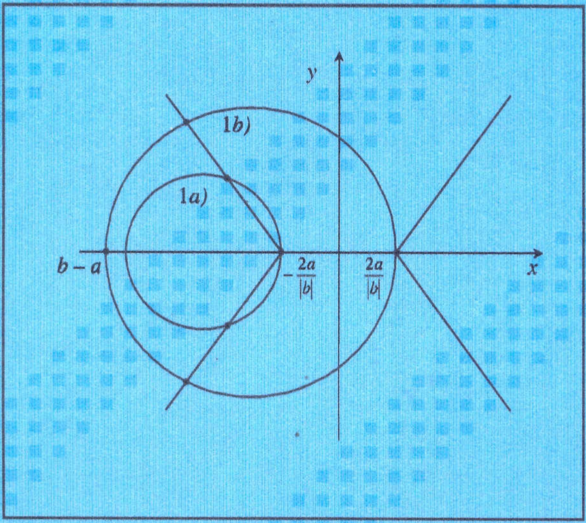
Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

В.А. ДАЛИНГЕР

Задачи с модулями



Омск
2010

ББК 74.262
Д. 152

Печатается по решению редакционно-издательского совета ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

Далингер В.А.

Д. 152. Задачи с модулями: учебное пособие. – Омск: Изд-во ГОУ ОмГПУ, 2010. – 360 с., – 116 ил., 4 табл.

ISBN 978-5-900179-27-3

Данное учебное пособие предназначено студентам и преподавателям математических специальностей педагогических учебных заведений, а также учителям математики и учащимся общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, колледжей, техникумов. В нем рассмотрены как теоретические основы решения задач с модулями, так и конкретные практические рекомендации. Учебное пособие будет полезным при подготовке к ЕГЭ по математике. Оно может послужить основой для элективного курса по соответствующей тематике для классов и школ с математическим профилем.

ББК 74. 262

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРА

В материалах единого государственного экзамена по математике в средней общеобразовательной школе и на вступительных экзаменах в различные средние специальные и высшие профессиональные учебные заведения предлагаются задачи с модулями.

Как показывает практика, эти задачи для учащихся и абитуриентов оказываются достаточно трудными, что объясняется тем, что они объективно сложны и тем, что школьный курс математики не обеспечивает достаточного уровня сформированности у учащихся прочных умений и навыков по решению задач с модулями.

В предложенном читателю учебном пособии раскрыты теоретические основы решения задач с модулями, а также на конкретных примерах показаны основные методы решения указанного типа задач.

Учебное пособие может служить основой для элективного курса соответствующей тематики для классов и школ математического профиля. Оно окажет помощь при подготовке к ЕГЭ по математике.

§1. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Определение. Модулем (абсолютной величиной) действительного числа (обозначается $|x|$) называется само это число, если оно неотрицательное, и это число, взятое с противоположным знаком, если оно отрицательное:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим геометрический смысл модуля действительного числа.

Каждому действительному числу соответствует точка числовой прямой, для которой это число является координатой. Модуль этого числа – это расстояние от соответствующей точки числовой оси до начала координат (рис. 1). Расстояние от точки A до точки O (от точки B до точки O) равно a ($\rho(AO) = a$, $\rho(BO) = a$).

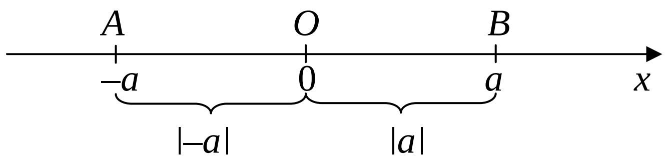


Рис. 1

Отметим, что модуль разности чисел a и b ($|a-b|$) соответствует расстоянию между точками a и b $\rho(a;b)$ (рис. 2).

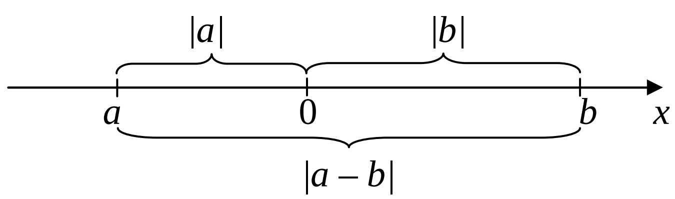


Рис. 2

Свойства модуля действительного числа

1) Квадрат модуля равен квадрату подмодульного выражения, то есть $|x|^2 = x^2$ для любого x.

Замечание. Эта формула часто используются не только слева направо, то есть $|x|^2 = x^2$, но и справа налево: $x^2 = |x|^2$.

2) Модуль любого действительного числа есть число неотрицательное, то есть для всех a $|a| \geq 0$.

3) Модуль действительного числа не меньше этого числа, то есть для всех a $|a| \geq a$.

4) Модуль действительного числа a равен максимальному из двух противоположных чисел a и $-a$, то есть $|a| = \max\{a; -a\}$.

5) Числа неотрицательны тогда и только тогда, когда их сумма равна сумме модулей этих чисел, то есть сумма $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|$ равносильна системе $\begin{cases} u_1 \geq 0, \\ u_2 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n \geq 0. \end{cases}$

6) Числа неположительны тогда и только тогда, когда сумма их модулей противоположна сумме этих чисел, то есть равенство $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| = -u_1 - u_2 - \ldots - u_n$ равносильно системе $\begin{cases} u_1 \leq 0, \\ u_2 \leq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n \leq 0. \end{cases}$

7) Числа одновременно неотрицательны и неположительны тогда и только тогда, когда сумма их модулей равна модулю их суммы, то есть равенство $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| = |u_1 + u_2 + \ldots + u_n|$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} u_1 \geq 0, \\ u_2 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} u_1 \leq 0, \\ u_2 \leq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n \leq 0. \end{cases}$

8) Сравнение модулей двух чисел равносильно сравнению их квадратов, то есть имеют место следующие равносильности:

$|f(x)|<|\varphi(x)|$ равносильно $f^2(x)<\varphi^2(x)$;

$|f(x)|\le|\varphi(x)|$ равносильно $f^2(x)\le\varphi^2(x)$;

$|f(x)|=|\varphi(x)|$ равносильно $f^2(x)=\varphi^2(x)$;

$|f(x)|>|\varphi(x)|$ равносильно $f^2(x)>\varphi^2(x)$;

$|f(x)|\ge|\varphi(x)|$ равносильно $f^2(x)\ge\varphi^2(x)$.

9) Модуль произведения двух действительных чисел равен произведению модулей сомножителей, то есть $|ab|=|a|\cdot|b|$.

10) Модуль дроби, у которой знаменатель отличен от нуля, равен частному от деления модуля числителя на модуль знаменателя, то есть $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, где $b\neq 0$.

11) $|a^m|=|a|^m$ для любого целого значения m.

12) Если n – четное число, то $|a|^n=a^n$.

13) Квадратный корень из квадрата числа равен модулю этого числа: $\sqrt{a^2}=|a|$.

14) Модуль разности двух действительных чисел не меньше разности их модулей, то есть $|a-b|\ge|a|-|b|$.

15) Модуль суммы двух действительных чисел не меньше разности их модулей $|a+b|\ge|a|-|b|$.

16) Для любых действительных чисел a и b имеют место двойные неравенства:

$$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|,$$

$$|a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|.$$

17) Для любых действительных чисел a и b справедливы неравенства:

$$\left||a|-|b|\right| \le |a+b| \le |a|+|b|,$$

$$\left||a|-|b|\right| \le |a-b| \le |a|+|b|.$$

18) Для любых действительных чисел a и b справедливо равенства:

$$|a+b|+|a-b| = \left|a+|b|\right|+\left|a-|b|\right|.$$

19) Для любых действительных чисел модуль их суммы не превосходит суммы их модулей, то есть

$$|u_1+u_2+\ldots+u_n| \le |u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|.$$

20) Сумма двух действительных чисел неотрицательна, а их произведение положительно тогда и только тогда, когда модуль разности их модулей равен сумме этих чисел, то есть равенство $\left||u|-|v|\right| = u+v$ равносильно системе $\begin{cases} u+v \ge 0, \\ uv \le 0. \end{cases}$

21) Сумма двух действительных чисел неотрицательна, а одно из чисел неположительно тогда и только тогда, когда модуль разностей их модулей равен сумме этих чисел, то есть равенство $\left||u|-|v|\right| = u+v$ равносильно системе $\begin{cases} u+v \ge 0, \\ u \le 0 \quad \text{или} \quad v \le 0. \end{cases}$

22) Уравнение $|x-a|+|x-b|=|a-b|$ равносильно неравенству $(x-a)(x-b) \le 0$.

23) Уравнение $|x-a|+|x-b|=b-a$ равносильно двойному неравенству $a \le x \le b$, если $b \ge a$.

Перейдем к решению задач на преобразование выражений, содержащих модули.

Задача 1. Упростите выражение $\frac{a^2-4}{|a|+2}$.

Решение

Дробь определена для любых значений a. При $a \geq 0$ $\frac{a^2-4}{|a|+2}=\frac{a^2-4}{a+2}=a-2$; при $a < 0$ $\frac{a^2-4}{|a|+2}=\frac{a^2-4}{-a+2}=-(a+2)=-a-2$.

Возможно другое решение:

$$\frac{a^2-4}{|a|+2}=\frac{|a|^2-2^2}{|a|+2}=|a|-2.$$

Ответ: при $a \in [0; \infty)$ $a-2$;

при $a \in (-\infty; 0)$ $-(a+2)$.

Задача 2. Упростите выражение $\frac{a^2-|a|+1-a}{|a-1|}$.

Решение

Дробь определена для $a \neq 1$. Точки 0 и 1 делят числовую ось на промежутки $(-\infty; 0)$, $[0; 1)$, $(1; +\infty)$.

Упростим дробь на каждом промежутке.

$a < 0$: $\quad \frac{a^2+a+1-a}{-a+1}=\frac{a^2+1}{1-a}$;

$0 \leq a < 1$: $\quad \frac{a^2-a+1-a}{-a+1}=-\frac{(a-1)^2}{a-1}=1-a$;

$a > 1$: $\quad \frac{a^2-a+1-a}{a-1}=\frac{(a-1)^2}{a-1}=a-1$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0)$ $\quad \frac{a^2+1}{1-a}$;

при $a \in [0; 1)$ $\quad 1-a$;

при $a \in (1; +\infty)$ $\quad a-1$.

Задача 3. Упростите выражение $\frac{|x^2-1|+3x^2+3}{2x^2+1}+\frac{|x+1|}{x+1}$.

Решение

Выражение определено для всех значений $x \neq -1$.

$$\frac{|x^2-1|+3x^2+3}{2x^2+1}+\frac{|x+1|}{x+1}=\frac{|x-1||x+1|+3x^2+3}{2x^2+1}+\frac{|x+1|}{x+1}.$$

Точками –1 и 1 разделим числовую ось на промежутки (–∞; –1), (–1; 1), [1; ∞).

$x < -1$: $\quad \frac{x^2-1+3x^2+3}{2x^2+1}-\frac{x+1}{x+1}=\frac{4x^2+2}{2x^2+1}-1=2-1=1;$

$-1 < x < -1$: $\quad \frac{-x^2+1+3x^2+3}{2x^2+1}+\frac{x+1}{x+1}=\frac{2x^2+4}{2x^2+1}+1=\frac{4x^2+5}{2x^2+1};$

$x \geq 1$: $\quad \frac{x^2-1+3x^2+3}{2x^2+1}+\frac{x+1}{x+1}=\frac{4x^2+2}{2x^2+1}+1=2+1=3.$

Ответ: при $x \in$ (–∞; –1) 1;

при $x \in$ (–1; 1) $\quad \frac{4x^2+5}{2x^2+1}$;

при $x \in$ [1; +∞) 3.

Задача 4. Упростите выражение $\frac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}$.

Решение

Дробь определена для любых $x \in R$, кроме $x = 0$.

$$\frac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}=\frac{|x-1||x^2+x+1|+|x+1|}{x^3+x}.$$

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ при любых значениях x.

Дробь примет вид $\frac{|x-1|(x^2+x+1)+|x+1|}{x(x^2+1)}$.

Точками –1, 0, 1 разделим числовую ось на промежутки (–∞;–1), [–1; 0), (0; 1), [1; +∞).

При $x < -1$: $$\frac{-x^3+1-x-1}{x^3+x} = -\frac{x^3+x}{x^3+x} = -1;$$

при $-1 \le x < 0$ и $0 < x < 1$: $$\frac{-x^3+1+x+1}{x^3+x} = \frac{2+x-x^3}{x^3+x};$$

при $x \ge 1$: $$\frac{x^3-1+x+1}{x^3+x} = \frac{x^3+x}{x^3+x} = 1.$$

Ответ: при $x \in (-\infty; -1)$ -1;

при $x \in [-1; 0) \cup (0; 1)$ $\frac{2+x-x^3}{x^3+x}$;

при $x \in [1; +\infty)$ 1.

Задача 5. Упростите выражение $\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$.

Решение

Корни трехчлена m^2-m-6 будут –2 и 3. Трехчлен разложен на множители, тогда дробь примет вид $\frac{m|m-3|}{(m+2)(m-3)|m|}$.

Дробь определена на множестве R, кроме $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$.

При $m < -2$ и $-2 < m < 0$ $$\frac{-m(m-3)}{(m+2)(m-3)(-m)} = \frac{1}{m+2};$$

при $0 < m < 3$ $$\frac{-m(m-3)}{(m+2)(m-3)m} = -\frac{1}{m+2};$$

при $m \ge 3$ $$\frac{m(m-3)}{(m+2)(m-3)m} = \frac{1}{m+2}.$$

Ответ: при $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup [3; +\infty)$ $\frac{1}{m+2}$;

при $m \in (0; 3)$ $-\frac{1}{m+2}$.

Задача 6. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b\cdot|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$.

Решение

Областью допустимых значений переменной в выражении является объединение промежутков (0; 1) $\cup$ (1; $+\infty$).

Умножим числитель и знаменатель дроби на b. Получим

$$\frac{|b-1|+b^2|b-1|+2b-2}{\sqrt{b}\sqrt{b^2-2b+1}}=\frac{|b-1|+b^2|b-1|+2b-2}{\sqrt{b}|b-1|}.$$

При $0 < b < 1$

$$\frac{-(b-1)-b^2(b-1)+2(b-1)}{-\sqrt{b}(b-1)}=\frac{-(b-1)(1+b^2+2)}{-\sqrt{b}(b-1)}=\frac{b^2-1}{\sqrt{b}};$$

при $b > 1$

$$\frac{b-1+b^2(b-1)+2(b-1)}{\sqrt{b}(b-1)}=\frac{(b-1)(1+b^2+2)}{\sqrt{b}(b-1)}=\frac{b^2+3}{\sqrt{b}}.$$

Ответ: при $b\in$ (0; 1) $\dfrac{b^2-1}{\sqrt{b}}$;

при $b\in$ (1; $+\infty$) $\dfrac{b^2+3}{\sqrt{b}}$.

Задача 7. Упростите выражение $B=\dfrac{(y-1)\sqrt{(y-1)^2+4y}}{y^2+1+2|y|}$.

Решение

$$B=\frac{(y-1)\sqrt{(y-1)^2+4y}}{y^2+1+2|y|}=\frac{(y-1)\sqrt{(y+1)^2}}{y^2+2|y|+1}=\frac{(y-1)|y+1|}{y^2+2|y|+1}.$$

Корни подмодульных выражений –1 и 0 разбивают числовую прямую на три промежутка: ($-\infty$;–1); [–1; 0) и [0; $+\infty$). Преобразуем выражение B в каждом из указанных промежутков.

1) При $y\in$ ($-\infty$;–1)

$$B=\frac{(y-1)(-(y+1))}{y^2-2y+1}=\frac{-(y-1)(y+1)}{(y-1)^2}=\frac{-(y+1)}{y-1}=\frac{1+y}{1-y}.$$

2) При $y \in [-1;\ 0)$

$$B=\frac{(y-1)(y+1)}{y^2-2y+1}=\frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)^2}=\frac{y+1}{y-1}.$$

3) При $y \in [0;\ +\infty)$

$$B=\frac{(y-1)(y+1)}{y^2+2y+1}=\frac{(y-1)(y+1)}{(y+1)^2}=\frac{y-1}{y+1}.$$

Ответ: $\frac{1+y}{1-y}$, если $y \in (-\infty;-1)$;

$\frac{y+1}{y-1}$, если $y \in [-1;\ 0)$;

$\frac{y-1}{y+1}$, если $y \in [0;\ +\infty)$.

Задача 8. Упростите выражение $\frac{\sqrt{a+z}-\sqrt{a-z}}{\sqrt{a+z}+\sqrt{a-z}}$, где $z=\frac{2ab}{b^2+1}$, $a>0$.

Решение

Преобразуем заданное выражение по частям:

$$\sqrt{a+z}=\sqrt{a+\frac{2ab}{b^2+1}}=\sqrt{\frac{a(b+1)^2}{b^2+1}}=|b+1|\sqrt{\frac{a}{b^2+1}};$$

$$\sqrt{a-z}=\sqrt{a-\frac{2ab}{b^2+1}}=\sqrt{\frac{a(b-1)^2}{b^2+1}}=|b-1|\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}.$$

Тогда заданное выражение, которое мы обозначим буквой B, будет иметь вид:

$$B=\frac{\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}|b+1|-\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}|b-1|}{\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}|b+1|+\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}|b-1|}=\frac{|b+1|-|b-1|}{|b+1|+|b-1|}.$$

Нанесем на числовую прямую значения b, при которых подмодульные выражения обращаются в нуль. Будем иметь три промежутка: (–∞;–1); [–1; 1] и (1; +∞). Рассмотрим выражение B на каждом из них.

1) Если $b \in$ (–∞;–1), то $B = \dfrac{-b-1+b-1}{-b-1-b+1} = \dfrac{1}{b}$.

2) Если $b \in$ [–1; 1], то $B = \dfrac{b+1+b-1}{b+1-b+1} = b$.

3) Если $b \in$ (1; +∞), то $B = \dfrac{b+1-b+1}{b+1+b-1} = \dfrac{1}{b}$.

Ответ: b, если $|b| \le 1$;

$\dfrac{1}{b}$, если $|b| > 1$.

Задача 9. Разность $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{\left|40\sqrt{2}+57\right|}$ является целым числом. Найти это число.

Решение

Обозначим исходное выражение буквой A. Так как $\sqrt{\left|40\sqrt{2}+57\right|} > \sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}$, то A – отрицательное число (и целое по условию задачи).

Учитывая, что $\left|40\sqrt{2}-57\right| = 57-40\sqrt{2}$, найдем A^2:

$$A^2 = \left(\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}\right)^2 - 2\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|\left|40\sqrt{2}+57\right|} + \left(\sqrt{\left|40\sqrt{2}+57\right|}\right)^2 =$$

$$= \left|40\sqrt{2}-57\right| - 2\sqrt{\left(57-40\sqrt{2}\right)\left(57+40\sqrt{2}\right)} + \left|40\sqrt{2}+57\right| =$$

$$= 57-40\sqrt{2} - 2\sqrt{57^2-\left(40\sqrt{2}\right)^2} + 40\sqrt{2}+57 =$$

$$= 114 - 2\sqrt{3249-3200} = 114-14 = 100.$$

Так как A^2 = 100, то A = ±10, но, как было отмечено выше, A число отрицательное, тогда A = –10.

Ответ: –10.

Задача 10. Найдите наименьшее значение выражения

$$|x-5|+|x-12|.$$

Решение

Как и многие другие задачи с модулем, предложенную задачу можно решить методом интервалов, что мы и предлагаем сделать читателю.

Мы же воспользуемся утверждением, которое будет полезно во многих случаях.

Утверждение 1. При $m \leq n$ минимальное значение выражения $|x-m|+|x-n|$ равно $n-m$ и достигается на всем отрезке $[m; n]$. **(У1)**

В выражении, которое задано в задаче, $m = 5$, $n = 12$, а поэтому $\min(|x-5|+|x-12|)=12-5=7$.

Ответ: 7.

Рассмотрим задачи (задачи 11-15), условия которых не содержат модули, но их решение основано на использовании модуля числа и его свойств.

Задача 11. Вычислите значение выражения $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $1 \leq x \leq 2$.

Решение

Первый способ

Обозначим заданное выражение буквой A: $A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ (заметим, что $A \geq 0$ как сумма двух арифметических корней квадратных, которые, как известно, неотрицательны).

Тогда
$$A^2 = x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4x+4} = \\ = 2x+2\sqrt{(x-2)^2} = 2x+2|x-2|.$$

Так как $1 \leq x \leq 2$, то $|x-2| = 2-x$. Имеем $A^2 = 2x+4-2x = 4$. Откуда $A = 2$ (отрицательное значение $A = -2$ не удовлетворяет условию $A \geq 0$).

Второй способ

Чтобы извлечь квадратные корни, преобразуем подкоренные выражения: вычтем и прибавим по единице. Будем иметь:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2\sqrt{x-1}+1^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|.$$

Учитывая, что при $1\le x\le 2$ $\left|\sqrt{x-1}+1\right|=\sqrt{x-1}+1$, а $\left|\sqrt{x-1}-1\right|=1-\sqrt{x-1}$, окончательно будем иметь:

$$\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2.$$

Ответ: 2.

Задача 12. Вычислите значение выражения

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}.$$

Решение

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{15}+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{15}+\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|+\left|\sqrt{3}+\sqrt{5}\right|=-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=2\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Задача 13. Вычислите значение выражения $\sqrt{x+4-2\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+19+8\sqrt{x+3}}$, если x = –2,2009.

Решение

$$\sqrt{x+4-2\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+19+8\sqrt{x+3}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x+3}\right)^2+1-2\sqrt{x+3}}+\sqrt{\left(\sqrt{x+3}\right)^2+16+8\sqrt{x+3}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x+3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+3}+4\right)^2}=\left|\sqrt{x+3}-1\right|+\left|\sqrt{x+3}+4\right|.$$

Учитывая, что x = –2,2009, и, используя определение модуля числа, получим $\left|\sqrt{x+3}-1\right|+\left|\sqrt{x+3}+4\right|=-\sqrt{x+3}+1+\sqrt{x+3}+4=5.$

Ответ: 5.

Задача 14. Вычислите значение выражения

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}.$$

Решение

Заметим, что $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}=\left|\sqrt{3}-5\right|=5-\sqrt{3}$.

Выделив полный квадрат в подкоренном выражении $7+4\sqrt{3}$ ($3+4\sqrt{3}+4=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+2^2=\left(\sqrt{3}+2\right)^2$) и избавившись от иррациональности в знаменателе, получим $\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$. Тогда исходное выражение будет равно:

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}=5-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}=3.$$

Ответ: 3.

Задача 15. Упростите выражение $\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$.

Решение

Имеем цепочку равенств:

$$\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}=\sqrt{20a+92+\sqrt{\left(a^2+8\right)^2}}=$$
$$=\sqrt{20a+92+\left|a^2+8\right|}=\sqrt{20a+92+a^2+8}=\sqrt{(a+10)^2}=|a+10|.$$

Ответ: $|a + 10|$.

Задача 16. При каких значениях параметра a каждый из квадратных трехчленов $x^2 + ax + 2008$ и $x^2 + 2008x + a$ имеет хотя бы один корень, причем все их корни – целые числа?

Решение

Для корней x_1, x_2 первого трехчлена, корней x_3, x_4 второго трехчлена по теореме Виета имеем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x_1+x_2=-a, & (1)\\ x_1\cdot x_2=2008, & (2)\end{cases}\\ \begin{cases}x_3+x_4=-2008, & (3)\\ x_3\cdot x_4=a. & (4)\end{cases}\end{array}\right.$$

По условию все корни – целые числа. Поэтому корнями x_1, x_2 могут быть лишь делители числа 2008. Корни x_1, x_2 можно поменять местами. Значит, достаточно рассмотреть лишь те случаи и значения параметра a, которые сведены в таблицу (табл. 1).

Таблица 1

x_1	± 2	± 4	± 8	± 1
x_2	± 1004	± 502	± 251	± 2008
a	∓ 1006	∓ 506	∓ 259	∓ 2009

Отберем подходящее значение параметра *a первым способом.* Значения параметра $a = \mp 259$, $a = \mp 506$ не подходят из-за противоречия с условием (3). Действительно, из (4) следует:

$$|x_3|\cdot|x_4|=|a|,\ |x_3|\le|a|,\ |x_4|\le|a|.$$

Значит, $|x_3+x_4|\le|x_3|+|x_4|\le 506+506<2008$ и условие (3) не выполняется.

Значения параметра $a = \mp 1006$ тоже не подходят. Действительно, при них

$$\begin{cases}x_3+x_4=-2008,\\ x_3\cdot x_4=\mp 1006\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x_3+x_4|=2008\le|x_3|+|x_4|,\\ |x_3|\cdot|x_4|=1006\end{cases}\Rightarrow|x_3|+|x_4|>|x_3|\cdot|x_4|..$$

Но если сумма двух натуральных чисел $|x_3|$, $|x_4|$ больше их произведения, то одно из них равно 1.

Пусть, например, $|x_3| = 1$. Тогда $|x_4| = 1006$, и условие (3) не выполняется.

Остается рассмотреть значение $a = \mp 2009$.

Покажем, что значение a = 2009 не подходит. Действительно, при нем

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = -2008, \\ x_3 \cdot x_4 = 2009. \\ x_3 \in Z, \\ x_4 \in Z \end{cases} \Rightarrow (x_3+1)(x_4+1) = x_3x_4 + x_3 + x_4 + 1 = 2009 - 2008 + 1 = 2.$$

Значит,

$$|x_3 + 1| \le 2, -3 \le x_3 \le 1,$$

$$|x_4 + 1| \le 2, -3 \le x_4 \le 1,$$

и условия (3), (4) не выполняются.

Значение a = –2009 подходит, так как при нем оба трехчлена

$$x^2 - 2009x + 2008 \text{ и } x^2 + 2008x - 2009$$

имеют целые корни

$$x_1 = 1, x_2 = 2008 \text{ и } x_3 = 1, x_4 = -2009$$

соответственно.

Ответ: –2009.

Отберем подходящее значение параметра a = –2009 *вторым способом*. Приравняем нулю второй трехчлен и изучим квадратичную функцию $a = a(x)$:

$$x^2 + 2008x + a = 0 \Leftrightarrow a = -x(x + 2008),$$

где $x \in Z$.

При переходе ее аргумента через соседние целые значения $x = -2008$, $x = -2007$, $x = -2006$ или $x = -1$, $x = 0$ функция $a(x)$ изменяется достаточно резко и "перепрыгивает" все значения a, равные ±1006, ±506, ±259, +2009. Ясно, что при этих значениях параметра второй трехчлен не имеет целых корней, так как (рис. 3)

$$a(-2008) = 0, a(-2007) = 2007,$$

$$a(-2006) = 4012 > 2009:$$

$$a(0) = 0, a(-1) = 2007.$$

Все эти значения параметра не подходят.

Остается только значение a = –2009, которое, как мы установили, подходит.

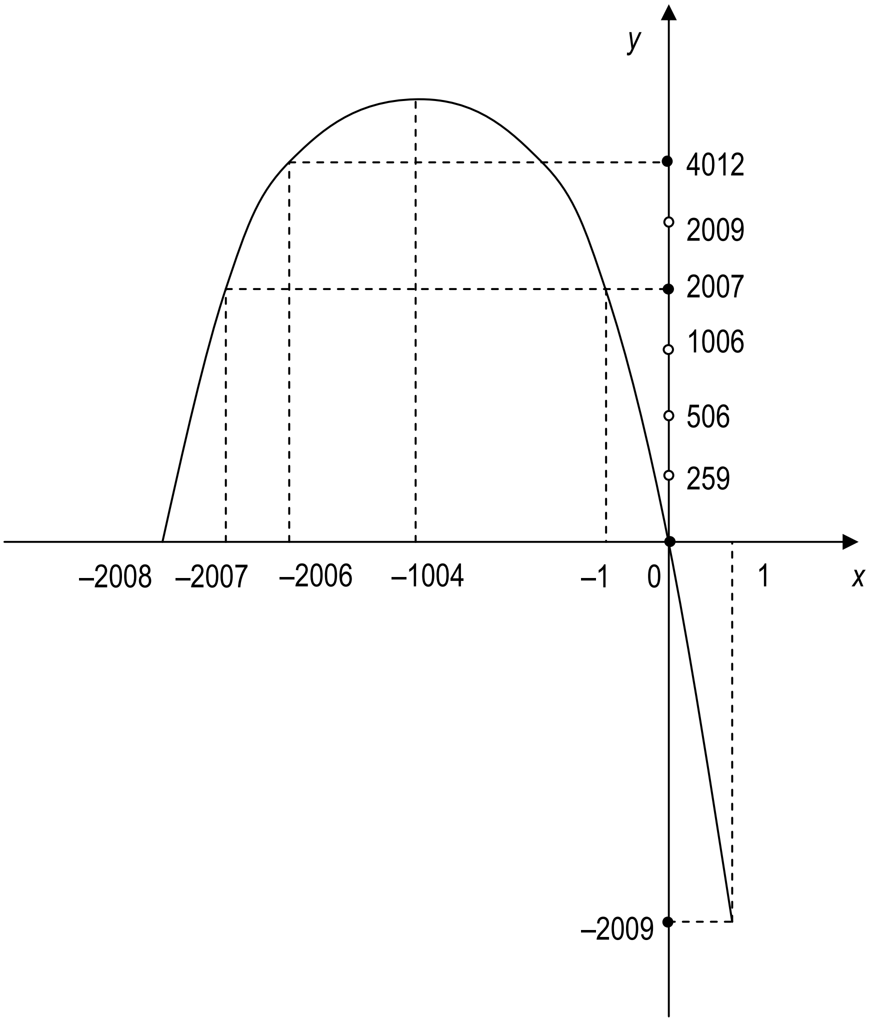


Рис. 3

Ответ: –2009.

Рассмотрим решение и других задач, условия которых содержат модуль.

Задача 17. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{\left(6+4x-2x^2\right)}\left(\frac{|x+2|+|x-4|}{3}\right).$$

Решение

Найдем сначала область определения $D(y)$:

$$\begin{cases} 6+4x-2x^2 > 0, \\ 6+4x-2x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3, \\ x \neq \dfrac{2 \pm \sqrt{14}}{2}. \end{cases}$$

Из найденной области определения следует, что $x + 2 > 0$ и $x - 4 < 0$, поэтому $|x+2|+|x-4| = x+2-x+4=6$, тогда

$$\frac{|x+2|+|x+4|}{3} = 2 \text{ и } \log_2\frac{|x+2|+|x-4|}{3} = 1.$$

Поэтому в области определения

$$y(x) = \log_{(6+4x-2x^2)}\left(\frac{|x+2|+|x-4|}{3}\right) = \frac{\log_2\left(\frac{|x+2|+|x-4|}{3}\right)}{\log_2(6+4x-2x^2)} = \frac{1}{\log_2\left(8-(x-1)^2\right)}.$$

Квадратный трехчлен $f(x) = 8-(x-1)^2$ принимает все значения из промежутка $(-\infty; 8]$, логарифм $\log_2 f(x)$ существует для всех значений $f(x) \in (0; 8]$. Но логарифм стоит в знаменателе – поэтому необходимо промежуток разбить на два, исключив значение $f(x) = 1$. Итак,

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 8-(x-1)^2 < 1, \\ 1 < 8-(x-1)^2 \le 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\infty < \log_2\left(8-(x-1)^2\right) < 0, \\ 0 < \log_2\left(8-(x-1)^2\right) \le \log_2 8 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\infty < y(x) < 0, \\ \frac{1}{3} \le y(x) < +\infty. \end{array}\right.$$

Поэтому $E(y) = (-\infty;0) \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;0) \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Замечание. В оформлении решения задачи использованы знаки: «$\Rightarrow$» и «$\Leftrightarrow$». Их смысл раскрыт в §2, здесь же мы заметим лишь, что знак «$\Rightarrow$» – знак логического следования, а знак «$\Leftrightarrow$» – знак равносильности (эквивалентности).

Задача 18. Найти множество значений функции

$$y = \frac{1}{\pi}\arccos(x-5) - |x-2|.$$

Решение

Определим область определения X функции из условия $|x - 5| \le 1$ (по определению $\arccos(x - 5)$ есть угол, принадлежащий отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен $x - 5$). Решая неравенство, получаем:

$-1 \le x - 5 \le 1$, или $4 \le x \le 6$. Таким образом, $X = [4; 6]$. Величина $x - 2$ является положительной при $x \in X$, поэтому $|x - 2| = x - 2$. Заметим, что линейная функция $y = ax + b$ является возрастающей, если $a > 0$, и убывающей, если $a < 0$. Функция $y = \arccos x$ является убывающей в области определения. Функция $y = \frac{1}{\pi}\arccos(x-5)$ является убывающей в области определения.

Тогда функция $y = \frac{1}{\pi}\arccos(x-5) + 2 - x$ является убывающей на отрезке [4; 6], как сумма убывающих функций. Поэтому наибольшее значение функции равно

$$y(4) = \frac{1}{\pi}\arccos(-1) - 2 = \frac{1}{\pi}\cdot\pi - 2 = 1 - 2 = -1,$$

а наименьшее

$$y(6) = \frac{1}{\pi}\arccos 1 - 4 = \frac{1}{\pi}\cdot 0 - 4 = -4.$$

Следовательно, множество значений функции есть отрезок $[-4; -1]$.

Ответ: $[-4; -1]$.

Задача 19. Найти множество значений функции $y = \operatorname{arcctg}\frac{|x|-1}{x+1}$.

Решение

Область определения функции $X = (-\infty;-1) \cup (-1; +\infty)$. Определим сначала множество значений функции $y = \frac{|x|-1}{x+1}$. Рассмотрим уравнение $\frac{|x|-1}{x+1} = a$ и решим его для каждого значения параметра a. Перепишем уравнение в виде $|x| - 1 = a(x + 1)$.

При $x \ge 0$ уравнение равносильно: $x-1 = a(x+1)$, или $x(a-1) = -a-1$. Уравнение не имеет решений при $a = 1$. При $a \ne 1$ решение $x = -\frac{a+1}{a-1}$ должно удовлетворять неравенству $x \ge 0$. Решая неравенство $-\frac{a+1}{a-1} \ge 0$ методом интервалов, находим $a \in [-1; 1)$.

Таким образом, при $a \in [-1;\ 1)$ уравнение имеет решения, удовлетворяющие $x \geq 0$.

Аналогично рассматриваем случай $x < 0$. Рассматриваемое уравнение равносильно уравнению $-x - 1 = a(x + 1)$, или $(x + 1)(a + 1) = 0$.

Так как $x + 1 \neq 0$, то определяем, что при $a = -1$ любое $x < 0$, $x \neq -1$, является решением уравнения. Таким образом, получаем, что уравнение $\frac{|x|-1}{x+1} = a$ имеет решения при $a \in [-1;\ 1)$. Следовательно, множество значении функции $y = \frac{|x|-1}{x+1}$ есть промежуток $[-1;\ 1)$. Так как функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является убывающей, то

$$\operatorname{arcctg} 1 < \operatorname{arcctg} \frac{|x|-1}{x+1} \leq \operatorname{arcctg}(-1).$$

Так как $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, а $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, то множество значений функции есть $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Задача 20. При каких значениях параметра a значение функции $y = (1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше значения функции $y = 0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$ при всех значениях x?

Решение

Преобразуем формулы, которыми заданы функции:

$$y = (1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} = \left(5^{\log_5(1-|x|)}\right)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} = 5^{\log_5(1-|x|)\left(\log_5(1-|x|)-|a-1|\right)}.$$

Так как выражение $1 - |x|$ стоит под знаком логарифма, то $|x| < 1$. Значит, $\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right) = \log_{25}(1-|x|)^2 = \log_5(1-|x|)$. Откуда

$$y = 0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)} = 5^{\log_5(1-|x|)+a^2-4}.$$

Пусть $t = \log_5(1 - |x|)$. Эта функция четна, ее наибольшее значение принимается при $x = 0$ и равно нулю. При приближении $|x|$ к 1 эта переменная по свойствам логарифмической функции по основанию 5 стремится к $-\infty$.

По свойству непрерывности функции $t = \log_5(1 - |x|)$ имеем $t \in (–; 0]$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, следует решить неравенство

$$t(t - |a-1|) > t + a^2 - 4,\ t \le 0.$$

$$t^2 + (|a-1|+1)t + 4 - a^2 > 0,\ t \le 0.$$

Абсцисса вершины параболы $t^2 + (|a-1|+1)t + 4 - a^2$ положительна, ветви направлены вверх. Значит, последнее неравенство верно при всех положительных t в том и только в том случае, когда свободный коэффициент $4 - a^2$ положителен. Следовательно, $a^2 < 4$, $a \in (–2; 2)$.

Ответ: $a \in (–2; 2)$.

Задача 21. Найдите все x, при которых хотя бы одно из двух выражений $A(x) = |x - 3|(|x - 5| - |x - 3|) - 6x$; и $B(x) = |x|(|x| - |x - 8|) + 24$ неположительно, и при этом его модуль не меньше модуля другого.

Решение

Условие задачи можно записать в виде совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A \le 0,\\ |A| \ge |B|,\end{cases}\\ \begin{cases}B \le 0,\\ |B| \ge |A|,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A \le 0,\\ B \le -A,\\ B \ge A;\end{cases}\\ \begin{cases}B \le 0,\\ A \le -B,\\ A \ge B;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A \le 0,\\ A + B \le 0,\\ A - B \le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}B \le 0,\\ A + B \le 0,\\ A - B \ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Если нарисовать на плоскости (A, B) решение каждой системы, то можно убедиться, что решением совокупности будет полуплоскость, задаваемая неравенством $A + B \le 0$.

Далее, решаем это неравенство:

$$A + B \le 0 \Leftrightarrow |x-3|(|x-5| - |x-3|) - 6x + |x|(|x| - |x-8|) + 24 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 8x + 15| - x^2 + 6x - 9 - 6x + x^2 - |x^2 - 8x| + 24 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 8x + 15| \le |x^2 - 8x| - 15 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 8x + 15 \le |x^2 - 8x| - 15,\\ x^2 - 8x + 15 \le 15 - |x^2 - 8x|\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-8x| \ge x^2-8x+30, \\ |x^2-8x| \ge 8x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-8x \ge x^2-8x+30, \\ x^2-8x \le -x^2+8x-30; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x^2-8x \ge 8x-x^2, \\ x^2-8x \le x^2-8x, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 \ge 30, \\ (x-3)(x-5) \le 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x(x-8) \ge 0, \\ 0 \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3;5].$$

Ответ: [3;5].

Задача 22. Доказать, что для того, чтобы $|x-a|+|x-b|=a-b$, необходимо и достаточно, чтобы $a \ge x \ge b$. Дать иллюстрацию этого утверждения на числовой оси.

Доказательство

Так как левая часть равенства неотрицательна, то необходимо условие $a \ge b$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Предположим, что $x > a$, тогда $x > b$ и $|x - a| = x - a$, $|x - b| = x - b$ и равенство принимает вид $2x - a - b = a - b$, откуда $x = a$, что противоречит предположению $x > a$.

Следовательно, $x \le a$.

2) Пусть $x < b$. После преобразований равенства получим, что $x = b$; это противоречит предположению.

3) При $a \ge x \ge b$ и $|x - a| = x - a$, $|x - b| = x - b$ и равенство принимает вид $a - x + x - b = a - b \Leftrightarrow a - b = a - b$, то есть верно при всех x в рассматриваемом промежутке.

Следовательно, $a \ge x \ge b$.

Итак, для того, чтобы выполнялось равенство $|x-a|+|x-b|=a-b$, необходимо и достаточно, чтобы $a \ge x \ge b$, то есть чтобы $x \in [b; a]$.

Так как $|x-a|$ и $|x-b|$ имеют смысл расстояния от точки x числовой оси соответственно до точек a и b, то доказанное утверждение означает, что если сумма расстояний от точки x до точек a и b ($a < b$) равна длине отрезка $[b;\, a]$, то точка x находится между точками a и b, то есть $x \in [b;\, a]$ (рис. 4).

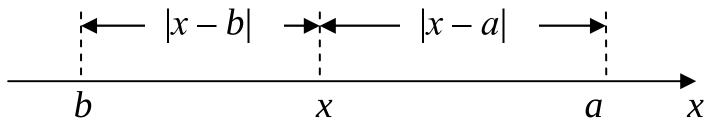


Рис. 4

Задача 23. При каких значениях параметра a выражение $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$ при всех допустимых значениях x?

Решение

Первый способ

1) Для сравнения двух степеней приведем их к основанию 5. Так как $1-|x|$ стоит под знаком логарифма, то $|x|<1$. Значит,

$$\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)=\log_{25}(1-|x|)^2=\log_5(1-|x|).$$

Отсюда $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}=5^{\log_5(1-|x|)+a^2-4}$.

Преобразуем второе выражение

$$(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}=\left(5^{\log_5(1-|x|)}\right)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}=5^{\log_5(1-|x|)\log_5(1-|x|)-|a-1|}.$$

2) Пусть $t=\log_5(1-|x|)$. Эта функция четна, ее наибольшее значение достигается при $x = 0$ и равно нулю. При приближении $|x|$ к 1 эта переменная по свойствам логарифма с основанием 5 стремится к $(-\infty)$. По непрерывности получаем, что множество значений функции $t=\log_5(1-|x|)$ есть промежуток $(-\infty;0]$.

Относительно t получаем неравенство $t(t-|a-1|)>t+a^2-4$, $t\le 0$,

$t^2-(|a-1|+1)t+4-a^2>0$, $t\le 0$.

3) Абсцисса вершины этой параболы положительна, ветви направлены вверх. Значит, это неравенство верно при всех положительных t в том и только в том случае, когда свободный член $4-a^2$ положителен.

Следовательно, $a^2<4$, откуда $-2<a<2$.

Ответ: $(-2;2)$.

Второй способ

Неравенство должно выполняться при всех допустимых x. Легко заметить, что $x = 0$ допустимо. При $x = 0$ значение первого выражения равно 1, а значение второго выражения равно $0{,}2^{4-a^2}$, поэтому должно выполняться $0{,}2^{4-a^2}<1$. Отсюда находим необходимое условие $|a|<2$.

Докажем теперь, что при этих a и при всех допустимых x первое выражение больше второго.

Так как $0<1-|x|\le 1$, $\log_5(1-|x|)\le 0$, $-|a-1|\le 0$, то первое выражение больше или равно 1.

Так как $4-a^2>0$, $-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)\ge 0$ и $0 < 0{,}2 < 1$, то второе выражение строго меньше 1.

Отсюда следует, что при a таких, что $|a|<2$, и всех допустимых x выполняется неравенство $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}>0{,}2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$.

Ответ: $(-2;2)$.

Задача 24. Найдите сумму целых значений функции

$$y=\log_2\left(128-124\cdot 2^{-|x|}\right).$$

Решение

Для $x\ge 0$ (этого условия достаточно для рассмотрения) имеем

$$y=\log_2\left(128-124\cdot 2^{-x}\right)=\log_2\left(128-\frac{124}{2^x}\right).$$

$y(0)=\log_2(128-124)=\log_2 4=2$.

При $x \to +\infty$ выражение $128 - \frac{124}{2^x}$ стремится к 128. $\log_2 128 = 7$. Тогда $2 \le y < 7$. Целыми значениями функции являются числа 2, 3, 4, 5, 6, а их сумма равна 20.

Ответ: 20.

Задача 25. Определите, какое наименьшее значение может принимать выражение $|x-3y-4| + |3y+8-x| + \sqrt{x^2-xy-2y^2}$, и найдите суммарную длину линий, состоящих из всех точек (*x; y*) координатной плоскости, в которых это значение достигается.

Решение

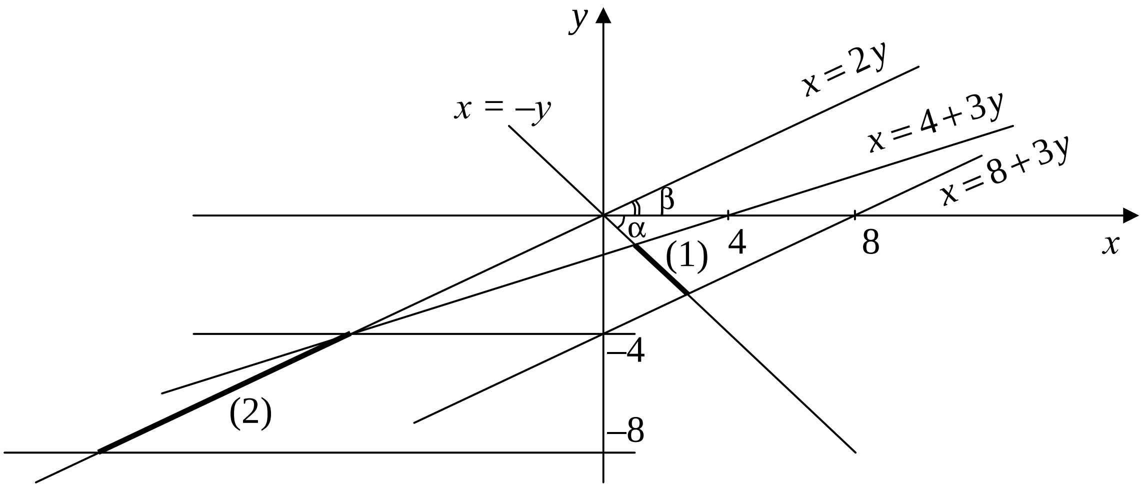


Рис. 5

В силу оценки $|a| \ge a$, имеет место неравенство

$$|x-3y-4| + |3y+8-x| + \sqrt{x^2-xy-2y^2} \ge x-3y-4+3y+8-x+0 = 4,$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x-3y-4 \ge 0, \\ 3y+8-x \ge 0, \\ x^2-xy-2y^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x-3y \le 8, \\ (x+y)(x-2y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -y, \\ -2 \le y \le -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y, \\ -8 \le y \le -4, \end{cases} \end{array} \right.$$

причем длина первого и второго участков искомой линии (рис. 5) равна соответственно $\dfrac{1}{\sin\alpha}=\sqrt{2}$, $\dfrac{4}{\sin\beta}=\dfrac{4}{\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}}=4\sqrt{5}$, так как $\operatorname{tg}\alpha=1$ и $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 4; $\sqrt{2}+4\sqrt{5}$.

Задача 26. Найдите минимальное значение выражения $|2x-y-1|+|x+y|+|y|$, где x и y – произвольные числа.

Решение

При фиксированном x выражение

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y|=|y-(2x-1)|+|y-(-x)|+|y-0|$$

не меньше, чем $|y-y_3|+|y-y_1|\geq(y_3-y)+(y-y_1)=y_3-y_1$ где y_3 – максимальное, а y_1 – минимальное из трех чисел $2x-1$, $-x$, 0. Поэтому оно принимает минимальное значение $m(x)$ при y, равном y_2 – среднему из этих трех чисел, при этом само $m(x)$ равно разности y_3-y_1. В свою очередь, эта разность минимальна при $x=\dfrac{1}{3}$ (рис. 6) и равна $\dfrac{1}{3}$.

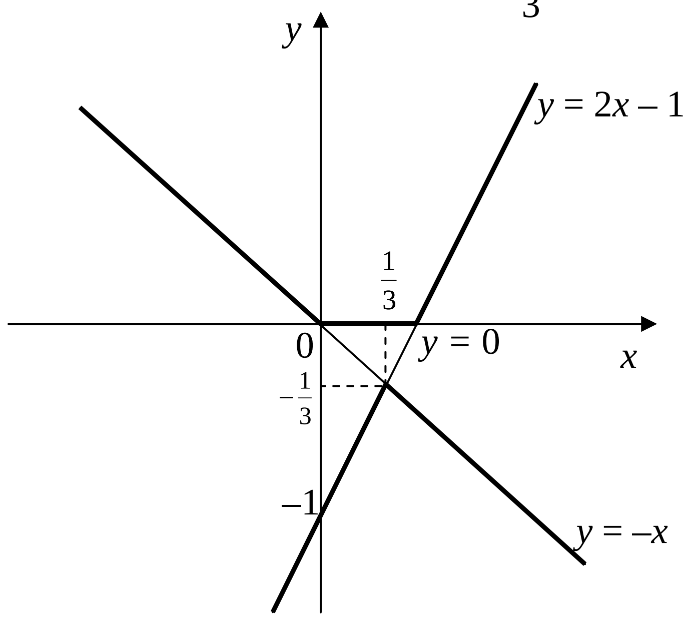


Рис. 6

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Задача 27. При каких значениях x выражение $3+\dfrac{3}{\left|2x^2+x-3\right|+1}$ принимает наибольшее значение? Найдите это значение.

Решение

Так как $\left|2x^2+x-3\right|\geq 0$, то $3+\dfrac{3}{\left|2x^2+x-3\right|+1}\leq 3+\dfrac{3}{1}=6$ (по свойству дроби: чем меньше знаменатель дроби, тем дробь больше).

Данное выражение принимает значение, равное 6, если $\left|2x^2+x-3\right|=0$, то есть при $x=-\dfrac{3}{2}$ или $x = 1$.

Ответ: Наибольшее значение равно 6; оно достигается при $x=-\dfrac{3}{2}$ и $x = 1$.

Задача 28. Известно, что $|a+b|+|a-b|\leq 2$. Докажите, что $a^2+b^2\leq 2$?

Решение

Первый способ

На координатной плоскости aOb неравенство $|a+b|+|a-b|\leq 2$ задает квадрат с вершинами в точках (1; 1); (–1; 1); (–l; –1) (1; –1), а неравенство $a^2 + b^2 \leq 2$ – круг с центром (0; 0) и радиусом $R=\sqrt{2}$ (рис. 7). Поскольку квадрат вписан в круг, то для всех пар ($a; b$), удовлетворяющих первому неравенству, выполняется и второе неравенство.

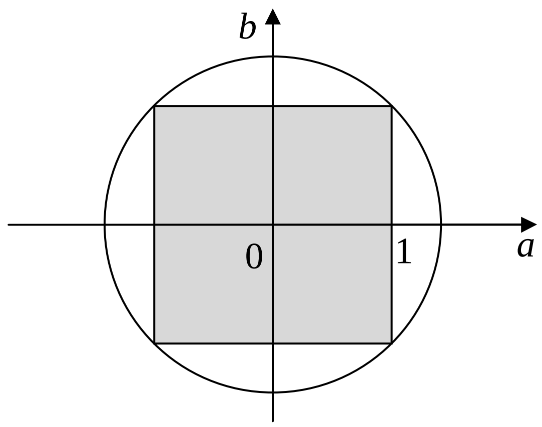


Рис. 7

Второй способ

Так как $2 \geq |a+b|+|a-b| \geq |(a+b)+(a-b)| = 2|a|$, то $|a| \leq 1$. Аналогично, $2 \geq |a+b|+|b-a| \geq |(a+b)+(b-a)| = 2|b|$, то есть $|b| \leq 1$.

Тогда $a^2 \leq 1$ и $b^2 \leq 1$, следовательно, $a^2 + b^2 \leq 2$.

Третий способ

Возведем обе части данного неравенства в квадрат:

$$|a+b|+|a-b| \leq 2 \Leftrightarrow (|a+b|+|a-b|)^2 \leq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + 2|a+b|\cdot|a-b| + (a-b)^2 \leq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2\left|a^2 - b^2\right| \leq 4 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 2.$$

Четвертый способ

Пусть $|a+b| = x \geq 0$, $|a-b| = y \geq 0$. Тогда

$$a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Докажем, что при $x \geq 0$, $y \geq 0$ из неравенства $x + y \leq 2$ следует неравенство $\frac{x^2 + y^2}{2} \leq 2$.

Это можно сделать по-разному. Например, следующими двумя способами.

а) *От противного*. Пусть это не так, тогда

$$\frac{x^2 + y^2}{2} > 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 4 \Leftrightarrow (x+y)^2 > 4 + 2xy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+y)^2 > 4 \Rightarrow x + y > 2.$$

Получили противоречие.

б) *Графически*. Система неравенств

$$\begin{cases} x + y \leq 2, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

задает на координатной плоскости треугольник с вершинами в точках (0; 0); (0; 2); (2; 0), который целиком принадлежит кругу с центром

(0; 0) и радиусом $R = 2$. Этот круг является графиком доказываемого неравенства (рис. 8).

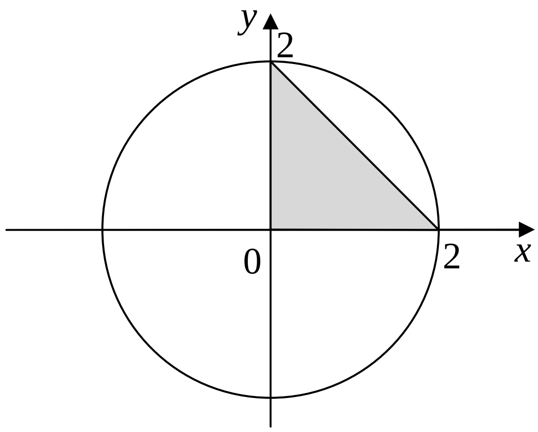


Рис. 8

Задача 29. Доказать, что если $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, то $|ac-bd|\le 1$.

Доказательство

Применим неравенство Коши-Буняковского к наборам $(a;\ b)$ и $(c;\ -d)$. Но в начале напомним само неравенство: для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$, где $n \in N$ и $n \ge 2$ справедливо неравенство $(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)$ или $|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$.

Имеем

$$|a\cdot c+b\cdot(-d)| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+(-d)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |ac-bd| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \Leftrightarrow |ac-bd| \le \sqrt{1}\cdot\sqrt{1}=1.$$

Задача 30. Изобразите на плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y^2-x+1=|x^2-x+2y|$.

Решение

Искомое множество есть объединение фигур, определяемых системами

$$\begin{cases} x^2 - x + 2y \geq 0, \\ y^2 - x + 1 = x^2 - x + 2y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 - x + 2y < 0, \\ y^2 - x + 1 = -x^2 + x - 2y. \end{cases}$$

В первом случае

$$\begin{cases} 2y \geq x - x^2, \\ y^2 - 2y + 1 = x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y \geq x(1-x), \\ (y-1)^2 = x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq \dfrac{1}{2}x(1-x), \\ y - 1 = \pm x. \end{cases}$$

Множество точек, удовлетворяющих последней системе, изображено на рис. 9а).

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} 2y < x - x^2, \\ x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y < \dfrac{1}{2}x(1-x), \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1^2. \end{cases}$$

Множество точек, удовлетворяющих этой системе, изображено на рис. 9б).

Объединение рисунков 9а) и 9б) изображено на рисунке 9в).

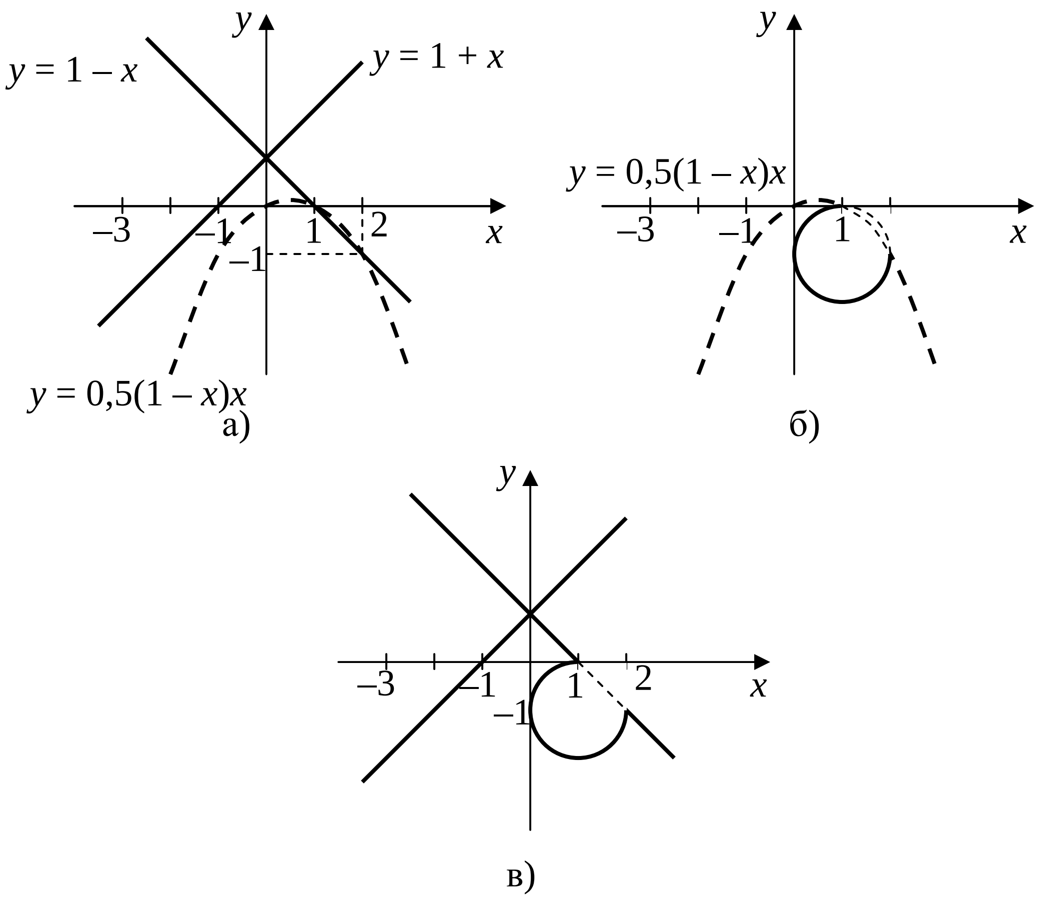


Рис. 9

Задача 31. Построить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = 4 - \left|y - \frac{6}{x}\right| - 2\left|\frac{3}{x} - 1\right|$, и среди точек этого множества найти все такие, где координата y принимает наибольшее значение.

Решение

Рассмотрим четыре случая.

1-й случай. Пусть $\frac{3}{x} - 1 < 0$ и $y - \frac{6}{x} < 0$. Раскрывая модули по определению, имеем: $y = 4 + \left(y - \frac{6}{x}\right) + 2\left(\frac{3}{x} - 1\right)$, или, после преобразований, 0 = 2. Таким образом, первый случай не дает ни одного решения задачи.

2-й случай. Пусть $\frac{3}{x} - 1 < 0$ и $y - \frac{6}{x} \geq 0$. Тогда исходное уравнение примет вид $y = 4 - \left(y - \frac{6}{x}\right) + 2\left(\frac{3}{x} - 1\right)$, или, после преобразований, $y = \frac{6}{x} + 1$. Таким образом, имеем систему $\begin{cases} \frac{3}{x} < 1, \\ y \geq \frac{6}{x}, \\ y = \frac{6}{x} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3, \end{array}\right. \\ y = \frac{6}{x} + 1. \end{cases}$

3-й случай. Пусть $\frac{3}{x} - 1 \geq 0$ и $y - \frac{6}{x} < 0$. Тогда после раскрытия модулей получим $y = 4 + \left(y - \frac{6}{x}\right) - 2\left(\frac{3}{x} - 1\right)$, или, после преобразований, $x = 2$. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} \geq 1, \\ y < \frac{6}{x}, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 3, \\ y < \frac{6}{x}, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 3, \\ x = 2. \end{cases}$$

4-й случай. Пусть $\frac{3}{x}-1\geq 0$ и $y-\frac{6}{x}\geq 0$. Тогда после раскрытия модулей получим: $y=4-\left(y-\frac{6}{x}\right)-2\left(\frac{3}{x}-1\right)$, или, после преобразований, $y = 3$. Имеем:

$$\begin{cases}\frac{3}{x}\geq 1,\\ y\geq\frac{6}{x},\\ y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\leq 3,\\ y\geq\frac{6}{x},\\ y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\leq 3,\\ 3\geq\frac{6}{x},\\ y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq x\leq 3,\\ y=3.\end{cases}$$

Итак, полученное множество точек изображено рисунке 10.

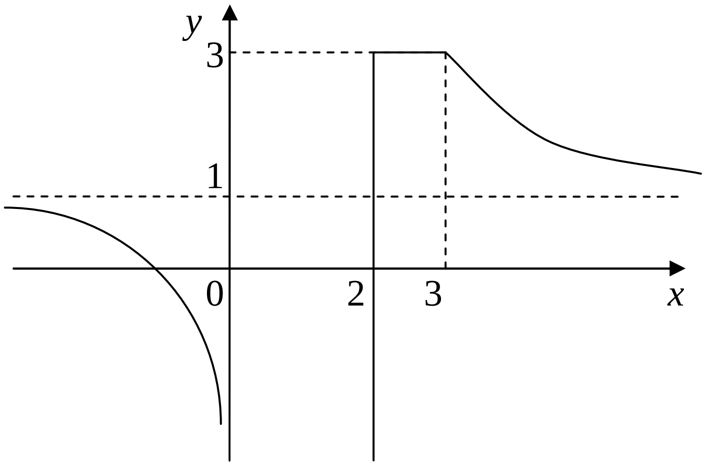


Рис. 10

Ответ: $x\in$ [2; 3], y = 3.

Рассмотрим вопрос о построении графика функции, заданной формулой, содержащей модуль.

1) Построение графика функции $y=|f(x)|$.

Для построения графика функции $y=|f(x)|$ строят график функции $y=f(x)$ и часть графика этой функции, расположенной ниже оси *Ox*, отображают симметрично этой оси.

Рассмотрим пример.

Задача 32. Постройте график функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$.

Решение

Построим в системе координат график функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$ (рис. 11), а затем часть графика, расположенного ниже оси *Ox*, отобразим симметрично относительно этой оси.

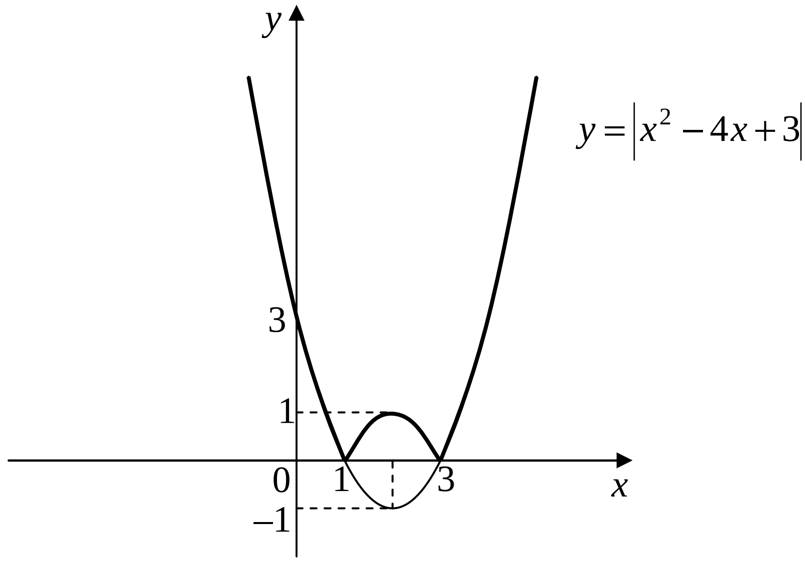


Рис. 11

2) Построение графика функции $y=f(|x|)$.

Для построения графика функции $y=f(|x|)$ вначале строят график функции $y=f(x)$ для $x\geq 0$, а затем построенный график отображают симметрично относительно оси *Oy*. Так поступают потому, что функция $y=f(|x|)$ – четная: $y=f(|x|)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\geq 0, \\ f(-x), \text{ если } x<0. \end{cases}$

Рассмотрим примеры.

Задача 33. Постройте график функции $y=x^2-4|x|+3$.

Решение

Согласно свойству модуля, мы можем записать $y=|x|^2-4|x|+3$, тем самым мы показали, что имеем дело с функцией $y=f(|x|)$.

Построим график функции $y=x^2-4x+3$ для $x\geq 0$ (рис. 12), а затем этот график отобразим симметрично относительно оси *Oy* (рис. 12).

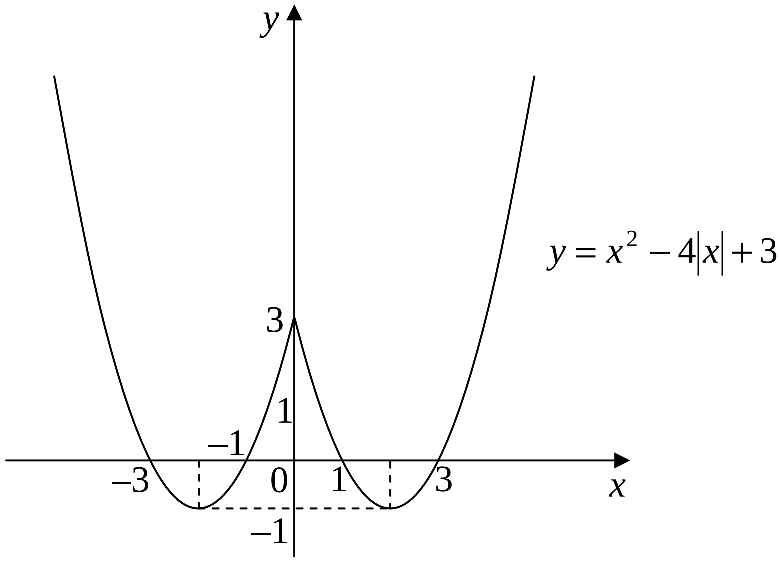


Рис. 12

Задача 34. Постройте график функции $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$.

Решение

1) Область определения заданной функции

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Вертикальные асимптоты $x = -1$ и $x = 1$.

2) Заданная функция четная ($y(-x) = y(x)$), а, значит, достаточно построить график при $x \in [0;1) \cup (1;+\infty)$, а затем отобразить полученный график симметрично относительно оси Oy.

3) $y \neq 0$ при любых значениях $x \in D(y)$; $y(0) = -1$.

4) $y < 0$ при $0 \leq x < 1$ и $y > 0$ при $x > 1$.

Так как при любых x_1, x_2 таких, что $0 \leq x_2 < x_1 < 1$ справедливо неравенство $\dfrac{1}{x_1 - 1} < \dfrac{1}{x_2 - 1}$, то есть $y(x_1) < y(x_2)$, то заданная функция – убывающая функция на [0; 1). А так как при любых x_1, x_2, таких что $1 < x_2 < x_1$ справедливо неравенство $\dfrac{1}{x_1 - 1} < \dfrac{1}{x_2 - 1}$, то есть $y(x_1) < y(x_2)$, то заданная функция – убывающая функция на $(1; +\infty)$.

5) $y(0,5) = -2$; $y(2) = 1$.

График заданной функции изображен на рис. 13.

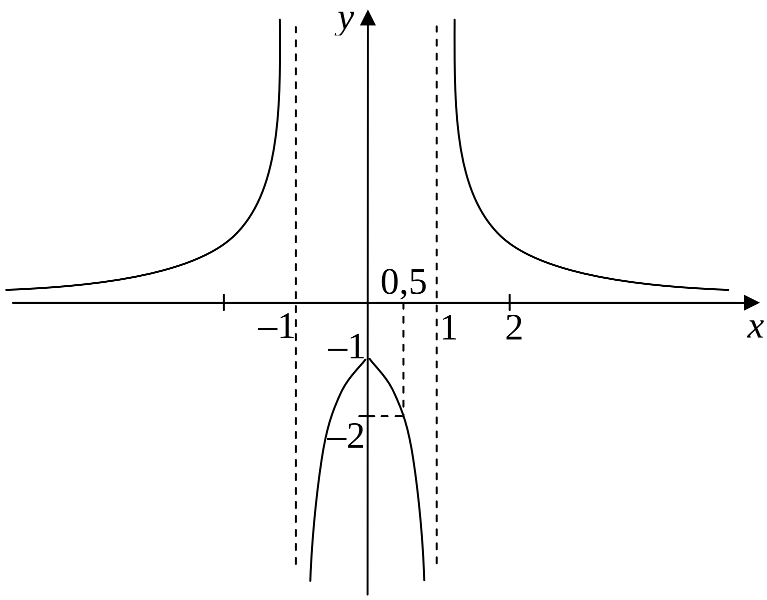


Рис. 13

Задача 35. Постройте график функции $y = \dfrac{3|x| - 2}{|x| - 1}$.

Решение

Функция является четной. Пусть $x \geq 0$, тогда

$$y = \frac{3x - 2}{x - 1} = \frac{3(x - 1) + 1}{x - 1} = 3 + \frac{1}{x - 1}.$$

График этой функции можно получить из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ сдвигом вдоль оси Ox вправо на единицу и вдоль оси Oy на три единицы вверх. Этот график пересекает координатные оси в точках (0; 2) и $\left(\dfrac{2}{3}; 0\right)$, а прямые $x = 1$ и $y = 3$ – его асимптоты. График исходной функции можно получить, отразив симметрично относительно оси Oy график $y = 3 + \dfrac{1}{x - 1}$, $x \geq 0$ (рис. 14).

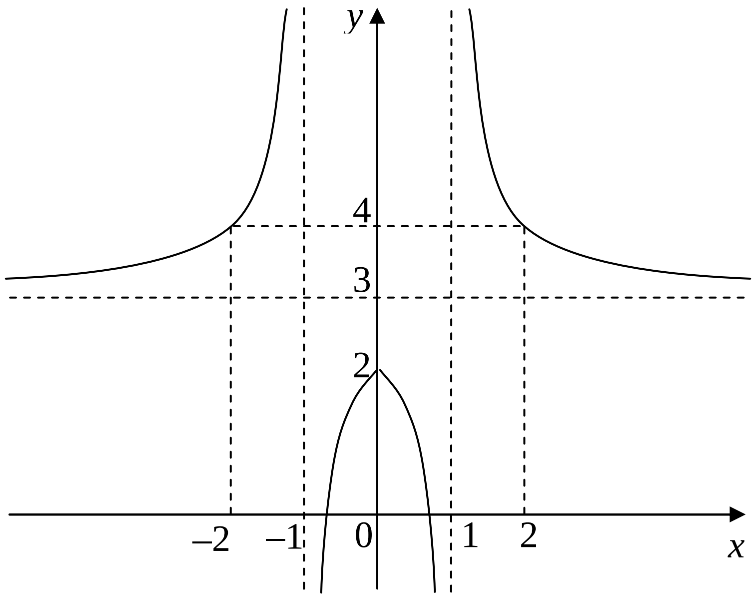


Рис. 14

3) Построение графика функции $y = \left| f\left(|x|\right) \right|$.

Вначале строится график функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$, а затем его отображают симметрично относительно оси *Oy*, а затем, окончательно, часть графика, расположенного ниже оси *Ox*, отображают симметрично относительно этой оси.

Рассмотрим пример.

Задача 36. Постройте график функции $y = \left| x^2 - 4|x| + 3 \right|$.

Решение

На координатной плоскости (рис. 15) построен график заданной функции.

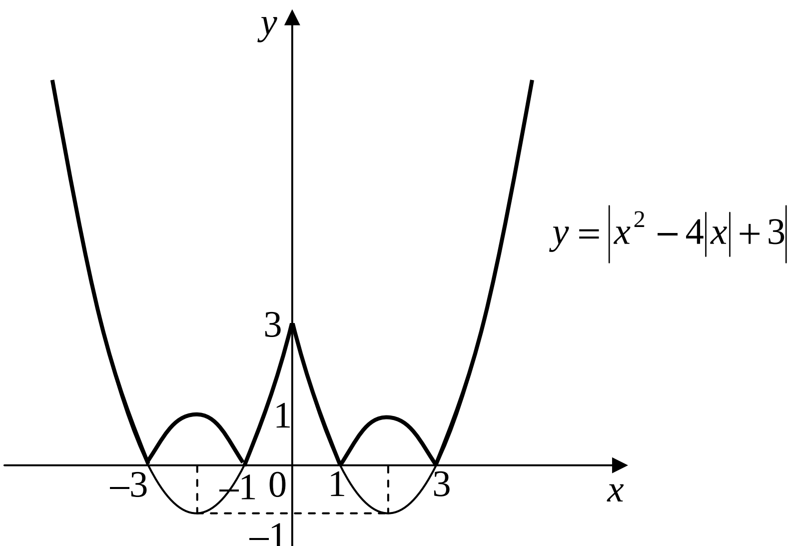


Рис. 15

4) Построение графика функции, заданной формулой, содержащей модуль.

Рассмотрим четыре примера (задачи 37-40).

Задача 37. Постройте график функции $y = 2^{\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|}$.

Решение

Областью определения функции является промежуток $x > 0$. В точке $x = 1$ подмодульное выражение меняет свой знак. Рассмотрим два промежутка: (0; 1] и (1; +∞).

а) На промежутке (0; 1] имеем $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ y = 2^{\log_{\frac{1}{2}} x}, \end{cases}$ откуда

$$\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ y = 2^{-\log_2 x}, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x \le 1, \\ y = \left(2^{\log_2 x}\right)^{-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x \le 1, \\ y = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

б) На промежутке (1; +∞) имеем $\begin{cases} x > 1, \\ y = 2^{-\log_{\frac{1}{2}} x}, \end{cases}$ откуда

$$\begin{cases} x > 1, \\ y = 2^{\log_2 x}, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ y = x. \end{cases}$$

График функции изображен на рисунке 16.

