $f(x)$ неинтегрируема, то $m(D) > 0$, т. е. мера множества разрывов больше нуля.

Колебание $f(x)$ на $|b - a|$ пусть будет Ω. Тогда

$$S - s \geqslant \Omega > 0$$

(функция неинтегрируема!).

Выше введена ξ такая, что часть колебаний функции ω_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ больше ξ. Теперь дадим ξ такое значение:

$$(**) \qquad \xi = \frac{\Omega}{2(b-a)}.$$

Все интервалы $(*)$ разделим на две суммы Σ_1 и Σ_2. В первой сумме объединим те интервалы, в которых встречаются колебания ω_i такие, что $0 \leqslant \omega_i \leqslant \xi$. Тогда сумму Σ_1 можно заменить:

$$\sum\nolimits_1 (a_{i+1} - a_i)\,\omega_i \leqslant \xi \sum (a_{i+1} - a_i).$$

В правой части неравенства Σ_1 заменена полной суммой $\Sigma\,(a_{i+1} - a_i)$, что, конечно, можно сделать ввиду знака $\leqslant$. Теперь можно написать

$$\sum\nolimits_1 (a_{i+1} - a_i)\,\omega_i \leqslant \xi\,(b - a) = \frac{\Omega}{2},$$

что следует из равенства $(**)$.

Оценим теперь сумму Σ_2, где $\omega_i \geqslant \xi$. Так как функция $f(x)$ предполагается ограниченной, $f(x) \leqslant M > 0$, то $M_i \leqslant M$ и $m_i \leqslant M$, вследствие чего $\omega_i = M_i - m_i \leqslant \leqslant 2M$. Сумма Σ_2 может быть оценена так:

$$\sum\nolimits_2 (a_{i+1} - a_i)\,\omega_i \leqslant 2M \sum\nolimits_2 (a_{i+1} - a_i).$$

Пусть все интервалы, входящие в Σ_2, дают сумму L. Тогда

$$\sum\nolimits_2 (a_{i+1} - a_i)\,\omega_i \leqslant 2ML$$

и разность сумм Дарбу будет

$$S - s = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \geqslant \Omega.$$

Теперь можно записать

$$\Omega \leqslant \frac{\Omega}{2} + 2ML,$$

откуда

$$L \geqslant \frac{\Omega}{4M}.$$

Величина M не может равняться нулю. Колебание Ω также не равно нулю, если только функция $f(x)$ не постоянна на $[a, b]$: такой случай, конечно, из рассмотрения исключается. Таким образом, длина промежутков, содержащих разрывы, больше нуля,

$$L > 0.$$

Это неравенство и показывает, что если функция $f(x)$ неинтегрируема, то длина интервалов, содержащих разрывы, не равняется нулю. Проведенное доказательство положения б) не вполне строго, так как полученное значение длины интервалов (меры множества) не дает ответа на вопрос о предельном значении этой длины при уменьшении длин интервалов. Поэтому надо продолжить доказательство в том направлении, чтобы убедиться, что общая длина всех интервалов не стремится к нулю, когда их длины уменьшаются.

Для того, чтобы убедиться в этом, проведем специальную разбивку сегмента $[a, b]$ на интервалы: разобьем его на 2^n равных интервалов, так что длина каждого интервала равна $1/2^n$. Мы начинаем процесс дробления интервалов суммы Σ_2, когда в каждом интервале, входящем в эту сумму, имеется разрыв. Но при дальнейшем увеличении показателя степени n интервалы дробятся так, что появляются такие интервалы, в которых разрывов уже нет. Такие интервалы будем выбрасывать из суммы Σ_2, оставляя только содержащие разрывы. Перед нами ставится вопрос, что останется в сумме, если продолжать процесс дробления интервалов и отбрасывания тех из них, которые оказываются без разрывов. Ясно, что остающаяся часть состоит не из дискретных точек разрыва, так как общая мера любого числа дискретных точек равна нулю, в то время как выше было определено

$$L \geqslant \frac{\Omega}{4M} > 0.$$

По мере отбрасывания все более мелких интервалов, не содержащих разрывов, значок $\geqslant$ в последнем неравенстве будет все больше приближаться к равенству

$$\geqslant \to =,$$

никогда его не достигая. Последнее следует из того, что как бы ни отбрасывались «пустые», т. е. не содержащие разрывов, интервалы, всегда найдутся такие участки «непустых» интервалов, которые при дальнейшем дроблении отпадут (при дальнейшем возрастании n) как уже отдельные интервалы, свободные от разрывов.

Если разрывы — не дискретные точки, то что же они такое? Ответ на этот вопрос состоит в том, что эти разрывы *не* образуют множества дискретных точек. В остальном множество этих разрывов может быть каким угодно. Можно себе представить, например, большое (но конечное) количество сколь угодно коротких (но конечных!) участков разрывов; можно представить, наоборот, сравнительно небольшое количество участков разрывов, зато каждый разрыв — значительной протяженности. Важно лишь, чтобы соблюдалась мера

$$L > \frac{\Omega}{4M} > 0.$$

(Знак = практически неосуществим, как объяснено выше.)

Подведем итоги. На языке теории множеств условие R-интегрируемости выражается так: $f(x)$ на $[a, b]$ неинтегрируема, если мера множества ее разрывов здесь больше нуля; наоборот, если она неинтегрируема, то, значит, мера множества ее разрывов больше нуля. Из этих двух утверждений следует, что если мера множества разрывов некоторой функции не больше нуля (а значит, равна нулю[1]), то такая функция интегрируема.

3.6. Геометрические условия существования определенного интеграла (условия Лебега)

Мы изложим точку зрения Лебега. В этом вопросе он не опирается на собственные идеи ни в смысле понятия меры множества, ни в толковании интеграла. Он рассматривает геометрический смысл интеграла Римана и применяет к нему понятие меры множества в рамках теории Жордана. Тем не менее все рассмотрение, формулировки и доказательства принадлежат самому Лебегу.

Лебег рассматривает интеграл Римана, естественно, как обобщение интеграла Коши на случай разрывной функции. Интеграл Коши он отождествляет с площадью криволинейной трапеции, ограниченной куском кривой, описываемой непрерывной функцией $f(x)$, соответствующим отрезком оси x, т. е. отрезком $[a, b]$, и двумя ординатами $f(a)$ и $f(b)$.

Переходим к случаю, приводящему к интегралу Римана. Лебег предполагает для общности, что график функции $f(x)$ пересекает (один раз или несколько, это неважно) ось абсцисс, так что интеграл определяется как разность между интегралами, вычисленными для участка выше оси x и ниже ее.

Переходя к существу поставленного вопроса, Лебег нигде не рассматривает площадь трапеции; он даже не упоминает это геометрическое понятие. Точки плоскости, входящие в рассмотрение, удовлетворяют единственному условию:

$$0 \leqslant y^2 \leqslant [f(x)]^2,$$

так что $f(x)$ может иметь какую угодно форму. Точки, о которых идет речь, рассматриваются как точки плоского множества $E\{f\}$. Предполагается, что интервал $[0, f(x)]$ может быть как положительным, так и отрицательным, но так как интеграл в случае наличия положительных

---

[1] Меры множеств меньше нуля быть не могут (стр. 13).

и отрицательных частей вычисляется как разность интегралов, то мы здесь ограничимся более простым случаем: пусть отрезок оси x расположен справа от нуля, $b > a > 0$, и $f(x) > 0$ (точки трапеции лежат выше оси x).

Как только что сказано, точки криволинейной трапеции, расположенные между осью x и графиком функции $f(x)$, образуют множество $E\{f\}$. Для того, чтобы вычислить определенный интеграл, надо иметь возможность измерить это множество, а для этого оно должно обладать количественной характеристикой. Такой характеристикой является протяженность, в данном случае двумерного (или поверхностного) множества. Лебег определяет это понятие следующим образом. Пусть (a, b) — интервал (на прямой), содержащий (линейное) точечное множество E. Этот интервал делим на конечное число частичных интервалов, наибольший из которых обозначим λ. Среди этих интервалов есть такие, которые частично выходят за пределы E, иначе говоря, не все точки этих интервалов принадлежат E, другие же интервалы целиком входят в E. Сумма первых пусть будет A, сумма вторых — B. Когда $\lambda \to 0$, суммы A и B в отдельности стремятся к определенным пределам (доказательство обычно мы его опускаем). Предел, к которому стремится сумма A, называется внешней протяженностью множества E:

$$\lim_{\lambda \to 0} A = e_e(E),$$

предел суммы B называется внутренней протяженностью E:

$$\lim_{\lambda \to 0} B = e_i(E).$$

Множество называется измеримым в смысле Жордана, т. е. J-измеримым, когда указанные две протяженности равны. Их общее значение и принимается в качестве протяженности множества $e(E)$:

$$e(E) = e_e(E) = e_i(E).$$

Аналогично и понятие протяженности поверхностного множества. Надо только принять во внимание, что есть кривые, имеющие поверхностную протяженность, не равную нулю. Примером такой кривой может служить кривая Пеано, заполняющая, как известно, квадрат. Мы такими кривыми заниматься не будем. Все кривые, с которыми мы до сих пор имели дело и которые нам встретятся в дальнейшем, имеют поверхностную протяженность, равную нулю.

Возвращаемся к функции $f(x)$. Множество $E\{f\}$, определенное выше, во всяком случае обладает внешней и внутренней протяженностями. Допустим сперва, что это множество неизмеримо. Тогда обе величины e_e и e_i стремятся к разным пределам. Эти пределы совпадают с пределами S и s, т. е. они не что иное, как верхний

$$e_e[E\{f\}] = \overline{\int} f(x)\,dx = I^*$$

и нижний

$$e_i[E\{f\}] = \underline{\int} f(x)\,dx = I_*$$

интегралы Дарбу. Таким образом, задача снова привелась к интегралам Дарбу, которые получают теперь геометрическую трактовку. Отсюда переход к окончательному результату уже прост: множество $E\{f\}$ измеримо тогда и только тогда, когда верхний и нижний интегралы совпадают:

$$I^* = I_* = I$$

или

$$I = \int f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx = \underline{\int} f(x)\,dx.$$

Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема R (т. е. в смысле Римана; это уточнение стало необходимым после появления интеграла Лебега), необходимо и достаточно, чтобы множество $E\{f\}$ было J-измеримым.

Такова геометрическая трактовка существования определенного интеграла, данная Лебегом. Заметим, что его подход совершенно оставляет в стороне вопрос о непрерывности функции, подлежащей интегрированию. Рассматривается гораздо более общий вопрос — о свойствах множества.

3.7. Интегрируемая функция, имеющая бесконечное множество разрывов

Риман, сформулировав условие интегрируемости, предложил в качестве иллюстрации функцию, оставшуюся в теории интегрирования под названием функции Римана. Она действительно может быть проинтегрирована в любых пределах и при этом обладает всюду плотным множеством разрывов. Нетрудно видеть, что все разрывы можно заключить в промежутки, общая протяженность которых равна нулю, или, говоря языком теории множеств, функция обладает счетным множеством разрывов, которое, как известно, имеет меру нуль.

Риман предложил функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)^1, \tag{1}$$

где (x) — разность между данным значением x и ближайшим к нему целым числом, например k. Задается (x) следующим образом:

$$(x) = \begin{cases} x - k, & \text{когда} \quad x \neq k + \frac{1}{2}. \\ 0, & \text{когда} \quad x = k + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Эта функция, очевидно, непрерывна всюду, кроме точки $k + {}^1/_2$. В точке $x = k$ величина $(x) = 0$ и линейно возрастает до точки $x = k + {}^1/_2$. В этой точке (x) равнялось бы ${}^1/_2$, но здесь функция $=0$, следовательно, терпит разрыв слева; в этой же точке разность между x и ближайшим целым числом справа равна $-{}^1/_2$; начинается вторая серия значений (x), а именно — снова возрастающая линейная функция, приходящая в точку $k + 1$ со значением $(x) = 0$. Таким образом, в точке $x = k + {}^1/_2$ функ-

[1] Каждая из функций $f_n(x) = \frac{(nx)}{n^2}$ обладает счетным множеством разрывов, потому что ее периоды можно снабдить натуральным индексом и в каждом таким образом занумерованном периоде находится один разрыв, тем самым также занумерованный. В функции $f(x)$ содержится счетное множество функций $f_n(x)$. Всего разрывов, следовательно,— счетное множество в квадрате, что дает, как известно, счетное множество.

ция имеет скачок $^1/_2 - (-^1/_2) = 1$. Полный же период функции равен единице. Второй член ряда $2x/2^2$ есть также линейная функция, но уже с периодом, равным $^1/_2$. В самом деле, когда $x = k + {^1/_2}$, $2x = 2k + 1$, т. е. целому числу, следовательно, $(2x) = 0$, т. е. в точке $x = k + {^1/_2}$ эта функция равна нулю. То же значение она имеет и в точке $k + 1$, так как $2x = 2k + 2$ — опять-таки целое число. Прямая $2x/2^2$ имеет угловой коэффициент, равный половине, так как в точке $x = {^1/_4}$ функция равна $\frac{2 \cdot {^1/_4}}{2^2}$, т. е. $^1/_8$. То же повторяется и на втором периоде от $k + {^1/_2}$ до $k + 1$.

Третий член ряда $f_3(x) = (3x)/3^2$ имеет период, равный, очевидно, $^1/_3$, так как $(3x) = 0$ при $3x = 1$, что дает ближайшее число. При $x = {^1/_2}$ периода $= {^1/_6}$ функция терпит скачок от $\frac{3 \cdot {^1/_6}}{3^2} = \frac{1}{18}$ до $-\frac{3 \cdot {^1/_6}}{3^2} = -\frac{1}{18}$, а всего $^1/_9$. На промежутке 1 укладываются точно три периода. Впрочем, 1 и вообще всякое целое число есть граница в с е х периодов, так как длина любого из них выражается числом $^1/_n$, где n — целое число (рис. 9). Все четные члены ряда равны нулю в точках $x = k + {^1/_2}$, все нечет-

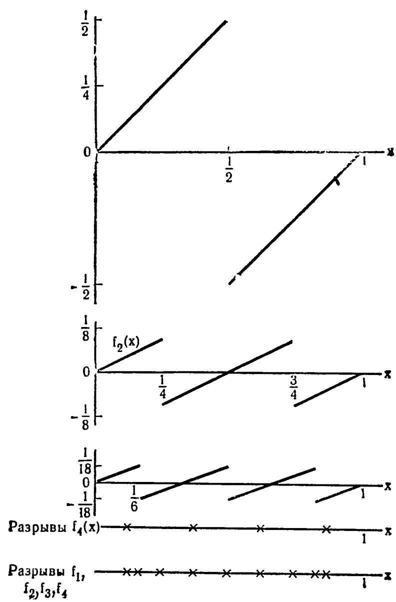


Рис. 9. Графики трех составляющих функции Римана и ее разрывов. Угол наклона составляющей уменьшается с возрастанием ее номера. Число разрывов постоянно растет (нижняя часть графика)

ные имеют в этих точках разрыв (скачок). Скачки членов ряда, накладываясь один на другой, не уменьшают друг друга, так как все они одного знака. На том же рис. 9 внизу показано расположение точек разрыва 4-го члена ($f_4(x)$), ниже — точки разрыва первых четырех членов ряда. При увеличении числа слагаемых число точек разрыва, как видно из рисунка, неограниченно растет, так что при $n \to \infty$ плотность их неограниченно возрастает, оправдывая свойство функции $f(x)$: число точек разрыва всюду плотно, так что между двумя любыми значениями x находится сколь угодно большое число разрывов.

При переходе к интегрированию $f(x)$ обнаруживается, что эта операция не представляет интереса. В самом деле, линейная функция при интегрировании даст только параболы 2-й степени. Некоторый, скорее спортивный, интерес представляло бы только нахождение системы подстановки пределов интегралов. Для каждой функции $f_n(x)$ такую систему можно найти. Ясно, что, например, интеграл в пределах между целыми числами равен нулю, так как между этими пределами укладывается целое число периодов всех функций — членов ряда. Мало того, если вычислять интеграл от $f(x)$ в пределах между целым числом (нижний предел интегрирования для простоты рассуждения будем считать целым числом) и рациональной дробью p/q (p, q — взаимно простые числа) в качестве верхнего предела, то все члены ряда, имеющие периоды $1/q$, $1/2q$, $1/3q, \ldots$, дадут интегралы, равные нулю, так как на длине промежутка p/q уложится целое число периодов всех таких членов ряда. На любом промежутке — расстоянии между верхним и нижним пределами определенного интеграла от $f_n(x)$ — каждый член ряда, у которого длина периода меньше $1/q$, даст один или несколько целых периодов и некоторую часть периода. Вклад в интеграл даст только одна дробная часть периода, так как все целые периоды дадут нули. Только в том случае, когда в качестве верхнего предела берется дробь с иррациональным знаменателем, можно рассчитывать на то, что все составляющие функции внесут свой вклад в интеграл от этой функции.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ

4.1. Существование первообразной у непрерывной функции. Первое доказательство

Вопрос о существовании первообразной у непрерывной функции — основной вопрос интегрального исчисления. Надо иметь в виду, что все случаи, когда интегрируемая функция разрывна, рассматриваются как расширение понятия интеграла именно от непрерывной функции; кроме того, вычисление определенного интеграла производится (в настоящее время) исключительно через первообразную. Здесь приводится геометрическое доказательство основной теоремы интегрального исчисления.

Теорема: всякая непрерывная функция $f(x)$ есть производная от некоторой непрерывной функции $F(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Доказательство. Пусть в некоторой системе координат задана непрерывная функция $f(x)$ (рис. 10). Площадь S криволинейной трапеции $xNMa$ вычисляется

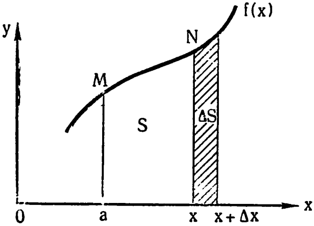


Рис. 10. Геометрическое представление определенного интеграла. S — площадь криволинейной трапеции; ΔS — приращение площади

с помощью определенного интеграла:

$$S = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Изменим для удобства дальнейших рассуждений переменную интегрирования так, что формула будет иметь вид

$$S = \int_a^x f(t)\,dt,$$

и тогда будет ясно, что S есть функция верхнего предела интеграла

$$S = S(x).$$

Поставим себе цель: найти производную этой функции. Для этой цели надо вычислить величину

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}.$$

Придать приращение x — это значит передвинуть направо (примем, что $h > 0$) правую границу криволинейной трапеции. Тогда приращение ΔS площади S будет выражаться площадью трапеции, опирающейся на отрезок оси

$$(x + h) - x = h.$$

Величина этого приращения может быть записана следующим образом:

$$\Delta S = \int_a^{x+h} - \int_a^x = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Производная принимает вид:

$$S' = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}.$$

Так как функция $f(x)$ (или $f(t)$) не дана, то вычислить $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ нельзя. Заменим его с помощью теоремы о среднем:

$$S' = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)-x]\, f(\xi)}{h}, \quad x < \xi < x+h$$

или

$$S' = f(x).$$

Производная от площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции $f(x)$, равна этой подынтегральной функции.

Обычно первообразную обозначают $F(x)$, и получается известное выражение

$$F'(x) = f(x).$$

Необходимо отметить, что такой видный специалист, как академик Н. Н. Лузин, считал геометрическое доказательство основной теоремы интегрального исчисления совершенно неудовлетворительным. Вот его подлинные слова [1]: «С логической точки зрения доказательство это является сплошным недоразумением, основанным на смешении понятий: «часть плоскости» и «площадь»». И далее: «Вопрос о том, что именно считать за «площадь» данной геометрической фигуры, далеко не так прост, как это кажется на первый взгляд» [2]. Действительно, имеются, как известно, кривые с ненулевой площадью, и вопрос о площади, ограниченной некоторой кривой фигуры, вообще говоря, совершенно не определен.

Переходим к доказательству, опирающемуся на теорию определенного интеграла.

4.2. Существование первообразной у непрерывной функции. Второе доказательство

Можно совершенно отказаться от геометрической иллюстрации предыдущих формул и трактовать их чисто аналитически: пусть $F(x)$ есть первообразная, $F(x+h) - F(x)$ — ее приращение. Пусть, кроме того,

---

[1] Н. Н. Лузин. Теория функций действительного переменного. М., 1948, стр. 282.
[2] Там же, стр. 283.

на промежутке h два значения $x = x_0$ и $x = x_1$ таковы, что $f(x_0)$ — наибольшее значение $f(x)$ на этом промежутке и $f(x_1)$ — наименьшее. Очевидно,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \lim \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta t_k,$$

где $x = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = x + h$ — точки деления интервала от x до $x + h$ и $\Delta_{\max} \to 0$, когда $n \to \infty$. Кроме того, полагаем $h > 0$. Вспоминая значения $f(x_0)$ и $f(x_1)$, можно написать:

$$\frac{1}{h} f(x_0) \sum_{k}^{n} \Delta t_k \geqslant \frac{1}{h} \sum_{k}^{n} f(t_k) \Delta t_k \geqslant \frac{1}{h} f(x_1) \sum_{k}^{n} \Delta t_k.$$

Так как $\sum \Delta t_k = h$, то последние неравенства принимают вид:

$$f(x_0) \geqslant \frac{1}{h} \sum f(t_k) \Delta t_k \geqslant f(x_1),$$

или в пределе $(n \to \infty, \ \Delta t \to 0)$

$$f(x_0) \geqslant \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\, dt \geqslant f(x_1),$$

или, пока еще $h \neq 0$,

$$f(x_0) \geqslant \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geqslant f(x_1).$$

Пусть теперь $h \to 0$. Тогда $f(x_0) \to f(x)$ и $f(x_1) \to f(x)$, а средняя часть неравенства стремится к производной:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Теорема доказана. Это доказательство с логической стороны не вызывает упреков. Его недостаток (очень крупный с исторической и педагогической точек зрения) состоит в том, что «вычисление определенного интеграла обычно происходит б л а г о д а р я п р е д в а р и т е л ьному знанию первообразной по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

но не наоборот»[1].

Следующее доказательство не опирается ни на сложное понятие площади (фигуры), ни на понятие определенного интеграла. Из всех доказательств основной теоремы интегрального исчисления оно, по-видимому, самое удовлетворительное.

4.3. Существование первообразной у непрерывной функции. Третье доказательство

Выше были приведены два доказательства, очень часто встречающиеся в курсах интегрального исчисления (поэтому и помещенные здесь) и обладающие существенными недостатками.

Приведем доказательство Лебега, наиболее удовлетворительное из имеющихся, как сказано в конце предыдущего параграфа.

Для проведения доказательства потребуются следующие утверждения:

1) непрерывность первообразной;

2) теорема Вейерштрасса: всякая непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ может быть представлена правильно сходящимся на этом сегменте рядом многочленов

$$P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x) + \ldots;$$

3) лемма Лебега: сумма $u(x)$ правильно сходящегося ряда

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots$$

производных есть производная.

Допустим сперва, что эти утверждения доказаны. Тогда из теоремы Вейерштрасса и леммы Лебега следует, что всякая непрерывная функция $f(x)$ есть производная от

---

[1] Н. Н. Лузин. Теория функций действительного переменного, стр. 286.

некоторой непрерывной функции $F(x)$, иными словами, у каждой непрерывной функции есть первообразная. Докажем это.

Во-первых, всякая непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция может быть представлена как сумма правильно сходящегося ряда многочленов (по теореме Вейерштрасса):

$$f(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_n(x) + \dots.$$

Здесь каждый многочлен $P_i(x)$ есть сумма конечного числа членов вида $a_i x^i$ ($i = 1, 2, \dots$). Такой член есть, очевидно, производная от непрерывной функции $a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$, откуда и следует, что всякий многочлен $P_i(x)$ есть производная. Следовательно, сумма этого ряда производных есть производная (по лемме Лебега); это и есть основная теорема интегрального исчисления: *непрерывная функция* (сумма членов ряда и в то же время заданная функция $f(x)$) *есть производная некоторой другой непрерывной*. Теорема доказана, но теперь надо доказать те три положения, на которые опирается доказательство основной теоремы интегрального исчисления, предложенное Лебегом.

1. Всякая функция, имеющая производную в некоторой точке (т. е. при некотором значении x), непрерывна в этой точке.

Доказательство этой теоремы очень просто.

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x).$$

Так как знаменатель дроби стремится к нулю, то для того, чтобы дробь стремилась к определенному пределу, необходимо, чтобы числитель тоже стремился к нулю:

$$\lim_{h \to 0} [F(x+h) - F(x)] = 0,$$

а это, по определению, и означает, что $F(x)$ непрерывна.

2. *Теорема Вейерштрасса.* Доказательство этой теоремы довольно громоздко, и так как теорема не относится к разряду «теорем существования», то доказательство ее опускаем. Ограничимся указанием, что доказательство состоит в представлении некоторой ломаной $L(x)$ в виде ряда многочленов, что легко себе

представить, поскольку ломаная есть последовательность линейных отрезков с разными угловыми коэффициентами и разной длины. С другой стороны, в силу равномерной непрерывности $f(x)$ можно разбить $[a, b]$ на столь малые участки точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, что (при достаточно большом n) будет достигнуто $|f(x) - L(x)| < \varepsilon$ на всем сегменте $[a, b]$ именно вследствие равномерной непрерывности функции, которая обеспечена теоремой Кантора, говорящей, что если функция непрерывна на сегменте, то она непрерывна равномерно, а это и означает, что функция может как угодно близко изображаться многочленами.

3. Переходим к доказательству леммы Лебега, которое проведем исчерпывающе, так как она входит непосредственно в теорему существования.

Итак, надо доказать, что имеется функция $U(x)$ такая, что

$$U'(x) = u(x), \tag{*}$$

где $u(x)$ есть сумма сходящегося ряда

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

и где каждый член есть производная соответствующей ему функции

$$u_n(x) = U_n'(x).$$

Рассмотрим ряд

$$[U_1(x) - U_1(c)] + [U_2(x) - U_2(c)] + \ldots$$
$$\ldots + [U_n(x) - U_n(c)] + \ldots, \tag{**}$$

где произвольное число c находится на $[a, b]$:

$$a \leqslant c \leqslant b.$$

По теореме Лагранжа

$$\frac{U_n(x) - U_n(c)}{x - c} = U_n'(\xi) \qquad \begin{matrix} x < c < b & \text{или} & b < c < x \\ x < \xi < c & \text{или} & c < \xi < x. \end{matrix}$$

Но так как $U'_n(x) = u_n(x)$ (см. (*)), то формула Лагранжа дает

$$\frac{U_n(x) - U_n(c)}{x - c} = u_n(\xi).$$

Наложим на ряд

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots$$

условие, чтобы он был правильно сходящимся. Это значит, что должен быть такой числовой сходящийся ряд $(A_n > 0)$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots,$$

что, начиная с достаточно большого номера n, будет справедливо

$$u_n(x) < A_n.$$

По условию и x, и c находятся на сегменте $[a, b]$, поэтому разность $x - c$ во всяком случае меньше, чем $b - a$. Кроме того, $u_n(\xi)$ меньше A_n. Поэтому произведение $(b - a) A_n$ больше, чем $(x - c) u_n$ и из формулы Лагранжа получаем

$$|U_n(x) - U_n(c)| < (b - a) A_n.$$

Следовательно, ряд (**) — правильно сходящийся, и, значит, сумма этого ряда $U(x)$ есть функция непрерывная (числовой ряд $- U_1(c) - U_2(c) \ldots$ на непрерывность суммы, конечно, не влияет). Нам необходимо было убедиться в этой непрерывности, так как будет показано, что функция $U(x)$ есть первообразная, а таковой может быть только непрерывная.

Докажем теперь, что производная суммы ряда $\Sigma U_i(x)$ есть сумма ряда $u(x) = \Sigma u_i(x)$, в чем и заключается содержание леммы.

Равенство, которое требуется доказать,

$$U'(x) = u(x)$$

(см. (*)), можно записать и так:

$$\lim_{h \to 0} \frac{U(x + h) - U(x)}{h} = u(x)$$

или, при всяком $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{U(x+h)-U(x)}{h}-u(x)\right|<\varepsilon \qquad (***)$$

для любого фиксированного x, $a \leqslant x \leqslant b$ и при неограниченно убывающем h.

Далее мы поступим следующим образом: каждый из имеющихся здесь рядов разобьем на две части: одну — с постоянным числом членов и вторую — остаток. Тогда последнее неравенство разобьется на несколько неравенств, из которых то, которое будет составлено из первых частей рядов, даст нужный результат, а «остатки» войдут в ε — величину бесконечно малую, и таким образом будет завершено доказательство. Выполним намеченный план.

Разобьем ряд $u(x)$ на две суммы (так можно говорить, потому что $u(x)$ — ряд сходящийся; то же относится и к следующему разбиению); обозначим через $\sigma_m(x)$ первую часть исходного ряда:

$$\sigma_m(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_m(x)$$

и через $\rho_m(x)$ — «остаток»:

$$\rho_m(x)=u_{m+1}(x)+\ldots .$$

Подобным же образом разбиваем ряд $U(x)$:

$$S_m(x)=[U_1(x)-U_2(c)]+[U_2(x)-U_2(c)]+\ldots$$
$$\ldots+[U_m(x)-U_m(c)],$$
$$R_m(x)=[U_{m+1}(x)-U_{m+1}(c)]+\ldots,$$

так что

$$u(x)=\sigma_m(x)+\rho_m(x) \quad \text{и} \quad U(x)=S_m(x)+R_m(x).$$

При этих обозначениях левая часть неравенства (***) перепишется в следующей форме (знак модуля временно опущен):

$$(A) \quad \frac{U(x+h)-U(x)}{h}-u(x)=$$
$$=\left[\frac{S_m(x+h)-S_m(x)}{h}-\sigma_m(x)\right]+$$
$$+\left[\frac{R_m(x+h)-R_m(x)}{h}-\rho_m(x)\right].$$

Каждый член ряда $u(x)$ есть производная соответствующей функции $U(x)$, поэтому $\sigma_m(x)$ есть сумма конечного числа (m) производных. $S_m(x)$ есть сумма конечного числа первообразных. Поэтому при достаточно малых h первая разность в правой части последнего равенства может быть сделана как угодно малой, например,

$$\left|\frac{S_m(x+h)-S_m(x)}{h}-\sigma_m(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3};$$

далее понятно следующее преобразование:

$$\begin{aligned} R_m(x+h)-R_m(x) &= \sum_{k=m+1}^{\infty}[U_k(x+h)-U_k(c)]- \\ &\quad -[U_k(x)-U_k(c)]= \\ &= \sum_{k=m+1}^{\infty}[U_k(x+h)-U_k(x)]; \end{aligned}$$

воспользуемся снова формулой Лагранжа:

$$\frac{U_k(x+h)-U_k(x)}{h}=U'(\xi) \qquad x<\xi<x+h,$$

так что последняя сумма примет вид

$$\sum hU_k'(\xi),$$

и так как $U_k'=u_k$, а ряд u_k мажорируется при достаточно большом k рядом A (см. стр. 60), то в результате получаем

$$\left|\frac{R_m(x+h)-R_m(x)}{h}\right|<\sum u_k(\xi)\leqslant\sum A_k,$$

но так как ряд A — сходящийся, то можно выбрать настолько далекое k, что будет достигнуто

$$\left|\frac{R_m(x+h)-R_m(x)}{h}\right|<\sum A_k<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец остается ρ_m:

$$|\rho_m(x)|=\sum_{m=1}^{\infty}|u_k(x)|<A_k<\frac{\varepsilon}{3}.$$

В равенстве (A) заменяем члены в правой части и приходим к неравенству

$$\left|\frac{U(x+h)-U(x)}{h}-u(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

при достаточно малом h и достаточно больших m и k.

Полученное выражение показывает, что функция $U(x)$ действительно есть первообразная функции $u(x)$ или что сумма ряда производных $\Sigma u_n(x)$ есть действительно производная (функции $U(x)$), а это и утверждает лемма Лебега.

Таким образом, обоснование доказательства Лебега того, что всякая непрерывная имеет первообразную, полностью закончено.

4.4. Существование первообразной при конечном числе точек разрыва

Допустим, что $f(x)$ удовлетворяет всем наложенным на нее выше условиям, за исключением того, что на $[a, b]$ имеется одна точка, назовем ее c, где функция терпит разрыв (первого рода).

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

или, разбивая область интегрирования на три подобласти

$$[a, c-\varepsilon],\quad [c-\varepsilon, c+\varepsilon],\quad [c+\varepsilon, b]$$

и замечая, что в двух из них, а именно в крайних, нет особых точек, можем записать наш интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Два крайних интеграла в правой части последнего равенства — это интегралы тех подобластей, где нет особой точки. Когда $\varepsilon\to 0$, эти интегралы стремятся к $F(c-\varepsilon)-F(a)$ и $F(b)-F(c+\varepsilon)$, а средний интеграл стремится к $[F(c+0)-F(c-0)]$, и так как первообразная в точке c терпит разрыв, то последняя разность не равна нулю:

$$F(c+\varepsilon)-F(c-\varepsilon)=\Delta_c,$$

где Δ_c — скачок первообразной в точке c.

Если на $[a, b]$ имеется конечное число точек типа c, то область $[a, b]$ разбивается на частичные интервалы так, чтобы в каждом была одна точка разрыва, и тогда результат интегрирования примет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)-\sum_1^n \Delta_k,$$

где Δ_k — скачки первообразной в каждой из особых точек, число которых мы обозначили через n.