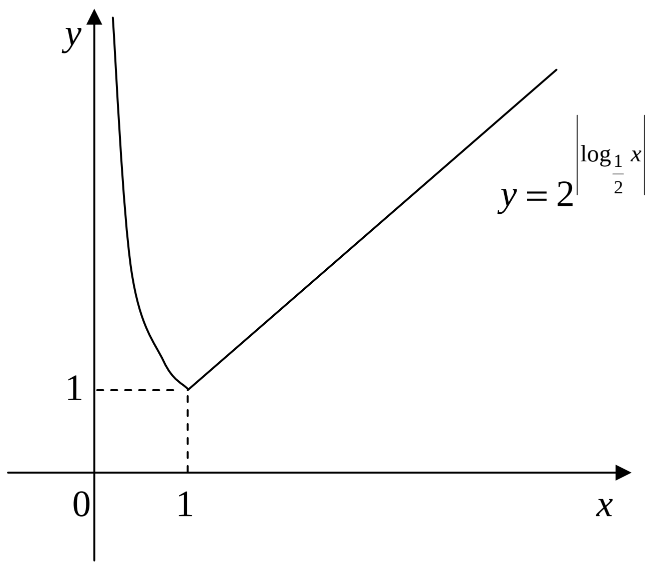


Рис. 16

Задача 38. Постройте график функции

$$y = |2x - 1| + |x| - |3 + x| + 2x - 1.$$

Решение

Нанесем на числовую прямую точки, в которых помодульные выражения обращаются в нуль: $x = -3$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$. На каждом из получившемся промежутке раскроем модули.

$$y = |2x - 1| + |x| - |3 + x| + 2x - 1 =$$

$$= \begin{cases} -2x + 1 - x + 3 + x + 2x - 1, x \le -3, \\ -2x + 1 - x - 3 - x + 2x - 1, -3 \le x \le 0, \\ -2x + 1 + x - 3 - x + 2x - 1, 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 + x - 3 - x + 2x - 1, x \ge \frac{1}{2}; \end{cases} = \begin{cases} 3, x \le -3, \\ -2x - 3, -3 \le x \le 0, \\ -3, 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 4x - 5, x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Построим в системе координат графики полученных функций на соответствующих промежутках (рис. 17).

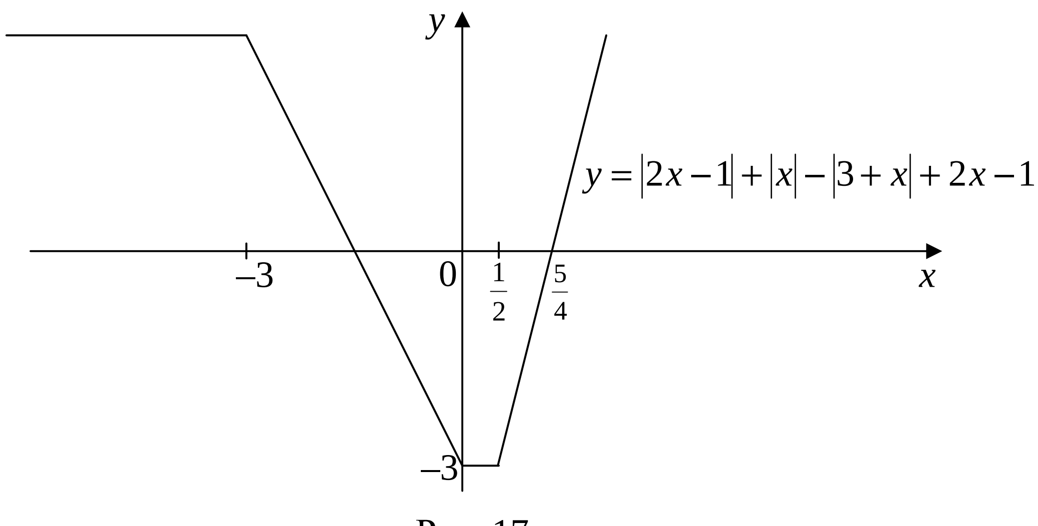


Рис. 17.

Можно построить график функции, которая задана формулой, содержащей под знаками модулей линейные зависимости аргумента, и другим способом. Покажем это на примере.

Задача 39. Постройте график функции $y = |1 - x| - |x - 2| - |x - 3|$.

Решение

Функция определена на всей числовой прямой. Графиком функции является ломаная линия с вершинами в точках с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Найдем ординаты этих точек:

$$y(1) = |1 - 1| - |1 - 2| - |1 - 3| = 0 - 1 - 2 = -3;$$

$$y(2) = |2 - 1| - |2 - 2| - |2 - 3| = 1 - 0 - 1 = 0;$$

$$y(3) = |3 - 2| - |3 - 2| - |3 - 3| = 2 - 1 - 0 = 1;$$

Итак, точки (1; –3), (2; 0), (3; 1) есть вершины ломаной линии, которые мы последовательно соединим отрезками.

Возьмем еще два значения аргумента x (одно – левее точки 1, другое – правее точки 3), например, $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ и вычислим соответствующие значения y: $y(0) = -4$, $y(4) = 0$. Имеем две дополнительные точки: (0; –4) и (4; 0).

Построим график заданной функции (рис. 18).

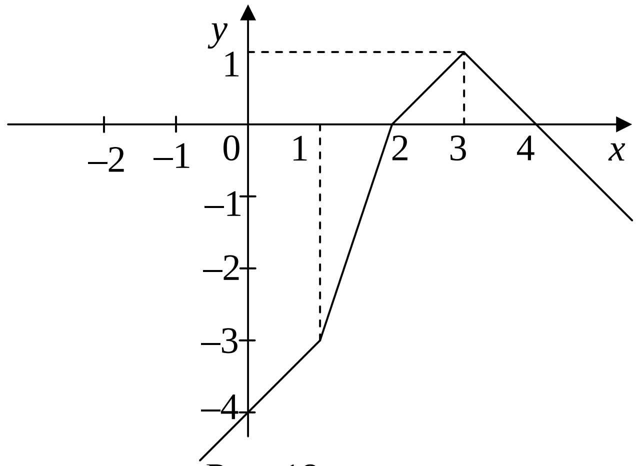


Рис. 18

Задача 40. Постройте график функции $y = \dfrac{|x - 3| + |x + 1|}{|x - 3| + |x - 1|}$.

Решение

Подмодульные выражения, содержащиеся в дроби, обращаются в нуль соответственно в точках $x = 3$, $x = -1$, $x = -3$, $x = 1$. Рассматривая заданную функцию на каждом из пяти промежутков, на которые эти значения разбивают множество *R*, мы получим следующее задание функции.

$$y=\begin{cases}1-\dfrac{2}{x+1},\ при\ x\le -3,\\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2},\ при\ -3\le x\le -1,\\ 1,\ при\ \ -1\le x\le 1,\\ \dfrac{2}{x+1},\ при\ \ 1\le x\le 3,\\ 1-\dfrac{2}{x+1},\ при\ \ x\ge 3.\end{cases}$$

График этой функции показан на рис. 19.

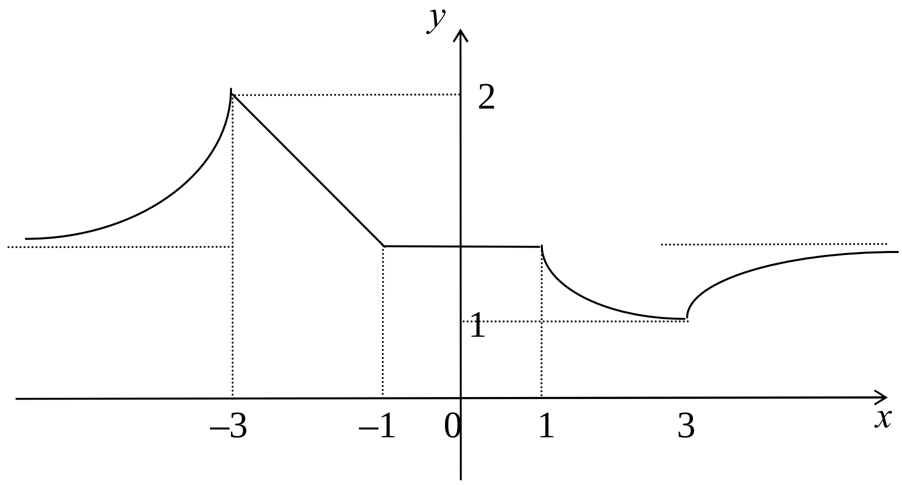


Рис. 19

5) Построение графика зависимости $|y|=f(x)$.

Обращаем внимание читателя на тот факт, что данная формула не задает собой функцию, ибо лишь только та формула, которая каждому допустимому значению аргумента *x* ставит в соответствие одно и только одно значение *y*, задает функцию. Вот поэтому в данном случае мы говорим о зависимости (ниже будет показано, что одному значению *x* будут соответствовать два значения *y*).

Продолжим разговор о построении графика зависимости $|y|=f(x)$.

Учитывая, что в формуле $|y|=f(x)$ $f(x)\ge 0$ (по свойству модуля) и на основании определения модуля $|y|=\begin{cases}y, & если \quad y\ge 0,\\ -y, & если \quad y<0,\end{cases}$ перепишем формулу $|y|=f(x)$ в виде $y=\pm f(x)$, где $f(x)\ge 0$.

Формула $y = \pm f(x)$, где $f(x) \geq 0$ позволяет сформулировать правило построения графика зависимости $|y| = f(x)$: достаточно построить график функции $y = f(x)$ для тех *x* из области ее определения, при которых $f(x) \geq 0$, и затем достаточно отобразить полученную часть графика симметрично относительно оси *Ox*.

Таким образом, график зависимости $|y| = f(x)$ состоит из графиков двух функций: $y = f(x)$ и $y = -f(x)$, $f(x) \geq 0$.

На рисунке 20 показан график зависимости $|y| = x$, на рисунке 21 – график зависимости $|y| = x^2$, на рисунке 22 – график зависимости $|y| = x^2 - 5x + 6$, на рисунке 23 – график зависимости $|y| = -x^2 + 5x - 6$.

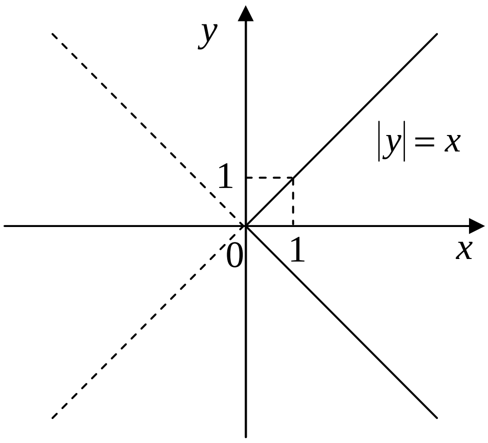


Рис. 20

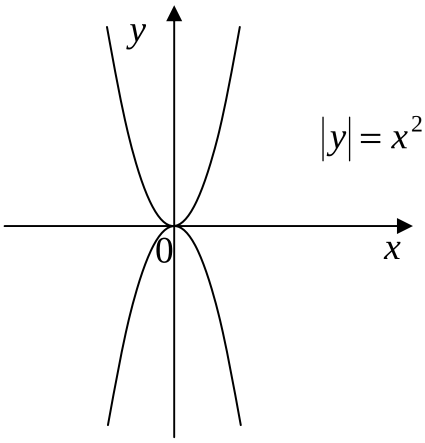


Рис. 21

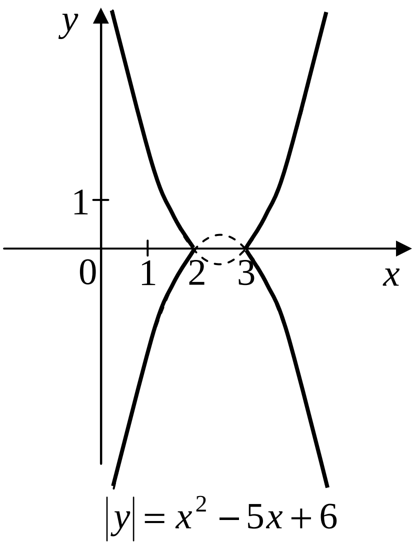


Рис. 22

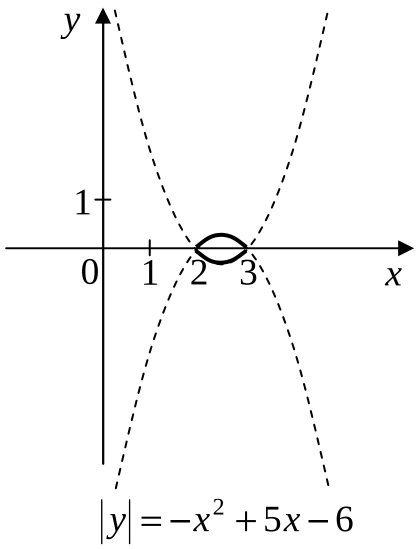


Рис. 23

Задача 41. Постройте график функции $y+|y|=x$.

Решение

По определению модуля числа имеем:

$$x=y+|y|=\begin{cases}2y, & \text{если} \quad y\ge 0,\\ 0, & \text{если} \quad y<0.\end{cases}$$

График заданного уравнения изображен на рисунке 24.

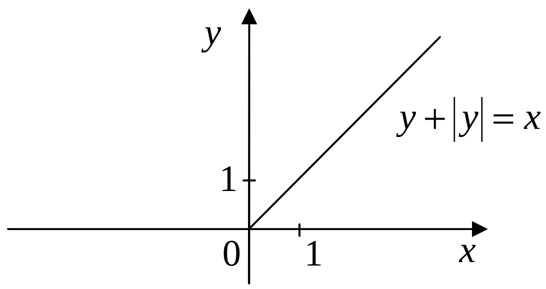


Рис. 24

Задача 42. Постройте график функции $y=x|y|$.

Решение

Выразим из заданного уравнения x и воспользуемся определением модуля числа. Будем иметь: $x=\dfrac{y}{|y|}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad y\ge 0,\\ -1, & \text{если} \quad y<0,\end{cases}$ x – любое, если y = 0.

График заданного уравнения изображен на рисунке 25.

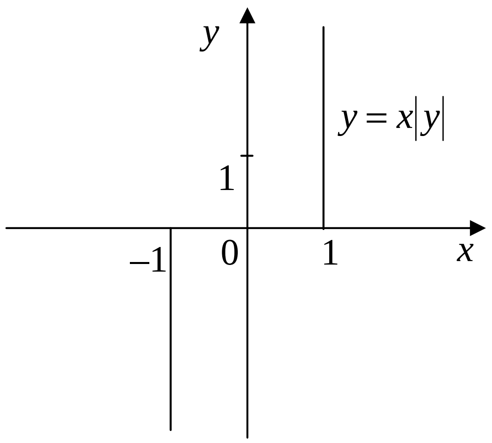


Рис. 25

Задача 43. Постройте график уравнения $|x|+|y|=3$.

Решение

Первый способ

На основании определения модуля числа имеем:

а) $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x+y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \le 0, \\ x-y=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \le 0, \\ y \ge 0, \\ -x+y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \le 0, \\ y \le 0, \\ -x-y=3. \end{cases}$

Строим графики четырех полученных прямых в соответствующих четвертях (рис. 26).

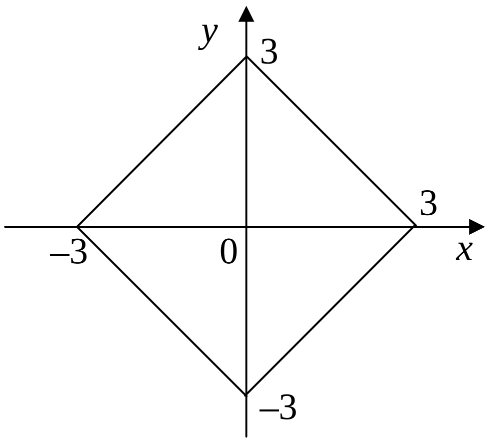


Рис. 26

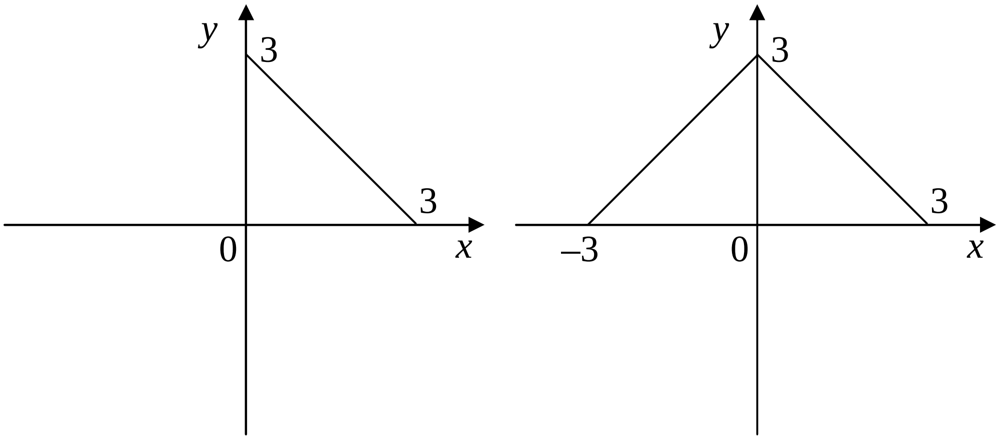
Второй способ

Перенесем в заданном уравнении $|x|$ в правую часть, получим $|y|=3-|x|$. График этого уравнения можно строить в такой последовательности:

1) $y=3-x$ (рис. 27а);

2) $y=3-|x|$ (рис. 27б);

3) $|y| = 3 - |x|$ (рис. 26).



а) б)

Рис. 27

Задача 44. Постройте график уравнения $|x| - |y| = 3$.

Решение

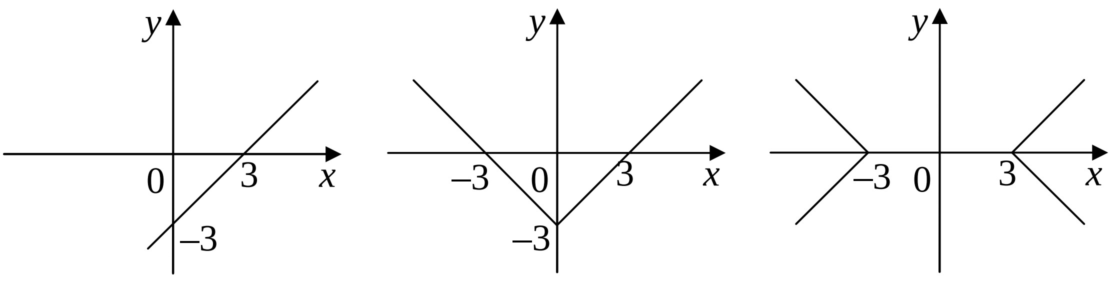
Можно, как и в предыдущем случае, строить двумя способами, но остановимся здесь лишь на втором.

График уравнения $|y| = |x| - 3$ будем строить в такой последовательности:

1) $y = x - 3$ (рис. 28а);

2) $y = |x| - 3$ (рис. 28б);

3) $|y| = |x| - 3$ (рис. 28в).



а) б) в)

Рис. 28

§2. ПОНЯТИЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

При решении уравнений и неравенств фундаментальное значение имеет понятие равносильности, и в нашей работе оно будет играть большую роль.

Два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \text{ и } f_2(x) = g_2(x)$$

или два неравенства

$$f_1(x) > g_1(x) \text{ и } f_2(x) > g_2(x)$$

называются равносильными на множестве *X*, если каждое решений первого уравнения (неравенства), принадлежащие множеству *X*, является решением второго и, наоборот, каждое решение второго, принадлежащее *X*, является решением первого; или ни одно из уравнений (неравенств) на *X* не имеет решений. Таким образом, уравнения (или неравенства) называются равносильными на *X*, если множества решений этих уравнений (неравенств) совпадают. Отсюда следует, что, вместо того чтобы решать данное уравнение (неравенство), можно решать любое другое, равносильное данному. Замену одного уравнения (неравенства) другим, равносильным данному на *X*, называют равносильным переходом на *X*. Равносильный переход обозначают двойной стрелкой $\Leftrightarrow$. Если уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $g(x) = 0$, то это мы будем обозначать так: $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$.

Примеры.

1. $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$.

2. Неравенства $\sqrt{4x+5} \le 2$ и $4x+5 \le 4$ не равносильны, так как если $4x + 5 < 0$, то первое неравенство не имеет решений, а второе имеет, например, $x = -2$.

3. $\sqrt{x^2-4}=1-x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x-2}=0$, так как ни то, ни другое уравнение не имеет решений.

Иногда в литературе встречается несколько иной подход к определению равносильных (эквивалентных) уравнений. Раскроем его.

Определение 1. Если все решения уравнения (1) являются решениями уравнения (2), то уравнение (2) называется следствием уравнения (1).

Записывают это сокращенно так: (1) $\Rightarrow$ (2), где «$\Rightarrow$» – знак логического следования.

Запись (1) $\Rightarrow$ (2) – читается так: «Из уравнения (1) следует уравнение (2)».

Определение 2. Два уравнения (1) и (2) с одним и тем же неизвестным называются равносильными (эквивалентными), если уравнение (1) является следствием уравнения (2) и, наоборот, уравнение (2) является следствием уравнения (1) или если оба уравнения решений не имеют.

Равносильность уравнений сокращенно записывают так: (1) $\Leftrightarrow$ (2), где «$\Leftrightarrow$» – знак логической равносильности (эквивалентности).

Другими словами, два уравнения относительно одного и того же неизвестного равносильны, если множества их решений совпадают.

Прежде, чем мы перейдем к формулировкам теорем о равносильности уравнений, рассмотрим важнейшие понятия «тождественно равные выражения» и «тождественное преобразование».

Определение 3. Два выражения называются тождественно равными, если совпадают их области допустимых значений и для всех значений букв этих выражений из области допустимых значений их числовые значения равны.

Определение 4. Тождественным преобразованием называется замена одного выражения другим, ему тождественно равным.

Рассмотрим пример. Пусть выражение $\sqrt[4]{x^4y^2}$ (1) заменено выражением $x\sqrt{y}$ (2). У выражения (1) область допустимых значений (ОДЗ) задается системой $\begin{cases} x\in R, \\ y\in R, \end{cases}$ а у выражения (2) ОДЗ задается системой $\begin{cases} x\in R, \\ y\geq 0. \end{cases}$ Так как ОДЗ выражения (1) и (2) не совпадают, то выражения (1) и (2) не тождественны.

Заменим выражение $\sqrt[4]{x^4y^2}$ выражением $x\sqrt{|y|}$ (3). ОДЗ этих двух выражений (1) и (3) совпадают, так как у выражения (3) ОДЗ задается системой $\begin{cases} x\in R, \\ y\in R, \end{cases}$ то есть такой же, как и ОДЗ выражения (1).

Но выражения (1) и (3) не тождественны, хотя и их ОДЗ совпадают. Действительно, взяв, например, $x = -2$, $y = 1$, которые принадлежат ОДЗ, мы получаем у выражения (1) числовое значение равное 2, а у выражения (3) числовое значение – (–2). Значит, числовые значения выражений (1) и (3) равны не при любых значениях букв, входящих в ОДЗ.

Заменим выражение $\sqrt[4]{x^4y^2}$ выражением $|x|\sqrt{|y|}$ (4). Выражения (1) и (4) тождественны (предоставляем обоснование этого утверждения читателю).

Равносильность уравнений (неравенств) устанавливается с помощью следующих теорем.

Теорема 1. Если над обеими частями данного уравнения произвести тождественные преобразования, не меняющие области определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если к обеим частям данного уравнения прибавить одно и то же число или одно и то же выражение, имеющее смысл при всех значениях неизвестного из области определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Следствие. Члены уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив их знаки на противоположные.

Теорема 3. Если обе части данного уравнения умножить на одно и то же число, не равное нулю, или на одно и то же выражение, имеющее смысл и не равное нулю при всех значениях неизвестного из области определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Следствие 1. Если среди членов уравнения есть дробные, то от них можно избавиться умножением обеих частей уравнения на «наименьшее общее кратное» знаменателей дробных членов, причем полученное уравнение равносильно данному при всех значениях неизвестного, при которых «наименьшее общее кратное» не равно нулю.

Следствие 2. Если все члены уравнения делятся на одно и то же число или выражение, не равное нулю при всех значениях неизвестного из области определения уравнения, то их можно разделить на это число или выражение.

Теорема 4. Если уравнение (1) равносильно уравнению (2), а уравнение (2) равносильно уравнению (3), то уравнение (1) равносильно уравнению (3).

Если решение заданного уравнения проводилось исключительно на основании теорем 1, 2, 3, 4, то проверка найденных корней не обязательна. Если же приходилось пользоваться какими-либо преобразованиями, не входящими в условия этих теорем, то проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения обязательна, то есть является составной частью решения уравнения.

Последнее замечание относится преимущественно к иррациональным, показательным, логарифмическим, показательностепенным, показательно-логарифмическим и тригонометрическим уравнениям.

Отметим основные операции, приводящие к равносильным неравенствам (уравнениям).

1. Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, определены на множестве X, то на X

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)<g(x)+h(x),$$
$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x).$$

2. Если $h(x) > 0$ на X, то на X

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x)<g(x)h(x),$$

то есть при умножении неравенства на положительную функцию знак неравенства не меняется.

3. Если $h(x) < 0$ на X, то на X

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x)>g(x)h(x),$$

то есть при умножении неравенства на отрицательную функцию знак неравенства меняется на противоположный.

4. Если $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ на X, то на X

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x),$$
$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x),$$
$$f(x)\leq g(x) \Leftrightarrow f^2(x)\leq g^2(x),$$

то есть если обе части неравенства или уравнения неотрицательны, то возведение в квадрат (или любую четную степень) обеих частей неравенства или уравнения приводит к равносильному неравенству или уравнению соответственно.

Если левая и правая части неравенства имеют разные знаки, то нельзя возводить неравенство в квадрат, так как возведение в квадрат может привести как к равносильному неравенству, так и к неравносильному: $-4 < 5$ и $16 < 25$; $-7 < 5$, но $49 > 25$.

Если же $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные знаки, то из уравнения $f(x) = g(x)$ следует уравнение $f^{2n}(x) = g^{2n}(x)$, но оно не равносильно заданному, так как содержит еще решение уравнения $f(x) = -g(x)$. Именно поэтому при возведении в четную степень, чаще всего в квадрат, могут появляться посторонние корни. Тогда нужна проверка.

Приведем еще **теоремы о равносильности уравнений**, содержащих неизвестное под знаком модуля.

1) Уравнение $f(|x|) = g(x)$ равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

2) Существует два способа замены уравнения $|f(x)| = g(x)$ уравнением без модуля:

а) Это уравнение равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

б) Это уравнение равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Если в уравнении $|f(x)| = g(x)$ функция $f(x)$ имеет более простой вид, чем функция $g(x)$, то целесообразно это уравнение заменять первой совокупностью систем, а если более простой вид имеет функция $g(x)$, то это уравнение целесообразно заменять второй совокупностью систем.

3) Уравнение вида $\varphi(|f(x)|) = g(x)$, где φ, f, g – некоторые функции, равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(f(x))=g(x),\\ f(x)\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\varphi(-f(x))=g(x),\\ f(x)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

4) Рассмотрим уравнение вида $|f_1(x)|+|f_2(x)|+...+|f_n(x)|=g(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, $g(x)$, – некоторые функции. Решение таких уравнений состоит в следующем. Находят все точки, в которых хотя бы одна из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ меняет знак своих значений. Эти точки делят область определения исходного уравнения на промежутки, на каждом из которых все функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ сохраняют знак. Затем, используя определения модуля, переходят от исходного уравнения к совокупности систем, не содержащих знаков модуля.

При решении уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, основными являются следующие методы: раскрытие модуля по определению; возведение обеих частей уравнения (неравенства) в квадрат; метод разбиения области определения уравнения (неравенства) на промежутки, где подмодульные выражения сохраняют свой знак; графический метод.

В нашей работе [7] читатель найдет более подробные сведения о преобразованиях неравенств, приводящих к равносильным (в работе рассмотрено 38 утверждений).

§3. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕИЗВЕСТНОЕ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Перейдем к решению уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля.

1) Уравнения вида $|\pm f(x)| = f(x)$. Заданное уравнение равносильно неравенству $f(x) \geq 0$.

Задача 1. Решить уравнение $|x-7| = x-7$.

Решение

Заданное уравнение равносильно неравенству $x-7 \geq 0$, откуда $x \geq 0$.

Ответ: [7; +∞).

Задача 2. Решить уравнение $|y| + y = 0$.

Решение

Заданное уравнение запишем в виде $|y| = -y$. Это уравнение равносильно неравенству $-y \geq 0$, откуда $y \leq 0$.

Ответ: (–∞;0]).

2) Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$.

Такие уравнения можно решать двумя способами.

Первый способ – он применяется в том случае, когда функция $f(x)$ проще, чем $g(x)$.

Там, где $f(x) \geq 0$, выполнено равенство $|f(x)| = f(x)$ и уравнение примет вид $f(x) = g(x)$; там, где $f(x) < 0$, выполнено равенство $|f(x)| = -f(x)$ и уравнение примет вид $-f(x) = g(x)$.

И, наоборот, если $f(x) \geq 0$ и $f(x) = g(x)$, то $|f(x)| = g(x)$, а если $f(x) < 0$ и $-f(x) = g(x)$, то опять $|f(x)| = g(x)$, или

$$|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ f(x)=g(x),\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0,\\ f(x)=-g(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

При этом не надо решать неравенства, а надо только подставить в них полученные решения соответствующих уравнений. Можно поступить и так: решить совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x),\end{array}\right.$ а затем просто сделать проверку.

Можно также сказать, что заданные уравнения равносильны системе

$$\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.\end{cases}$$

Задача 3. Решите уравнение $|x-7|=x^3-15x^2+x+7$.

Решение

$$|x-7|=x^3-15x^2+x+7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-7\ge 0,\\ x-7=x^3-15x^2+x+7;\end{cases}\\ \begin{cases}x-7<0,\\ x-7=-x^3+15x^2-x-7\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 7,\\ x^3-15x^2+14=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<7,\\ x^3-15x^2+2x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 7,\\ (x-1)(x^2-14x-14)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<7,\\ x(x^2-15x+2)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 7,\\ (x-1)\left(x-\left(7+\sqrt{63}\right)\right)\left(x-\left(7-\sqrt{63}\right)\right)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<7,\\ x\left(x-\dfrac{15+\sqrt{217}}{2}\right)\left(x-\dfrac{15-\sqrt{217}}{2}\right)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7+\sqrt{63},\\ x=0,\\ x=\dfrac{15-\sqrt{217}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $0;7+\sqrt{63};\dfrac{15-\sqrt{217}}{2}$.

Второй способ – он применяется обычно тогда, когда функция *g(x)* проще, чем *f(x)*.

Заметим, что уравнение |*f(x)*| = *g(x)* не имеет решений, если *g(x)* < 0. Если же *g(x)* ≥ 0, то там, где *f(x)* ≥ 0, уравнение примет вид *f(x)* = *g(x)*, а там, где *f(x)* < 0, уравнение имеет вид –*f(x)* = *g(x)*. Отсюда следует, что

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x); \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$$

Задача 4. Решите уравнение $\left|6x^3 - 2x^2 + 4x - 33\right| = 10x - 35$.

Решение

Этот пример проще решать вторым способом, так как гораздо проще проверить для корней условие *g(x)* ≥ 0, чем условие *f(x)* ≥ 0.

Итак, если $10x - 35 \geq 0$, то

$$\left|6x^3 - 2x^2 + 4x - 33\right| = 10x - 35 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = 10x - 35, \\ 6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = -10x + 35 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^3 - 2x^2 - 6x + 2 = 0, \\ 6x^3 - 2x^2 + 14x - 68 = 0. \end{array} \right.$$

Левая часть первого уравнения легко разлагается на множители группировкой, а во втором уравнении угадывается корень $x = 2$, и получается равносильная совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 2(3x-1)(x^2-1) = 0, \\ (x-2)(3x^2+5x+17) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3}, \\ x = 1, \\ x = -1; \end{array} \right. \\ x = 2. \end{array} \right.$$

Учитывая, что $10x - 35 \geq 0$, получаем ответ.

Ответ: Нет решений.

Задача 5. Решите уравнение $|3-5x| = 2-x$.

Решение

Заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3-5x = 2-x, \\ 3-5x = x-2, \end{array}\right. \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x \leq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}, \\ x = \dfrac{5}{6}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Числа $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ удовлетворяют неравенству $x \leq 2$ и они являются корнями заданного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$.

Задача 6. Решите уравнение $|3x-4| = x-3$.

Решение

Заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3x-4 = x-3, \\ 3x-4 = 3-x, \end{array}\right. \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x \geq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{7}{4}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Числа $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{4}$ не удовлетворяют неравенству $x \geq 3$ и они не являются корнями заданного уравнения.

Ответ: уравнение корней не имеет.

Задача 7. Решите уравнение $\left|x^2+3x+2\right| = 2$.

Решение

Согласно определению модуля имеем:

$$\left|x^2+3x+2\right| = \begin{cases} x^2+3x+2, x^2+3x+2 \geq 0, \\ -x^2-3x-2, x^2+3x+2 < 0. \end{cases}.$$

Решим неравенства методом интервалов:

а) $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, тогда на объединении промежутков $(-\infty;-2] \cup [-1;+\infty)$ левая часть неравенства $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ неотрицательна и эти значения x являются решениями этого неравенства.

б) левая часть неравенства $x^2 + 3x + 2 < 0$ отрицательна на промежутке (–2; –1).

Решим на каждом промежутке заданное уравнение:

а) $\begin{cases} (-\infty;-2] \cup [-1;+\infty), \\ x^2 + 3x + 2 = 2, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} (-\infty;-2] \cup [-1;+\infty), \\ x = 0, x = -3. \end{cases}$ Оба полученных числа принадлежат указанному объединению промежутков и потому они являются корнями исходного уравнения.

б) $\begin{cases} (-2;-1), \\ -x^2 - 3x - 2 = 2, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} (-2;-1), \\ -x^2 - 3x - 4 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} (-2;-1), \\ x^2 + 3x + 4 = 0. \end{cases}$

Уравнение системы действительных корней не имеет, а значит на промежутке (–2; –1) исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: –3; 0.

Для решения уравнения $|f(x)| = g(x)$ можно перейти к уравнению-следствию $f^2(x) = g^2(x)$.

Покажем это на примере (задача 8).

Задача 8. Решите уравнение $|\sin x| = \sin x \cos x$.

Решение

Возведя обе части заданного уравнения в квадрат, будем иметь уравнение $\sin^2 x = \sin^2 x \cos^2 x$, являющееся следствием исходного уравнения.

Перенесем все члены последнего уравнения в левую часть, вынесем общий множитель за скобки и, применив основное тригонометрическое тождество, перепишем последнее уравнение в виде $\sin^4 x = 0$. Это уравнение имеет единственную серию решений $x = \pi k, k \in Z$.

Проверка показывает, что все эти числа являются решениями заданного уравнения.

Ответ: $\pi k, k \in Z$.

3) Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$.

Так как обе части уравнения неотрицательны, то

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

И мы получаем следующее условие равносильности

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - g(x) = 0, \\ f(x) + g(x) = 0. \end{array}\right.$$

Оно удобно тем, что никак не связано со знаками *f(x)* и *g(x)*.

Задача 9. Решите уравнение

$$\left|x^5 - 6x^2 + 9x - 6\right| = \left|x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 13x + 6\right|.$$

Решение

$$\left|x^5 - 6x^2 + 9x - 6\right| = \left|x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 13x + 6\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^5 - 2x^3 - 4x = 0, \\ 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\left(x^4 - x^2 - 2\right) = 0, \\ 2(x-1)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + 1\right) = 0, \\ (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm\sqrt{2}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

И мы получаем ответ: 0; $\pm\sqrt{2}$; 1; 2; 3.

Ответ: 0; $\pm\sqrt{2}$; 1; 2; 3.

Задача 10. Решите уравнение $|3x-7|=|x+9|$.

Решение

Заданное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}3x-7=x+9,\\ 3x-7=-x-9,\end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l}x=8,\\ x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Ответ: 8; $-\dfrac{1}{2}$.

Задача 11. Укажите промежуток, содержащий все корни уравнения $\dfrac{|x-1|}{|x-2|}=\dfrac{|x+1|}{|x+2|}$.

1) [–1; 1] 2) [0; 3] 3) [–2; 2] 4) [0; 1]

Решение

$$\frac{|x-1|}{|x-2|}=\frac{|x+1|}{|x+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x+1}{x+2},\\ \dfrac{x-1}{x-2}=-\dfrac{x+1}{x+2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x}{x^2-4}=0,\\ \dfrac{x^2-2}{x^2-4}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\pm\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Эти три корня содержит отрезок [–2; 2].

Ответ: 3).

4) Уравнения вида $|x-a|+|x-b|=b-a$ $(b>a)$.

Это уравнение равносильно двойному неравенству $a\le x\le b$ (об этом разговор был уже раньше).

Задача 12. Решите уравнение $|x+2|+|x-3|=5$.

Решение

В заданном уравнении a = –2, b = 3, тогда b – a = 3 – (–2) = 5. Заданное уравнение равносильно двойному неравенству $-2\le x\le 3$.

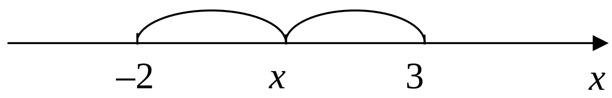
Ответ: [–2; 3].

Решению этому уравнению можно придать чисто геометрический смысл, используя геометрический смысл модуля.

Решение заданного уравнения сводится к тому, что требуется найти такие значения x, сумма расстояний от которых до точек $x = -2$ и $x = 3$ равна 5. Ясно, что данному условию удовлетворяю лишь те значения x, которые принадлежат отрезку $[-2; 3]$.

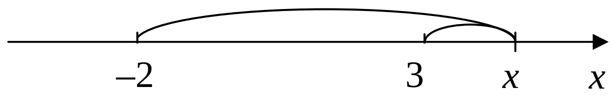
Это утверждение можно проиллюстрировать с помощью рисунка 29.

а)



$$|x+2|+|x-3|=5$$

б)



$$|x+2|+|x-3|>5$$

в)

$$|x+2|+|x-3|>5$$

Рис. 29

Если уравнение принадлежит к одному из описанных выше типов, то его можно решить указанными способами (вернее по указанным схемам). Если же нужно решить уравнение или указанных типов, или иных типов, то наиболее универсальным приемом их решения является метод интервалов, состоящий в том, что область определения уравнения разбивается на промежутки, в каждом из которых все подмодульные выражения сохраняют знак (для этого достаточно найти корни подмодульных выражений и расположить их в порядке возрастания на числовой прямой). Далее заданное уравнение рассматривается на каждом из полученных промежутков и найденные решения объединяются.

Рассмотрим примеры.

Задача 13. Решите уравнение $|3x+4|+|1-2x|+1-4x=0$.

Решение

Выражения, стоящие под знаком модулей, обращаются в нуль при $x=-\frac{4}{3}$ и $x=\frac{1}{2}$. Областью определения уравнения является вся числовая прямая, которую числа $-\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}$ разбивают на три промежутка (рис. 30): $x<-\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{4}\le x\le\frac{1}{2}$, $x>\frac{1}{2}$ (знак равенства включают обычно в тот промежуток, на котором подмодульное выражение положительно; знак равенства можно не включать ни в один из промежутков, а затем соответствующие числа подставить в исходное уравнение и проверить, являются ли они решениями).

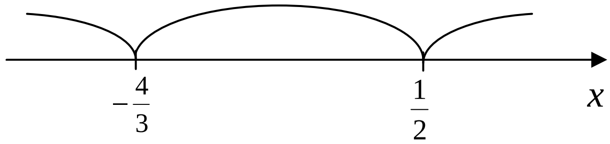


Рис. 30

Решим заданное уравнение на каждом из интервалов.

1) $\begin{cases} x<-\frac{4}{3}, \\ -3x-4+1-2x+1-4x=0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x<-\frac{4}{3}, \\ x=-\frac{2}{9}. \end{cases}$ Число $-\frac{2}{9}$ промежутку $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$ не принадлежит, значит на рассматриваемом промежутке уравнение корней не имеет.

2) $\begin{cases} -\frac{4}{3}\le x\le\frac{1}{2}, \\ 3x+4+1-2x+1-4x=0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} -\frac{4}{3}\le x\le\frac{1}{2}, \\ x=2. \end{cases}$ Число 2 не принадлежит промежутку $\left[-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right]$, а значит корнем заданного уравнения не является.

3) $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ 3x + 4 - 1 + 2x + 1 - 4x = 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x = -4. \end{cases}$ Число –4 не принадлежит промежутку $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, а значит корнем заданного уравнения не является.

Ответ: уравнение корней не имеет.

Задача 14. Решите уравнение $\sqrt{2x+5} = |x+3| - 2$.

Решение

Найдем область определения уравнения:

$$2x + 5 \geq 0, \ x \geq -\frac{5}{2}.$$

Тогда имеем: $x + 3 \geq 0$ и тем самым $|x+3| = x + 3$. Получаем уравнение $\sqrt{2x+5} = x + 1$. Решим его, составив равносильную систему:

$$\begin{cases} 2x + 5 = (x+1)^2, \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 = x^2 + 2x + 1, \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2, \end{array}\right. \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 15. Решите уравнение $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$.

Решение

$x = 3$, $x = -2$, $x = 4$ – точки, в которых подмодульные выражения равны нулю.

Заданное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\(-x+3)+(-x-2)-(-x+4)=3\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<3,\\(3-x)+(x+2)-(4-x)=3\end{cases}\\ \begin{cases}3\le x<4,\\(x-3)+(x+2)-(4-x)=3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\(x-3)+(x+2)-(x-4)=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\-x+3-x-2+x-4=3\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<3,\\3-x+x+2-4+x=3\end{cases}\\ \begin{cases}3\le x<4,\\x-3+x+2-4+x=3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\x-3+x+2-x+4=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\x=-6\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<3,\\x=2\end{cases}\\ \begin{cases}3\le x<4,\\x=\dfrac{8}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6,\\x=2.\end{array}\right.$$

Ответ: –6; 2.

Задача 16. Решите уравнение

$$\left|\sqrt{x^2-x}-x\right|+\left|x+\sqrt{x}\right|=\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}.$$

Решение

Введем обозначения: $a=\sqrt{x^2-x}-x$, $b=x+\sqrt{x}$.

Тогда исходное уравнение примет вид $|a|+|b|=a+b$.

Из свойств модуля следует, что последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда одновременно $a\ge 0$ и $b\ge 0$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе неравенств $\begin{cases}\sqrt{x^2-x}-x\ge 0,\\x+\sqrt{x}\ge 0,\end{cases}$

которая, в свою очередь, равносильна системе $\begin{cases} x^2 - x \geq x^2, \\ \left(x + \sqrt{x}\right)^2 \geq 0, \\ x^2 - x \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$ откуда

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x \leq 0, x \geq 1, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad x = 0.$$

Ответ: 0.

Задача 17. Решите уравнение $x^2 - 9|x| + 14 = 0$.

Решение

По свойству $x^2 = |x|^2$ мы можем переписать заданное уравнение в таком виде: $|x|^2 - 9|x| + 14 = 0$. Применяя подстановку $|x| = t$ ($t \geq 0$), будем иметь: $t^2 - 9t + 14 = 0$. По теореме Виета $t_1 = 2$, $t_2 = 7$. Тогда $|x| = 2$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; $|x| = 7$, откуда $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

Ответ: –7; –2; 2; 7.

Задача 18. Решите уравнение $\left(x^2 - 2\right)^2 - 3\left|x^2 - 2\right| - 10 = 0.$

Решение

Свойство модуля позволяет записать исходное уравнение в виде $\left|x^2 - 2\right|^2 - 3\left|x^2 - 2\right| - 10 = 0$. Введем подстановку $t = \left|x^2 - 2\right|$, ($t \geq 0$), будем иметь: $t^2 - 3t - 10 = 0$, $t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 5$. $t = -2$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$; из равенства $\left|x^2 - 2\right| = 5$ следует $x^2 - 2 = \pm 5$. Уравнение $x^2 - 2 = -5$, $x^2 = -3$ решения не имеет. Из уравнения $x^2 - 2 = 5$, $x^2 = 7$ получаем $x = \pm\sqrt{7}$.

Ответ: $\pm\sqrt{7}$.

Задача 19. Решите уравнение $(x-4)^2-3|x-4|-70=0$. В ответе укажите сумму всех найденных корней.

Решение

Учитывая, что $(x-4)^2=|x-4|^2$, приходим к квадратному уравнению $|x-4|^2-3|x-4|-70=0$ относительно $|x-4|$.

Сделаем подстановку: $t=|x-4|$, ($t \geq 0$). Будем иметь уравнение $t^2-3t-70=0$. Решая его, получаем корни $t_1 = 10$, $t_2 = -7$. Число $t = -7$ условию $t \geq 0$ не удовлетворяет. При $t = 10$ имеем $|x-4|=10$, откуда $x_1 = -6$, $x_2 = 14$.

Следовательно, сумма корней равна 8.

Ответ: 8.

Задача 20. Решите уравнение $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$.

Решение

Перепишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}=1,$$

или

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}=1,$$

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}-2\right|=1. \qquad (*)$$

Точки 1 и 2 разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых мы раскроем модули.

1) $\sqrt{x-1}<1$. Тогда уравнение (*) примет вид

$$1-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}=1,$$

откуда $\sqrt{x-1}=1$, что противоречит условию $\sqrt{x-1}<1$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке заданное уравнение корней не имеет.

2) $1\leq\sqrt{x-1}\leq 2$. Тогда уравнение (*) примет вид

$$\sqrt{x-1}-1+2-\sqrt{x-1}=1,$$

откуда $0\cdot\sqrt{x-1}=0$. Последнее уравнение верно при всех x из промежутка [2; 5].

3) $\sqrt{x-1}>2$. Тогда уравнение (*) примет вид

$$\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}-2=1,$$

или $\sqrt{x-1}=2$. Но последнее равенство противоречит условию $\sqrt{x-1}>2$, а поэтому на рассматриваемом промежутке исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: [2; 5].

Задача 21. Решите уравнение $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1$.

Решение

Подмодульные выражения обращаются в нуль при x = –2, x = –1. Разобьем числовую прямую этими точками на промежутки и на каждом из них рассмотрим заданное уравнение.

1) Пусть x < –2. Имеем смешанную систему

$$\begin{cases}x<-2,\\ 2^{-x-2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1;\end{cases}\quad \begin{cases}x<-2,\\ 2^{-x-2}=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x<-2,\\ -x-2=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x<-2,\\ x=3.\end{cases}$$

Итак на промежутке x < –2 исходное уравнение имеет корень x = –3.

2) Пусть –2 ≤ x < –1. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases}-2\le x<-1,\\ 2^{x+2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1;\end{cases}\quad \begin{cases}-2\le x<-1,\\ 2^{x+2}=2;\end{cases}\quad \begin{cases}-2\le x<-1,\\ x+2=1;\end{cases}\quad \begin{cases}-2\le x<-1,\\ x=-1.\end{cases}$$

Так как x = –1 не принадлежит промежутку [–2; –1), то на этом промежутке исходное уравнение корней не имеет.

3) Пусть $x\ge -1$. Имеем систему

$$\begin{cases}x\ge-1,\\ 2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1;\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge-1,\\ 2^{x+2}=2\cdot2^{x+1};\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge-1,\\ 2^{x+2}=2^{x+2}.\end{cases}\quad \begin{cases}-2\le x<-1,\\ x=-1.\end{cases}$$

Из уравнения системы следует, что x любое число из промежутка $[-1; +\infty)$, а значит все значения x из этого промежутка являются корнями исходного уравнения.

Ответ: –3; $[-1; +\infty)$.

5) Уравнения со «сложным» модулем.

«Сложным» модулем будем называть такое выражение, в котором под знаком модуля находится функция, в записи которой – один или несколько модулей.

Уравнения со «сложным» модулем можно решать так же методом интервалов.

Задача 22. Решите уравнение $\left|2-|x+1|\right|=3$.

Решение

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 2-|x+1|=3, \\ 2-|x+1|=-3, \end{array}\right. \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} |x+1|=-1, \\ |x+1|=5; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ x+1=-5, \\ x+1=5; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Знаком $\varnothing$ обозначено пустое множество (уравнение корней не имеет).

Ответ: –6; 4.

Задача 23. Решите уравнение $\left|\left||y|-1\right|-1\right|=1$.

Решение

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \left||y|-1\right|-1=1, \\ \left||y|-1\right|-1=-1. \end{array}\right.$$

Из второго уравнения совокупности находим $|y|=1$, то есть $y = \pm 1$. Первое уравнение совокупности $\left||y|-1\right|=2$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} |y|-1=2, \\ |y|-1=-2, \end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l} |y|=3, \\ |y|=-1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=\pm 3, \\ y=\varnothing. \end{array}\right.$

Объединяя полученные решения находим ответ.

Ответ: –3; –1; 1; 3.

Уравнения со «сложным» модулем следует решать, постепенно раскрывая модули (начиная «изнутри»). Рассмотрим пример.

Задача 24. Решите уравнение $\dfrac{\left|1-|x|\right|+1}{|x|+2}=0$.

Решение

Подмодульное выражение «внутреннего» модуля $|x|$ обращается в нуль в точке $x = 0$. Разбив точкой $x = 0$ числовую прямую на промежутки: $x < 0$; $x \geq 0$, рассмотрим заданное уравнение на каждом из промежутков.

1) $\begin{cases} x<0, \\ \dfrac{|1+x|+1}{2-x}=0. \end{cases}$

Точкой $x = –1$ (это корень подмодульного выражения) разобъем промежуток $x < 0$ на два промежутка: $(–\infty; –1)$ и $[–1; 0)$.

1а) $\begin{cases} -\infty<x<-1, \\ \dfrac{-1-x+1}{2-x}=0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} -\infty<x<-1, \\ \dfrac{-x}{2-x}=0, \end{cases}$ $\begin{cases} -\infty<x<-1, \\ x=0. \end{cases}$ Так как число $x = 0$ не принадлежит указанному промежутку, то оно корнем уравнения не является.

1б) $\begin{cases} -1\leq x<0, \\ \dfrac{1+x+1}{2-x}=0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} -1\leq x<0, \\ x+2=0, \\ x\neq 2, \end{cases}$ $\begin{cases} -1\leq x<0, \\ x=-2, \\ x\neq 2. \end{cases}$

Число $x = –2$ не принадлежит промежутку $[–1; 0)$, а значит корнем не является.

2) $\begin{cases} x\geq 0, \\ \dfrac{|1-x|+1}{2+x}=0. \end{cases}$

Точкой $x = 1$ разобьем промежуток $x \geq 0$ на два промежутка: $[0; 1]$ и $(1; +\infty)$. Рассмотрим уравнение системы на каждом их этих промежутков.

2а) $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{1-x+1}{2+x} = 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 2-x=0, \\ x+2 \ne 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x=2, \\ x \ne -2. \end{cases}$

Число x = 2 не принадлежит промежутку [0; 1], а значит корнем уравнения не является.

2б) $\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{-1+x+1}{x+2} = 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x > 1, \\ x=0, \\ x \ne -2. \end{cases}$

Число x = 0 промежутку x > 1 не принадлежит и поэтому корнем уравнения не является.

Ответ: Уравнение корней не имеет.

Есть уравнения с модулем, которые можно решать с использованием свойства четности функции. Приведем пример.

Задача 25. Решите уравнение $\left| \left| 4 + |x-3| \right| + 1 \right| = 6$, в ответе укажите сумму корней.

Решение

Уравнение $\left| \left| 4 + |x-3| \right| + 1 \right| = 6$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \left| 4 + |x-3| \right| + 1 = 6, \\ \left| 4 + |x-3| \right| + 1 = -6; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left| 4 + |x-3| \right| = 5, \\ \left| 4 + |x-3| \right| = -7. \end{array} \right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет решений, а первое равносильно новой совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 4 + |x-3| = 5, \\ 4 + |x-3| = -5. \end{array} \right.$$

Поступая аналогично, получим

$$\left[\begin{array}{l} |x-3| = 1, \\ |x-3| = -9; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x-3 = 1, \\ x-3 = -1; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 4, \\ x_2 = 2. \end{array} \right.$$

Сумма корней равна $x_1 + x_2 = 6$.

Ответ: 6.

Задача 26. Решите уравнение $||3-x|-x+1|+x=6$.

Решение

Заданное уравнение запишем в виде $||3-x|-x+1|=6-x$. Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 6-x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} |3-x|-x+1=6-x, \\ |3-x|-x+1=x-6; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 6, \\ \left[\begin{array}{l} |3-x|=5, \\ |3-x|=2x-7. \end{array}\right. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности равносильно совокупности:

$$|3-x|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x=5, \\ 3-x=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=8. \end{array}\right.$$

Решением системы будет $x = -2$.

Второе уравнение равносильно следующей системе:

$$|3-x|=2x-7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3-x=2x-7, \\ 3-x=7-2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{7}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{10}{3}, \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Значение $x = 4$ также является решением системы.

Ответ: $x = -2$; $x = 4$.

Задача 27. Решите уравнение $||x-1|-7|=10$.

Решение

$$||x-1|-7|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1|-7=-10, \\ |x-1|-7=10; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1|=-3, \\ |x-1|=17. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности решений не имеет. Корнями второго уравнения совокупности являются числа $x = -16$, $x = 18$.

Ответ: –16; 18.

Задача 28. Решите уравнение $\log_2(x-2)^4 - \log_2|x-2| - 9 = 0$.

Решение

$$\log_2(x-2)^4 - \log_2|x-2| - 9 = 0 \Leftrightarrow 4\log_2|x-2| - \log_2|x-2| - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\log_2|x-2| = 9 \Leftrightarrow \log_2|x-2| = 3 \Leftrightarrow |x-2| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=10. \end{array}\right.$$

Ответ: –6; 10.

Задача 29. Решите уравнение $\left|\left||x|-2\right|-1\right|-2\right| = 2$.

Решение

По определению модуля имеем $\left|\left||x|-2\right|-1\right|-2 = \pm 2$.

1) Решим уравнение $\left|\left||x|-2\right|-1\right|-2 = -2$, откуда $\left|\left||x|-2\right|-1\right| = 0$. Тогда $\left||x|-2\right|-1 = 0$, $\left||x|-2\right| = 1$, $|x|-2 = \pm 1$, или $|x| = 3$ и $|x| = 1$, откуда $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 1$.

2) Решим уравнение $\left|\left||x|-2\right|-1\right|-2 = 2$, откуда $\left|\left||x|-2\right|-1\right| = 4$, $\left||x|-2\right|-1 = \pm 4$, или $\left||x|-2\right| = 5$ и $\left||x|-2\right| = -3$ (последнее уравнение решений не имеет). $|x|-2 = \pm 5$, или $|x| = 7$ и $|x| = -3$ (последнее уравнение решений не имеет).

Итак, $|x| = 7$, откуда $x_{5,6} = \pm 7$.

Ответ: ±3; ±1; ±7.

Перейдем к решению различных уравнений, содержащих модули.

Задача 30. Решите уравнение $|x-7| + |x+7| = 15$.

Решение

Функция $f(x) = |x-7| + |x+7|$ четная, так как ее область определения симметрична относительно нуля и

$$\begin{array}{l} f(-x) = |-x-7| + |-x+7| = |(-1)(x+7)| + |(-1)(x-7)| = \\ = |-1||x+7| + |-1||x-7| = |x+7| + |x-7| = f(x) \end{array}.$$

Пусть $x_0 \ge 0$ – корень уравнения. Тогда, из-за четности функции, $(-x_0)$ – также корень уравнения.

На промежутке $0 \le x \le 7$ исходное уравнение принимает вид $-(x-7)+(x+7)=15$, откуда $0 \cdot x = 1$. Это уравнение корней не имеет. На промежутке $x > 7$ исходное уравнение принимает вид $x-7+x+7=15$, откуда $x=\frac{15}{2}=7{,}5$.

В силу четности функции *f(x)* вторым корнем уравнения будет $x = -7{,}5$.

Заметим, что вместо трех промежутков мы рассматривали лишь два, что позволило сэкономить время.

Ответ: –7,5; 7,5.

Задача 31. Решите уравнение $\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1$.

Решение

Разобьем числовую прямую точками $x = 1$, $x = 2$ на промежутки $x < 1$, $1 \le x < 2$, $x > 2$ (заметим, что $x = 2$ не входит в область определения уравнения, так как при этом значении x знаменатель обращается в нуль). Заданное уравнение рассмотрим на каждом из полученных промежутков.

1) Пусть $x < 1$. Будем иметь

$$\begin{cases} x<1, \\ \dfrac{-x+2}{-x+1-1}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x<1, \\ -x+2=-x, \\ x\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x<1, \\ x\neq 0, \\ 0\cdot x=2. \end{cases}$$

Как видим, ни при каком значении x равенство $0 \cdot x = 2$ не выполняется.

2) Пусть $1 \le x < 2$. Будем иметь

$$\begin{cases} 1\le x<2, \\ \dfrac{-x+2}{x-1-1}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1\le x<2, \\ -x+2=x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1\le x<2, \\ -2x=-4, \end{cases}$$

откуда $x = 2$, но это значение x не входит в промежуток [1; 2), а значит, исходное уравнение на этом промежутке не имеет корней.

3) Пусть $x > 2$. Будем иметь

$$\begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{x-2}{x-1-1} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x-2 = x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ 0 \cdot x = 0, \end{cases}$$

откуда имеем, что все значения $x > 2$ являются корнями уравнения $0 \cdot x = 0$, а значит и исходного уравнения.

Ответ: $(2; +\infty)$.

Задача 32. Решите уравнение $\sqrt{9x^2-1} + x = |x-3|$.

Решение

Так как подмодульное выражение обращается в нуль при $x = 3$, рассмотрим два случая.

1) $\begin{cases} x < 3, \\ \sqrt{9x^2-1} = 3-2x, \end{cases}$ откуда, после возведения обеих частей уравнения системы в квадрат, будем иметь $\begin{cases} x < 3, \\ 9x^2-1 = 9-12x+4x^2. \end{cases}$

Решая уравнение системы, будем иметь $5x^2+12x-10=0$, $x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+50}}{5}$, $x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{86}}{5}$, $x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{86}}{5}$. Промежутку $x < 3$ принадлежит лишь число $x = \dfrac{-6-\sqrt{86}}{5}$.

2) $\begin{cases} x \geq 3, \\ \sqrt{9x^2-1} = -3. \end{cases}$

Уравнение системы корней не имеет, так как в левой части уравнения стоит арифметический квадратный корень, который неотрицателен, а в правой части стоит отрицательное число.

Ответ: $\dfrac{-6-\sqrt{86}}{5}$.

Задача 33. Решите уравнение $|1-x| = \sqrt{x^2 - x + 4} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$.

Решение

Подкоренные выражения положительны при любом действительном значении x, значит областью определения заданного уравнения является множество R.

Умножим обе части уравнения на выражение

$$\sqrt{x^2 - x + 4} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5}.$$

Будем иметь:

$$|1-x|\left(\sqrt{x^2 - x + 4} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5}\right) = x^2 - x + 4 - 2x^2 + 3x - 5,$$

$$|1-x|\left(\sqrt{x^2 - x + 4} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5}\right) = -(x-1)^2.$$

Левая часть последнего уравнения неотрицательна при всех x из области определения заданного уравнения, а правая часть уравнения неположительна. Равенство возможно лишь в случае, когда и левая, и правая части уравнения равны нулю, то есть при $x = 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ является корнем заданного уравнения.

Ответ: 1.

Задача 34. Решите уравнение $\sqrt{x - \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} = x$.

Решение

Область определения уравнения задается системой $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \\ x - \sqrt{2x-1} \geq 0, \\ x + \sqrt{2x-1} \geq 0, \end{cases}$ откуда $x \geq \dfrac{1}{2}$.

При $x \geq \dfrac{1}{2}$, после возведения обеих частей заданного уравнения в квадрат, получаем равносильное уравнение:

$$x - \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x - \sqrt{2x-1}}\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + x + \sqrt{2x-1} = x^2,$$

откуда

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2,$$

$$x^2-2x-2\sqrt{(x-1)^2}=0,$$

$$x^2-2x-2|x-1|=0. \qquad (*)$$

Корень $x = 1$ подмодульного выражения разбивает область определения уравнения $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ на два промежутка: $\left[\frac{1}{2};1\right]$ и $(1;+\infty)$. Рассмотрим уравнение (*) на каждом из промежутков.

1) $\begin{cases}\frac{1}{2}\le x\le 1,\\ x^2-2x+2x-2=0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\frac{1}{2}\le x\le 1,\\ x^2=2,\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{2}\le x\le 1,\\ x_{1,2}=\pm\sqrt{2}.\end{cases}$

Число $x=-\sqrt{2}$ не принадлежит промежутку $\left[\frac{1}{2};1\right]$ и корнем являться не может. Число $x=\sqrt{2}\approx 1{,}4$ также не принадлежит этому промежутку. Значит числа $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ – посторонние корни.

2) $\begin{cases}x>1,\\ x^2-2x-2x+2=0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x>1,\\ x^2-4x+2=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x>1,\\ x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}.\end{cases}$

Промежутку $x > 1$ принадлежит лишь число $2+\sqrt{2}$.

Ответ: $2+\sqrt{2}$.

Задача 35. Решите уравнение $\log_{x+1}\left(1-\sqrt{1-2x+x^2}\right)=\frac{1}{2}$.

Решение

Область определения уравнения задается системой

$$\begin{cases}1-2x+x^2\ge 0,\\ 1-\sqrt{1-2x+x^2}>0,\\ x+1>0,\\ x+1\ne 1,\end{cases} \quad \begin{cases}x\in R,\\ 0<x<2,\\ x>-1,\\ x\ne 0,\end{cases} \text{ откуда } 0 < x < 2.$$

Заданное уравнение запишем в виде: $\log_{x+1}(1-|x-1|)=\frac{1}{2}$.

Корень $x = 1$ подмодульного выражения разбил область определения уравнения на два промежутка: (0; 1) и [1; 2).

1) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \log_{x+1}(1 + x - 1) = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ (x+1)^{\frac{1}{2}} = x, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - x - 1 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Оба числа $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ в промежуток (0; 1) не попадают, значит они корнями уравнения системы не являются.

2) $\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ \log_{x+1}(1 - x + 1) = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ 2 - x = (x+1)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ (2-x)^2 = x + 1, \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ x^2 - 5x + 3 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$

Оба числа $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ и $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ промежутку [1; 2) не принадлежат, значит являются посторонними корнями.

Ответ: Уравнение корней не имеет.

Задача 36. Решите уравнение $\left|x^2 - 1\right| + \left|x^2 - 5x + 6\right| - 5x + 7 = 0$.

Решение

Выделяем сумму модулей: $\left|x^2 - 1\right| + \left|x^2 - 5x + 6\right| = 5x - 7$.

Затем попытаемся установить, можно ли ($5x$ – 7) представить в виде алгебраической суммы подмодульных выражений.

Так как

$$(5x - 7) = (x^2 - 1) - (x^2 - 5x + 6),$$

то мы имеем равенство вида

$$|m_1| + |m_2| = a_1 m_1 + a_2 m_2,$$

где $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ -\left(x^2-5x+6\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ x^2-5x+6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \quad или \quad x\ge 1, \\ 2\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

Ответ: $2\le x\le 3$.

Задача 37. Решите уравнение $5\sqrt{1+\left|x^2-1\right|}=3+\left|5x+3\right|$.

Решение

Начнем решать данную задачу с раскрытия модулей по определению, для чего составим следующую таблицу для определения знаков (табл. 2).

Таблица 2

	$(-\infty;-1]$	$\left(-1;-\frac{3}{5}\right]$	$\left(-\frac{3}{5};1\right]$	$(1;+\infty)$
x^2-1	+	–	–	+
$5x+3$	–	–	+	+

Данное уравнение равносильно совокупности четырех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -1, \\ 5\sqrt{1+\left(x^2-1\right)}=3-\left(5x+3\right), \end{cases} \\ \begin{cases} -1< x\le -\frac{3}{5}, \\ 5\sqrt{1-\left(x^2-1\right)}=3-\left(5x+3\right), \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{3}{5}< x\le 1, \\ 5\sqrt{1-\left(x^2-1\right)}=3+\left(5x+3\right), \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ 5\sqrt{1+\left(x^2-1\right)}=3+\left(5x+3\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -1, \\ |x|=-x, \end{cases} \\ \begin{cases} -1< x\le -\frac{3}{5}, \\ \sqrt{2-x^2}=-x, \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{3}{5}< x\le 1, \\ 5\sqrt{2-x^2}=6+5x, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ 5|x|=6+5x. \end{cases} \end{array}\right.$$

(Последняя равносильность следует из того, что $\sqrt{x^2}=|x|$).

Легко видеть, что первая система совокупности имеет решением промежуток $x \le -1$, так как для всех таких x равенство $|x| = -x$ является верным.

Во второй системе при всех указанных x правая часть иррационального уравнения положительна, поэтому можно возвести обе части в квадрат: $2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$, поэтому вторая система решений не имеет.

И в третьей системе при всех указанных x правая часть иррационального уравнения положительна, поэтому и здесь можно возвести обе части в квадрат:

$$25\left(2 - x^2\right) = (6 + 5x)^2 \Leftrightarrow 25x^2 + 30x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{5}, x = \frac{1}{5},$$

поэтому решением третьей системы будет $x = \frac{1}{5}$.

И наконец, четвертая система решений не имеет, так как при всех $x > 1$ верно равенство $|x| = x$, а значит, уравнение примет вид $5x = 6 + 5x$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \left\{\frac{1}{5}\right\}$.

Задача 38. Решите уравнение $3\sqrt{x + 4} = 5 - 2|x + 2|$.

Решение

Пусть $\sqrt{x + 4} = y$, $y \ge 0$. Тогда $x = y^2 - 4$. Исходное уравнение примет следующий вид:

$$3y=5-2\left|y^2-4+2\right|\Leftrightarrow 2\left|y^2-2\right|=5-3y\Leftrightarrow\begin{cases}5-3y\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}2y^2-4=5-3y,\\ 2y^2-4=3y-5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le\frac{5}{3},\\ \left[\begin{array}{l}2y^2+3y-9=0,\\ 2y^2-3y+1=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le\frac{5}{3},\\ \left[\begin{array}{l}y=-3,\\ y=\frac{3}{2},\\ y=1,\\ y=\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{3}{2},\\ y=1,\\ y=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{7}{4},\\ x=-3,\\ x=-\frac{15}{4}.\end{array}\right.$$

(Предпоследняя равносильность следует из того, что $y\ge 0$).

Ответ: $-\frac{15}{4};\ -3;\ -\frac{7}{4}$.

Задача 39. Решите уравнение $\dfrac{\left|x^3\right|-\left|3x\right|}{\sqrt{3x^2-4x-2}-2+\left|x\right|}=0$.

Решение

Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}\left|x^3\right|-\left|3x\right|=0,\\ 3x^2-4x-2\ge 0,\\ \sqrt{3x^2-4x-2}\ne 2-\left|x\right|.\end{cases}$$

Решим первое уравнение этой системы:

$$\left|x^3\right|-\left|3x\right|=0\Leftrightarrow\left|x\right|\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow x=0, x=\pm\sqrt{3}.$$

При $x=0$ не выполняется второе неравенство системы. При $x=\pm\sqrt{3}$ второе неравенство выполняется.

Пусть $x=\sqrt{3}$. Проверим третье условие системы:

$$\sqrt{3\left(\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}-2}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3},$$

то есть $x=\sqrt{3}$ не является решением системы. Аналогично поступим и при $x=-\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3\left(-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}-2}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3},$$

то есть $x=-\sqrt{3}$ является решением системы.

Ответ: $-\sqrt{3}$.

Задача 40. Решите уравнение $x^2+4|x-3|-7x+11=0$.

Решение

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0,\\ x^2+4(x-3)-7x+11=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0,\\ x^2-4(x-3)-7x+11=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3,\\ x^2-3x-1=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ x^2-11x+23=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3,\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ x=\dfrac{11\pm\sqrt{29}}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},\\ x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$.

Задача 41. Решите уравнение $|x-2|^{x^2-2x}=|x-2|^{5x-10}$.

Решение

Задано показательно-степенное уравнение, содержащее модуль.

Рассмотрим случаи, когда основание степени $|x-2|$ равно 1 и 0.

1) Пусть $|x-2|=0$, тогда $x=2$. Проверим подстановкой это число: $0^{4-4}=0^{10-10}$. Левая и правая части последнего равенства не имеют смысла, а значит $x=2$ не является корнем уравнения.

2) Пусть $|x-2|=1$, тогда $x=1$ или $x=3$. Проверим эти числа подстановкой:

а) при $x=1$ имеем $1^{1-2}=1^{5-10}$, откуда $1=1$, значит $x=1$ является корнем уравнения.

б) при $x = 3$ имеем $1^{9-6} = 1^{15-10}$, откуда $1 = 1$, значит $x = 3$ является корнем уравнения.

Мы должны рассмотреть еще один случай, когда равны показатели (основания степеней равны).

3) $x^2 - 2x = 5x - 10$. Имеем $x^2 - 7x + 10 = 0$, откуда, по теореме Виета, имеем: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Проверим лишь число $x = 5$, так как $x = 2$ мы уже подвергали проверке.

При $x = 5$ имеем $3^{25-10} = 3^{25-10}$, откуда $3^5 = 3^5$. Так как это равенство верное, то $x = 5$ является корнем заданного уравнения.

Ответ: 1; 3; 5.

Систематическое изложение вопроса о решении показательно-степенных уравнений и неравенств читатель найдет в нашей работе [7].

Задача 42. Решите уравнение $\sqrt{\frac{7}{4} - |x+1|} = 1 - |x|$.

Решение

Заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x| \le 1, \\ \frac{7}{4} - |x+1| = 1 - 2|x| + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 1, \\ x^2 - 2|x| + x + \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

Далее рассмотрим два случая.

а) Пусть $0 \le x \le 1$, тогда уравнение системы принимает вид

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Это значение попадает в промежуток $0 \le x \le 1$, следовательно, является решением данного уравнения.

б) Пусть $-1 \le x < 0$, то $x^2 + 3x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$.

Здесь только один корень $x = \frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$ принадлежит промежутку $-1 \le x < 0$.

Ответ: $\frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{2}-3}{2}$.

Задача 43. Решите уравнение $\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2y)\right| + \left|\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2y)\right| = 1$.

Решение

Левая часть заданного уравнения имеет смысл для всех y, кроме $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$. Если $\pi k < y < \frac{\pi}{2} + \pi k$, то $1 + \sin 2y \ge 1$, а $1 - \sin 2y \le 1$. Следовательно, данное уравнение равносильно следующему уравнению: $-\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2y) + \log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2y) = 1$.

Потенцируя, получаем $\frac{1-\sin 2y}{1+\sin 2y} = \frac{1}{3}$, откуда $\sin 2y = \frac{1}{2}$.

Аналогично в случае если $\pi k - \frac{\pi}{2} < y < \pi k, k \in Z$, имеем $1 + \sin 2y \le 1$, а $1 - \sin 2y \ge 1$. Следовательно, данное уравнение примет вид: $\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2y) - \log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2y) = 1$, откуда $\sin 2y = -\frac{1}{2}$.

Окончательно имеем: $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Задача 44. Найдите корни уравнения

$$|\cos y| = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - y\right) - \sin(2\pi - y),$$

принадлежащие отрезку [2π; 4π].

Решение

Использовав формулы приведения, запишем заданное уравнение в виде: $|\cos y| = 2\cos y + \sin y$.

Если $2\pi \le y \le \frac{5}{2}\pi$ и $\frac{7}{2}\pi \le y \le 4\pi$, то $\cos y \ge 0$ и $|\cos y| = \cos y$, поэтому уравнение примет вид: $\sin y + \cos y = 0$, откуда, разделив обе части этого уравнения на $\cos y \ne 0$, будем иметь $\operatorname{tg} y = -1$, $y = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; в рассматриваемом промежутке находится лишь $y = \frac{15\pi}{4}$.

Если $\frac{5}{2}\pi < y < \frac{7}{2}\pi$, то $\cos y < 0$ и $|\cos y| = -\cos y$, поэтому уравнение примет вид: $3\cos y + \sin y = 0$, откуда, после деления обеих частей уравнения на $\cos y \ne 0$, будем иметь $\operatorname{tg} y = -3$, $y = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z$; в рассматриваемом промежутке находится лишь один корень $y = 3\pi - \operatorname{arctg} 3$.

Ответ: $\frac{15}{4}\pi; 3\pi - \operatorname{arctg} 3$.

Задача 45. Решите уравнение $\frac{1 - \cos x}{1 - \sin|x|} = \operatorname{tg}^2 x$.

Решение

Так как функции $\operatorname{tg}^2 x$, $\cos x$, $\sin|x|$ четные, то если x есть корень заданного уравнения, то и $(-x)$ – также корень этого уравнения. В силу четности входящих в уравнение функций, решим уравнение лишь при $x \ge 0$.

$$\frac{1-\cos x}{1-\sin x}=\operatorname{tg}^2 x,\ \frac{1-\cos x}{1-\sin x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$\sin^2 x-\sin^3 x=\cos^2 x-\cos^3 x,\ \sin^2 x-\cos^2 x=\sin^3 x-\cos^3 x,$$

$$(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=(\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right),$$

$$(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=$$
$$=(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x-1-\sin x\cos x)=0.$$

1) $\sin x - \cos x = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in N$. Учитывая, что $x \geq 0$, то будем иметь $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in N_0$.

2) $\sin x + \cos x - 1 - \sin x \cos x = 0$, откуда

$$(\sin x - \sin x \cos x) - (1 - \cos x) = 0,$$

$$\sin x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0,$$

$$(1 - \cos x)(\sin x - 1) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \sin x=1,\end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l}x=2\pi k, k\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$

С учетом области определения уравнения ($\cos x \neq 0$, $1 - \sin|x| \neq 0$), значения $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$ не могут быть корнями заданного уравнения.

Учитывая, что мы рассматриваем лишь $x \geq 0$, то из решений $x=2\pi k, k\in Z$, мы оставим лишь $x=2\pi k, k\in N_0$.

Итак, получаем ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in N_0$; $x=2\pi k, k\in N_0$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in N_0$; $2\pi k, k\in N_0$.

Задача 46. Решите уравнение $\left|\sqrt{3}\cos 3t\right| = \sqrt{2}\cos 2t$.

Решение

Заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 2t \ge 0, \\ 3\cos^2 3t = 2\cos^2 2t. \end{cases}$

Пусть $\cos 2t = z$, тогда

$$3\left(1 + 4z^3 - 3z\right) = 4z^2$$

или

$$12z^3 - 4z^2 - 9z + 3 = 0,\ \left(4z^2 - 3\right)\left(3z - 1\right) = 0,$$

то есть $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{3}$.

С учетом ограничения $\cos 2t \ge 0$ имеем $\cos 2t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2t = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$.

Задача 47. Решите уравнение $2\sin x + \left|\cos x\right| = 1$.

Решение

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}. \end{cases}$

а) $\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \sin\frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z$

б) $\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, n \in Z$ система не имеет решений, так

как $\frac{\pi}{2} < 2\operatorname{arctg} 2 < \pi$ и $\cos x < 0$.

2) $\begin{cases} \cos x < 0, \\ 4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\cos^2\dfrac{x}{2}. \end{cases}$

а) $\begin{cases} \cos x < 0, \\ \cos\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in Z;$

б) $\begin{cases} \cos x < 0, \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z;$ система несовместна, так как $0 < 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ и $\cos x > 0$.

Полученные серии объединяются в один ответ: $\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\pi n, n \in Z$.

Задача 48. Решите уравнение $\cos x + |\cos x - 2\sin x| = 0$.

Решение

1) $\begin{cases} \cos x - 2\sin x \geq 0, \\ 2\cos x - 2\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 2\sin x, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 2\sin x, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$

Проверяем, что при $n = 2k$ неравенство не выполняется, а при $n = 2k + 1$ выполняется.

2) $\begin{cases} \cos x - 2\sin x < 0, \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 2\sin x, \\ x = \pi n, n \in Z. \end{cases}$

Проверяем, что при $n = 2k$ неравенство не выполняется, а при $n = 2k + 1$ выполняется.

Ответ: $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n, x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Задача 49. Решите уравнение

$$2\sqrt{2}\left|\sin 3x+\cos 3x\right|=\cos 16x-8\cos 8x+11.$$

Решение

Воспользуемся формулами $\sin a+\cos a=\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\cos 2a=2\cos^2 a-1$, получим $4\left|\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right|=2\cos^2 8x-8\cos 8x+10$.

Сокращая на 2 и выделяя полный квадрат в правой части, имеем

$$2\left|\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left(\cos 8x-2\right)^2+1.$$

Левая часть уравнения, очевидно, не превосходит 2, а правая часть изменяется от 2 до 10 включительно. Значит, уравнение равносильно системе двух уравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases}\left|\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right|=1,\\ \cos 8x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-\frac{\pi}{4}=\pi n, n\in Z,\\ 8x=2\pi k, k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z,\\ x=\frac{\pi k}{4}, k\in Z.\end{cases}$$

Приравнивая *x*, получим уравнение с двумя целочисленными переменными *n* и *k* (оно называется диофантовым)

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi k}{4}\Leftrightarrow 1+4n=3k.$$

Если $k = 2l$, то нет решений (левая часть нечетна, а правая – четна); если $k = 2l + 1$, то $1 + 4n = 3(2l + 1) \Leftrightarrow 2n = 3l + 1$.

Если $l = 2m$, то нет решений по той же причине: если $l = 2m + 1$, то $n = 3m + 2$ ($l, m, n, k \in Z$). Тогда

$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi(3m+2)}{3}=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}+\pi m=\frac{3\pi}{4}+\pi m=-\frac{\pi}{4}+\pi n.$$

Ответ: $\pi n-\frac{\pi}{4}, n\in Z$.

Задача 50. Найдите все решения уравнения

$$|\sin 2x - \cos x| = ||\sin 2x| - |\cos x||$$

на интервале (–2π; 2π).

Решение

Переходим к уравнению, равносильному исходному, возведением его обеих частей в квадрат; поскольку $\sin^2 a = |\sin a|^2$ и $|a|\cdot|b| = |ab|$, уравнение запишется в виде

$$\sin 2x \cos x = |\sin 2x \cos x| \Leftrightarrow \cos^2 x \sin x = |\cos^2 x \sin x|.$$

Но $y = |y| \Leftrightarrow y \geq 0$, так что имеем неравенство

$$\cos^2 x \sin x \geq \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow (\text{на } -2\pi < x < 2\pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\pi < x \leq -\pi; x = -\frac{\pi}{2}; 0 \leq x \leq \pi; x = \frac{3\pi}{2}.$$

Ответ: $x \in (-2\pi; \pi] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup [0; \pi] \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Задача 51. Решите уравнение $\left|\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{5\pi}{17}$.

Решение

Для уравнения $|y| + |z| = a$ применим схему

$$|y| + |z| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} yz \geq 0, \\ |y+z| = a \end{cases}\\ \begin{cases} yz \leq 0, \\ |y-z| = a \end{cases}\end{array}\right. \quad (a \geq 0).$$

Исходное уравнение равносильно следующей совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\ge 0,\\ \left|\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\right|=\sin\frac{5\pi}{17}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\le 0,\\ \left|\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\right|=\sin\frac{5\pi}{17}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\frac{x}{3}\sin x\ge 0,\\ \left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{6}\right)\right|=\sin\frac{5\pi}{17}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\frac{x}{3}\sin x\le 0,\\ \left|\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{6}\right)\right|=\sin\frac{5\pi}{17}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\frac{2x}{3}-\cos\frac{4x}{3}\ge 0,\\ \left|\sin\frac{2x}{3}\right|=\sin\frac{5\pi}{17}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\frac{2x}{3}-\cos\frac{4x}{3}\le 0,\\ \left|\sin\frac{x}{3}\right|=\sin\frac{5\pi}{17}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\frac{2x}{3}\ge\cos\frac{4x}{3},\\ 1-\cos\frac{4x}{3}=2\sin^2\frac{5\pi}{17}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\frac{2x}{3}\le\cos\frac{4x}{3},\\ 1-\cos\frac{2x}{3}=2\sin^2\frac{5\pi}{17}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{2x}{3}\ge\cos\frac{4x}{3}=\cos\frac{10\pi}{17},\\ \cos\frac{4x}{3}\ge\cos\frac{2x}{3}=\cos\frac{10\pi}{17}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\frac{2x}{3}\ge 2\cos^2\frac{2x}{3}-1,\\ \frac{4x}{3}=\pm\frac{10\pi}{17}+2\pi n,\end{cases}\\ 2\cos^2\frac{2x}{3}-1\ge\cos\frac{2x}{3}=\cos\frac{10\pi}{17}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\frac{1}{2}\le\cos\frac{2x}{3}\le 1,\\ \frac{2x}{3}=\pm\frac{5\pi}{17}+\pi n,\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos\frac{2x}{3}\le-\frac{1}{2},\\ \cos\frac{2x}{3}\ge 1,\end{array}\right.\\ \cos\frac{2x}{3}=\cos\frac{10\pi}{17}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pm\frac{15\pi}{34}+\frac{3\pi n}{2},\\ \cos\left(\pm\frac{5\pi}{17}+\pi n\right)\ge-\frac{1}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}\cos\frac{2x}{3}=\cos\frac{10\pi}{17},\\ \cos\left(\pm\frac{10\pi}{17}+2\pi n\right)\le-\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm\dfrac{15\pi}{34} + 3\pi k, \\ \cos\dfrac{5\pi}{17} \geq -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm\dfrac{15\pi}{34} + \dfrac{3\pi}{2} + 3\pi k, \\ \cos\left(\pi \pm \dfrac{5\pi}{17}\right) \geq -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\dfrac{2x}{3} = \cos\dfrac{10\pi}{17}, \\ \cos\dfrac{10\pi}{17} \leq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3\pi k \pm \frac{15\pi}{34},$$

так как в силу убывания косинуса на отрезке [0; π]

$$\cos\left(\pi \pm \frac{5\pi}{17}\right) = -\cos\frac{5\pi}{17} < -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

и

$$\cos\frac{10\pi}{17} > \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = 3\pi n \pm \dfrac{15\pi}{17}, n \in Z$.

Задача 52. Найти все значения $x \in [0;\ \pi)$, удовлетворяющие уравнению $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| + |\operatorname{tg} 3x|$.

Решение

Если $\cos x \cos 2x \cos 3x \neq 0$, то

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(x + 2x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x},$$

то есть

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + (-(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)).$$

Значит, уравнение имеет вид:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = |\operatorname{tg} 3x| + |-(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)|.$$

Используем:

а) свойство модулей: $|a| + |b| = a + b$ $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0; \end{cases}$

б) неотрицательность правой части исходного уравнения.

В результате получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \geq 0, \\ \operatorname{tg} 3x \geq 0, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \leq 0. \end{cases}$$

Возможны два случая: $\operatorname{tg} 3x = 0$ или $\operatorname{tg} 3x > 0$.

В первом случае:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 3x = 0, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \leq 0, \\ x \in [0; \pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{3}, n \in Z, \\ x \in [0; \pi), \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{0; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right\}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}.$$

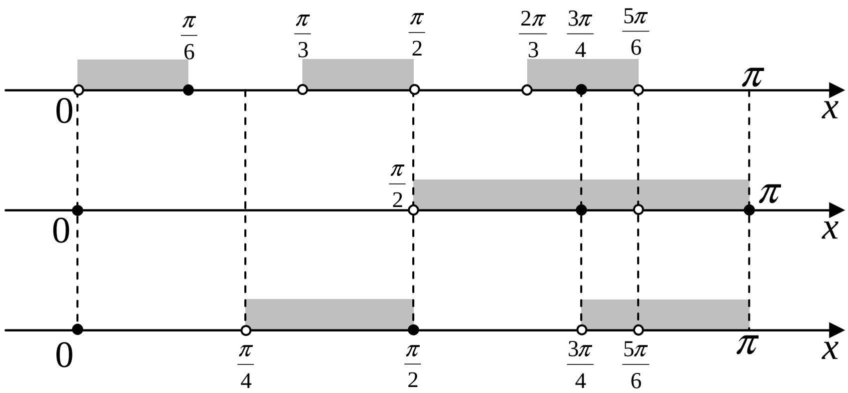


Рис. 31

Во втором случае (рис. 31):

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 3x > 0, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \ge 0, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \le 0, \\ x \in [0; \pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 3x > 0, \\ \operatorname{tg} x \le 0, \\ \operatorname{tg} 2x \le 0, \\ x \in [0; \pi) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \dfrac{\pi}{6}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6}\right), \\ x \in \{0\} \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right], \\ x \in \{0\} \cup \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right).$$

Ответ: $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{6}$.

Задача 53. Решите уравнение $\cos 6x + |\cos 2x| + \cos\left(4x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Решение

Возможны два случая:

$$\cos 2x \ge 0 \text{ и } \cos 2x < 0.$$

Рассмотрим каждый из них.

1) Пусть $\cos 2x \ge 0$, тогда $|\cos 2x| = \cos 2x$. Воспользовавшись формулой приведения, запишем $\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin 4x$, и исходное уравнение примет вид

$$\cos 6x + \cos 2x - \sin 4x = 0.$$

Преобразуя сумму косинусов в произведение и используя формулу синуса двойного угла, получим

$$2\cos 4x \cos 2x - 2\sin 2x \cos 2x = 0.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$2\cos 2x(\cos 4x - \sin 2x) = 0.$$

Полученное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений.

а) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow$.

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \qquad (*)$$

Эти корни удовлетворяют условию $\cos 2x \geq 0$.

б) $\cos 4x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin 2x = 0$.

Принимая $\sin 2x$ за новое неизвестное и решая соответствующее квадратное уравнение, получим $\sin 2x = -1$ и $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Корни уравнения $\sin 2x = -1$ содержатся среди множества корней (*), так как если $\cos 2x = 0$, то $\sin 2x = \pm 1$. Уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}$ имеет две серии решений:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ и } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Тогда, учитывая, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \cos\frac{\pi}{6} > 0 \text{ и } \cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) = \cos\frac{5\pi}{6} < 0,$$

окончательно получаем $x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$.

2) Пусть теперь $\cos 2x < 0$, тогда $|\cos 2x| = -\cos 2x$ и исходное уравнение запишется в виде

$$\cos 6x - \cos 2x - \sin 4x = 0.$$

Используя формулу преобразования разности косинусов в произведение и вынося общий множитель за скобки, получим

$$-2\sin 4x \sin 2x - \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x\,(2\sin 2x + 1) = 0.$$

Полученное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений.

а) $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \pi m \Leftrightarrow$.

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi m}{4}, m \in Z. \qquad (**)$$

Решение неравенства $\cos 2x < 0$ можно записать в виде

$$\frac{\pi}{2}+\pi m < 2x < \frac{3\pi}{2}+\pi m \Rightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2} < x < \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}, m \in Z.$$

Указанному неравенству из множества корней (**) удовлетворяют только $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m \in Z$.

б) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$. Это уравнение имеет две серии решений:

$$2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi l \text{ и } 2x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi l.$$

Тогда, учитывая, что

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi l\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)>0 \text{ и } \cos\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi l\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)<0,$$

получаем еще одну серию решений: $x=-\frac{\pi}{12}+\pi l, l \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{12}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi m$; $-\frac{5\pi}{12}+\pi l$; $k,l,m,n \in Z$.

Задача 54. Решите уравнение $\frac{\lg\left|x^4+2x^3+2x-1\right|}{\lg\left|x^2+x-1\right|}=2$.

Решение

Укажем область определения исходного уравнения. Она задается системой

$$\begin{cases} x^4+2x^3+2x-1 \neq 0, \\ x^2+x-1 \neq 0, \\ x^2+x-1 \neq -1, \\ x^2+x-1 \neq 1, \end{cases}$$

откуда, разложив левую часть первого неравенства системы на множители, будем иметь

$$\begin{cases}(x^2+1)(x^2+2x-1)\neq 0,\\ x^2+x-1\neq 0,\\ x^2+x-1\neq -1,\\ x^2+x-1\neq 1.\end{cases}$$

Найдя корни квадратных уравнений, входящих в систему, будем иметь: $\begin{cases}x\neq -1\pm\sqrt{2},\\ x\neq \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\\ x\neq 0, x\neq 1,\\ x\neq 1, x\neq -2.\end{cases}$

Исходное уравнение запишем в виде

$$\lg\left|x^4+2x^3+2x-1\right|=2\lg\left|x^2+x-1\right|,$$

откуда

$$\left|x^4+2x^3+2x-1\right|=\left|x^2+x-1\right|^2,$$

$$\left|x^4+2x^3+2x-1\right|=x^4+2x^3-x^2-2x+1.$$

На области определения исходного уравнения последнее уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}x^4+2x^3+2x-1=-x^4-2x^3+x^2+2x-1,\\ x^4+2x^3+2x-1=x^4+2x^3-x^2-2x+1,\end{array}\right.,$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l}2x^4+4x^3-x^2=0,\\ x^2+4x-2=0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x^2(2x^2+4x-1)=0,\\ x^2+4x-2=0.\end{array}\right.$$

Решив уравнения совокупности, будем иметь: $x_{1,2}=0$, $x_{3,4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$, $x_{5,6}=-2\pm\sqrt{6}$. С учетом области определения уравнения $x=0$ – посторонний корень.

Ответ: $\dfrac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$; $-2\pm\sqrt{6}$.

Задача 55. Решите уравнение $\log_2(17-|\sin 0{,}5\pi x|)=\sqrt{2x+15-x^2}$.

Решение

Учитывая ограниченность функции синуса $(|\sin 0{,}5\pi x|\le 1)$ имеем: $\log_2(17-|\sin 0{,}5\pi x|)\ge \log_2(17-1)=\log_2 16=4$. Итак, левая часть уравнения не меньше 4 (значение 4 достигается при $|\sin 0{,}5\pi x|=1$).

Оценим правую часть уравнения:

$$\sqrt{2x+15-x^2}=\sqrt{16-(x-1)^2}\le\sqrt{16}=4$$

(значение 4 достигается при $x = 1$).

Исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases}|\sin 0{,}5\pi x|=1,\\ x=1,\end{cases}$ откуда $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Задача 56. Решите уравнение $\log_{|\sin x|} 2\cdot\log_{\sin^2 x} 3=a$, где a – параметр.

Решение

Укажем область определения заданного уравнения $\begin{cases}|\sin x|\ne 0,\\ |\sin x|\ne 1,\end{cases}$ откуда $x\ne\frac{\pi}{2}k, k\in Z$.

Запишем исходное уравнение в виде

$$\frac{1}{\log_2|\sin x|}\cdot\frac{1}{\log_3\sin^2 x}=a. \qquad (*)$$

Воспользовавшись формулой перехода к другому основанию, запишем сомножитель $\frac{1}{\log_3\sin^2 x}$ в виде $\frac{\log_2\sin^2 x}{\log_2 3}=2\frac{\log_2|\sin x|}{\log_2 3}$.

Значит уравнение (*) будет иметь вид $\frac{\log_2 3}{2(\log_2|\sin x|)^2}=a$.

Очевидно, что при $a \le 0$ последнее уравнение, а, значит, и заданное уравнение, решений не имеет (читателю предоставляется возможно обосновать этот факт).

При $a > 0$ получаем $\left(\log_2|\sin x|\right)^2 = \dfrac{\log_2 3}{2a}$, откуда

$$\log_2|\sin x| = \sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}} \text{ или } \log_2^2|\sin x| = \frac{\log_2 3}{2a}.$$

Перейдем к равносильным уравнениям

$$|\sin x| = 2^{\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}} \text{ или } |\sin x| = -2^{\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}.$$

Первое из этих уравнений не имеет решений, так как при $a > 0$ число $2^{\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}$ больше единицы.

Из второго уравнения имеем $\sin x = -2^{\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}$, откуда

$$x = (-1)^{n+1}\arcsin 2^{\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\arcsin 2^{\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}} + \pi n, n \in Z$.

Задача 57. Решите уравнение $\left|\cos^2 0{,}5x - 0{,}6\right| = 5\cos x + 1$.

Решение

$$\left|\cos^2 0{,}5x - 0{,}6\right| = 5\cos x + 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1+\cos x}{2} - \frac{3}{5}\right| = 5\cos x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{5\cos x - 1}{10} = 5\cos x + 1, \\ \dfrac{1 - 5\cos x}{10} = 5\cos x + 1, \end{array}\right. \\ 5\cos x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{11}{45}, \\ \cos x = -\dfrac{9}{55}, \end{array}\right. \\ \cos x \ge -0{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{9}{55} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{9}{55}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pm\left(\pi - \arccos\dfrac{9}{55}\right) + 2\pi n, n \in Z$.

Задача 58. Решите уравнение $(\cos 4x + \cos 2x)^2 = 5 - |\cos 3x|$.

Решение

Используя ограниченность функций $y = \cos 4x$ $(|\cos 4x| \le 1)$, $y = \cos 2x$ $(|\cos 2x| \le 1)$, $y = \cos 3x$ $(|\cos 3x| \le 1)$, приходим к выводу о том, что для любых значений переменной x имеют место неравенства:

$$0 \le (\cos 4x + \cos 2x)^2 \le 4;$$
$$4 \le 5 - |\cos 3x| \le 5.$$

Это означает, что равенство достигается тогда и только тогда, когда левая и правая части исходного уравнения принимают одновременно значение, равное 4. То есть данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} (\cos 4x + \cos 2x)^2 = 4; \\ 5 - |\cos 3x| = 4. \end{cases}$

$$\begin{cases} (\cos 4x + \cos 2x)^2 = 4; \\ 5 - |\cos 3x| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\cos 4x + \cos 2x = 2, \\ &\cos 4x + \cos 2x = -2 \end{aligned}\right. \\ |\cos 3x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos 2x = -1, \end{cases} \end{aligned}\right. \\ 1 + \cos 6x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \cos 2x = 1, \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi k}{3}, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pi n, n \in Z$.

Задача 59. Решите уравнение

$$3\cos x|3\sin x + \cos x| = \sin x|\cos x - 3\sin x|.$$

Решение

Из уравнения $3\cos x|3\sin x + \cos x| = \sin x|\cos x - 3\sin x|$ следует, что оба числа $|3\sin x + \cos x|$ и $|\cos x - 3\sin x|$ – положительны (иначе выполнялась бы какая-либо из систем

$$\begin{cases} 3\sin x + \cos x = 0, \\ \sin x|\cos x - 3\sin x| = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} \cos x - 3\sin x = 0, \\ \sin x|3\sin x + \cos x| = 0. \end{cases}$$

каждая из которых влекла бы за собой несовместные равенства $\sin x = \cos x = 0$). Поэтому уравнение равносильно системе (в которой первое условие означает равенство модулей левой и правой частей, а второе – равенство их знаков).

$$\begin{cases} 3\cos x(3\sin x + \cos x) = \pm \sin x(\cos x - 3\sin x), \\ \sin x \cos x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 8\sin x\cos x + 3\cos^2 x + 3\sin^2 x = 0, \\ 10\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0, \end{array} \right. \\ \sin x\cos x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4\sin 2x + 3 = 0, \\ 5\sin 2x + 3\cos 2x = 0, \end{array} \right. \\ \sin 2x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x+\varphi) = 0, \ \textit{где} \ \ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}, \\ \sin 2x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \pi - \varphi + 2\pi n, n \in Z \text{ (рис. 32).}$$

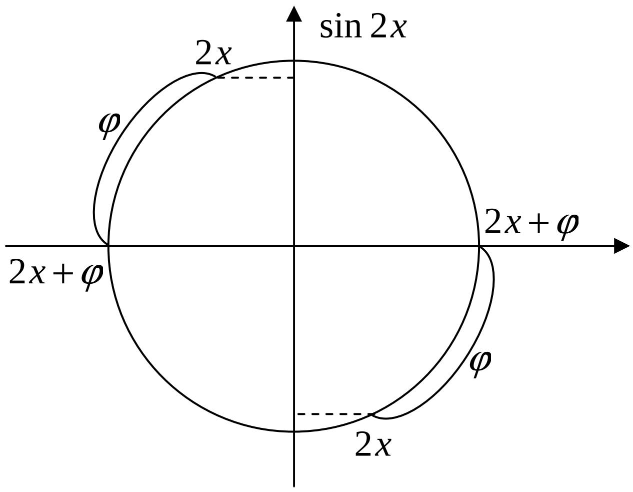


Рис. 32.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5} + \pi n, n \in Z$.

Задача 60. Решите уравнение $\cos^2(x\sin x) = 1 + \left|\log_5(x^2 + x + 1)\right|$.

Решение

Обе части заданного уравнения определены для всех действительных чисел x. Для любого x имеем

$$\cos^2(x\sin x) \leq 1, \text{ а } 1 + \left|\log_5(x^2 + x + 1)\right| \geq 1.$$

Следовательно, заданное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} \cos^2(x\sin x)=1, \\ \left|\log_5(x^2+x+1)\right|=0. \end{cases}$

Второе уравнение системы имеет решения $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Из этих чисел только число x_1 удовлетворяет первому уравнению системы. Следовательно, система, а значит, и равносильное ей заданное уравнение имеют единственное решение x_1.

Ответ: 0.

Задача 61. Решите уравнение $3^{2x} - 2\cdot 3^{x-1} + \left|3^x - \frac{1}{4}\right| = \frac{13}{12}$.

Решение

Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда заданное уравнение примет следующий вид:

$$y^2 - \frac{2y}{3} + \left|y - \frac{1}{4}\right| = \frac{13}{12} \Leftrightarrow |12y-3| = 13+8y-12y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < \frac{1}{4}, \\ 3-12y = 13+8y-12y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge \frac{1}{4}, \\ 12y-3 = 13+8y-12y^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < \frac{1}{4}, \\ 6y^2-10y-5=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge \frac{1}{4}, \\ 3y^2+y-4=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < \frac{1}{4}, \\ y = \frac{5\pm\sqrt{55}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge \frac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\frac{3}{4} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{5-\sqrt{55}}{6} \\ y=-1 \end{array}\right. \overset{(так\ как\ y>0)}{\Leftrightarrow} y=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: 0.

Задача 62. Решите уравнение

$$|x-1|\cdot|x+1|+|x-2|\cdot|x-3|-5x+7=0.$$

Решение

Учитывая свойства модуля, а именно, $|a|\cdot|b|=|ab|$, мы можем записать заданное уравнение в виде

$$|(x-1)(x+1)|+|(x-2)(x-3)|-5x+7=0.$$

Рассмотрим четыре случая:

а) $\begin{cases}(x-1)(x+1)<0,\\(x-2)(x-3)<0,\\-(x-1)(x+1)-(x-2)(x-3)-5x+7=0,\end{cases}$ откуда

$$\begin{cases}-1<x<1,\\2<x<3,\\-2x^2+2=0,\end{cases}\quad\begin{cases}-1<x<1,\\2<x<3,\\x=1, x=-1.\end{cases}$$

Система решений не имеет.

б) $\begin{cases}(x-1)(x+1)<0,\\(x-2)(x-3)\ge 0,\\-(x-1)(x+1)+(x-2)(x-3)-5x+7=0,\end{cases}$ откуда имеем

$$\begin{cases}-1<x<1,\\x\le 2, x\ge 3,\\-10x+14=0,\end{cases}\quad\begin{cases}-1<x<1,\\x\le 2, x\ge 3,\\x=\dfrac{7}{5}.\end{cases}$$

Система решений не имеет.

в) $\begin{cases}(x-1)(x+1)\ge 0,\\(x-2)(x-3)<0,\\(x-1)(x+1)-(x-2)(x-3)-5x+7=0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x\le -1, x\ge 1,\\2<x<3,\\0x=0.\end{cases}$

Решением системы будет являться промежуток (2; 3).

г) $\begin{cases}(x-1)(x+1)\ge 0,\\(x-2)(x-3)\ge 0,\\(x-1)(x+1)+(x-2)(x-3)-5x+7=0,\end{cases}$ откуда

$$\begin{cases} x \le -1, x \ge 1, \\ x \le 2, x \ge 3, \\ x^2 - 5x + 6 = 0, \end{cases} \begin{cases} x \le -1, x \ge 1, \\ x \le 2, x \ge 3, \\ x = 2, x = 3. \end{cases}$$

Система имеет решения: $x = 2$, $x = 3$.

Объединяя ответы во всех случаях, получим: $2 \le x \le 3$.

Ответ: [2; 3].

Задача 63. Решите уравнение $5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |3 - 5x|$.

Решение

Разобьем числовую прямую на промежутки точками, обращающие модмодульные выражения в нуль: $x = -1$, $x = \frac{3}{5}$, $x = 1$.

Рассмотрим заданное уравнение на каждом промежутке.

1) $\begin{cases} x \le -1, \\ 5\sqrt{1 + x^2 - 1} = 6 - 5x; \end{cases} \begin{cases} x \le -1, \\ 5\sqrt{x^2} = 6 - 5x; \end{cases} \begin{cases} x \le -1, \\ -5x = 6 - 5x; \end{cases} \begin{cases} x \le -1, \\ 0x = 6. \end{cases}$

На рассматриваемом промежутке заданное уравнение корней не имеет.

2) $\begin{cases} -1 < x \le \frac{3}{5}, \\ 5\sqrt{2 - x^2} = 6 - 5x; \end{cases} \begin{cases} -1 < x \le \frac{3}{5}, \\ 25(2 - x^2) = 36 - 60x + 25x^2; \end{cases}$

$$\begin{cases} -1 < x \le \frac{3}{5}, \\ 25x^2 - 30x - 7 = 0; \end{cases} \begin{cases} -1 < x \le \frac{3}{5}, \\ (5x + 1)(5x - 7) = 0; \end{cases} \begin{cases} -1 < x \le \frac{3}{5}, \\ x = -\frac{1}{5}, x = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Число $x = -\frac{1}{5}$ принадлежит промежутку $\left(-1; \frac{3}{5}\right]$, значит оно является корнем заданного уравнения (проверка убеждает нас в этом). Число $x = \frac{7}{5}$ указанному промежутку не принадлежит, а потому корнем не является.

3) $\begin{cases} \dfrac{3}{5} < x \le 1, \\ 5\sqrt{2-x^2} = 5x; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3}{5} < x \le 1, \\ 25(2-x^2) = 25x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3}{5} < x \le 1, \\ x^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3}{5} < x \le 1, \\ x = 1, x = -1. \end{cases}$

Промежутку $\left(\dfrac{3}{2};1\right]$ принадлежит лишь $x = 1$.

4) $\begin{cases} x > 1, \\ 5\sqrt{x^2} = 5x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 5|x| = 5x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 5x = 5x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 0x = 0. \end{cases}$

Из последней системы следует, что все значения промежутка (1; +∞) являются решениями заданного уравнения.

Ответ: $x = -\dfrac{1}{5}$, $x \ge 1$.

Задача 64. Решите уравнение $(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x+23} = 0$.

Решение

$$(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x+23} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + 23 = 0, \\ \begin{cases} (|x|-1)(|x|-6) = 0, \\ 4x + 23 \ge 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{23}{4}, \\ \begin{cases} x = \pm 1, x = \pm 6, \\ x \ge -\dfrac{23}{4}; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{23}{4}; x = \pm 1, x = 6.$$

Ответ: $-\dfrac{23}{4}$; –1; 1; 6.

Задача 65. Решите уравнение $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 2x^2 - 13$.

Решение

Как и многие другие уравнение с модулем это уравнение можно решить методом интервалов.

Мы же поступим по-другому. Заметим, что

$$2x^2 - 13 = (x^2 - 4) + (x^2 - 9).$$

Поскольку имеет место равносильность: $|a|+|b|=a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \end{cases}$

то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-4 \geq 0, \\ x^2-9 \geq 0, \end{cases}$ из которой следует, что $x \leq -3$ или $x \geq 3$.

Ответ: $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$.

Рассмотрим два уравнения (задачи 66, 67), которые не содержат модули, но решение которых основано на использовании модуля числа и на преобразованиях выражений.

Задача 66. Решите уравнение

$$\sqrt{10+x+6\sqrt{x+1}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}=7.$$

Решение

Преобразуем подкоренные выражения:

$$10+x+6\sqrt{x+1}=(1+x)+6\sqrt{1+x}+9=\left(\sqrt{1+x}+3\right)^2;$$

$$5-x+2\sqrt{4-x}=(4-x)+2\sqrt{4-x}+1=\left(\sqrt{4-x}+1\right)^2.$$

Исходное уравнение можно записать в таком виде

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{4-x}+1\right)^2}=7,$$

откуда, согласно тождеству $\sqrt{x^2}=|x|$, будем иметь

$$\left|\sqrt{x+1}+3\right|+\left|\sqrt{4-x}+1\right|=7.$$

Так как арифметический квадратный корень неотрицателен, то можем утверждать, что подмодульные выражения положительны, и мы можем записать последнее уравнение в виде

$$\sqrt{x+1}+3+\sqrt{4-x}+1=7,$$

откуда $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=3$.

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$$1+x+4-x+2\sqrt{(x+1)(4-x)}=9,$$

$$\sqrt{(x+1)(4-x)}=2,$$

$$4+3x-x^2=4,$$

$$x(3-x)=0\text{, откуда } x_1 = 0,\ x_2 = 3.$$

Проверкой убеждаемся в том, что $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 0; 3.

Задача 67. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Решение

Введем подстановку $\sqrt{2x-5}=y$, тогда $x=\dfrac{y^2+5}{2}$.

Заданное уравнение перепишем в виде

$$\sqrt{\frac{y^2+5}{2}-2+y}+\sqrt{\frac{y^2+5}{2}+2+3y}=7\sqrt{2},$$

или

$$\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2+6y+9}=14.$$

$$|y+1|+|y+3|=14.$$

Так как арифметический квадратный корень $\sqrt{2x-5}$ неотрицателен, то и $y \geq 0$, значит подмодульные выражения положительны, и тогда мы можем последнее уравнение записать в виде $y+1+y+3=14$, откуда $2y = 10$, $y = 5$.

Итак, $\sqrt{2x-5}=5$, откуда $2x - 5 = 25$, $2x = 30$, $x = 15$.

Ответ: 15.

Заметим, что мы могли бы решить последнее уравнение так же как и предыдущее, заменив подкоренные выражения полными квадратами:

$$x-2+\sqrt{2x-5}=\frac{1}{2}\left(2x-4+2\sqrt{2x-5}\right)=\frac{1}{2}\left(2x-4-1+2\sqrt{2x-5}+1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2x-5+2\sqrt{2x-5}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-5}+1\right)^2;$$

$$x+2+3\sqrt{2x-5}=\frac{1}{2}\left(2x+4+6\sqrt{2x-5}\right)=\frac{1}{2}\left(2x+4-9+6\sqrt{2x-5}+9\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2x-5+6\sqrt{2x-5}+9\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-5}+3\right)^2.$$

Исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x-5}+3\right)^2}=14.$$

Задача 68. Найдите все пары чисел (*x; y*), удовлетворяющие уравнению $\sqrt{4x^2-20x+25}+\left|\sqrt{y}-x\right|=6-\frac{9}{|2x-5|}$.

Решение

Запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{(2x-5)^2}+\frac{9}{|2x-5|}=6-\left|\sqrt{y}-x\right|,$$

откуда

$$|2x-5|+\frac{9}{|2x-5|}=6-\left|\sqrt{y}-x\right|.$$

Так как выражения $|2x-5|$ и $\frac{9}{|2x-5|}$ положительны $\left(x\neq\frac{5}{2}\right)$, то мы можем воспользоваться неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$|2x-5|+\frac{9}{|2x-5|}\geq 2\sqrt{|2x-5|\cdot\frac{9}{|2x-5|}}=6.$$

Итак, имеем $6-\left|\sqrt{y}-x\right|\leq 6$, причем равенство достигается только тогда, когда имеют место равенства: $|2x-5|=\frac{9}{|2x-5|}$ и $\sqrt{y}=x$, откуда находим решения (4; 16); (1; 1).

Ответ: (4; 16); (1; 1).

Рассмотрим два утверждения, на основе которых решаются уравнения и неравенства, в частности, содержащие модуль.

Утверждение 2. Множество значений функции $y = A\sin t + B\cos t$ есть отрезок $[-\sqrt{A^2+B^2}; \sqrt{A^2+B^2}]$, то есть

$$E(A\sin t + B\cos t) = [-\sqrt{A^2+B^2}; \sqrt{A^2+B^2}]. \qquad \textbf{(У2)}$$

Утверждение 3. Для любого t из отрезка [–1; 1] имеет место тождество

$$\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}. \qquad \textbf{(У3)}$$

Проведем доказательство утверждения 2.

Функция $y = A\sin t + B\cos t$ есть непрерывная и ограниченная функция. Следовательно, ее множество значений образует отрезок $[m; M]$, где m и M являются минимальным и максимальным значениями соответственно. Можно это обосновать и иначе. Данная функция является непрерывной и периодической с периодом $T = 2\pi$. Поэтому для определения множества значений такой функции достаточно рассмотреть ее на любом отрезке длины 2π. А множество значений непрерывной функции на отрезке есть отрезок.

Так как $y(x + \pi) = -y(x)$, то для любого y_0 из $[m; M]$ значение $-y_0$ также принадлежит отрезку $[m; M]$.

Отсюда следует, что $m = -M$, то есть

$$E(A\sin t + B\cos t) = [-M; M],$$

где $M > 0$.

Осталось найти M. Имеем:

$$y^2 = (A\sin t + B\cos t)^2 = A^2\sin^2 t + 2AB\sin t\cos t + B^2\cos^2 t.$$

Как известно, $2ab \le a^2 + b^2$. Поэтому

$$2AB\sin t\cos t = 2(A\cos t)(B\sin t) \le A^2\cos^2 t + B^2\sin^2 t.$$

Отсюда

$$y^2 \le A^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + B^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = A^2 + B^2.$$

То есть

$$-\sqrt{A^2+B^2} \le y \le \sqrt{A^2+B^2}\ .$$

Поскольку знак равенства в неравенстве $2ab \le a^2 + b^2$ достигается при $a = b$ то

$$y^2 = A^2 + B^2 \text{ при } A\cos t = B\sin t\,.$$

Очевидно, что уравнение $A\cos t = B\sin t$ имеет решение при любых A и B (πk при $A = 0$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$ при $B = 0$; $\operatorname{arctg}\frac{A}{B}+\pi k$ при $AB \ne 0$ ($k \in Z$). Поэтому (У2) истинно, что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 3 непосредственно следует из определении arcsin t и arccos t.

Задача 69. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2-|y|}\cdot\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5\pi^2}{4}.$$

Решение

Задача допускает несколько различных решений, но самое эффективное решение опирается на утверждение 2. Приведем два способа решения.

Первый способ

Если воспользоваться формулами понижения степени:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ 2\sin x\cos x=2\sin 2x,\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

то получим следующую равносильную формулировку задачи: Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2-|y|}\cdot\left(-3\sin 2x-7\cos 2x-2+3\sqrt[3]{33}\right)=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5\pi^2}{4}.\ (*)$$

Левая часть уравнения (*) есть произведение неотрицательной величины $\sqrt{2-|y|}$ на выражение $\left(-3\sin 2x-7\cos 2x-2+3\sqrt[3]{33}\right)$.

Покажем, что это выражение положительно при любых x.

В силу утверждения 2 функция $z=-3\sin 2x-7\cos 2x-2+3\sqrt[3]{33}$ имеет множеством значений отрезок

$$[-\sqrt{(-7)^2+(-3)^2}-2+3\sqrt[3]{33};\sqrt{(-7)^2+(-3)^2}-2+3\sqrt[3]{33}],$$

то есть $E(z)=[-\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33};\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33}]$.

Функция всегда положительна, когда ее минимальное значение $\left(-\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33}\right)$ больше нуля. Докажем неравенство

$$-\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33}>0.$$

Запишем неравенство в виде $3\sqrt[3]{33}>\sqrt{58}+2$. Возведем обе части неравенства в третью степень, будем иметь:

$$27\cdot 33>58\sqrt{58}+3\cdot 58\cdot 2+3\cdot 4\sqrt{58}+8,$$

откуда, $891>70\sqrt{58}+356$, $535>70\sqrt{58}$, $107>14\sqrt{58}$. Возведем обе части последнего неравенства в квадрат. Будем иметь: 11449 > 11368. Последнее числовое неравенство истинно, значит истинно и неравенство $-\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33}>0$.

Первый множитель $\sqrt{2-|y|}$ независимо от второго принимает все значения из отрезка $[0;\sqrt{2}]$, а второй множитель независимо от первого – все значения из отрезка $[-\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33};\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33}]$.

Поэтому произведение этих множителей (один неотрицательный, а другой положительный) принимает все значения из отрезка $[0;\sqrt{2}\left(\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33}\right)]$, то есть множеством значений левой части уравнения (*) является отрезок $[0;\sqrt{2}\left(\sqrt{58}-2+3\sqrt[3]{33}\right)]$.

Правая часть уравнения (*) в силу утверждения 3 есть квадратный трехчлен либо относительно arcsin *x*, либо относительно arccos *x*.

Пусть, например, u = arcos *x*, тогда $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-u$, и правая часть есть квадратичная функция

$$f(u)=\left(\frac{\pi}{2}-u\right)^2+u^2-\frac{5}{4}\pi^2.$$

Так как по определению множество значений arccos x есть отрезок $[0; \pi]$, то нам остается исследовать свойства функции $f(u) = 2u^2 - \pi u - \pi^2$ на отрезке $[0; \pi]$. Устанавливаем, что минимальное значение функции $f(u)$ достигается при $u = \frac{\pi}{4}$, а максимальное при $u = \pi$. Откуда следует, что множество значении правой части уравнения (*) есть отрезок $\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right); f(\pi) \right] = \left[-\frac{9}{8}\pi^2; 0 \right]$.

Отсюда следует, что левая часть уравнения (*) равна его правой части тогда и только тогда, когда они обе равны нулю. Поэтому уравнение (*) равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{2-|y|} \cdot \left(-3\sin 2x - 7\cos 2x - 2 + 3\sqrt[3]{33}\right) = 0, \\ 2(\arccos x)^2 - \pi \arccos x - \pi^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-|y|} = 0, \\ \arccos x = \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |y| = 2, \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: (–1; 2); (–1; –2).

Второй способ

Обозначим через z выражение, стоящее в скобках и применяя формулы понижения степени, преобразуем его к виду

$$z = 3\sqrt[3]{33} - 2 - 7\cos 2x - 3\sin 2x.$$

Приведем формулировку теоремы, которую мы будем использовать.

Теорема (*). Пусть функция $f(x) = A\cos x + B\sin x$, где $A \neq 0$ и $B \neq 0$, рассматривается на отрезке $[0; 2\pi]$. Тогда наибольшее значение функции $f(x)$ равно $\sqrt{A^2 + B^2}$ и достигается оно в точке x, для которой выполнены условия $\frac{\cos x}{A} = \frac{\sin x}{B} > 0$. Наименьшее значение функции *f(x)* равно $\left(-\sqrt{A^2+B^2}\right)$ и достигается оно в точке *x*, для которой выполнены условия $\dfrac{\cos x}{A}=\dfrac{\sin x}{B}<0$.

В силу сформулированной теоремы мы можем утверждать, что

$$\left|-7\cos 2x-3\sin 2x\right|\le\sqrt{58}$$

Отсюда следует, что выражение *z*, удовлетворяет двойному неравенству

$$3\sqrt[3]{33}-2-\sqrt{58}\le z\le 3\sqrt[3]{33}-2+\sqrt{58}.$$

Сравнивая число $3\sqrt[3]{33}-2-\sqrt{58}$ с нулем, мы получаем, что оно положительно. Отсюда следует, что вся левая часть исходного уравнения неотрицательна и обращается в нуль только при условии $|y|=2$ независимо от *x*.

Рассмотрим теперь правую часть исходного уравнения и докажем, что она неположительна. Действительно, $\left|\arcsin x\right|\le\dfrac{\pi}{2}$, откуда следует, что $\arcsin^2 x\le\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$; $\left|\arccos x\right|\le\pi$, откуда следует, что $\arccos^2 x\le\pi^2$.

А эти два последних неравенства и приводят нас к выводу о неположительности правой части исходного уравнения.

Итак, левая часть заданного уравнения ограничена числом нуль снизу, а правая часть этого же уравнения ограничена числом нуль сверху. Тогда, согласно теореме (**) (мы ее сформулируем ниже), имеем следующую систему

$$\begin{cases}\sqrt{2-|y|}\cdot\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=0,\\ \arcsin^2 x+\arccos^2 x-\dfrac{5}{4}\pi^2=0.\end{cases}$$

Выше было отмечено, что левая часть исходного уравнения равна нулю, только при условии $|y|=2$, то есть $y=2$ или $y=-2$ независимо от выбора x. А правая часть обращается в нуль только при выполнении условий $\arcsin^2 x = \frac{\pi^2}{4}$ и $\arccos^2 x = \pi^2$, что возможно только при $x = -1$ независимо от выбора y. В результате получаем ответ.

Ответ: (–1; 2); (–1; –2).

Теорема (**). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, определенные на множестве D. Пусть $f(x)$ ограничена на этом множестве числом A сверху, а $g(x)$ ограничена на этом множестве тем же числом A снизу. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Приведем утверждение, которое можно использовать для решения уравнений вида $f(f(x)) = x$, в том числе и содержащие модуль.

Утверждение 4. Любой корень уравнения $f(x) = x$ является корнем уравнения $f(f(x)) = x$. **(У4)**

В самом деле, пусть число x_0 является корнем уравнения $f(x) = x$. Тогда справедливо числовое равенство $f(x_0) = x_0$. Используя это равенство два раза, получаем, что $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, то есть $f(f(x_0)) = x_0$. А это означает, что число x_0 является корнем уравнения $f(f(x)) = x$.

Рассмотрим пример (задача 70).

Задача 70. Решите уравнение $\left(x^2 - 2|x| + 3\right)^2 - 2\left|x^2 - 2|x| + 3\right| + 3 = x$.

Решение

Заданное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, причем $f(x) = \left|x^2 - 2|x| + 3\right|$. Эта функция непрерывна на множестве действительных чисел. Уравнение $x^2 - 2|x| + 3 = x$ не имеет действительных корней (читателю предоставляется возможность самостоятельно обосновать этот факт).

Следовательно, по утверждению исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Заметим, что и здесь, и в других местах мы ведем разговор о действительных корнях.

Для решения уравнений вида $f(g(x)) = f(h(x))$ можно воспользоваться следующими утверждениями.

Утверждение 5. Корни уравнения $g(x) = h(x)$, содержащиеся в области определения уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$, являются корнями последнего. **(У5)**

Утверждение 6. Если функция *f(x)* – монотонная функция, то уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$ и $g(x) = h(x)$ равносильны на области определения первого уравнения. **(У6)**

Утверждение 7. Если функция *f(x)* четная и строго монотонная при $x > 0$, то на области определения уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$, последнее равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} g(x) = h(x), \\ g(x) = -h(x). \end{array}\right.$ **(У7)**

Утверждение 8. Если функция *f(x)* нечетная, то решение уравнения вида $f(g(x)) + f(h(x)) = 0$ сводится к решению уравнения $f(g(x)) = f(-h(x))$. **(У8)**

Рассмотрим примеры (задачи 71-73).

Задача 71. Решите уравнение

$$\left(x^2 + 2|x+5|\right)^2 - 4x^2 - 6|x+5| + 3|x| = 0.$$

Решение

Перепишем заданное уравнение в таком виде

$$\left(x^2 + 2|x+5|\right)^2 - 3\left(x^2 + 2|x+5|\right) = x^2 - 3|x|.$$

Это уравнение имеет вид $f(g(x)) = f(h(x))$, причем $f(t) = t^2 - 3t$, $g(x) = x^2 + 2|x+5|$, $h(x) = |x|$.

Так как

$$f(g(x)) - f(h(x)) = g^2(x) - h^2(x) - 3(g(x) - h(x)) =$$
$$= (g(x) - h(x))(g(x) + h(x) + 3),$$

то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{aligned} &x^2 + 2|x+5| = |x|, \\ &x^2 + 2|x+5| = 3 - |x|. \end{aligned}\right.$$

Эти уравнения не имею корней. Действительно, если $|x| \le 1$, то $|x+5| \ge 4$; если $|x| > 1$, то $x^2 \ge |x|$, поэтому $x^2 + 2|x+5| > |x|$. Следовательно первое уравнение совокупности не имеет корней. Если $|x| \le 3$, то $x^2 + 2|x+5| \ge 4$ и $3 - |x| \le 3$. Если же $|x| > 3$, то $x^2 + 2|x+5| \ge 0$, $3 - |x| < 0$. Поэтому второе уравнение совокупности корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Задача 72. Решите уравнение $\sin^2 x - 2|\sin x| = \cos^2 2x - 2|\cos 2x|$.

Решение

Заданное уравнение имеет вид $f(g(x)) = f(h(x))$, причем $f(t) = t^2 - 2|t|$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos 2x$.

Ясно, что функция $f(t) = t^2 - 2|t|$ четная и $|g(x)| \le 1$, $|h(x)| \le 1$ при всех $x \in R$.

Легко заметить, что функция *f(t)* строго возрастающая на отрезке [–1; 0] и строго убывающая на отрезке [0; 1]. Поэтому заданное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{aligned} &\sin x = \cos 2x, \\ &\sin x = -\cos 2x. \end{aligned}\right.$

Нетрудно видеть, что если x – корень первого уравнения совокупности, то ($-x$) – корень второго уравнения. Верно и обратное. Поэтому, решив первое уравнение совокупности, получим, что решениями исходного уравнения будут числа $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

Задача 73. Решите уравнение

$$x\left(|x|+\sqrt{1+x^2}\right)+(3x-1)\left(|3x-1|+\sqrt{9x^2-6x+2}\right)=0.$$

Решение

Область определения заданного уравнения – все действительные числа.

Исходное уравнение запишем в виде

$$x\left(|x|+\sqrt{1+x^2}\right)+(3x-1)\left(|3x-1|+\sqrt{(3x-1)^2+1}\right)=0,$$

тогда $f(t)=t\left(|t|+\sqrt{1+t^2}\right)$, $g(x)=x$, $h(x)=3x-1$.

Очевидно, что функция *f(t)* нечетная и строго возрастающая (читателю следует обосновать этот факт). Тогда исходное уравнение, имеющего вид

$$f(g(x))+f(h(x))=0,\ f(g(x))=-f(h(x)),\ f(g(x))=f(-h(x)),$$

равносильно уравнению $x=-(3x-1)$, откуда $x=\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Для решения уравнений вида $|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x)$ можно использовать следующее утверждение.

Утверждение 9. Уравнение $|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$ **(У9)**

Решим уравнение с использованием этого утверждения (задача 74).

Задача 74. Решите уравнение

$$\left|5^x-5\right|+\left|x^2-5x+6\right|=5^x+x^2-5x+1.$$

Решение

Рассмотрим функции $f(x)=5^x-5$ и $g(x)=x^2-5x+6$, тогда $f(x)+g(x)=5^x+x^2-5x+1$. Следовательно, заданное уравнение, согласно утверждения, будет равносильно системе $\begin{cases}5^x-5\ge 0,\\ x^2-5x+6\ge 0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x\ge 1,\\ x\le 2, x\ge 3.\end{cases}$ Решениями системы будет объединение промежутков $[1;2]\cup[3;+\infty)$.

Следовательно, и равносильно системе заданное уравнение имеет те же решения.

Ответ: $[1;2]\cup[3;+\infty)$.

Задача 75. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{2\left|\cos x\right|}{\cos 3x}=-1.$$

Решение

Пусть $t=\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

а) Если cos x > 0, то $t+\dfrac{2}{t}=-1$, $t^2+t+2=0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

б) Если cos x < 0, то $t-\dfrac{2}{t}=-1$, $t^2+t-2=0$, откуда $t_1=-2$, $t_2=1$.

Пусть $t=-2$, тогда

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}=-2,\ \frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\cos x}=-2.$$

Так как cos $x\ne 0$, то

$$4\cos^2 x-3=-2,\ \cos^2 x=\frac{1}{4},\ \cos x=-\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

Пусть t = 1, тогда $4\cos^2 x - 3 = 1$, $\cos^2 x = 1$, откуда cos x = –1, так как cos x < 0. Уравнение cos x = –1 имеет корни $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n, n \in Z$.

Задача 76. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x \cos 5x + |\sin 5x \cos 3x|}{\sin 2x} = 2\cos 2x.$$

Решение

Обозначим *f(x)* = sin x cos 3x и рассмотрим два возможных случая: *f(x)* ≥ 0, *f(x)* < 0.

1) Пусть *f(x)* ≥ 0;

$$f(x) = \sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) \geq 0. \qquad (1)$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$\frac{\sin 8x}{\sin 2x} = 2\cos 2x. \qquad (2)$$

Так как sin 2x ≠ 0, то уравнение (2) равносильно уравнению

2cos 2x cos 4x = cos 2x,

откуда следует, что либо cos 2x = 0, либо $\cos 4x = \frac{1}{2}$.

Если cos 2x = 0, то sin 8x = 0, |sin 2x| = 1 и из условия (1) следует, что

$$\sin 2x = 1, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Если $\cos 4x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2}$, то

$$\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 2x = \pm\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Чтобы провести отбор корней уравнения (3) с учетом условия (1), запишем *f(x)* в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x(4\cos 2x \cos 4x + 1). \qquad (4)$$

Так как $\cos 4x = \frac{1}{2}$, то $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x(2\cos 2x + 1)$.

Отсюда и из уравнения (3) следует, что *f(x)* > 0 тогда и только тогда, когда sin 2*x* cos 2*x* > 0, так как $|2\cos 2x| = \sqrt{3} > 1$. Следовательно, либо $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$, либо $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $2x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

2) Пусть *f(x)* < 0, тогда исходное уравнение примет вид $-\frac{\sin 2x}{\sin 2x} = 2\cos 2x$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Тогда $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = -\frac{1}{2}$ и из (4) следует, что $f(x) = \sin 2x$.

Решив уравнение (5) при условии $f(x) = \sin 2x < 0$, получим $2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Задача 77. Решите уравнение $\left|\left|\sin x - \frac{1}{4}\right| - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{3}\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)$.

Решение

Рассмотрим следующие случаи.

1) Если $\left|\sin x - \frac{1}{4}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \sin x \le \frac{3}{4}$, то $\left|\sin x - \frac{1}{4}\right| = \frac{5}{12} - \frac{1}{3}\sin x$.

а) $\begin{cases} -\frac{1}{4} \le \sin x \le \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} - \sin x = \frac{5}{12} - \frac{1}{3}\sin x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \le \sin x \le \frac{1}{4}, \\ \sin x = -\frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z.$$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{4} \le \sin x \le \dfrac{3}{4}, \\ \sin x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{3}\sin x; \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z .$$

2) Если $\left|\sin x - \dfrac{1}{4}\right| > \dfrac{1}{2}$, то есть $\sin x < -\dfrac{1}{4}$ или $\sin x > \dfrac{3}{4}$, то

$$\left|\sin x - \frac{1}{4}\right| = \frac{7}{12} + \frac{1}{3}\sin x .$$

а) $\begin{cases} \sin x < -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{4} - \sin x = \dfrac{7}{12} + \dfrac{1}{3}\sin x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < -\dfrac{1}{4}, \\ \sin x = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x > \dfrac{3}{4}, \\ \sin x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12} + \dfrac{1}{3}\sin x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > \dfrac{3}{4}, \\ \sin x = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

В случаях 2, а) и 2, б) решений нет.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2} + \pi n, n \in Z$; $(-1)^{k+1} \arcsin\dfrac{1}{4} + \pi k, k \in Z$.

Задача 78. Решите уравнение $\sin 2x = 2\sin^3|x| + \sin 2x \cos x$.

Решение

1) Пусть $x \ge 0$, тогда уравнение примет вид

$$\sin 2x = 2\sin^3 x + \sin 2x \cos x \qquad (1)$$

или

$$2\sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x\right) = 0,\ \sin x(1 - \cos x) = 0. \qquad (2)$$

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in Z$, $n \ge 0$.

Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$, $n \ge 0$.

Итак, при $x \ge 0$ уравнение имеет корни

$$x = \pi n,\ n \ge 0,\ n \in Z. \qquad (3)$$

2) Пусть $x < 0$, тогда

$$2\sin x\,(\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x) = 0,$$

$$\sin x\,(\cos 2x - \cos x) = 0,$$

$$\sin x\,(2\cos^2 x - \cos x - 1) = 0,$$

$$\sin x\,(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0.$$

Если sinx = 0, то

$$x = \pi n,\ n \in Z,\ n < 0. \tag{4}$$

Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$, $n \in Z$, $n < 0$. Эти корни входят в серию (4).

Если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то условию $x < 0$ удовлетворяют следующие две серии корней

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, n \le -1, \tag{5}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, n \le 0, \tag{6}$$

Так как серии корней (3) и (4) можно объединить в одну

$$x = \pi n,\ n \in Z, \tag{7}$$

то все решения исходного уравнения определяются формулами (5)-(7).

Ответ: $x = \pi n,\ n \in Z$;

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, n \le -1;$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, n \le 0.$$

Задача 79. Решите уравнение $\frac{\cos 9x - 2\cos 6x + 1}{\cos 3x - 1} = |\cos 3x|$.

Решение

Пусть $t = \cos 3x$, тогда $\cos 9x = 4t^3 - 3t$, $\cos 6x = 2t^2 - 1$ и уравнение примет вид

$$\frac{4t^3-4t^2-3t+3}{t-1}=|t|.$$

Так как $4t^3-4t^2-3t+3=(t-1)\left(4t^2-3\right)$ и $t \neq 1$, исходное уравнение равносильно уравнению

$$4t^2-3=|t|, \text{ где } t = \cos 3x \neq 1.$$

Если $t \geq 0$, то $4t^2-t-3=4(t-1)\left(t+\frac{3}{4}\right)=0$, откуда $t=-\frac{3}{4}<0$. В этом случае исходное уравнение не имеет корней.

Если $t < 0$, то $4t^2+t-3=0$, $t_1 = -1 < 0$, $t_2=\frac{3}{4}>0$. Итак, $\cos 3x = -1$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$.

Задача 80. Решите уравнение $2\cos^2 x=|\cos x|$.

Решение

Вместо рассмотрения различных случаев при "раскрытии" модуля, заменим $\cos^2 x$ на $|\cos x|^2$ и решим уравнение $2|\cos x|^2 = |\cos x|$. $|\cos x|(2|\cos x| - 1) = 0$, $|\cos x| = 0$ или $|\cos x| = 0{,}5$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ или $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ или $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n \in Z$. Объединяя последние две серии, получим $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n \in Z$.

Задача 81. Решите уравнение

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x.$$

Решение

Первый способ

Перепишем заданное уравнение в виде

$$|1-2\sin x+\cos x|-(1-2\sin x+\cos x)=\cos 2x-2-\cos x.$$

Применяя формулу косинуса двойного угла, перепишем последнее уравнение в виде

$$|1-2\sin x+\cos x|-(1-2\sin x+\cos x)=-2\left(\frac{3}{2}-\cos\right)(1+\cos x). \quad (*)$$

Так как для каждого $x\in R$ имеем

$$|1-2\sin x+\cos x|-(1-2\sin x+\cos x)\ge 0 \text{ и } -2\left(\frac{3}{2}-\cos\right)(1+\cos x)\le 0,$$

то уравнение (*) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}|1-2\sin x+\cos x|-(1-2\sin x+\cos x)=0,\\ \left(\frac{2}{3}-\cos x\right)(1+\cos x)=0.\end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет единственную серию решений $x=\pi+2\pi k, k\in Z$. Каждое из этих чисел удовлетворяет первому уравнению системы. Следовательно, эта система, а значит, и равносильное ей заданное уравнение, имеют единственную серию решений.

Ответ: $x=\pi+2\pi k, k\in Z$.

Второй способ

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow|1-2\sin x+\cos x|=-2\sin^2 x-2\sin x.$$

Из последнего уравнения имеем

$$-2\sin x(\sin x+1)\ge 0\Rightarrow -1\le\sin x\le 0\Rightarrow 1-2\sin x+\cos x\ge 0,$$

поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases}1-2\sin x+\cos x=-2\sin^2 x-2\sin x,\\ 1-2\sin x+\cos x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+\cos x)+2\sin^2 x=0,\\ 1-2\sin x+\cos x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+\cos x=0,\\ \sin^2 x=0\end{cases}\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x=\pi+2\pi n, n\in Z$.

Задача 82. Решите уравнение $\sin 3x + \cos 2x = \cos 4x - 3|\sin x|$.

Решение

Обозначим $\sin x = t$, тогда

$$\sin 3x = 3t - 4t^3,\ \cos 2x - \cos 4x = 2\sin 3x \sin x = 2t\left(3t - 4t^3\right).$$

Исходное уравнение примет вид

$$8t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 3\left(t + |t|\right) = 0. \qquad (1)$$

а) Пусть $t = \sin x \le 0$, тогда уравнение (1) равносильно уравнению

$$t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0.$$

Если $t = 0$, то есть $\sin x = 0$, то $x = \pi n,\ n \in Z$. Эти значения x являются корнями исходного уравнения.

Решив уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$, найдем его корни

$$t_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4},\ t_2 = \frac{\sqrt{13}-1}{4},$$

где $t_1 < -1$, $t_2 > 0$. В этом случае исходное уравнение не имеет корней.

б) Пусть $t > 0$, тогда уравнение (1) равносильно каждому из уравнений

$$4t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 3t = 0,$$

$$4t^2(t-1) + 6t(t-1) + 3(t-1) = 0,$$

$$(t-1)\left(4t^2 + 6t + 3\right) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет единственный действительный корень $t = 1$. Если $t = 1$, то есть $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Задача 83. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 4|\sin x|$.

Решение

Допустимые значения x определяются условием

$$\cos 3x \ne 0, \qquad (1)$$

так как все корни уравнения $\cos x = 0$ являются корнями уравнения $\cos 3x = 0$.

Функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} 3x$ и $|\sin x|$ – периодические с периодом π и поэтому достаточно найти решения исходного уравнения на промежутке $[0; \pi)$.

Если $0 \le x < \pi$ и выполняется условие (1), то исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 4\sin x, \quad \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} = 4\sin x,$$

$$\frac{4\sin x \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 3x} = 4\sin x, \quad \sin x(\cos 2x - \cos 3x) = 0,$$

$$\sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2} = 0. \qquad (2)$$

Все корни уравнения $\sin\frac{x}{2} = 0$ удовлетворяют уравнению $\sin x = 0$, а решения уравнения (2) задаются формулами

$$x = \pi k, \quad x = \frac{2\pi k}{5}, k \in Z. \qquad (3)$$

Из множества чисел (3) промежутку $[0; \pi)$ принадлежат числа 0, $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{4\pi}{5}$. Поэтому множество решений исходного уравнения задается формулами

$$x = \pi n, \quad x = \frac{2\pi}{5} + \pi n, \quad x = \frac{4\pi}{5} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: πn; $\frac{2\pi}{5} + \pi n$; $\frac{4\pi}{5} + \pi n, n \in Z$.

Задача 84. Решите уравнение $\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2|\cos x| = 0$.

Решение

$$\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2|\cos x| = 0,$$

$$\begin{cases}\log_2\left(3|\sin x|-|\cos x|\right)\cdot|\cos x|=0,\\ |\cos x|>0;\end{cases}\quad \begin{cases}3|\sin x|\cdot|\cos x|-|\cos x|^2=1,\\ |\cos x|\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3|\sin x|\cdot|\cos x|-|\cos x|^2-|\cos x|^2-|\sin x|^2=0,\\ |\cos x|\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}|\sin x|^2-2|\cos x|^2-3|\sin x|\cdot|\cos x|=0,\\ \cos x\neq 0,\end{cases}$$ откуда $|\operatorname{tg} x|^2-3|\operatorname{tg} x|+2=0$,

решая его как квадратное относительно $|\operatorname{tg} x|$, будем иметь

$$\left[\begin{array}{l}|\operatorname{tg} x|=1,\\ |\operatorname{tg} x|=2;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\\ x=\pm\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\\ x=\pm\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$

Задача 85. Решите уравнение $\log_{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}\dfrac{5x+1}{x-2}+\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|=\dfrac{3}{2}$.

Решение

Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, получим

$$\frac{1}{2}\log_{\left|\frac{x+1}{x-2}\right|}\frac{5x+1}{x-2}+\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|=\frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|}+\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|=\frac{3}{2}.$$

Введем обозначение $t=\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$. Уравнение примет вид, $\dfrac{1}{2t}+t=\dfrac{3}{2}$, откуда $4t^2-6t+2=0$, $2t^2-3t+1=0$, $t_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{3\pm1}{4}$; $t_1=1$, $t_2=\dfrac{1}{2}$.

Решая уравнения $\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|=1$ и $\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|=\frac{1}{2}$ и, учитывая область определения, мы окончательно получим $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=3$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; 3.

Задача 86. Решите уравнение $\left|\log_5 3\cdot\log_3 x^4-5\log_x x^2\right|=2\log_x 25$.

Решение

Найдем область определения уравнения $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Преобразуем левую часть заданного уравнения

$$\left|\log_5 3\cdot\log_3 x^4-5\log_x x^2\right|=\left|\frac{4\log_3 x}{\log_3 5}-5\cdot 2\right|=2\cdot\left|2\log_5 x-5\right|.$$

Тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$$\left|2\log_5 x-5\right|=2\log_x 5,\ \left|2\log_5 x-5\right|=\frac{2}{\log_5 x}.$$

Обозначив $\log_5 x$ через t и подставляя в последнее уравнение, получаем $\left|2t-5\right|=\frac{2}{t}$.

Теперь рассмотрим два случая:

1) $t\geq\frac{5}{2}$. Тогда $2t-5=\frac{2}{t}$ или $2t^2-5t-2=0$, то есть $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$.

Условию $t\geq\frac{5}{2}$ удовлетворяет только значение $t=\frac{5+\sqrt{41}}{4}$. Отсюда $\frac{5+\sqrt{41}}{4}=\log_5 x$, то есть $x=5^{\frac{5+\sqrt{41}}{4}}$.

2) $t<\frac{5}{2}$. Тогда $5-2t=\frac{2}{t}$ или $2t^2-5t+2=0$, то есть $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$.

Отсюда $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=25$.

Ответ: $\sqrt{5}$; 25; $5^{\frac{5+\sqrt{41}}{4}}$.

Задача 87. Решите уравнение $\sin x + |\cos x| + \sin 4x = \cos 2x$.

Решение

1) Пусть

$$\cos x \geq 0. \qquad (1)$$

Тогда уравнение можно записать в виде

$$\sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)(2\sin 2x - 1) = 0, \qquad (2)$$

так как

$$\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x),$$

$$\sin 4x = 2\cos 2x \sin 2x.$$

Из уравнения (2) следует, что либо $\cos x + \sin x = 0$ и тогда

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \qquad (3)$$

либо

$$1 + (\cos x - \sin x)(2\sin 2x - 1) = 0. \qquad (4)$$

Условию (1) удовлетворяют значения x, определяемые формулой (3) только при четных n, то есть значения $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

Обратимся к уравнению (4). Полагая $\cos x - \sin x = t$ и учитывая, что $\sin 2x = 1 - t^2$, из уравнения (4) получаем

$$2t^3 - t - 1 = 0, (t - 1)(2t^2 + 2t + 1) = 0,$$

откуда $t = 1$. Уравнение $2t^2 + 2t + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Итак, $t = 1$, то есть

$$\cos x - \sin x = 1, \ \sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Если $\sin\frac{x}{2} = 0$, то $x = 2\pi n$, $n \in Z$; эти значения x удовлетворяют условию (1) и являются корнями исходного уравнения.

Если $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ – корни исходного уравнения.

2) Пусть

$$\cos x < 0. \tag{5}$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$(\sin x - \cos x)(1 + (1 - 2\sin 2x)(\sin x + \cos x)) = 0,$$

откуда следует, что либо $\sin x - \cos x = 0$ и тогда

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \tag{6}$$

либо

$$1 + (1 - 2\sin 2x)(\cos x + \sin x) = 0. \tag{7}$$

Условию (5) удовлетворяют значения x, определяемые формулой (6) только при $k = 2n + 1$, то есть значения $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

Заменой $t = \cos x + \sin x$ преобразуем уравнение (7) к виду

$$2t^3 - 3t - 1 = 0, (t + 1)(2t^2 - 2t - 1) = 0,$$

откуда либо $t = -1$ и тогда $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ – корни исходного уравнения, либо $t = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, то есть

$$\sin x + \cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Заметим, что $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

Поэтому из (8) следует, что

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z. \tag{9}$$

Условию (5) удовлетворяют значения x, определяемые формулой (9) только при $k = 2n + 1$, то есть значения $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; πn; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Задача 88. Решите уравнение $\frac{2\sin 3x}{\sin x} = \frac{|\cos 6x|}{\cos 2x}$.

Решение

Воспользуемся формулами

$$\sin 3x = \sin x\,(3 - 4\sin^2 x) = \sin x\,(2\cos 2x + 1),$$

$$\cos 6x = \cos 2x\,(4\cos^2 2x - 3), \qquad (1)$$

и рассмотрим два возможных случая: $\cos 6x > 0$, $\cos 6x < 0$, учитывая при этом, что

$$\cos 6x \neq 0,\ \sin x \neq 0, \qquad (2)$$

а) В первом случае нужно решить уравнение

$$2(2\cos 2x + 1) = 4\cos^2 2x - 3 \qquad (3)$$

при условии

$$\cos 6x > 0. \qquad (4)$$

Положим $\cos 2x = t$, тогда уравнение (3) примет вид $4t^2 - 4t - 5=0$. Это уравнение имеет корни

$$t_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{2} \text{ и } t_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{2} > 1.$$

Итак, $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{6}}{2} < 0$, откуда

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{6}}{2} + \pi n, n \in Z. \qquad (5)$$

Из равенства (1) следует, что

$$\cos 6x = t_1(4t_1^2 - 3),$$

где

$$4t_1^2 - 3 = \left(1-\sqrt{6}\right)^2 - 3 = 4 - 2\sqrt{6} < 0.$$

Поэтому $\cos 6x > 0$, если $\cos 2x = t_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{2}$, где $t_1 < 0$. Итак, условие (4) выполняется и значения x, определяемые формулой (5), являются корнями исходного уравнения.

б) Во втором случае ($\cos 6x < 0$) нужно решить уравнение

$$4t^2 + 4t - 1 = 0,\ t = \cos 2x.$$

Это уравнение имеет корни

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0 \text{ и } t_2 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2} < -1.$$

Проверим выполнение условия

$$\cos 6x < 0,$$

используя формулу (1). Получим

$$\cos 6x = t_1(4t_1^2 - 3),$$

где

$$4t_1^2 - 3 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 - 3 = -2\sqrt{2} < 0.$$

Так как $t_1 > 0$, то $\cos 6x < 0$ и поэтому корни уравнения $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, то есть числа

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi n, n \in Z$$

являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{6}}{2} + \pi n$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi n, n \in Z$.

Задача 89. Решите уравнение $|\cos x| = \cos x - 2\sin x$.

Решение

Заданное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \cos x = \cos x - \sin x, \\ \cos x \ge 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\cos x = \cos x - \sin x, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x \ge 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Из этих систем имеем:

$$x = 2\pi k, k \in Z \text{ или } x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

Ответ: $2\pi k, k \in Z$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

Задача 90. Решите уравнение $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$.

Решение

$$4|\cos x| + 3 = 4 - 4\cos^2 x,$$

$$4|\cos x| + 4\cos^2 x - 1 = 0.$$

Обозначив $|\cos x|$ через y, будем иметь $4y^2 + 4y - 1 = 0$, откуда $y_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ и $y_2 = \frac{-\sqrt{2} - 1}{2}$.

Заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$|\cos x| = \frac{-\sqrt{2} - 1}{2}; \ |\cos x| = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Первое уравнение решений не имеет, ибо $\frac{-\sqrt{2} - 1}{2} < 0$. Решениями второго уравнении являются значения

$$x = \pm \arccos \frac{-\sqrt{2} - 1}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{-\sqrt{2} - 1}{2} + \pi k, k \in Z$.

Задача 91. Решите уравнение $\left| \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение

Заданное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ -\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x - \cos x = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Уравнение sin x – cos x = 0 решим, разделив его обе части на cos $x \neq 0$. Будем иметь tg x = 1, откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$. Но условию $\sin x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяют лишь значения $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$. Вторая система решений не имеет (объясните почему).

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$.

Задача 92. Решите уравнение $\left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right| - \left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right| = 1$.

Решение

Сначала будем искать решения уравнения на промежутке длиной в 2π. На окружности единичного радиуса, как легко видеть, необходимо отметить числа $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ – это точки, в которых подмодульное выражение обращается в нуль.

Решение исходного уравнения сводится к решению совокупности четырех систем

а) $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ -\sin x + \dfrac{1}{2} - \cos x + \dfrac{1}{2} = 1; \end{cases}$ откуда $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

б) $\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x - \dfrac{1}{2} - \cos x + \dfrac{1}{2} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ x = \pi, x = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ система не имеет решений.

в) $\begin{cases} \dfrac{\pi}{3} < x \le \dfrac{5\pi}{6}, \\ \sin x - \dfrac{1}{2} + \cos x - \dfrac{1}{2} = 1; \end{cases}$ система не имеет решений.

г) $\begin{cases} \dfrac{5\pi}{6} < x \le \dfrac{5\pi}{3}, \\ -\sin x + \dfrac{1}{2} + \cos x - \dfrac{1}{2} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{5\pi}{6} < x \le \dfrac{5\pi}{3}, \\ \cos x - \sin x = 1; \end{cases}$ откуда $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$; $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Задача 93. Решите уравнение $\dfrac{\cos x}{|\cos x|} = \sin x + \cos x$.

Решение

Область определения уравнения состоит из таких значений *x*, при которых cos $x \neq 0$. Будем раскрывать модуль, рассмотрев два случая cos $x > 0$ и cos $x < 0$.

а) $\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x + \cos x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\sin x + \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x\right) = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x > 0, \\ x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$

Если $n = 0$, то $x = 0$. Если $n = 1$, то $x = \dfrac{\pi}{2}$. При других значениях n новых точек на единичной окружности уже не будет. Следовательно, решения задаются сериями $x = 2\pi n, n \in Z$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Очевидно, что косинус положителен для первого семейства, а для второго он равен нулю. Итак, решением системы имеем $x = 2\pi n, n \in Z$.