Очевидно, последняя формула переходит в обычную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

когда первообразная непрерывна на $[a, b]$. Заметим, что последняя формула остается справедливой и в том случае, когда подынтегральная функция принимает внутри области интегрирования бесконечные значения. Непрерывность первообразной на $[a, b]$ — необходимое условие существования интеграла. Без соблюдения этого условия обычная формула интегрального исчисления (формула Ньютона — Лейбница) неприменима. Пусть, например, функция $f(x)$ обращается в бесконечность в точке c, $a<c<b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Заменяя интегралы первообразными, последние равенства можно переписать:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}F(c-\varepsilon)-F(a)+F(b)-\lim_{\varepsilon\to 0}F(c+\varepsilon).$$

По предположению $F(x)$ непрерывна всюду на $[a, b]$, значит, и в точке c. Поэтому $F(c-\varepsilon)$ и $F(c+\varepsilon)$ стремятся к общему пределу и

$$\int_a^b = F(b) - F(a).$$

П р и м е р. Вычислить

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}}.$$

Подынтегральная функция $f(x) = x^{-2/3}$ терпит разрыв на $[-1, +1]$, но первообразная

$$F(x) = 3x^{1/3}$$

непрерывна, поэтому результат интегрирования будет

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}} = (3x) \Big|_{-1}^{+1} = 6.$$

Если же первообразная $F(x)$ сама обращается в бесконечность, то основная формула неприменима.

ГЛАВА ПЯТАЯ

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

5.1. Существование двойного интеграла

Для удобства дальнейшего изложения введем некоторые термины и обозначения. Речь пойдет о двумерной области (P), на которой определена рассматриваемая функция $f(x, y)$ двух переменных. Область (P) будет разбиваться на частичные области. Кривые, ограничивающие область (P) и каждую частичную область (P_i), имеют, согласно принятому допущению, площадь, равную нулю, так что понятие площади (P) или (P_i) не связано с какими-либо трудностями. В пределах i-й области выбирается произвольная точка (ξ_i, η_i), в которой значение функции будет $f(\xi_i, \eta_i)$. Обозначим через λ наибольший из диаметров частичных областей (P_i) и через σ — интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i,$$

где P_i — площадь области (P_i). Теперь понятно следующее обозначение двойного интеграла

$$I = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i.$$

Перейдем к выяснению условий существования двойного интеграла. Прежде всего, интегрируемая функция должна быть ограниченной. В самом деле, если бы это было не так, то при соответствующем выборе точек (ξ_i, η_i) в некоторых частичных областях можно было бы сделать по меньшей мере одно слагаемое в интегральной сумме бесконечным и ни о каком стремлении этой суммы к пределу не могло быть и речи. А ведь определенный интеграл есть п р е д е л интегральной суммы!

Введем числа m и M такие, что

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

и подобные же пары m_i, M_i для каждой частичной области. Тогда оказывается возможным построить суммы Дарбу:
нижнюю —

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i$$

и верхнюю —

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i,$$

причем для каждого способа разбиения (P) на частичные области пары s, S будут различными. При этом, понятно,

$$s \leqslant \sigma \leqslant S$$

и суммы s и S служат точными нижней и верхней гранями для σ.

Как и для линейного случая, суммы Дарбу обладают следующими свойствами:

1) при дроблении частичных областей (т. е. при возрастании n и уменьшении λ) нижняя сумма не убывает, верхняя — не возрастает.

2) каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы, хотя бы отвечающей и другому способу разбиения области (P).

Доказательства аналогичны тем, что приведены в 3.1 для линейного случая, с тем отличием, что вместо точек говорится о линиях деления. Так же устанавливаются пределы сумм s и S:

$$\lim s = I_* \text{ и } \lim S = I^*,$$

причем

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S$$

и тогда доказывается обусловливающая существование двойного интеграла теорема: для существования двойного интеграла необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim (S - s) = 0.$$

Если воспользоваться введенными выше величинами m_i и M_i, то условию существования можно придать другую, часто применяемую форму:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i = 0, \tag{*}$$

где $\omega_i = M_i - m_i$.

Исходя из этого общего условия существования, можно выделить несколько важных частных случаев.

1. Всякая непрерывная в области (P) функция $f(x, y)$ интегрируема.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области, то она здесь непрерывна равномерно. Поэтому для каждого заданного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\lambda > 0$, что когда у частичной области диаметр меньше λ, то колебания функции (всюду! — теорема Кантора) меньше ε. Допустим, что разбиение произведено так, что все диаметры меньше λ. Тогда все колебания $\omega_i < \varepsilon$;

$$\sum \omega_i P_i < \varepsilon \sum P_i = \varepsilon P$$

и так как P — число, а ε — произвольно, то условие интегрируемости (*) выполнено и предложение доказано.

2. Функция $f(x, y)$ интегрируема, если у нее есть разрывы только на конечном числе кривых с площадью, равной нулю.

Разобьем $\Sigma \omega_i P_i$ на две части:

$$\sum \omega_i P_i = \sum \omega_{i'} P_{i'} + \sum \omega_{i''} P_{i''}.$$

В первую сумму войдут те слагаемые, где функция не имеет разрывов, во вторую — те, где разрывы есть. Но так как по условию площади кривых, на которых имеются разрывы функции, равны нулю, то, окружая эти кривые контурами, общая площадь которых меньше ε, получаем

$$\sum \omega_{i''} P_{i''} < \Omega\varepsilon,$$

где Ω — наибольшее колебание функции в области (P). Так как сумма $\Sigma\omega_{i'}P_{i'}$ не включает разрывов, то она меньше εP, поэтому

$$\sum \omega_i P_i = < \varepsilon P + \Omega\varepsilon = \varepsilon(P + \Omega)$$

и, ввиду произвольности ε, условие интегрируемости (*) выполняется. Последний случай (конечное число линий разрыва) может быть рассмотрен несколько иным образом (рис. 11).

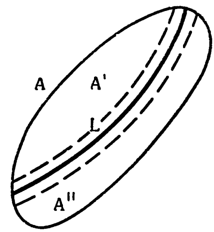


Рис. 11. Вычисление двойного интеграла по области в том случае, когда разрывы подынтегральной функции находятся на линии L

Допустим, что функция $f(x, y)$ рассматривается на области A и, будучи непрерывной на A, имеет разрывы лишь вдоль линии L. Окружим линию L настолько малой областью, чтобы площадь этой области была меньше $\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{M-m}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно, M и m, как всегда,— наибольшее и наименьшее значения функции на A. Область A разделяется на три подобласти: A' и A'', не включающие линии L, и область A''', включающую эту линию. Первые две области дают сколь угодно близкие суммы S и s, так что их разность меньше $\varepsilon/2$. Область A''' дает разность, меньшую, чем $\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{M-m}(M-m) = \frac{\varepsilon}{2}$, и, таким образом, общая разность $S - s$ во всей области A

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. общее условие существования двойного интеграла выполнено.

Второе из приведенных доказательств особенно ярко оттеняет требование, чтобы площадь линии L была равна нулю.

Итак, подынтегральная (ограниченная) функция может иметь разрывы, и эти разрывы не влияют на величину двойного интеграла, если они располагаются на конечном числе кривых, общая площадь которых равна нулю. Это свойство двойного интеграла является частным случаем следующего: существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа кривых с площадью, равной нулю.

5.2. Условия существования тройного интеграла

Обозначения и термины этого параграфа вполне аналогичны тем, что введены в § 5.1. Будет рассматриваться функция $f(x, y, z)$ в пространственной области (v), причем принимается, что поверхность, ограничивающая эту область, имеет объем, равный нулю. Область (v) разбивается произвольным образом на частичные области (v_i) с соответствующими объемами v_i. В i-м объеме v_i выбирается точка (ξ_i, η_i, ζ_i), в которой рассматриваемая функция $f(x, y, z)$ принимает значение $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Далее, составляется произведение $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, v_i$; тогда предел интегральной суммы

$$\sigma = \sum_{i}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, v_i$$

при стремлении к нулю диаметра λ — наибольшего из диаметров частичных областей — называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ в области (v). Конечно, функция $f(x, y, z)$ должна быть ограниченной в области (v). Если, как это делалось раньше, ввести числа

$$M,\ m;\ M_i,\ m_i,$$

то легко составить для каждого разбиения суммы Дарбу;

$$s = \sum m_i v_i \quad \text{и} \quad S = \sum M_i v_i,$$

откуда получается условие существования тройного интеграла

$$\lim (S - s) = 0$$

или, что равносильно,

$$\lim \sum \omega_i v_i = 0,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$.

Всякая непрерывная на (v) функция $f(x, y, z)$ интегрируема на этой области. Всякая ограниченная на (v) функция $f(x, y, z)$, разрывы которой сосредоточены на конечном числе поверхностей, интегрируема. Последние два положения доказываются совершенно так же, как в § 5.1.

Для тройного интеграла справедливо утверждение, аналогичное утверждению относительно двойного: существование и величина тройного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа поверхностей. Разумеется, во всех точках этих поверхностей подынтегральная функция должна оставаться ограниченной. В остальном она может быть какой угодно, в том числе, разумеется, разрывной.

n-К р а т н ы й   и н т е г р а л. Для тех случаев, когда требуется вычислить интеграл от функции четырех, пяти и т. д. переменных, вводятся термины и обозначения совершенно так же, как и в рассмотренных случаях. Вводится объем n-мерной области (v). Предполагается, что n-мерная область ограничена гладкими или кусочно-гладкими поверхностями; например, для n-мерной сферы

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r^2.$$

Рассуждая совершенно так же, как в предыдущих случаях, приходят к понятию n-кратного интеграла для функции n переменных:

$$I = \int \underset{(v)}{\ldots} \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Развивая идеи, на которых построены теоремы существования двойного или тройного интегралов, легко приходим к положениям, обосновывающим существование

n-кратного интеграла, например n-кратного интеграла от непрерывной функции:

n-кратный интеграл от непрерывной и ограниченной функции существует и т. д.

5.3. Условия существования криволинейного интеграла

А. Криволинейный интеграл первого рода. Пусть на некоторой (плоской, ради простоты) кривой (K) задана функция $f(x, y)$ и требуется подсчитать предел суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\sigma_i$$

при стремлении n к бесконечности, а σ_i — длины частичной дуги — к нулю. Обозначения будем применять обычные. Если предел суммы существует, то он называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой (K):

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\sigma_i = \int_{(K)} f(M)\,ds$$

(M — точка на кривой (K)).

Если на кривой (K) выбрано начало отсчета (точка A), направление (одно из двух возможных) и введена дуга s, определяющая расстояние по дуге точки M от точки A, то

$$\int_{(K)} f(M)\,ds = \int_0^s f[x(s), y(s)]\,ds,$$

где $\int_0^s$ — обычный интеграл, а независимой переменной служит дуга s. Как видим, вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла. Тем самым условия существования криволинейного интеграла первого рода совпадают с условиями существования определенного интеграла. В частности, криволинейный интеграл первого рода от непрерывной функции всегда существует.

П р и м е ч а н и е. Здесь непрерывность функции $f(x, y)$ предполагается в д о л ь к р и в о й (K), т. е. предусматривается, что при всяком $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое $\delta > 0$, что как только $\overline{M_2 M_1} < \delta$, так $|f(M_2) - f(M_1)| < \varepsilon$. Вместе с тем предполагается и непрерывность функций $x(s)$ и $y(s)$ (а значит и $f[x(s), y(s)]$).

Б. К р и в о л и н е й н ы й и н т е г р а л в т о р о г о р о д а. Пусть в некоторой прямоугольной системе координат xOy заданы кривая (AB) и непрерывная вдоль этой кривой функция $f(x, y)$. К р и в о л и н е й н ы м и н т е г р а л о м в т о р о г о р о д а называется предел интегральной суммы вида

$$\sigma = \sum_{0}^{n-1} f(M) \Delta x_i = \sum_{0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i,$$

образованной таким же способом, как и интегральная сумма в предыдущем случае, с тем различием, что вместо малой дуги σ_i введен множитель Δx_i. Это существенное различие означает, что функция $f(x, y)$ множится на проекцию элемента дуги σ_i на ось x. При $n \to \infty$ и $\sigma_i \to 0$ имеем:

$$\lim \sigma = \int_{(AB)} f(x, y)\, dx.$$

Таким же образом приходим к криволинейному интегралу

$$\lim \sigma^* = \int_{(AB)} f(x, y)\, dy,$$

где вместо dx использовано dy (и, значит, $f(\xi_i, \eta_i)$ в интегральной сумме σ^* умножалась на Δy_i).

Наконец, если вдоль кривой AB определены две функции, например $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, и для обеих существуют введенные только что интегралы, то нередко рассматривают так называемый криволинейный интеграл о б щ е г о в и д а:

$$\int_{(AB)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Отметим, что криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении направления интегрирования, потому что изменяется знак проекций Δx_i или Δy_i.

В пространстве (т. е. когда функция задана на пространственной кривой) криволинейный интеграл принимает следующий вид:

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

Перейдем к вопросу об условиях существования криволинейного интеграла второго рода. Допустим, что кривая (AB) задана функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

причем φ и ψ — непрерывные функции. При переходе по линии от A до B параметр t изменяется от значения α до β. Пусть, кроме того, непрерывны $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ и непрерывна $f(x, y)$ вдоль линии (AB).

Разбиваем кривую (AB) на частичные дуги (A_iA_{i+1}) точками A_i, определяемыми значениями параметра t_i. Точка M_i на i-й дуге A_iA_{i+1} определяется значением τ_i. По общим правилам составляется интегральная сумма:

$$\sigma = \sum_{0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i,$$

в которой Δx_i заменяется с помощью функции $\varphi(t)$:

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\,dt,$$

так что

$$\sigma = \sum_{0}^{n-1} f[\varphi(t_i), \psi(t_i)] \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\,dt.$$

Введем интеграл

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

который является криволинейным интегралом второго рода

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\, dx,$$

где координаты x, y выражены через параметр t. Тот же интеграл I можно выразить как сумму интегралов

$$I = \sum_{0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

Это новое представление интеграла I есть результат чисто формальной операции: функцию $f[\varphi(t), \psi(t)]$ надо проинтегрировать в пределах t_i и t_{i+1} (от $i = 0$ до $i = n - 1$) и результаты интегрирования сложить. Но известно, что

$$\int\limits_a^c + \int\limits_c^b = \int\limits_a^b,$$

т. е. сложение результатов интегрирования от t_0 до t_1, от t_1 до t_2 и т. д. даст то же, что и интегрирование от α до β. Разность $\sigma - I$ можно представить теперь как

$$\sigma - I = \sum_{0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \{f[\varphi(t_i), \psi(t_i)] - f[\varphi(t), \psi(t)]\}\, \varphi'(t)\, dt.$$

Эта разность может быть сделана меньше любого положительного числа, как бы оно ни было мало. В самом деле, непрерывная функция $\varphi'(t)$ ограничена и, следовательно, существует такое число $L > 0$, что $|\varphi'(t)| < L$. Поэтому

$$|\sigma - I| < \varepsilon L (\beta - \alpha),$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое произвольное число такое, что колебание функции $f(x, y)$ на частичной дуге $t_{i+1} - t_i$ меньше ε. Далее, разность $f[\varphi(t_i), \psi(t_i)] - f[\varphi(t), \psi(t)]$ как разность двух значений ограниченной функции можно заменить не меньшим числом $\varepsilon > 0$ и вынести его из-под знака интеграла. Так как это можно проделать с каждым интегралом, то ε, как и L, выносим из-под знака суммы. Остаются интегралы

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt = t_{i+1} - t_i,$$

сумма которых равна $\beta - \alpha$. В результате оказывается, что

$$|\sigma - I| < \varepsilon < (\beta - \alpha).$$

Так как L и $\beta - \alpha$ — постоянные величины, то последнее неравенство показывает, что пределом интегральной суммы σ является интеграл I. Подобные же рассуждения приводят к интегралу как пределу суммы σ^* (напоминаем, что φ и ψ, согласно допущению, непрерывны).

Из существования интегралов по dx и по dy вытекает и существование криволинейного интеграла второго рода общего вида:

$$I = \int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

6.1. Метод Коши отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка

Коши был первым, кто поставил и разрешил задачу о том, имеет ли и при каких условиях дифференциальное уравнение решение, удовлетворяющее данным начальным условиям. Его ответ, положительный при довольно широких допущениях относительно правой части уравнения (предполагается, что уравнение разрешено относительно старшей производной), дает решение (искомую функцию) в виде ряда. Основное содержание обоснования решения заключается в доказательстве сходимости полученного ряда. Применение метода Коши можно показать на следующем простом примере:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\,y.$$

Допустим, что коэффициент $p(x)$ разлагается в ряд

$$p(x) = \sum_{0}^{\infty} p_n x^n,$$

сходящийся при значениях аргумента (в целях большей общности считается, что задача дана в комплексной области) $|x| < R$.