б) $\begin{cases}\cos x < 0,\\ \sin x + \cos x = -1;\end{cases}$ $\begin{cases}\cos x < 0,\\ x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.\end{cases}$

Уравнению этой системы удовлетворяют два семейства решений $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ и $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Всей же системе удовлетворяет семейство $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Объединяя решения $x = 2\pi n, n \in Z$ и $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ получим окончательный ответ.

Ответ: $x = \pi n, n \in Z$.

Задача 94. Решите уравнение $5^{\left|1-4x^2\right|} = \sin \pi x$.

Решение

Так как $\left|1-4x^2\right| \geq 0$; $5^{\left|1-4x^2\right|} \geq 1$, а $|\sin \pi x| \leq 1$, то заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases}5^{\left|1-4x^2\right|} = 1,\\ \sin \pi x = 1.\end{cases}$ Решением первого уравнения являются числа $x = \pm\dfrac{1}{2}$, при этом второму уравнению системы удовлетворяет только $x = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}$.

Задача 95. Решите уравнение $-2\sqrt{3}\pi \sin x = |x+\pi| + |x - 2\pi|$.

Решение

Поочередно раскроем модули на трех промежутках: $x < -\pi$; $-\pi \leq x < 2\pi$; $x \geq 2\pi$.

а) Пусть $x < -\pi$. Тогда на этом множестве заданное уравнение равносильно уравнению

$$-2\sqrt{3}\pi \sin x = -2x + \pi. \qquad (*)$$

На промежутке (–∞; –2π] это уравнение решений не имеет, так как $-2\sqrt{3}\pi\sin x \le 2\sqrt{3}\pi$, $-2x+\pi \ge 5\pi$, а $2\sqrt{3}\pi < 5\pi$. На промежутке (–2π; –π) уравнение (*) также корней не имеет, так как $-2\sqrt{3}\pi\sin x < 0$, а $-2x+\pi > 3\pi$.

б) Пусть $-\pi \le x < 2\pi$. Тогда на этом множестве заданное уравнение равносильно уравнению $-2\sqrt{3}\pi\sin x = 3\pi$, откуда $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

На промежутке [–π; 2π) корнями последнего уравнения являются числа $x=-\dfrac{2\pi}{3}$, $x=-\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{4\pi}{3}$, $x=\dfrac{5\pi}{3}$.

в) Пусть $x \ge 2\pi$. Тогда на этом множестве исходное уравнение равносильно уравнению

$$-2\sqrt{3}\pi\sin x = 2x-\pi. \qquad (**)$$

Так как на промежутке [2π; 3π] $-2\sqrt{3}\pi\sin x \le 0$, а $2x-\pi > 3\pi$, то на этом множестве уравнение (**) решений не имеет. На промежутке (3π; +∞) уравнение (**) также не имеет решений, так как $-2\sqrt{3}\pi\sin x \le 2\sqrt{3}\pi$, $2x-\pi > 5\pi$, а $2\sqrt{3}\pi < 5\pi$.

Ответ: $x=-\dfrac{2\pi}{3}$, $x=-\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{4\pi}{3}$, $x=\dfrac{5\pi}{3}$.

Задача 96. Решите уравнение $\log_3\left(4-\left|\cos\dfrac{4x}{3}\right|\right)=\sin x$.

Решение

Так как $\left|\cos\dfrac{4x}{3}\right| \le 1$, то $4-\left|\cos\dfrac{4x}{3}\right| \ge 3$, и, следовательно, $\log_3\left(4-\left|\cos\dfrac{4x}{3}\right|\right) \ge \log_3 3 = 1$. По свойству функции синуса имеем $\sin x \le 1$.

Значит корнем заданного уравнения может быть только такое число, при котором левая и правая части уравнения одновременно равны единице. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \left|\cos\dfrac{4x}{3}\right| = 1. \end{cases}$

Из первого уравнения системы получаем $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. Подставив эти значения во второе уравнение системы, получим $\cos\dfrac{2\pi + 8\pi k}{2} = \pm 1$ и нам осталось лишь найти такие целочисленные значения параметра *k*, при которых это верно и это можно сделать перебором.

Если *k* = 1, то $\cos\dfrac{10\pi}{3} = \pm 1$; если *k* = 2, то $\cos\dfrac{18\pi}{3} = 1$; если *k* = 3, то $\cos\dfrac{26\pi}{3} = \pm 1$ и т.д. Перебор показывает, что подходят только такие значения *k* = 2, 5, 8, 11, ..., –1, –4, –7, ... их можно объединить формулой *k* = 3*n* – 1.

Таким образом, решения системы, а значит и заданного уравнения, имеют вид $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi(3n-1) = -\dfrac{3\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = -\dfrac{3\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z$.

Задача 97. Найдите произведение корней уравнения

$$\log_2(x+1)^4 = 6 + \log_2|x+1|.$$

Решение

Так как $\log_2(x+1)^4 = 4\log_2|x+1|$, то получаем

$$4\log_2|x+1| = 6 + \log_2|x+1| \Leftrightarrow 3\log_2|x+1| = 6 \Leftrightarrow \log_2|x+1| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x+1| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 4, \\ x+1 = -4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -5. \end{array}\right.$$

Оба числа – корни, их произведение равно –15.

Замечание. Равенство $\log_2(b^{2n}) = 2n\log_2 b$ есть тождество только при $b > 0$. В общем случае надо использовать формулу $\log_2(b^{2n}) = 2n\log_2|b|$.

Ответ: –15.

Задача 98. Решите уравнение $\log_3\left(31-\left|x^2-6x+5\right|\right)=a$.

Решение

Заданное уравнение равносильно такому уравнению $\left|x^2-6x+5\right|=31-3^a$, которое при $a > 1\text{og}_3 31$ не имеет решений, так как его левая часть неотрицательна, а правая, при этих значениях параметра a – отрицательна.

При $a \le 1\text{og}_3 31$ уравнение равносильно совокупности двух квадратных уравнений

$$x^2-6x+36-3^a=0 \text{ или } x^2-6x-26+3^a=0.$$

Первое уравнение имеет решение $x=3\pm\sqrt{3^a-27}$ при $a \ge 3$. Следовательно, исходное уравнение при $a \in [3; \log_3 31]$ имеет решение $x=3\pm\sqrt{3^a-27}$.

Второе уравнение имеет решение $x=3\pm\sqrt{35-3^a}$ при $a \le \log_3 35$.

Учитывая полученное раннее ограничение $a \le \log_a 31$, заключаем, что исходное уравнение имеет еще два решения $x=3\pm\sqrt{35-3^a}$ при $a \le 1\text{og}_3 31$.

Ответ: если $a \in (-\infty; 3)$, то $x=3\pm\sqrt{35-3^a}$;

если $x \in [3; \log_3 3l)$, то $x=3\pm\sqrt{35-3^a}$ и $x=3\pm\sqrt{3^a-27}$;

если $x \in (\log_3 31; +\infty)$, то решений нет.

Задача 99. Решите уравнение $\log_2\left|x+\dfrac{1}{x}\right| = x^2\left(3-2|x|\right)$.

Решение

Прежде всего заметим, что функции, стоящие в левой и в правой частях исходного уравнения, четные, тогда достаточно искать только положительные корни ($x = 0$ корнем уравнения не является, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой). Известно, что при $x > 0$ $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$. (Это легко доказать, используя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Действительно для любых положительных чисел x и $\dfrac{1}{x}$ имеем $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}$, откуда $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$).

По свойству возрастающей функции, функция $f(x)=\log_2\left|x+\dfrac{1}{x}\right|$ принимает значения большие или равные единице, причем ее значение равно единице только при $x = 1$. Итак, для всех $x > 0$ $f(x) \geq 1$.

При $x > 0$ функция, стоящая в правой части исходного уравнения, имеет вид $\varphi(x) = 3x^2 - 2x^3$. Найдем производную этой функции: $\varphi'(x) = 6x - 6x^2$; $\varphi'(x) = 0$, $6x(1 - x) = 0$. На промежутке $x > 0$ функция имеет одну критическую точку $x = 1$. При $0 < x < 1$ $\varphi'(x) > 0$, а при $x > 1$ имеем $\varphi'(x) < 0$. Тогда точка $x = 1$ – точка максимума. Итак, имеем, что непрерывная функция $\varphi(x) = 3x^2 - 2x^3$ на промежутке $x > 0$ имеет одну критическую точку, которая является точкой максимума, а значит ее наибольшее значение на этом промежутке совпадает с ее максимальным значением, равным единице. Итак, для всех $x > 0$ $\varphi(x) \leq 1$.

На множестве $x > 0$ обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ принимают одно и то же значение лишь при $x = 1$. Учитывая, что эти функции четны, мы еще имеем одно значение $x = -1$, при котором имеет место равенство, $f(-1) = \varphi(-1)$.

Ответ: $x = -1$, $x = 1$.

Задача 100. Решите уравнение

$$4^{-|x-1|}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-1|+2\right)=0.$$

Решение

Перейдем в исходном уравнении к одному и тому же основанию логарифмов: $2\cdot 4^{-|x-1|}\log_3\left(x^2-2x+3\right)=2^{-x^2+2x}\log_3\left(2|x-1|+2\right)$.

Умножим обе части полученного уравнения на положительную величину $4^{|x-1|}\cdot 2^{-1}\cdot 2^{x^2-2x}$, получим равносильное ему уравнение

$$2^{x^2-2x}\log_3\left(x^2-2x+3\right)=2^{2|x-1|-1}\log_3\left(2|x-1|+2\right) \ (*).$$

Введем вспомогательную функцию $\varphi(y)=2^y\log_3(y+3)$, где $y=2|x-1|-1$. Тогда уравнение (*) можно записать в виде

$$\varphi\left(x^2-2x\right)=\varphi\left(2|x-1|-1\right) \ (**)$$

На множестве $y \in (-2; +\infty)$ оба сомножителя 2^y и $1og_3(y + 3)$ положительны и монотонно возрастают, поэтому и функция $\varphi(y)$ на множестве $(-2; +\infty)$ положительна и монотонно возрастает.

При любом x числа $(x^2 - 2x)$ и $(2|x - 1| - 1)$ принадлежат множеству $(-2; +\infty)$, что следует из очевидных неравенств

$$x^2-2x=(x-1)^2-1\ge -1,$$
$$2|x-1|-1\ge -1.$$

Поэтому, согласно известной теореме, можно утверждать, что уравнение (**), а следовательно, и исходное уравнение, равносильно следующему уравнению:

$$x^2-2x=2|x-1|-1.$$

Решим это уравнение, раскрывая модуль на промежутках $x < 1$ и $x \ge 1$.

а) $\begin{cases} x<1, \\ x^2-2x=-2x+2-1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x<1, \\ x^2=1; \end{cases} \begin{cases} x<1, \\ x=\pm 1; \end{cases} x=-1.$$

б) $\begin{cases} x\geq 1, \\ x^2-2x=2x-2-1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x\geq 1, \\ x^2-4x+3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1, \\ x=1, x=3; \end{cases} x=1,\ x=3.$$

Ответ: $x = –1$, $x = 1$, $x = 3$.

Задача 101. Решите уравнение $\left|\log_2(x-2)\right|+\left|\log_2 x\right|=3$.

Конечно же, мы можем решить это уравнение, последовательно раскрывая модули, учитывая условия на знак значений выражений $\log_2(x-2)$ и $\log_2 x$. Однако мы несколько видоизменим решение и поступим так: на числовой прямой, которая, кстати, будет интересовать нас только на открытом луче $(2; +\infty)$, отметим те значения переменной, которые обращают в нуль выражения, стоящие под знаком модуля, а затем раскроем модульные выражения. Такой подход существенно упростит решение этой задачи.

Решение

1. Найдем, при каких значениях x выражения $\log_2(x-2)$, $\log_2 x$ обращаются в нуль, решив соответствующие уравнения.

$$\log_2(x-2)=0,\ x-2=1,\ x=3.$$

$$\log_2 x=0,\ x=1.$$

Заметим, что при $x = 1$ выражение $\log_2(x-2)$ не определено, а все выражения с переменными, входящие в это уравнение, определены при $x > 2$.

2. Смотрите рисунок 33.

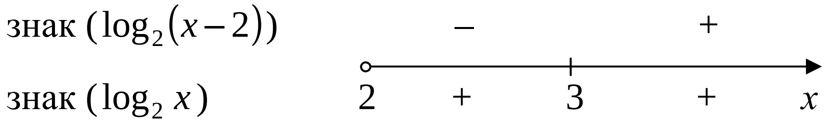


Рис. 33

3. Если $x \geq 3$, то данное уравнение преобразовывается в уравнение $\log_2(x-2)+\log_2 x=3$.

$$\log_2(x-2)+\log_2 x=3; \ \begin{cases}\log_2\left(x^2-2x\right)=3,\\ x>2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-2x-8=0,\\ x>2;\end{cases} \ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=-2,\end{array}\right.\\ x>2;\end{cases} \qquad x=4.$$

Значение $x = 4$ принадлежит рассматриваемому промежутку $[3;+\infty)$.

4. Если $2 < x < 3$, то данное уравнение преобразовывается в уравнение $-\log_2(x-2)+\log_2 x=3$.

$$-\log_2(x-2)+\log_2 x=3, \ \log_2 x=3+\log_2(x-2); \ \log_2 x=\log_2(8x-16);$$

$$\begin{cases}x=8x-16,\\ x>0;\end{cases} \ \begin{cases}x=\dfrac{16}{7},\\ x>0;\end{cases} \text{ откуда } x=\frac{16}{7}.$$

Значение $x=\dfrac{16}{7}$ удовлетворяет требованию $2 < x < 3$.

В итоге получаем, что уравнение $\left|\log_2(x-2)\right|+\left|\log_2 x\right|=3$ имеет два корня: 4 и $\dfrac{16}{7}$.

Ответ: 4; $\dfrac{16}{7}$.

Задача 102. Решите уравнение $|x|+|x-1|+|x-2|=a$, где a – параметр.

Решение

Областью определения исходного уравнения являются все действительные числа (числовая прямая). Разобьем числовую прямую на промежутки точками, обращающие подмодульные выражения в нуль: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Этими промежутками будут: $x < 0$, $0 \le x < 1$, $1 \le x < 2$, $x \ge 2$.

Рассмотрим исходное уравнение на каждом из промежутков, раскрывая модули.

1) $\begin{cases} x < 0, \\ -x - x + 1 - x + 2 = a, \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x = \dfrac{3-a}{3}. \end{cases}$

Так как $x < 0$, то $\dfrac{3-a}{3} < 0$, откуда $a > 3$.

2) $\begin{cases} 0 \le x < 1, \\ x - x + 1 - x + 2 = a, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le x < 1, \\ x = 3 - a. \end{cases}$

Так как $0 \le x < 1$, то имеем $0 \le 3 - a < 1$, откуда $2 < a \le 3$.

3) $\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ x + x - 1 - x + 2 = a, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 2, \\ x = a - 1. \end{cases}$

Так как $1 \le x < 2$, то имеем $1 \le a - 1 < 2$, откуда $2 \le a < 3$.

4) $\begin{cases} x \ge 2, \\ x + x - 1 + x - 2 = a, \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2, \\ x = \dfrac{a+3}{3}. \end{cases}$

Так как $x \ge 2$, то имеем $\dfrac{3+a}{3} \ge 2$, откуда $a \ge 3$.

Ответ: если $a > 3$, то $x_1 = \dfrac{3-a}{3}$, $x_2 = \dfrac{3+a}{3}$;

если $2 \le a < 3$, то $x_1 = 3 - a$, $x_2 = a - 1$;

если $a < 2$, то уравнение корней не имеет.

Задача 103. Решите уравнение $\sqrt{2|x|-x^2}=a$.

Решение

1) При $a<0$ уравнение решений не имеет (левая часть уравнения, согласно свойству арифметического квадратного корня, неотрицательна).

2) При $a = 0$ имеем $\sqrt{2|x|-x^2}=0$, $2|x|-x^2=0$, $2|x|-|x|^2=0$, $|x|(2-|x|)=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=2$.

3) При $a>0$ имеем $\begin{cases} 2|x|-x^2>0, \\ 2|x|-x^2=a^2. \end{cases}$

Если x удовлетворяет уравнению последней системы, то он должен удовлетворять и неравенству системы. Имеем $|x|^2-2|x|+a^2=0$. Дискриминант этого уравнения равен $D=4-4a^2$.

а) $0<a<1$. Дискриминант положителен и поэтому квадратное уравнение относительно $|x|$ имеет два различных действительных корня: $|x|=\frac{2\pm\sqrt{4-4a^2}}{2}$, откуда

$$|x|=\frac{2-\sqrt{4-4a^2}}{2} \text{ или } |x|=\frac{2+\sqrt{4-4a^2}}{2}.$$

Имеем совокупность корней

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-2+\sqrt{4-4a^2}}{2}=-1+\sqrt{1-a^2}, \\ x=\frac{2-\sqrt{4-4a^2}}{2}=1-\sqrt{1-a^2}, \\ x=\frac{-2-\sqrt{4-4a^2}}{2}=-1-\sqrt{1-a^2}, \\ x=\frac{2+\sqrt{4-4a^2}}{2}=1+\sqrt{1-a^2}. \end{array}\right.$$

б) $a = 1$. Дискриминант равен нулю, а поэтому рассматриваемое уравнение имеет два одинаковых корня и тогда имеем $|x| = 1$, откуда $x = \pm 1$.

в) $a > 1$. Дискриминант квадратного уравнения относительно $|x|$ отрицателен, а поэтому оно действительных корней не имеет.

Ответ: если $a < 0$ корней нет;

если $a = 0$, то $x = 0$, $x = \pm 2$;

если $0 < a < 1$, то $x = 1 \pm \sqrt{1-a^2}$, $x = -1 \pm \sqrt{1-a^2}$;

если $a = 1$, то $x = \pm 1$;

если $a > 1$, корней нет.

Задача 104. При каких значениях параметра a уравнение $|x+3| + |x-1| = a$ не имеет решений, имеет одно решение, два решения, бесчисленное множество решений.

Решение

Разобьем всю числовую ось на три участка (рис. 34).

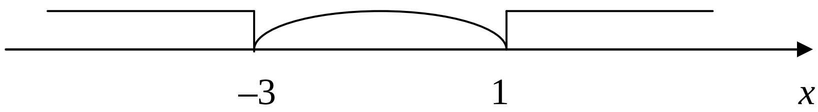


Рис. 34

Если $x < -3$, то получаем:

$$-x-3-x+1 = a,\ -2x = 2+a,\ x = -\frac{2+a}{2}.$$

Уравнение будет иметь решения, если

$$-\frac{2+a}{2} < -3,\ -2-a < -6,\ a > 4.$$

При $a \le 4$ уравнение не будет иметь решений.

Если $-3 \le x < 1$, то имеем:

$$x + 3 - x + 1 = a, \text{ откуда } 4 = a.$$

Уравнение имеет бесчисленное множество решений при $a = 4$, в случае, если $a \ne 4$, не имеет решений.

Если $x \geq 1$, то имеем:

$$x+3+x-1=a,\ 2x=a-2,\ x=\frac{a-2}{2}.$$

Уравнение имеет решения, если $\frac{a-2}{2} \geq 1$, откуда $a \geq 4$. При $a < 4$ уравнение не имеет решений.

Ответ: при $a < 4$ уравнение не имеет решений; при $a > 4$ уравнение имеет два решения; при $a = 4$ уравнение имеет бесчисленное множество решений; одно решение уравнение не может иметь ни при каком значении a.

Задача 105. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|4x+9a+5|=|10x+8a-3|$ имеем два различных корня, равноудаленных от точки $x = 5$.

Решение

Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 4x+9a+5=10x+8a-3, \\ 4x+9a+5=-10x-8a+3, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a+8}{6}, \\ x=-\dfrac{17a+2}{14}. \end{array}\right.$$

Корни равноудалены от точки $x = 5$, если их среднее арифметическое равно 5. Составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+8}{6}-\frac{17a+2}{14}\right)=5 \Leftrightarrow a=-\frac{185}{22}.$$

Проверкой убеждаемся, что при найденном a корни уравнения различны.

Ответ: $a=-\dfrac{185}{22}$.

Задача 106. При каких значениях параметра p уравнение $\left|x-p^2\right|+\left|2p-x\right|=6-p$ имеет бесконечно много решений?

Решение

Левая часть уравнения, имея вид $\left|x-a\right|+\left|x-b\right|$, есть сумма расстояний от точки x до точек a и b на числовой оси Ox.

Если эта сумма расстояний больше длины отрезка с концами в точках a и b, то существуют ровно две различные точки вне отрезка, симметрично расположенные относительно середины отрезка, удовлетворяющие исходному равенству.

Если же сумма расстояний равна длине отрезка, то любая точка отрезка является решением заданного уравнения. И если отрезок не вырождается в точку $a = b$, то в этом случае заданное уравнение имеет бесконечно много решений.

Наконец, если сумма расстояний меньше длины отрезка, то искомых точек нет, то есть заданное уравнение не имеет решений.

Поэтому искомые значения параметра p определяются из условий $a \neq b$ и $\left|a-b\right|=6-p$, то есть из системы

$$\begin{cases} 6-p>0, \\ \left|p^2-2p\right|=6-p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p<-6, \\ \left[\begin{array}{l} p^2-2p=6-p, \\ -p^2+2p=6-p \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow p=-2 \text{ или } p=3.$$

Ответ: $p = -2$; $p = 3$.

Задача 107. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $\sin^2 x + \sin x = 0$ и $|a + 13|\sin^2 x = \sin x \cos 2x + (a + 14)\sin x$ являются равносильными.

Решение

Первое уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений $\sin x = 0$ и $\sin x = -1$. Во втором уравнении обозначим $\sin x = t$, тогда уравнение запишется в виде

$$|a + 13|t^2 = (1 - 2t^2)t + (a + 14)t.$$

Здесь использована формула

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t^2.$$

Полученное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений:

1) $t = 0$;

2) $|a + 13|t = 1 - 2t^2 + a + 14$ или

$$2t^2 + |a + 13|t - (a + 15) = 0. \qquad (*)$$

Исходные уравнения эквивалентны, если уравнение (*) имеет единственное решение $t = -1$ или два решения $t_1 = -1$ и $t_2 = 0$. Найдем дискриминант уравнения (*):

$$D = (a + 13)^2 + 8(a + 15) = a^2 + 34a + 289 = (a + 17)^2.$$

Корни уравнения (*) запишутся в виде

$$t = \frac{-|a+13| \pm (a+17)}{4}.$$

Пусть $a \geq -13$, тогда $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{a}{2} - 7{,}5$. Наличие корня $t_1 = 1$ свидетельствует о том, что при $a \geq -13$ исходные уравнения не равносильны.

Пусть $a < -13$, тогда $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{a}{2} + 7{,}5$. Исходные уравнения будут равносильными, если:

1) $t_2 = \frac{a}{2} + 7{,}5 = 0 \Leftrightarrow a = -15$;

2) $t_2 = \frac{a}{2} + 7{,}5 = -1 \Leftrightarrow a = -17$;

3) $t_2 = \frac{a}{2} + 7{,}5 > 1 \Leftrightarrow a > -13$ – не удовлетворяет условию $a < -13$;

4) $t_2 = \frac{a}{2} + 7{,}5 < -1 \Leftrightarrow a < -17$.

Объединяя полученные результаты, имеем $a \in (-\infty; -17] \cup \{-15\}$.

Ответ: $a \in (-\infty; -17] \cup \{-15\}$.

Задача 108. При каких значениях параметра a уравнение $2\lg^2 x - |\lg x| + a = 0$ имеет четыре решения?

Решение

Положим $t = |\lg x|$, тогда исходное уравнение примет вид $2t^2 - t + a = 0$, у которого дискриминант $D = 1 - 8a$.

Рассмотрим два случая: $a \geq \frac{1}{8}$ и $a < \frac{1}{8}$.

а) При $a < \frac{1}{8}$ квадратное уравнение $2t^2 - t + a = 0$ имеет два корня

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4} \text{ и } t_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4}.$$

Совокупность уравнений $|\lg x| = t_1$, $|\lg x| = t_2$ будет иметь четыре корня тогда и только тогда, когда t_1 и t_2 положительны. Следовательно, искомые значения параметра удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 1 - 8a > 0, \\ 1 + \sqrt{1 - 8a} > 0, \\ 1 - \sqrt{1 - 8a} > 0. \end{cases}$$

Третье неравенство этой системы имеет решение $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$. При этих значениях a верны и первые два неравенства системы.

б) Пусть $a \geq \frac{1}{8}$. При этих значениях параметра a уравнение $2t^2 - t + a = 0$ либо не имеет решений, либо имеет только одно решение.

Ответ: $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$.

Задача 109. Решите уравнение $|x+1|+b|x-2|=3$, где b – параметр.

Решение

В соответствии с определением модуля решение задачи сводится к нахождению решений следующих уравнений:

$$(b+1)x=2b-4,\ \text{где } x\in(-\infty;-1),$$

$$(1-b)x=2-2b,\ \text{где } x\in[-1;\ 2),$$

$$(b+1)x=2+2b,\ \text{где } x\in[2;\ +\infty).$$

Первое из выписанных трех уравнений имеет решения, если $b\neq-1$. А тогда при этом условии должно выполняться неравенство

$$\frac{2b-4}{b+1}<-1.$$

Отсюда находим, что $b\in(-1;\ 1)$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(1-b)x=2-2b,\ \text{где } -1\leq x<2.$$

В этом случае при $b=1$ решением уравнения будет любое $x\in[-1;\ 2)$.

Если же $b\neq 1$, то $x=\dfrac{2(1-b)}{1-b}=2$.

Но так как найденное значение x не принадлежит полуинтервалу $[-1;\ 2)$, то при $b\neq 1$ рассматриваемое уравнение решений не имеет.

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$(b+1)x=2+2b,\ \text{где } 2\leq x<+\infty.$$

Здесь при $b=-1$ решением будет любое x из промежутка $[2;\ +\infty)$.

Если же $b\neq-1$, то $x=\dfrac{2(1+b)}{1+b}=2$.

Ответ: если $b<-1$, то $x=2$;

если $b=-1$, то $x\geq 2$;

если $-1<b<1$, то $x_1=2$, $x_2=\dfrac{2b-4}{b+1}$;

если $b=1$, то $-1\leq x\leq 2$;

если $b>1$, то $x=2$.

Задача 110. При каких значениях параметра b все решения уравнения $2|x-b|+b-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0 \le x \le 4$?

Решение

Решение исходного уравнения равносильно решению двух соотношений

$$x = 3b - 4 \text{ при } x \in (-\infty; b) \text{ и } x = \frac{b+4}{3} \text{ при } x \in [b; +\infty).$$

А тогда решение задачи сводится к решению систем

$$\begin{cases} 3b-4 \le 4, \\ 3b-4 \ge 0, \\ 3b-4 < b \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dfrac{b+4}{3} \le 4, \\ \dfrac{b+4}{3} \ge 0, \\ \dfrac{b+4}{3} \ge b. \end{cases}$$

Решениями первой из этих систем являются все $b \in \left[\frac{4}{3}; 2\right)$. Что же касается второй системы, то ее решения – это все $b \in [-4; 2]$.

Взяв пересечение полученных множеств, получаем ответ.

Ответ: $b \in \left[\frac{4}{3}; 2\right)$.

Задача 111. Найдите количество целых значений параметра b, при которых уравнение $\log_2^2 x + 4|\log_2 x| + b^2 - 2b - 6 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение

Заметим, что по свойству модуля $\log_2^2 x = |\log_2 x|^2$. Полагая $t = |\log_2 x|$, запишем исходное уравнение в виде $t^2 + 4t + b^2 - 2b - 6 = 0$.

График последнего уравнения есть парабола, абсцисса вершины которой $t_0 = -2 < 0$, поэтому для того, чтобы уравнение имело неотрицательный корень, необходимо и достаточно, чтобы свободный член уравнения был неположителен, то есть $b^2 - 2b - 6 \le 0$, откуда $1-\sqrt{7} \le b \le 1+\sqrt{7}$. Целые значения b, принадлежащие этому отрезку: –1; 0; 1; 2; 3.

Ответ: 5.

Задача 112. Для всех значений параметра *a* решите уравнение

$$\lg^2|\sin x| - 2\lg|\sin x| - a^2 + 5 = 0.$$

Решение

Обозначив $\lg|\sin x| = t$, приведем исходное уравнение к виду

$$t^2 - 2t - (a^2 - 5) = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a^2-4}$ при $|a| \ge 2$. Подставим найденные значения t_1, t_2 в уравнение $\lg|\sin x| = t$; получим уравнения (1) и (2).

$$\lg|\sin x| = 1 + \sqrt{a^2-4}. \qquad (1)$$

Потенцируя, получим $|\sin x| = 10^{1+\sqrt{a^2-4}}$. Заметим, что при $x \in R$ $|\sin x| \le 1$, при $|a| \ge 2$ $10^{1+\sqrt{a^2-4}} \ge 10$, следовательно, уравнение (1) не имеет решений.

$$\lg|\sin x| = 1 - \sqrt{a^2-4}. \qquad (2)$$

Потенцируя, получим

$$|\sin x| = 10^{1-\sqrt{a^2-4}}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет решение при условии $10^{1-\sqrt{a^2-4}} \le 1$, откуда

$$1 - \sqrt{a^2-4} \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-1} \ge 1,\ |a| \ge \sqrt{5}.$$

Решая уравнение (3), приходим к ответу в следующем виде:

$$x = \pm \arcsin 10^{1-\sqrt{a^2-4}} + \pi k, |a| \ge \sqrt{5}, k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm \arcsin 10^{1-\sqrt{a^2-4}} + \pi k, |a| \ge \sqrt{5}, k \in Z$.

Задача 113. Для каждого действительного значения параметра b решить уравнение $x^2+|x|+b=0$.

Решение

Верно неравенство $|x|^2=x^2$. Обозначив $|x|=y\geq 0$, получим уравнение

$$y^2+y+b=0. \qquad (*)$$

Его дискриминант D = 1 – 4b. Если D < 0, то есть 1 – 4b < 0 ⇔ $b>\frac{1}{4}$, то уравнение корней не имеет; если $b=\frac{1}{4}$, то D = 0 и $y=-\frac{1}{2}$ – это значение y не удовлетворяет условиям нашей задачи, так как $|x|=y\geq 0$.

Таким образом, нам подходят только те значения параметра b, для которых $y_1 \geq 0$ или $y_2 \geq 0$.

Решим уравнение (*): $y_1=\frac{-1-\sqrt{1-4b}}{2}$, $y_2=\frac{-1+\sqrt{1-4b}}{2}$. Но при $y_1 < 0$ при всех $b\leq\frac{1}{4}$. Выясним, при каких значениях $b<\frac{1}{4}$ будет $y_2 \geq 0$, то есть решим неравенство

$$\frac{-1+\sqrt{1-4b}}{2}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-4b}\geq 1 \Leftrightarrow b\leq 0.$$

Таким образом, мы нашли, что уравнение (*) не имеет корней, если $b > 0$. Если $b = 0$, то $y = 0$, то есть $x = 0$. Если $b < 0$, то $y=\frac{-1+\sqrt{1-4b}}{2}>0$. При этом уравнение (*) имеет два корня:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4b}}{2} \text{ и } x_2=\frac{1-\sqrt{1-4b}}{2}.$$

Ответ: если $b < 0$, то $x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4b}}{2}$ и $x_2=\frac{1-\sqrt{1-4b}}{2}$;

если $b = 0$, то $x = 0$;

если $b > 0$, то уравнение корней не имеет.

Задача 114. При каких значениях параметра b уравнение $\left|x^2+b^2x-6\right|+\left|x^2-2x\right|+\left|x^2+b^2+b-6\right|=0$ имеет непустое множество решений?

Решение

Для того, чтобы данное уравнение имело непустое множество решений, необходимо и достаточно, чтобы каждое из подмодульных выражении равнялось нулю: $\begin{cases} x^2+b^2x-6=0, \\ x^2-2x=0, \\ x^2+b^2+b-6=0. \end{cases}$

Из второго уравнения системы имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. При $x = 0$ система несовместна, при $x = 2$ находим $b = 1$.

Ответ: $b = 1$.

Задача 115. При каких значениях параметра b уравнение $y^2-b=|y|$ имеет три решения?

Решение

Заметим, что если y – корень уравнения, то $–y$ тоже корень уравнения. Поэтому, если $y = 0$ не является корнем уравнения, то оно не может иметь нечетное число корней. При $y = 0$ находим $b = 0$. Подставляя $b = 0$ в уравнение, убеждаемся, что оно имеет еще два корня: $y = \pm 1$. Корни уравнения: 0; ±1.

Ответ: 0.

Задача 116. При каких значениях параметра b уравнение $\left|x^2-2bx\right|=1$ имеет три различных корня?

Решение

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $x^2 – 2bx = 1$, $x^2 – 2bx = –1$. Первое уравнение имеет два различных корня при любом $b \in R$ (дискриминант уравнения положителен). Чтобы исходное уравнение имело три корня, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант второго уравнения был равен нулю, то есть $4b^2 - 4 = 0$. Решив уравнение $b^2 - 1 = 0$, получим ответ.

Ответ: –1; 1.

Задача 117. При каких значениях параметра b уравнение $\sqrt{|y|+1} - \sqrt{|y|} = b$ имеет решение?

Решение

Преобразуем левую часть уравнения

$$\sqrt{|y|+1} - \sqrt{|y|} = \frac{\left(\sqrt{|y|+1} - \sqrt{|y|}\right)\left(\sqrt{|y|+1} + \sqrt{|y|}\right)}{\sqrt{|y|+1} + \sqrt{|y|}} = \frac{1}{\sqrt{|y|+1} + \sqrt{|y|}}.$$

Наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sqrt{|y|+1} + \sqrt{|y|}}$ достигается при $y = 0$ и равно 1. Осталось заметить, что при достаточно больших y это выражение принимает сколь угодно малые значения.

Ответ: (0; 1).

Задача 118. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left||x| - 3 + a\right| = 4$ имеет ровно один корень?

Решение

В соответствии с определением модуля числа только модули чисел 4 и –4 равны числу 4, а поэтому получаем:

$$|x| - 3 + a = 4 \text{ или } |x| - 3 + a = -4,$$

то есть

$$|x| = 7 - a \text{ или } |x| = -1 - a.$$

Уравнение $|x| = m$ имеем два корня (если $m > 0$), один корень (если $m = 0$), не имеет корней (если $m < 0$).

Исходное уравнение имеет ровно три корня тогда и только тогда, когда уравнение $|x| = 7 - a$ имеет один корень, а уравнение $|x| = -1 - a$ имеем два корня, или первое уравнение имеет два корня, а второе уравнение – один корень. Имеем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7-a=0,\\-1-a>0,\end{cases}\\\begin{cases}7-a>0,\\-1-a=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=7,\\a<-1,\end{cases}\\\begin{cases}a<7,\\a=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решениями совокупности является $a = -1$.

Ответ: $a = -1$.

Задача 119. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2(1+\cos 2x)^2\cdot|\sin(2x+a)| = 2\cos 2x - 2\cos(4x+2a) - \cos(6x+2a) - \cos(2x+2a)$ имеет решения?

Решение

Пусть $t = |\sin(2x + a)|$, $y = \cos 2x$, где $0 \le t \le 1$, $|y| \le 1$. Тогда данное уравнение принимает вид

$$f(y) = ty^2 - 2t(t-1)y - 2t^2 + t + 1 = 0.$$

Выясним, при каких значениях $t \in [0; 1]$ уравнение $f(y) = 0$ обладает решением $y \in [-1; 1]$.

Значение $t = 0$, очевидно, следует исключить. При $0 < t \le 1$ имеем квадратное уравнение относительно y, для дискриминанта D которого справедливо неравенство

$$\frac{D}{4} = t^4 - t = t(t-1)(t^2+t+1) \le 0.$$

Отсюда следует необходимое условие существования решения: $t = 1$, которое приводит к значению $y = 0$.

Итак,

$$\begin{cases}|\sin(2x+a)|=1,\\\cos 2x=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+a=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z,\\[2mm]2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z,\end{cases}$$

так что окончательно получаем $a = \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $a = \pi n$, $n \in Z$.

Задача 120. Найдите все значения параметра *p*, при которых уравнение $(0{,}5-1{,}75p)\cdot 0{,}04^{|-x|}+(0{,}15p-0{,}5)\cdot 25^{0{,}5|x|+0{,}5}+p+3=0$ имеет ровно p^2+2p+4 различных корней.

Решение

1) Так как $0{,}04^{|-x|}=\left(\frac{1}{25}\right)^{|-x|}=5^{2|x|}$, в выражение, после преобразование, дает $25^{0{,}5|x|+0{,}5}=5^{2(0{,}5|x|+0{,}5)}=5^{|x|+1}=5\cdot 5^{|x|}$, то исходное уравнение можно привести к виду

$$(0{,}5-1{,}75p)\cdot 5^{2|x|}+(0{,}75p-2{,}5)\cdot 5^{|x|}+p+3=0.$$

Пусть $5^{|x|}=t$, тогда $t\geq 1$. Получаем квадратное уравнение относительно *t* с параметром *p*:

$$(0{,}5-1{,}75p)t^2+(0{,}75p-2{,}5)t+p+3=0. \qquad (*)$$

Число различных корней этого последнего уравнения не больше двух, значит, число *n* различных корней исходного уравнения не больше 4, то есть $n\leq 4$.

2) Если $n=0$, то по условию $p^2+2p+4=0$, что невозможно, так как $D=-12<0$.

Если $n=1$, то $p^2+2p+4=1$, $p^2+2p+3=0$, что невозможно, так как $D=-8<0$.

Если $n=2$, то $p^2+2p+4=2$, $p^2+2p+2=0$, что невозможно, так как $D=-4<0$.

Если $n=3$, то $p^2+2p+4=3$, $p^2+2p+1=0$, $(p+1)^2=0$, $p=-1$. Тогда уравнение (*) примет вид $9t^2-13t+8=0$. Это уравнение не имеет корней, так как $D<0$. Следовательно, исходное уравнение не имеет корней, что противоречит равенству $n=3$.

3) Если $n = 4$, получаем $p^2 + 2p = 0$, откуда $p_1 = -2$, $p_2 = 0$.

Пусть $p = -2$. Тогда уравнение (*) примет вид $4t^2 - 4t + 1 = 0$, $(2t-1)^2 = 0$, $t = \frac{1}{2}$, что не удовлетворяет условию $t \ge 1$. Следовательно, исходное уравнение не имеет корней, что противоречит равенству $n = 4$.

При $p = 0$ уравнение (*) примет вид $t^2 - 5t + 6 = 0$. Оба корня $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$ удовлетворяют условию $t \ge 1$.

Итак, $5^{|x|} = 2$ или $5^{|x|} = 3$.

Следовательно, исходное уравнение имеет ровно четыре различных корня. Значит условию задачи удовлетворяет $p = 0$.

Ответ: $p = 0$.

Задача 121. Решите уравнение $2 + \cos x = \sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\sin x$.

Решение

Поскольку $\sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\sin x - \cos x \le \sqrt{3\sin^2\frac{3x}{2} + 1} \le 2$, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left|\sin\frac{3x}{4}\right| = 1, \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\sin\frac{3x}{4}\right| = 1, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}k\right) = 1, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$.

Задача 122. Решите уравнение $\left|1-\log_{\frac{1}{6}} x\right|+2=\left|3-\log_{\frac{1}{6}} x\right|$.

Решение

Пусть $y=\log_{\frac{1}{6}} x$. Тогда данное уравнение примет следующий вид:

$$|1-y|+2=|3-y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\le 1, \\ 1-y+2=3-y\end{cases} \\ \begin{cases} 1<y\le 3, \\ y-1+2=3-y\end{cases} \\ \begin{cases} y>3, \\ y-1+2=y-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\le 1, \\ 0\cdot y=0\end{cases} \\ \begin{cases} 1<y\le 3, \\ y=1\end{cases} \\ \begin{cases} y>3, \\ 1=-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\le 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{6}} x\le 1 \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{6}.$$

Ответ: $x\in\left[\frac{1}{6};+\infty\right)$.

Задача 123. Решите уравнение

$$\log_2^2(x+y)-2\cos\frac{\pi xy}{2}\log_2(x+y)+1+|y-2|=0.$$

Решение

Заданное уравнение можно рассматривать как квадратное относительно $\log_2(x+y)$. Найдем его дискриминант

$$D=\cos^2\frac{\pi xy}{2}-1-|y-2|.$$

Так как $\cos^2\frac{\pi xy}{2}\le 1$, то дискриминант уравнения отрицателен или равен нулю, если $\cos^2\frac{\pi xy}{2}=1$, а $|y-2|=0$. Но $|y-2|=0$ при $y=2$, тогда $\cos^2\frac{\pi xy}{2}=1$ обращается в $\cos^2\pi x=1$, откуда имеем $\pi x=\pi k$, $k\in Z$; $x=k$, $k\in Z$. Тогда, учитывая равенство

$$\left(\log_2(x+y)\right)_{1,2} = \cos\frac{\pi xy}{2} \pm \sqrt{\cos^2\frac{\pi xy}{2} - 1 - |y-2|},$$

имеем $\left(\log_2(x+y)\right)_1 = \left(\log_2(x+y)\right)_2 = \cos\frac{\pi xy}{2} = \pm 1$. Значит, либо $\log_2(x + y) = 1$, либо $\log_2(x + y) = -1$, то есть либо $\log_2(k + 2) = 1$, либо $\log_2(k + 2) = -1$, откуда следует $k = 0$, $k+2=\frac{1}{2}$, что неверно ни при каком целом значении k. Итак, $x = k = 0$, $y = 2$.

Ответ: (0; 2).

Задача 124. Пусть задана функция $f(x)=x^2-2x$. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{f(x)}+|f(x)-x|+|f(2x)-f(x)+7x-3|=|f(2x)+6x-3|$?

Решение

Заменяя в уравнении функцию $f(x)$ формулой, задающей ее, запишем уравнение в таком виде

$$\sqrt{x^2-2x}+\left|x^2-3x\right|+\left|(2x)^2-4x-x^2+2x+7x-3\right|=\left|4x^2-4x+6x-3\right|$$

или после преобразований

$$\sqrt{x^2-2x}+\left|x^2-3x\right|+\left|3x^2+5x-3\right|=\left|4x^2+2x-3\right|.$$

Известно, что $|a|+|b|\geq|a+b|$, тогда

$$\left|x^2-3x\right|+\left|3x^2+5x-3\right|\geq\left|x^2-3x+3x^2+5x-3\right|=\left|4x^2+2x-3\right|.$$

Итак, $\left|x^2-3x\right|+\left|3x^2+5x-3\right|\geq\left|4x^2+2x-3\right|$. При этом равенство достигается в том и только в том случае, если $\left(x^2-3x\right)\left(3x^2+5x-3\right)\geq 0$. Так как $\sqrt{x^2-2x}\geq 0$ при всех допустимых x, то решениями исходного уравнения служат решения системы $\begin{cases}\left(x^2-3x\right)\left(3x^2+5x-3\right)\geq 0,\\ \sqrt{x^2-2x}\geq 0.\end{cases}$

Уравнение системы имеет два корня $x = 0$, $x = 2$. Из этих значений x только $x = 0$ удовлетворяет неравенству системы. Значит исходное уравнение имеет корень $x = 0$.

Ответ: 0.

Задача 125. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $x - p = 2\left|2|x| - p^2\right|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

Решение

Раскроем вначале внутренний, а затем внешний модуль.

1) Пусть $x < 0$, тогда будем иметь систему $\begin{cases} x < 0, \\ x - p = 2\left|-2x - p^2\right|. \end{cases}$

Решая эту систему, мы должны будем рассмотреть два случая:

1а) $\begin{cases} x < 0, \\ -2x - p^2 < 0, \\ x - p = 4x + p^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ -2x - p^2 < 0, \\ x = \frac{1}{3}\left(-2p^2 - p\right). \end{cases}$

Подставим найденное значение x в неравенства системы. Будем иметь

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\left(-2p^2 - p\right) < 0, \\ \frac{2}{3}\left(2p^2 + p\right) - p^2 < 0, \\ x = \frac{1}{3}\left(-2p^2 - p\right); \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(-2p^2 - p\right). \\ p < -\frac{1}{2}, p > 0, \\ -2 < p < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x = \frac{1}{3}\left(-2p^2 - p\right)$ при $-2 < p < -\frac{1}{2}$.

1б) $\begin{cases} x < 0, \\ -2x - p^2 \geq 0, \\ x - p = 2\left(-2x - p^2\right); \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ -2x - p^2 \geq 0, \\ x = \frac{1}{5}\left(p - 2p^2\right). \end{cases}$

Подставим найденное значение x в неравенства системы. Будем иметь

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}\left(p - 2p^2\right), \\ \frac{1}{5}\left(p - 2p^2\right) < 0, \\ \frac{2}{5}\left(2p^2 - p\right) - p^2 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}\left(p - 2p^2\right), \\ p < 0, p > \frac{1}{2}, \\ -2 \le p \le 0. \end{cases}$$

Имеем, $x = \frac{1}{5}\left(p - 2p^2\right)$ при $-2 \le p < 0$.

2) Пусть $x \ge 0$, тогда будем иметь систему $\begin{cases} x \ge 0, \\ x - p = 2\left|2x - p^2\right|. \end{cases}$

При решении этой системы надо рассмотреть два случая:

2а) $\begin{cases} x \ge 0, \\ 2x - p^2 < 0, \\ x - p = -2\left(2x - p^2\right); \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 0, \\ 2x - p^2 < 0, \\ x = \frac{1}{5}\left(2p^2 + p\right). \end{cases}$

Подставим найденное значение x в неравенства системы. Будем иметь

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}\left(2p^2 + p\right), \\ \frac{1}{5}\left(2p^2 + p\right) \ge 0, \\ \frac{2}{5}\left(2p^2 + p\right) - p^2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}\left(2p^2 + p\right), \\ p \le -\frac{1}{2}, p \ge 0, \\ p < 0, p > 2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x = \frac{1}{5}\left(2p^2 + p\right)$ при $p \le -\frac{1}{2}$ или $p > 2$.

2б) $\begin{cases} x \ge 0, \\ 2x - p^2 \ge 0, \\ x - p = 2\left(2x - p^2\right); \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 0, \\ 2x - p^2 \ge 0, \\ x = \frac{1}{3}\left(2p^2 - p\right). \end{cases}$

Подставим найденное значение x в неравенства системы. Будем иметь

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(2p^2 - p\right), \\ p \le 0,\ p \ge \frac{1}{2}, \\ p \le 0,\ p \ge 2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x = \frac{1}{3}\left(2p^2 - p\right)$ при $p \le 0$ или $p \ge 2$.

Ответ: $x = \frac{1}{3}\left(-2p^2 - p\right)$ при $-2 < p < -\frac{1}{2}$;

$x = \frac{1}{5}\left(p - 2p^2\right)$ при $-2 \le p < 0$;

$x = \frac{1}{5}\left(2p^2 + p\right)$ при $p \le -\frac{1}{2}$ или $p > 2$;

$x = \frac{1}{3}\left(2p^2 - p\right)$ при $p \le 0$ или $p \ge 2$.

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ НЕИЗВЕСТНОЕ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Геометрический метод решения представляет собой единство графического и алгебраического методов.

Основное преимущество геометрического метода в его наглядности. Он позволяет увидеть то, что в алгебраическом методе скрыто за аналитическими выкладками. Кроме того, выполненный рисунок позволяет рассуждать, делать выводы.

Великий Р. Декарт в своем труде «Правила для руководства ума» специально выделял правило о том, что «полезно чертить ... фигуры и преподносить их внешним чувствам, для того чтобы таким образом нам было легче сосредоточивать внимание нашего ума».

При слиянии алгебраического и графического методов возможны три ситуации. Укажем их:

Ситуация I. Берется алгебраическая задача, затем она переводится на геометрический язык, и полученная геометрическая задача решается геометрическим методом или алгебраическим методом, основанным на геометрических соотношениях (равенства, подобия, равновеликости и др.).

Ситуация II. Берется геометрическая задача, затем она переводится на алгебраический язык, и полученная алгебраическая задача решается алгебраическим или геометрическим методом.

Ситуация III. Берется интегрированная задача. Термином «интегрированная задача» мы называем задачу, при решении которой необходимо воспользоваться двумя или более методами (алгебраическими и геометрическими). Часть ее решается алгебраическим методом, а часть геометрическим, возможно неоднократное чередование этих методов в процессе решения.

История математики свидетельствует о том, что оба метода, алгебраический и геометрический, развивались в тесной взаимосвязи.

Перейдем к решению задач.

Задача 126. Решите уравнение $|x-3|+2|x+1|=4$.

Решение

$$|x-3|+2|x+1|=4 \Leftrightarrow 2|x+1|=4-|x-3|.$$

Абсцисса общих точек графиков функций $y=2|x+1|$ и $y=4-|x-3|$ (рис. 35) и будет решением уравнения.

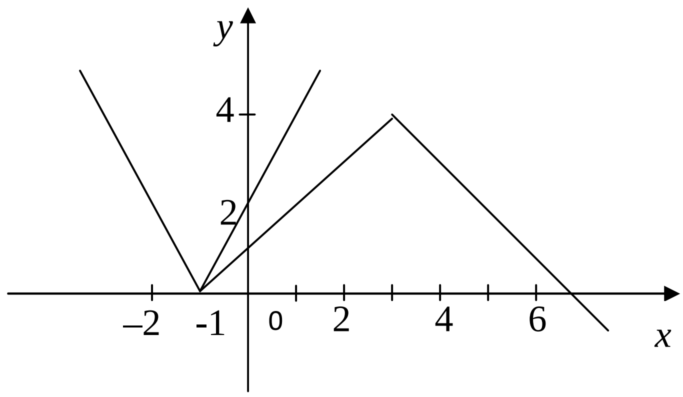


Рис. 35

Ответ: {–1}.

Задача 127. Решите уравнение $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

Решение

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|=2 \Leftrightarrow |x-1|+|x-3|=2-|x-2|.$$

Построим графики функций $y=|x-1|+|x-3|$ и $y=2-|x-2|$ (рис. 36).

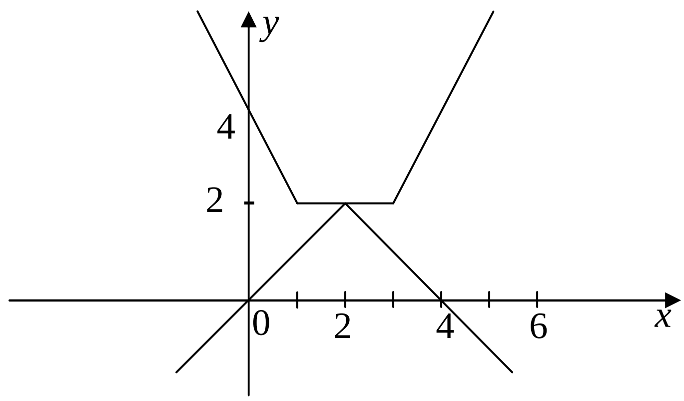


Рис. 36

График функции $y=|x-1|+|x-3|$ имеет с графиком функции $y=2-|x-2|$ лишь одну общую точку (2; 2).

Ответ: {2}.

Задача 128. Решите уравнение $|x-1|+|x|=3$.

Решение

Уравнение $|x-1|=3-|x|$ равносильно заданному. Построим графики функций $y=|x-1|$ и $y=3-|x|$ и найдем абсциссы их точек пересечения (рис. 37).

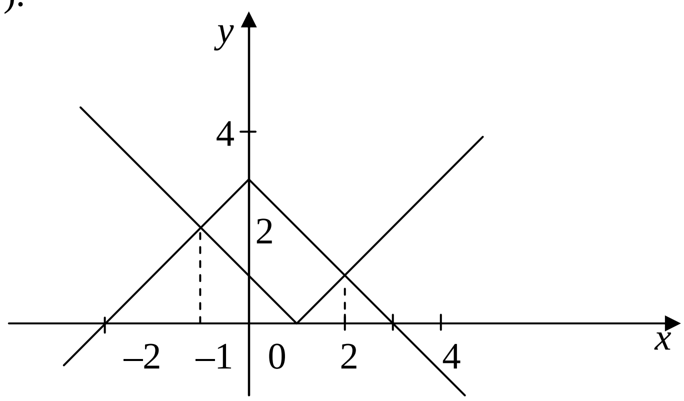


Рис. 37

Ответ: {–1; 2}.

Задача 129. Решите уравнение

$$\left|\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\right|+\left|2\sin x+\sqrt{3}\right|=\operatorname{tg} x+2\sin x.$$

Решение

Так как уравнение $|f(x)|+|\varphi(x)|=f(x)+\varphi(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ \varphi(x)\ge 0, \end{cases}$ то заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x\ge \sqrt{3}, \\ \sin x\ge -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \qquad (*)$$

Все решения первого неравенства этой системы (*) составляют серию полуинтервалов $\dfrac{\pi}{3}+\pi k\le x_k<\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. Из чисел x_k решениями второго неравенства системы являются лишь числа x_m и x_n, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\pi}{3}+2\pi m\le x_m<\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z \text{ и } x_n=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z \text{ (рис. 38).}$$

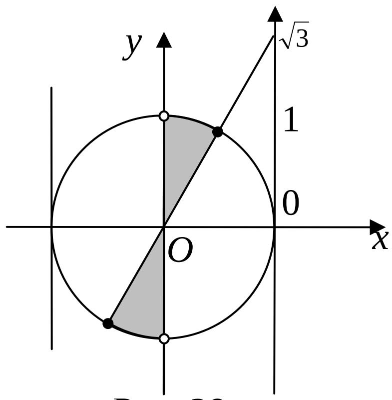


Рис. 38

Следовательно, все решения системы (*) и равносильного ему заданного уравнения – это числа x_m и x_n.

Ответ: $\left[\dfrac{\pi}{3}+2\pi m;\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\right), m\in Z$; $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

Задача 130. В задаче 104 мы решили уравнение $|x+3|+|x-1|=a$ алгебраическим методом, здесь же мы решим его геометрическим методом.

На геометрическом языке уравнение $|x+3|+|x-1|=a$ означает, что надо найти такую точку *M*(*x*), сумма расстояний от которой до точек *A*(–3) и *B*(1) равна *a*. На рис. 39 видно, что *AB* = 4, поэтому:

Если $a < 4$, то такой точки *M*(*x*), сумма расстояний от которой до точек *A*(–3) и *B*(1) равна *a*, не существует, так как для точек на отрезке *AB* сумма расстояний до точек *A* и *B* равна 4, а для точек, лежащих вне отрезка *AB*, сумма расстояний больше 4. Значит, при $a < 4$ уравнение не имеет решений.

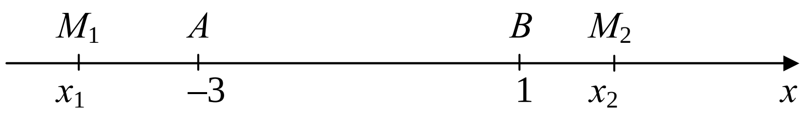


Рис. 39

Если $a > 4$, то всегда существуют две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, лежащие вне отрезка *AB* и симметричные относительно него, сумма расстояний от каждой из которых до точек *A* и *B* равна *a*. И значит, уравнение имеет два решения.

Если $a = 4$, то существует бесконечно много точек *M*(*x*), сумма расстояний от которых до точек *A* и *B* равна 4 (все они расположены на отрезке *AB*). Значит, в этом случае уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Кроме того, не существует одной точки, сумма расстояний от которой до точек *A* и *B* равна *a*. Так как, если есть одна точка, то найдется всегда и ей симметричная относительно отрезка *AB*. Следовательно, уравнение не может иметь одного решения ни при каком значении *a*.

В итоге ответ получаем такой же, как и в случае алгебраического метода.

Если использовать не координатную прямую, а координатную плоскость, то получим другой вариант геометрического метода. Рассмотрим его более подробно.

Преобразуем данное уравнение $|x+3|+|x-1|=a$ к виду:

$$|x+3|=a-|x-1|.$$

В координатной плоскости построим графики функций: $y_1=|x+3|$ и $y_2=a-|x-1|$ (рис. 40).

На рис. 40 видно, если a < 4, то графики функций y_1 и y_2 не пересекаются, поэтому данное уравнение не имеет решений.

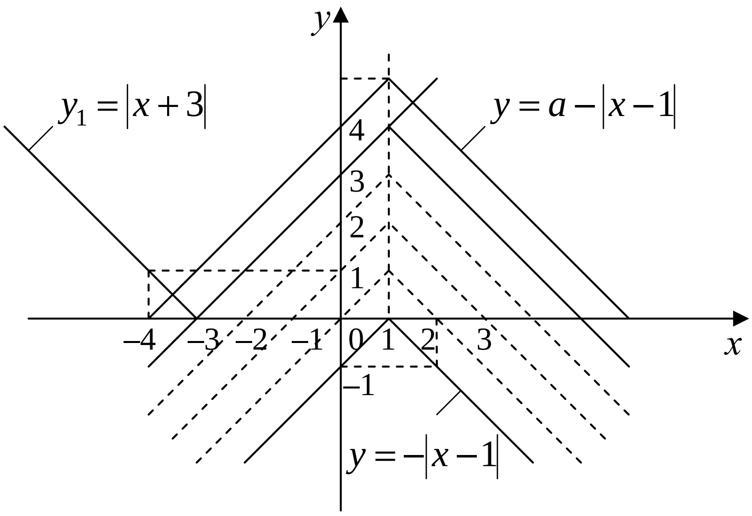


Рис. 40

Если a = 4, то при $-3 \le x \le 1$ графики совпадают, поэтому уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Если a > 4, то, как видно на рис. 40 графики пересекаются в двух точках, это означает, что уравнение в этом случае имеет два решения. Одну точку пересечения графики не могут иметь, и, значит, уравнение не может иметь одного решения ни при каком значении a.

Рассмотренный вариант геометрического метода предполагает более высокий уровень образного мышления, умение представить построенную графическую модель в динамике, варьируя значения параметра a. В то же время данный вариант еще более нагляден, чем первый, когда используется координатная прямая. Он эстетически более привлекателен, чем первый, и представляет собой интеграцию графического метода и метода параллельного переноса. В ходе его применения задействованы как алгебраические знания и умения, связанные с понятием функции, ее графика, точек пересечения графиков, с понятием модуля и т.д., так и геометрические знания и умения: параллельный перенос, аксиома прямой, взаимное расположение прямых, параллельные прямые, условие параллельности двух прямых, заданных своими уравнениями, и др.

Таким образом, геометрический метод во втором варианте является более «богатым» в образовательном, развивающем и эстетическом отношениях.

Задача 131. При каких значениях параметра *a* уравнение $(|x-2|-a-4)(a+6+x^2-4x)=0$ имеет ровно три корня?

Решение

Заданное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} |x-2|-a-4=0, \\ a+6+x^2-4x=0. \end{array}\right.$$

Геометрически число решений совокупности при некотором значении параметра *a* можно интерпретировать, как число точек графиков функций $a=|x-2|-4$ и $a=-x^2+4x-6$ на плоскости *Oxa*, имеющих ординату *a*.

Строим эти графики (рис. 41) и по рисунку заключаем, что графики имеют в совокупности ровно три точки с ординатой *a* только в двух случаях: когда *a* = –4 и *a* = –2.

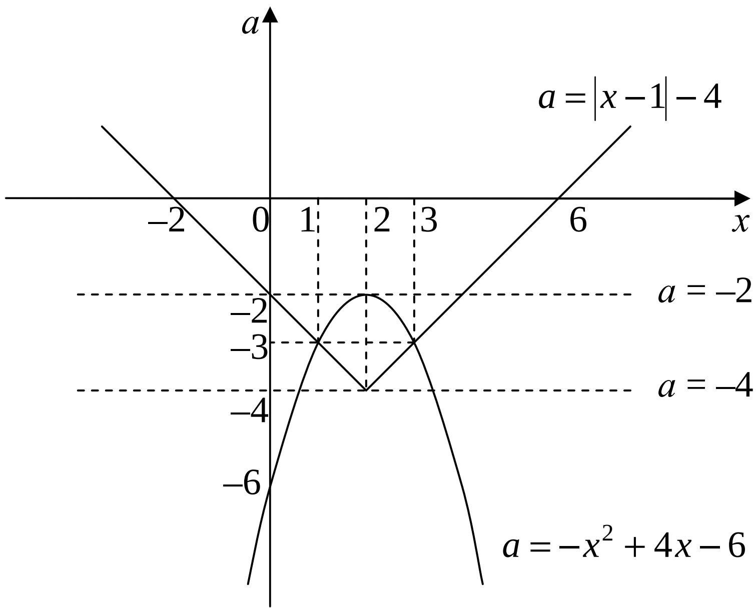


Рис. 41

Ответ: –4; –2.

Задача 132. Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения $|x-1| = ax + 2$.

Решение

Первый способ

1. Пусть $x \geq 1$, тогда $x - 1 = ax + 2$, $(a - 1)x = -3$, $(1 - a)x = 3$.

При $a \neq 1$ $x = \dfrac{3}{1-a}$; при $a = 1$ уравнение решения не имеет. Проверим выполнение неравенства $x \geq 1$:

$$\frac{3}{1-a} \geq 1,\ \frac{3}{1-a} - 1 \geq 0,\ \frac{2+a}{1-a} \geq 0,\ \begin{cases} (a+2)(a-1) \leq 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Решение системы показано на рис. 42.

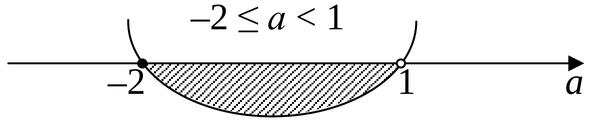


Рис. 42

2. Пусть $x \leq 1$, тогда $-x + 1 = ax + 2$, $(a + 1)x = -1$.

При $a = -1$ уравнение решения не имеет; при $a \neq -1$ $x = -\dfrac{1}{1+a}$.

Проверим выполнение неравенства $x \leq 1$:

$$-\frac{1}{1+a} \leq 1,\ 1+\frac{1}{1+a} \geq 0,\ \frac{2+a}{1+a} \geq 0,\ \begin{cases}(a+2)(a+1) \geq 0,\\ a \neq 1.\end{cases}$$

Решение системы показано на рис. 43.

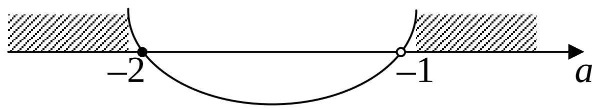


Рис. 43

Поместим результаты решения в таблицу (табл. 3).

Таблица 3

0	(–∞; –2)	–2	(–2; –2)	–1	(–1; 1)	1	(1; +∞)
$\dfrac{3}{1-a}$	–	+	+	+	+	–	–
$-\dfrac{1}{1+a}$	+	+	–	–	+	+	+

Ответ: при a из промежутков (–∞; –1] и [1; +∞) уравнение имеет один корень; при a из промежутка (–1; 1) – два корня.

Второй способ

Возможно графическое решение задания (рис. 44). Построим график функции $y = |x - 1|$.

Ясно, что график функции $y = ax + 2$ – пучок прямых, проходящих через точку (0; 2). При $a = -1$ и $a = 1$ получаем прямые, параллельные ветвям графика $y = |x - 1|$ и наклоненные к осям координат под углом 45°. При $-1 < a < 1$ любая прямая дважды пересекает график функции с модулем, во всех остальных случаях имеется только одна точка пересечения.

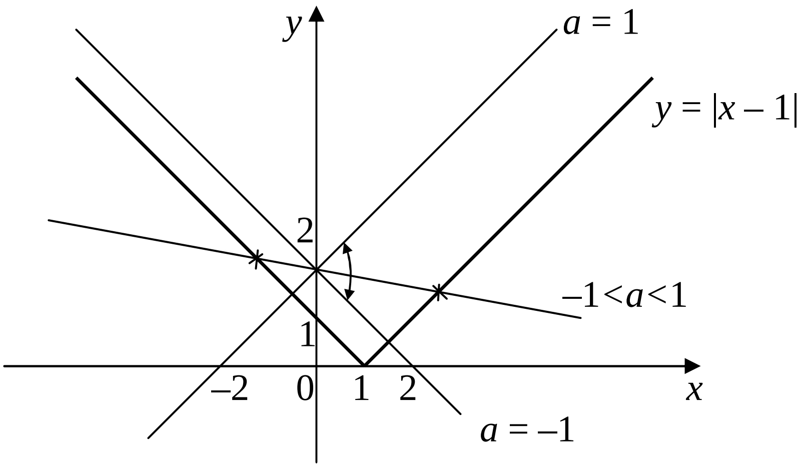


Рис. 44

Третий способ

Из уравнения следует, что $a=\frac{|x-1|-2}{x}$ (заметим, что x = 0 не является корнем данного уравнения). На рисунке 45 покажем вид графика $f(x)=\frac{|x-1|-2}{x}$.

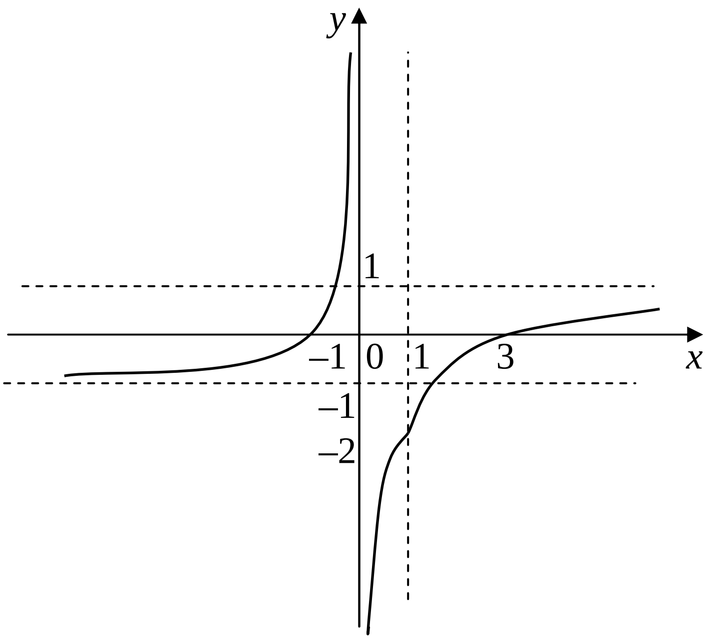


Рис. 45

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{3}{x}, \ \textit{если} \ \ x\geq 1,\\ -1-\frac{1}{x}, \ \textit{если} \ \ x<1 \ \ \textit{и} \ \ x\neq 0.\end{cases}$$

График наглядно показывает, что при любом a из промежутка (–1; 1) уравнение имеет два корня, а при остальных действительных a у уравнения единственный корень.

Задача 133. Решите уравнение $\sqrt[3]{x} = |0{,}5x - 1| + |0{,}5x - 3| - 2$.

Решение

Построим в одной системе координат графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = |0{,}5x - 1| + |0{,}5x - 3| - 2$ (рис. 46). Заметим прежде, что аналитическое выражение для второй функции, после раскрытия модулей (читатель это уже умеет делать) примет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, \ \textit{если} \ \ x \le 2, \\ 0, \ \textit{если} \ \ 2 \le x \le 6, \\ x - 6, \ \textit{если} \ \ x \ge 6. \end{cases}$$

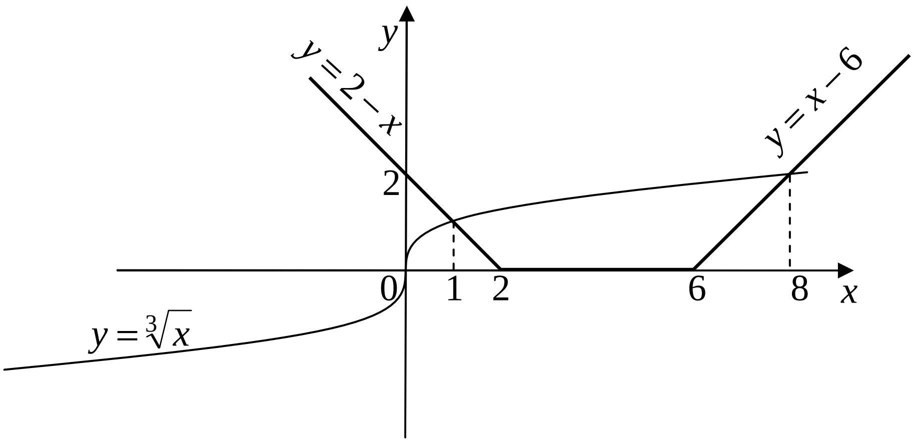


Рис. 46

Графики пересекаются только в двух точках (1; 1) и (8; 2). Значит, уравнение имеет два корня $x \approx 1$, $x \approx 9$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что эти числа являются точными значениями, а поэтому мы можем записать $x = 1$, $x = 8$.

Ответ: 1; 8.

Задача 134. График функции $f(x) = 2|x - 3| - 2|x| + 3x - 3$ и график функции $g(x)$ симметричны относительно точки (2; 2). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x - a) = g(x + a)$ имеет бесконечно много решений.

Решение

График функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на a вправо, а график функции $y = g(x + a)$ получается из графика функции $y = g(x)$ сдвигом на a влево. Поэтому графики функций $y = f(x - a)$ и $y = g(x + a)$ при любом a симметричны относительно точки (2; 2), и задача равносильна следующей: при каких a сдвинутый вправо на a график функции $f(x)$ при симметрии относительно точки (2; 2) накладывается сам на себя по бесконечному множеству точек?

График функции $f(x)$ состоит из двух параллельных лучей и не параллельного им отрезка (рис. 47), которые при сдвиге и симметрии переходят в параллельные себе лучи и отрезок соответственно. Поэтому искомые a – это те, при сдвиге вправо на которые в точку (2; 2) переходит одна из точек A_1, A_4 ($a = \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}$ соответственно; сдвинутые лучи при симметрии частично накладываются на себя), A_2 ($a = 1$; сдвинутый отрезок при симметрии частично накладывается на себя) или A_3 ($a = \frac{1}{3}$; сдвинутые лучи при симметрии частично накладываются друг на друга).

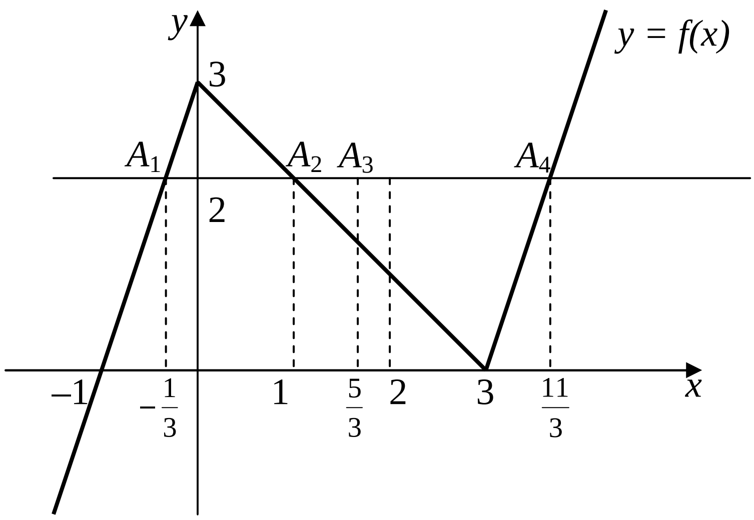


Рис. 47

Ответ: $-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; 1; \frac{7}{3}$.

Задача 135. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $(b+3-|x+2|)(b+x^2+4x)=0$ имеет ровно три корня.

Решение

$$(b+3-|x+2|)(b+x^2+4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=|x+2|-3, \\ b=-(x+2)^2+4. \end{array}\right.$$

Совокупность уравнений проще всего решить графически в плоскости xOb. На рис. 48 видно, что имеется ровно три решения при $b = -3$ и $b = 4$.

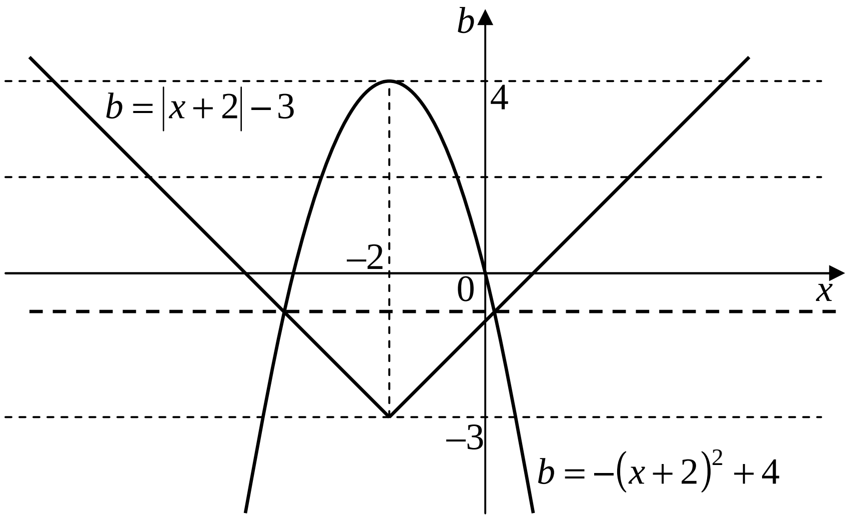


Рис. 48

Ответ: –3; 4.

Задача 136. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $(b+3-|x+2|)(b+x^2+4x)=0$ имеет ровно два корня.

Решение

Решение аналогично решению предыдущей задачи. Из рисунка 48 видно, что два решения имеем при $b \in (-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$ и тогда, когда кривые пересекаются (жирный пунктир на рис. 48). Найдем это значение b:

$$\begin{cases} b = |x+2| - 3, \\ b = -x^2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| - 3 = -(x+2)^2 + 4, \\ b = -(x+2)^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+2|^2 + |x+2| - 7 = 0, \\ b = -(x+2)^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}, \\ b = \dfrac{\sqrt{29}-7}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ответ: $(-\infty;-3) \cup \left\{ \dfrac{\sqrt{29}-7}{2} \right\} \cup (4;+\infty)$.

Задача 137. При каких значениях параметра a уравнение $x - a = 2\left|2|x| - a^2\right|$ имеет решения? Определить число решений уравнения.

Раньше мы в данном параграфе это уравнение (задача 125) решили алгебраическим методом, здесь же мы его решим графически.

Решение

Начертим на координатной плоскости xOy графики функций $y = x - a$ и $y = 2\left|2|x| - a^2\right|$ (рис. 49).

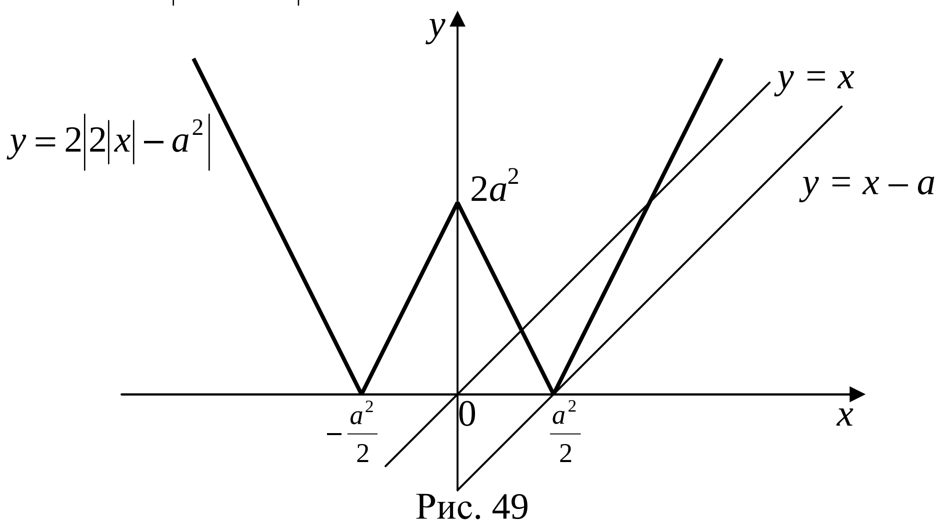


Рис. 49

Число решений исходного уравнения будет совпадать при каждом фиксированном значении параметра a с числом точек пересечения графиков функций $y = x - a$ и $y = 2\left|2|x| - a^2\right|$.

Замечая теперь, что прямая $y = x - a$ пересекает оси абсцисс и ординат соответственно в точках с координатами (a; 0) и (0; $-a$), а график функции $y = 2\left|2|x| - a^2\right|$ имеет с осями абсцисс и ординат общие точки с координатами $\left(-\frac{a^2}{2};0\right)$, $\left(\frac{a^2}{2};0\right)$ и (0; $2a^2$), соответственно, приходим к выводу (рис. 49), что если $\frac{a^2}{2} < a$, то есть если $a \in$ (0; 2), то исходное уравнение решений не имеет. Если $\frac{a^2}{2} = a$, то есть если a = 2 или a = 0, рассматриваемое уравнение имеет одно решение. Исходное уравнение будет иметь два решения при выполнении условий:

$$0 < a < \frac{a^2}{2}, \quad \begin{cases} -\frac{a^2}{2} < a < 0, \\ -a < 2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2a^2 < -a, \\ a < -\frac{a^2}{2}, \end{cases}$$

то есть при всех $a \in (-\infty;-2) \cup \left(-\frac{1}{2};0\right) \cup (2;+\infty)$.

Три решения исходного уравнения будет иметь в случае, если прямая $y = x - a$ проходит или через точку с координатами $\left(-\frac{a^2}{2};0\right)$, или через точку с координатами (0; $2a^2$). Во втором случае $2a^2 = -a$, а в первом $-\frac{a^2}{2} = a$. Таким образом, исходное уравнение имеет три решения, если $a = -\frac{1}{2}$ и $a = -2$.

Наконец, заданное уравнение будет иметь четыре решения, если совместна система $\begin{cases} a < -\frac{a^2}{2}, \\ 2a^2 > -a, \end{cases}$ то есть если $-2 < a < -\frac{1}{2}$.

Ответ: если $a \in$ (0; 2), то уравнение решений не имеет;

если $a = 0$, $a = 2$, то одно решение;

если $a \in (-\infty;-2) \cup \left(-\frac{1}{2};0\right) \cup (2;+\infty)$, то два решения;

если $a = -\frac{1}{2}$ и $a = -2$, то три решения;

если $a \in \left(-2;-\frac{1}{2}\right)$, то четыре решения.

Задача 138. При каких значениях параметра a уравнение $|\ln x| - ax = 0$ имеет три корня?

Решение

Запишем уравнение в виде $|\ln x| = ax$ и построим его график (рис. 50). Заметим, что условие задачи выполняется при $0 < a < a_0$, где a_0 таково, что прямая $y = a_0x$ касается кривой $y = |\ln x|$. Значение a_0 определим из системы уравнений

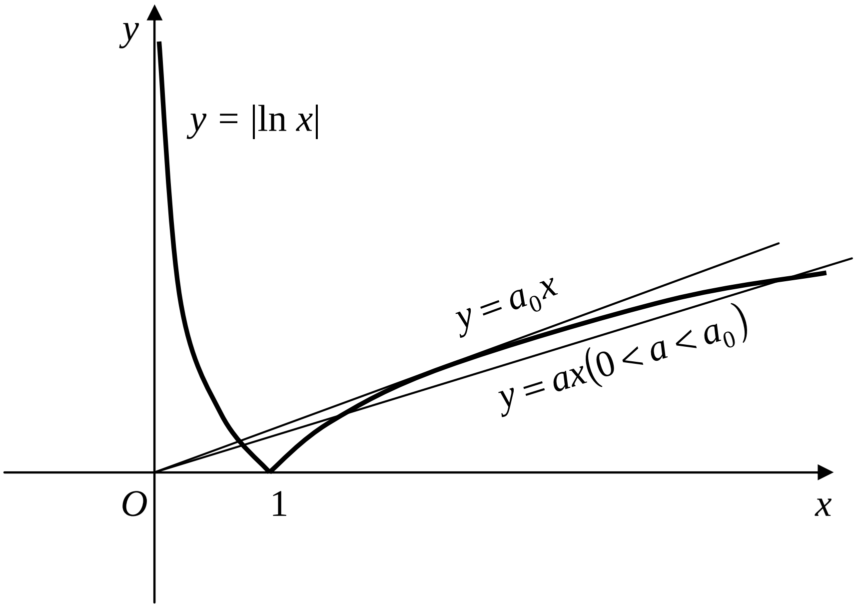


Рис. 50

$$\begin{cases} \ln x = a_0 x, \\ (\ln x)' = a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = a_0 x, \\ \frac{1}{x} = a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1, \\ \frac{1}{x} = a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e, \\ a_0 = \frac{1}{e}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{e}\right)$.

Задача 139. Определить, при каком значении параметра b уравнение $\left|3-|x-4|\right|=b$ имеет три решения.

Решение

График функции $y=\left|3-|x-4|\right|$ представлен на рис. 51. Из этого рисунка ясно, что для того, чтобы прямая $y = b$ пересекала график функции $y=\left|3-|x-4|\right|$ в трех точках, необходимо и достаточно, чтобы $b = 3$.

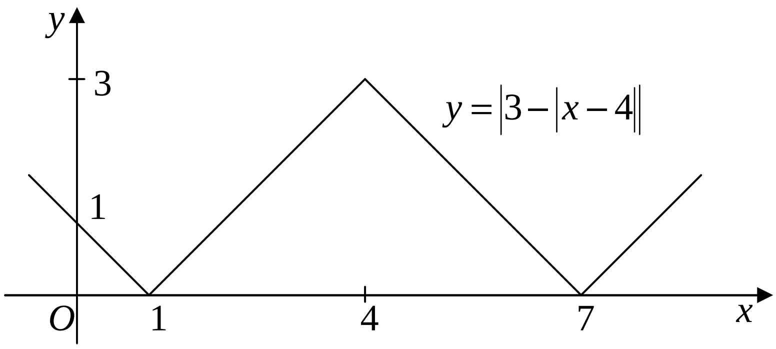


Рис. 51

Ответ: 3.

Задача 140. Найти все значения параметра b, при которых уравнение $3|x-2|-|6-4x|=b$ не имеет решений.

Решение

1 .Запишем уравнение в следующем виде: $3|x-2|-4\left|x-\dfrac{3}{2}\right|=b$.

Построим графики функций $y_1=3|x-2|-4\left|x-\dfrac{3}{2}\right|$ и $y_2 = b$. Корни подмодульных выражений $\dfrac{3}{2}$ и 2.

2. Найдем выражение для функции $y_1(x)$ на соответствующих промежутках:

1) $x<\dfrac{3}{2}\Rightarrow y_1=3(2-x)-4\left(\dfrac{3}{2}-x\right)=x$,

2) $\dfrac{3}{2}\le x\le 2\Rightarrow y_1=3(2-x)-4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=-7x+12$,

3) $x > 2 \Rightarrow y_1 = 3(x-2) - 4\left(x - \frac{3}{2}\right) = -x$.

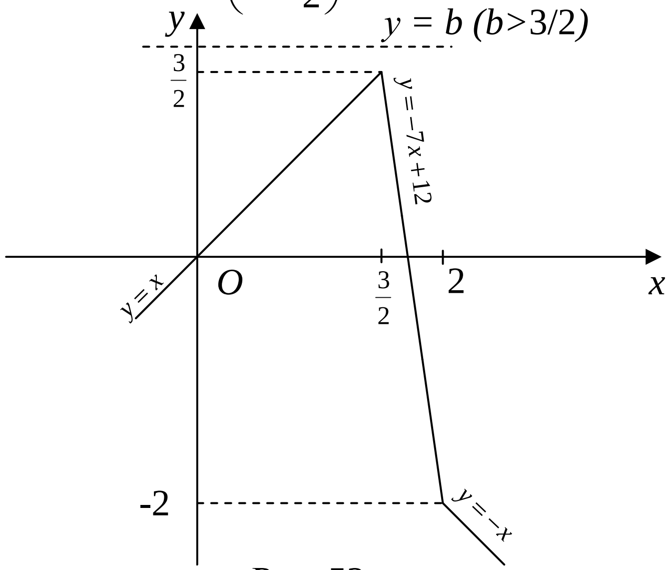


Рис. 52

График функции $y_1(x)$ изображен на рис. 52. Из рисунка ясно, что исходное уравнение не будет иметь решения при $b > \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Задача 141. При каких значениях параметра b уравнение $\left|-x^2 - x + 6\right| - x = b$ имеет три различных корня?

Решение

Рассмотрим функцию $f(x) = \left|-x^2 - x + 6\right| - x$. Корни квадратного трехчлена $-x^2 - x + 6$ суть -3 и 2, следовательно, $-x^2 - x + 6 < 0$ при $x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$ и $-x^2 - x + 6 > 0$ при $x \in [-3;\ 2]$. Значит, при $x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$ $f(x) = x^2 + x - 6 - x = x^2 - 6$, а при $x \in [-3;\ 2]$ $f(x) = -x^2 - x + 6 - x = -x^2 - 2x + 6$.

График $f(x)$ изображен на рис. 53. Пересекая график прямыми $y = b$, получаем, что уравнение $f(x) = b$ имеет три различных корня при $b = 3$ и $b = 7$.

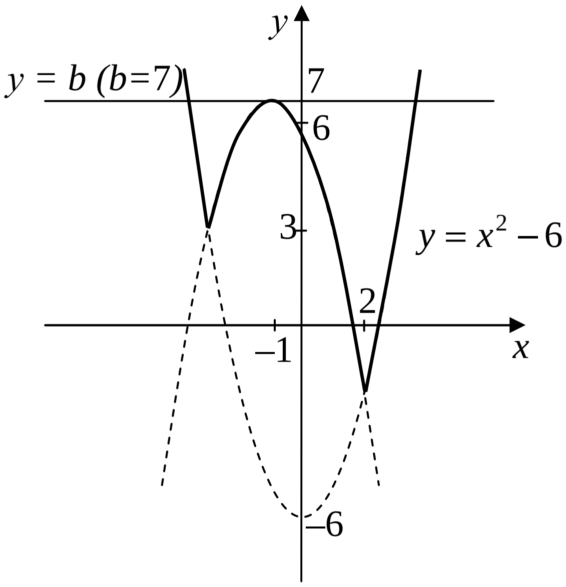


Рис. 53.

Ответ: 3; 7

Задача 142. При каких значениях параметра *a* уравнение $|x+a| = 3 - x^2$ имеет хотя бы один отрицательный корень?

Решение

Построим графики функций $y_1(x) = |x+a|$ и $y_2(x) = 3 - x^2$.

Хотя бы один отрицательный корень заданное уравнение будет иметь тогда, когда абсцисса точки пересечения линий $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будет отрицательна. Геометрически ясно (рис. 54), что исходное уравнение будет иметь отрицательный корень (хотя бы один), когда «угол», образуемый графиком функции $y_1(x) = |x+a|$, будет занимать положение между графиком $y(x) = |x+3|$, левая ветвь которого проходит через вершину параболы $y(x) = -x^2 + 3$, то есть точку (0; 3) (здесь $a = -3$), и графиком $y(x) = |x+a|$, правая ветвь которого касается левой ветви параболы. Найдем точку *M* касания:

$$y' = \left(3 - x^2\right)' = -2x; \quad (x-a)' = 1; \quad -2x = 1,$$

$$x_M = -\frac{1}{2}, \quad y_M = \left(3 - x^2\right)\Big|_{x=-\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}.$$

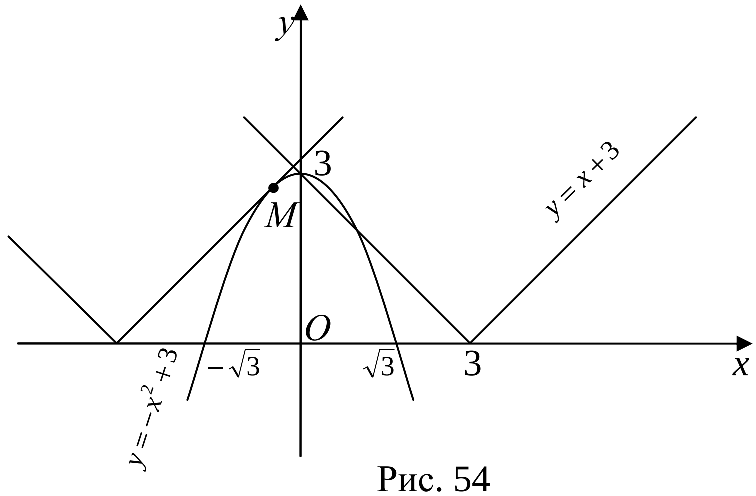


Рис. 54

Найдем значение a, при котором прямая $y = x + a$ проходит через точку М.

$$\frac{11}{4} = -\frac{1}{2} + a \Leftrightarrow a = \frac{13}{4}.$$

Таким образом, $a \in \left(-3; \frac{13}{4}\right)$.

Ответ: $\left(-3; \frac{13}{4}\right)$.

Задача 143. Решите уравнение $2\sqrt{|x|} + x + a = 0$.

Решение

Запишем уравнение в виде $x + a = -2\sqrt{|x|}$ и построим график этого уравнения (рис. 55). Значение x, при котором прямая $y = x + a$ касается кривой $y = -2\sqrt{-x}$, находится из уравнения $\left(-2\sqrt{-x}\right)' = 1$, откуда $x = -1$ и соответствующее значение $a = -1$. Решим уравнение при $-1 < a < 0$. Для этого рассмотрим случаи $x \geq 0$ и $x < 0$ (из графика на рис. 55 видно, что уравнение имеет два отрицательных и один положительный корень).

В первом случае получим $x + 2\sqrt{x} + a = 0$, откуда, пологая $\sqrt{x} = t$, находим $t = -1 \pm \sqrt{1-a}$ и, отбросив отрицательный корень, находим $x = \left(\sqrt{1-a} - 1\right)^2$. При $x < 0$ уравнение примет вид $2\sqrt{-x} - (-x) + a = 0$, откуда $\sqrt{-x} = 1 \pm \sqrt{1+a}$ и $x = -\left(1 \pm \sqrt{1+a}\right)^2$. При a > 0, как видно из графика, уравнение имеет единственный корень (он отрицателен): $x = -\left(1 + \sqrt{1+a}\right)^2$, который находится из уравнения $2\sqrt{-x} + x + a = 0$.

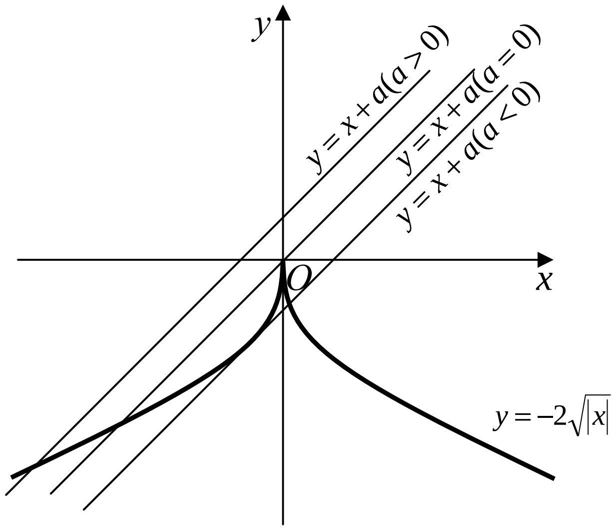


Рис. 55

Ответ: при $a < -1$ $x = \left(\sqrt{1-a} - 1\right)^2$;

при $a = -1$ $x = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$;

при $-1 < a < 0$

$x = \left(\sqrt{1-a} - 1\right)^2$,

$x = -\left(1 \pm \sqrt{1+a}\right)^2$;

при $a = 0$ $x = 0$, $x = -4$;

при $a > 0$ $x = -\left(1 - \sqrt{1+a}\right)^2$.

Задача 144. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{4 - x^2} = |x| + b$ в зависимости от параметра b?

Решение

График функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ – полуокружность радиуса r = 2 с центром в начале координат.

На рис. 56 изображены графики этой функции и функций $y = |x| + b$ при b = ±2, b = 0, b > 2 и b < 2.

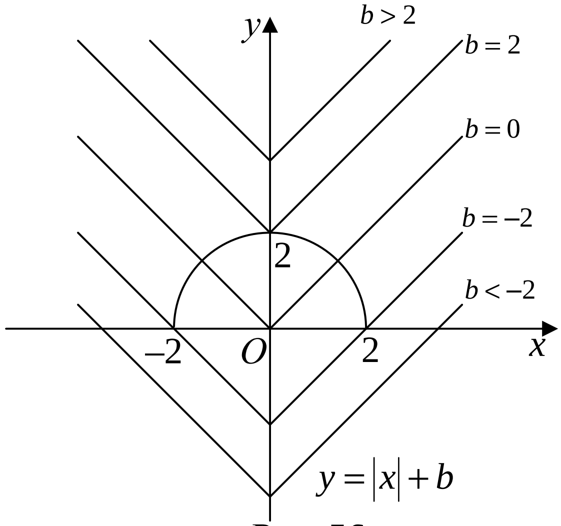


Рис. 56

Ответ: 0 при $|b| > 2$;

1 при $b = 2$;

2 при $-2 \le b < 2$.

Задача 145. При каких значениях параметра b уравнение $\left|x^2 - 6x + 8\right| + \left|x^2 - 6x + 5\right| = b$ имеет более трех корней?

Решение

Прежде всего заметим, что квадратные трехчлены

$$y = x^2 - 6x + 8 \text{ и } y = x^2 - 6x + 5$$

имеют соответственно корни $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ и $x_1 = 5$, $x_2 = 1$.

Рассмотрим функцию, заданную равенством

$$y = \left|x^2 - 6x + 8\right| + \left|x^2 - 6x + 5\right|. \qquad (*)$$

Раскрывая модули, получаем, что если $x < 1$, то $y = 2x^2 - 12x + 13$. Если $1 \le x < 2$, то $y = 3$. Если $2 \le x < 4$, то $y = -2x^2 + 12x - 13$. Если же $4 \le x < 5$, то $y = 3$. Наконец, если $x \ge 5$, то $y = 2x^2 - 12x + 13$.

Построим теперь график функции, заданной равенством (*) (рис. 57).

Как видно из рисунка 57 прямая $y = b$ будет пересекаться с графиком функции (*) в более чем трех точках при $3 \le b < 5$, а поэтому при этих же b исходное уравнение имеет более трех решений.

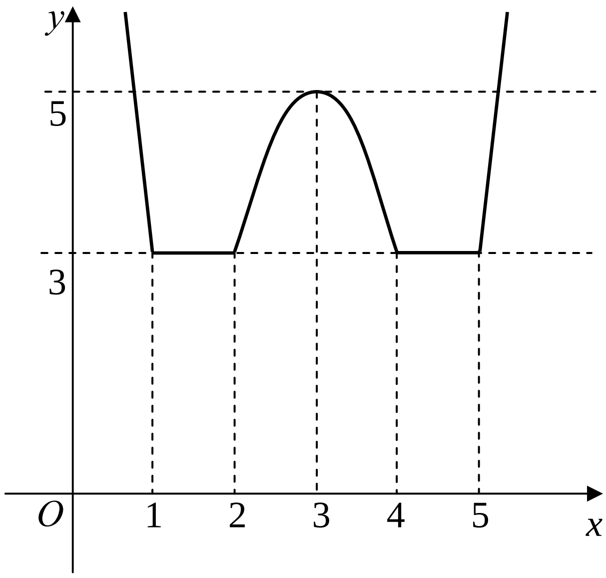


Рис. 57

Ответ: $3 \le b < 5$.

Задача 146. Определите графически число действительных корней уравнения $\lg|x| = x^2 - 5$.

Решение

Строим в одной системе координат графики функций $y = \lg|x|$ и $y = x^2 - 5$ (рис. 58).

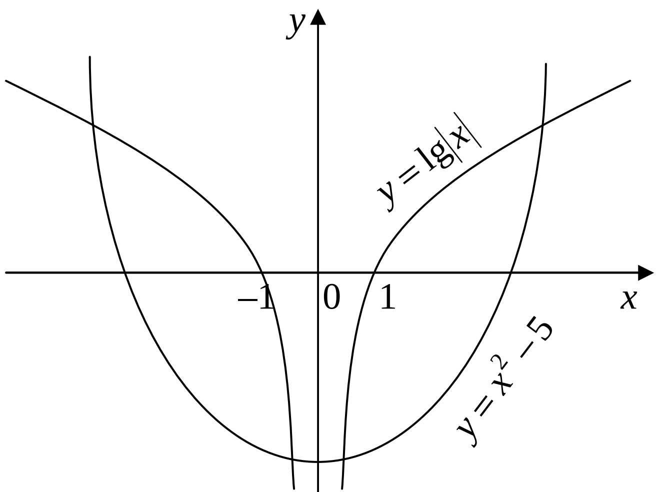


Рис. 58

Графики этих функций имеют четыре общие точки, поэтому данное уравнение имеет четыре действительных корня.

Ответ: четыре корня.

Задача 147. Решить уравнение

$$\log_{0,2}(5-x)+\log_5(2-|x-a|)=0.$$

Решение

Использовав равенство $\log_{0,2}(5-x)=-\log_5(5-x)$, заданное уравнение перепишем в виде $\log_5(2-|x-a|)=\log_5(5-x)$.

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2-|x-a|>0, \\ 5-x>0, \\ 2-|x-a|=5-x. \end{cases}$

Уравнение $2-|x-a|=5-x$ перепишем в виде $|x-a|=x-3$ (*).

Это последнее уравнение проще всего решить, используя геометрические соображения. Построим графики функций $y=|x-a|$ и $y = x - 3$ (рис. 59) Видим, что при $x < 3$ графики не пересекаются и, следовательно, уравнение не имеет решений.

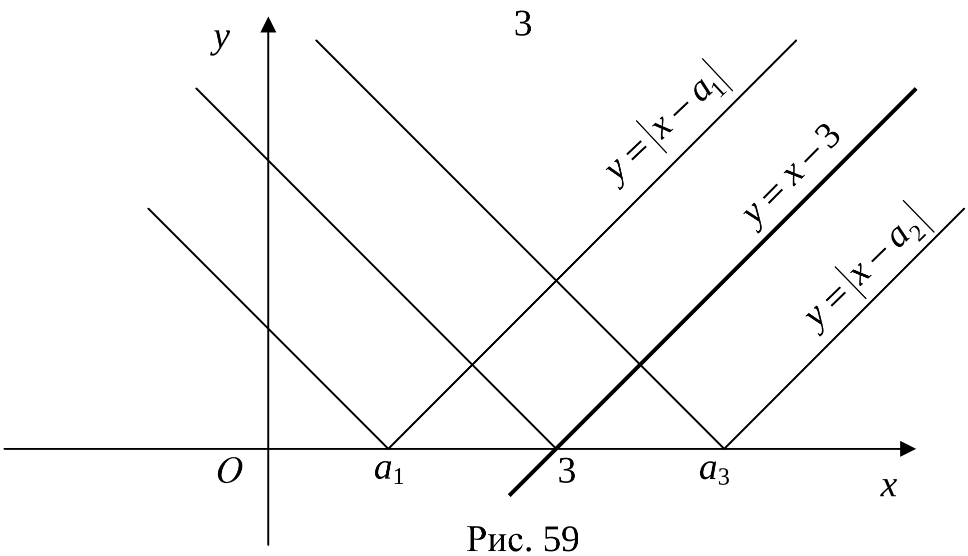


Рис. 59

Если $a = 3$, то при $x \geq 3$ графики функций совпадают, и, следовательно, все значения $x \geq 3$ являются решениями уравнения (*).

При $a > 3$ графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой $x=\dfrac{a+3}{2}$. Таким образом, при $a > 3$ уравнение (*) имеет единственное решение $x=\dfrac{a+3}{2}$.

Исследуем теперь, при каких значениях a найденные решения уравнения (*) будут удовлетворять условиям: $\begin{cases} 2-|x-a|>0, \\ 5-x>0. \end{cases}$

Пусть a = 3, тогда $x \geq 3$. Система примет вид $\begin{cases} |x-a|<2, \\ 5-x>0. \end{cases}$ Ее решением будет промежуток $x \in (1; 5)$. Учитывая, что $x \geq 3$, заключаем, что при a = 3 исходному уравнение удовлетворяют все значения x из промежутка [3; 5).

Рассмотрим случай, когда $x > 3$, $x=\dfrac{a+3}{2}$. Система неравенств примет вид $\begin{cases} \left|\dfrac{a+3}{2}-a\right|<2, \\ 5-\dfrac{a+3}{2}>0, \end{cases}$ или $\begin{cases} |3-a|<4, \\ a<7. \end{cases}$.

Решив эту систему, найдем $a \in (-1; 7)$. Но $a > 3$, поэтому приходим к выводу, что при $a \in (3; 7)$ исходное уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{a+3}{2}$.

Ответ: если $a \in (-\infty; 3)$, то решений нет;
если $a = 3$, то $x \in [3; 5)$;
если $a \in (3; 7)$, то $x=\dfrac{a+3}{2}$;
если $a \in [7; +\infty)$, то решений нет.

Задача 148. Решите уравнение $|\operatorname{ctg} x|=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{\pi}\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$.

Решение

Построим график функции $y = |\operatorname{ctg} x|$ (рис. 60).

Построим график функции $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{\pi}\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$, но для этого предварительно преобразуем аналитическое выражение.

$$y=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{\pi}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right), \; если \;\; x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{\pi}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right), \; если \;\; x\geq\dfrac{\pi}{2},\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{\pi}x-1, \; если \;\; x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{\pi}x+1, \; если \;\; x\geq\dfrac{\pi}{2},\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}x, \; если \;\; x<\dfrac{\pi}{2},\\ 2\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{\pi}x, \; если \;\; x\geq\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

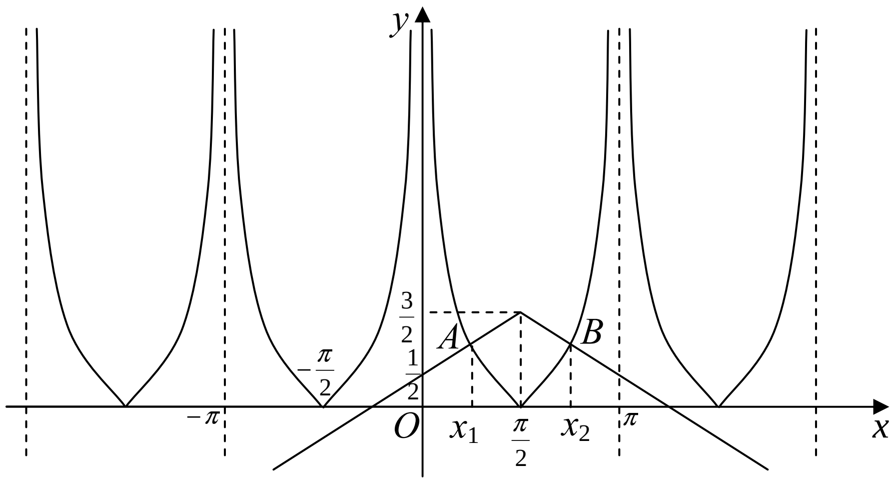


Рис. 60

В этой же системе координат, в которой мы строили график функции $y = |\mathrm{ctg}\ x|$, построим и график второй функции $y=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$ (рис. 60). Мы получим две точки пересечения A и B, абсциссы которых на рисунке обозначены соответственно x_1 и x_2. Вычислим чему равны эти абсциссы.

Легко видеть, что $x_1=\frac{\pi}{4}$. Действительно, при этом значении x имеем $\left|\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}\right|=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\left|\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right|$, $1=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}$, $1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$, $1 = 1$.

Тогда, для нахождения абсциссы точки B, мы поступим следующим образом (используем свойство симметричности графика функции $y=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$ относительно прямой $x=\frac{\pi}{2}$): $x_2=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

Проверка показывает, что действительно значение $x = \frac{3\pi}{4}$ является точным значением корня исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

Задача 149. Решите уравнение $|6x - 5| = 4\sin\frac{\pi}{3}x$.

Решение

Построим в одной системе координат графики функций $y = |6x - 5|$ и $y = 4\sin\frac{\pi}{3}x$ (рис. 61).

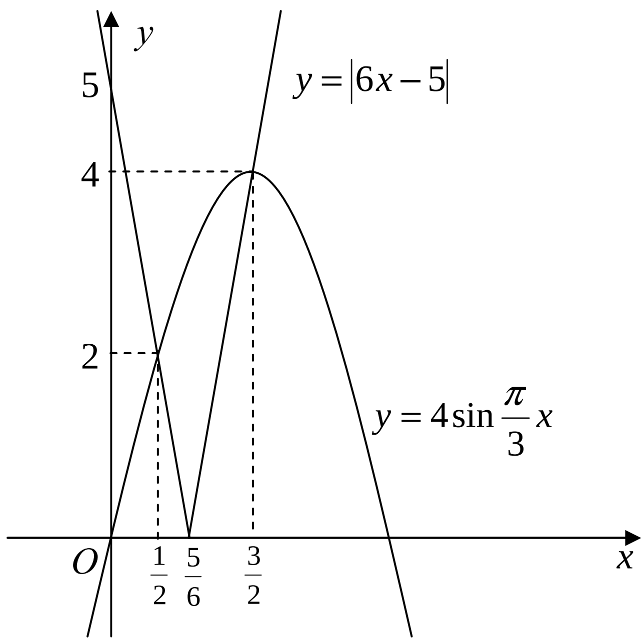


Рис. 61

По рисунку видим, что заданное уравнение имеет два корня: один на промежутке $\left[0; \frac{5}{6}\right]$ и другой – на промежутке $\left[\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right]$. Непосредственный подбор и проверка показывает, что $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Нам осталось доказать, что других корней исходное уравнение не имеет. Прежде всего заметим, что это уравнение может иметь решение лишь в том случае, если $|6x - 5| \le 4$, то есть на отрезке $\left[\frac{1}{6}; \frac{3}{2}\right]$.

Разобьем этот отрезок на две части: $\left[\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right]$ и $\left(\frac{5}{6};\frac{3}{2}\right]$. На промежутке $\left[\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right]$ как легко видно, функция $y=|6x-5|$ убывает, а функция $y=4\sin\frac{\pi}{3}x$ возрастает, таким образом заданное уравнение на этом промежутке не может иметь более одного корня. На промежутке $\left(\frac{5}{6};\frac{3}{2}\right]$ обе функции возрастают. Чтобы доказать, что на этом промежутке уравнение ни имеет корня, покажем, что функция $y=|6x-5|$ растет быстрее, чем функция $y=4\sin\frac{\pi}{3}x$, другими словами, мы должны показать, что $(|6x-5|)' > \left(4\sin\frac{\pi}{3}x\right)'$. Имеем при $x\in\left(\frac{5}{6};\frac{3}{2}\right)$ $(|6x-5|)' - \left(4\sin\frac{\pi}{3}x\right)' = 6-\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}x \geq 6-\frac{4\pi}{3} > 0$, и, следовательно, функция $y=|6x-5|$ растет быстрее, чем функция $y=4\sin\frac{\pi}{3}x$. Поэтому функция $t(x)=4\sin\frac{\pi}{3}x-|6x-5|$ принимает свое наибольшее значение в точке $x=\frac{3}{2}$; это значение равно 0. Таким образом на промежутке $\left(\frac{5}{6};\frac{3}{2}\right)$ выполняется неравенство $t(x) < 0$, то есть $4\sin\frac{\pi}{3}x < |6x-5|$, и исходное уравнение на этом промежутке решений не имеет.

Окончательно получаем, что заданное уравнение имеет два корня $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$.

Задача 150. Найти число решений уравнения $|x-2|=\dfrac{a}{x}$.

Решение

Можно, конечно, построить в одной системе координат графики функций $y=|x-2|$ и $y=\dfrac{a}{x}$, а затем с рисунка считывать ответ.

В данном случае полезно сначала преобразовать уравнение, а потом его исследовать графически.

Имеем $|x-2|=\dfrac{a}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x|x-2|=a, \\ x\neq 0. \end{cases}$

Построим в одной системе координат графики функций $y=x|x-2|$ и $y=a$ (рис. 62).

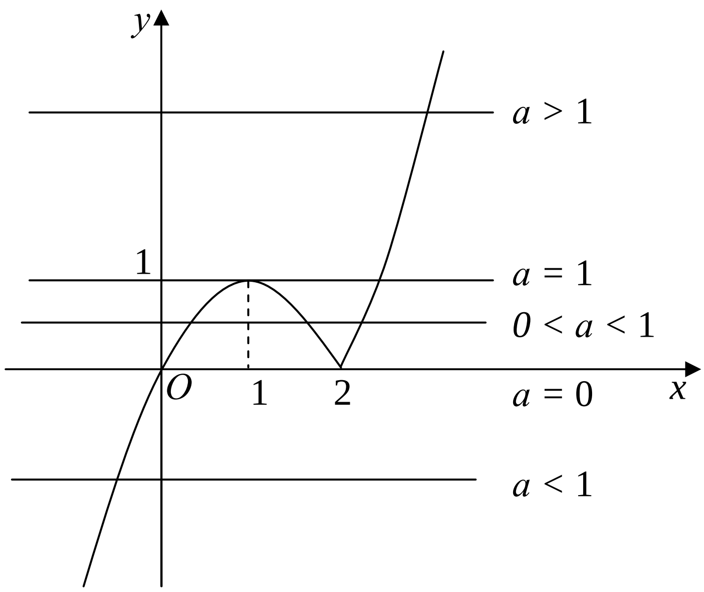


Рис. 62

На рисунке 62 приведены 5 различных случаев. Два из них очевидны.

Если $a < 0$, то решение одно.

Если $a = 0$, то точек пересечения двух графиков – две. Но одна из них – (0; 0), что по условию задачи не подходит в качестве решения. Следовательно, при $a = 0$ снова имеем единственное решение.

Пусть теперь $a > 0$. С учетом условия $0 < x < 2$ найдем ординату вершины параболы $y = -x^2 + 2x$ (точка A): $x_0 = 1$, $y_0 = y(x_0) = y(1) = 1$. Теперь мы получаем полный ответ.

Ответ: если $a \le 1$, то $n = 1$;
если $0 < a < 1$, то $n = 3$;
если $a = 1$, то $n = 2$;
если $a > 1$, то $n = 1$.

Задача 151. При каких значениях параметра a уравнение $|x-4| = ax$ имеет корень, принадлежащий отрезку [2; 6]?

Решение

Построим в одной и той же системе координат графики функций $y = |x-4|$ и $y = ax$ (рис. 63).

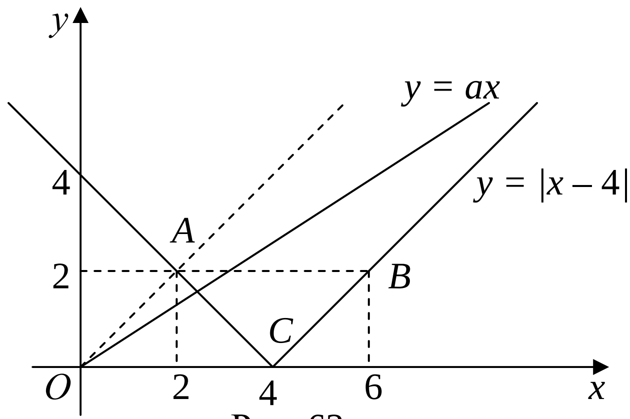


Рис. 63

Прямая $y = ax$ проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент a. При изменении a эта прямая поворачивается вокруг точки (0; 0). Как это видно из рисунка параметр a должен быть выбран таким образом, чтобы прямая $y = ax$ лежала между прямыми OA и Ox, а это означает, что параметр a должен быть не больше углового коэффициента прямой OA, но не меньше углового коэффициента оси Ox.

Ответ: $a \in [0; 1]$.

Задача 152. Имеет ли уравнение $12\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=|3-5\cos x|$ хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

Решение

Алгебраический метод

Перепишем уравнение $12\sin x=|3-5\cos x|$ в виде совокупности двух систем

$$\begin{cases}12\sin x\ge 0,\\ 12\sin x=-(3-5\cos x);\end{cases}\quad \begin{cases}12\sin x\ge 0,\\ 12\sin x=3-5\cos x.\end{cases}$$

1) Для первого уравнения 12sin x + 5cos x = 3 нормирующий множитель $N=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$ вводит дополнительный угол φ такой, что $\sin\varphi=\frac{5}{13}$ и

$$\sin(x+\varphi)=\frac{3}{13}\Leftrightarrow x=-\varphi+(-1)^n\arcsin\frac{3}{13}+\pi n, n\in Z.$$

а) n = 2l, $l\in$ Z; $x=-\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{3}{13}+2\pi l$.

Но sin x для такого аргумента, очевидно, отрицателен.

б) n = 2l + 1, тогда $x_{(1)}=\pi-\arcsin\frac{5}{13}-\arcsin\frac{3}{13}+2\pi l$, и sin x от аргумента $x_{(1)}$, очевидно, положителен.

При этом расстояние между корнями серии $x_{(1)}$, по крайней мере, не меньше 2π.

2) Для второго уравнения 12sin x – 5cos x = –3 нормирующий множитель N и дополнительный угол φ такие же (N = 13, $\varphi=\arcsin\frac{5}{13}$)

и $\sin(x-\varphi)=-\frac{3}{13}\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\varphi+\arcsin\left(-\frac{3}{13}\right)+2\pi n, n\in Z;\\ \varphi+\pi-\arcsin\left(-\frac{3}{13}\right)+2\pi l, l\in Z.\end{array}\right.$

При этом синус от первого аргумента положителен, а от второго – отрицателен (легко проверить). Таким образом, получили вторую серию корней $x_{(2)} = \arcsin\frac{5}{13} - \arcsin\frac{3}{13} + 2\pi n$.

Остается вопрос о выполнении неравенства $\left|x_{(1)} - x_{(2)}\right| \le \frac{\pi}{2}$.

При $l \ne n$ неравенство, очевидно, не выполняется.

При $l = n$ оно примет вид

$$\left|\pi - 2\arcsin\frac{5}{13}\right| \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le \pi - 2\arcsin\frac{5}{13} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \le -2\arcsin\frac{5}{13} \le -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le \arcsin\frac{5}{13} \le \frac{3\pi}{4}.$$

Неравенство $\frac{\pi}{4} \le \arcsin\frac{5}{13}$ неверно. Оно равно сильно неравенству $\sin\frac{\pi}{4} \le \frac{5}{13}$, то есть $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{5}{13}$ или $13\sqrt{2} \le 10$ – противоречие.

Ответ: нет.

Геометрический метод

При условии $\sin x \ge 0$ имеем совокупность двух уравнений

$$\sin x = \frac{5}{12}\cos x - \frac{1}{4},\ \sin x = -\frac{5}{12}\cos x + \frac{1}{4}.$$

Ее решения изображаются точками A и B тригонометрической окружности (рис. 64), причем точки A' и B' – не решения из-за условия $\sin x > 0$.

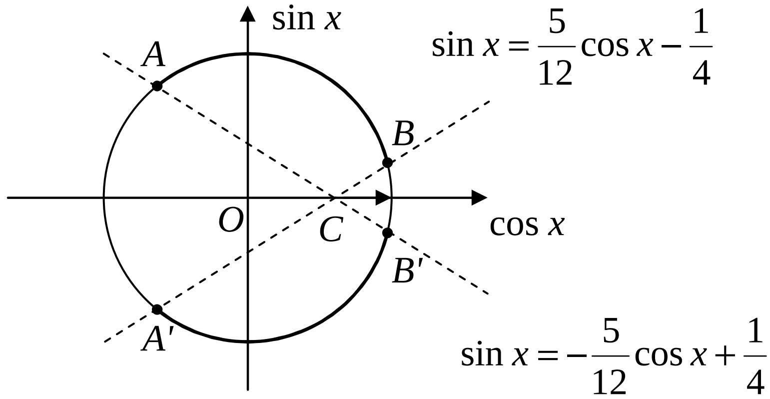


Рис. 64

При этом расстояние между ближайшими корнями равно длине дуги

$$\cup AB = \frac{1}{2}\left(\cup AB + \cup A'B'\right) = \angle ACB = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} > \frac{\pi}{2},$$

так как $\operatorname{arctg}\frac{5}{12} < \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}1$.

Задача 153. Изобразите на плоскости xOy множеством точек, координаты которых удовлетворяют двойному неравенству

$$x - \left|1 - x^2\right| + |x| + |3x - 3| + |x + 1| - 7 \le y \le \sqrt{4 - x^2}.$$

Решение

Модули в левой части двойного неравенства обращаются в нуль в точках –1, 0 ,1. Разобьем ось Ox этими точками на четыре промежутка: $x < -1$, $-1 \le x < 0$, $0 \le x < 1$, $x \ge 1$ и на каждом из них раскроем модули – в левой части двойного неравенства получается функция следующего вида

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 \quad \textit{при} \quad x < -1, \\ (x-1)^2 - 5 \quad \textit{при} \quad -1 \le x < 0, \\ x^2 - 4 \quad \textit{при} \quad 0 \le x < 1, \\ 1 - (x-3)^2 \quad \textit{при} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Графиком функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса 2 с центром в начале координат.

Фигура, заданная неравенством, изображена на рис. 65.

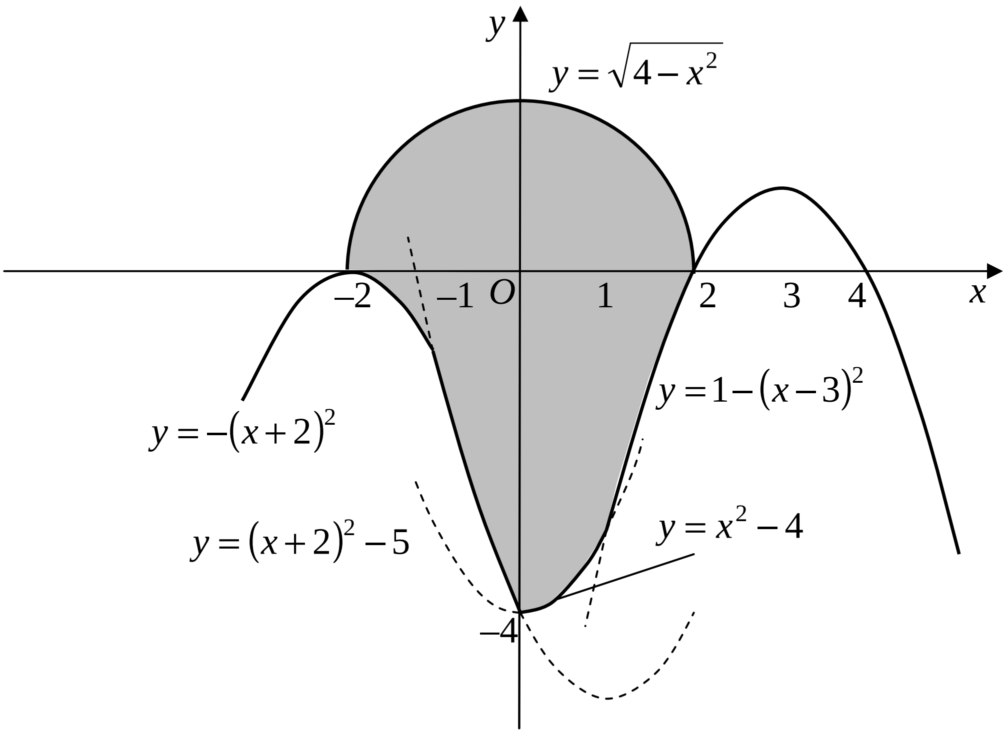


Рис. 65

Ниже мы в задаче 154 используем материал статьи В. Голубева «Школа решения нестандартных задач», опубликованной в газете «Математика» №17, 2005, в которой предложено шесть различных методов решения уравнений с модулем.

Задача 154. Найдите все значения параметра *a*, при которых неравенство

$$5x+7|x-a|+3|x+3|+6|x-3|>145 \qquad (1)$$

выполняется для всех *x*.

Решение

Первый метод (метод интервалов)

Подмодульные выражения равны нулю при $x = a$, $x = -3$ и $x = 3$ соответственно. Поэтому выделим следующие пять вариантов взаимного расположения этих значений.

Вариант 1. $a < -3 < 3$.

Вариант 2. $a = -3 < 3$.

Вариант 3. $-3 < a < 3$.

Вариант 4. $-3 < a = 3$.

Вариант 5. $-3 < 3 < a$.

Для каждого из вариантов мы найдем значения параметра a, при котором исходное неравенство выполняется для всех значений x. И поскольку оно должно выполняться для всех значений x, то оно должно выполняться и для всех значений x из каждого интервала. Поэтому мы будем не решать исходное неравенство для каждого значения параметра, а определять каждый раз те значения параметра, при котором исходное неравенство истинно на всем промежутке. При этом мы подробно рассмотрим вариант 1, а остальные варианты – без особых комментариев.

Вариант 1: $a < -3$.

Числовую прямую представим в виде четырех непересекающихся промежутков, задаваемых условиями (рис. 66):

(сл. 1.1) $x \le a$;

(сл. 1.2) $a < x \le -3$;

(сл. 1.3) $-3 < x \le 3$;

(сл. 1.4) $3 < x$.

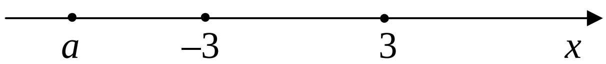


Рис. 66

Для каждого случая при $a < -3$ все подмодульные выражения исходного неравенства знакоопределенны, что позволяет переписать это неравенство без модулей.

Случай 1.1: $x \le a$. Тогда

$$5x + 7(x - a) + 3(x + 3) + 6(x - 3) > 145 \Leftrightarrow x < \frac{7a - 136}{11}.$$

Полученное неравенство выполняется для всех $x \le a$ тогда и только тогда (!), когда

$$a < \frac{7a - 136}{11};$$

то есть при

$$a < -34. \tag{2}$$

Случай 1.2: $a < x \le -3$. Тогда

$$5x + 7(x-a) - 3(x+3) - 6(x-3) > 145 \Leftrightarrow \frac{7a+136}{3} < x$$

Полуинтервал $(a;\,-3]$ лежит на луче $\left(\frac{7a+136}{3};+\infty\right)$ тогда и только тогда (!), когда левый конец полуинтервала находится *не левее* (!) начала луча, то есть когда

$$\frac{7a+136}{3} \le a \Leftrightarrow a \le -34. \tag{3}$$

Таким образом, при $a \le -34$ исходное неравенство выполняется для всех значений x из промежутка $(a;\,-3]$.

Случай 1.3: $-3 < x \le 3$. Тогда

$$5x + 7(x-a) + 3(x+3) - 6(x-3) > 145 \Leftrightarrow \frac{7a+118}{9} < x. \tag{4}$$

Чтобы неравенство (4) выполнялось для всех x из полуинтервала $(-3;\,3]$, необходимо и достаточно, чтобы, как и в случае 1.2, левый конец полуинтервала находился бы не левее начала луча, то есть

$$\frac{7a+118}{9} \le -3 \Leftrightarrow a \le -\frac{145}{7}. \tag{5}$$

Случай 1.4: $3 < x$. Тогда

$$5x + 7(x-a) + 3(x+3) + 6(x-3) > 145 \Leftrightarrow \frac{7a+154}{21} < x.$$

Неравенство выполняется на луче $(3;\,+\infty)$ тогда и только тогда, когда начало этого луча находится не левее начала луча $\left(\frac{7a+154}{21};+\infty\right)$, то есть когда

$$\frac{7a+154}{21} \le 3 \Leftrightarrow a \le -13. \tag{6}$$

Неравенства (2), (3), (5) и (6) объявляют условия, при которых при $a < -3$ одновременно исходное неравенство выполняется на всех промежутках оси Ox.

Поэтому система указанных неравенств объявляет среди значений $a < -3$ все те значения параметра a, при которых исходное неравенство выполняется для всех x.

Имеем

$$\begin{cases}(2),\\(3),\\(5),\\(6)\end{cases} \Leftrightarrow a < -34.$$

Ответ варианта 1: $a < -34$.

Вариант 2: $a = -3$. Тогда исходное неравенство принимает вид

$$5x + 10|x+3| + 6|x-3| > 145.$$

Это неравенство можно решать, а можно указать хотя бы одно значение x (например, $x = 0$), при котором оно ложно, чтобы объявить, что $a = -3$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ варианта 2: $a \neq -3$.

Вариант 3: $-3 < a < 3$.

(сл. 3.1) $x \leq -3 \Rightarrow$

$$5x - 7(x-a) - 3(x+3) - 6(x-3) > 145 \Leftrightarrow x < \frac{7a-136}{11}.$$

Последнее неравенство выполняется для всех x из промежутка $(-\infty; -3]$ тогда и только тогда, когда

$$-3 < \frac{7a-136}{11} \Leftrightarrow a > \frac{103}{7},$$

что противоречит условию $-3 < a < 3$ данного варианта.

Таким образом, при всех $a \in (-3; 3)$ исходное неравенство не выполняется на промежутке $(-\infty; -3]$.

Ответ вариант 3: $a \notin (-3; 3)$.

Вариант 4: a = 3.

Тогда $5x+3|x+3|+13|x-3|>145$. Это равенство ложно при x = 0, и, следовательно, $a \neq 3$.

Ответ варианта 4: $a \neq 3$.

Вариант 5 (рис. 67): 3 < a.

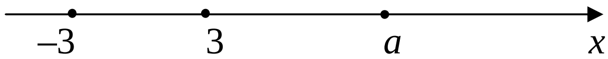


Рис. 67

(сл. 5.1) $x \le -3$;

(сл. 5.2) $-3 < x \le 3$;

(сл. 5.3) $3 < x \le a$;

(сл. 5.4) $a < x$.

Случай 5.1: $x \le -3$. Тогда

$$5x-7(x-a)-3(x+3)-6(x-3)>145 \Leftrightarrow x<\frac{7a-136}{11}.$$

Для любых x < –3 выполняется последнее неравенства тогда и только тогда, когда

$$-3<\frac{7a-136}{11} \Leftrightarrow a>\frac{103}{7}. \qquad (7)$$

Случай 5.2: $-3 < x \le 3$.

$$5x-7(x-a)+3(x+3)-6(x-3)>145 \Leftrightarrow x<\frac{7a-118}{5}.$$

Это неравенство выполняется для всех $x \in (-3;\ 3]$ тогда и только тогда, когда

$$3<\frac{7a-118}{5} \Leftrightarrow a>19. \qquad (8)$$

Случаи 5.3: $3 < x \le a$.

$$5x-7(x-a)+3(x+3)+6(x-3)>145 \Leftrightarrow x>\frac{154-7a}{7}=22-a.$$

Для всех $x \in (3;\ a]$ последнее неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$22 - a \le 3 \Leftrightarrow a \ge 19. \qquad (9)$$

Случай 5.4: $a \le x$.

$$5x + 7(x - a) + 3(x + 3) + 6(x - 3) > 145 \Leftrightarrow \frac{7a + 154}{21} < x.$$

Для любого $x \in [a; +\infty)$ это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{7a + 154}{21} < a \Leftrightarrow a > 11. \qquad (10)$$

Система неравенств (7)–(10), как и в варианте 1, объявляет среди значений $a > 3$ все значения, при которых исходное неравенство выполняется для всех x:

$$\begin{cases} (9), \\ (10), \\ (11), \\ (12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \dfrac{103}{7}, \\ a > 19, \\ a \ge 19, \\ a > 11 \end{cases} \Leftrightarrow a > 19.$$

Ответ варианта 5: $a > 19$.

Объединяя ответы всех вариантов, получаем ответ задачи.

Ответ: $a < -34$ или $a > 19$.

Второй метод (решение в плоскости xOa)

Рассмотрим в плоскости переменных x и a множество всех точек таких и только таких, координаты которых удовлетворяют исходному неравенству

$$5x + 7|x - a| + 3|x + 3| + 6|x - 3| > 145. \qquad (11)$$

Как известно, такое множество принято называть ГМТ неравенства (11) (ГМТ – геометрическое место точек).

Обычно с этой целью выявляют ту из двух переменных, относительно которой неравенство легко разрешимо. В нашем случае, очевидно, таковой является переменная a.

Чтобы не иметь неудобств с дробями при решении неравенства (11) относительно параметра, введем временно параметр $p = 7a$.

Тогда неравенство (11) равносильно неравенству

$$|7x-p|>145-5x-3|x+3|-6|x-3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p<7x-(145-5x-3|x+3|-6|x-3|), \\ p<7x+(145-5x-3|x+3|-6|x-3|) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p<p_1(x), \\ p>p_2(x), \end{array}\right.$$

где

$$p_1(x)=12x+3|x+3|+6|x-3|-145,$$
$$p_2(x)=2x-3|x+3|-6|x-3|+145.$$

Далее по стандартной схеме раскрытия модуля устанавливаем, что

если $x \le -3$, то $p_1(x) = 3x - 136$ и $p_2(x) = 11x + 136$;

если $-3 \le x \le 3$, то $p_1(x) = 9x - 118$ и $p_2(x) = 5x + 118$;

если $x \ge 3$, то $p_1(x) = 21x - 154$ и $p_2(x) = -7x + 154$.

Осталось найти точки пересечения графиков функций $p_1(x)$ и $p_2(x)$, то есть решить совокупность трех систем для определения абсцисс общих точек:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -3, \\ p_1(x)=p_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} -3\le x\le 3, \\ p_1(x)=p_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3, \\ p_1(x)=p_2(x); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -3, \\ 3x-136=11x+136 \end{cases} \\ \begin{cases} -3\le x\le 3, \\ 9x-118=5x+118 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3, \\ 21x-154=-7x+154; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-=34, \\ \varnothing \\ x=11. \end{array}\right. \tag{12}$$

Возвращаясь к переменной a, получаем, что неравенство (11) равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} a<\frac{1}{7}p_1(x)=a_1(x), \\ a>\frac{1}{7}p_2(x)=a_2(x), \end{array}\right. \tag{13}$$

где

$$a_1(x)=\begin{cases}\frac{3}{7}x-\frac{136}{7} \quad при \quad x\le -3,\\ \frac{9}{7}x-\frac{118}{7} \quad при \quad -3\le x\le 3,\\ 3x-22 \quad при \quad x\ge 3\end{cases} \tag{14}$$

и

$$a_2(x)=\begin{cases}\frac{11}{7}x+\frac{136}{7} \quad при \quad x\le -3,\\ \frac{5}{7}x+\frac{118}{7} \quad при \quad -3\le x\le 3,\\ -x+22 \quad при \quad x\ge 3.\end{cases} \tag{15}$$

Абсциссы общих точек графиков функций $a_1(x)$ и $a_2(x)$ в силу (12) есть –34 и 11. Подставляя эти значения в (14) и (15) соответственно, найдем и ординаты этих точек:

$$a_1(-34) = a_2(-34) = -34;$$

$$a_1(11) = a_2(11) = 11.$$

Функция $a_1(x)$ в силу (14) на отрезке [–34; 11] строго монотонно возрастает, а функция $a_2(x)$ в силу (14) сначала возрастает на отрезке [–34; 3], достигая своего максимального значения $a_2(3) = 19$, а затем убывает.

Графики функций $a_1(x)$ и $a_2(x)$, очевидно, есть трехзвенные ломаные линии.

В силу (13) искомое геометрическое место точек неравенства (11) есть объединение геометрического места точек неравенства

$$a < a_1(x) \tag{16}$$

и геометрического места точек неравенства

$$a > a_2(x). \tag{17}$$

Геометрическое место точек неравенства (16) есть все точки плоскости xOa лежащие ниже графика функции $a_1(x)$, а геометрическое место точек неравенства (17) – все точки, лежащие выше графика функции $a_2(x)$.

Следовательно, искомое геометрическое место точек неравенства (11) как объединение указанных двух ГМТ есть все точки плоскости xOa, кроме точек, лежащих между графиками функций $a_1(x)$ и $a_2(x)$, включая точки графиков, и с абсциссами из отрезка [–34; 11] (рис. 68).

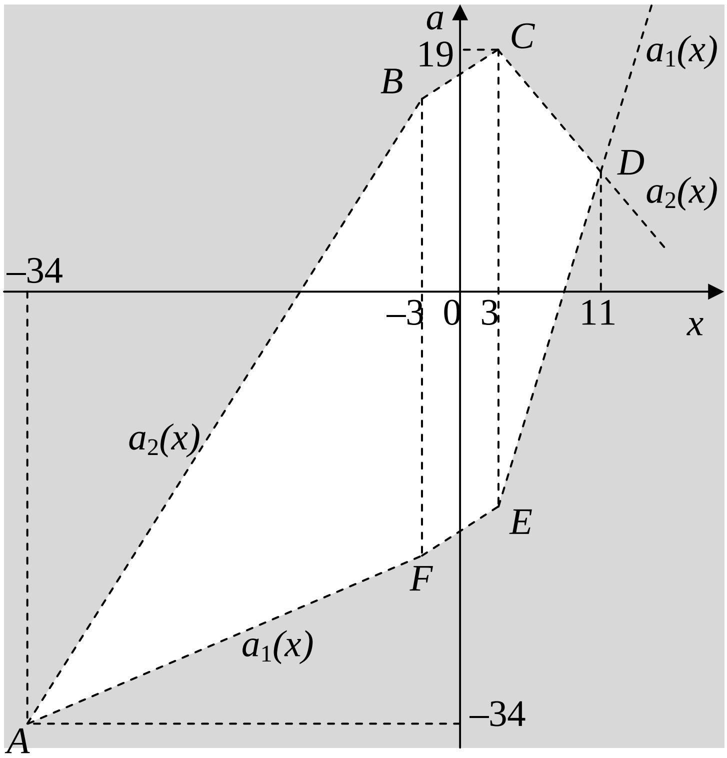


Рис. 68

Для решения задачи вам осталось понять, как в плоскости xOa найти искомые значения параметра.

С этой целью рекомендуется предварительно проанализировать, что означает, что данное значение a_0 параметра a есть искомое.

Из условия задачи следует, что a_0 – искомое, если для всех x пара $(x; a_0)$ удовлетворяет неравенству (11). На языке точек плоскости xOa это означает, что все точки с ординатой a_0 должны принадлежать ГМТ неравенства (11), то есть вся прямая, параллельная оси абсцисс и пересекающая ось ординат в точке $a = a_0$, должна принадлежать указанному ГМТ. Получили необходимое условие того, что a_0 – искомое значение.

Обязательно надо обосновать и достаточное условие: если прямая, параллельная оси абсцисс, принадлежит ГМТ неравенства (11), то ордината a_0 – точка пересечения этой прямой с осью переменной a – есть искомое значение параметра.

Предоставляем читателю возможность самостоятельно доказать сформулированное достаточное условие.

Теперь мы готовы указать искомые значения параметра, «двигая» горизонтальную прямую снизу вверх (рис. 68): $a < -34$ или $a > 19$.

Ответ: $a < -34$ или $a > 19$.

Третий метод (метод нестандартных преобразований неравенств с модулем)

Основная идея метода. Любое неравенство с модулем можно преобразовать в равносильную ему систему или совокупность, не устанавливая каких-либо ограничений на подмодульное и "внемодульное" выражения!

Это обусловлено всеми широко известными преобразованиями основных неравенств с модулями, представленными в несколько необычной форме в следующей таблице (табл. 4).

Таблица 4

Преобразования основных неравенств с модулями $\left(\left|f(x)\right| \vee g(x)\right)$

1	2	3	4
$\left\|f(x)\right\| < g(x)$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$	$\left\|f(x)\right\| \le g(x)$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ -f(x) \le g(x) \end{cases}$	$\left\|f(x)\right\| \ge g(x)$ $\Updownarrow$ $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ -f(x) \ge g(x) \end{array}\right.$	$\left\|f(x)\right\| > g(x)$ $\Updownarrow$ $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ -f(x) > g(x) \end{array}\right.$

Читателю предоставляем возможность самостоятельно доказать равносильность преобразований основных неравенств с модулем, представленных в таблице 4.

Можно сформулировать общее правило.

Общее правило. Если меньше, меньше или равно, то – система. Если больше, больше или равно, то – совокупность.

Более подробно это означает, что:

1) если исходное неравенство относительно данного модуля имеет вид $|f(x)| < g(x)$ или $|f(x)| \le g(x)$, то заменяем модуль на плюс-минус подмодульное выражение и получаемые два неравенства рассматриваем в системе;

2) если исходное неравенство относительно данного модуля имеет вид $|f(x)| > g(x)$ или $|f(x)| \ge g(x)$, то заменяем модуль на плюс-минус подмодульное выражение и получаемые неравенства рассматриваем в совокупности.

Исходное неравенство

$$5x + 7|x - a| + 3|x + 3| + 6|x - 3| > 145 \tag{18}$$

относительно любого из трех модулей является неравенством вида $|f(x)| > g(x)$, а поэтому (!) оно равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{ll} 5x + 7(x-a) + 3(x+3) + 6(x-3) > 145, & (+++) \\ 5x + 7(x-a) + 3(x+3) - 6(x-3) > 145, & (++-) \\ 5x + 7(x-a) - 3(x+3) + 6(x-3) > 145, & (+-+) \\ 5x + 7(x-a) - 3(x+3) - 6(x-3) > 145, & (+--) \\ 5x - 7(x-a) + 3(x+3) + 6(x-3) > 145, & (-++) \\ 5x - 7(x-a) + 3(x+3) - 6(x-3) > 145, & (-+-) \\ 5x - 7(x-a) - 3(x+3) + 6(x-3) > 145, & (--+) \\ 5x - 7(x-a) - 3(x+3) - 6(x-3) > 145. & (---) \end{array}\right.$$

Эта совокупность получается заменой модулей на плюс-минус подмодульные выражения для всевозможных восьми (два в кубе) различных комбинаций знаков (эти комбинации знаков указаны справа).

Если кого-то пугает количество неравенств в совокупности, то укажем на путь возможного исключения некоторых неравенств. Заметим только, что это потребует более глубокого погружения в происходящее, что не любому читателю желательно.

Поскольку для всех x второе подмодульное выражение всегда больше третьего ($x + 3 > x - 3$ для всех x), то при $x + 3 \le 0$ всегда $x - 3 < 0$. Поэтому комбинации знаков (+ – +) и (– – +) невозможны, и исходное неравенство (18) равносильно совокупности уже шести неравенств:

$$\left[\begin{array}{ll} 3x - a - 22 > 0, & (+++) \\ 9x - 7a - 118 > 0, & (++-) \\ 3x - 7a - 136 > 0, & (+--) \\ x + a - 22 > 0, & (-++) \\ 7a - 118 - 5x > 0, & (-+-) \\ 7a - 136 - 11x > 0. & (---) \end{array}\right.$$

Замечание. Любой путь решения исходной задачи потребует рассмотрения в том или ином аспекте шести неравенств последней совокупности.

Решаем каждое неравенство последней совокупности относительно x. Будем иметь:

$$\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{a+22}{3}, \\ x > \dfrac{7a+118}{9}, \\ x > \dfrac{7a+136}{3}, \\ x > 22 - a, \\ x < \dfrac{7a-118}{5}, \\ x < \dfrac{7a-136}{11}. \end{array}\right. \tag{19}$$

Полученная совокупность указывает на то, что множество решений исходного неравенства есть объединение шести разнонаправленных лучей (четырех в одну сторону и двух в другую).

Нам необходимо найти значения параметра a, при которых множество решений неравенства (18) (и, следовательно, совокупности (19)) есть вся числовая прямая).

– Когда это возможно?

– Это возможно тогда и только тогда, когда хотя бы одна пара открытых разнонаправленных лучей покрывает всю числовую прямую.

– Когда хотя бы одна пара открытых разнонаправленных лучей покрывает всю числовую прямую.

– Когда конец одного луча из этой пары принадлежит другому лучу.

Предлагаем читателю самостоятельно ответить на поставленный вопрос для случаев:

1) только один из двух разнонаправленных лучей является открытым;

2) оба разнонаправленных луча являются закрытыми.

В совокупности (19) первых четыре неравенства задают лучи, направленные вправо, а два последних неравенства – лучи, направленные влево. Поэтому существует восемь различных пар покрытия числовой прямой, которые определяют совокупность восьми неравенств (обеспечивающих для каждой пары соответствующее условие покрытия):

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{7a-118}{5}<\dfrac{a+22}{3}, \\ \dfrac{7a-118}{5}<\dfrac{7a+118}{9}, \\ \dfrac{7a-118}{5}<\dfrac{7a+136}{3}, \\ \dfrac{7a-118}{5}<22-a, \\ \dfrac{7a-136}{5}<\dfrac{a+22}{3}, \\ \dfrac{7a-136}{5}<\dfrac{7a+118}{9}, \\ \dfrac{7a-136}{5}<\dfrac{7a+136}{3}, \\ \dfrac{7a-136}{5}<22-a. \end{array}\right. \tag{20}$$

Предлагаем читателю самостоятельно решить последнюю совокупность неравенств.

Четвертый метод (решение в плоскости xOy)

Преобразуем исходное неравенство к виду

$$7|x-a|>145-5x-3|x+3|-6|x-3|$$

и введем функции

$$f(x)=7|x-a| \text{ и } g(x)=145-5x-3|x+3|-6|x-3|.$$

Нам необходимо найти все значения параметра a, при которых неравенство выполняется для всех значений x.

На языке графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ это равносильно тому, что при искомых значениях параметра a график функции $y = f(x)$ находится выше графика функции $y = g(x)$ (естественно, при традиционном расположении координатных осей).

График функции $y = f(x)$, как известно, представляет собой угол с вершиной на оси Ox в точке $x = a$ и сторонами, направленными вверх, которые лежат на прямых с угловым коэффициентом ±7 (что в дальнейшем будет существенно).

При изменении параметра a от –∞ до +∞ график функции $y = f(x)$ будет перемещаться параллельно самому себе вдоль оси Ox слева направо.

График функции $y = g(x)$ есть ломаная, так как после раскрытия модулей находим, что:

$g(x) = 4x + 136$ при $x \leq -3$;

$g(x) = -2x + 118$ при $-3 \leq x \leq 3$;

$g(x) = -14x + 154$ при $x \leq 3$.

То есть график функции есть трехзвенная ломаная, и при этом функция $g(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty;-3]$ и убывает на промежутке $[-3; +\infty)$. Угловые коэффициенты прямых, на которых лежат звенья ломаной, равны 4, –2 и –14 соответственно. Поэтому звенья ломаной не параллельны сторонам угла – графика функции $y = f(x)$.

Легко установить, что график функции *y = g(x)* пересекает ось *Ox* при $x = –34$ и $x = 11$, и при $x < –34$ или $x > 11$ все его точки лежат ниже оси *Ox*, а при $–34 < x < 11$ – выше (рис. 69). Поэтому график функции *y = f(x)* может пересекать график функции *y = g(x)* только в точках с абсциссами, принадлежащими отрезку [–34; 11].

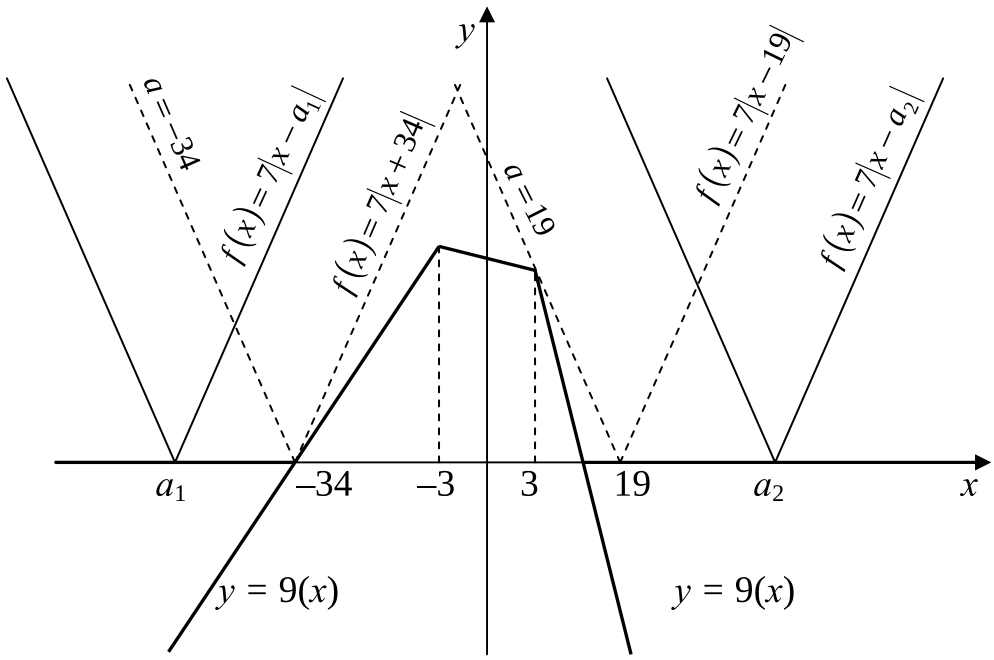


Рис. 69

Осталось констатировать, что (рис. 69):

1) при $a < –34$ график функции *y = f(x)* всегда выше графика функции *y = g(x)*, так как угловой коэффициент прямой, на которой лежит «правая» сторона угла – графика функции *y = f(x)*, равен 7, а прямой, на которой лежит первое звено ломаной – графика функции *y = g(x)*, равен 4;

2) так как угловой коэффициент прямой $y = –14x + 154$ по модулю больше углового коэффициента прямой $y = –7x + 7a$, и они оба отрицательны, то при возрастании параметра *a* от значения $a_0 = –34$ графики функций *f(x)* и *g(x)* будут пересекаться до тех пор, пока «левая» сторона угла – графика функции *y = f(x)* не пройдет через точку (3; *g*(3)) графика функции *g(x)* (при этом надо указать, что левая сторона после прохождения точки *C* не будет пересекать звено *BC*, которое лежит на прямой с угловым коэффициентом (–2)).

Для определения значения параметра a, при котором имеет место указанная ситуация, надо решить систему $\begin{cases} f(3) = g(3), \\ a \geq 3. \end{cases}$

Откуда $7(a - 3) = 112$, то есть $a = 19$;

3) при $a > 19$ график функции $f(x)$, как и при $a < -34$, всегда будет выше графика функции $g(x)$.

Отсюда следует ответ задачи.

Ответ: $a < -34$ или $a > 19$.