Решение ищется в виде ряда:

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n.$$

Коэффициент a_0 остается неопределенным, он играет роль произвольной постоянной; коэффициенты ряда a_1,

$a_2, \ldots$ определяются через коэффициенты ряда для $p(x)$ и через a_0. Для этой цели используется заданное уравнение, куда вместо y', y, $p(x)$ подставляются ряды:

$$\sum n a_n x^{n-1} = \sum a_n x^n \sum p_n x^n .$$

Так как ряд $p(x)$, по предположению, сходится, а сходимость ряда для y (внутри круга сходимости ряда $|x| < R$, т. е. внутри круга радиуса R) будет вскоре доказана, то в правой части последнего выражения можно произвести перемножение рядов:

$$\sum_0^\infty (a_n p_0 + a_{n-1} p_1 + a_{n-2} p_2 + \ldots + a_0 p_n)\, x^n$$

(так как собраны все члены ряда, содержащие x^n, то сумма индексов у сомножителей a и p в каждом члене, имеющемся в круглых скобках, должна равняться $n : n + 0$; $(n - 1) + 1; \ldots; 0 + n$). В левой части этого выражения стоит x^{n-1}, поэтому приравниваются коэффициенты при x^{n-1}:

$$n a_n = a_{n-1} p_0 + a_{n-2} p_1 + \ldots + a_1 p_{n-2} + a_0 p_{n-1}.$$

Обозначим для простоты

$$|a| = A \text{ и } |p| = P,$$

тогда получим

$$n A_n < A_{n-1} P_0 + A_{n-2} P_1 + \ldots + A_1 P_{n-2} + A_0 P_{n-1}.$$

Введем $M > 0$ настолько большое, что $|p(x)| < M$ на круге сходимости, тогда как известно,

$$p_n < \frac{M}{R^n}.$$

Если заменить p при помощи этого неравенства, то неравенство с A и P только усилится:

$$A_n < \frac{M}{n} (A_{n-1} + A_{n-2} R^{-1} + A_{n-3} R^{-2} + \ldots + A_0 R^{-n+1}).$$

Пусть правая часть равна B_n, так что $A_n < B_n$. Это позволит написать условие сходимости для B_n, что намного упростит исследование ряда. Перепишем B_n следующим образом:

$$B_n = \frac{M}{n} A_{n-1} + \frac{M}{n} \cdot \frac{1}{R} \times$$
$$\times \frac{n-1}{n-1} (A_{n-2} + A_{n-3}R^{-1} + \ldots + A_0 R^{-n+2}).$$

Если сравнить второй член правой части с правой частью последнего неравенства, то сразу видно, что это есть та же правая часть, в которой «n» заменено на «$n - 1$» и, значит,

$$B_n = \frac{M}{n} A_{n-1} + \frac{n-1}{n} \frac{B_{n-1}}{R}.$$

Располагая выражениями для B_n и B_{n-1}, можно определить радиус сходимости ряда B:

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = \frac{M}{n} \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{nR},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_{n-1}} = \frac{1}{R}$$

и ряд с A подавно сходится, так как $\frac{A_n}{B_n} < 1$. Ряд $y = \Sigma\, a_n x^n$ сходится внутри того же круга сходимости радиуса R. Таким образом, доказано, что уравнение может быть проинтегрировано с помощью ряда, причем сходимость найденного ряда определяется свойствами заданной, входящей в уравнение, функции $p\,(x)$.

Тот же метод Коши приложим и к гораздо более сложным задачам, например к уравнениям порядка n.

6.2. Метод последовательных приближений (доказательство Пикара)

Речь пойдет о том же дифференциальном уравнении

$$y' = f\,(x,\, y)$$

при начальных условиях

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0.$$

Допущения относительно функции $f(x, y)$:

1) все рассуждения относятся к прямоугольной области R, содержащей точку (x_0, y_0): $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$;

$$y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b;$$

2) в той же области R функция $f(x, y)$ непрерывна; отметим, что тем самым определяется и ограниченность функции в этой области; другими словами, есть такое число $M > 0$, что

$$|f(x, y)| < M;$$

3) в этой области R функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица относительно y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N\ |y_1 - y_2|,$$

где y_1 и y_2 — ординаты любых двух точек в области R. Впрочем, эти условия автоматически выполняются, если $f(x, y)$ имеет в каждой точке области ограниченную частную производную по y. Тогда $f'_y \leqslant N$ и условие непосредственно вытекает из теоремы о конечных приращениях.

Данное уравнение заменяется интегральным уравнением:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx,$$

очевидно, удовлетворяющим начальным условиям:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} = y_0,$$

когда верхний предел x интеграла равен x_0.

Применение способа последовательных приближений заключается в том, что в известную функцию $f(x, y)$ последовательно подставляются значения $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ и вычисляются значения y в левой части интегрального уравнения. Конечно, надо позаботиться о том, чтобы последовательность

$$\ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots$$

не вышла за пределы области R. При этих условиях первое приближение будет:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx.$$

Очевидно, что это приближение удовлетворяет начальным условиям. Для того, чтобы x, y не вышли за пределы области R, надо ограничить изменение x так, чтобы $|x - x_0| \leqslant h$, где $h \leqslant a$ и $h \leqslant b/M$. В интеграл в последнем уравнении подставляем вместо $f(x, y_0)$ постоянное M, которое выносим за знак интеграла, интеграл же тогда равен $(x - x_0)$; равенство для y_1 заменяется следующим неравенством ($f(x, y) \leqslant M$):

$$|y_1 - y_0| \leqslant M(x - x_0)$$

или

$$|y_1 - y_0| \leqslant Mh,$$

откуда видно, что y не выйдет за пределы R. Далее,

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx.$$

Эта формула дает $y_2 = y_0$ при $x = x_0$, следовательно, второе приближение тоже удовлетворяет начальным условиям.

Остается в пределах R и второе приближение:

$$|y_2 - y_0| \leqslant M(x - x_0) \leqslant Mh \leqslant b.$$

Теперь можно построить общую формулу:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx,$$

причем для y_n имеем

$$|y_n - y_0| \leqslant M\,|x - x_0|.$$

Из последнего неравенства легко заключить, что y_n так же, как предыдущие приближения, не выходит за пределы области R.

Найдем теперь $\lim y_n$ при $n \to \infty$ и убедимся, что предельная функция удовлетворяет уравнению и начальным условиям. Образуем чисто формально ряд:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots$$

и докажем его сходимость. Для второго члена ряда

$$|y_1 - y_0| \leqslant M\,|x - x_0|.$$

Для третьего члена ряда

$$|y_2 - y_1| = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(x, y_1) - f(x, y_0)\}\,dx\right|.$$

По условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leqslant N\,|y_1 - y_0|,$$

но $|y_1 - y_0|$ оценено выше и поэтому

$$|y_2 - y_1| \leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} M\,|x - x_0|\,dx\right| = \frac{MN}{1\cdot 2}|x - x_0|^2;$$

так же

$$|y_3 - y_2| \leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} M\,|y_2 - y_1|\,dx\right| \leqslant \frac{MN^2}{1\cdot 2}\,\frac{|x - x_0|^3}{3}.$$

Нетрудно получить общую формулу:

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \frac{MN^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n.$$

Так как, согласно принятому допущению, $|x - x_0| < h$, то члены ряда (начиная со второго члена) меньше соответствующих членов ряда:

$$Mh + M\frac{Nh^2}{2!} + M\frac{N^2h^3}{3!} + \ldots + M\frac{N^{n-1}h^n}{n!} + \ldots$$

Последний ряд сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\left[\frac{MN^nh^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{MN^{n-1}h^n}{n!}\right] = 0$$

и, следовательно, составленный нами ряд с членами $(y_n - y_{n-1})$ подавно сходится. Но его частичная сумма S_n равна y_n, и, следовательно, y_n имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = Y(x),$$

где $|x| \leqslant |x_0 + h|$, причем $Y(x)$ есть непрерывная функция x на промежутке $x_0 \pm h$. Эта функция удовлетворяет интегральному уравнению:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx. \qquad (*)$$

Действительно, $\lim y_n = Y(x)$ и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx$$

(функция $f(x, y)$ непрерывна на том промежутке, на котором берется интеграл, и поэтому возможен переход к пределу под знаком определенного интеграла). Кроме того, также и

$$\lim y_n = Y(x),$$

поэтому предельным выражением для исходного интегрального уравнения будет выражение $(*)$. Для перехода к исходному дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$ следует дифференцировать то же уравнение $(*)$. Это можно сделать, так как под знаком интеграла стоит непрерывная функция и сам интеграл есть непрерывная функция своего верхнего предела. В результате дифференцирования получаем:

$$\frac{dY(x)}{dx} = f(x, Y),$$

т. е. убеждаемся, что $Y(x)$ удовлетворяет исходному уравнению. Задача отыскания решения выполнена. Теперь следует убедиться в единственности найденного решения. К доказательству последнего и переходим.

Представим себе, что на промежутке $x_0 \pm h$ имеются два решения $Y(x)$ и $Z(x)$, совпадающие при $x = x_0$, но в остальном различные. Вследствие этого различия их разность не равна нулю и в некоторой точке $\xi \neq x_0$ достигает своего наибольшего значения $\theta > 0$. Тогда пусть

$$|Y(x) - Z(x)| = \theta.$$

С другой стороны, можно написать по образцу предельного уравнения:

$$|Y(x) - Z(x)| \leqslant \int_{x_0}^{\xi} |f(x, Y) - f(x, Z)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant N \int_{x_0}^{\xi} |Y(x) - Z(x)|\, dx,$$

где неравенство усилено при помощи неравенства Липшица. Подынтегральное выражение заменяется постоянным θ. Интеграл берется на произвольном промежутке $[x_0, \varepsilon]$, разумеется, в пределах $[x_0 \pm h]$, но не на $[x_0, \xi]$. Получаем:

$$\theta \leqslant N \varepsilon \theta,$$

что при $\theta \neq 0$ (это обязательно, так как в противном случае решения совпадают) нелепо. Таким образом, предположив существование двух различных решений, мы пришли к противоречию. Единственность решения доказана. Заметим, что предложенный Пикаром способ доказательства не только утверждает наличие решения, но и дает способ найти приближенное решение.

6.3. Существование и единственность решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

А. Метод последовательных приближений

Для линейного дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)\, y' + q(x) = 0$$

так же, как для дифференциального уравнения первого порядка (см. 6.2), находится решение методом последовательных приближений, после чего доказывается единственность найденного решения. Мы будем следовать общеприпятому пути и представим заданное уравнение второго порядка в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

$$\frac{dz}{dx} = -p(x)z - q(x)y.$$

Для большей общности (и симметрии последующих выкладок) рассмотрим вопрос о существовании решения системы с симметричными правыми частями уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = p_1(x)y + q_1(x)z,$$

$$\frac{dz}{dx} = p_2(x)y + q_2(x)z.$$

Начальные условия следующие:

при $\quad x = x_0 \quad y = y_0 \quad$ и $\quad z = z_0.$

Система дифференциальных уравнений после однократного интегрирования каждого уравнения почленно переходит в систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(x)y + q_1(x)z]\,dx, \\ z(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(x)y + q_2(x)z]\,dx. \end{aligned} \tag{*}$$

Метод последовательных приближений заключается в том, что в правую часть системы (*) подставляют вместо y и z их начальные значения y_0 и z_0; вычисленные при этом переменные y и z будут первыми приближениями y_1 и z_1:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(x)y_0 + q_1(x)z_0]\,dx,$$

$$z_1(x) = z_1 + \int_{x_0}^{x} [p_2(x)y_0 + q_2(x)z_0]\,dx.$$

Вычислив y_1 и z_1, подставляем их вместо y_0 и z_0 в интегралы правой части системы (*); получим вторые приближения y и z:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(x)\, y_1 + q_1(x)\, z_1]\, dx,$$

$$z_2(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(x)\, y_1 + q_2(x)\, z_1]\, dx.$$

Легко видеть, что интегралы правых частей системы становятся функциями x, когда подставляются пределы интегралов x и x_0; когда же вместо верхнего предела x подставляется x_0, каждый интеграл тождественно равен нулю; получаем

$$y_1(x_0) = y_0, \qquad z_1(x_0) = z_0,$$

или

$$y_2(x_0) = y_0; \qquad z_2(x_0) = z_0$$

и т. д., т. е. все приближения удовлетворяют начальным условиям.

Выражение для n-го приближения будет

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(x)\, y_{n-1} + q_1(x)\, z_{n-1}]\, dx,$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(x)\, y_{n-1} + q_2(x)\, z_{n-1}]\, dx.$$

Так как идея метода Пикара уже известна (см. 6.2) то можно для простоты ограничиться случаем $x - x_0 > 0$. Случай $x - x_0 < 0$ ничего нового не содержит. Величины x и y меняются внутри такого прямоугольника, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ остаются непрерывными ограниченными функциями x. Это значит, между прочим, что есть такое число $M > 0$, что все значения $p(x)$ и $q(x)$ меньше M; кроме того, ограничены и непрерывны функции y и z:

$$|y| \leqslant m; \ |z| \leqslant m,$$

Как и в 6.2, составим, чисто формально, ряды

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots$$

$$z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots$$

и оценим величину каждого члена. Выяснится, что эти ряды сходятся, а значит, частичные суммы каждого ряда имеют пределы. Но частичная сумма, например, первого ряда равна y_n и, таким образом, будет установлено, что последовательные приближения $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ имеют определенный предел. Очевидно, то же будет достигнуто и для z.

Мы располагаем выражениями для $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Заменим все выражения $p(x)$, $q(x)$, y, z их абсолютными значениями и вместо этих абсолютных величин поставим б о л ь ш и е постоянные M и m.

Выражения для y_1 и z_1 перепишем в виде

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x} [p_1(x)\, y_0 + q_1(x)\, z_0]\, dx,$$

$$z_1 - z_0 = \int_{x_0}^{x} [p_2(x)\, y_0 + q_2(x)\, z_0]\, dx.$$

Теперь вместо p_1, p_2 и q_1, q_2 подставим M, вместо y_0 и z_0 — m, тогда получим

$$|y_1 - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} [Mm + Mm]\, dx = 2Mm(x - x_0),$$

$$|z - z_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} [Mm + Mm]\, dx = 2Mm(x - x_0).$$

Выше были написаны выражения для $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Это позволяет оценить третий член составленного ряда:

$$y_2(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} [p_1(x)(y_1 - y_0) + q_1(x)(z_1 - z_0)]\, dx.$$

И здесь заменим p_1x и $q_1(x)$ бо́льшим M, а вместо $(y_1 - y_0)$ подставим только что полученное выражение:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} 2M \cdot 2Mm(x - x_0)\,dx =$$

$$= 2^2M^2m\frac{(x - x_0)^2}{2} = m\frac{[2M(x - x_0)]^2}{2}.$$

Легко видеть, что для следующего члена ряда будет оценка

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant m\frac{[2M(x - x_0)]^3}{2.3} = m\frac{[2M(x - x_0)]^3}{3!}$$

и аналогично

$$|z_3(x) - z_2(x)| \leqslant m\frac{[2M(x - x_0)]^3}{3!}.$$

Теперь нетрудно написать оценки и для общих членов обоих рядов:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant m\frac{[2M(x - x_0)]^n}{n!},$$

$$|z_n(x) - z_{n-1}(x)| \leqslant m\frac{[2M(x - x_0)]^n}{n!}.$$

Пусть полная длина промежутка изменения x есть l. Тогда изменения y и z не превышают

$$m\frac{(2Ml)^n}{n!}$$

и так как ряд, составленный из таких членов, сходится, то ряд, составленный из разностей $|y_n - y_{n-1}|$, тоже сходится и притом равномерно. То же относится и к $|z_n - z_{n-1})$. Продолжая рассуждать так же, как в 6.2, приходим к предельным функциям $Y(x)$ и $Z(x)$. Равномерная сходимость позволяет произвести переход к пределу под знаком определенного интеграла, и, таким образом, оказываются справедливыми уравнения [они получены из (*) при замене y и z предельными функциями]:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(x)Y(x) + q_1(x)Z(x)]\,dx,$$

$$Z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(x)Y(x) + q_2(x)Z(x)]\,dx.$$

Тем самым построены решения и для (*), а значит,— и для исходного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Итак, доказательство существования решения дифференциального уравнения второго порядка закончено.

Доказательство единственности полученного решения проводится так же, как и в случае дифференциального уравнения первого порядка. Пусть найдены две системы решений: Y_1 и Z_1, Y_2 и Z_2 Разности этих решений

$$Y_1 - Y_2, \quad Z_1 - Z_2,$$

причем $x - x_0 \leqslant I$. Пусть при этом наибольшее значение первой разности равно δ в точке $x = \xi$, так что

$$|Y_1(\xi) - Y_2(\xi)| = \delta.$$

Будем считать, что при $x - x_0 \leqslant I$ не только $Y_1 - Y_2 \leqslant \delta$, но и $Z_1 - Z_2 \leqslant \delta$.

Обратимся к уравнению, содержащему разность найденных решений Y_1 и Y_2, причем рассмотрим поведение решений в точке $x = \xi$:

$$Y_1(\xi) - Y_2(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} [p_1 Y_1 + q_1 Z_1]\, dx - \int_{x_0}^{\xi} [p_1 Y_2 + q_1 Z_2] dx =$$
$$= \int_{x_0}^{\xi} \{p_1 [Y_1 - Y_2] + q_1 [Z_1 + Z_2]\}\, dx.$$

Примем теперь во внимание, что есть такие числа M и δ, что p и q меньше M, а значения $|Y_1 - Y_2|$ и $|Z_1 - Z_2|$ меньше δ или равны δ.