Пятый метод (решение относительно параметра и от противного)

Предположим, что значение a_0 параметра a не искомое. Это означает, что существует хотя бы одно значение x_0 переменной x, при котором исходное неравенство не выполняется, то есть выполняется противоположное по смыслу неравенство

$$5x_0 + 7|x_0 - a_0| + 3|x_0 + 3| + 6|x_0 - 3| \leq 145. \qquad (21)$$

Очевидно, верно и обратное. Если существует хотя бы одна пара чисел x_0 и a_0, при которых истинно неравенство (21), то значение a_0 параметра a не является искомым.

Поэтому попробуем найти все значения параметра a, при которых существует хотя бы одно решение неравенства

$$5x + 7|x - a| + 3|x + 3| + 6|x - 3| \leq 145. \qquad (22)$$

Тогда все остальные значения параметра a будут искомыми.

Пусть для удобства $7a = p$. Относительно p неравенство (22) имеет вид $|7x - p| \leq g(x)$, что, как известно, равносильно двойному неравенству

$$-g(x) + 7x \leq p \leq g(x) + 7x.$$

Отсюда следует, что неравенство (22) равносильно неравенству

$$12x + 3|x + 3| + 6|x - 3| - 145 \leq p \leq 2x - 3|x + 3| - 6|x - 3| + 145. \qquad (23)$$

Необходимое условие существования решений последнего двойного неравенства есть выполнение неравенства

$$12x+3|x+3|+6|x-3|-145\le 2x-3|x+3|-6|x-3|+145 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 145-5x-3|x+3|-6|x-3|\ge 0. \qquad (24)$$

которое можно было бы получить и из неравенства (22), используя свойство неотрицательности модуля.

Неравенство (24) относительно модулей $|x + 3|$ и $|x - 3|$ имеет вид $|m| < n$. Поэтому, используя нестандартную технику преобразования подобных неравенств, получаем, что неравенство (24) равносильно системе

$$\begin{cases} 145-5x-3(x+3)-6(x-3)\ge 0, \\ 145-5x-3(x+3)+6(x-3)\ge 0, \\ 145-5x+3(x+3)-6(x-3)\ge 0, \\ 145-5x+3(x+3)+6(x-3)\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x\le 154, \\ 2x\le 118, \\ 8x\le 172, \\ -136\le 4x; \end{cases} \Leftrightarrow -34\le x\le 11. \qquad (25)$$

Неравенство (25) объявляет те и только те значения переменной x, которые являются решениями неравенства (23) хотя бы при одном значении параметра, которые нам и осталось найти.

Для любого $x_0 \in [-34; 11]$ все значения параметра, при которых x_0 является решением неравенства (23), находятся из этого неравенства, если в него подставить $x = x_0$.

Поэтому (!) все искомые значения параметра p принадлежат отрезку $[m; M]$, где

$$m=\min_{-34\le x\le 11}\left(12x+3|x+3|+6|x-3|-145\right),$$

$$M=\max_{-34\le x\le 11}\left(2x-3|x+3|-6|x-3|+145\right).$$

При определении m удобно заметить, что при раскрытии модулей мы будем всегда получать выражение вида $kx + l$, где $k > 0$, так как

$$12 \pm 3 \pm 6 > 0.$$

Поэтому

$$f(x)=12x+3|x+3|+6|x-3|-145$$

является монотонно возрастающей функцией, и, следовательно,

$$m = \min_{-34 \le x \le 11} f(x) = f(-34) = -238. \qquad (26)$$

Аналогично, при определении M удобно заметить, что коэффициент в выражении $6|x-3|$, то есть 6, больше любой комбинации 2 ± 3, и, следовательно, $x = 3$ является точкой максимума $g(x)$, где

$$g(x) = 2x - 3|x+3| - 6|x-3| + 145.$$

Откуда

$$M = \max_{-34 \le x \le 11} g(x) = g(3) = 133. \qquad (27)$$

Поэтому из (26) и (27) получаем, что

$$-238 \le p \le 133 \Leftrightarrow -238 \le 7a \le 133 \Leftrightarrow -34 \le a \le 19. \qquad (28)$$

Таким образом, неравенство (28) объявляет все значения параметра a, при которых исходное неравенство ложно хотя бы при одном значении переменной x. Следовательно, все остальные значения параметра a есть искомые.

Ответ: $a < -34$ или $a > 19$.

Шестой метод (решение по правилу минимакса)

Основная идея. Если любое значение функции больше некоторой константы, то это равносильно тому, что минимальное значение функции больше этой константы при условии, что минимальное значение функции существует.

То есть для всех x имеем

$$y(x) > C_0 \Leftrightarrow \min_x y(x) > C_0$$

если $\min_x y(x)$ существует.

Пусть $y(x) = 5x + 7|x-a| + 3|x+3| + 6|x-3|$.

Поскольку при любом раскрытии всех модулей функция $y(x)$ является линейной функцией, то все свои экстремальные значения она принимает в точках «излома», то есть при $x = a$, $x = -3$ и $x = 3$.

Графиком функции $y(x)$ является ломаная линия (не более, чем четырехзвенная), «ветви» которой уходят в «плюс-бесконечность».

Поэтому минимальное значение функции *y(x)* существует и достигается в одной из точек «излома». То есть

$$\min_x y(x) \in \{y(a); y(-3); y(3)\}.$$

Отсюда следует, что исходное неравенство выполняется для всех значений *x* тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} y(a) > 145, \\ y(-3) > 145, \\ y(3) > 145; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 3|a+3| + 6|a-3| > 145, \\ -15 + 7|-3-a| + 6|-3-3| > 145, \\ 15 + 7|3-a| + 3|3+3| > 145; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 3|a+3| + 6|a-3| > 145, \\ 7|a+3| > 124, \\ 7|a-3| > 112; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 3|a+3| + 6|a-3| > 145, \\ 7|a+3| > 124, \\ a < -13 \quad \text{или} \quad a > 19; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -13, \\ 5a - 3(a+3) - 6(a-3) > 145, \\ -7(a+3) > 124; \end{cases} \text{или} \begin{cases} a > 19, \\ 5a + 3(a+3) + 6(a-3) > 145, \\ 7(a+3) > 124; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -13, \\ a < -34, \\ a < -\dfrac{145}{7}; \end{cases} \text{или} \begin{cases} a > 19, \\ a > 11, \\ a > \dfrac{103}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -34, \\ a > 19. \end{array} \right.$$

Ответ: $a < -34$ или $a > 19$.

§4. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛИ

Системы уравнений, содержащих модули, решаются теми же методами, что и уравнения с модулями. Ведущими методами решения являются алгебраический и геометрический.

Перейдем к рассмотрению различного рода примеров.

Задача 1. Найдите отношение $\frac{x_0}{y_0}$, где $(x_0; y_0)$ решение системы

$$\begin{cases} y+2=\sqrt{x+4}, \\ y+|x-5|=1. \end{cases}$$

Решение

Выразив y из второго уравнения системы и подставив в первое, получим: $\sqrt{x+4}=3-|x-5|$.

Решим это уравнение графически. С целью облегчения процедуры построения графиков положим $x - 5 = t$. Приходим к уравнению $\sqrt{t+9}=3-|t|$.

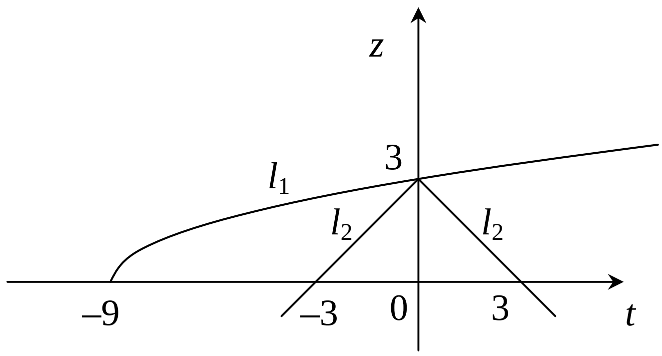


Рис. 70

Построим графики функций $z=\sqrt{t+9}$ (линия l_1) и $z=3-|t|$ (ломаная l_2) (рис. 70). Видим, что графики пересекаются при $t = 0$, значит, $x_0 = 5$. Подставив такое x_0 во второе уравнение системы, найдем, что $y_0 = 1$.

Ответ: 5.

Задача 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-y|+x=5, \\ |x+2|-2y=6. \end{cases}$

Решение

Разобьем числовую плоскость *xOy* на участки знакопостоянства подмодульных выражений и последовательно рассмотрим на них заданную систему.

1) Пусть $\begin{cases} x-y\ge 0, \\ x+2\ge 0. \end{cases}$ Тогда $|x-y|=x-y$, $|x+2|=x+2$.

Тогда исходная система примет вид $\begin{cases} x-y+x=5, \\ x+2-2y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=5, \\ x-2y=4. \end{cases}$

Ее решением является пара (2; –1). Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденная пара удовлетворяет условию $\begin{cases} x-y\ge 0, \\ x+2\ge 0. \end{cases}$

2) Пусть $\begin{cases} x-y\ge 0, \\ x+2\le 0. \end{cases}$ Тогда $|x-y|=x-y$, $|x+2|=-x-2$.

Исходная система в таком случае принимает вид

$$\begin{cases} x-y+x=5, \\ -x-2-2y=6; \end{cases} \begin{cases} 2x-y=5, \\ x+2y=-8. \end{cases}$$

Решением полученной системы является пара $\left(\frac{2}{5};-\frac{21}{5}\right)$. Но эта пара условиям $\begin{cases} x-y\ge 0, \\ x+2\le 0 \end{cases}$ не удовлетворяет, а значит, на рассматриваемом участке, исходная система не имеет решения.

3) Пусть $\begin{cases} x-y\le 0, \\ x+2\ge 0. \end{cases}$ Тогда $|x-y|=-x+y$, $|x+2|=x+2$.

Заданная система в таком случае примет вид

$$\begin{cases} -x+y+x=5, \\ x+2-2y=6; \end{cases} \begin{cases} 0\cdot x+y=5, \\ x-2y=4. \end{cases}$$

Решением полученной системы является пара (14; 5), которая, однако, условию $\begin{cases} x-y\le 0, \\ x+2\ge 0 \end{cases}$ не удовлетворяет, а значит, исходная система на этом участке решения не имеет.

4) Пусть $\begin{cases} x-y\le 0, \\ x+2\le 0. \end{cases}$ Тогда $|x-y|=-x+y$, $|x+2|=-x-2$.

Рассматриваемая система в таком случае будет иметь вид

$$\begin{cases} -x+y+x=5, \\ -x-2-2y=6; \end{cases} \begin{cases} 0\cdot x+y=5, \\ x+2y=-8. \end{cases}$$

Решением последней системы является пара (–18; 5), которая указанным условиям $\begin{cases} x-y\le 0, \\ x+2\le 0 \end{cases}$ удовлетворяет, а значит, она является решением исходной системы.

Итак, заданная система уравнений имеет решения: (2;–1), (–18;5).

Ответ: (2; –1), (–18; 5).

Задача 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} |2x-y|-y=4, \\ |x|+y=-2. \end{cases}$

Решение

Разобьем числовую плоскость *xOy* на четыре части прямыми $2x-y=0$ и $x=0$ и рассмотрим последовательно заданную систему на каждом участке.

а) $\begin{cases} 2x-y\ge 0, \\ x\ge 0, \\ 2x-y-y=4, \\ x+y=-2; \end{cases} \begin{cases} 2x-y\ge 0, \\ x\ge 0, \\ x-y=2, \\ x+y=-2. \end{cases}$

Решение дает нам пару (0; –2). которая удовлетворяет двум неравенствам системы, а значит, является решением исходной системы.

$$б)\ \begin{cases} 2x - y \le 0, \\ x \ge 0, \\ -2x + y - y = 4, \\ x + y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y \le 0, \\ x \ge 0, \\ x = -2, \\ x + y = -2. \end{cases}$$

Решением является пара (–2: 0), которая, однако, не удовлетворяет неравенствам системы, а значит, решением исходной системы не является.

$$в)\ \begin{cases} 2x - y \le 0, \\ x \le 0, \\ -2x + y - y = 4, \\ -x + y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y \le 0, \\ x \le 0, \\ x = -2, \\ -x + y = -2. \end{cases}$$

Решением полученной системы является пара (–2; –4). которая удовлетворяет неравенствам системы и поэтому является решением исходной системы.

$$г)\ \begin{cases} 2x - y \ge 0, \\ x \le 0, \\ 2x - y - y = 4, \\ -x + y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y \ge 0, \\ x \le 0, \\ x - y = 2, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решением полученной системы являются всевозможные пары $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению прямой $y = x - 2$. Мы должны теперь из этого бесконечного множества пар выбрать именно те, которые удовлетворяют условиям $2x - y \ge 0$ и $x \le 0$.

Подставляя $y = x - 2$ в неравенство $2x - y \ge 0$, получаем $x \ge -2$. С другой стороны, мы уже имеем $x \le 0$. Отсюда можно заключить, что решениями исходной системы являются числовые пары вида $(x; x - 2)$, где $x \in [-2; 0]$.

Собирая воедино все найденные на различных участках решения исходной системы, получаем ответ: $(x; x - 2)$, где $x \in [-2; 0]$.

Ответ: $(x; x - 2)$, где $x \in [-2; 0]$.

Задача 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-3|+|y-6|=4, \\ y=10+|x-3|. \end{cases}$

Решение

Покажем три способа решения этой системы.

Первый способ

Разобьем числовую плоскость на участки прямыми $x = 3$, $y = 6$ и рассмотрим четыре случая.

а) $\begin{cases} x<3, \\ y<6, \\ -x+3-y+6=4, \\ y=10-x+3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\geq 3, \\ y<6, \\ x-3-y+6=4, \\ y=10+x-3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x<3, \\ y\geq 6, \\ -x+3+y-6=4, \\ y=10-x+3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x\geq 3, \\ y\geq 6, \\ x-3+y-6=4, \\ y=10+x-3. \end{cases}$

Предоставляем возможность читателю самостоятельно решить все эти системы.

Второй способ

Из второго уравнения исходной системы выразим $|x-3|$ и подставим это выражение в первое уравнение системы. Будем иметь:

$$|x-3|=y-10,$$

$$y-10+|y-6|=4.$$

Решим последнее уравнение на двух промежутках: $y < 6$ и $y \geq 6$.

а) $\begin{cases} y < 6, \\ y - 10 - y + 6 = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} y < 6, \\ 0 \cdot y = 8. \end{cases}$

Система решений не имеет.

б) $\begin{cases} y \geq 6, \\ y - 10 + y - 6 = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} y \geq 6, \\ 2y = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} y \geq 6, \\ y = 10. \end{cases}$

Решением системы является $y = 10$. Теперь, воспользовавшись тем, что $|x-3| = y - 10$, находим $|x-3| = 0$, откуда $x = 3$. Итак, имеем решение исходной системы: (3; 10).

Третий способ

Учитывая, что $|x-3| \geq 0$, то, согласно второго уравнения системы, имеем $y \geq 10$. Тогда $|y-6| \geq 4$. Учитывая, что $|x-3| \geq 0$ и $|y-6| \geq 4$, мы можем заключить, что сумма этих модулей будет равна 4 лишь в том случае, когда одновременно имеют место следующие равенства: $|x-3| = 0$ и $|y-6| = 4$. Откуда следует решение исходной системы:
(3; 10).

Ответ: (3; 10).

Задача 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x + y - 4| = 5, \\ |x-3| + |y-1| = 5. \end{cases}$

Решение

Данная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} |x + y - 4| = 5, \\ |x-3| + |y-1| = 5, \\ |x + y - 4| = |x-3| + |y-1|. \end{cases}$$

Эта система (так как $x + y - 4 = (x - 3) + (y - 1)$) по свойству модуля равносильна смешанной системе

$$\begin{cases} |x+y-4|=5, \\ |x-3|+|y-1|=5, \\ (x-3)(y-1)\geq 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна следующей совокупности систем

$$\begin{cases} |x+y-4|=5, \\ |x-3|+|y-1|=5, \\ x-3\geq 0, \\ y-1\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+y-4|=5, \\ |x-3|+|y-1|=5, \\ x-3\leq 0, \\ y-1\leq 0. \end{cases}$$

Первая система этой совокупности равносильна системе

$$\begin{cases} x+y-4=5, \\ x-3+y-1=5, \\ x-3\geq 0, \\ y-1\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=9, \\ x\geq 3, \\ y\geq 1. \end{cases}$$

Все решения последней системы можно записать в виде (t; 9 – t), где t – любое число из отрезка [3; 8].

Вторая система совокупности равносильна системе

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ x-3\leq 0, \\ y-1\leq 1. \end{cases}$$

Множество решений последней системы состоит из числовых пар (a; –1 – a), где a – любое число из отрезка [–2; 3].

Таким образом, решениями исходной системы являются все возможные числовые пары

(t; 9 – t), где $t \in$ [3; 8].

(a; –1 – a), где $a \in$ [–2; 3].

Ответ: (t; 9 – t), где $t \in$ [3; 8]; (a; –1 – a), где $a \in$ [–2; 3].

Задача 6. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x+y|=5, \\ |x|+|y|=7. \end{cases}$

Решение

Решить эту систему можно традиционным способом – раскрытием модулей, но мы приведем более изящное решение.

Заметим, что данная система симметрична: если мы поменяем переменные местами, то система не изменится. Поэтому, зная, что $|t|=|-t|$, имеем $\begin{cases} |-x-y|=5, \\ |-x|+|-y|=7 \end{cases} = \begin{cases} |x+y|=5, \\ |x|+|y|=7. \end{cases}$. Следовательно, найдя одно решение (–1; 6) подбором и воспользовавшись известными свойствами, получим остальные решения: (–6; 1), (1; –6), (6; –1).

Ответ: (–1; 6), (–6; 1), (1; –6), (6; –1).

Задача 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20, \\ x+2y=4. \end{cases}$

Решение

Из второго уравнения выразим x через y и подставим в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20, \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|5-2y|+2|y-2|=20, \\ x=4-2y. \end{cases}$$

Решим первое уравнение, раскрывая модуль по определению. Это уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2, \\ 3(5-2y)+2(2-y)=20 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \le \frac{5}{2}, \\ 3(5-2y)+2(y-2)=20 \end{cases} \\ \begin{cases} y > \frac{5}{2}, \\ 3(2y-5)+2(y-2)=20 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2, \\ y=-\frac{1}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \le \frac{5}{2}, \\ y=-\frac{9}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} y > \frac{5}{2}, \\ y=\frac{39}{8} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow y=-\frac{1}{8} \text{ или } y=\frac{39}{8}.$$

Если $y=-\frac{1}{8}$, то $x=\frac{17}{4}$, если $y=\frac{39}{8}$, то $x=-\frac{23}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{17}{4};-\frac{1}{8}\right)$; $\left(-\frac{23}{4};\frac{39}{8}\right)$.

Задача 8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-2|x|y+y^2=4, \\ x^2-3|x|y-y^2=3. \end{cases}$

Решение

Пусть $t=|x|$, тогда

$$\begin{cases} t^2-2ty+y^2=4, \\ t^2-3ty-y^2=3. \end{cases} \qquad (*)$$

Это однородная система переменных t и y. Умножим первое уравнение на 3 и вычтем второе уравнение, умноженное на 4: $t^2-6ty-7y^2=0$. Решим его как квадратное относительно t, получим $t_1=-y$, $t_2=7y$. Система (*) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} t=-y, \\ t^2-3ty-y^2=3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t=7y, \\ t^2-3ty-y^2=3. \end{cases}$$

Учитывая, что $t \geq 0$, находим

$$t_1=1,\ y_1=-1;\ t_2=\frac{7}{3},\ y_2=\frac{1}{3}.$$

$$\begin{cases} |x|=1, \\ y=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x|=\frac{7}{3}, \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(1;-1)$, $(-1;-1)$, $\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Задача 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение

Заметим, что если (x_0; y_0) – решение данной системы, то и ($-x_0$; y_0) также решение системы. Поэтому необходимым условием единственности решения будет условие $x = 0$. При этом система примет следующий вид:

$$\begin{cases} 7=3y+3a, \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4}{3}, \\ y=1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=\dfrac{10}{3}, \\ y=-1. \end{cases}$$

Проверим, сколько решений имеет система при каждом из найденных значений a. Пусть $a=\dfrac{4}{3}$. Исходная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2, \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}-3y=5\left(x^2-|x|\right), \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Так как выполнены неравенства $3\cdot 2^{|x|}\geq 3\cdot 2^0=3$ и $y \leq 1$ (следует из второго условия системы), левая часть этого уравнения всегда больше либо равна нулю. С другой стороны, из условия $x \leq 1$, которое также следует из второго уравнения системы, вытекает, что $x^2-|x|=|x|\left(|x|-1\right)\leq 0$.

Значит, равенство возможно только в том случае, когда

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}-3y=0, \\ 5\left(x^2-|x|\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=2, \\ x=\pm 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что пара (0; 1) будет решением второго уравнения системы. Значит, $a=\dfrac{4}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a=\frac{10}{3}$, то исходная система перепишется следующим образом:

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2+6,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

Существуют по крайней мере три пары чисел (*x; y*), являющиеся решением этой системы – это (0; –1), (1; 0) и (–1; 0). Значит, $a=\frac{10}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=\frac{4}{3}$.

Задача 10. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений $\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2+a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ имеет только одно решение. Найти это решение.

Решение

Вначале заметим, что если пара чисел (*x; y*) является решением заданной системы уравнений, то пара чисел (*–x; y*) также является решением этой системы.

Из этого следует, что если данная система должна иметь лишь одно решение, то это решение есть пара (0; *y*) так как должно быть *x* = *–x*, что возможно только при *x* = 0.

Если в заданной системе уравнений заменим *x* на 0, то будем иметь систему $\begin{cases}y=1-a,\\ y^2=1,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}y=1-a,\\ y=\pm 1.\end{cases}$

Отсюда ясно, что *a* = 0 или *a* = 2. Таким образом, необходимым условием того, что данная система должна иметь только одно решение, является условие *a* = 0 или *a* = 2.

1) Пусть *a* = 0. Тогда данная система будет иметь вид

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} + |x|(1-|x|), \\ y^2 = 1 - x^2. \end{cases}$$

Так как из второго уравнения системы следует, что $|x| = \sqrt{1-y^2} \le 1$, то из первого уравнения системы находим, что $y \ge 1$. Из второго уравнения вытекает, что $y \le 1$. Причем в обоих уравнениях $y = 1$ только при $x = 0$. Итак, если $a = 0$, то система имеет только одно решение (0; 1).

2) Пусть теперь $a = 2$. Тогда заданная система принимает вид

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} - 2 + |x|(1-|x|), \\ y^2 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Легко заметить, что последняя система уравнений имеет более одного решения, например: (1; 0), (–1; 0) и (0; –1).

Значит исходная система уравнений имеет только одно решение (0; 1) лишь при $a = 0$.

Ответ: $a = 0$; (0; 1).

Задача 11. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение

Пусть значение параметра a таково, что заданная система имеет единственное решение (x_0; y_0). Легко видеть, в силу четности относительно x функций, входящих в уравнения системы, что и пара ($-x_0$; y_0) также будет решением системы. Так как по требованию задачи решение единственно, то $x_0 = -x_0$, откуда $x_0 = 0$.

Подставим значение $x_0 = 0$ в исходную систему. Будем иметь: $\begin{cases} 2^0 + 0 = y + 0 + a, \\ 0 + y^2 = 1; \end{cases}$ откуда $y = 1$, $a = 0$ или $y = -1$, $a = 2$.

Проверим, удовлетворяет ли значение a = 0. При таком a имеем систему $\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Из второго уравнения системы заключаем, что $|x|\le 1$ и $|y|\le 1$. Значит, $|x|\ge x^2$ и $2^{|x|}\ge y$, причем, если хотя бы одно из этих неравенств является строгим, то, сложив их, получим $2^{|x|}+|x|>y+x^2$. тогда как у нас имеет место равенство. Отсюда следует, что $|x|=x^2$ и $2^{|x|}=y$, что возможно только при x = 0 и y = 1, то есть заданная система действительно имеет единственное решение и a = 0 годится.

При a = 2 система принимает вид $\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Последняя система, как легко убедиться, имеет, как минимум, два решения (0; –1) и (1; 0). Следовательно, a = 2 в ответ к задаче не пойдет.

Ответ: a = 1.

Задача 12. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-5a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Решение

Заметим прежде всего, что все входящие в систему функции четные, относительно x. Допустим, что a – искомое значение параметра, а пара чисел (x_0; y_0) – единственное решение исходной системы при указанном значении a.

Тогда, в силу отмеченного свойства четности функций аргумента x, можно утверждать, что пара ($-x_0$; y_0) также является решением исходной системы уравнений. Но мы предполагали, что пара (x_0; y_0) единственное решение системы, поэтому она должна совпадать с парой ($-x_0$; y_0), то есть должно выполняться условие $x_0 = -x_0$, откуда $x_0 = 0$.

Итак, если a – искомое значение параметра, то соответствующее ему единственное решение исходной системы имеет вид (0; y_0). Подставим эту пару чисел в каждое уравнение заданной системы:

$$\begin{cases} 5-2=5y_0-5a, \\ y_0^2=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, мы получим две пары чисел: $a_1=\dfrac{2}{5}$, $y_0'=1$ и $a_2=-\dfrac{8}{5}$, $y_0''=-1$.

Таким образом, искомыми значениями параметра a могут быть $a_1=\dfrac{2}{5}$ и $a_2=-\dfrac{8}{5}$, и чтобы убедиться в том, а являются ли они искомыми значениями, произведем проверку.

а) Пусть $a=\dfrac{2}{5}$, тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в таком виде:

$$\begin{cases} 5\left(2^{|x|}-y\right)+3\left(|x|-x^2\right)=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Из уравнения $x^2 + y^2 = 1$ следует, что $|x|\le 1$ и $|y|\le 1$. А эти неравенства, в свою очередь, приводят к выводу о том, что $2^{|x|}-y\ge 0$, $|x|-x^2\ge 0$.

Два последних неравенства свидетельствуют о том. что левая часть уравнения $5\left(2^{|x|}-y\right)+3\left(|x|-x^2\right)=0$ ограничена снизу числом 0, и поэтому это уравнение может быть удовлетворено только если $2^{|x|} - y = 1$ и $|x| = x^2$.

Рассматривая уравнения $2^{|x|} - y = 1$ и $|x| = x^2$, а также уравнение $x^2 + y^2 = 1$, получаем единственное решение $x = 0$, $y = 1$. Таким образом, $a = \frac{2}{5}$ действительно является искомым.

б) Пусть $a = -\frac{8}{5}$, тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 + 8, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что этой системе удовлетворяют, например, пары (0; –1) и (1; 0). Поэтому, согласно требованию задачи, значение $a = -\frac{8}{5}$ искомым не является.

Ответ: $a = \frac{2}{5}$.

Задача 13. Найдите все значения параметра a, при которых существует ровно две пары действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} \left(x + y^2 - 1\right)\left(y - \sqrt{6}|x|\right) = 0, \\ 2ay + x = 1 + a^2. \end{cases}$

Решение

Пусть П – парабола, задаваемая уравнением $y^2 = 1 - x$, L – ломаная, задаваемая уравнением $y = \sqrt{6}|x|$, l_1, и l_2 – лучи, определяемые уравнениями $y = -\sqrt{6}x$, $y \geq 0$ и $y = \sqrt{6}x$, $y \leq 0$, l – прямая $2ay + x = 1 + a^2$ (рис. 71).

Решая систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 1 - x, \\ 2ay - a^2 = 1 - x, \end{cases}$ найдем общие точки прямой l и параболы П.

Из этой системы следует, что $y^2 - 2ay + a^2 = (y - a)^2 = 0$, $y = a$, $x = 1 - a^2$, то есть система имеет единственное решение при любом $a \in R$. Это означает, что прямая l касается параболы П в точке $C(1 - a^2; a)$.

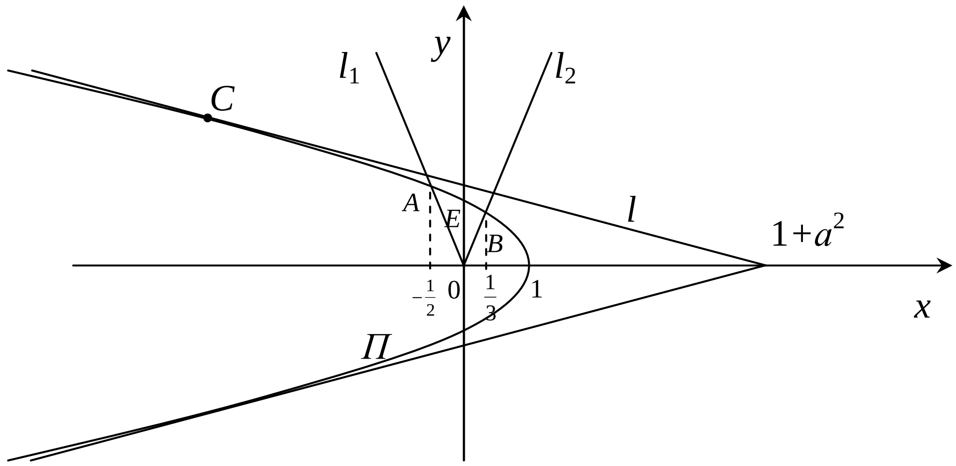


Рис. 71

Рассмотрим три возможных случая: $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.

а) Если $a = 0$, то прямая l задается уравнением $x = 1$. Эта прямая касается параболы П в точке (1; 0), пересекает луч l_2, но не пересекает луч l_1. Поэтому при $a = 0$ исходная система уравнений имеет ровно два решения.

б) Если $a > 0$, то прямая l пересекает ось Oy в точке с положительной ординатой $\frac{1+a^2}{2a}$, а также пересекает лучи l_1, и l_2 (см. рис. 72).

Найдем сначала значения $a > 0$, при которых прямая l проходит через точки A и B, являющиеся точками пересечения лучей l_1 и l_2 с параболой.

Координаты точек A и B определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 1 - x, \\ y = \sqrt{6}|x|. \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнение $6x^2 = 1 - x$, имеющее корни $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Числа x_1 и x_2 – абсциссы точек A и B, а значения a, при которых прямая l проходит через точки A и B – корни уравнений $1-a^2=-\frac{1}{2}$, $1-a^2=\frac{1}{3}$. Так как $a > 0$, то $a_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $a_2=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

При $a = a_1$ и $a = a_2$ прямая l пересекает ломаную L в двух точках, одна из которых – общая точка ломаной L и параболы П. Поэтому при $a = a_1$ и при $a = a_2$ исходная система уравнений имеет ровно два решения.

Если $\sqrt{\frac{2}{3}}<a<\sqrt{\frac{3}{2}}$ или $a>\sqrt{\frac{3}{2}}$, то прямая l не проходит через точки A и B и пересекает ломаную L в двух различных точках. Это означает, что система уравнений имеет три различных решения.

Пусть k, k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямой l и лучей l_1, и l_2, соответственно. Тогда $k=-\frac{1}{2a}\left(a\neq 0\right)$, $k_1=-\sqrt{6}$, $k_2=\sqrt{6}$.

Если $0<a<\sqrt{\frac{2}{3}}$, то прямая l пересекает l_2 и не будет пересекать l_1 только в том случае, когда $k = k_1$, то есть $-\frac{1}{2a}=-\sqrt{6}$, откуда $a=\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Поэтому при $a=\frac{1}{2\sqrt{6}}$ исходная система уравнений имеет ровно два решения.

Если $a\in\left(\frac{1}{2\sqrt{6}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ то прямая l пересекает ломаную L в двух точках, не лежащих на параболе П. В этом случае система имеет три различных решения.

Пусть $0<a<\frac{1}{2\sqrt{6}}$, тогда $\frac{1}{2a}>\sqrt{6}$, $-\frac{1}{2a}<-\sqrt{6}$, то есть $k < k_1$, и поэтому прямая l не пересекает l_1, но пересекает 1_2. В этом случае система имеет два различных решения.

в) Пусть $a < 0$, тогда прямая l пересекает ось Oy в точке с отрицательной ординатой. Если $-\frac{1}{2\sqrt{6}} < a < 0$, то есть $-\frac{1}{2a} < \sqrt{6}$, то $k < k_2$ и $k > k_1$ ($k > 0$, $k_1 < 0$). В этом случае прямая l пересекает луч l_2 и не пересекает луч l_1, и потому система имеет ровно два различных решения.

Наконец, если $a \le -\frac{1}{2\sqrt{6}}$, то прямая l не пересекает ломаную. В этом случае система имеет единственное решение.

Ответ: $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $-\frac{1}{2\sqrt{6}} < a < \frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Задача 14. Найдите все значения параметров a и b, при которых система уравнений $\begin{cases} |bx| - |y| = 2a, \\ (x-b)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет ровно три решения.

Решение

Пусть $(x_0;\ y_0)$ – решение данной системы уравнений, тогда $(x_0;\ -y_0)$ – также ее решение. Следовательно, необходимым условием наличия у данной системы нечетного количества решений является равенство $y_0 = 0$. Из этого условия и первого уравнения системы вытекает $a \ge 0$, из второго: $|x_0 - b| = a$.

Если $a = 0$, то система имеет единственное решение (0; 0), при этом и $b = 0$. Обратно, если $b = 0$, то для $a > 0$ у системы существует только то же самое решение (0; 0) (при этом $a = 0$).

Рассмотрим далее случай $a > 0$, $b \ne 0$. Уравнение $|y| = |bx| - 2a$ задает на плоскости xOy множество точек, состоящее из двух пар лучей: одна пара имеет вершину в точке $\left(-\frac{2a}{|b|};0\right)$, у другой пары вершина в точке $\left(\frac{2a}{|b|};0\right)$ (рис. 72). Второе уравнение системы определяет окружность радиуса a с центром в точке (b; 0). Заметим, что эта окружность пересекает ось абсцисс в точках $x = b \pm a$.

1) Пусть $b < 0$, тогда окружность может иметь ровно три общие точки с лучами только в двух ситуациях, изображенных на рис. 72. Рассмотрим каждую из них.

а) $b + a = -\dfrac{2a}{-b} \Leftrightarrow a = \dfrac{b^2}{2-b}$, где b – любое отрицательное число.

б) $\begin{cases} b + a = -\dfrac{2a}{b}, \\ b - a < \dfrac{2a}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = -a(2+b), \\ b^2 > a(2+b). \end{cases}$

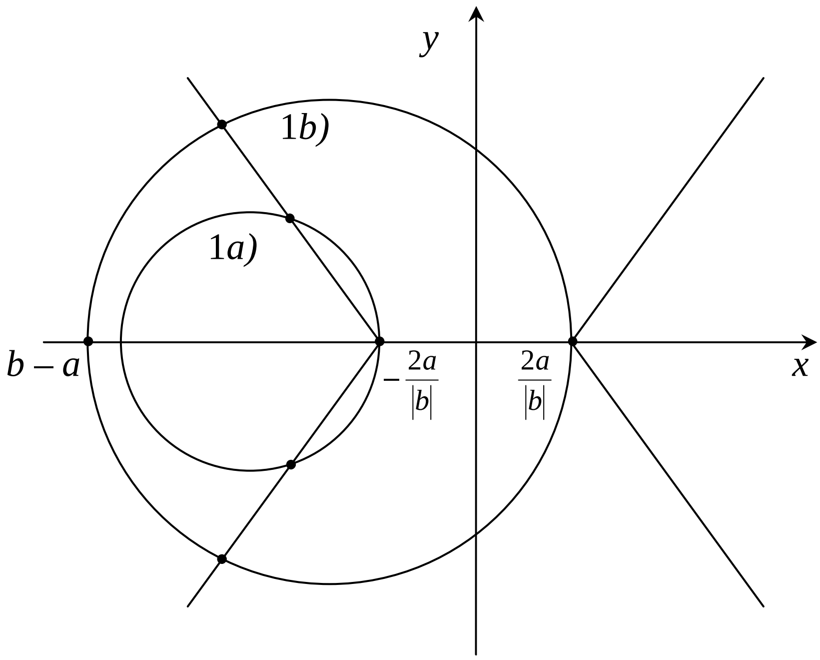


Рис. 72

Здесь для $a > 0$, $b \neq 0$ из уравнения следует $a = -\dfrac{b^2}{2+b}$, где $b < -2$. Очевидно, неравенство системы выполнено при этих значениях a, b.

2) Для случая $b > 0$ рассмотрения происходят аналогично.

а) $b - a = \dfrac{2a}{b} \Leftrightarrow a = \dfrac{b^2}{2+b}$, где b – любое положительное число.

б) $\begin{cases} b-a=-\dfrac{2a}{b}, \\ b+a>\dfrac{2a}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{b^2}{b-2}, \\ b^2>a(2-b). \end{cases}$

Из условия $a > 0$, следует $b > 2$, так что неравенство системы, очевидно, выполнено.

Объединяя полученные результаты, приходим к ответу.

Ответ: $(a;b)=\left(\dfrac{t^2}{|t|+2};t\right)$, где $t\neq 0$;

либо $(a;b)=\left(\dfrac{t^2}{|t|-2};t\right)$, где $|t| > 2$.

Задача 15. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=|x-1|. \end{cases}$

Решение

Построим в одной системе координат графики $x^2+y^2=25$ и $y=|x-1|$ (рис. 73).

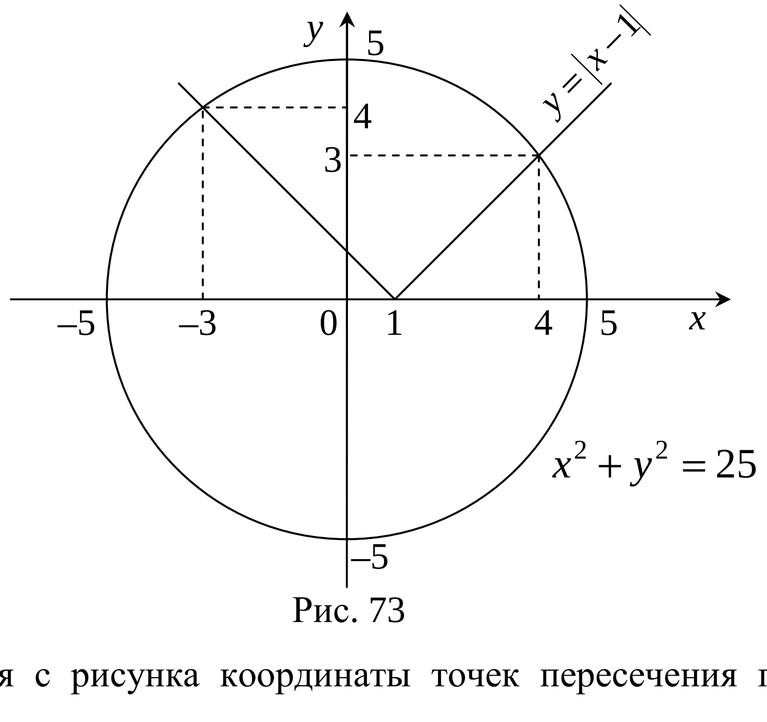


Рис. 73

Считывая с рисунка координаты точек пересечения графиков, будем иметь две пары чисел (–3; 4), (4; 3). Непосредственной подстановкой в исходную систему убеждаемся, что эти пары чисел обращают заданные уравнения в верные равенства. Действительно, при $x = -3$, $y = 4$ имеем $\begin{cases} 9+16=25, \\ 4=|-3-1|; \end{cases}$ $\begin{cases} 25=25, \\ 4=4; \end{cases}$ при $x = 4$, $y = 3$ имеем $\begin{cases} 9+16=25, \\ 3=|4-1|; \end{cases}$ $\begin{cases} 25=25, \\ 3=3. \end{cases}$

Тогда мы можем указать не приближенные решения системы (а как мы знаем, графический метод есть приближенный метод), а ее точные решения; ими будут две пары чисел: (–3; 4), (4; 3).

Ответ: (–3; 4), (4; 3).

Задача 16. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-1|+y=2, \\ x+|y+1|=4. \end{cases}$

Решение

Так как переменные x и y независимы, то для того чтобы раскрыть знаки модулей, необходимо рассмотреть четыре случая:

а) $x - 1 \geq 0$, $y + 1 \geq 0$; б) $x - 1 \geq 0$, $y + 1 < 0$;

в) $x - 1 < 0$, $y + 1 \geq 0$; г) $x - 1 < 0$; $y + 1 < 0$.

Система имеет вид в случае:

а) если $x \geq 1$, $y \geq -1$: $\begin{cases} (x-1)+y=2, \\ x+(y+1)=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=3, \\ x+y=3. \end{cases}$ Эта система имеет бесконечное множество решений: $x = t$, $y = 3 - t$. Теперь, необходимо выбрать такие t, чтобы полученные решения оказались в рассматриваемых областях x, y. Для этого решим систему неравенств $\begin{cases} t \geq 1, \\ 3-t \geq -1 \end{cases}$ и получим $t \in [1; 4]$;

б) если $x \geq 1$, $y < -1$: $\begin{cases} x-1+y=2, \\ x-(y+1)=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=5. \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение $x = 4$, $y = -1$, но оно не лежит в рассматриваемых областях x, y и не является решением исходной системы;

в) если $x < 1$, $y \geq -1$: $\begin{cases} -(x-1)+y=2, \\ x+(y+1)=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} -x+y=1, \\ x+y=3. \end{cases}$ Эта система имеет решение $x = 1$, $y = 2$, не лежащее в рассматриваемых областях x, y. Поэтому найденное решение не является решением исходной системы;

г) если $x < 1$, $y < -1$: $\begin{cases} -(x-1)+y=2, \\ x-(y+1)=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} -x+y=1, \\ x-y=5. \end{cases}$ Эта система решений не имеет.

Удобно также решить исходную систему уравнений графически (рис. 74). Из первого уравнения выразим $y = 2 - |x - 1|$ и построим график этой функции (сплошная линия). Из второго уравнения проще выразить $x = 4 - |y + 1|$ и построить этот график, считая x – функцией, y – аргументом (штрих-пунктирная линия). Видно, что на отрезке AB графики первого и второго уравнений совпадают, то есть система имеет бесконечное множество решений. Запишем эти решения. Из рисунка видно, что абсциссы точек отрезка AB удовлетворяют условию $1 \leq x \leq 4$. В этом случае функция $y = 2 - |x - 1|$ принимает вид $y = 3 - x$. Тогда искомые решения системы $x = t$, $y = 3 - t$, где $t \in [1; 4]$. Этот же результат был получен ранее аналитически.

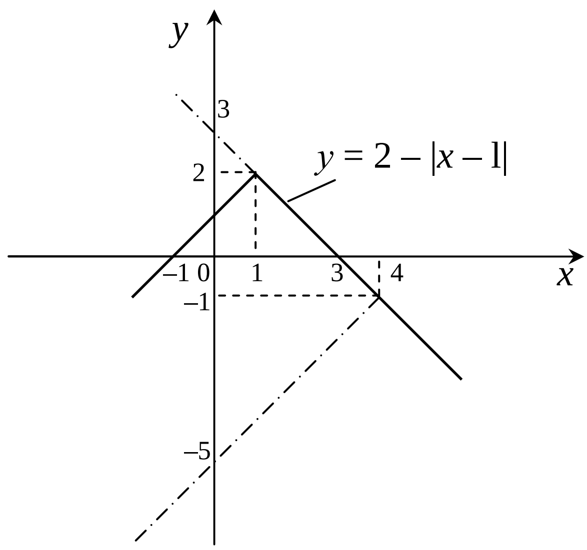


Рис. 74

Ответ: $x = t$, $y = 3 - t$, где $t \in [1; 4]$.

Задача 17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(x^2y+2xy^2\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4, \\ \log_5\left|\dfrac{xy}{6}\right|=0. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы уравнений определяется неравенством $xy(x+2y)>0$.

Первое уравнение системы можно записать в виде

$$\log_2\left(xy(x+2y)\right)+\log_2\frac{x+2y}{xy}=4,$$

$$\log_2(x+2y)^2=4.$$

На области определения система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2y)^2=16, \\ |xy|=6; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2y=4, \\ xy=6; \end{cases} \\ \begin{cases} x+2y=-4, \\ xy=-6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Исключая x из первой системы указанной совокупности, получим уравнение $y^2-2y+3=0$, не имеющей действительных корней, а значит эта система уравнений не имеет действительных решений.

Из второй системы совокупности получаем уравнение $y^2+2y-3=0$, которое имеет корни $y_1=-3$, $y_2=1$; исходная система имеет два решения: (2; –3) и (–6; 1).

Ответ: (2; –3); (–6; 1).

Задача 18. Найдите все значения a, для каждого из которых система уравнений $\begin{cases} \left|x^2 - ax\right| = xy, \\ x + y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Решение

Выразив y из второго уравнения системы и подставив его в первое, получим уравнение

$$\left|x^2 - ax\right| = x - x^2. \qquad (*)$$

Рассмотрим случай $x^2 - ax > 0$. В этом случае уравнение (*) принимает вид $x^2 - ax = x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - (a+1)x = 0$. Так как число решений квадратного уравнения, если они есть, конечно, то переходим ко второму случаю: $x^2 - ax < 0$. В этом случае уравнение (*) принимает вид $ax - x^2 = x - x^2 \Leftrightarrow (a-1)x = 0$. Последнее уравнение имеет бесконечно много решений при $a = 1$. Исходная система также имеет бесконечное множество решений (x; $1 - x$), $x \in R$ при $a = 1$. При $x^2 - ax = 0$ число решений конечно.

Ответ: 1.

Задача 19. При каких значениях параметров a и b система $\begin{cases} \left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение

Решение задачи основывается на том факте, что $\left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = \left|\dfrac{x^{-y} - 1}{x^{-y} + 1}\right|$.

Действительно, $\left|\dfrac{x^{-y} - 1}{x^{-y} + 1}\right| = \left|\dfrac{\dfrac{1}{x^y} - 1}{\dfrac{1}{x^y} + 1}\right| = \left|\dfrac{1 - x^y}{1 + x^y}\right| = \left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right|$.

Таким образом, если $(x_0; y_0)$ – решение заданной системы уравнений, то и $(x_0; -y_0)$ – также решение этой системы. Следовательно, для существования у рассматриваемой системы единственного решения, необходимо, чтобы $y = 0$.

При этом условии из первого уравнения заданной системы находим, что $a = 0$. Далее, так как по условию задачи $x^2 + y^2 = b$, то $b > 0$, ибо при $b = 0$ имеем $x = y = 0$ и x^y не определено.

При $a = 0$ получаем систему $\begin{cases} x^y = 1, \\ x^2 + y^2 = b, b > 0. \end{cases}$

Здесь возможны два случая: либо $y = 0$, либо $x = 1$.

В первом случае система имеет решение $x = \sqrt{b}$, $(x > 0)$, $y = 0$.

Во втором случае система принимает вид

$$\begin{cases} x = 1, \\ y^2 = b - 1. \end{cases} \qquad (**)$$

А тогда для того чтобы исходная система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы решение системы (**) либо совпадало с $x = \sqrt{b}$, $y = 0$, либо система (**) была несовместной.

Требуемые условия, как легко видеть, выполняются в случае, когда значения b принадлежат полуинтервалу (0; 1].

Ответ: $a = 0$, $0 < b \leq 1$.

Задача 20. При каких значениях параметра b система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = b \end{cases}$ имеет два решения?

Решение

Систему запишем в виде $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x| + b. \end{cases}$ Условие задачи выполнено, если окружность $x^2 + y^2 = 1$ и угол $y = |x| + b$ имеют ровно две точки пересечения. Соответствующие случаи изображены на рис. 75а, б.

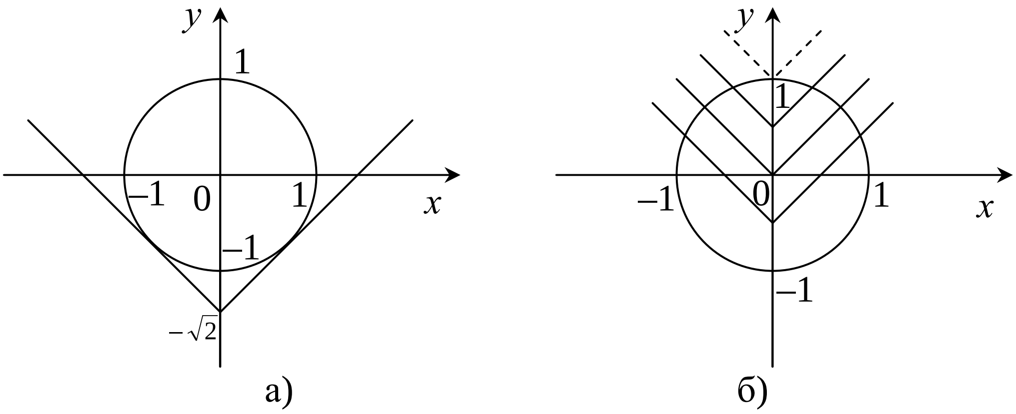


Рис. 75

Ответ: $-\sqrt{2};[-1;1]$.

Задача 21. При каких значениях параметра b система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=b \end{cases}$ имеет три решения?

Решение

Запишем систему в виде: $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x=|y|-b. \end{cases}$

Система имеет 3 решения в случае, изображенном на рис. 76, то есть при $b=\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

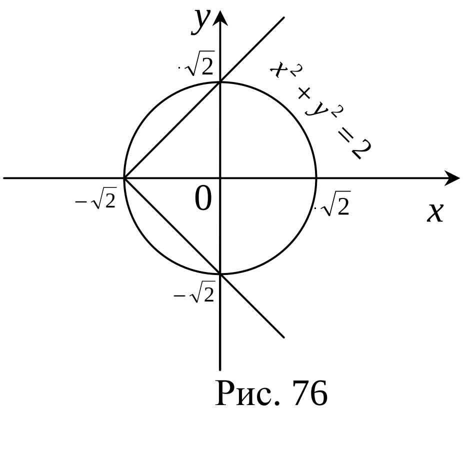


Рис. 76

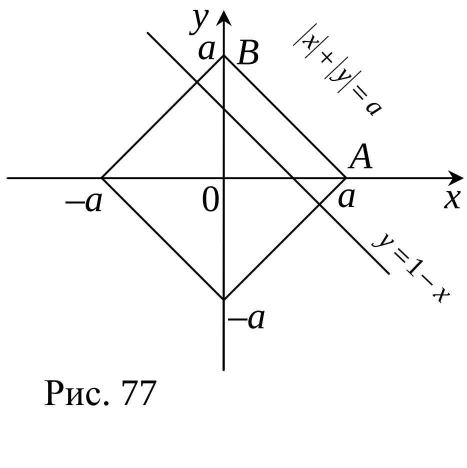


Рис. 77

Задача 22. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ y = 1 - x. \end{cases}$

Решение

Первое уравнение системы задает на координатной плоскости границу квадрата с вершинами в точках (a; 0), (0; a), (–a; 0), (0; –a); второе уравнение задает прямую. Решением системы является множество пар ($x; y$), где x, y – соответственно абсциссы и ординаты точек пересечения границы квадрата и прямой. На рис. 77 изображен случай пересечения при $a > 1$. При $a < 1$ граница квадрата и прямая не пересекаются. При $a = 1$ пересечением границы квадрата и прямой является отрезок AB.

Ответ: x – любое число из [0; 1], $y = 1 - x$ при $a = 1$; $x = \frac{1-a}{2}$, $y = \frac{1+a}{2}$; $x = \frac{1+a}{2}$, $y = \frac{1-a}{2}$ при $a \in (1;+\infty)$; не имеет решений при $a \in (-\infty;1)$.

Задача 23. Найдите все значения параметра a из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, при каждом из которых система $\begin{cases} \left|x + \sqrt{3}y\right| + \left|y - \sqrt{3}x\right| = 2\sin a, \\ \left(\sqrt{3}x + y\right)^2 + \left(\sqrt{3}y - x\right)^2 = 4\cos a \end{cases}$ имеет ровно четыре различных корня.

Решение

Раскрывая скобки в левой части второго уравнения, преобразуем данную систему: $\begin{cases} \left|\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right| + \left|\frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right| = \sin a, \\ x^2 + y^2 = \cos a. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} u = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$

Тогда каждой паре (x; y) отвечает единственная пара (u; v) и наоборот. Заметим также, что $u^2 + v^2 = x^2 + y^2$. Таким образом, в новых переменных система принимает вид $\begin{cases} |u| + |v| = \sin a, \\ u^2 + v^2 = \cos a. \end{cases}$

При $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ правые части уравнений неотрицательны, а сами уравнения описывают: первое – квадрат с диагональю длины $2\sin a$ (рис. 78) (в §1 мы строили график такого уравнения), второе – окружность радиуса $\sqrt{\cos a}$ с центром в начале координат (рис. 78).

При $a = 0$ квадрат вырождается в точку, а при $a = \frac{\pi}{2}$ окружность превращается в точку.

Рассматривая взаимное расположение квадрата и окружности, легко видеть, что система имеет ровно четыре различных решения (то есть квадрат и окружность имеют ровно четыре общие точки) только в двух случаях.

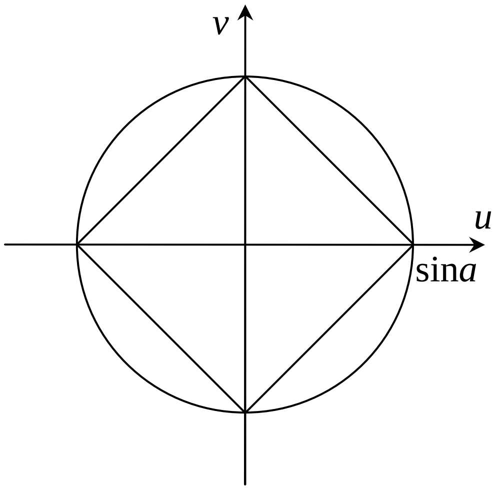


Рис. 78

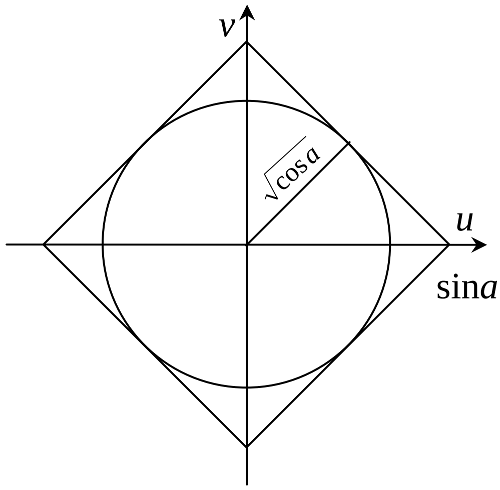


Рис. 79

Рассмотрим каждый из этих двух случаев, учитывая, что $\sin a \geq 0$, $\cos a \geq 0$.

а) Квадрат вписан в окружность (рис. 78). В этом случае $\sin a = \sqrt{\cos a} \Leftrightarrow \cos^2 a + \cos a - 1 = 0$, откуда $\cos a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $a = \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

б) Окружность вписана в квадрат (рис. 79). Тогда $\dfrac{\sin a}{\sqrt{2}} = \sqrt{\cos a} \Leftrightarrow \cos^2 a + 2\cos a - 1 = 0$, откуда $\cos a = -1 + \sqrt{2}$, $a = \arccos\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\arccos\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Задача 24. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система $\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

Решение

Введем обозначения $u = \sqrt{|x-1|}$ и $v = \sqrt{7|y|}$, где $u \geq 0$, $v \geq 0$ (по свойству арифметического квадратного корня).

Согласно обозначениям имеем $u^2 = |x-1|$, $u^4 = x^2 - 2x + 1$; $v^2 = 7|y|$, $v^4 = 49y$.

Исходную систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^4 + v^4 = -4a. \end{cases} \qquad (*)$$

Если u_0, v_0 – какое-либо решение последней системы, удовлетворяющее условиям $u \geq 0$, $v \geq 0$, то согласно обозначениям следует, что исходная система уравнений будет иметь следующие решения

$$\left(1+u_0^2; \frac{v_0^2}{7}\right); \left(1+u_0^2; -\frac{v_0^2}{7}\right); \left(1-u_0^2; \frac{v_0^2}{7}\right); \left(1-u_0^2; -\frac{v_0^2}{7}\right). \qquad (1)$$

Пара чисел $u = v_0$ и $v = u_0$ также удовлетворяет уравнениям системы (*) и условиям $u \ge 0$, $v \ge 0$. Поэтому решениями исходной системы уравнений будут и следующие пары чисел

$$\left(1+v_0^2;\frac{u_0^2}{7}\right);\left(1+v_0^2;-\frac{u_0^2}{7}\right);\left(1-v_0^2;\frac{u_0^2}{7}\right);\left(1-v_0^2;-\frac{u_0^2}{7}\right). \qquad (2)$$

Согласно требованиям задачи параметр a должен быть таким, чтобы система уравнений имела четыре решения. Значит из восьми пар чисел должно быть только четыре различных.

Легко проверить, что это возможно лишь тогда, когда $u_0 = 0$, или $v_0 = 0$, или $u_0 = v_0$. Поэтому, учитывая, что пара чисел (u_0, v_0) должна еще удовлетворять первому уравнению системы (*), заключаем, что если для некоторого значения параметра a выполняется условие задачи, то системе (*) должна обязательно удовлетворять по крайней мере одна из трех пар чисел (0; 1); (1; 0); $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Подставляя указанные пары во второе уравнение системы (*), убеждаемся, что это возможно только при $a=-\frac{1}{4}$ и $a=-\frac{1}{32}$.

Итак, все искомые значения параметра содержатся среди двух чисел: $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{32}$.

Рассмотрим систему (*) при $a=-\frac{1}{32}$. Будем иметь

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^4+v^4=\frac{1}{8}. \end{cases} \qquad (**)$$

Обозначив $t=u\cdot v$, будем иметь $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=1-2t$, $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=(1-2t)^2-2t^2=1-4t+2t^2$.

Следовательно, t удовлетворяет квадратному уравнению $1-4t+2t^2=\frac{1}{8}$, то есть уравнению $2t^2-4t+\frac{7}{8}=0$. Это уравнение имеет два корня $t_1=\frac{1}{4}$ и $t_2=\frac{7}{4}$. Нас интересуют неотрицательные решения u и v системы (**).

Из первого уравнения системы (**) следует, что должны выполняться неравенства $0\le u\le 1$, $0\le v\le 1$ и, значит, $t \le 1$. Следовательно, $t=\frac{1}{4}$ и поэтому все неотрицательные решения системы уравнений (**) содержатся среди решений системы $\begin{cases} u+v=1, \\ uv=\frac{1}{4}. \end{cases}$

Решением этой системы является единственное решение $u=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{2}$. Проверкой убеждаемся, что эта пара чисел удовлетворяет и системе (**). Для нее среди решений (1) и (2) исходной системы имеется ровно четыре различных решения $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{28}\right)$; $\left(\frac{5}{4};\frac{1}{28}\right)$; $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{28}\right)$; $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{28}\right)$.

Решая таким же образом систему уравнений (*) при $a=-\frac{1}{4}$, убеждаемся, что она имеет только два решения (0; 1) и (1; 0) в неотрицательных числах. Для них среди решений (1) и (2) исходной системы имеется ровно четыре различных: (0; 0); (2; 0); $\left(1;-\frac{1}{7}\right)$; $\left(1;\frac{1}{7}\right)$.

Итак, оба числа $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{32}$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a=-\frac{1}{32}$, $a=-\frac{1}{4}$.

Рассмотрим системы уравнений (задачи 25, 26), которые хотя и не содержат модули, но их решение опирается на понятие модуля числа.

Задача 25. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ xy = 1. \end{cases}$

Решение

Можно выразить из второго уравнения системы y через x $\left(y = \dfrac{1}{x} \right)$, а затем подставить в первое уравнение вместо y выражение $\dfrac{1}{x}$, но мы тем самым получим биквадратное уравнение.

Чтобы избежать решения биквадратного уравнения, поступим следующим образом.

Умножив второе уравнение системы на 2, получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ 2xy = 2. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения системы, получим $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 5, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} (x+y)^2 = 5, \\ (x-y)^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} |x+y| = \sqrt{5}, \\ |x-y| = 1. \end{cases}$ Последняя система уравнений равносильна совокупности следующих четырех систем:

а) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{5}, \\ x - y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \sqrt{5}, \\ x - y = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{5}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = \sqrt{5}, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Складывая уравнения каждой системы совокупности, будем иметь:

а) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{5}, \\ 2x = -\sqrt{5} - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \sqrt{5}, \\ 2x = \sqrt{5} - 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{5}, \\ 2x = -\sqrt{5} + 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = \sqrt{5}, \\ 2x = \sqrt{5} + 1. \end{cases}$

Окончательно имеем:

а) $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}, \\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}, \\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

Итак, мы получили ответ.

Ответ: $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$,

$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$.

Задача 26. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3(5y-x-2)-\log_9(x-y)^2=1, \\ \log_3\left(1-\dfrac{2}{y}-4x\right)-\log_9 x^2=1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x-y<0$.

Решение

Пропотенцируем каждое из уравнений системы. Будем иметь

$$\begin{cases} 5y-x-2=3|x-y|, \\ y-2-4xy=3y|x|. \end{cases} \qquad (*)$$

Эта система является следствием исходной системы.

а) Пусть $x > 0$, тогда $|x|=x$ и, с учетом условия $x<y$, из первого уравнения последней системы получаем $y=1-x$.

Тогда второе уравнение этой системы преобразуется к виду $7y^2-6y-2=0$, откуда

$$y_1=\frac{3+\sqrt{23}}{7},\ y_2=\frac{3-\sqrt{23}}{7},$$

$$x_1=\frac{4-\sqrt{23}}{7},\ x_2=\frac{4+\sqrt{23}}{7}.$$

Здесь для x_1 не выполняется условие $x > 0$, а для пары $(x_2; y_2)$ не выполняется условие $x<y$.

б) Пусть $x < 0$, тогда из системы (*), с учетом условия $x < y$, получаем $y^2 = 2$, откуда $y_3 = -\sqrt{2}$, $y_4 = \sqrt{2}$; $x_3 = 1 + \sqrt{2}$, $x_4 = 1 - \sqrt{2}$.

Пара чисел (x_3; y_3) не удовлетворяет условию $x < 0$, а пара (x_4; y_4) удовлетворяет этому условию и исходной системе.

Ответ: $\left(1 - \sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Продолжим решение систем уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля.

Задача 27. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \lg|x| + \lg|y| = 2, \\ x^2 + y^2 = 425. \end{cases}$

Решение

Из первого уравнения находим $|xy| = 100$. Запишем систему в виде $\begin{cases} |x| \cdot |y| = 100, \\ |x|^2 + |y|^2 = 425. \end{cases}$

Умножая обе части первого уравнения на 2 и складывая почленно со вторым, получим $\left(|x| + |y|\right)^2 = 625 \Leftrightarrow |x| + |y| = 25$.

Решив систему $\begin{cases} |x| \cdot |y| = 100, \\ |x| + |y| = 25, \end{cases}$ находим $\begin{cases} |x| = 5, \\ |y| = 20, \end{cases}$ или $\begin{cases} |x| = 20, \\ |y| = 5. \end{cases}$

Ответ: (5; 20), (5; –20), (–5; –20), (–5; 20), (20; 5), (20; –5), (–20; 5), (–20; –5).

Задача 28. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} y + \left|x^2 + 6x + 8\right| = 0, \\ (y+1)^2 = (x+3)^2. \end{cases}$$

Решение

Запишем систему в следующем виде: $\begin{cases} y = -\left|x^2 + 6x + 8\right|, \\ (y - x - 2)(y + x + 4) = 0. \end{cases}$

Второе уравнение задает на координатной плоскости объединение прямых $y = x + 2$ или $y = -x - 4$. Решениями системы являются координаты точек A, B, C, D, E пересечения указанных прямых с графиком функции $y = -\left|x^2 + 6x + 8\right|$ (рис. 80).

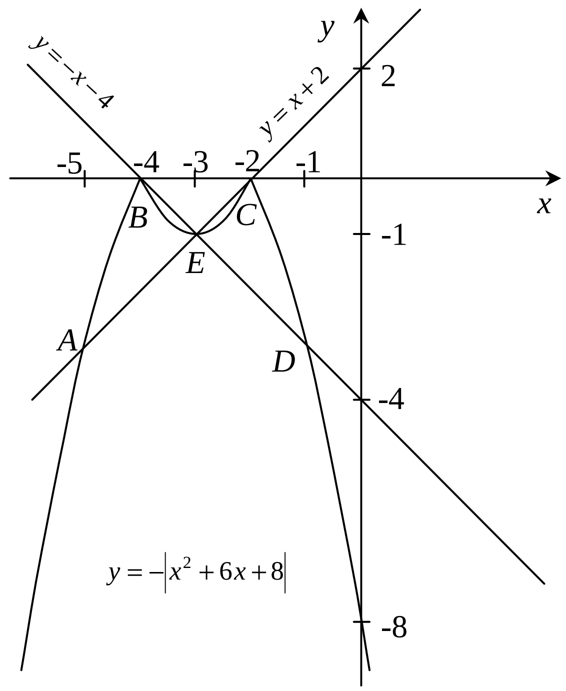


Рис. 80

Ответ: (–5; –3), (–4; 0), (–3; –1), (–2; 0), (–1; –3) .

Задача 29. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4xy + y^2} = x - y, \\ \sqrt{x^2 + 16|y|} = 3 + |y| - 2x^2. \end{cases}$

Решение

Возведем в квадрат обе части первого уравнения, считая $x \geq y$.

Получим $x^2 - 4xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$, откуда $xy = 0$.

Рассмотрим случаи:

1) $x = 0$. При этом второе уравнение принимает вид $4\sqrt{|y|} = 3 + |y|$, откуда $16|y| = 9 + 6|y| + |y|^2$, $|y|^2 - 10|y| + 9 = 0$, $|y|_1 = 1$; $|y|_2 = 9$. Условию $x \geq y$ удовлетворяет $y = -1$ и $y = -9$.

2) $y = 0$. Второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{x^2} = 3 - 2x^2 \Leftrightarrow 2|x|^2 + |x| - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Условию $x \geq y$ удовлетворяет $x = 1$.

Ответ: (0; –9), (0; –l), (l; 0).

Задача 30. При каких значениях параметра *a* система $\begin{cases} y + a = ax^2, \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$ имеет наибольшее число решений?

Решение

Изобразим графики уравнений в одной системе координат (рис. 81).

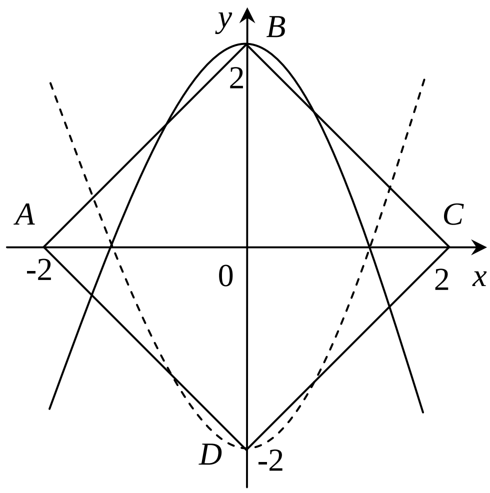


Рис. 81

Из геометрических соображений видно, что система будет иметь наибольшее число решений (пять точек), если вершина параболы будет находиться в точке $B(0; 2)$, а ее ветви будут направлены вниз или, если вершина параболы будет находиться в точке $D(0; -2)$, а ее ветви направлены вверх.

Ответ: $a = -2$; $a = 2$.

Задача 31. Найдите значения параметра a, при которых система $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=1,\\ y=|x-a|\end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение

Графиком первого уравнения системы является окружность с центром в точке (2; 2) и радиусом равным 1 (рис. 83). Графиком функции $y = |x - a|$ является кривая, полученная из прямой $y = x$ сдвигом на a единиц по оси Ox и зеркальным отображением той части прямой, которая лежит ниже оси Ox.

Заданная система имеет единственное решение в 3 случаях, изображенных на рисунке 82.

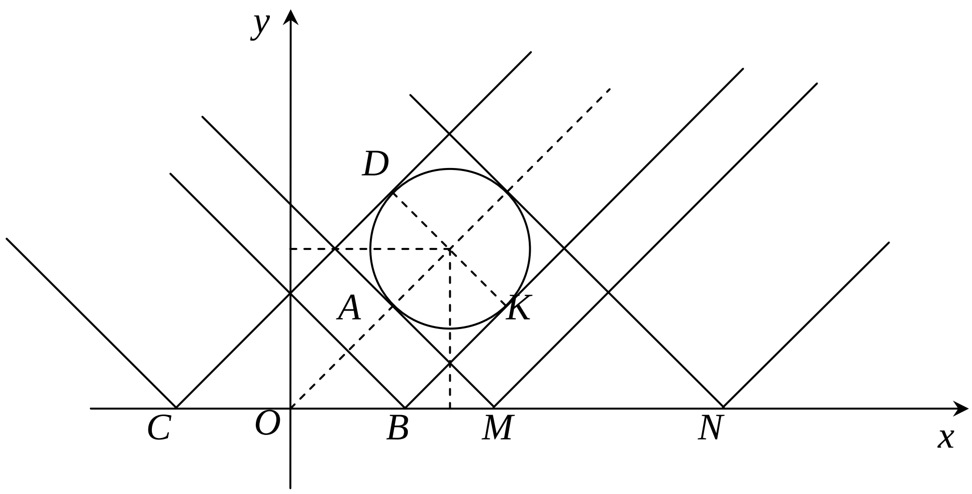


Рис. 82

Из равнобедренного прямоугольного треугольника OAB, в котором $OA = AB = 1$, по теореме Пифагора имеем $OB=\sqrt{2}$. Итак, при $a=\sqrt{2}$ кривая $y = |x - a|$ касается окружности $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ в одной точке, а значит заданная система имеет одно решение.

Второе значение параметра a, удовлетворяющее требованию задачи, соответствует абсциссе точки C, то есть $a=-\sqrt{2}$.

Третье искомое значение параметра a соответствует абсциссе точки M, то есть $a=4-\sqrt{2}$.

Четвертое искомое значение параметра a соответствует абсциссе точки N, то есть $a = 4$.

Ответ: $a=-\sqrt{2}$; $a=\sqrt{2}$; $a=4-\sqrt{2}$; $a = 4$.

Задача 32. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2+y^2 \le 2ay-a^2+1, \\ y+a \le |x| \end{cases}$ имеет ровно два решения?

Решение

Заданную систему неравенств можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2 \le 1, \\ y \le |x|-a. \end{cases}$$

Если нарисовать на плоскости множество решений первого неравенства, то получится круг с границей радиуса 1 с центром в точке (0; a). Множество решений второго неравенства – часть плоскости, лежащая под графиком функции $y = |x| - a$, включая и точки, лежащие на самом графике (рис. 83).

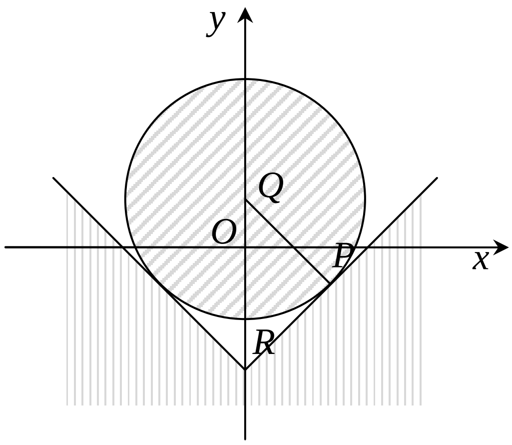


Рис. 83

Легко видеть, что два решения заданная система будет иметь лишь в случае, изображенном на рисунке 83.

Координаты точек касания круга с прямыми и будут двумя решениями системы. Каждая из прямых наклонена к осям под углом 45° (график $y = |x| - a$ получен из графика $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Oy на a единиц). Значит, треугольник PQR – прямоугольный равнобедренный. Точка Q имеет координаты (0; a), а точка R – координаты (0; $-a$). Кроме того, отрезки PR и PQ равны радиусу окружности, равному 1. Значит, $QR = 2a = \sqrt{2}$, откуда $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 33. Решите систему $\begin{cases} 2^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \le 8. \end{cases}$

Решение

1. Решим неравенство системы. Оно равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 0, \\ -4y + (y-1) + (y+3)^2 \le 8, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < y \le 1, \\ 4y + (y-1) + (y+3)^2 \le 8, \end{cases} \\ \begin{cases} y > 1, \\ 4y - (y-1) + (y+3)^2 \le 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 0, \\ y^2 + 3y \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < y \le 1, \\ y^2 + 11y \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y > 1, \\ y^2 + 9y + 2 \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вторая и третья системы совокупности решений не имеют, так как при указанных значений y выражения, стоящие в левой части квадратных неравенств, положительны. Первая система имеет решением промежуток $-3 \le y \le 0$.

2. Рассмотрим теперь уравнение системы, предварительно преобразовав его следующим образом:

$$2^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_2 3} = 3^{-y-4} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot 2^{\left|x^2-2x-3\right|} = 3^{-y-4} \Leftrightarrow 2^{\left|x^2-2x-3\right|} = 3^{-y-3}.$$

Последнее равенство возможно, когда его обе части равны единице, так как

$$\left|x^2-2x-3\right| \ge 0 \Rightarrow 2^{\left|x^2-2x-3\right|} \ge 1,$$

$$y \ge -3 \Rightarrow -y-3 \le 0 \Rightarrow 3^{-y-3} \le 1.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{\left|x^2-2x-3\right|} = 1, \\ 3^{-y-3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^2-2x-3\right| = 0, \\ -y-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3 \end{array}\right. \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: (–1; –3); (3; –3).