Заменим функции и разности соответствующими числами, которые вынесем из-под знака интеграла. Тогда интеграл

$$\int_{x_0}^{\xi} dx$$

окажется равным разности своих пределов и уравнение даст

$$Y_1(\xi) - Y_2(\xi) < M\, 2\delta\, (\xi - x_0) < 2\, M\, I\delta.$$

Сравнивая различные выражения разности $Y_1 - Y_2$, получаем

$$\delta < 2MI\delta,$$

что в общем случае нелепо. Предположение о том, что могут существовать два решения, приводит к нелепости. Найденная система решений единственна.

Таким образом, линейное уравнение второго порядка имеет решение и притом единственное.

Б. Метод Фробениуса. Фробениус предложил искать решение некоторых классов уравнений в виде так называемых обобщенных рядов:

$$y = x^c (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).$$

Показатель c определяется, как будет показано, квадратным уравнением. Корни этого уравнения (оно называется определяющим) могут быть, как обычно у квадратного уравнения: 1) равными, 2) не равными с разностью корней — целым числом и 3) не равными с разностью — не целым числом. Этот способ имеет особое значение для уравнений Бесселя, Риккати и некоторых других.

Случай 1. Корни определяющего уравнения c_1 и c_2 разнятся на не целое число.

Случай будет рассмотрен на примере

$$(2x + x^3)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6xy = 0.$$

Полагаем решение этого уравнения в виде обобщенного ряда:

$$y = x^c (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).$$

Впоследствии будет показано, что ряд y сходится в области, содержащей начальные условия. Ввиду этого допустимо почленное дифференцирование ряда:

$$\frac{dy}{dx} = cx^{c-1}a_0 + (c+1)x^c a_1 + (c+2)x^{c+1}a_2 + \ldots,$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a_0 c(c-1)x^{c-2} + a_1(c+1)cx^{c-1} + \\ + a_2(c+2)(c+1)x^c + \ldots$$

Полученные для y, y', y'' выражения подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при x слева и справа (справа от знака равенства все коэффициенты равны нулю).

При x^{c-1}:

$$2a_0c(c-1) - a_0c = a_0c(2c-3) = 0.$$

Это и есть определяющее уравнение данной задачи. Корни его:

$$c_1 = 0 \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{3}{2}.$$

Значения c входят в выражения коэффициентов a_1, a_2, a_3,...

Найдем первые из этих коэффициентов.

При x^c:

$$2a_1(c+1) - a_1(c+1) = a_1[2(c+1)-(c+1)] = 0.$$

Так как скобка не равна нулю, то

$$a_1 = 0.$$

При x^{c+1} коэффициенты собираются из членов, содержащих y' и y:

$$2a_2(c+2)(c+1) + a_0c(c-1) - a_2(c+2) - \\ -6a_0 = 0,$$

$$a_2[2(c+2)(c+1)-(c+2)] + a_0[c(c-1)-6] = \\ = 0.$$

Замечаем, что коэффициент при a_0 разлагается на два множителя:

$$c^2 - c - 6 = (c+2)(c-3)$$

и поэтому можно в последнем равенстве сократить на $(c+2)$:

$$a_2(2c+1) + a_0(c-3) = 0$$

или

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{-(c-3)}{2c+1}.$$

При x^{c+2} коэффициенты содержат только a_3 и a_1. Но $a_1 = 0$ и можно выписывать только те коэффициенты, в которых имеются a_3:

$$a_3[2(c+2)(c+3)-(c+3)] = 0$$

и так как квадратная скобка не равна нулю, то $a_3 = 0$.

Таким же путем устанавливается, что все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = 0.$$

Коэффициенты с четными индексами находятся из отношений $\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}}$, в которых a_{2n-2} уже вычислено:

$$\frac{a_2}{a_0} = -\frac{c+2-5}{2c+4-3} = -\frac{c-3}{2c+1}; \frac{a_4}{a_2} = -\frac{c+4-5}{2c+8-3}; \ldots;$$
$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = -\frac{c+2n-5}{2c+4n-3}.$$

В нашем примере $c_1 = 0$ и $c_2 = {}^3/_2$. При $c = 0$ все члены ряда содержат лишь a_0, а x^c, стоящее множителем при ряде, обращается в единицу, поэтому

$$y_1 = a_0 x^0 [u_1 + u_2 + \ldots] = au.$$

При $c = {}^3/_2$ перед рядом появляется множитель $x^{3/2}$, коэффициенты ряда содержат $c = {}^3/_2$ и

$$y_2 = a_0 x^{\frac{3}{2}} [v_1 + v_2 + \ldots] = bv.$$

Таким образом, общим интегралом дифференциального уравнения может служить выражение

$$y = au + bv,$$

в котором частные решения u и v линейно независимы, а a и b — произвольные постоянные.

Несмотря на то, что рассмотренный пример имеет частный характер, результат, полученный при его решении, позволяет сформулировать правило: если корни определяющего уравнения не равны и разность между ними не целое число (в примере $c_1 - c_2 = 0 - {}^3/_2$), то эти два независимых решения позволяют составить общее решение заданного уравнения второго порядка.

Требуется еще убедиться в сходимости полученных рядов. К счастью, это нетрудно сделать, потому что необходимое для применения признака Даламбера отношение двух соседних членов ряда уже почти заготовлено. В самом деле, отношение коэффициентов двух соседних членов ряда уже выше вычислено, а x входит в отношение в степени 2, потому что коэффициенты с нечетными индексами равны нулю. Получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} x^2 = \lim \left(- \frac{c + 2n - 5}{2c + 4n - 3} x^2 \right) = \frac{1}{2} x^2.$$

Поэтому ряд сходится при

$$|x| < \sqrt{2}.$$

Случай II. Корни c_1 и c_2 определяющего уравнения равны между собой.

В этом случае можно построить лишь один ряд. Легко показать, что если c_1 подставить в $\partial y/\partial c$, то получается второе линейно независимое решение уравнения. Общий интеграл опять имеет вид $y = au + bv$.

Случай III. Корни определяющего уравнения разнятся между собой на целое число.

Второе независимое решение можно найти, например, из первого с помощью квадратуры. Еще один способ нахождения второго решения заключается, как и в случае II, в подстановке c в частную производную $\partial y/\partial c$. Это решение содержит, как правило, отдельный член с коэффициентом $\ln x$.

Способ Фробениуса применяется с большим успехом к отысканию решений уравнений Бесселя.

Пример. Дано уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

В этом примере определяющее уравнение

$$c\,(c - 1) + c - p^2 = 0$$

или

$$c^2 - p^2 = 0;\ c_1 = p;\ c_2 = -p.$$

Решение

$$y = x^c\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)$$

дает следующую таблицу:

при x^{p+1}: $[(p + 1)^2 - p^2]\,a_1 = 0$,
при x^{p+2}: $[(p + 2)^2 - p^2]\,a_2 + a_0 = 0$

. . . .

при x^{p+s}: $[(p + s)^2 - p^2]\,a_s + a_{s-2} = 0$.

. . . .

Из этой таблицы легко определяются $a_1, a_2, \ldots$ и составляется решение. Второе решение можно получить, заменив p на $-p$, так как в уравнение p входит в квадрате и такая замена ничего не меняет (можно также опираться на то, что $c_2 = -c_1$). Решения уравнения Бесселя выражаются функциями Бесселя порядка p. Общее решение

$$y = D_1 I_p(x) + D_2 I_{-p}(x).$$

В рассмотренном примере $c_1 - c_2 = 2p$. Для того, чтобы эта разность не была целым числом, надо, чтобы p не было целым числом или половиной целого нечетного числа. Сходимость рядов решения определяется обычным путем, например с помощью признака Даламбера.

6.4. Существование и единственность решения дифференциального уравнения n-го порядка и системы

Дифференциальное уравнение порядка n предполагаем разрешенным относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Начальные условия

при $x = x_0$ $y = y_0$, $y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$.

Такое уравнение легко приводится к системе n дифференциальных уравнений первого порядка, для чего вводятся $n - 1$ вспомогательных функций:

$$\frac{dy}{dx} = y_1; \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2; \ldots; \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}.$$

Уравнение принимает вид:

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}).$$

В целях большей общности правым частям этих уравнений придается симметричная форма, и тогда система n дифференциальных уравнений нормальной формы принимает следующий вид:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2,$$

$$\frac{dy_3}{dx} = f_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n.$$

Ясно, что уравнение для $y^{(n)}$ есть частный случай этой системы, поэтому решение надо искать лишь для нее. Метод решения тот же, что в 6.2 и в 6.3*А*, и ограничения, накладываемые на правые части системы, аналогичны.

Начальные условия:

при $x = x_0$ $y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1}^{(0)}$.

Ограничения:

1) функции f непрерывны в замкнутой области D:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a; \quad y_i^{(0)} - b \leqslant y_i \leqslant y_i^{(0)} + b;$$

существует такое число $M > 0$, что все функции $f \leqslant M$ внутри D; для непрерывных функций f такое число, как известно, всегда существует;

2) если внутри области D взять две системы значений аргументов

$$y_1', y_2', \ldots, y_n' \quad \text{и} \quad y_1'', y_2'', \ldots, y_n'',$$ то соответствующие

значения функций подчиняются условию Липшица:

$$|f_i(x, y_1', y_2', \ldots, y_n') - f_i(x, y_1'', y_2'', \ldots, y_n'')| \leqslant$$
$$\leqslant K\{|y_1' - y_1''| + |y_2' - y_2''| + \ldots + |y_n' - y_n''|\}$$
$$(K = \mathrm{const} > 0).$$

Из формулы конечных приращений следует, что если функции f_i имеют ограниченные частные производные по своим аргументам y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), то условие Липшица соблюдается. Достаточно в качестве постоянной K взять наибольшее из абсолютных значений частных производных, Из теоремы существования и единственности будет следовать, при выбранных обстоятельствах, что система уравнений имеет обязательно систему решений:

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x), \ldots,\ y_n = f_n(x),$$

удовлетворяющую и системе уравнений, и начальным условиям. Кроме того, такая система имеется только одна.

Процесс отыскания системы решений ничем существенным не отличается от того, который изложен в. 6.2. Для всей системы считаем нулевым приближением систему начальных условий. Первое приближение образуется из нулевого по известному способу:

$$y_1^{(1)}(x) = y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\, dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n^{(1)}(x) = y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\, dx.$$

Согласно принятому допущению, функции f — непрерывные, следовательно, $y_i^{(1)}$ тоже непрерывные функции (остальные входящие в f величины постоянные). Так же, как и в случае решения для одного или для системы двух дифференциальных уравнений, показывается, что первые приближения не выходят за пределы области D, когда $x - h \leqslant x \leqslant x + h$, где h — наименьшая из величин a и b/M. Так как $|f_i| < M$, то

$$|\, y_i^{(1)} - y_i^{(0)} \,| = \left| \int_{x}^{x_0} f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) dx \right| \leqslant M\,(x - x_0),$$

но $(x - x_0) \leqslant h$, поэтому $M\,(x - x_0) \leqslant Mh \leqslant b$, т. е. разность между первым приближением и начальными значениями остается в пределах области непрерывности функций $f_i\,(x)$.

По тому же правилу находятся вторые приближения:

$$y_1^{(2)} = y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})\, dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n^{(2)} = y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})\, dx$$

и вообще m-е приближение находится через $(m - 1)$-е следующим образом:

$$y_1^{(m)} = y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n^{(m)} = y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})\, dx.$$

Последовательно переходя от 1-го приближения ко 2-му, от 2-го к 3-му и так далее, мы каждый раз убеждаемся, что любое из этих приближений состоит из непрерывных функций и остается в пределах области D. Таким путем мы доходим до приближения с номером $m - 1$. Докажем справедливость утверждения: m-е приближение тоже не выходит за пределы области D. Действительно, если $(m - 1)$-е остается в D, то это значит, что $|f_i^{(m-1)}| \leqslant M$, причем $|x - x_0| \leqslant h$ по предположению. В таком случае из последней системы следует:

$$|y_i^{(m)} - y_i^{(0)}| = \int_{x_0}^{x} f_i dx \leqslant M(x - x_0) \leqslant b,$$

т. е. m-е приближение остается в пределах D.

Построим ряд (как в 6.2, стр. 82) для каждой из функций y_i:

$$y_i^{(0)} + |y_i^{(1)} - y_i^{(0)}| + |y_i^{(2)} - y_i^{(1)}| + |y_i^{(3)} - y_i^{(2)}| + \ldots$$
$$\ldots + |y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}| + \ldots$$

Перенося начальное значение i-й функции в левую часть уравнения и руководствуясь системой уравнений (стр. 96), можем написать для первого приближения i-й функции $y_i^{(1)}$:

$$y_i^{(1)} - y_i^{(0)} = \int_{x_0}^{x} f_i^{(0)}\, dx,$$

где для краткости написано f_i вместо $f_i\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Заменяем функцию f_i бóльшей величиной M и переходим к абсолютным величинам выражений, входящих в уравнение

$$|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}| \leqslant M(x - x_0).$$

Подчеркнем, что такое неравенство справедливо для всей функции y_i от $i = 1$ до $i = n$. Третий член ряда $|y_i^{(2)} - y_i^{(1)}|$ оценивается так:

$$|y_i^{(2)} - y_i^{(1)}| = \left| \int_{x_0}^{x} [f_i^{(1)} - f_i^{(0)}]\, dx \right|,$$

но под знаком интеграла стоит разность двух функций, а потому

$$\left| \int_{x_0}^{x} [f_i^{(1)} - f_i^{(0)}]\, dx \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_i^{(1)} - f_i^{(0)}|\, dx \right|.$$

Наши функции, по предположению, удовлетворяют условию Липшица, т. е. разность двух значений функции — $f_i^{(1)} - f_i^{(0)}$ — меньше выражения

$$K\{|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| + |y_2^{(1)} - y_2^{(0)}| + \ldots + |y_n^{(1)} - y_n^{(0)}|\}.$$

Но мы уже установили, что

$$|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}| \leqslant M|x - x_0|.$$

Всего в условии Липшица в нашем случае n разностей, поэтому справедливо следующее неравенство:

$$K\{\quad\} \leqslant KnM\,|x - x_0|.$$

Возвращаясь к разности $|y_i^{(2)} - y_i^{(1)}|$, можно написать:

$$|y_i^{(2)} - y_i^{(1)}| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} K\{\quad\}\, dx \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} KnM\,|x - x_0|\, dx =$$

$$= KnM\, \frac{|x - x_0|^2}{2}.$$

Для следующего члена ряда $|y_i^{(3)} - y_i^{(2)}|$ в правой части уравнения будет

$$\left| \int_{x_0}^{x} [y_i^{(2)} - y_i^{(1)}]\, dx \right|,$$

но подынтегральное выражение уже оценено, поэтому можно писать так:

$$|y_i^{(3)}-y_i^{(2)}|\leqslant\int_{x_0}^{x} KnM\frac{|x-x_0|^2}{2}\,dx=KnM\frac{|x-x_0|^3}{3!}.$$

Дальнейшие приближения оцениваются по тому же образцу. Так доходим до приближения с номером m:

$$|y_i^{(m)}-y_i^{(m-1)}|=\Big|\int_{x_0}^{x}[f_i(x, y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})-$$

$$-f_i(x, y_1^{(m-2)}, y_2^{(m-2)}, \ldots, y_n^{(m-2)})\,dx|\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\int_{x_0}^{x}|f_i^{(m-1)}-f_i^{(m-2)}|\,dx\Big|\leqslant M(nK)^{m-1}\times$$

$$\times\Big|\int_{x_0}^{x}\frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!}\,dx\Big|=M(nK)^{m-1}\frac{|x-x_0|^m}{m!}.$$

Таким образом, получена оценка любого члена ряда. Оказывается, всякий член оцениваемого ряда по абсолютной величине не больше соответствующего члена ряда

$$\sum^{\infty}M(nK)^{m-1}\frac{h^m}{m!},$$

($|x-x_0|\leqslant h$). Последний ряд сходится, и, следовательно, сумма S_m исследуемого ряда образует сходящуюся последовательность. Но $S_m=y_i^{(m)}$ и, значит, $y_i^{(m)}$ имеет предел при $m\to\infty$. Пусть

$$\lim y_i^{(m)}=Y_i(x).$$

Система $Y_i(x)$ есть решение исходной системы. Прежде всего,

$$Y_i(x_0)=y_i^{(0)}$$

(напоминаем, что $\int_{x_0}^{x_0}\equiv 0$) и, следовательно, система Y_i удовлетворяет начальным условиям. Далее, при $m\to\infty$

имеем в пределе

$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f(x, Y_1, \ldots, Y_n)\, dx.$$

Обе части равенства продифференцируем по x. Так как, по определению, f_i — функция непрерывная, то производная правой части как производная по переменному верхнему пределу интеграла от непрерывной функции существует. Следовательно, существует и $dY_i(x)/dx$:

$$\frac{dY_i(x)}{dx} = f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

и, значит, функция $Y_i(x)$ удовлетворяет i-му уравнению исходной системы. Остается убедиться в единственности найденных решений. Способ доказательства единственности найденной системы решений $Y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ нам уже знаком. Допустим, что имеется еще одна система функций, удовлетворяющих исходной системе:

$$Z_i(x) \; (i = 1, 2, \ldots, n),$$

причем $Z_i(x_0) = Y_i(x_0)$ и в других точках промежутка $|x - x_0|$ функции $Y_i(x)$ и $Z_i(x)$ не равны тождественно друг другу. Тогда не будет равна нулю и функция Φ:

$$\Phi = |Y_1(x) - Z_1(x)| + |Y_2(x) - Z_2(x)| + \ldots$$
$$\ldots + |Y_n(x) - Z_n(x)|.$$

Далее предполагается, что функция Φ вблизи x_0 достигает своего наибольшего значения, например θ. С другой стороны, используя условие Липшица, получаем

$$|Y_i(x) - Z_i(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} K\{|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| + \ldots$$
$$\ldots + |Y_n - Z_n|\}\, dx < K\theta(x - x_0).$$

Складываем эти неравенства по i от 1 до n и, заменяя $(x - x_0)$ достаточно малым промежутком $h_1 < h$, отнесем получившееся суммарное неравенство к точке, где Φ имеет наибольшее значение θ:

$$\theta < Kn\theta h_1.$$

Это неравенство указывает на то, что мы пришли к противоречию, так как произвольное число h_1 можно выбрать сколь угодно малым и тогда неравенство оказывается невозможным. Полученное противоречие доказывает, что две системы решений, не равные тождественно одна другой, невозможны.