§5. НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Напомним некоторые сведения о неравенствах.

Два неравенства $A > B$ и $C > D$ называются неравенствами одинакового смысла. Два неравенства $A > B$ и $C < D$ называются неравенствами противоположного смысла. Неравенства $A > B$, $C > D$ называются строгими, неравенства $A \geq B$, $C \leq D$ – нестрогими.

Решить неравенство – значит указать границы, в которых должны заключаться значения неизвестных величин, чтобы неравенство было верным.

СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ

1. Если $a \geq b$, то $b \leq a$.

2. Если $a \geq b$, $b \geq c$, то $a \geq c$ (транзитивность неравенств).

3. Если $a \geq b$, то при любом c $a + c \geq b + c$, то есть неравенство не нарушится (преобразуется в неравенство того же смысла), если к каждой его части прибавить одно и то же число.

Следствие. Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный.

4. Если $a \geq b$ и $b > c$, то $ac \geq bc$; если $m \leq n$ и $c > 0$, то $mc \leq nc$, то есть если обе части неравенства умножить на положительное число, то получится неравенство того же смысла.

5. Если $a \geq b$ и $c < 0$, то $ac \leq bc$, то есть если обе части неравенства умножить на отрицательное число, то получится неравенство противоположного смысла.

6. Если $a \geq b$ *и* $c \geq d$, то $a + c \geq b + d$, то есть при почленном сложении двух неравенств одного и того же смысла получается неравенство того же смысла.

7. Если a, b, c, d положительны и $a \geq b$, $c \geq d$, то $ac \geq bd$, то есть при почленном умножении двух неравенств, имеющих положительные члены и один и тот же смысл, получается неравенство того же смысла.

8. Если $a \geq b$ и $c \leq d$, то $a - c \geq b - d$, то есть неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, при этом получается неравенство того же смысла, что и первое неравенство.

9. Если $a \geq b \geq 0$, то есть если $a \geq b$ и оба числа a и b неотрицательны, то при любом натуральном n $a^n \geq b^n$, то есть неравенство, имеющее неотрицательные члены, не нарушится, если каждую его часть возвести в степень с одним и тем же натуральным показателем.

Следствие. Если $|a| \geq |b|$, то $|a|^2 \geq |b|^2$, то есть $a^2 \geq b^2$, то есть $a^2 - b^2 \geq 0$, то есть $(a-b)(a+b) \geq 0$.

10. Если $a \geq b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ («перевертывание» неравенств).

11. Если $a \geq b \geq 0$. то при любом натуральном n $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$.

12. Неравенство $xy > 0$ справедливо тогда и только тогда, когда x и y либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны.

13. Неравенство $xy < 0$ справедливо тогда и только тогда, когда x и y имеют разные знаки.

14. Неравенство $\frac{x}{y} > 0$ справедливо тогда и только тогда, когда x и y либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны.

15. Неравенства $\frac{x}{y} > 0$ и $xy > 0$, а также $\frac{x}{y} < 0$ и $xy < 0$ равносильны.

НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

2. $|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > a. \end{array}\right.$.

3. Если $a > 0$, то имеет место неравенство $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$. Равенство имеет место только при $a = 1$.

4. Если $ab > 0$, то имеет место неравенство $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$. Равенство имеет место только при $a = b = 1$.

5. Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, то есть среднее геометрическое двух положительных чисел не превосходит их среднего арифметического. Равенство $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ имеет место только в случае $a = b$.

Одним из основных методов решения неравенств, в том числе и неравенств с модулем, является метод интервалов (промежутков). Он основан на следующем *утверждении*. Если функция на интервале $(a;b)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале имеет постоянный знак (напомним, что все многочлены непрерывны для всех значений их аргумента).

Напоминаем, что метод интервалов для решения рациональных неравенств состоит в следующем:

1. Все члены неравенства переносятся в левую часть и приводятся к общему знаменателю.

2. Определяются критические точки, то есть точки, в которых числитель или знаменатель обращаются в нуль.

3. Критические точки наносятся на числовую ось, разбивая ее при этом на промежутки, в каждом из которых рациональная функция, находящаяся в левой части неравенства, сохраняет знак.

4. Определяется знак на крайнем справа промежутке: если произведение коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя больше нуля, то соответствующая рациональная функция принимает на этом промежутке положительное значение, в противном случае – отрицательные значения, что обозначается на числовой оси с помощью знаков «+» и «–».

5. Определяются знаки левой части неравенства на остальных промежутках: при переходе через критическую точку знак меняется на противоположный, если критическая точка является корнем нечетной кратности; при переходе через точку четной кратности знак сохраняется.

6. Множеством решений неравенства является объединение промежутков с соответствующим знаком; при этом в случае нестрогого неравенства к этому множеству добавляются корни числителя.

Укажем еще один метод решения неравенств, в том числе и содержащие модули. Назовем этот метод условно «методом замены функций». Он основан на следующем очевидном *утверждении*: если область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции $f(x)$ соответственно совпадают с областью определения, нулями и промежутками знакопостоянства функции $g(x)$, то неравенства $p(x)f(x) \geq 0$ и $p(x)g(x) \geq 0$ равносильны. По существу это утверждение означает, что если одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ имеет более простой вид, то при решении соответствующего неравенства ее можно заменить другой. Приведем основные примеры таких пар функций:

1) $f(x) = a^{u(x)} - a^{v(x)}$ ($a > 1$) и $g(x) = u(x) - v(x)$;

2) $f(x) = |u(x)| - |v(x)|$ и $g(x) = u^2(x) - v^2(x)$;

3) $f(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ и $g(x) = u(x) - v(x)$, причем $D(g)$ при четном n задается системой $\begin{cases} u(x) \geq 0, \\ v(x) \geq 0. \end{cases}$

4) $f(x)=\log_a u(x)-\log_a v(x)$ $(a>1)$ и $g(x)=u(x)-v(x)$, причем $D(g)$ задается системой $\begin{cases} u(x)>0, \\ v(x)>0. \end{cases}$

Промежутки знакопостоянства и нули приведенных пар функций соответственно совпадают, в чем несложно убедиться даже устно. Как пример применения метода замены функций решим неравенство

$$\frac{(\log_2(2x+1)-\log_2(x+2))(|x|-|x-2|)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}\le 0.$$

Справедлива следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\begin{cases} \dfrac{((2x+1)-(x+2))(x^2-(x-2)^2)}{(3x-2)-(2x-1)}\le 0, \\ x\ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)\cdot 2\cdot 2(x-1)}{x-1}\le 0, \\ x\ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x-1}\le 0, \\ x\ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x<1.$$

Покажем один из способов решения неравенства вида $|t-a|+|t-b|\le c$.

Известно, что $|m| = \max\{m; -m\}$. Отсюда сразу следует, что произвольная сумма модулей есть максимальная величина из всевозможных алгебраических сумм подмодульных величин. В частности,

$$|u|+|v|=\max\{u+v; u-v; -u+v; -u-v\}. \qquad (1)$$

Четыре алгебраические суммы в правой части равенства (1) разбиваются на две пары противоположных величин:

$$u+v,\ -u-v \text{ и } u-v,\ -u+v,$$

что позволяет равенство (1) переписать в виде:

$$|u|+|v|=\max\{\max\{u+v; -u-v\}; \max\{-u+v; u-v\}\}.$$

Но

$$\begin{cases} \max\{u+v;-u-v\}=|u+v|, \\ \max\{u-v;-u+v\}=|u-v|, \end{cases}$$

поэтому сразу получаем полезное *утверждение*

$$|u|+|v|=\max\{|u+v|;|u-v|\}. \qquad (2)$$

Осталось указать, что максимальное из данных чисел не больше некоторой величины тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел не больше данной величины. Поэтому

$$|u|+|v|\le h \Leftrightarrow \begin{cases} |u+v|\le h, \\ |u-v|\le h. \end{cases} \qquad (3)$$

Утверждение (3) и лежит в основе следующего решения неравенства

$$|t-a|+|t-b|\le c. \qquad (*)$$

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} |(t-a)+(t-b)|\le c, \\ |(t-a)-(t-b)|\le c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2t-(a+b)|\le c, \\ |a-b|\le c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b-c}{2}\le t\le \dfrac{a+b+c}{2}, \\ |a-b|\le c. \end{cases}$$

То есть неравенство (*) имеет решение тогда и только тогда, когда $|a-b|\le c$, и его решением является $\left[\dfrac{a+b-c}{2};\dfrac{a+b+c}{2}\right]$.

Советуем читателю взять на вооружение эти три *утверждения*.

Укажем наиболее часто встречающиеся неравенства, содержащие знак модуля, и их равносильные преобразования.

1. $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

2. $|f(x)|\le g(x)\Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x)$.

3. $|f(x)|\ge g(x)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x), \\ -f(x)\ge g(x). \end{array}\right.$

4. $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ -f(x)>g(x). \end{array}\right.$

5. $|f(x)|<|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x) \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))<0$.

6. $|f(x)|\le|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)\le g^2(x) \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))\le 0$.

7. $|f(x)|\ge|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)\ge g^2(x) \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))\ge 0$.

8. $|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x) \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))>0$.

1) Простейшие неравенства, содержащие модуль

Простейшими неравенствами содержащими модуль, являются неравенства вида $|ax+b|\le cx+d$ и $|ax+b|\ge cx+d$, $a\ne 0$.

Полезно уметь строить эскиз графика функции $y=|ax+b|$. Для этого сначала строим график прямой $y = ax + b$ (рис. 84).

Затем отражаем «отрицательную» (пунктирная тонкая полупрямая) часть прямой относительно оси абсцисс (жирная пунктирная полупрямая) и получаем нужный график – «угол»

$$y=|ax+b|=|a|\left|x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right|$$

с вершиной в точке $x_0=-\frac{b}{a}$, правый луч которого образует с осью абсцисс угол α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = |a|$ (рис. 85).

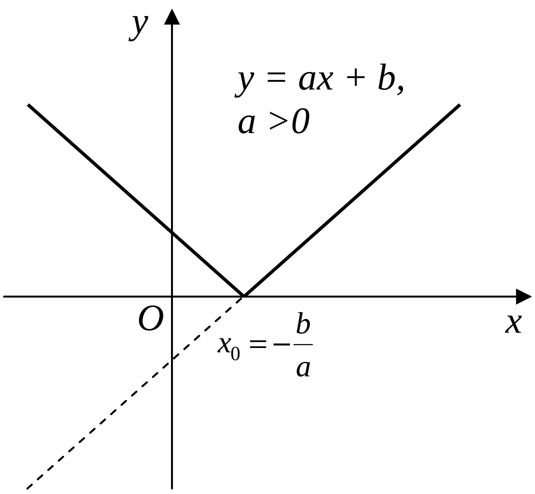


Рис. 84

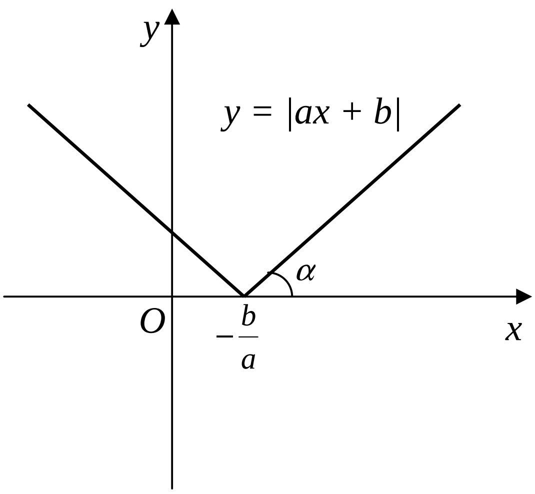


Рис. 85

При решении неравенств вида $|ax+b| \le cx+d$ и $|ax+b| \ge cx+d$ удобно прикинуть эскизы графиков правых и левых частей.

Тогда вместо решения неравенств достаточно только найти абсциссы точек пересечения x_1, x_2 (если такие есть), «угла» $y=|ax+b|$ с прямой

$y = cx + d$, то есть решить только одно уравнение $|ax+b| = cx+d$, а затем для неравенства записать ответ в зависимости от знака неравенства.

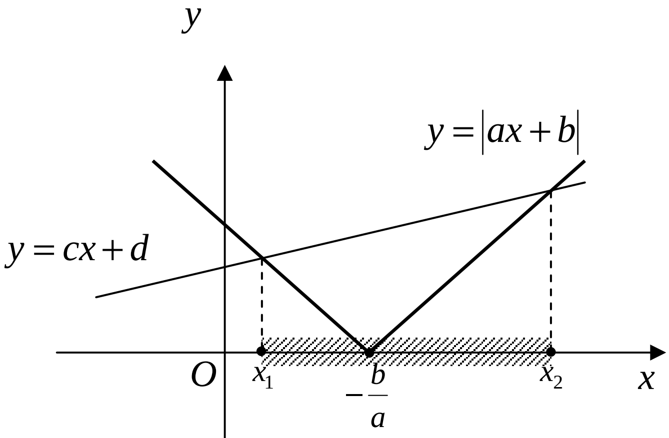


Рис. 86

Таким образом (рис. 86)

$$|ax+b| \le cx+d \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2];$$

$$|ax+b| \ge cx+d \Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup [x_2; +\infty].$$

«Угол» может пересекаться с прямой только в одной точке (рис. 87), тогда

$$|ax+b| \le cx+d \Leftrightarrow x \in [x_1; +\infty);$$

$$|ax+b| \ge cx+d \Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1].$$

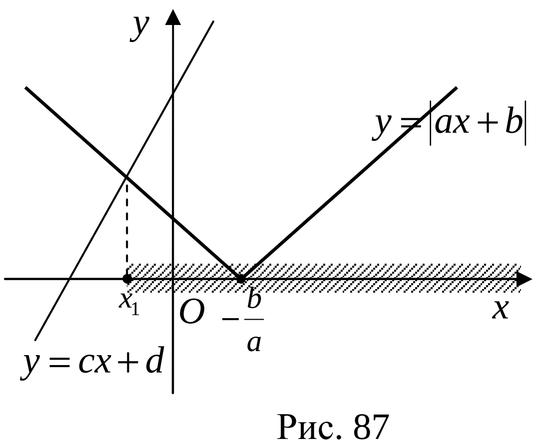


Рис. 87

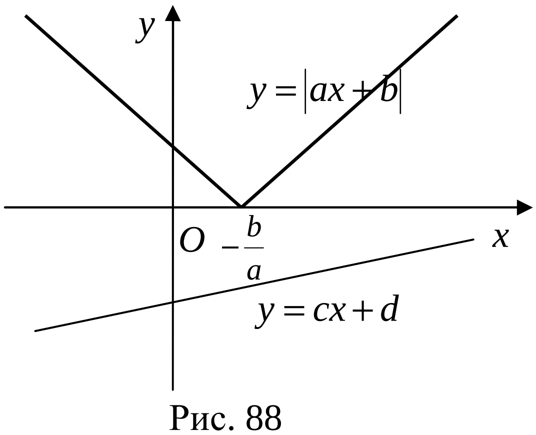


Рис. 88

"Угол" может и вовсе не пересекаться с прямой (рис. 88), тогда

$$|ax+b| \le cx+d \Leftrightarrow x \in \varnothing;$$

$$|ax+b| \ge cx+d \Leftrightarrow x \in R.$$

Для неравенств вида $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| > g(x)$, $|f(x)| < |g(x)|$ мы приведем сейчас такие условия равносильности, при использовании которых знаки функций $f(x)$ и $g(x)$ не имеют никакого значения.

2) Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$

Пусть в некоторой точке a выполнено неравенство $|f(x)| < g(x)$, тогда $g(a) > 0$ и $|f(a)| < g(a)$.

Тогда выполнены неравенства $-g(a) < f(a) < g(a)$ и на числовой прямой имеет место ситуация, изображенная на рисунке 89.

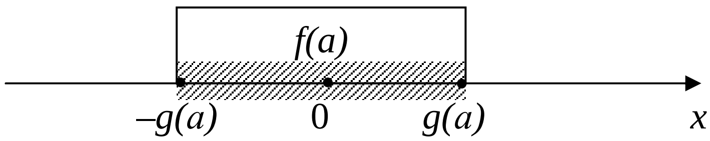


Рис. 89

И, наоборот, пусть в некоторой точке a выполнены неравенства $-g(a) < f(a) < g(a)$.

Тогда, во-первых, $-g(a) < g(a) \Leftrightarrow g(a) > 0$, а, во-вторых, $|f(a)| < g(a)$. Следовательно, имеет место условие равносильности

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases} \qquad (A)$$

Задача 1. Решите неравенство $|x-a|+|x-2|+a-4 \le 0$ при всех значениях a.

Решение

$$|x-a|+|x-2|+a-4 \le 0 \Leftrightarrow |x-a| \le 4-a-|x-2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-a \le 4-a-|x-2|, \\ x-a \ge a-4+|x-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \le 4-x, \\ |x-2| \le x-2a+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \le 4-x, \\ x-2 \ge x-4; \\ x-2 \le x-2a+4, \\ x-2 \ge 2a-x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ a \le 3, \\ x \ge a-1. \end{cases}$$

Из рисунка 90 видно, что решением будет промежуток $[a-1; 3]$. Итак, решений при $a > 3$ нет, а при $a \in (-\infty; 3]$ имеем $a - 1 \le x \le 3$.

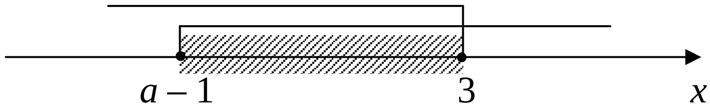


Рис. 90

Ответ: $a \in [a-1; 3]$ при $a \in (-\infty; 3]$; нет решений при $a \in (3; +\infty)$.

3) Неравенства вида $|f(x)| > g(x)$

Пусть дано неравенство $|f(x)| > g(x)$. Тогда, если $g(x) < 0$, то неравенство выполнено, так как модуль принимает неотрицательные значения и всегда больше любого отрицательного числа; если $g(x) \ge 0$, то выполнена совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$ и на числовой прямой имеет место ситуация, изображенная на рисунке 91.

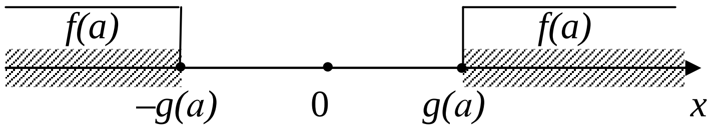


Рис. 91

И, наоборот, пусть в некоторой точке $x = a$ имеет место совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(a) > g(a), \\ f(a) < -g(a). \end{array}\right.$

Тогда, если $g(a) < 0$, то неравенство $|f(a)| > g(a)$ выполнено, если $g(a) \ge 0$, то имеет место ситуация (рис. 91), выполнено неравенство $|f(a)| > g(a)$.

Следовательно, имеем равносильные соотношения

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right. \qquad \text{(B)}$$

Задача 2. Решите неравенство $8 + 6 \cdot \left|3 - \sqrt{x+5}\right| > x$.

Решение

Воспользуемся утверждением (В). Тогда

$$8+6\cdot\left|3-\sqrt{x+5}\right|>x \Leftrightarrow 6\cdot\left|3-\sqrt{x+5}\right|>x-8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 18-6\sqrt{x+5}>x-8, \\ 18-6\sqrt{x+5}<-x+8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6\sqrt{x+5}<26-x, \\ 6\sqrt{x+5}>10+x. \end{array}\right.$$

Решим неравенства графически. Для первого неравенства находим x^* (рис. 92).

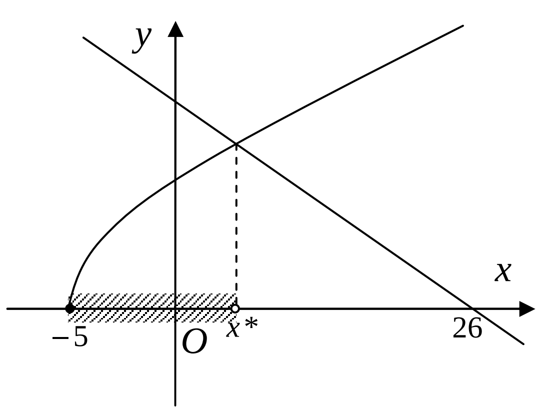


Рис. 92

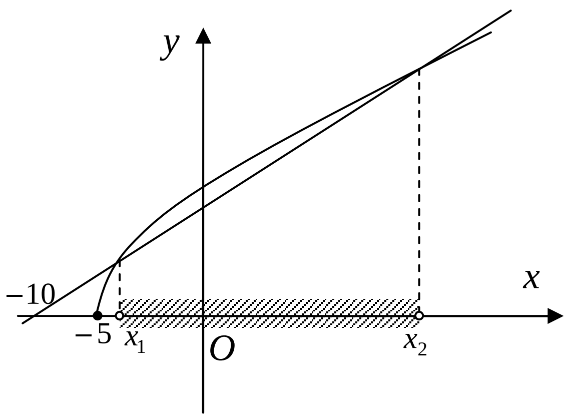


Рис. 93

Решение неравенства "считываем" с рисунка. Для x^* имеем:

$$6\sqrt{x^*+5}<26-x^* \Leftrightarrow \begin{cases} x^*\le 26, \\ 36+180=26^2-52x^*+(x^*)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^*=44-12\sqrt{10}.$$

Решение первого неравенства совокупности $x\in[-5;\ 44-12\sqrt{10})$.

Для решения второго неравенства находим x_1 и x_2 из уравнения

$$6\sqrt{x+5}>10+x \Leftrightarrow 36x+180=100+20x+x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4, \\ x_2=20. \end{array}\right.$$

Теперь решение второго неравенства "считываем" с рисунка 93 $x\in(-4;\ 20)$.

Так как $44-12\sqrt{10}<20$, то решением совокупности будет $x\in[-5;20)$.

Ответ: $[-5;20)$.

Задача 3. Решите неравенство $\left|\left|x^2+5x-18\right|-x^2\right|\geq 18-x$.

Решение

$$\left|\left|x^2+5x-18\right|-x^2\right|\geq 18-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|x^2+5x-18\right|-x^2\geq 18-x,\\ \left|x^2+5x-18\right|-x^2\leq -18+x\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|x^2+5x-18\right|\geq x^2-x+18,\\ \left|x^2+5x-18\right|\leq x^2+x-18\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+5x-18\geq x^2-x+18,\\ x^2+5x-18\leq -x^2+x-18;\\ \begin{cases}x^2+5x-18\leq x^2+x-18,\\ x^2+5x-18\geq -x^2-x+18\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 6,\\ x(x+2)\leq 0;\\ \begin{cases}x\leq 0,\\ (x+6)(x-3)\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 6,\\ x\in[-2;0];\\ x\leq 6.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-6]\cup[-2;0]\cup[6;+\infty)$.

4) Неравенства вида $|f(x)|<|g(x)|$

Рассмотрим разность $|f(x)|-|g(x)|$. Она может быть любого знака, но сумма $|f(x)|+|g(x)|$ всегда неотрицательна, и умножение разности на эту сумму не изменит знака разности, то есть: знак разности модулей $|f(x)|-|g(x)|$ совпадает со знаком произведения $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$.

Действительно,

$$\left(|f(x)|-|g(x)|\right)\left(|f(x)|+|g(x)|\right)=\left(|f(x)|^2-|g(x)|^2\right)=$$
$$=\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=(f(x)-g(x))(f(x)+g(x)).$$

Отсюда, в частности, следует: если $g(x)\geq 0$, то знак разности $|f(x)|-g(x)$ совпадает со знаком произведения $(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))$.

Итак, имеем еще одно условие равносильности

$$|f(x)|<|g(x)|\Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))<0. \qquad \text{(C)}$$

Условия равносильности имеют тот же вид для нестрогих неравенств.

Задача 4. Решите неравенство $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geq \dfrac{2}{|x+1|-2}$.

Решение

Мы воспользуемся тем, что знак разности $|x + 1| - 1$ совпадает со знаком произведения $(x + 1 + 1)(x + 1 - 1)$ и аналогично для разности $|x + 1| - 2$.

$$\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{2}{|x+1|-2} \Leftrightarrow \frac{|x+1|}{(|x+1|-1)(|x+1|-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+1|}{(x+1+1)(x+1-1)(x+1+2)(x+1-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x(x+2)(x+3)(x-1)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-3;-2) \cup \{-1\} \cup (0;1).$$

Ответ: $(-3;-2) \cup \{-1\} \cup (0;1)$.

Замечание: Знак {} обозначает знак множества.

Перейдем к решению различного рода неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля.

Задача 5. Решите неравенство $|x| > |x-1|$.

Решение

Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то оно равносильно неравенству $|x|^2 > |x-1|^2$, откуда $x^2 > x^2 - 2x + 1$, $2x - 1 > 0$, $x > \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Задача 6. Решите неравенство $|x + |1 - x|| > 3$.

Решение

Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x+|1-x|>3, \\ x+|1-x|<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |1-x|>3-x, \\ |1-x|<-3-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x>3-x, \\ 1-x<x-3, \\ \begin{cases} 1-x<-3-x, \\ 1-x>3+x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1>3, \varnothing \\ x>2, \\ \begin{cases} 1<-3, \\ x<-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x>2.$$

Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

Задача 7. Решите неравенство $|1-3x|-|x+2| \le 2$.

Решение

$$|1-3x| \le 2+|x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x \le |x+2|+2, \\ 1-3x \ge -|x+2|-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| \ge 1-3x-2, \\ |x+2| \le -1+3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| \ge -1-3x, \\ |x+2| \le -3+3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2 \ge -1-3x, \\ x+2 \le 3x+1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+2 \ge -3+3x, \\ x+2 \le 3-3x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge -0{,}75, \\ x \ge 0{,}5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le 2{,}5, \\ x \le 0{,}25 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -0{,}75, \\ x \le 2{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $[-0{,}75; 2{,}5]$.

Задача 8. Решите неравенство $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \le 2$.

Решение

Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 2, \\ \dfrac{(2-x)-x}{(3-x)-1} \le 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x \le 3, \\ \dfrac{(x-2)-x}{(3-x)-1} \le 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ \dfrac{(2-x)-x}{(x-3)-1} \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 2, \\ \dfrac{2-2x}{2-x} \le 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x \le 3, \\ \dfrac{2}{x-2} \le 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ \dfrac{2}{x-4} \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 2, \\ \dfrac{1}{x-2} \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x \le 3, \\ \dfrac{x-3}{x-2} \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ \dfrac{x-3}{x-4} \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;2) \cup \{3\} \cup (4;+\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$.

Задача 9. Решите неравенство $|x+3| \le 6 - 3\sqrt{1-x}$.

Решение

Пусть $\sqrt{1-x} = y, y \ge 0$. Тогда $x = 1 - y^2$ Исходное неравенство примет следующий вид:

$$|1-y^2+3| \le 6-3y \Leftrightarrow |4-y^2| \le 6-3y \Leftrightarrow \begin{cases} 4-y^2 \le 6-3y, \\ 4-y^2 \ge 3y-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-3y+2 \ge 0, \\ y^2+3y-10 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty), \\ y \in [-5;2] \end{cases} \Leftrightarrow y \in [-5;1] \cup \{2\}.$$

Если $y = 2$, то $x = -3$; если $-5 \le y \le 1$, то

$$-5 \le \sqrt{1-x} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1.$$

Ответ: $x \in \{-3\} \cup [0; 1]$.

Задача 10. Решите неравенство $8^x \ge 6 \cdot 9^{|x-1|}$.

Решение

Рассмотрим два случая.

1. Если $x < 1$, то, раскрыв модуль по определению, мы получим следующее неравенство:

$$8^x \ge 6 \cdot 9^{1-x} \Leftrightarrow 72^x \ge 54 \Leftrightarrow x \ge \log_{72} 54.$$

Так как $\log_{72} 54 < \log_{72} 72 = 1$, то, с учетом $x < 1$, решением будет служить промежуток $x \in [\log_{72}54; 1)$.

2. Если $x \ge 1$, то данное неравенство примет вид:

$$8^x \ge 6 \cdot 9^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^x \ge \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \le \log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3}.$$

Так как $\log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3} > \log_{\frac{8}{9}} \frac{8}{9} = 1$, то, с учетом $x \ge 1$, имеем: $x \in \left[1; \log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3}\right]$.

Объединяя оба случая, записываем окончательный ответ:

$$x\in\left[\log_{72}54;\log_{\frac{8}{9}}\frac{2}{3}\right]$$

Ответ: $x\in\left[\log_{72}54;\log_{\frac{8}{9}}\frac{2}{3}\right]$.

Задача 11. Найдите все решения неравенства

$$\frac{21-2^x-2^{6-x}-\left|3-2^x\right|}{5-\left|3-2^x\right|}\geq 1.$$

Решение

Пусть $y = 2^x$, $y > 0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$\frac{21-y-\frac{64}{y}-|3-y|}{5-|3-y|}\geq 1\Leftrightarrow\frac{16-y-\frac{64}{y}}{5-|3-y|}\geq 0\Leftrightarrow\frac{16y-y^2-64}{5-|3-y|}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(y-8)^2}{5-|3-y|}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=8,\\5-|3-y|\neq 0\end{cases}\\5-|3-y|<0\end{array}\right.\Leftrightarrow 5-|3-y|<0\Leftrightarrow|3-y|>5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-y>5,\\3-y<-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y<-2,\\y>8\end{array}\right.\overset{\left(\substack{\text{так как}\\y>0}\right)}{\Leftrightarrow}y>8\Leftrightarrow x>3.$$

Ответ: $x\in(3;+\infty)$.

Задача 12. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+7}-|2x-1|}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\geq 1$.

Решение

$$\frac{\sqrt{x+7}-|2x-1|}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}-1\geq 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\geq 0.\qquad(*)$$

Последнее неравенство (*) можно решить стандартным методом интервалов. Мы приведем иное решение. А именно, заменим разности неотрицательных выражений (множителей) разностью их квадратов (с учетом (ООН):

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-\left(\sqrt{8-x}\right)^2}{\left(\sqrt{8-x}\right)^2-|2x-1|^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+7-(8-x)}{8-x-(2x-1)^2} \geq 0, \\ x+7 \geq 0, \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{4\left(x-\dfrac{7}{4}\right)(x+1)} \leq 0, \\ -7 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Решая первое неравенство системы методом интервалов, получим: $[-7;-1)\cup\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{4}\right]$.

Корректность этой удобной замены (ведь сразу пропали и корни, и модуль) вытекает из монотонного возрастания квадратичной функции $y = t^2$ при $t \in [0; +\infty)$. Действительно, здесь при любых неотрицательных t_1, и t_2 $\begin{cases} t_1-t_2 \geq 0, \\ t_1, t_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1^2-t_2^2 \geq 0$.

Ответ: $x \in [-7;-1)\cup\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{4}\right]$.

Задача 13. Решите неравенство $|x+3|\cdot(|x-1|-3)\leq 0$.

Решение

Имеем цепочку равносильностей:

$$|x+3|\cdot(|x-1|-3)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+3|=0, \\ |x-1|\leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ -2\leq x\leq 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-3\}\cup[-2;4]$.

Задача 14. Решите неравенство $|x-12|\leq \dfrac{x}{12-x}$.

Решение

а) Если $x < 12$, то исходное неравенство принимает вид

$$12-x\leq\frac{x}{12-x}\Leftrightarrow(12-x)^2\leq x\Leftrightarrow 9\leq x\leq 16,$$

откуда с учетом предварительного условия получаем $9\leq x<12$.

б) Если же $x > 12$, то, раскрывая модуль и умножая на $12 - x < 0$, имеем

$$x-12\le\frac{x}{12-x}\Leftrightarrow-(12-x)^2\ge x\Leftrightarrow x^2-23x+144\le 0,$$

Последнее неравенство решений не имеет (объясните почему).

Ответ: [9; 12].

Задача 15. Решите неравенство $|x+4|+|1-x|>2+x$.

Решение

Разобьем числовую прямую на промежутки корнями подмодульных выражений: $x = -4$, $x = 1$ (рис. 94).

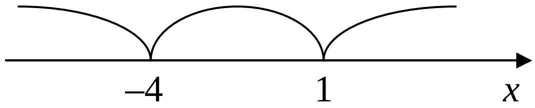


Рис. 94

Рассмотрим неравенство на каждом из промежутков.

1) $\begin{cases}x<-4,\\ -x-4+1-x>2+x,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x<-4,\\ x<-\dfrac{5}{3}.\end{cases}$ Имеет $x < -4$.

2) $\begin{cases}-4\le x\le 1,\\ x+4+1-x>2+x,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}-4\le x\le 1,\\ x<3.\end{cases}$ Имеет $-4 \le x \le 1$.

3) $\begin{cases}x>1,\\ x+4-1+x>2+x,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x>1,\\ x>-1.\end{cases}$ Имеет $x > 1$.

Объединяя решения $x < -4$, $-4 \le x \le 1$ и $x > 1$ получим все действительные числа.

Ответ: R.

Задача 16. Решите неравенство

$$\frac{\left(\sqrt{x+3}+x-3\right)\left(\sqrt{4x+5}+x-4\right)}{\sqrt{4+4x-x^2-x^3}}\le 0.$$

Решение

Пусть $f(x)=\sqrt{x+3}+x-3$, $g(x)=\sqrt{4x+5}+x-4$. Каждое из уравнений $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ имеет единственный корень $x = 1$.

Функции *f(x)* и *g(x)* определены соответственно при $x \geq -3$ и $x \geq -\frac{5}{4}$, причем *f(x)* < 0 при $x \in$ [–3, 1) и *f(x)* > 0 при *x* > 1, *g(x)* < 0 при $x \in \left[-\frac{5}{4};1\right]$ и *g(x)* > 0 при *x* > 1.

Следовательно, неравенству *f(x)g(x)* ≤ 0 удовлетворяет только *x* = 1.

Функция $h(x) = \sqrt{4 + 4x - x^2 - x^3}$ определена при $x = 1$ и $h(1) = \sqrt{6} > 0$.

Поэтому *x* = 1 – единственное решение неравенства.

Ответ: *x* = 1.

Задача 17. Решите неравенство $\log_{x+1}(4 - x) \geq \frac{\left|\log_{15}(4x + 3) - 1\right|}{\log_{15}(x + 1)}$.

Решение

Неравенство определено при $-\frac{3}{4} < x < 4$, *x* ≠ 0. Перейдем к логарифмам по основанию 15:

$$\frac{\left|\log_{15}(4x + 3) - 1\right| - \log_{15}(4 - x)}{\log_{15}(x + 1)} \leq 0.$$

Рассмотрим далее два случая.

а) Пусть $-\frac{3}{4} < x \leq 3$, *x* ≠ 0, тогда $\log_{15}(4x + 3) - 1 \leq 0$, следовательно,

$$\frac{\log_{15}(4x + 3)(4 - x) + 1}{\log_{15}(x + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(4x + 3)(4 - x) - 15}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 13x + 3}{x} \leq 0$$

(преобразования равносильны на области определения неравенства). С учетом условия а) получаем $x \in \left(-\frac{3}{4};0\right) \cup \left[\frac{1}{4};3\right]$.

б) Если 3 < *x* < 4, то $\log_{15}(4x + 3) - 1 > 0$, поэтому получаем неравенство

$$\frac{\log_{15}(4x+3)-\log_{15}15(4-x)}{\log_{15}(x+1)} \le \Leftrightarrow \frac{(4x+3)-15(4-x)}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} \le 0.$$

Последнее неравенство не имеет решений на промежутке 3< x <4.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4};0\right) \cup \left[\frac{1}{4};3\right)$.

Задача 18. Решите неравенство $\log_{x+2}(2-x) \ge \frac{\left|\log_5(2x+3)-1\right|}{\log_5(x+2)}$.

Решение

Заметив, что неравенство определено при $-\frac{3}{2} < x < 2$, $x \ne -1$, перейдем к логарифмам по основанию 5:

$$\frac{\left|\log_5(2x+3)-1\right|-\log_5(2-x)}{\log_5(x+2)} \le 0.$$

Рассмотрим далее два случая.

а) При –1 < x < 2 имеем $\log_5(x + 2) > 0$, следовательно,

$$\left|\log_5(2x+3)-1\right| \le \log_5(2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(2x+3)-1 \le \log_5(2-x), \\ \log_5(2x+3)-1 \ge -\log_5(2-x), \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \le 5(2-x), \\ (2x+3)(2-x) \ge 5, \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 1.$$

б) Если $-\frac{3}{2} < x < -1$, то $\log_5(x + 2) < 0$, поэтому получаем неравенство

$$\left|\log_5(2x+3)-1\right| \ge \log_5(2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_5(2x+3)-1 \ge \log_5(2-x), \\ \log_5(2x+3)-1 \le -\log_5(2-x), \end{array}\right. \\ -\frac{3}{2} < x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+3 \ge 5(2-x), \\ (2x+3)(2-x) \le 5, \end{array}\right. \\ -\frac{3}{2} < x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -1.$$

Остается объединить полученные части ответа.

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Задача 19. Найти все решения неравенства

$$\left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|}<\left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}.$$

Решение

Приведем два решения: аналитическое и графическое.

Аналитическое решение

Так как $\frac{15}{14}>1$, то заданное неравенство равносильно такому неравенству: $|x+7|<|x^2-3x+2|$. Это неравенство равносильно такому:

$$|x+7|^2<|x^2-3x+2|^2,$$

$$(x+7-x^2+3x-2)(x+7+x^2-3x+2)<0,$$

$$(4x-x^2+5)(x^2-2x+9)<0.$$

Разложим первый квадратный трехчлен на множители. Будем иметь: $(x-5)(x+1)(x^2-2x+9)>0$.

Значения квадратного трехчлена x^2-2x+9 всегда положительны, так как он имеет графиком параболу, ветвями направленную вверх, и не пересекающую ось Ox (его дискриминант отрицателен).

На числовую прямую (рис. 95) нанесем точки $x=-1$, $x=5$, обращающие в нуль множители $(x+1)$ и $(x-5)$ соответственно.

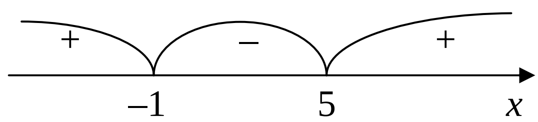


Рис. 95

Узнаем знаки значений выражения, стоящего в левой части последнего неравенства.

Окончательно имеем: решением неравенства является объединение промежутков $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

Графическое решение

Неравенство $|x+7|<|x^2-3x+2|$, эквивалентное заданному, решим графически, для чего в одной системе координат построим графики функций $y=|x+7|$ и $y=|x^2-3x+2|$ (рис. 96).

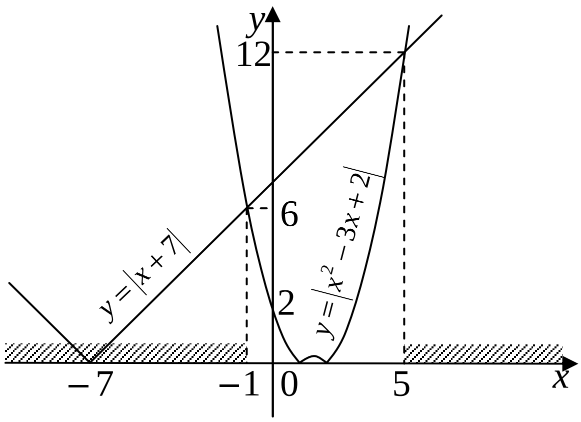


Рис. 96

По рисунку считываем ответ: $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

Задача 20. Решите неравенство $|x|^{x^2-x-2}<1$.

Решение

Для рационализации неравенства можно воспользоваться следующей заменой выражений: выражение a^x-b заменяем выражением $(a-1)(x-\log_a b)$, где a и b могут быть как числами, так и функциями.

Запишем заданное неравенство в виде $|x|^{x^2-x-2}-1<0$. Используя замену выражений, будем иметь

$$(|x|-1)(x^2-x-1-1)<0,\ (|x|-1)(x^2-x-2)<0,$$

откуда

$$(x^2-1)(x^2-x-2)<0,\ (x-1)(x+1)^2(x-2)<0,$$

откуда, методом интервалов, находим ответ $x\in(1;2)$.

Ответ: (1; 2).

Замечание. Указанная замена выражений приводит обычно к изменению области определения неравенства (ООН), причем, и это важно, ООН нового неравенства шире, чем у исходного, так что потери решений не происходит, а полученные в конце решения надо еще проверить на вхождение в ООН исходного неравенства. Другими словами, решениями исходного неравенства будут те из полученных решений, которые лежат в его ООН, в таком случае говорят, что новое неравенство равносильно исходному в его ООН. Следовательно, надо начинать решение с нахождения ООН исходного неравенства.

Для рационализации неравенств используются и такие замены выражений:

а) $\log_a x$ на $(a-1)(x-1)$;

б) $\log_a b - c$ на $(a-1)(b-a^c)$;

в) $\sqrt[2k]{a} - b$ на $(a-b^{2k})$.

В случае в) $b > 0$, а в случаях а) и б) $b \geq 0$. Как правило, a, b, c являются функциями.

Более подробно о заменах, рационализирующих неравенства, читатель найдет в нашей работе: Далингер В.А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2005. – 456 с.

Задача 21. Решите неравенство $\left|x^2-3x+2\right| \leq 2x-x^2$.

Решение

Построим в одной системе координат графики функций $y=\left|x^2-3x+2\right|$ и $y=2x-x^2$ (рис. 97).

Найдя абсциссы точек пересечения графиков, для чего следует решить соответствующее уравнение, мы по рисунку ответим на вопрос задачи, для чего следует указать те промежутки, на которых график функции $y=\left|x^2-3x+2\right|$ лежит не выше графика функции $y=2x-x^2$. Итак, имеем промежуток $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

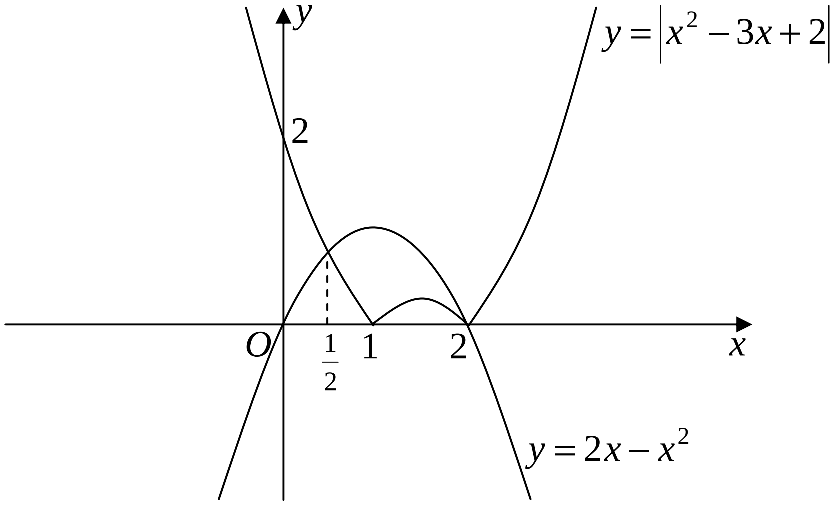


Рис. 97

Ответ: $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Задача 22. Решите неравенство $\sqrt{1-\sin 2x}+\left|\sin x\right|\le\cos x$.

Решение

Так как имеем

$$1-\sin 2x=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x=(\cos x-\sin x)^2,$$

то исходное неравенство приведем к виду

$$\left|\cos x-\sin x\right|+\left|\sin x\right|\le\cos x.$$

Положим a = cos$x$ – sin$x$, b = sin$x$. Тогда cos$x$ = a + b и неравенство примет вид $|a|+|b|\le a+b$.

Имеем $|a|+|b|\le a+b\Leftrightarrow(|a|-a)+(|b|-b)\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=a,\\|b|=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0,\\b\ge 0.\end{cases}$.

Таким образом $\begin{cases}\cos x\ge\sin x,\\\sin x\ge 0,\end{cases}$ откуда и следует ответ.

Ответ: $\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}$.

Задача 23. Найти все решения неравенства $1+\cos 2x \geq \cos x(1+|1-2\cos x|)$ на промежутке [0; 2π].

Решение

Пусть $x \in \left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$. При таких x 1 – 2cos$x$ > 0, поэтому исходное неравенство преобразуется к виду:

$$2\cos^2 x \geq \cos x(2-2\cos x) \Leftrightarrow 2\cos^2 \geq 2\cos x - 2\cos^2 x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x \geq 2\cos x \Leftrightarrow \cos x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right].$$

Если $x \notin \left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$,то l – 2cos$x$ ≤ 0. Поэтому |l – 2cos$x$| = 2cos$x$ – 1 и наше неравенство преобразуется к виду:

$$2\cos^2 x \geq 2\cos^2 x \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};2\pi\right].$$

Ответ: $\left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$.

Задача 24. Найти все решения неравенства $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq \frac{|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}$ на промежутке [0; π].

Решение

Найдем область определения неравенств (ООН): $x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \pi$. Пусть $x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. Этот случай соответствует неравенству $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$. Поэтому исходное неравенство будет равносильно такому:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \geq \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x \geq \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right).$$

Если $x \notin \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$,то $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$, и поэтому $|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \operatorname{tg} x$. Таким образом, исходное неравенство преобразуется к виду:

$$\operatorname{tg}^2 x \ge \frac{2\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} \Leftrightarrow 2\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right).$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Задача 25. Решить неравенство $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$.

Решение

Так как основание степени 10 > 1, то приходим к равносильному неравенству $|\sin x| > |\cos x| \Leftrightarrow \sin^2 x > \cos^2 x \Leftrightarrow \cos 2x < 0$, откуда

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k < 2x < \frac{3\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$$

Итак, получаем ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k < x < \frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Замечание. Решение неравенства $|\sin x| > |\cos x|$ можно также найти графически, построив графики функций $|\sin x|$ и $|\cos x|$ на одном чертеже (рис. 98).

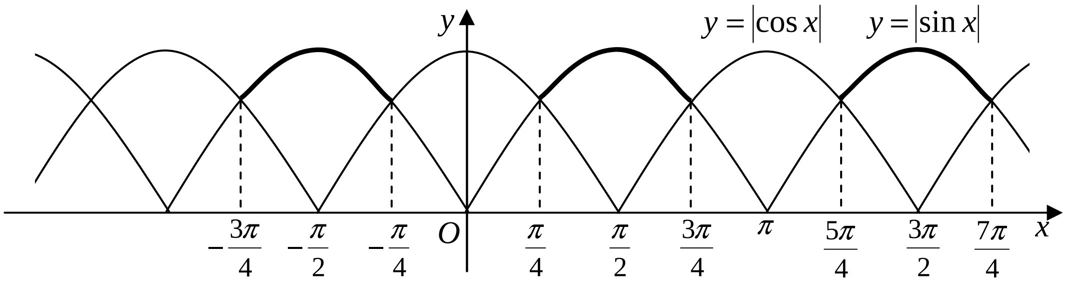


Рис. 98

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right), k\in Z$.

Задача 26. Решить неравенство $\left|5\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)+1\right| > 2$.

Решение

$$\left|5\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)+1\right| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)+1>2, \\ 5\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)+1<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)>\frac{1}{5}, \\ \cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)<-\frac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Пусть $2x-\frac{4\pi}{3}=y$.

Решим совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\cos y>\frac{1}{5},\\ \cos y<-\frac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\arccos\frac{1}{5}+2\pi l<y<\arccos\frac{1}{5}+2\pi l, l\in Z,\\ \pi-\arccos\frac{3}{5}+2\pi k<y<\pi+\arccos\frac{3}{5}+2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}-\arccos\frac{1}{5}+2\pi l<2x-\frac{4\pi}{3}<\arccos\frac{1}{5}+2\pi l, l\in Z,\\ \pi-\arccos\frac{3}{5}+2\pi k<2x-\frac{4\pi}{3}<\pi+\arccos\frac{3}{5}+2\pi k, k\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi l<x<\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi l, l\in Z,\\ \frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi k<x<\frac{7\pi}{6}+\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi l<x<\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}+\pi l, l\in Z$;

$\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi k<x<\frac{7\pi}{6}+\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi k, k\in Z$.

Задача 27. Решите неравенство $\left|\left|x^2+5x-18\right|-x^2\right|\geq 18-x$.

Решение

Заданное неравенство равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l}\left|x^2+5x-18\right|-x^2\geq 18-x,\\ \left|x^2+5x-18\right|-x^2\leq -18+x,\end{array}\right.$ откуда

$$\left[\begin{array}{l}\left|x^2+5x-18\right|\geq x^2-x+18,\\ \left|x^2+5x-18\right|\leq x^2+x-18\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+5x-18\geq x^2-x+18,\\ x^2+5x-18\leq -x^2+x-18,\\ \begin{cases}x^2+5x-18\leq x^2+x-18,\\ x^2+5x-18\geq -x^2-x+18\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge 6,\\ x(x+2)\le 0,\\ \begin{cases} x\le 0,\\ (x+6)(x-3)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge 6,\\ x\in[-2;0],\\ x\le -6.\end{array}\right.$$

Итак, в качестве ответа получаем объединение промежутков:

$$(-\infty;-6]\cup[-2;0]\cup[6;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-6]\cup[-2;0]\cup[6;+\infty)$.

Задача 28. Решите неравенство

$$\left|3x^3-2x^2-5x+1\right|\le x^3-2x^2-x+1.$$

Решение

Воспользуемся утверждением (A) (см. стр. 263):

$$\left|3x^3-2x^2-5x+1\right|\le x^3-2x^2-x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^3-2x^2-5x+1\le x^3-2x^2-x+1,\\ 3x^3-2x^2-5x+1\ge -x^3+2x^2+x-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\le 0,\\ (x+1)\left(x-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[0;\sqrt{2}\right],\\ x\in\left[-1;\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[0;\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right].$$

Ответ: $\left[0;\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$.

Задача 29. Найдите длину ограниченного промежутка, являющегося решением неравенства $\left|\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}\right|\le 2$.

Решение

Решаем неравенство:

$$\left|\frac{x^2-3x-4}{x+1}\right|\le 2 \Leftrightarrow \left|\frac{(x+1)(x-4)}{x+1}\right|\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne -1, \\ |x-4|\le 2. \end{cases}$$

В силу утверждения (С) (см. стр. 266) знак разности $|x - 4| - 2$ совпадает со знаком произведения $(x - 4 + 2)(x - 4 - 2)$, поэтому получаем неравенство $(x - 2)(x - 6) \le 0$ (при условии $x \ne -1$). Решением является интервал [2; 6], длина которого 4.

Ответ: 4.

Задача 30. Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right| > \left|\sqrt{x^2+x+1}+2x+2\right|.$$

Решение

Сначала найдем ООН: $x^2 + x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \in R$. Теперь воспользуемся утверждением (С) (см. стр. 266):

$$\left|\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right| - \left|\sqrt{x^2+x+1}+2x+2\right| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+1}-2x-1+\sqrt{x^2+x+1}+2x+2\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x-1-\sqrt{x^2+x+1}-2x-2\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4x-3) > 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right).$$

Ответ: $(-\infty;-0{,}75)$.

Задача 31. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}-4} < \dfrac{1}{2|x-3|-5}$.

Решение

Найдем область определения неравенства:

$$x^2+2x-8\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-4]\cup[2;+\infty).$$

Решаем неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}-4}<\frac{1}{2|x-3|-5}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+2x-8}-4-2|x-3|+5}{\left(\sqrt{x^2+2x-8}-4\right)\left(2|x-3|-5\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+2x-8}+1-2|x-3|}{\left(x^2+2x-24\right)\left(2x-6+5\right)\left(2x-6-5\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8}+1+2x-6\right)\left(\sqrt{x^2+2x-8}+1-2x+6\right)}{\left(x^2+2x-24\right)\left(2x-6+5\right)\left(2x-6-5\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8}-(5-2x)\right)\left(\sqrt{x^2+2x-8}-(2x-7)\right)}{(x+6)(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{11}{2}\right)}>0.$$

Для аккуратного определения знаков сомножителей числителя, мы рассмотрим 3 случая.

1. Пусть сначала $x\le\frac{5}{2}$. Тогда

$$\begin{cases}5-2x\ge 0,\\ 2x-7<0,\\ x<4,\\ x<\frac{11}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8}-(5-2x)\right)\left(\sqrt{x^2+2x-8}-(2x-7)\right)}{(x+6)(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{11}{2}\right)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8}\right)^2-(5-2x)^2}{(x+6)\left(x-\frac{1}{2}\right)}>0\Leftrightarrow\frac{\left(x-\frac{11-\sqrt{22}}{3}\right)\left(x-\frac{11+\sqrt{22}}{3}\right)}{(x+6)\left(x-\frac{1}{2}\right)}<0,$$

а с учетом (ООН), получаем $x\in(-6;-4]\cup\left(\frac{11-\sqrt{22}}{3};\frac{5}{2}\right]$.

2. Пусть теперь $\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$. В этом случае

$$\begin{cases} 5-2x<0, \\ 2x-7<0, \\ x<4, \\ x<\dfrac{11}{2}, \\ x>-6, \\ x>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда следует, что неравенство выполнено.

3. Пусть, наконец $x>\dfrac{7}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} 2x-7\ge 0, \\ 5-2x<0, \\ x<-6, \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8}-(5-2x)\right)\left(\sqrt{x^2+2x-8}-(2x-7)\right)}{(x+6)(x-4)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{11}{2}\right)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8}\right)^2-(2x-7)^2}{(x-4)\left(x-\dfrac{11}{2}\right)}>0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\left(5-\sqrt{6}\right)\right)\left(x-\left(5+\sqrt{6}\right)\right)}{(x-4)\left(x-\dfrac{11}{2}\right)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[\frac{7}{2};4\right)\cup\left(\frac{11}{2};5+\sqrt{6}\right).$$

Подводя итоги 3-х случаев, получаем окончательный ответ.

Ответ: $(-6;-4)\cup\left(\dfrac{11-\sqrt{22}}{3};4\right)\cup\left(\dfrac{11}{2};5+\sqrt{6}\right)$.

Задача 32. Найдите длину ограниченного промежутка, который является решением неравенства

$$\left|x^5-6x^2+9x-6\right|\ge x^5-2x^3+6x^2-13x+6\,.$$

Решение

Применим утверждение (B) (см. стр. 264):

$$\left|x^5-6x^2+9x-6\right| \ge x^5-2x^3+6x^2-13x+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^5-6x^2+9x-6 \ge x^5-2x^3+6x^2-13x+6, \\ x^5-6x^2+9x-6 \le -x^5+2x^3-6x^2+13x-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-6x^2+11x-6 \ge 0, \\ x^5-x^3-2x \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-2)(x-3) \ge 0, \\ x\left(x^2+1\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [1;2] \cup [3;+\infty), \\ x \in \left(-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup \left[0;\sqrt{2}\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup [0;2] \cup [3;+\infty).$$

Ограниченный промежуток решения – отрезок [0; 2], его длина равна 2.

Ответ: 2.

Задача 33. Решите неравенство $\left|\left|x^2-8x+2\right|-x^2\right| \ge 2x+2$.

Решение

$$\left|\left|x^2-8x+2\right|-x^2\right| \ge 2x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2-8x+2\right|-x^2 \ge 2x+2, \\ \left|x^2-8x+2\right|-x^2 \le -2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^2-8x+2\right| \ge x^2+2x+2, \\ \left|x^2-8x+2\right| \le x^2-2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-8x+2 \ge x^2+2x+2, \\ x^2-8x+2 \le -x^2-2x-2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-8x+2 \le x^2-2x-2, \\ x^2-8x+2 \ge -x^2+2x+2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \in [1;2]; \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x \in (-\infty;0] \cup [5;+\infty) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;0] \cup [1;2] \cup [5;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;0] \cup [1;2] \cup [5;+\infty)$.

Задача 34. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\left|\frac{x^2-5x-4}{x+1}\right| \le 2.$$

Решение

Область определения неравенства $x \ne -1$. Воспользуемся утверждением (С):

$$\left|\frac{x^2-5x-4}{x+1}\right| \le 2 \Leftrightarrow \frac{\left|x^2-5x-4\right|-2\left|x+1\right|}{\left|x+1\right|} \le 0 \overset{OOH}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-5x-4+2x+2\right)\left(x^2-5x-4-2x-2\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-2\right)\left(x^2-7x-6\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{73}}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{73}}{2}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{7-\sqrt{73}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{73}}{2}\right].$$

Первый промежуток целых чисел не содержит, а во второй промежуток входят целые числа 4, 5, 6, 7. Их сумма равна 22.

Ответ: 22.

Задача 35. Решите неравенство $\left|x^2+7x+10\right|+\left|x+7\right| \le x^2+8x+21$.

Решение

Пользуемся утверждением (А):

$$\left|x^2+7x+10\right| \le x^2+8x+21-\left|x+7\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7x+10 \le x^2+8x+21-\left|x+7\right|, \\ x^2+7x+10 \ge -x^2-8x-21+\left|x+7\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x+7\right| \le x+11, \\ \left|x+7\right| \le 2x^2+15x+31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+7 \le x+11, \\ x+7 \ge -x-11, \\ x+7 \le 2x^2+15x+31, \\ x+7 \ge -2x^2-15x-31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot x = 4, \\ x \ge -9, \\ (x+4)(x+3) \ge 0, \\ x^2+8x+19 \ge \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-9;-4] \cup [-3;+\infty).$$

Ответ: $[-9;-4] \cup [-3;+\infty)$.

Задача 36. Решите неравенство $\dfrac{2\log_{(1-3|x|)}\left(42x^2-14|x|+1\right)}{\log_{(1-3|x|)}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}\le 1.$

Решение

Найдем область определения неравенства:

$$\begin{cases} 1-3|x|>0, \\ 1-3|x|\ne 1, \\ 42x^2-14|x|+1>0, \\ x-\dfrac{5}{6}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|<\dfrac{1}{3}, \\ x\ne 0, \\ |x|\in\left[0;\dfrac{7-\sqrt{7}}{42}\right)\cup\left(\dfrac{7+\sqrt{7}}{42};+\infty\right], \\ x-\dfrac{5}{6}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{7-\sqrt{7}}{42}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{7}}{42};\frac{1}{3}\right).$$

Видим, что $x<\dfrac{5}{6}$ в ООН. Для исходного неравенства тогда получаем:

$$\frac{2\log_{(1-3|x|)}\left(42x^2-14|x|+1\right)}{\log_{(1-3|x|)}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}\le 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_{(1-3|x|)}\left(42x^2-14|x|+1\right)-\log_{(1-3|x|)}\left(x-\frac{5}{6}\right)}{\log_{(1-3|x|)}\left(x-\frac{5}{6}\right)}\le 0.$$

В силу того, что $\log_{a(x)}f(x)>0(<0)\overset{OOH}{\Leftrightarrow}(a(x)-1)(f(x)-1)>0(<0)$ и того, что $\log_{a(x)}f(x)=g(x)\overset{OOH}{\Leftrightarrow}f(x)=a(x)^{g(x)}$ последнее неравенство в ООН равносильно следующему:

$$\frac{\left(1-3|x|-1\right)\left(42x^2-14|x|+1-\frac{5}{6}+x\right)}{\left(1-3|x|-1\right)\left(\frac{5}{6}-x-1\right)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{42x^2-14|x|+x+\frac{1}{6}}{x+\frac{1}{6}}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ 42x^2-13x+\frac{1}{6}\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \dfrac{42x^2+15x+\frac{1}{6}}{x+\frac{1}{6}}\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left[0;\frac{13-\sqrt{141}}{84}\right]\cup\left[\frac{13+\sqrt{141}}{84};+\infty\right],\\ \begin{cases}x<0,\\ x\in\left[\frac{-15-\sqrt{197}}{84};-\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{-15+\sqrt{197}}{84};0\right).\end{cases}\end{array}\right.$$

Теперь, анализируя рис. 99 и рис. 100 получаем окончательный ответ.

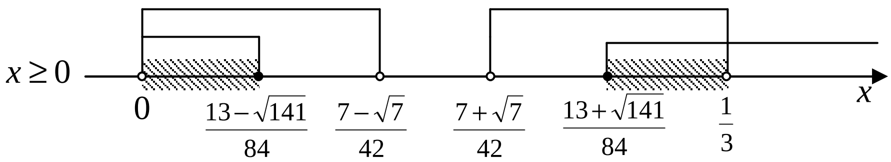


Рис. 99

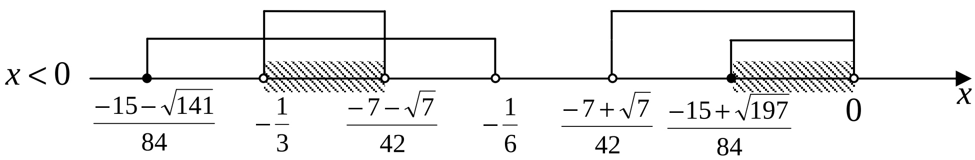


Рис. 100

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};\frac{-7-\sqrt{7}}{42}\right)\cup\left[\frac{-15+\sqrt{197}}{84};0\right)\cup\left(0;\frac{13-\sqrt{141}}{84}\right]\cup\left[\frac{13+\sqrt{141}}{84};\frac{1}{3}\right)$.

Задача 37. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}\left(4^{-x}-1\right)<\log_{|x+2|}\left(2^{-x}+1\right)+\log_{|x+2|}\left(2^{-x-1}+1\right).$$

Решение

Находим область определения неравенства:

$$\begin{cases}|x+2|\ne 0,\\ 4^{-x}-1>0,\\ |x+2|\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne -2,\\ x<0,\\ x+2\ne \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0).$$

В ООН имеем цепочку равносильностей

$$\log_{|x+2|}\left(4^{-x}-1\right)-\log_{|x+2|}\left(2^{-x}+1\right)-\log_{|x+2|}\left(2^{-x-1}+1\right)<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{|x+2|}\left(2^{-x}+1\right)+\log_{|x+2|}\left(2^{-x-1}+1\right)<0.$$

В силу условия равносильности

$$\log_{a(x)} f(x)>0(<0) \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-1)>0(<0)$$

и того, что $\log_{a(x)} f(x)=g(x) \overset{OOH}{\Leftrightarrow} f(x)=a(x)^{g(x)}$ последнее неравенство равносильно следующему:

$$(|x+2|-1)\left(2^{-x}-1-\frac{2^{-x}}{2}-1\right)<0$$

в силу условия (С)

$$(x+2+1)(x+2-1)\left(2^{-x}-4\right)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)\left(2^{-x}-4\right)<0$$

в силу того, что знак разности $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$, имеем

$$(x+1)(x+3)(x+2)>0 \Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup(-1;+\infty).$$

Учитывая ООН, получаем ответ.

Ответ: $(-3;-2)\cup(-1;0)$.

Задача 38. Решите неравенство $\sqrt{4x^2+4x-|2x-1|-3}\geq 4x-3$.

Решение

Рассмотрим два случая.

а) $2x-1\geq 0$. Неравенство принимает вид

$$\sqrt{4x^2+2x-2}\geq 4x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2+2x-2\geq 0,\\ 4x-3<0,\end{cases}\\ \begin{cases}4x-3\geq 0,\\ 12x^2-26x+11\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{3}{4}, \\ \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{13-\sqrt{37}}{12} \le x \le \dfrac{13+\sqrt{37}}{12} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le \frac{13+\sqrt{37}}{12}.$$

б) Если $2x-1<0$, то получаем неравенство $\sqrt{4x^2+6x-4} \ge 4x-3$, которое выполняется при всех допустимых значениях *x*, то есть когда $4x^2+6x-4 \ge 0$, откуда $x \le -2$.

Ответ: $(-\infty;-2) \cup \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{13+\sqrt{37}}{12}\right]$.

Задача 39. Решите неравенство $\left|\left|1-x^2\right| - \left|x^2-3x+2\right|\right| \ge 3|x-1|$.

Решение

Решение заданного неравенства задает следующая последовательность равносильностей:

$$\left|\left|1-x^2\right| - \left|x^2-3x+2\right|\right| \ge 3|x-1| \Leftrightarrow |x-1|\left(\left||x+1|-|x-2|\right|-3\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \left||x+1|-|x-2|\right| \ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x \notin (-1;2), \end{array}\right.$$

поскольку $\left||x+1|-|x-2|\right|$ есть модуль разности расстояний от точки *x* до точек –1 и 2 (расстояние между которыми равно 3).

Ответ: $(-\infty;-1] \cup [2;+\infty) \cup \{1\}$.

Задача 40. Решите неравенство $\dfrac{\left(|x-1|-|x+3|\right)\left(|2x|-|x+6|\right)}{|1-x|-|x+2|} < 0$.

Решение

Так как по свойству модуля $|a| \ge 0$ и функция $y=t^2$ монотонно возрастает на множестве неотрицательных чисел, то все разности модулей в исходном неравенстве можно заменить на разности их квадратов. В результате указанного преобразования получим неравенство, равносильное заданному:

$$\frac{\left(|x-1|^2-|x+3|^2\right)\left(|2x|^2-|x+6|^2\right)}{|1-x|^2-|x+2|^2}<0,$$

$$\frac{\left((x-1)^2-(x+3)^2\right)\left((2x)^2-(x+6)^2\right)}{(1-x)^2-(x+2)^2}<0,$$

$$\frac{\left(x^2-2x+1-x^2-6x-9\right)\left(4x^2-x^2-12x-36\right)}{1-2x+x^2-x^2-4x-4}<0,$$

$$\frac{(-8x-8)\cdot 3\cdot (x-6)(x+2)}{-6x-3}<0, \frac{-8\cdot 3\cdot (x+1)(x-6)(x+2)}{-3(2x+1)}<0,$$

$$\frac{(x+1)(x-6)(x+2)}{2x+1}<0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов, для чего вначале на числовой прямой отметим точки x = –2, x = –1, $x=-\frac{1}{2}$, x = 6 (рис. 101). Узнаем в каждом промежутке знак выражения, стоящего в левой части неравенства.

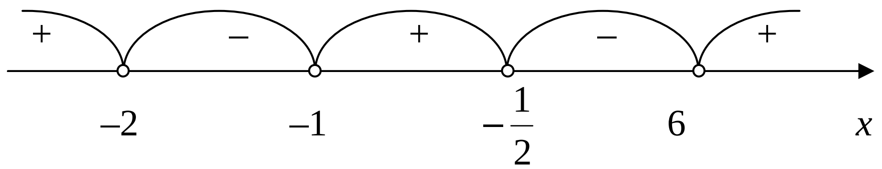


Рис. 101

С рисунка считываем ответ: $(-2;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};6\right)$.

Ответ: $(-2;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};6\right)$.

Задача 41. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-4x-5}+4}{x^2-4x-21}<\frac{2|x+2|+5}{4x^2+16x-9}$.

Решение

Пусть $a=\sqrt{x^2-4x-5}$ и $b=2|x+2|$, где $a,\ b\geq 0$. Тогда исходное неравенство записывается в форме $\frac{a+4}{a^2-16}<\frac{b+5}{b^2-25}\Leftrightarrow\frac{1}{a-4}<\frac{1}{b-5}$.

Если же обозначить $f(x)=a-4$ и $g(x)=b-5$, то это неравенство принимает вид

$$\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{g(x)}. \qquad (*)$$

Найдем теперь область определения данного неравенства, а также промежутки знакопостоянства функций *f(x)* и *g(x)*:

$$\begin{cases} x^2-4x-5\ge 0, \\ \sqrt{x^2-4x-5}\ne 4, \\ 2|x+2|\ne 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -1, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ x\ne -\dfrac{9}{2};-3;7. \end{cases}$$

$$f(x)>0\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x-5}>4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x>7. \end{array}\right.$$

$$g(x)>0\Leftrightarrow 2|x+2|>5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{9}{2}, \\ x>\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Далее рассмотрим неравенство $\dfrac{1}{f(x)}<\dfrac{1}{g(x)}$ на различных интервалах области определения в зависимости от знаков *f(x)* и *g(x)* (рис. 102).

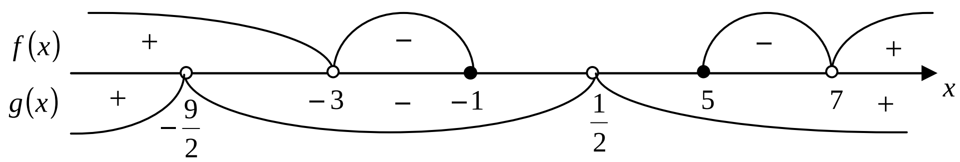


Рис. 102

а) При $x\in\left(-\dfrac{9}{2};-3\right)$ имеем *f(x)* > 0, а *g(x)* < 0, поэтому неравенство $\dfrac{1}{f(x)}<\dfrac{1}{g(x)}$ не может быть выполнено.

б) Если же $x\in[5;7)$, то *f(x)* < 0, а *g(x)* > 0, так что все эти значения являются решениями неравенства (*).

в) На множестве $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup (-3; -1] \cup (7; +\infty)$ функции *f(x)* и *g(x)* имеют одинаковые знаки, следовательно, после умножения обеих частей неравенства (*) на *f(x)* · *g(x)* > 0 получается равносильное неравенство

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} > 2|x + 2| - 1. \qquad (**)$$

Остается решить последнее неравенство на множестве, указанном в пункте в).

Если правая часть неравенства отрицательна, то есть

$$2|x + 2| - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2},$$

то, поскольку его левая часть неотрицательна, $x \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ – решения.

Если же $2|x + 2| - 1 \geq 0$, то, после возведения обеих частей неравенства (**) в квадрат, получаем

$$4|x + 2| > 3x^2 + 20x + 22 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 16x + 14 < 0, \\ x^2 + 8x + 10 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-8 - \sqrt{22}}{3} < x < \frac{-8 + \sqrt{22}}{3}, \\ -4 - \sqrt{6} < x < -4 + \sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow -4 - \sqrt{6} < x < \frac{-8 + \sqrt{22}}{3}.$$

Отсюда, учитывая ограничения пункта в) и условия возведения в квадрат (рис. 103), имеем:

$$x \in \left(-4 - \sqrt{6}; -\frac{9}{2}\right) \cup \left(-3; -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}; \frac{-8 + \sqrt{22}}{3}\right).$$

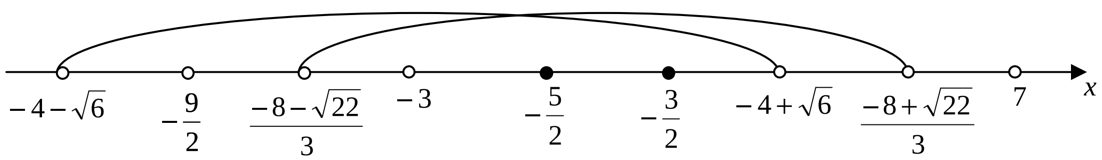


Рис. 103

Теперь, объединяя частичные ответы, полученные в пунктах б) и в), приходим к окончательному результату.

Ответ: $x \in \left(-4-\sqrt{6};-\frac{9}{2}\right) \cup \left(-3;\frac{-8+\sqrt{22}}{3}\right) \cup [5;7)$.

Задача 42. Решите неравенство:

$$\left(2^{x^2+1}-32\right)\left(|3x+1|-4\right)\left(\sqrt[4]{x+1}-1\right)\log_{x+3}\left(x^2-6x+6\right)<0.$$

Решение

Найдем область определения исходного неравенства:

$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+3>0, \\ x+3 \neq 1, \\ x^2-6x+6>0; \end{cases}$ получаем $x \in \left[-1;3-\sqrt{3}\right) \cup \left(3+\sqrt{3};+\infty\right)$.

Используя указанные выше замены выражений, рационализирующих неравенства (см. стр. 276, 277), получаем:

$$\left(x^2+1-5\right)\left((3x+1)^2-16\right)\left((x+1)-1\right)\left(\left(x^2-6x+6\right)-1\right)\left((x+3)-1\right)<0.$$

Решение этого неравенства не представляет сложности, предоставляем читателю возможность получить ответ (не забудьте учесть область определения исходного неравенства).

Задача 43. Решите неравенство: $|x|^{x^2-x-2}<1$.

Решение

Областью определения исходного неравенства являются все действительные числа, кроме нуля.

Перепишем неравенство в виде $|x|^{x^2-x-2}-1<0$. Используя указанную выше замену выражения, для рационализации неравенства (см. стр. 276), получим

$$\left(|x|-1\right)\left(x^2-x-2\right)<0,$$
$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-x-2\right)<0,$$
$$(x+1)^2(x-1)(x-2)<0,$$

откуда, методом интервалов, находим ответ $x \in (1;2)$.

Ответ $x \in (1;2)$.

Задача 44. Решите неравенство $\log_2^2 x + |\log_2 x + 2| \le 4$.

Решение

Пусть $\log_2 x = t$, тогда исходное неравенство можно представить в виде $t^2 + |t+2| \le 4$.

Решим получившееся неравенство:

$$t^2 - 4 + |t+2| \le 0,\ (t-2)(t+2) + |t+2| \le 0.$$

Раскроем модуль:

а) $\begin{cases} t+2 \ge 0, \\ (t-2)(t+2)+(t+2) \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t+2 \ge 0, \\ (t+2)(t-2+1) \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t \ge -2, \\ (t+2)(t-1) \le 0. \end{cases}$

Решив последнее неравенство системы методом интервалов, получаем $-2 \le t \le 1$, откуда $-2 \le \log_2 x \le 1$, и значит, $\frac{1}{4} \le x \le 2$.