Рассуждая в точности, как в 6.2, приходим к тому, что, переходя от одной точки к другой, затем к третьей и т. д., можно продолжить решение от области $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ до границы, сколь угодно близко подходящей (изнутри) к границе области D. Наконец, вспоминая, что исходная система уравнений эквивалентна исходному уравнению, приходим к окончательному заключению относительно существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка: уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, и это решение — единственное. При этом предполагается:

1) правая часть уравнения есть непрерывная функция по x, по y и так далее, вплоть до $y^{(n-1)}$ включительно;

2) правая часть удовлетворяет условию Липшица по тем же аргументам y, dy/dx, d^2y/dx^2 и т. д.

Найденное выше решение Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяет начальным условиям, иначе говоря, является частным решением. Однако примененный способ позволяет построить и общее решение исходной системы, а значит, и исходного уравнения. Такое решение должно содержать n произвольных постоянных и быть непрерывной функцией от этих постоянных.

Это можно осуществить.

Рассмотрим в $(n + 1)$-мерном пространстве некоторую точку P. Через эту точку проходит интегральная кривая, что следует из установленной теоремы существования, и притом только одна. Считая, что эта точка расположена достаточно близко к гиперплоскости $x = x_0$ (кстати, все рассмотрение происходит, разумеется, внутри области D), мы можем продолжить интегральную кривую (единственную!), проходящую через P, так, чтобы она прошла через точку с координатой x_0. Тогда $y_1, y_2, \ldots, y_n$ примут значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ и, следовательно, через точку P проходит интегральная кривая, притом только одна, удовлетворяющая заданным начальным условиям.

Доказанная теорема единственности гарантирует, что через каждую точку области проходит одна и только одна интегральная кривая, удовлетворяющая начальным условиям. Каждое из $y_i^{(n)}$ сходится равномерно к своему предельному значению. Эти $y_i^{(n)}$ — непрерывные функции начальных значений $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, потому что эти значения входят в $y_1^{(1)}$, а значит,— и во все следующие приближения. При таких условиях эти начальные значения входят в пределы $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$. Итак, мы показали, что система решений

$$Y_1(x) = \varphi_1(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$$
$$Y_2(x) = \varphi_2(x, y_1^{(0)}, y^{(0)}_2, \ldots, y^{(0)}_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_n(x) = \varphi_n(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$$

есть решение заданной исходной системы и зависит от n произвольных параметров $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ непрерывным образом. Тем самым установлено, что система решений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ есть общее решение предложенной исходной системы.

Данные $y_1^{(0)}$ и т. д. хотя и являются произвольными постоянными, но имеют числовые значения, что, конечно, неважно: они остались от исходных величин. Заменяя их общепринятыми обозначениями, приходим к

$$Y_i(x) = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что и является окончательным результатом.

Проведенное доказательство сохраняет полностью силу и для исходного уравнения. Мы знаем, что это уравнение эквивалентно исходной системе. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не имеют самостоятельного значения. Они были введены только для того, чтобы от уравнения n-го порядка перейти к исходной системе n уравнений первого порядка. Поэтому в последней системе нас интересует лишь первое уравнение. Возвращаясь к исходным обозначениям, будем иметь общее решение, если используем первое из уравнений:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Это есть общее решение уравнения n-го порядка. Оно содержит ровно n произвольных постоянных.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

7.1. Существование и единственность решения дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

Ограничимся рассмотрением уравнений, линейных относительно производных неизвестной функции z

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z). \qquad (*)$$

В этих уравнениях коэффициенты X могут зависеть от неизвестной функции, входящей и нелинейным образом. В этом случае уравнение называется квазилинейным (как бы линейным). Линейным однородным называется следующее уравнение:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

Сперва рассмотрим случай двух независимых переменных, после чего будет показано, как этот способ решения обобщается на случай n переменных.

Пусть дано уравнение

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z).$$

В этом квазилинейном уравнении функции P, Q, R непрерывны вблизи начальных условий; они не обращаются в нуль одновременно ни в какой точке рассматриваемой области.

Известно, что уравнение типа (*) решается с помощью вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для того, чтобы получить такую систему наиболее естественным путем, представим себе векторное поле, описываемое уравнением

$$\overline{F} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}^{1}.$$

Нормаль к кривой в любой ее точке дается уравнением

$$(\overline{N} \cdot \overline{F}) = 0.$$

Искомая функция $z = f(x, y)$ описывает в пространстве поверхность, и, следовательно, уравнения нормали к этой поверхности будут

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}$$

или, другими словами, вектор, лежащий на этой нормали,

$$\overline{N} = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} - \bar{k},$$

поэтому уравнение нормали в развернутом виде можно записать так:

$$\frac{\partial z}{\partial x}F_x + \frac{\partial z}{\partial y}F_y - F_z = 0$$

или с помощью подстрочного примечания на этой странице напишем

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z).$$

Таким образом, заданное уравнение получило наглядное геометрическое толкование. Не менее ясным делается геометрическое содержание необходимой для его решения

[1] Напоминаем, что эта формула представляет вектор $\overline{F}$, разложенный по ортам $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Разложение показывает, что вектор имеет следующие проекции на оси координат: $F_x = P(x, y, z)$; $F_y = Q(x, y, z)$; $F_z = R(x, y, z)$.

вспомогательной системы:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)};$$

это — уравнения касательного вектора (в любой точке) к векторной линии — одной из тех, что образуют интегральную поверхность. Эти уравнения и служат для нахождения интеграла заданного уравнения. В самом деле, допустим, что найдены два независимых интеграла вспомогательной системы, которая содержит два независимых уравнения. Пусть

$$\psi_1(x, y, z) = C_1 \, \psi_2(x, y, z) = C_2$$

— интегралы этой системы. Между двумя постоянными можно установить одно произвольное соотношение:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0.$$

Если теперь в функцию Φ вместо C_1 и C_2 подставить их значения из интегралов ψ_1 и ψ_2, то

$$\Phi[\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)] = 0$$

будет решением вспомогательной системы, а произвольная функция решения — это функция Φ. Тем самым найден и интеграл заданного уравнения, содержащий произвольную функцию.

Следующий этап решения — удовлетворение начальным условиям. В данном случае необходимо, чтобы найденное решение (поверхность) проходило в пространстве через заданную линию. Пусть эта линия задана уравнениями $\Phi_1(x, y, z) = 0$ и $\Phi_2(x, y, z) = 0$. Образуем систему:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0; \qquad \Phi_2(x, y, z) = 0;$$
$$\psi_1(x, y, z) = C_1; \qquad \psi_2(x, y, z) = C_2.$$

Из этой системы и получается $\Phi(x, y, z) = 0$, на этот раз уже не вполне произвольная функция, так как она определяется с помощью заданных уравнений $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$.

Следующий пример показывает, как проводится решение.

Задано линейное однородное уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

где $P(x, y, z) = -y$ и $Q(x, y, z) = x$. Так как P и Q не зависят от z, то уравнение — линейное. Вспомогательная система:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Из этих трех уравнений выберем любые два, например

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \text{ и } dz = 0$$

или

$$xdx + ydy = 0 \text{ и } dz = 0,$$

что дает

$$x^2 + y^2 = C_1, \ z = C_2.$$

Далее надо образовать систему четырех уравнений. Надо использовать уравнения той линии, через которую должна проходить найденная поверхность (начальные условия). Пусть эта линия задается уравнениями:

$$x = 0; \ z = y^2.$$

Система имеет следующий вид:

$$\Phi_1 = x = 0; \ \Phi_2 = z - y^2 = 0,$$

$$\psi_1 = x^2 + y^2 = C_1; \ \psi_2 = z = C_2.$$

Из Φ_1 подставляем $x = 0$ в ψ_1: $y^2 = C_1$; но из Φ_2 находим, что y^2 как раз есть z. Значит, $y^2 = C_1 = z = C_2$, следовательно, $C_1 = C_2$ и окончательно

$$z = x^2 + y^2.$$

Рассмотрим случай n независимых переменных. Для простоты остановимся на однородном уравнении (неоднородное линейное уравнение легко приводится к линейному однородному несложным преобразованием). Уравнение имеет вид:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots +$$
$$+ X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

Вспомогательная система:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Эта система имеет $(n-1)$ независимых интегралов, например следующих:

$$\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1,$$
$$\Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}.$$

Каждый интеграл из этой системы есть решение заданного уравнения, как выясняется из следующего рассуждения.

Любой из системы интегралов остается постоянным ($\Psi_i = C_i$) вдоль интегральной кривой вспомогательной системы, следовательно

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0.$$

Как показывает вспомогательная система, дифференциал dx_i пропорционален коэффициенту X_i с тем же индексом. Вследствие этого справедливо

$$\sum^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} X_i \equiv 0.$$

Тождество не содержит постоянных C из системы интегралов, поэтому оно остается верным на всей области изменения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. при следовании вдоль любой интегральной кривой. Отсюда следует, что Ψ удовлетворяет заданному уравнению, которое можно записать так:

$$\sum X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Сравнение этого уравнения с последним тождеством подтверждает, что Ψ есть решение заданного уравнения.

Произвольная функция $\Phi = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$ также будет решением вспомогательной системы. Если положить $z = \Phi$, то получим решение и для заданного уравнения, причем роль произвольной функции в решении уравнения как раз и играет функция Φ.

Ниже приводится доказательство того, что $z = \Phi$ есть общее решение заданного уравнения, для чего достаточно доказать, что любое решение уравнения связано с интегралами вспомогательной системы некоторой функциональной зависимостью.

Пусть Ψ — некоторое решение заданного уравнения. В таком случае Ψ входит в систему:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \equiv 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} \equiv 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Согласно допущению, все X_i не могут равняться нулю одновременно, следовательно, система имеет нетривиальное решение, а так как эта система — однородная, то ее определитель (якобиан) тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Тождественное равенство нулю указывает на функциональную зависимость между функциями, по которым составлен якобиан:

$$F(\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}) = 0,$$

Известно, что интегралы Ψ_i независимы между собой. Независимость указывает на то, что по крайней мере один минор якобиана не равен нулю, а в таком случае всегда можно разрешить уравнение $F = 0$ относительно любого неизвестного, например, Ψ:

$$\Psi = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}).$$

Таким образом, Φ есть общий интеграл, из которого можно получить частное решение Ψ.

7.2. Приведение дифференциального уравнения с частными производными (по двум переменным) второго порядка к каноническому виду

Дано уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

где A, B, C — функции x и y, имеющие непрерывные первые и вторые производные; неизвестная функция $u(x, y)$ имеет те же непрерывные производные. Для выполнения предстоящего преобразования вводятся новые независимые переменные

$$\xi(x, y), \eta(x, y).$$

Предполагается, что и эти переменные дважды дифференцируемы по x и y. Предстоит перевести вторые производные функции u по x и y в новую форму — как производные по ξ и по η. Напомним формулы дифференциального исчисления, которыми придется пользоваться при этой операции.

Первые производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

В полученном для второй производной выражении имеются два вида производных: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ и второй вид, требующий большего труда при выполнении, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$. Первый вид производных вычисляется просто:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2};$$

что касается второго вида, то для того, чтобы найти такую производную, проще всего подставить первую производную $\partial u/\partial\xi$ или $\partial u/\partial\eta$ в правую часть приведенного выше выражения для первой производной вместо u. Применяя эти формулы к исходному уравнению и группируя члены, содержащие $\partial^2 u/\partial\xi^2$, $\partial^2 u/\partial\xi\partial\eta$ и $\partial^2 u/\partial\eta^2$, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\times\\
&\times\left[A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]+\\
&+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]+\\
&+F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.
\end{aligned}$$

Видно, что коэффициенты при первом и третьем членах второго порядка, т. е. при $\partial^2 u/\partial\xi^2$ и $\partial^2 u/\partial\eta^2$, имеют тождественную структуру. Оба коэффициента представляют собой левую часть квадратного уравнения относительно $\partial\xi/\partial x$ (первый член) или $\partial\eta/\partial x$ (третий член).

Допустим, что φ_1 и φ_2 — две функции, частные производные которых $\partial\varphi_1/\partial x$ и $\partial\varphi_2/\partial x$ являются корнями квадратного уравнения, образованного приравниванием к нулю коэффициента при $\partial^2 u/\partial\xi^2$, т. е. уравнения

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2=0.$$

Полагая

$$\xi(x,y)=\varphi_1(x,y),$$
$$\eta(x,y)=\varphi_2(x,y),$$

обращаем в нуль коэффициенты при $\partial^2 u/\partial\xi^2$ и $\partial^2 u/\partial\eta^2$. Коэффициент же при втором члене $2\partial^2 u/\partial\xi\partial\eta$ в левой части того же уравнения не будет равен нулю. В самом деле, если бы он обратился в нуль, то уравнение второго порядка лишилось бы всех членов второго порядка и перешло в уравнение первого порядка (через функцию F_1 обозначено все, что в уравнении не содержит $\partial^2 u/\partial\xi^2$, $\partial^2 u/\partial\eta^2$ и $\partial^2 u/\partial\xi\partial\eta$), следовательно, $F_1(\xi, \eta, u, \partial u/\partial\xi, \partial u/\partial\eta) = 0$ может быть уравнением не выше первого порядка; в то же время известно, что при переходе от одной декартовой системы к другой порядок кривой не меняется [1]. Разделив оставшиеся члены уравнения на отличный от нуля коэффициент при $\partial^2 u/\partial\xi\partial\eta$, получим уравнение в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

В следующем параграфе указываются условия, при соблюдении которых это уравнение имеет решение и притом единственное.

7.3. Условия существования решения дифференциального уравнения с частными производными (по двум переменным) второго порядка

Рассмотрим уравнение, полученное в предыдущем параграфе:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Требуется решить задачу Коши для этого уравнения. Начальные условия состоят в том, что вдоль некоторой гладкой кривой C задаются значения для u, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$. Первые производные обозначим для краткости, как принято, через p и q, вторые — через r, s и t, так что уравнение можно записать так:

$$s = F(x, y, u, p, q).$$

---

[1] О подробностях, касающихся свойств функции $\varphi(x, y)$, см. в списке литературы книгу И. Г. Петровского (1953).

Вблизи начальной кривой C (смысл этого выражения вскоре выяснится) выбираем на плоскости xOy произвольную точку P, на кривой C — две точки: A и B. Две прямые AP и BP, параллельные осям Ox и Oy, и участок кривой между точками A и B образуют треугольник ABP, в котором гипотенуза AB заменена участком кривой AB. Лежащие на кривой C начальные значения u, p, q можно считать равными нулю без уменьшения общности рассуждения. В самом деле, можно подобрать такую функцию, скажем φ, от которой требуется: 1) удовлетворение начальных условий, 2) наличие производных $\varphi_x = \partial\varphi/\partial x$, $\varphi_y = \partial\varphi/\partial y$ и $\varphi_{xy} = \partial^2\varphi/\partial x\partial y$, тогда $w = u - \varphi$ удовлетворит уравнению (в котором слегка изменится F) и будет иметь начальные значения, равные нулю.

Для рассматриваемого уравнения задача Коши формулируется следующим образом: в некоторой окрестности кривой C построить решение уравнения

$$s = F(x, y, u, p, q),$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям $u = p = q = 0$ на кривой C.

Функция F предполагается дифференцируемой по всем пяти входящим в нее переменным. Функция $u(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам, также непрерывны ее первые производные p и q; у нее имеется вторая производная s; непрерывность s, если уж s существует, следует непосредственно из исходного уравнения. Теперь надо уточнить выражение «вблизи C». Предположим, что существует такая константа $a > 0$, что соблюдается условие

$$|u| < a; \ |p| < a; \ |q| < a$$

на некоторой области G, содержащей кривую C. Тогда предположим, что $|F|$, $|F_u|$, $|F_p|$, $|F_q|$ будут оставаться меньше некоторого числа $M > 0$.

Решение заданного уравнения построим методом Пикара (см. 6.2). Так как $u_0 = 0$, то интегральное представление u имеет вид

$$u(\xi, \eta) = \iint_D F(x, y, u, p, q)\, dxdy.$$

Здесь ξ, η — координаты той точки P, в которой вычисляется значение u. Для каждой точки P (разумеется,

P расположена в пределах области G) ξ и η — некоторые вещественные числа; x и y, напротив,— текущие координаты, по которым производится интегрирование в правой части уравнения для u (ξ, η); D — область, ограниченная треугольником APB. Функция, выраженная таким образом, удовлетворяет нулевым начальным условиям на кривой C, ее производные p и q также удовлетворяют нулевым начальным условиям на C. В самом деле, исходя из уравнения для u, имеем: для того, чтобы получить $\partial u/\partial\xi = u_\xi$, достаточно проинтегрировать u (ξ, η) по y. В процессе этого интегрирования считаем $x = \xi = \text{const}$, пределы же по y, когда $x = \xi$, будут от точки B до точки P:

$$u_\xi = \int\limits_B^P F(\xi, y, u, p, q)\, dy.$$

Так же находится и $\partial u/\partial\eta = u_\eta$; ордината теперь считается постоянной, абсцисса изменяется от точки A до точки P:

$$u_\eta = \int\limits_A^P F(x, \eta, u, p, q)\, dx.$$

Наконец $\partial^2 u/\partial\xi\partial\eta$ берется прямо из заданного уравнения:

$$u_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, u, p, q).$$

Вместо текущих координат подставляем опять-таки координаты той точки P, для которой производится вычисление.

Само собой разумеется, что проведенное рассуждение справедливо для любой точки P, расположенной внутри G.

Так как на C верхний и нижний пределы у каждого интеграла равны, то $u_\xi = u_\eta = 0$, сама же функция $u = 0$ как следствие двойного интегрирования при равных пределах у обоих интегралов.

Легко убедиться в справедливости следующих рекуррентных формул:

$$u_{n+1}(P) = \iint\limits_D F(x, y, u_n, p_n, q_n)\, dxdy,$$

$$p_{n+1}(P) = \int_B^P F(\xi, y, u_n, p_n, q_n)\, dy,$$

$$q_{n+1}(P) = \int_A^P F(x, \eta, u_n, p_n, q_n)\, dx.$$

Отсюда получаем, между прочим,

$$p_{n+1} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \xi}, \qquad q_n = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \eta},$$

как и должно быть.

Пусть наибольший из отрезков AP и BP для всех точек P области G равен l. Тогда, используя рекуррентные формулы, можно положить

$$|u_{n+1}| \leqslant Ml^2; \ |p_{n+1}| \leqslant Ml; \ |q_{n+1}| \leqslant Ml.$$

Пусть Ml^2 и Ml меньше a, тогда u_{n+1}, p_{n+1} и q_{n+1} не выходят из области G и применение метода последовательных приближений не выведет значения новых приближений за пределы области G.

Последовательные приближения должны равномерно приближать функцию f_n к ее пределу f. Покажем, что это требование в задаче удовлетворяется. Для этой цели надо применить формулу конечных приращений, в данном случае — ее видоизменепие для случая многих переменных. Как известно, в этой формуле принято обозначать приращение аргумента x через $\theta\Delta x$, где $0 < \theta < 1$, так что формула в нашем случае будет иметь аргументы $x + \theta\Delta x$, $y + \theta\Delta y$ и т. д. Введем для краткости обозначения функций от подобных аргументов следующее: $f(x + \theta\Delta x) = \bar{f}(x)$. При такой записи получаем

$$u_{n+1} - u_n =$$
$$= \iint_D [F(x, y, u_n, p_n, q_n) - F(x, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})]\, dxdy =$$
$$= \iint_D [(u_n - u_{n-1})\bar{F}_n + (p_n - p_{n-1})\bar{F}_p + (q_n -$$
$$- q_{n-1})\bar{F}_q]\, dxdy,$$

но так как $|F| < M$, то

$$u_{n+1} - u_n \leqslant \iint\limits_D [|u_n - u_{n-1}|M + |p_n - p_{n-1}|M + |q_n - q_{n-1}|M]\,dxdy.$$

Введем $D_n > 0$:

$$D_n \geqslant |u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|;$$

тогда

$$u_{n+1} - u_n < Ml^2 D_n$$

(напоминаем, что $\iint\limits_S dydx$ дает квадрат линейного измерения, т. е. l^2)
и точно так же

$$|p_{n+1} - p_n| \leqslant MlD_n,$$
$$|q_{n+1} - q_n| \leqslant MlD_n,$$

поэтому

$$|u_{n+1} - u_n| + |p_{n+1} - p_n| + |q_{n+1} - q_n| \leqslant MlD_n \times$$
$$\times (l + 1 + 1) = MlD_n\,(l + 2).$$

Если наибольшее значение суммы, стоящей в левой части последнего неравенства, обозначить D_{n+1}, то это неравенство записывается так:

$$D_{n+1} \leqslant MlD_n\,(l + 2).$$

Уже доказано, что величины, входящие в это неравенство, не выходят за пределы области G. Сузим последнюю настолько, чтобы получилось, что $Ml\,(l + 2) < \alpha < 1$.

Тогда ΣD_k сходится не хуже, чем ряд $\sum\limits^{\infty} \alpha^k$, и так как α^k есть геометрическая прогрессия со знаменателем < 1, то ряд D_k, а значит, и каждый из рядов

$$\sum |u_{n+1} - u_n|, \quad \sum |p_{n+1} - p_n|, \quad \sum |q_{n+1} - q_n|$$

сходится равномерно (теорема о равномерной сходимости мажорируемого ряда).

Ввиду того, что ряды сходятся равномерно и предельные функции $u\,(x, y)$, $p\,(x, y)$ и $q\,(x, y)$ — непрерывные функции своих аргументов x, y, допустим переход к пределу под знаком определенного интеграла:

$$u(\xi, \eta) = \iint\limits_D F(x, y, u, p, q)\, dxdy,$$

$$p(\xi, \eta) = \int\limits_B^P F(\xi, y, u, p, q)\, dy,$$

$$q(\xi, \eta) = \int\limits_A^P F(x, \eta, u, p, q)\, dx.$$

Кроме того, этот переход к пределу приводит к формулам:

$$u_\xi(\xi, \eta) = p(\xi, \eta),\ u_\eta = q(\xi, \eta),\ u_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, u, p, q).$$

Как показано выше, функция $u(\xi, \eta)$ удовлетворяет начальным условиям вдоль кривой C. Таким образом, задача Коши решена полностью.

Докажем теперь единственность найденного решения. Пусть имеем два решения u и v заданного уравнения. Тогда для $w = u - v$ можно записать:

$$w = u - v = \iint\limits_D [F(x, y, u, u_x, u_y) - \\ - F(x, y, v, v_x, v_y)]\, dxdy.$$

Применим опять формулу конечных приращений:

$$w = \iint\limits_D [(u - v)\bar{F}_u + (u_x - v_x)\bar{F}_p + (u_y - v_y)\bar{F}_q]\, dxdy = \\ = \iint\limits_D [w\bar{F}_u + w_x\bar{F}_p + w_y\bar{F}_q]\, dxdy$$

(напоминаем, что $F_u = \partial F/\partial u$, $F_p = \partial F/\partial p$, $F_q = \partial F/\partial q$).

Как было условлено раньше, $F \leqslant M$; кроме того,

$$\iint\limits_S dxdy = l^2.$$

Пусть $|w| + |w_x| + |w_y| \leqslant W$. Тогда

$$|w| \leqslant Ml^2W;\quad |w_x| \leqslant MlW;\quad |w_y| \leqslant MlW.$$

Складывая почленно эти три неравенства, получим

$$|w| + |w_x| + |w_y| \leqslant MlW\,(l+2);\ \text{но}\ Ml\,(l+2) < \alpha < 1,$$

поэтому можно написать, что $W < \alpha W$; если, как было условлено, $\alpha < 1$, то последнее неравенство требует, чтобы $W = 0$, т. е. $u = v$, что означает невозможность существования двух не тождественно равных между собой решений. Таким образом, найденное выше решение, удовлетворяющее не только исходному уравнению, но и начальным условиям на кривой C, единственно. Задача решена.

Замечание. Одной из наиболее общих теорем существования, относящихся к дифференциальным уравнениям с частными производными, является теорема, принадлежащая С. В. Ковалевской. Эта теорема касается системы уравнений, разрешенных относительно старших производных, и предусматривает только одно ограничение. Оно заключается в том, что правые части уравнений F_1, $F_2, \dots$ должны быть аналитичны вблизи начальных условий, а также аналитичны заданные начальные функции φ_1, $\varphi_2, \dots$

Фундаментальная, как ее принято называть, теорема Ковалевской формулируется так: если функции F и φ аналитичны в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \dots)$, то задача Коши имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$ и притом единственное в классе аналитических функций. Несмотря на требование аналитичности функций [1], класс уравнений, охватываемых теоремой, довольно широк, потому что требование аналитичности сравнительно мягкое и удовлетворяется обширной группой функций.

---

[1] Напоминаем, что функция называется аналитической в некоторой области, если в этой области она разлагается в степенной ряд.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДОВ

8.1. Равномерная сходимость ряда

В вопросах дифференцирования и интегрирования рядов существенную роль играет понятие равномерной сходимости ряда.

Говорят, что ряд сходится равномерно на промежутке $[a, b]$, если при произвольном $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x) + \ldots| < \varepsilon$$

выполняется при всех значениях n, бо́льших некоторого числа N (это число зависит от выбора ε), и *при любом значении* $x \in [a, b]$.

В большом числе случаев судить о том, равномерно ли сходится ряд, позволяет следующий признак Вейерштрасса:

если ряд

$$\sum_{n}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

на промежутке $[a, b]$ мажорируется сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами

$$\sum c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots,$$

то ряд сходится равномерно (и, кстати, абсолютно).

Доказательство. Для сходящегося числового ряда справедливо

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно; это неравенство справедливо, как только $n > N$, где N зависит от выбора ε. Так как ряд

Σu_n мажорируется рядом Σc_n, то тем более

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots| < \varepsilon,$$

причем неравенство соблюдается для всех значений $x \in [a, b]$ одновременно. Следовательно, мажорируемый ряд сходится равномерно.

Заметим, что мажорируемость ряда есть достаточное, но не необходимое условие равномерной сходимости. Ниже приведен пример немажорируемого, но равномерно сходящегося ряда.

Разберем вопрос о равномерной сходимости ряда на примере геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Как известно, эта прогрессия сходится на промежутке $(-1, +1)$.

Очевидно, остаточный член R_n выражается так:

$$R_n = \frac{x^n}{1-x}.$$

Зафиксируем некоторое $n = \mathrm{const}$ и пусть $x \to -1$ справа. Тогда

$$\lim |R_n| = \frac{1}{2};$$

при стремлении же x к $+1$ (слева) будет

$$\lim R_n = \frac{1}{0} = \infty.$$

В этом примере невозможно, следовательно, для всех x одновременно осуществить неравенство

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что хотя прогрессия на промежутке $(-1, +1)$ сходится, сходимость эта неравномерная и именно потому, что не существует такого ε, которому удовлетворяет последнее неравенство при всех значениях $x \in [a, b]$.

Замечательно, что эта же прогрессия дает пример и равномерной сходимости ряда. Ряд сходится равномерно, но промежуток значений x уже другой: он должен целиком лежать в промежутке $(-1;\ 1)$, т. е. нужно рассматривать любой сегмент этого промежутка. В этом случае уже можно говорить о мажорировании ряда сходящимся рядом

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots,$$

где $0 < r < 1$, следовательно, на сегменте $[-r,\ r]$ прогрессия сходится равномерно.

Покажем теперь на примере, что высказанный признак не необходим. Займемся рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Как видно, дан знакопеременный ряд. По свойствам знакопеременного ряда его остаточный член R_n по абсолютной величине не превосходит первого отбрасываемого члена:

$$|R_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Разложим знаменатель правой части по формуле бинома:

$$(1 + x^2)^{n+1} = 1 + (n+1)\,x^2 + \ldots$$

и оставим из всего разложения лишь второй член. Знаменатель от этого уменьшится (все слагаемые в разложении положительны) и неравенство только усилится:

$$|R_n(x)| < \frac{x^2}{(n+1)\,x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Теперь ясно, что оценка остаточного члена не зависит от x и поэтому справедлива на всем рассматриваемом промежутке. Следовательно, ряд

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$$

сходится равномерно.

Посмотрим теперь на данный ряд с другой точки зрения. Членами ряда являются функции непрерывные. Сумма этого ряда есть функция разрывная. В самом деле, этот ряд есть тоже геометрическая прогрессия с первым членом x^2 и знаменателем $1 + x^2$. Применив формулу для суммы геометрической прогрессии к ряду, составленному из абсолютных значений членов нашего ряда

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}},$$

получаем следующие значения S:

$$S(|u|) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Следовательно, сумма ряда $(|u|)$ есть функция разрывная. Это значит, что ряд $(|u|)$ сходится неравномерно, из чего в свою очередь следует, что заданный ряд (u) не мажорируется, так как в таком случае мажорировался бы и ряд $(|u|)$ абсолютных значений, т. е., согласно признаку Вейерштрасса, он должен был бы сходиться равномерно, что противоречит полученному только что результату. Итак, заданный ряд не мажорируется, а между тем сходится равномерно. Этим примером подтверждается то, что признак Вейерштрасса не необходим.

8.2. Дифференцирование ряда

Известно, что производная суммы конечного числа функций равна сумме производных слагаемых, т. е.

$$\frac{d\sum^{n} f_i(x)}{dx} = \sum^{n} \frac{df_i(x)}{dx}.$$

Спрашивается, можно ли распространить это правило на ряд, т. е. на случай бесконечного числа слагаемых, и если можно, то при соблюдении каких условий? Ответ дается следующей теоремой.

Если функции $u_n(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные на $[a, b]$ и если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к сумме $S(x)$, а ряд из производных членов данного ряда сходится равномерно, то данный ряд можно почленно дифференцировать, причем

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Из теоремы следует, что формулу дифференцирования конечного числа слагаемых можно распространить на случай ряда, т. е. на случай бесконечного числа дифференцируемых слагаемых при условии сходимости данного ряда и равномерной сходимости ряда, составленного из производных членов его.

Доказательство. Пусть частичная сумма S_m определяется равенством

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} u_n(x),$$

так что

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{1}^{m} u_n(x) = S = \sum_{1}^{\infty} u_n(x).$$

Мы покажем, что

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Введем обозначение

$$\lim_{m\to\infty} S_m' = \varphi(x).$$

Применим к S_m в произвольной точке $x_0 \in [a, b]$ формулу конечных приращений:

$$\left|\sum_{1}^{m} \frac{u_n(x_0+h) - u_n(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| =$$

$$= \left|\sum_{1}^{m} u_n'(x_0+\theta h) - \varphi(x_0)\right|. \qquad (1)$$

Здесь $h > 0$ — произвольное малое число и $0 < \theta < 1$. Правую часть этого равенства перепишем так:

$$\left|\sum_1^m u_n'(x_0+\theta h) - \varphi(x_0)\right| = \Big|\sum_1^m u_n'(x_0+\theta h) - \varphi(x_0+\theta h) + \varphi(x_0+\theta h) - \varphi(x_0)\Big| \leqslant \leqslant \Big|\sum_1^m u_n'(x_0+\theta h) - \varphi(x_0+\theta h)\Big| + |\varphi(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0)|. \quad (2)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как ряд $\sum^{\infty} u_n'(x)$ сходится по условию теоремы равномерно, то существует такой номер N, что для каждого $n > N$ и каждого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{n+1}^{m} u_n'(x) - \varphi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что для $n > N$ и каждого h имеем:

$$\left|\sum^{m} u_n'(x_0+\theta h) - \varphi(x_0+\theta h)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

($x_0 + \theta h$ — точка, недалеко отстоящая от x_0, и так как сходимость $\sum^{\infty} u_n'(x)$ распространяется на весь промежуток $[a, b]$, то неравенство, справедливое для точки x_0, справедливо также и для точки $x_0 + \theta h$).

Ввиду непрерывности рассматриваемых функций существует такое число $\eta > 0$, что для каждого x_1 такого, что $|x_1 - x| < \eta$, справедливо

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| < \varepsilon/2.$$

Теперь сделаем следующее: правую часть равенства (1) заменим правой частью неравенства (2), а в правую часть полученного таким образом неравенства вместо первого слагаемого поставим $\varepsilon/2$ и вместо второго — $\varepsilon/2$; от этого неравенство только усилится. В результате получим

$$\left|\sum^{m}\frac{u_n(x_0+h)-u_n(x_0)}{h}-\varphi(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для $n>N$ и $|h|<\eta$. Положим теперь, что $m\to\infty$. Тогда

$$\left|\sum^{\infty}\frac{u_n(x_0+\theta h)-u_n(x_0)}{h}-\varphi(x_0)\right|<\varepsilon$$

и, следовательно, для любого числа $\varepsilon>0$ можно найти такое $\eta>0$, что для каждого $0<h<\eta$ будет выполняться это неравенство. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\sum^{\infty}\frac{u_n(x_0+h)-u_n(x_0)}{h}=\varphi(x_0)$$

или $\sum^{\infty}u_n'(x_0)=\varphi(x_0)$. Но $\sum^{\infty}u_n'(x)$ сходится по условию теоремы равномерно на $[a, b]$, поэтому точкой x_0 может быть любая и, стало быть,

$$\sum_{1}^{\infty}u_n'(x)=\varphi(x).$$

Выше было положено, что

$$\varphi(x)=\lim S_m',$$

следовательно,

$$\lim S_m'=\sum_{1}^{\infty}u_n'(x).$$

Теорема о том, что производная суммы ряда равна сумме продифференцированных членов его, доказана.

З а м е ч а н и е. Для того, чтобы можно было дифференцировать S, необходимо, как известно, чтобы S была функцией непрерывной; обязательно же это будет лишь в том случае, если сам ряд $\sum^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно. Однако, если, как в случае обсуждаемой теоремы, ряд $\sum^{\infty}u_n'(x)$ сходится равномерно, то исходный ряд $\sum^{\infty}u_n(x)$

сходится тоже равномерно и притом обязательно, поэтому специальной оговорки о таком характере сходимости исходного ряда в формулировке теоремы не требуется.

Примеры.

1. Ряд

$$S(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^4} + \frac{\sin 3x}{3^4} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^4} + \ldots$$

сходится равномерно, так как он мажорируется рядом $\Sigma \frac{1}{n^4}$:

$$\left|\frac{\sin nx}{n^4}\right| \leqslant \frac{1}{n^4}.$$

Ряд, составленный из продифференцированных членов исходного ряда, также сходится равномерно:

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2^3} + \frac{\cos 3x}{3^3} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^3} + \ldots,$$

следовательно, справедлива формула

$$S'(x) = \sum^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}.$$

Нетрудно видеть, что также возможно и дифференцирование последнего ряда:

$$S''(x) = -\sum \frac{\sin nx}{n^2}.$$

Так как при каждом дифференцировании ряда степень знаменателя каждого члена понижается на единицу, то, очевидно, сходимость новых рядов прекратится и дальнейшее дифференцирование сделается невозможным.

2. Ряд

$$S(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^3 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^3 x}{n^2} + \ldots$$

сходится равномерно, так как мажорируется рядом $\Sigma \frac{1}{n^2}$:

$$\left|\frac{\sin n^3 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Почленное дифференцирование исходного ряда дает:

$$\cos x + \frac{2^3 \cos 2^3 x}{2^2} + \ldots + \frac{n^3 \cos n^3 x}{n^2} + \ldots =$$
$$= \cos x + 2 \cos 2^3 x + \ldots + n \cos n^3 x + \ldots$$

ряд, составленный из производных, расходится, например, при $x = 0$. Отсюда следует, что исходный ряд дифференцировать нельзя.

8.3. Интегрирование ряда

Теорема. Если на сегменте $[a, b]$ члены равномерно сходящегося ряда

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (u)$$

интегрируемы, то его сумма $S(x)$ интегрируема и имеет место формула почленного интегрирования:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots$$

Доказательство. Частичные суммы ряда S_n как суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых интегрируемо, сами интегрируемы. С другой стороны, $S(x)$ как предел последовательности интегрируемых сумм S_n сама непрерывна и тоже интегрируема. Следовательно, можно переходить к пределу под знаком интеграла:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx\right] =$$
$$= \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_b^a u_n(x)\,dx + \ldots$$

Коротко говоря, возможно почленное интегрирование равномерно сходящегося ряда. Что же получается в результате этой операции? Ответ дается следующей теоремой.

Теорема. Если ряд сходится равномерно на $[a, b]$, то ряд, составленный из его проинтегрированных членов, т. е.

$$\int_{x_0}^{x} u_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{b} u_n(x)\,dx + \ldots$$
$$\ldots + (a \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant b),$$

сходится равномерно.

Доказательство. Оценим остаточный член ряда. Так как ряд сходится равномерно, то существует такое число $N > 0$, что при всяком $n > N$ для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

После интегрирования исходного ряда будем иметь следующее неравенство:

$$\left|\int_{x_0}^{x} u_{n+1}\,dx + \int_{x_0}^{x} u_{n+2}dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_{n+m}\,dx + \ldots\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+2n} + \ldots|\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(x - x_0) \leqslant \varepsilon.$$

Так как последнее неравенство справедливо для всех $x \in [a, b]$, то равномерная сходимость ряда, который получается в результате почленного интегрирования исходного ряда, доказана.

Пример. Ряд

$$1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^n\cos n\varphi + \ldots$$

сходится при $0 < a < 1$. Будучи мажорируем рядом

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots,$$

он, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно. Поэтому допустимо почленное интегрирование, которое дает интеграл суммы $S(x)$ этого ряда:

$$\int_0^{2\pi} S(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi + a\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + a^2\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi d\varphi + \dots .$$

Все интегралы, содержащие косинусы, в пределах $0 - 2\pi$ обратятся в нуль, и мы получим любопытный результат: интеграл суммы ряда, не зная самой суммы:

$$\int_0^{2\pi} S(\varphi)\,d\varphi = 2\pi.$$

В заключение необходимо отметить, что равномерная сходимость ряда из производных или интегрируемого ряда является достаточным, но не необходимым требованием. Бывают случаи, когда продифференцированный ряд не является равномерно сходящимся, а ряд из производных сходится к производной суммы. Точно так же бывают случаи, когда неравномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать, т. е. получим:

$$\int S(x)\,dx = \sum^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Ряд

$$\frac{\mathrm{n}(1+x^2)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n} - \frac{1}{2(n-1)}\ln[1+(n-1)^2x^2]\right]$$

имеет сумму 0 при всех значениях x[1]. Если продифференцировать этот ряд, то получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right];$$

этот ряд, как легко показать, сходится к 0, но неравномерно.

---

[1] Проще всего убедиться в том, что $S(x) = 0$, можно в точке $x = 0$. Знаменатели всех дробей не обращаются в 0, а числители обращаются в $\ln 1 = 0$.

Таким образом, производная суммы исходного ряда равна сумме продифференцированного ряда. При этом ряд из производных не сходится равномерно.

Рассмотренные выше условия дифференцирования и интегрирования функциональных рядов заметно упрощаются в случае степенных рядов. Степенные ряды — самые простые и наиболее часто применяемые (вспомним, что ряд Тейлора — степенной), поэтому целесообразно уделить им внимание, тем более, что свойства функциональных рядов могут быть автоматически перенесены на степенные ряды.

8.4. Дифференцирование степенных рядов

Докажем теорему:

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0 \neq 0$, то в каждом замкнутом интервале, лежащем внутри интервала $(-|x_0|, |x_0|)$, он сходится абсолютно и (что очень важно для данного вопроса) равномерно.

Доказательство. Пусть $h > 0$ и замкнутый интервал $[-h, h]$ расположен внутри интервала $(-|x_0|, |x_0|)$. Пусть x — произвольная точка интервала $\pm h$, т. е. $-h < x < h$. Так как по условию теоремы ряд сходится при $x = x_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ и последовательность $\{a_n x_0^n\}$ ограничена, т. е. существует такое число $M > 0$, что

$$|a_n x_0^n| < M.$$

Представим $|a_n x^n|$ как $|a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$; тогда $|a_n x_0^n| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. Но $0 < h < |x_0|$, следовательно, числовой ряд

$$M \left|\frac{h}{x_0}\right|^n$$

сходится, а значит ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

сходится равномерно при $|x| < h$.

Отметим, что сумма степенного ряда является непрерывной функцией для каждого значения x, по модулю меньшего, чем радиус сходимости. Так как всякий сходящийся (внутри интервала сходимости) степенной ряд сходится равномерно, то достаточное условие дифференцируемости налицо и, следовательно, степенной ряд можно почленно дифференцировать (внутри интервала сходимости) всегда. Сумма ряда, составленного из производных членов исходного ряда, равна производной суммы исходного ряда. Покажем также, что дифференцирование степенного ряда не изменяет его радиуса сходимости.

Доказательство. Выберем произвольное число r такое, что

$$|x| < r < R.$$

Продифференцированный степенной ряд

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

запишем следующим образом:

$$a_1r \cdot \frac{1}{r} + 2a_2r^2 \cdot \frac{1}{r}\left|\frac{x}{r}\right| + \ldots + na_nr^n\frac{1}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1} + \ldots$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M\frac{1}{r} + 2M\frac{1}{r}\left|\frac{x}{r}\right| + \ldots + nM\frac{1}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1} + \ldots,$$

последний же ряд сходится, что получаем из признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)M}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^n : \frac{nM}{r}\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\left|\frac{x}{r}\right| = \left|\frac{x}{r}\right| < 1.$$

Следовательно, ряд, составленный из производных, сходится абсолютно при любых x, пока $|x| < r$. Но r может подходить к R как угодно близко, поэтому можно сказать, что ряд сходится, пока $|x| < R$, а это и значит, что радиус сходимости R_1 продифференцированного ряда не меньше радиуса сходимости R исходного ряда.

Остается доказать, что радиус сходимости R_1 и не больше R.

Во всякой точке x [1], в которой сходится ряд из производных, сходится также и ряд

$$|a_1||x| + 2|a_2||x|^2 + \ldots + n|a_n||x|^n + \ldots$$

Но $|a_n|\cdot|x^n| < n\cdot|a_n|\cdot|x^n|$, следовательно, в этой точке x абсолютно сходится и исходный ряд. Значит, точка x расположена внутри интервала сходимости заданного ряда, т. е. внутри $[-R, R]$ и, значит, $R_1 = R$.

Пример. Рассмотрим хорошо известный ряд, получаемый в результате разложения e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Радиус сходимости этого ряда равен $+\infty$, поэтому его можно дифференцировать в любой точке x:

$$(e^x)' = 1 + \frac{2x}{2} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!} + \ldots = 1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = e^x.$$

Этот, впрочем, известный результат наводит на мысль, что не только ряд e^x, но всякий степенной ряд можно дифференцировать, может быть, сколько угодно раз. Действительно, доказанная о радиусе сходимости дифференцированного ряда теорема имеет следствие: если радиус сходимости R степенного ряда отличен от нуля, то сумма $f(x)$ этого ряда в интервале сходимости имеет производные любого порядка. Производная $f^{(k)}(x)$ равна сумме ряда, полученного k-кратным почленным дифференцированием исходного ряда.

На примере e^x это следствие иллюстрируется непосредственно. Но не менее известно, что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

[1] Теперь рассуждение уже не связано соотношением $x < r < R$. Ведь ряд, составленный из производных, возможно (доказательства $R_1 = R$ еще нет!), сходится и при таких x, что $|x| > R$.

при дифференцировании дает

$$1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\,x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots=$$
$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)}+\ldots=\cos x.$$

Этот процесс дифференцирования можно повторить сколько угодно раз.

8.5. Интегрирование степенных рядов

Т е о р е м а. Степенной ряд можно почленно интегрировать сколько угодно раз внутри интервала $[-R,\ R]$, причем получающиеся при этом степенные ряды имеют тот же радиус сходимости и сходятся равномерно.

Проинтегрируем степенной ряд:

$$a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots \qquad (**)$$

Радиус сходимости этого ряда не может быть ни меньше, ни больше R. Мы уже знаем, что при дифференцировании степенного ряда его радиус сходимости не изменяется. Если ряд (**) продифференцировать, то получится исходный степенной ряд, у которого радиус сходимости есть R. Следовательно, и у ряда (**) радиус сходимости тот же $-R$. Проинтегрированный ряд, как говорится в теореме, сходится равномерно. Это очевидно, так как при почленном интегрировании степенного ряда получается опять степенной ряд и, следовательно, на него распространяются все свойства степенных рядов, в том числе равномерная сходимость в интервале $[-a,\ a]$, где $a<R$.

Интегрирование степенных рядов имеет многочисленные применения.

Примеры.

1. Известно разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\frac{t^2}{2}+\frac{1.3}{2.4}t^4+\ldots+$$
$$+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}t^{2n}+\ldots$$

Проинтегрируем почленно от 0 до x правую и левую части:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = \int_0^x 1dt + \int_0^x \frac{t^2dt}{2} + \int_0^x \frac{1\cdot 3\cdot t^4}{2\cdot 4}dt + \ldots =$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{3} + \frac{1.3}{2\cdot 4}\frac{t^5}{5} + \ldots$$

Положим теперь $x = 1/2$. Тогда $\arcsin 1/2 = \pi/6$ и ряд принимает вид

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5\cdot 2^5} + \ldots$$

— выражение, удобное для вычисления π.

2. $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$, как известно, не выражается с помощью элементарных функций.

Можно использовать известное разложение $\sin x$ и разделить каждый член этого разложения на x:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

Тогда

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^x 1dx + \int_0^x \frac{-x^2}{3!} dx + \ldots$$

дает:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} - \ldots$$

— выражение, которым пользуются для вычисления $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$ с любой, назначенной заранее, точностью. Так, например, полагая $x = \pi$, получим:

$$\int^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \pi - \frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{\pi^5}{5} - \ldots,$$

т. е. ряд, очень быстро сходящийся

$$\pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} - \frac{\pi^7}{35280} + \frac{\pi^9}{3265920} + \ldots,$$

позволяющий вычислить интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$ с заранее назначенной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С. и *Колмогоров А. Н.* Введение в теорию функций действительного переменного. М.— Л., 1933.

Гребенча М. К. и *Новоселов С. И.* Курс математического анализа, ч. II. М., 1961.

Гурса Э. Курс математического анализа, т. I, ч. I, II. М.— Л., 1933—1934.

Курант Р. и *Гильберт Д.* Методы математической физики, т. II. М.— Л., 1951.

Ландау Э. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление. М., 1948.

Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. М., 1934.

Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного, ч. I. М., 1948

Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.— Л., 1952.

Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1953.

Пиаджио Г. Интегрирование дифференциальных уравнений. М.—Л., 1933.

Риман Б. О возможности представления функции тригонометрическим рядом. Сочинения, М.— Л., 1948.

Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. I и II. М., 1932, 1933.

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.—Л., 1945.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I—III. М.—Л., 1958—1960.

Фролов Н. А. Теория функций действительного переменного. М., 1953.

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

Леон Семенович **Фрейман**

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Утверждено к печати
редколлегией серии
научно-популярной литературы
Академии наук СССР

Редактор **В. А. Никифоровский**
Редактор издательства **Е. М. Кляус**
Художественный редактор **В. Н. Тикунов**
Художник **Л. С. Кассис**
Технический редактор **В. Д. Прилепская**

Сдано в набор 27/I 71 г. Подписано к печати 19/V 71 г.
Формат $84\times108^{1}/_{32}$. Печ. л. 4,25. Усл. печ. л. 7,14. Уч.-изд. л. 5,3
Тираж 22.000 экз. Т-08551 Бум. № 2. Тип. зак. 1831.
Цена 33 коп.

Издательство «Наука»
Москва К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

ШУБНИКОВ А. В., КОПЦИК В. А. **Симметрия.** 20 л. с илл. 1 р. 70 к.

За последние годы классическое учение о симметрии обогатилось обширными новыми разделами. Расширилось и углубилось использование методов теории симметрии в естественных науках — физике, химии, биологии и в их многочисленных ответвлениях. Метод симметрии приобрел философское значение и стал одним из наиболее общих и эффективных методов теоретического исследования в современном естествознании вообще. Особенность книги — широта подхода к рассматриваемой авторами теме, сочетающая научную строгость с ясным и доходчивым стилем изложения. Помимо научных приложений в книге подробно рассматриваются возможности применения симметрии в искусстве.

Предварительные заказы принимаются всеми магазинами «Академкнига» и книготоргов. Адреса магазинов «Академкнига»: Алма-Ата, ул. Фурманова, 91/97; Баку, ул. Джапаридзе, 13; Душанбе, проспект Ленина, 95; Иркутск, 33, ул. Лермонтова, 303; Киев, ул. Ленина, 42; Куйбышев, проспект Ленина, 2; Ленинград, Д-120, Литейный проспект, 57; Москва, В-463, Мичуринский проспект, 12 (магазин «Книга — почтой»); Москва, ул. Горького, 8 (магазин № 1); Москва, ул. Вавилова, 55/7 (магазин № 2); Новосибирск, Красный проспект, 51; Свердловск, ул. Мамина-Сибиряка, 137; Ташкент, Л-29, ул. Ленина, 73; Ташкент, ул. Шота Руставели, 43; Уфа, Коммунистическая ул., 49; Уфа, проспект Октября, 129; Фрунзе, бульвар Дзержинского, 42; Харьков, Уфимский пер., 4/6.

ИЗДАТЕЛЬСТВО·НАУКА·