б) $\begin{cases} t+2 < 0, \\ (t-2)(t+2)-(t+2) \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t < -2, \\ (t+2)(t-2-1) \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t < -2, \\ (t+2)(t-3) \le 0. \end{cases}$

Решив последнее неравенство системы методом интервалов, получаем $\begin{cases} t < -2, \\ -2 \le t \le 3. \end{cases}$ Видим, что система не имеет решений.

Ответ: $\left[\frac{1}{4};2\right]$.

Задача 45. Решите неравенство $\log_{|x+2|} 4 \cdot \log_4 (x^2 + x - 2) \le 1$.

Решение

Перепишем заданное неравенство в виде

$$\frac{\log_4 (x^2 + x - 2)}{\log_4 |x+2|} \le 1;\ \log_{|x+2|}(x^2 + x - 2) \le 1.$$

Рассмотрим далее два случая.

а) $\begin{cases} |x+2|>1, \\ x^2+x-2>0, \\ x^2+x-2 \le |x+2|; \end{cases}$ $\begin{cases} |x+2|>1, \\ (x+2)(x-1)>0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2 \ge x^2+x-2, \\ x+2 \le -x^2-x+2; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} |x+2|>1, \\ (x+2)(x-1)>0, \\ \left[\begin{array}{l} (x+2)(x-2) \le 0, \\ x(x+2) \le 0; \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x>1, \end{array}\right. \\ -2 \le x \le 2; \end{cases}$ $\quad 1<x \le 2$.

б) $\begin{cases} 0<|x+2|<1, \\ x^2+x-2 \ge |x+2|; \end{cases}$ $\begin{cases} 0<|x+2|>1, \\ x+2 \le x^2+x-2, \\ x+2 \ge -x^2-x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} 0<|x+2|<1, \\ (x+2)(x-2) \ge 0, \\ x(x+2) \ge 0; \end{cases}$

$-3<x<-2$.

Ответ: $(-3;-2) \cup (1;2]$.

Задача 46. Решите неравенство $|\lg x| \le \cos(x-1)-1$.

Решение

Заданное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} |\lg x| < \cos(x-1)-1, \\ |\lg x| = \cos(x-1)-1. \end{cases} \qquad (*)$$

Рассмотрим функции $f(x)=|\lg x|$ и $g(x)=\cos(x-1)-1$.

Множеством значений функции *f(x)* является промежуток $[0;+\infty)$.

Множеством значений функции *g(x)* является промежуток $(-2;0]$.

Пересечением двух промежутков $[0;+\infty)$ и $(-2;0]$ является множество, состоящее из одного числа $x = 0$.

Следовательно, неравенство системы (*) решений не имеет, а уравнение этой системы равносильно системе $\begin{cases} |\lg x| = 0, \\ \cos(x-1)-1=0. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы: единственным решением этого уравнения является $x = 1$.

Проверяем, является ли это значение решением второго уравнения системы: $\cos(1-1)-1=0$. Действительно, cos 0 = 1, значит x = 1 – единственное решение системы, а значит, и исходного неравенства.

Задача 47. Решите неравенство $\log_{0,5}^2 -3>2\left|\log_{0,5}x\right|$.

Решение

В виду того, что $|a|^2=a^2$, то можно ввести новую переменную $t=\left|\log_{0,5}x\right|$, в результате чего получим неравенство $t^2-3>2t$. Решая это неравенство, найдем, что t < –1 или t > 3.

Неравенство $\left|\log_{0,5}x\right|<-1$ решений не имеет, в виду того, что модуль числа всегда неотрицателен, а оно быть меньше отрицательного числа не может быть.

Неравенство $\left|\log_{0,5}x\right|>3$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l}\log_{0,5}x>3,\\ \log_{0,5}x<-3,\end{array}\right.$ откуда получаем $\left[\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{8},\\ x>8.\end{array}\right.$

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{8}\right)\cup(8;+\infty)$.

Задача 48. Решите неравенство $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right)\geq 1$.

Решение

Заданное неравенство равносильно четырем системам:

1) $\begin{cases}-3\leq x<1,\\ \sqrt{9-x^2}-x-1>0,\\ \sqrt{9-x^2}-x-1\geq -x;\end{cases}$

2) $\begin{cases}-1<x<0,\\ \sqrt{9-x^2}-x-1>0,\\ \sqrt{9-x^2}-x-1\leq -x;\end{cases}$

3) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \sqrt{9-x^2} - x - 1 > 0, \\ \sqrt{9-x^2} - x - 1 \le x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 1 < x \le 3, \\ \sqrt{9-x^2} - x - 1 > 0, \\ \sqrt{9-x^2} - x - 1 \ge x. \end{cases}$

В первой системе второе неравенство является следствием третьего, а поэтому система равносильна следующей:

$$\begin{cases} -3 \le x < 1, \\ \sqrt{9-x^2} \ge 1; \end{cases} \begin{cases} -3 \le x < 1, \\ x^2 \le 8; \end{cases} \quad x \in \left[-2\sqrt{2};1\right).$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ \sqrt{9-x^2} > x + 1, \\ \sqrt{9-x^2} \le 1; \end{cases} \begin{cases} -1 < x < 0, \\ \sqrt{9-x^2} > x + 1, \\ x^2 \ge 8. \end{cases}$$

Так как первое условие противоречит третьему, то система не имеет смысла.

Решая третью систему, имеем

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \sqrt{9-x^2} > x + 1, \\ \sqrt{9-x^2} \le 2x + 1; \end{cases} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 + x - 4 < 0, \\ 5x^2 + 4x - 8 \ge 0. \end{cases}$$

Последний переход совершен в силу того, что правые части двух последних неравенств на множестве $x \in (0;1)$ положительны. Неравенство $x^2 + x - 4 < 0$ выполнено для всех $x \in (0;1)$; решением же неравенства $5x^2 + 4x - 8 \ge 0$ будет множество

$$x \in \left(-\infty; \frac{-2 - 2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\frac{-2 + 2\sqrt{11}}{5}; 1\right).$$

Следовательно, решением третьей системы будет множество $x \in \left[\dfrac{-2+2\sqrt{11}}{5};1\right)$.

Четвертая система не имеет решений в силу следующей цепочки равносильных преобразований:

$$\begin{cases} 1 < x \le 3, \\ \sqrt{9-x^2} - x - 1 > 0, \\ \sqrt{9-x^2} - x - 1 \ge x; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \le 3, \\ \sqrt{9-x^2} - x - 1 \ge x; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \le 3, \\ \sqrt{9-x^2} \ge 2x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x \le 3, \\ 5x^2 + 4x - 8 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \le 3, \\ \dfrac{-2-2\sqrt{11}}{5} \le x \le \dfrac{-2+2\sqrt{11}}{5}, \end{cases}$$

откуда следует, что система решений не имеет.

Объединяя полученные решения, получим ответ: $x \in \left[-2\sqrt{2};-1\right) \cup \left[\dfrac{-2+2\sqrt{11}}{5};1\right)$.

Ответ: $x \in \left[-2\sqrt{2};-1\right) \cup \left[\dfrac{-2+2\sqrt{11}}{5};1\right)$.

Задача 49. Решите неравенство $x - |y| - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \ge 1$.

Решение

Перепишем исходное неравенство в виде $x \ge 1 + |y| + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Учитывая, что выражение $|y| + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ неотрицательно (по свойству модуля и арифметического квадратного корня), имеем $x \ge 1$.

Докажем теперь, что $x - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \le 1$. В самом деле: $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \ge x - 1$. Здесь обе части неотрицательны, значит мы можем обе части этого неравенства возвести в квадрат: $x^2 + y^2 - 1 \ge (x-1)^2$; $2x \ge 2 - y^2$; $x \ge 1 - \dfrac{y^2}{2}$, что выполняется при условии $x \ge 1$.

Перепишем заданное неравенство в виде $x-\sqrt{x^2+y^2-1}\ge 1+|y|$. Имеем, что левая часть этого неравенства меньше или равна 1, а правая его часть больше или равна 1, следовательно, решение этого неравенства нужно искать "на стыке":

$$\begin{cases} x-\sqrt{x^2+y^2-1}=1, \\ 1+|y|=1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем, что $y = 0$ и тогда первое уравнение примет вид $x-\sqrt{x^2-1}=1$, откуда $x = 1$.

Ответ: (1; 0).

Задача 50. Решите неравенство $1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}+\arccos(x+|\sin y|)\le 0$.

Решение

Так как функция $z = \arccos t$ определена лишь для $t \in [-1; 1]$, то $-1\le x+|\sin y|\le 1$, то есть

$$-1-|\sin y|\le x\le 1-|\sin y|. \qquad (*)$$

Так как $0\le|\sin y|\le 1$, то из неравенства следует, что $-2\le x\le 1$.

На отрезке [–2; 1] функция $v=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ возрастает, значит $v_{наиб}=v(1)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, то есть на отрезке [–1; 1] $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\le 1$, а значит $1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\ge 0$. В то же время функция $z = \arccos t$, по определению, принимает значения из отрезка [0; π], то есть $\arccos(x+|\sin y|)\ge 0$.

Итак, в левой части исходного неравенства содержится сумма двух неотрицательных выражений $1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ и $\arccos(x+|\sin y|)$.

Следовательно, заданное неравенство может выполняться лишь в том случае, когда каждое из выражений обращается в нуль:

$$\begin{cases} 1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}=0, \\ \arccos(x+|\sin y|)=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\pi x}{4}=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, \\ x+|\sin y|=1; \end{cases} \begin{cases} x=4k+1, k\in Z, \\ |\sin y|=1-x. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение вместо x выражение $(4k + 1)$, получаем систему

$$\begin{cases} x=4k+1, k\in Z, \\ |\sin y|=-4k. \end{cases}$$

Уравнение $|\sin y|=-4k$ имеет решения лишь при $k = 0$ (при других целочисленных значениях k правая часть уравнения будет по модулю больше 1). Значит, получаем $\begin{cases} x=1, \\ |\sin y|=0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x=1, \\ y=\pi n, n\in Z. \end{cases}$

Ответ: $(1;\ \pi n)$, где $n \in Z$.

Основываясь на двух утверждениях (У2) и (У3), приведенных в §3, решим неравенство (задача 51).

Задача 51. При каких значениях параметра a неравенство $\left|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a\right|\le 3$ выполняется для любых значений x?

Решение

Воспользовавшись формулами понижения степени и формулой $\sin 2x=2\sin x\cos x$, сведем заданное неравенство к виду

$$|a\sin 2x-\cos 2x+2+a|\le 3. \qquad (*)$$

Поскольку неравенство $|f(x)|\le g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x)\le g(x), \\ -f(x)\le g(x), \end{cases}$ то решение заданной задачи сводится к нахождению значений параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} a\sin 2x - \cos 2x + a - 1 \le 0, \\ \cos 2x - a\sin 2x - a - 5 \le 0 \end{cases}$$

выполняется при любых значениях x.

Заметим, что система неравенств выполняется для всех значений x тогда и только тогда, когда для всех значений x одновременно выполняется каждое неравенство системы.

Левая часть каждого неравенства системы (*) есть функция вида $y = A\sin t + B\cos t + C$, множество значений которой в силу утверждения (У1) есть отрезок $[-\sqrt{A^2+B^2}+C; \sqrt{A^2+B^2}+C]$.

Поэтому, чтобы все значения такой функции были неположительны, необходима и достаточна неположительность максимального значения $\sqrt{A^2+B^2}+C$.

Поэтому все искомые значения параметра задаются следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+(-1)^2}+a-1 \le 0, \\ \sqrt{a^2+1^2}-a-5 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+1} \le 1-a, \\ \sqrt{a^2+1} \le a+5 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{12}{5} \le a \le 0,$$

откуда и следует ответ задачи.

Ответ: $-\dfrac{12}{5} \le a \le 0$.

Задача 52. Решите неравенство $\dfrac{1}{\pi^{|\sin x|}} - \sin^8 x < \dfrac{1}{\pi^{|\cos x|}} - \cos^8 x$.

Решение

Заданное неравенство (и мы сейчас это покажем) относится к неравенствам вида $f(h(x)) > f(g(x))$.

Решение таких неравенств часто является трудной задачей, не всегда поддающейся решению. Неравенства такого вида решаются на основе следующих утверждений:

Утверждение 10. а) Если функция *f(t)* строго возрастает на *R*, то равносильны неравенства $f(h(x)) > f(g(x))$ и $h(x) > g(x)$. б) Если функция *f(t)* строго убывает на *R*, то равносильны неравенства $f\left(h(x)\right) > f\left(g(x)\right)$ и $h(x) < g(x)$. **(У10)**

Из утверждения 10 вытекает ряд следствий. Приведем некоторые из них.

Равносильные неравенства:

10.1. $a^{h(x)} > a^{g(x)}$, где $a > 1$ и $h(x) > g(x)$;

10.2. $a^{h(x)} > a^{g(x)}$, где $0 < a < 1$ и $h(x) < g(x)$;

10.3. $h^{2m+1}(x) > g^{2m+1}(x)$, где $m \in N$ и $h(x) > g(x)$;

10.4. $\sqrt[2m+1]{h(x)} > \sqrt[2m+1]{g(x)}$, где $m \in N$ и $h(x) > g(x)$;

10.5. $\operatorname{arctg} h(x) > \operatorname{arctg} g(x)$ и $h(x) > g(x)$;

10.6. $\operatorname{arcctg} h(x) > \operatorname{arcctg} g(x)$ и $h(x) > g(x)$.

Утверждение 11. а) Если функция *f(t)* имеет область существования – промежуток *J*, и она строго возрастает на нем, то неравенство $f\left(h(x)\right) > f\left(g(x)\right)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \in J, \\ g(x) \in J. \end{cases}$ б) Если функция *f(t)* имеет область существования – промежуток *J*, и она строго убывает на нем, то неравенство $f\left(h(x)\right) > f\left(g(x)\right)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \in J, \\ g(x) \in J. \end{cases}$$

(У11)

Из утверждения 11 вытекает ряд следствий. Приведем некоторые из них.

Равносильны неравенства и системы неравенств:

11.1. $\log_a h(x) > \log_a g(x)$, где $a > 1$ и $h(x) > g(x) > 0$;

11.2. $\log_a h(x) > \log_a g(x)$, где $0 < a < 1$ и $0 < h(x) < g(x)$;

11.3. $\sqrt[2m]{h(x)} > \sqrt[2m]{g(x)}$, где $m \in N$ и $h(x) > g(x) > 0$;

11.4. $\arcsin h(x) > \arcsin g(x)$ и $1 \ge h(x) > g(x) \ge -1$;

11.5. $\arccos h(x) > \arccos g(x)$ и $-1 \geq h(x) > g(x) \geq 1$.

Утверждение 12. Пусть множество *M* и промежуток *J* таковы, что *h(x)* ∈ *J* и *g(x)* ∈ *J* для любого *x* ∈ *M*. а) Если функция *f(t)* строго возрастает на *J*, то на множестве *M* равносильны неравенства $f(h(x)) > f(g(x))$ и $h(x) \geq g(x)$. б) Если функция *f(t)* строго убывает на *J*, то на множестве *M* равносильны неравенства $f(h(x)) > f(g(x))$ и $h(x) < g(x)$. **(У12)**

Все сказанное имеет место и для неравенств вида $f(h(x)) < f(g(x))$.

О методах решения уравнений $f(h(x)) = f(g(x))$ и неравенств $f(h(x)) \gtrless f(g(x))$ читатель сможет прочитать в нашей работе: Далингер В.А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2005. – 456 с.

Перейдем к решению заданного выше неравенства (задача 52).

Обозначим $h(x) = |\sin x|$, $g(x) = |\cos x|$, $f(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^t + (-t)^8$.

Для любого *x* ∈ *R* имеем $h(x) \in [0;1]$, $g(x) \in [0;1]$. Функция *f(t)* строго убывает на промежутке *J* = [0; 1], как сумма двух строго убывающих на *J* функций. Поэтому, на основании утверждения 12 б), заданное неравенство равносильно неравенству $|\sin x| > |\cos x|$.

Все решения последнего неравенства задаются серией интервалов: $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Так как заданное неравенство равносильно неравенству $|\sin x| > |\cos x|$, то оно имеет те же решения.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right), k \in Z$.

Задача 53. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\log_2\left|\sqrt{x-16}-4\right| \le 8+7\log_{0,25}\left(x-8\sqrt{x-16}\right).$$

Решение

По свойству модуля числа имеем

$$\left|\sqrt{x-16}-4\right|^2 = \left(\sqrt{x-16}-4\right)^2 = x-16-8\sqrt{x-16}+16 = x-8\sqrt{x-16}.$$

Учитывая полученное равенство и учитывая, что 0,25 = 2^{-2} преобразуем логарифм, стоящий в правой части неравенства:

$$7\log_{0,25}\left(x-8\sqrt{x-16}\right) = -7\log_2\left|\sqrt{x-16}-4\right|.$$

Значит, неравенство можно записать в виде

$$\log_2\left|\sqrt{x-16}-4\right| \le 8-7\log_2\left|\sqrt{x-16}-4\right|,$$

откуда $\log_2\left|\sqrt{x-16}-4\right| \le 1$, $\log_2\left|\sqrt{x-16}-4\right| \le \log_2 2$.

Логарифмическая функция по основанию 2 (2 > 1) монотонно возрастает, а поэтому последнее неравенство равносильно неравенству $0 < \left|\sqrt{x-16}-4\right| \le 2$, что равносильно системе

$$\begin{cases} \left|\sqrt{x-16}-4\right| \le 2, \\ \sqrt{x-16} \ne 4, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x-16} \ge 2, \\ \sqrt{x-16} \le 6, \\ \sqrt{x-16} \ne 4. \end{cases}$$

Возведя в квадрат левые и правые части первых двух неравенств системы, получим $\begin{cases} x \ge 20, \\ x \le 52, \\ x \ne 32. \end{cases}$

Решением этой системы является множество $[20;32) \cup (32;52]$.

Целые решения неравенства, входящие в указанное множество, есть последовательность чисел: 20, 21, 22, …, 51, 52, кроме числа 32.

Их сумму вычислим как сумму членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен 20, последний равен 52, всего членов 33 и разность прогрессии равна 1. Будем иметь: $\frac{20+52}{2}\cdot 33=1188$.

Вычтем из этой суммы число 32, будем иметь: 1188 – 32 = 1156.

Ответ: 1156.

Задача 54. Для всех значений параметра *p* решить неравенство

$$3|x-p|+5|x-3p|+4x+6p+12\le 0.$$

Решение

Заданное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}3(x-p)+5(x-3p)+4x+6p+12\le 0,\\ 3(x-p)-5(x-3p)+4x+6p+12\le 0,\\ -3(x-p)+5(x-3p)+4x+6p+12\le 0,\\ -3(x-p)-5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12x-12p+12\le 0,\\ 2x+18p+12\le 0,\\ 6x-6p+12\le 0,\\ -4x+24p+12\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le p-1,\\ x\le -9p-6,\\ x\le p-2,\\ 6p+3\le x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le p-2,\\ x\le -9p-6,\\ 6p+3\le x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{cases}6p+3\le p-2,\\ 6p+3\le -9p-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1,\\ p\le -0{,}6\end{cases}\Leftrightarrow p\le -1\Rightarrow p-2<-9p-6\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p\le -1,\\ 6p+3\le x\le p-2\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}p>-1,\\ x\in\varnothing.\end{cases}$$

Ответ: если $p \le 1$, то $6p + 3 \le x \le p - 2$;

если $p > -1$, то решений нет.

Задача 55. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\left(4x^2-(a-12)x-3a\right)\log_4\frac{|x|}{3}\le 0$ имеет ровно два решения.

Решение

Данное неравенство равносильно неравенству

$$(4x-a)(x+3)\log_4\frac{|x|}{3}\le 0.$$

Числа $x = -3$ и $x = 3$ являются решениями неравенства при любых значениях a.

Для того чтобы число $x = \frac{a}{4}$ не являлось третьим решением неравенства, необходимо чтобы $\frac{a}{4} = 3$, $\frac{a}{4} = -3$, или $\frac{a}{4} = 0$, откуда $a = 12$, $a = -12$ или $a = 0$.

При $a = 12$ неравенство имеет ровно два решения; при $a = -12$ и $a = 0$ – бесконечно много решений, в чем можно убедиться с помощью метода интервалов.

Ответ: $a = 12$.

Задача 56. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{4a^2 - x^2} \geq |x - 2a|$ имеет единственное решение.

Решение

Данное неравенство равносильно следующему: $4a^2 - x^2 \geq x^2 - 4ax + 4a^2$, откуда $x^2 - 2ax \leq 0$, или $x(x - 2a) \leq 0$.

Полученное неравенство имеет единственное решение, если $a = 0$.

Ответ: $a = 0$.

Задача 57. Функция $f(x)$ определена и монотонно убывает на всей числовой прямой. Решите неравенство $f(|x-1|-1) < f(|5x+2|)$.

Решение

Данная функция монотонно убывает на всей числовой прямой, поэтому данное неравенство равносильно неравенству $|x-1|-1 > |5x+2|$.

Если $x < -\frac{2}{5}$, то неравенство принимает вид $1 - x - 1 > -2 - 5x$, откуда $x > -\frac{1}{2}$. Учитывая условие $x < -\frac{2}{5}$ находим $-\frac{1}{2} < x < -\frac{2}{5}$.

Если $-\dfrac{2}{5} \le x < 1$, то неравенство принимает вид $1 - x - 1 > 5x + 2$, откуда $x < -\dfrac{1}{3}$. Учитывая условие $-\dfrac{2}{5} \le x < 1$, получим $-\dfrac{2}{5} \le x < -\dfrac{1}{3}$.

Если $x \ge 1$, то неравенство принимает вид $x - 1 - 1 > 5x + 2$, откуда $x < -1$. Следовательно, в этом случае решений нет.

Объединяя найденные промежутки, получим $-\dfrac{1}{2} < x < -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Задача 58. Найдите все положительные значения параметра a, при которых для любого числа из отрезка [–3; 3] верно неравенство $\left|2x + a|x| - 13\right| \ge 1$.

Решение

Используя определение модуля, получим совокупность из двух неравенств:

$$\left|2x + a|x| - 13\right| \ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + a|x| - 13 \ge 1, \\ 2x + a|x| - 13 \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + a|x| \ge 14, \\ 2x + a|x| \le 12. \end{array}\right.$$

Решим эти неравенства при различных положительных значениях параметра a.

Рассмотрим случай, когда $0 < a < 2$.

Пусть $x \ge 0$:

$$\left[\begin{array}{l} 2x + ax \ge 14, \\ 2x + ax \le 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{14}{2+a}, \\ x \le \dfrac{12}{2+a}, \end{array}\right.$$

так как $2 + a > 0$, то $x \in \left[0; \dfrac{12}{2+a}\right] \cup \left[\dfrac{14}{2+a}; +\infty\right)$.

Пусть теперь $x < 0$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} 2x-ax\geq 14, \\ 2x-ax\leq 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq \dfrac{14}{2-a}, \\ x\geq \dfrac{12}{2-a}, \end{array}\right.$$

так как 2 – a > 0, то $x\in(-\infty;0)$.

Итак, если 0 < a < 2, то

$$x\in\left(-\infty;\frac{12}{2+a}\right]\cup\left[\frac{14}{2+a};+\infty\right).$$

Перейдем теперь к случаю, когда a > 2.

Пусть $x \geq 0$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} 2x+ax\geq 14, \\ 2x+ax\leq 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq \dfrac{14}{2+a}, \\ x\leq \dfrac{12}{2+a}, \end{array}\right.$$

так как 2 + a > 0, то $x\in\left[0;\dfrac{12}{2+a}\right]a\cup\left[\dfrac{14}{2+a};+\infty\right).$

Пусть теперь x < 0. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} 2x-ax\geq 14, \\ 2x-ax\leq 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq \dfrac{14}{2-a}, \\ x\geq \dfrac{12}{2-a}, \end{array}\right.$$

так как 2 – a < 0, то $x\in\left(-\infty;\dfrac{14}{2-a}\right]\cup\left[\dfrac{12}{2-a};0\right).$

Итак, если a > 2, то

$$x\in\left(-\infty;\frac{14}{2-a}\right]\cup\left[\frac{12}{2-a};\frac{12}{2+a}\right]\cup\left[\frac{14}{2+a};+\infty\right).$$

Осталось рассмотреть случай, когда a = 2.

Исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}2x+a|x|\ge 14,\\ 2x+a|x|\le 12\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}4x\ge 14,\\ 4x\le 12\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}0x\ge 14,\\ 0x\le 12;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge \dfrac{7}{2},\\ 0\le x\le 3,\\ x<0.\end{array}\right.$$

Значит, $x\in(-\infty;3]\cup\left[\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

Исходя из условия задачи, отрезок [–3; 3] должен полностью входить в решение неравенства.

При 0 < a < 2 отрезок [–3; 3] не может быть расположен в промежутке $\left[\dfrac{14}{2+a};+\infty\right)$, так как $\dfrac{14}{2+a}>0$.

В промежутке $\left(-\infty;\dfrac{12}{2+a}\right]$ отрезок [–3; 3] лежит только в том случае, если $\begin{cases}\dfrac{12}{a+2}\ge 3,\\ 0<a<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\le 2,\\ 0<a<2\end{cases} \Leftrightarrow 0<a<2$ то есть условию задачи удовлетворяют все значения параметра $a\in$ (0; 2).

При a > 2 отрезок [–3; 3] не может быть расположен в промежутках $\left(-\infty;\dfrac{14}{2-a}\right]$ или $\left[\dfrac{14}{2+a};+\infty\right)$, так как $\dfrac{14}{2+a}>0$ и $\dfrac{14}{2-a}<0$.

В промежутке $\left[\dfrac{12}{2-a};\dfrac{12}{2+a}\right]$ отрезок [–3; 3] лежит тогда, когда имеет место совокупность

$$\begin{cases}\dfrac{12}{2-a}\le -3,\\ \dfrac{12}{2+a}\ge 3,\\ a>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a-6\le 12,\\ 3a+6\le 12,\\ a>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\le 6,\\ a\le 2,\\ a>2.\end{cases}$$

Поскольку полученная система несовместна, то отрезок [–3; 3] также не лежит в промежутке $\left[\frac{12}{2-a};\frac{12}{2+a}\right]$.

Значит, условию задачи не удовлетворяют все значения параметра $a \in$ (2; +∞).

При a = 2 отрезок [–3; 3] лежит в промежутке (–∞; 3], а значит, значение параметра a = 2 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: (0; 2].

Задача 59. При каких значениях параметра a неравенство $\left(1+x^2\right)^{\log_2\left(1+x^2\right)+|a|} > (0{,}25)^{2-2|a|+\log_{\sqrt{2}}\left(1+x^2\right)}$ выполняется при всех допустимых значениях x?

Решение

Отметим, что область определения неравенства есть промежуток $x \in (-\infty;+\infty)$. Так как положительное основание при возведении в любую степень дает положительную величину, то можно прологарифмировать обе части неравенства по основанию 2 (равносильное преобразование). Получаем:

$$\log_2^2\left(1+x^2\right)+|a|\log_2\left(1+x^2\right) > -2\left(2-2|a|+\log_{\sqrt{2}}\left(1+x^2\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\log_2^2\left(1+x^2\right)+|a|\log_2\left(1+x^2\right) > -4+4|a|-4\log_2\left(1+x^2\right).$$

Обозначая $\log_2\left(1+x^2\right)=t \geq 0$, получаем квадратное неравенство относительно t:

$$t^2+\left(4+|a|\right)t+4\left(1+|a|\right) > 0 \ (*)$$

Так как при $x \in (-\infty;+\infty)$ $t \in [0;+\infty)$, то задача стала равносильна следующей: при каких a неравенство $t^2+\left(4+|a|\right)t+4\left(1+|a|\right) > 0$ выполняется при всех $t \in [0;+\infty)$? Находим дискриминант $D=a^2+24|a| \geq 0$. Рассмотрим два случая:

1) D = 0 ⇔ a = 0 ⇒ неравенство (*) примет вид: $t^2+4t+4>0$ ⇔ ⇔ $(t+2)^2>0$ выполнено при всех $t \in [0;+\infty)$ ⇒ a = 0 подходит.

2) $D > 0 \Rightarrow$ нужны те a, при которых корни t_1, t_2 квадратного трехчлена оба отрицательны, то есть, используя теорему Виета, получаем

$$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = 4(1-|a|) > 0 \\ t_1 + t_2 = -4-|a| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |a| < 1.$$

Ответ: $a \in (-1;1)$.

Задача 60. Решите неравенство

$$\left|\log_{x-3} 4 - 2\right| + \sqrt{1-\lg 2x} + 1 \le \cos^2\left(x^2 - 5x\right).$$

Решение

Левая часть – сумма трех неотрицательных слагаемых, одно из которых равно 1, следовательно, левая часть не меньше 1. Правая же часть не превосходит 1 по свойству функции $y = \cos^2 t$.

Левая часть неравенства не меньше правой, поэтому неравенство может выполняться тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \log_{x-3} 4 = 2, \\ 1-\lg 2x = 0, \\ \cos^2\left(x^2 - 5x\right) = 1. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет единственное решение x =5. Подставляя это значение x в первое и третье уравнения, убеждаемся, что оно является единственным решением системы, а значить и заданного неравенства.

Ответ: 5.

Задача 61. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа 4sin$a$ – 3 и 8cos2a + 16sin$a$ + 1 являются решениями неравенства

$$\frac{\left(21x - 2x^2 + 65\right)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9| - 2} \ge 0.$$

Решение

1) Числитель определен при $x \ge -2$. Разложим его на множители:

$$\left(21x-2x^2+65\right)\sqrt{x+2}=(2x+5)(13-x)\sqrt{x+2}\,.$$

Знаменатель определен при $x \neq 9$. Найдем его нули:

$$\log_3|x-9|=2,\ |x-9|=9,\ x-9=\pm 9,\ x = 0 \text{ или } x = 18.$$

2) Функция $f(x)=\dfrac{\left(21x-2x^2+65\right)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2}$ определена при $x \geq -2$, $x \neq 0$; $x \neq 9$; $x \neq 18$ и непрерывна. При этом $f(19) < 0$, $f(17) > 0$, $f(12) < 0$, $f(1) < 0$, $f(-1) > 0$. Находим знаки функции (рис. 104):

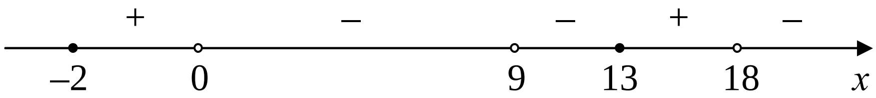


Рис. 104

Значит, $f(x) \geq 0$, откуда $x \in [-2;0) \cup [13;18)$.

3) Пусть $x = 4\sin a - 3$. Тогда $\sin a = \dfrac{x+3}{4}$, $16\sin a = 4(x + 3)$,

$$8\cos 2a = 8\left(1-2\sin^2 a\right) = 8-16\cdot\frac{(x+3)^2}{16} = -1-x^2-6x,$$

$$8\cos 2a+16\sin a+1=-1-x^2-6x+4(x+3)+1=-x^2-2x+12=13-(x+1)^2.$$

По условию и число x, и число $13-(x+1)^2$ являются решениями исходного неравенства, то есть принадлежат множеству $[-2;0) \cup [13; 18)$.

4) Так как $-7 \leq 4\sin a-3 \leq 1$, то случай $x \in [13;18)$ невозможен. Точка $(-1;13)$ – вершина параболы $y = 13 - (x + 1)^2$, ветви которой направлены вниз. Если $x \in [-2;-1) \cup (-1;0)$, то $12 = y(-2) \leq y < y(-1) = 13$, то есть y не принадлежит множеству $[-2;0) \cup [13; 18)$. Если $x = -1$, то $y = 13$, то есть и число x, и число y являются решениями исходного неравенства.

5) Итак, число a удовлетворяет условию задачи, только если $x = 4\sin a - 3 = -1$, $\sin a = 0{,}5$, $a = (-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, n – целое.

Ответ: $a = (-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$.

Задача 62. Найдите все значения параметра b, при которых неравенство $\log_{b^2-8}(|x|+4) > 1$ выполняется при любом значении x.

Решение

Найдем область определения неравенства: $\begin{cases} b^2-8>0, \\ b^2-8 \neq 1. \end{cases}$

В случае $0 < b^2 - 8 < 1$ $\log_{b^2-8}(|x|+4) < 0$ при всех $x \in R$, так как $|x| + 4 > 1$. При $b^2 - 8 > 1$, потенцируя, имеем $|x| + 4 > b^2 - 8$. Последнее неравенство верно для всех $x \in R$ при $1 < b^2 - 8 < 4$, откуда получаем ответ: $\left(-2\sqrt{3};-3\right) \cup \left(3;2\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $\left(-2\sqrt{3};-3\right) \cup \left(3;2\sqrt{3}\right)$.

Задача 63. При каких значениях параметра b неравенство $x^2 + 4|x-b| \geq b^2$ справедливо для всех значений x?

Решение

При $x \geq b$ исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 4|x-b| \geq b^2$ или неравенству $(x - b)(x - (-b - 4)) \geq 0$, которое справедливо для всех значений x из рассматриваемого промежутка тогда и только тогда, когда $b \geq -b - 4$, то есть когда $b \geq -2$.

Если $x < b$, то по аналогии с предыдущим случаем приходим к неравенству $(x - b)(x - (4 - b)) \geq 0$, которое справедливо для всех рассматриваемых x при $b \leq -b + 4$, то есть когда $b \leq 2$.

Ответ: $-2 \leq b \leq 2$.

Задача 64. В зависимости от значений параметров a и b решить неравенство $|x-a| + |x+a| < b$.

Решение

Начертим графики функций $y = |x-a| + |x+a|$ и $y = b$ (рис. 105).

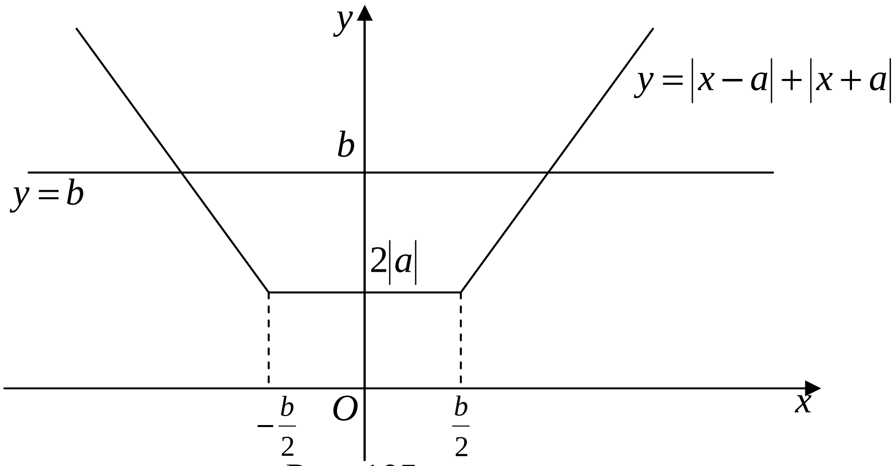


Рис. 105

Рисунок 105 сразу же дает ответ.

Ответ: если $b \le 2|a|$, то $x \in \varnothing$; если $b > 2|a|$, то $-\dfrac{b}{2} < x < \dfrac{b}{2}$.

Задача 65. В зависимости от значений параметра a решить неравенство $\left|x^2 - 5x + 6\right| < ax$.

Решение

Рассмотрим графики функций $y_1(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$ и $y_2(x) = ax$ (рис. 106). Решением заданного неравенства будут те значения x, при которых график функции $y_2(x)$ расположен выше графика функции $y_1(x)$.

Найдем абсциссы x_1, x_2 точек пересечения графика $y_2(x)$ и параболы $y = x^2 - 5x + 6$. Для этого рассмотрим уравнение $x^2 - 5x + 6 = ax$, которое можно переписать в виде

$$x^2 - (a + 5)x + 6 = 0. \qquad (*)$$

Решая, получаем, что $x_{1,2} = \dfrac{a + 5 \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}$.

Прямая $y_2(x) = ax$ касается графика функции $y_1(x)$ при меньшем из значений a, для которого дискриминант уравнения (*) равен нулю, то есть при $a = -5 - 2\sqrt{6}$.

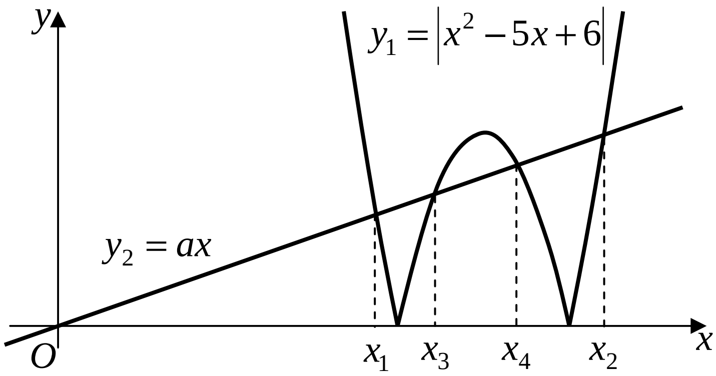


Рис. 106

Абсциссы x_3, x_4 точек пересечения графика функции $y_2(x)$ и выпуклой части графика функции $y_1(x)$ найдем из уравнения $-x^2+5x-6=ax$ или уравнения

$$x^2 + (a - 5)x + 6 = 0,$$

решая которое, получаем

$$x_{3,4} = \frac{5 - a \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}.$$

Прямая $y_2(x)$ касается выпуклой части графика функции $y_1(x)$ при $a = 5 - 2\sqrt{6}$ в точке с абсциссой $x = \sqrt{6}$.

Рассматривая варианты пересечения графика $y_1(x)$ и прямых $y_2(x) = ax$, выписываем ответ:

Ответ: если $-5 - 2\sqrt{6} \le a \le 0$, то решений нет;

если $a < -5 - 2\sqrt{6}$, то $x_1 < x < x_2$;

если $0 < a < 5 - 2\sqrt{6}$, то $x_1 < x < x_3$ и $x_4 < x < x_2$;

если $a = 5 - 2\sqrt{6}$, то $x_1 < x < \sqrt{6}$ и $\sqrt{6} < x < x_2$;

если $a > 5 - 2\sqrt{6}$, то $x_1 < x < x_2$;

где $x_{1,2} = \dfrac{a + 5 \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{5 - a \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}$.

Задача 66. Решите неравенство $|x+3| > ax$.

Решение

Графики обеих частей неравенства представлены на рис. 107. Из рисунка ясно, что при $a = 0$ $x \in (-\infty;-3) \cup (-3;+\infty)$; при $0 < a \leq 1$ $x \in R$; при $a > 1$ $x < x_1$, где x_1 находится из уравнения $x + 3 = ax$, $x_1 = \dfrac{3}{a-1}$.

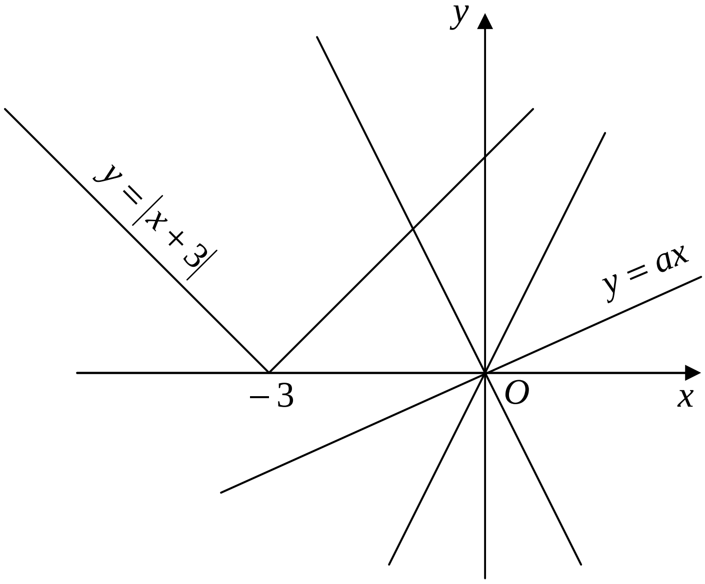


Рис. 107

При $a \leq 1$ $x > x_2$, где x_2 находится из уравнения $x + 3 = ax$, $x_1 = \dfrac{3}{a-1}$.

При $-1 < a < 0$ $\begin{cases} x < x_3, \\ x > x_4, \end{cases}$ где x_3 находится из уравнения $-x - 3 = ax$, $x_3 = -\dfrac{3}{a+1}$, $x_4 = \dfrac{3}{a-1}$.

Ответ: при $a \in (-1;1)$ $x > \dfrac{3}{a-1}$;

при $a \in (-1;0)$ $x \in \left(-\infty;\dfrac{3}{a+1}\right) \cup \left(\dfrac{3}{a-1};+\infty\right)$;

при $a \in (1;\infty)$ $x < \dfrac{3}{a-1}$.

Задача 67. При каких значениях параметра a число целочисленных решений неравенства $x^2+3x+3|x+a|-a\le 0$ максимально?

Решение

Заданное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} a\ge -x, \\ a\le -\dfrac{x^2}{2}-3x \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a< -x, \\ a\ge \dfrac{x^2}{4}. \end{cases}$$

Изобразим на плоскости xOa множество точек $(x;\ a)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам этой совокупности (на рис. 108 это множество точек закрашено).

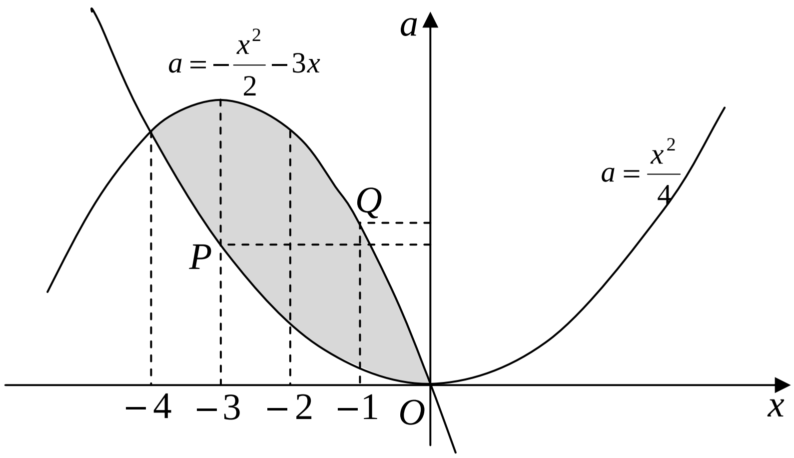


Рис. 108

Из рисунка видно, что при любых a целочисленных решений исходного неравенства будет не более трех. Поэтому требованию задачи будут удовлетворять те значения a, при которых точки пересечения прямой $a=c$ с прямыми $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$ и $x=-4$ будут принадлежать заштрихованной на рис. 108 области и их число равно трем.

А тогда, замечая, что точка P, являющаяся точкой пересечения прямой $x=-3$ с параболой $a=\dfrac{x^2}{4}$, имеет координаты $\left(-3;\dfrac{9}{4}\right)$, а точка Q – точка пересечения прямой $x=-1$ с параболой $a=-\dfrac{x^2}{2}-3x$, имеет координаты $\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$, приходим к выводу, что максимальное число целочисленных решений, равное трем, заданное неравенство будет иметь при $a = 4$ (это $x = -4, -3, -2$) и $\frac{9}{4} \le a \le \frac{5}{2}$ (это $x = -3, -2, -1$).

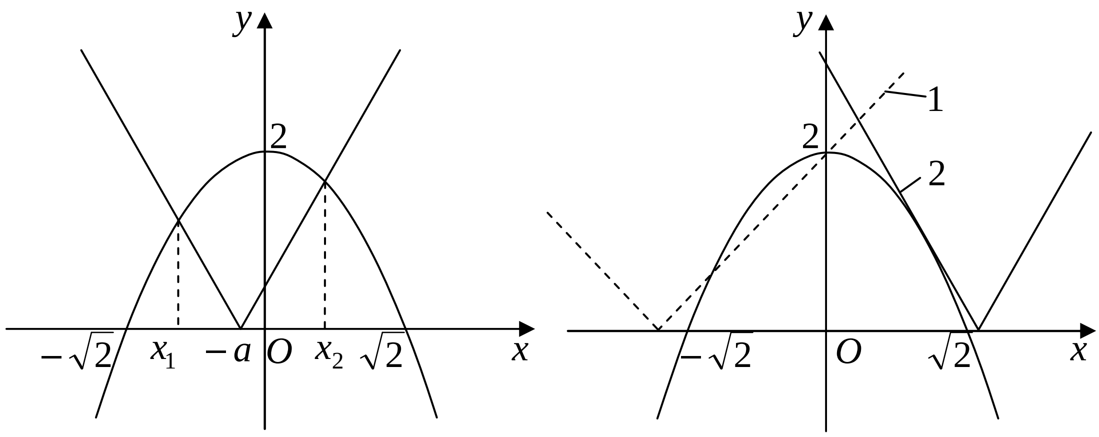
Ответ: $a = 4$, $\frac{9}{4} \le a \le \frac{5}{2}$.

Задача 68. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2 \ge |x + a| + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

Решение

Запишем исходное неравенство в виде $2 - x^2 \ge |x + a|$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = 2 - x^2$ и $y = |x + a|$ (рис. 109).



а) б)

Рис. 109

С рисунка 109а считываем ответ: $[x_1; x_2]$, где x_1 и x_2 – абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 2 - x^2$ и $y = |x + a|$. В промежуток $[x_1; x_2]$ будет входить хотя бы одно положительное число, если график функции $y = |x + a|$ будет находиться между положениями 1 и 2 (рис. 109б).

В случае 1 ветвь графика функции $y = |x + a|$ проходит через точку (0; 2). Поэтому получаем $2 = |a|$, откуда $a = \pm 2$. Учитывая, что величина $-a < 0$, получаем $a = 2$.

В случае 2 ветвь графика $y=|x+a|$ касается параболы $y=2-x^2$. В этом случае точка касания $x < -a$, откуда $x + a < 0$. Для этого случая $|x+a|=-(x+a)$ и получаем уравнение

$$2-x^2=-(x+a) \text{ или } x^2-x-a-2=0.$$

Так как это квадратное уравнение должно иметь один корень, то его дискриминант D = 1 + 4a + 8 должен равняться нулю, то есть 1 + 4a + 8 = 0, откуда $a=-\frac{9}{4}$.

Итак, при $a=\left[-\frac{9}{4};2\right)$ заданное неравенство имеет хотя бы одно положительное решение.

Ответ: $a=\left[-\frac{9}{4};2\right)$.

Задача 69. При каких значениях параметра a система $\begin{cases}|4x+3y|\le 12a, \\ x^2+y^2\le 14ax+6ay-57a^2+16a+64\end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение

Из первого неравенства системы следует, что $a\ge 0$, $-12a \le 4x + 3y \le 12a$. Замечая, что второе неравенство системы равносильно неравенству $(x-7a)^2 + (y-3a)^2 \le (a+8)^2$, приходим к выводу, что решениям первого неравенства исходной системы на координатной плоскости xOy соответствуют точки полосы, ограниченной прямыми $4x + 3y = 12a$ и $4x + 3y = -12a$ (рис. 110), а решениям второго неравенства исходной системы соответствуют точки конечной части плоскости xOy, ограниченной окружностью радиуса $r = a + 8$ с центром в точке $M(7a; 3a)$ (рис. 110).

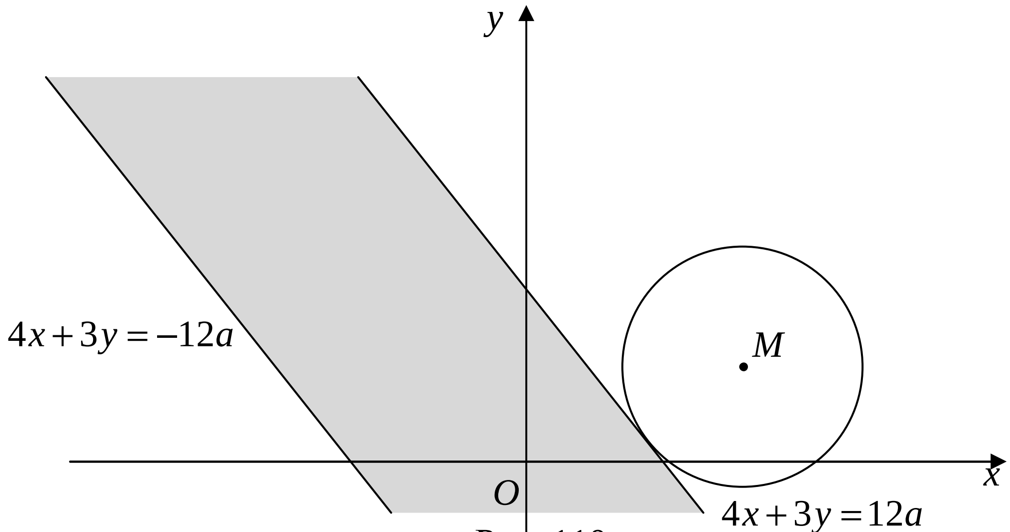


Рис. 110

А тогда, замечая, что единственное решение исходная система может иметь только при $a > 0$ и что при таких a точка M всегда лежит выше прямой $4x + 3y = 12a$, ибо $4(7a) + 3(3a) > 12a$, приходим к выводу, что единственное решение исходная система будет иметь лишь только в том случае, когда прямая $4x + 3y = 12a$ касается окружности

$$(x - 7a)^2 + (y - 3a)^2 \le (a + 8)^2,$$

то есть когда уравнение

$$(x-7a)^2 + \left(\frac{4x-3a}{3}\right)^2 = (a+8)^2,$$

или уравнение

$$25x^2 + 150ax + 441a^2 - 144a - 576 = 0,$$

имеет единственное решение. А это будет иметь место, когда дискриминант последнего уравнения равен нулю, то есть когда $a = 2$ ($a > 0$!).

Ответ: $a = 2$.

Задача 70. Решить систему $\begin{cases} 2^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \le 8. \end{cases}$

Решение

Оценим левую часть уравнения системы:

$$2^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_2 3} = \frac{2^{\left|x^2-2x-3\right|}}{2^{\log_2 3}} = \frac{1}{3} \cdot 2^{\left|x^2-2x-3\right|}.$$

Так как $\left|x^2-2x-3\right|\ge 0$, то $2^{\left|x^2-2x-3\right|}\ge 1$, а значит $2^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_2 3}\ge \frac{1}{3}$.

Следовательно, правая часть также ограничена снизу числом $\frac{1}{3}$, то есть $3^{-y-4}\ge \frac{1}{3}$, откуда следует, что $y\le -3$.

В таком случае, каждое из подмодульных выражений y и $y-1$ неравенства системы являются отрицательными, что мы и используем для раскрытия модулей: $|y|=-y$; $|y-1|=1-y$.

В таком случае неравенство системы примет вид $-4y+y-1+(y+3)^2\le 8$.

Преобразовав последнее неравенство, будем иметь $y^2+3y\le 0$. Решением этого неравенства будет промежуток $[-3;0]$.

Учитывая, что $y\le -3$ и то, что y заключен в промежутке $[-3;0]$, мы делаем вывод: $y=-3$.

Подставим найденное значение $y=-3$ в уравнение системы. Будем иметь $2^{\left|x^2-2x-3\right|}=1$, откуда $x^2-2x-3=0$; $x=-1$, $x=3$.

Ответ: (–1; –3); (3; –3).

Задача 71. Решите систему неравенств $\begin{cases}|y-\sin x|>0,\\ y^2\le 1.\end{cases}$.

Решение

Неравенству $|y-\sin x|>0$ удовлетворяют координаты любой точки плоскости xOy при условии, что $y\ne \sin x$. Следовательно, область решений этого неравенства есть вся плоскость xOy, из которой удалены точки синусоиды $y=\sin x$.

Область решений неравенства $y^2\le 1$ есть полоса, заключенная между прямыми $y=-1$ и $y=1$.

Область решений заданной системы и есть эта полоса, из которой удалена синусоида $y = \sin x$ (рис. 111).

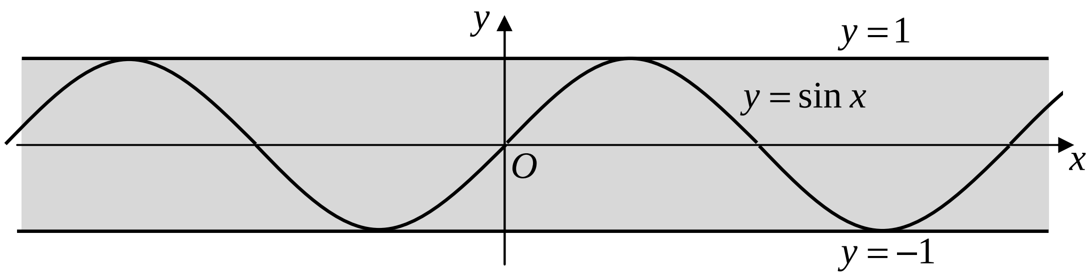


Рис. 111

Задача 72. Решите смешанную систему

$$\begin{cases} |\sin x + \cos x| \geq |\sin x| + |\cos x|, \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение

Заметим, что $|a + b| \leq |a| + |b|$, поэтому первое неравенство системы выполняется тогда и только тогда, когда

$$|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x|.$$

А это, в свою очередь, возможно в том и только в том случае, когда $\sin x \cdot \cos x \geq 0$.

Так как $\cos x \neq 0$, то $\sin x \cdot \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq 0$.

Решим второе уравнение. Так как $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то уравнение примет вид:

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 6 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -2; \operatorname{tg} x = 3.$$

Так как $\operatorname{tg} x \geq 0$, то $\operatorname{tg} x = -2$ следует отбросить. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 3$, следует, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$.

Задача 73. Вычислите площадь фигуры, заданной неравенством

$$|x-3|+|y-5|\le 6.$$

Решение

Первый способ

Разобьем координатную плоскость прямыми $x = 3$ и $y = 5$ на четыре части (рис. 112).

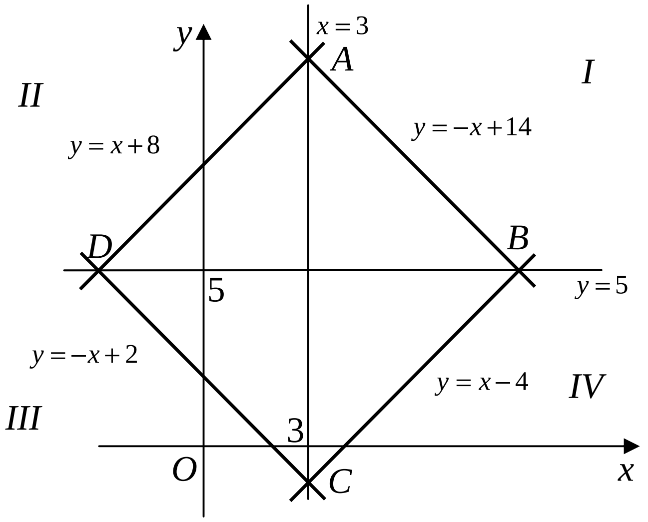


Рис. 112

Рассмотрим заданное неравенство в каждой части координатной плоскости, раскрыв для этого модули.

а) $\begin{cases} x\ge 3, \\ y\ge 5, \\ x-3+y-5\le 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 3, \\ y\ge 5, \\ y\le -x+14. \end{cases}$

Построим в системе координат xOy прямую $y = –x + 14$ и заштрихуем ту часть полуплоскости, задаваемую неравенством $y \le –x + 14$, которая находится в первой части (I) координатной плоскости (рис. 112).

б) $\begin{cases} x\le 3, \\ y\ge 5, \\ -x+3+y-5\le 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 3, \\ y\ge 5, \\ y\le x+8. \end{cases}$

Строим в системе координат прямую $y = x + 8$ и заштриховываем ту часть полуплоскости, задаваемую неравенством $y \le x + 8$, которая находится во второй части (II) координатной плоскости (рис. 112).

в) $\begin{cases} x \le 3, \\ y \le 5, \\ -x+3-y+5 \le 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 3, \\ y \le 5, \\ y \ge -x+2. \end{cases}$

Построим в системе координат прямую $y = -x + 2$ и заштрихуем ту часть полуплоскости, задаваемую неравенством $y \ge -x + 2$, которая находится в третьей части (III) координатной плоскости (рис. 112).

г) $\begin{cases} x \ge 3, \\ y \le 5, \\ x-3-y+5 \le 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 3, \\ y \le 5, \\ y \ge x-4. \end{cases}$

Строим в системе координат прямую $y = x - 4$ и заштриховываем ту часть полуплоскости, задаваемую неравенством $y \ge x - 4$, которая находится в четвертой части (IV) координатной плоскости (рис. 112).

Мы получили квадрат $ABCD$. Его площадь мы найдем по формуле $S = \frac{1}{2}d_1d_2$, где d_1 и d_2 – диагонали квадрата $ABCD$.

Найдем диагонали. При $x = 3$ имеем $|y - 5| \le 6$, откуда $-6 \le y-5 \le 6$, $-1 \le y \le 11$. Значит диагональ (пусть d_1) равна 12. По свойству квадрата имеем, что и диагональ d_2 также равна 12.

Итак, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72$ (кв. ед.).

Ответ: $S = 72$ (кв. ед.).

Второй способ

Квадрат, задаваемый неравенством $|x-3|+|y-5| \le 6$, получен путем параллельного переноса квадрата, задаваемого неравенством $|x|+|y| \le 6$, вправо по оси Ox на 3 единицы и вверх на 5 единиц по оси Oy.

При $x = 0$ имеем $|y| \le 6$, откуда $-6 \le y \le 6$. Значит диагональ квадрата равна 12 и по известной формуле $S = \frac{1}{2}d_1d_2$ имеем $S = 72$ (кв. ед.).

Ответ: $S = 72$ (кв. ед.).

Задача 74. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством $2|x|+|y+2x+1|\le 5$.

Решение

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$2|x|+|y+2x+1|\le 5 \Leftrightarrow |y+2x+1|\le 5-2|x| \Leftrightarrow \begin{cases} y+2x+1\le 5-2|x|, \\ y+2x+1\ge 2|x|-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2|x|\le 4-y-2x, \\ 2|x|\le y+2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\le 4-y-2x, \\ 2x\ge y+2x-4, \\ 2x\le y+2x+6, \\ 2x\ge -y-2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le -4x+4, \\ y\le 4, \\ y\ge -6, \\ y\ge -4x-6. \end{cases}$$

Данная фигура на координатной плоскости представляет собой параллелограмм с вершинами $A\left(-\dfrac{5}{2};4\right)$, $B(0;\ 4)$, $C\left(\dfrac{5}{2};-6\right)$ и $D(0;\ -6)$ (рис. 113).

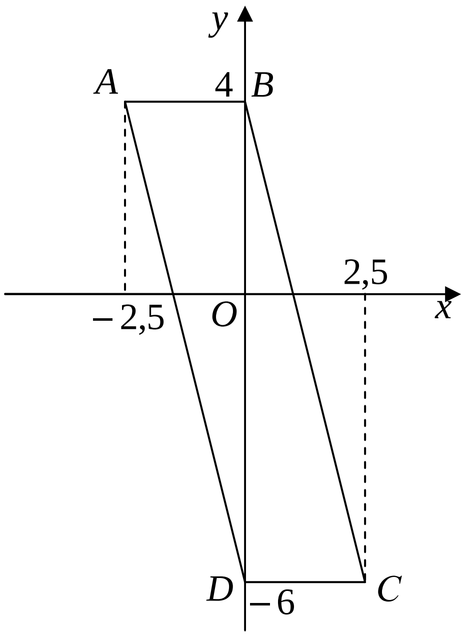


Рис. 113

Основание AB этого параллелограмма равно $\dfrac{5}{2}$, высотой является отрезок BD, который равен 10, поэтому его площадь равна 25 кв. ед.

Ответ: 25 кв. ед.

Задача 75. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{|x-1|-2|x|+4} y > \log_{|x-1|-2|x|+4}(4-x).$$

Решение

Заданное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} |x-1|-2|x|+4>1, \\ y>0, \\ 4-x>0, \\ y>4-x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0<|x-1|-2|x|+4<1, \\ y>0, \\ 4-x>0, \\ y<4-x, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} -4<x<2, \\ y>0, \\ y>4-x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\in(-5;-4)\cup(2;3), \\ y>0, \\ y<4-x. \end{cases}$$

Искомое множество точек координатной плоскости изображение на рисунке 114 (закрашенная часть).

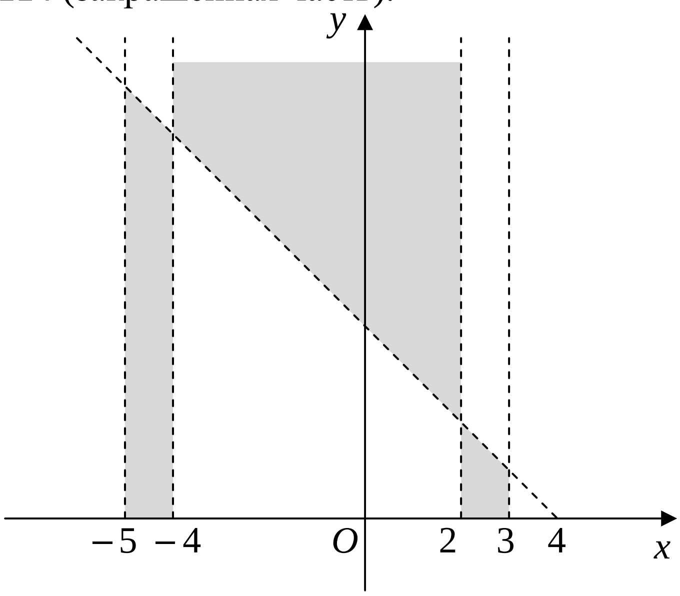


Рис. 114

Задача 76. Покажите штриховкой множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{|x+1|-2|x-1|+6} y > \log_{|x+1|-2|x+1|+6}(x+4).$$

Решение

Предоставляем читателю возможность самостоятельно решить задачу, а мы же приведем лишь готовый рисунок (рис. 115).

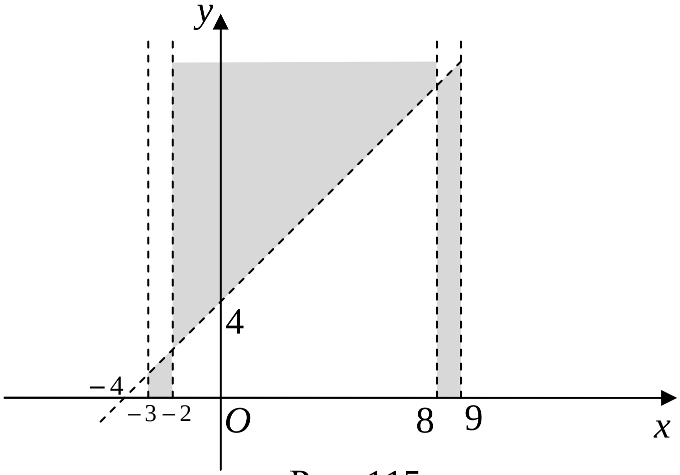


Рис. 115

Задача 77. Найдите периметр фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} 2\cdot|x+2|\cdot\arcsin(y-1)^2 \le \pi(x+2), \\ 2\cdot|y-1|-x \ge 0. \end{cases}$

Решение

Как и в предыдущей задаче мы приведем здесь лишь изображение фигуры на координатной плоскости (рис. 116) и укажем ответ на вопрос задачи.

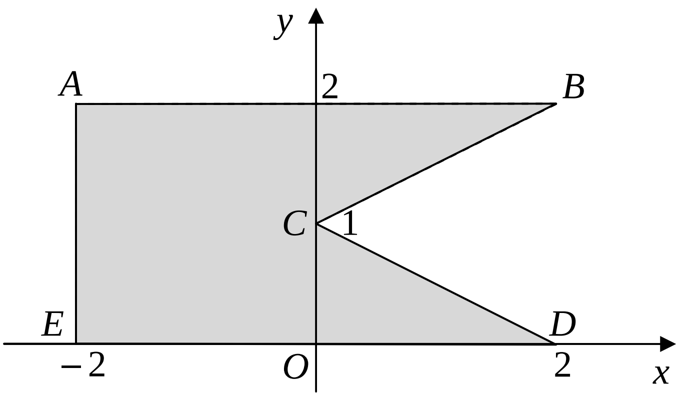


Рис. 116

Ответ: $P_{ABCDE} = 10 + 2\sqrt{5}$ (лин. ед.).

§6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Упростите выражение $\sqrt{\left|12\sqrt{5}-29\right|}-\sqrt{\left|12\sqrt{5}+29\right|}$.

Ответ: –6.

2. Найдите все y, при которых хотя бы одно из двух выражений $A(y)=|y-3|(|y-5|-|y-3|)-6y$ и $B(y)=|y|(|y|-|y-8|)+24$ положительно, и при этом его модуль не меньше модуля другого.

Ответ: [3; 5].

3. Найдите наименьшее значение x, при котором значение выражения $\log_{0,5}(1-x)^4+\log_{0,5}|x-1|$ равно числу (–10).

4. Найдите набольшее значение x, при котором значение выражения $\log_2(x+1)^2+\log_2|x+1|$ равно 6.

5. Найдите все значения параметра a, при которых выражение $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}-0,2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$ положительно для всех допустимых значений x.

Ответ: (–2; 2).

6. Найдите a, b, c, d, при которых для всех x имеет место равенство $\left||x|-1\right|=a|x|+b|x-1|+c|x+1|+d$.

7. Определите, какое наименьшее значение может принимать выражение $|y-4x+6|+|4x-12-y|+\sqrt{x^2+xy-2y^2}$ и найдите суммарную длину линий, состоящих из всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, в которых это значение достигается.

Ответ: 28; $7\sqrt{2}+4\sqrt{5}$.

8.Указать промежуток, которому принадлежат все корни уравнения $\left|4x-|x-2|+3\right|=16$.

1) [–7; –4]; 2) [–4; 4]; 3) [4; 6]; 4) [6; 7].

Ответ: 2).

9. Укажите промежуток, содержащий все корни уравнения $\frac{|x-1|}{|x-2|}=\frac{|x+1|}{|x+2|}$.

1) [–1; 1]; 2) [0; 3]; 3) [–2; 2]; 4) [0; 1].

Ответ: 3).

10. Укажите промежуток, которому принадлежат все корни уравнения $(x-7)^2-|x-7|=30$.

1) [2; 15]; 2) [–1; 12]; 3) [–6; 7]; 4) [–3; 14].

Ответ: 4).

11. Решите уравнение $x^2+1-|x-1|=2|x|$.

Ответ: 1.

12. Решите уравнение $3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|$.

Ответ: 6.

13. Решите уравнение $\frac{|x^3|-|5x|}{\sqrt{x^2-4x-1}-|x|+2}=0$.

Ответ: $-\sqrt{5}$.

14. Решите уравнение $\sin\frac{\pi}{x^2+6x+13}=\frac{\log_3|x|+\log_{|x|}3}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: 4.

15. Решите уравнения:

1) $|7x-12|-|7x-11|=1$.

Ответ: $x\le\frac{11}{7}$.

2) $4\sqrt{x+1}=|2x-1|+3$.

Ответ: 0; 3.

3) $\left||x-1|+2\right|=1$.

Ответ: действительных корней нет.

4) $\dfrac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

Ответ: –2; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$.

5) $\dfrac{3}{|x+3|-1}=|x+3|$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{13}-5}{2}$; $\dfrac{-7-\sqrt{13}}{2}$.

6) $||3-2x|-1|=2|x|$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

7) $|x^2+2x|-|2-x|=|x^2-x|$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8) $|2|x-1|+3x-4|=x-2$.

Ответ: действительных корней нет.

9) $|-5x-3|2x-3|+2|=11+x$.

Ответ: $\dfrac{11}{5}$; –2.

10) $|-2x-|3x+4|+5|=1-5x$.

Ответ: $\left[-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{5}\right]$.

11) $||x-3|-x+1|+x=6$.

Ответ: –2; 4.

12) $||x^2-3x|-5|=x+1$.

Ответ: 2; $2+\sqrt{10}$; $1+\sqrt{5}$.

13) $||x+3|-|x-1||=2-x^2$.

Ответ: 0; $1-\sqrt{5}$.

14) $\left||x^2-3x|-x+1\right|=2x^2+x-1$.

Ответ: 1; $-\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$.

15) $\left||x^3-\sqrt{x+1}|-3\right|=x^3+\sqrt{x+1}-7$.

Ответ: 3.

16) $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

Ответ: $\dfrac{1}{10}$; 2; 1000.

17) $|1-x|+|x+1|=\dfrac{2x}{|x|}$.

Ответ: $(0;1]$.

18) $|x|^{x^2-2x}=1$.

Ответ: –1; 1; 2.

19) $\cos^2((x+2)\cos 2x)-1=\left|\log_2(x^2+5x+7)\right|$.

Ответ: –2.

16. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=$$
$$=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5}{4}\pi^2.$$

Ответ: (–1; 2); (–1; –2).

17. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{3-|y|}\left(-2\sin^2 y-10\sin y\cos y+6\cos^2 y+2\sqrt[3]{11}\right)=$$
$$=8(\arcsin x)^3+8(\arccos x)^3-7\pi^3.$$

Ответ: (–1; –3); (–1; 3).

18. Найдите единственное решение уравнения $2^{|x|}+x^2=\cos x-|x|$.

19. Решите уравнения:

а) $3^{\left|\sin\sqrt{x}\right|} = \left|\cos x\right|$;

б) $4\left|\sin x\right| + 2\cos 2x = 3$;

в) $4\left|\cos x\right| + 3 = 4\sin^2 x$;

г) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{3\left|\sin x\right|}{\sin 3x} = -2$;

д) $\dfrac{\cos 3x\cos 5x + \left|\sin 5x\sin 3x\right|}{\sin 2x} = 2\cos 2x$;

е) $\cos 3x + \cos 2x = 3\left|\cos x\right| - \cos 4x$;

ж) $\dfrac{\sin 4x + \sin 4x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \dfrac{\left|\cos 2x\right|}{\sqrt{2}\sin x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$;

з) $2 + \sqrt{3}\cos x + \left|\sin x\right| = 4\sin^2 x$;

и) $\cos x + \left|\sin x\right| + \cos 2x = \sin 4x$;

к) $\dfrac{\sin 6x}{\left|\sin 4x\right|} = \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$;

л) $2^{1-\left|4x-1\right|} = \operatorname{tg}\pi x + \operatorname{ctg}\pi x$;

м) $\log_2\left(3 - \left|\sin x\right|\right) = 2^{-\left|\pi - 2x\right|}$;

н) $\log_3\left(\dfrac{1}{3} - \left|\dfrac{3\pi}{2} - x\right|\right) = \sin x$;

о) $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2} = 5 + 4\sin 2\pi x$.

Ответы: а) 0;

б) $(-1)^n\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in Z$;

в) $\pm\arccos\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$;

г) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n; -\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$;

д) $\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{13\pi}{24}+\pi n; \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$;

е) $2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$;

ж) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z$;

з) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{18}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{29\pi}{18}+2\pi n, n\in Z$;

и) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \pi+2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$;

к) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n, n\in Z$;

л) $\frac{1}{4}$;

м) $\frac{\pi}{2}$;

н) $\frac{3\pi}{2}$;

о) $\frac{1}{4}$.

20. Сколько корней имеет уравнение

$$|x-2|+\sqrt{x^2-8x+15}+|4-x|=|6-2x|?$$

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) ни одного.

Ответ: 3).

21. Пусть $f(x)=x^2-2x$. Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{f(x)}+|f(x)-x|+|f(2x)-f(x)+7x-3|=|f(2x)+6x-3|?$$

1) не имеет корней; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

Ответ: 2).

22. Решите уравнение с двумя неизвестными:

а) $2^{|x|}-\cos y+\lg\left(1+x^2+|y|\right)=0$

Ответ: (0; 0).

б) $\dfrac{|\operatorname{tg}(x+y)|}{\sin^2(x+y)}=\dfrac{4}{\log_\pi(x-y)+\log_{x-y}\pi}$

Ответ: $\begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4}, k\in Z, \\ y=-\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z. \end{cases}$.

в) $4\sin^2 xy+4\sin xy+3=\dfrac{4}{\log_\pi|y|+\log_{|y|}\pi}$

Ответ: $\begin{cases} x=\dfrac{6k+(-1)^k}{6}, k\in Z, \\ y=-\pi. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{6k-(-1)^k}{6}, k\in Z, \\ y=\pi. \end{cases}$.

23. В зависимости от значений параметра a решите уравнения:

а) $9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$;

б) $\left|x^2+2ax\right|=1$;

в) $x-a=2\cdot\left|2|x|-a^2\right|$;

г) $|x+3|-a|x-1|=4$;

д) $|x-3|=a(x-1)^2+2$;

е) $\left|x^2-5x+6\right|=ax$;

ж) $\log_5(2-|x-a|)+\log_{0,2}(5-x)=0$;

з) $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$.

Ответы:

а) если $-3\le a<0$, то $x_{1,2}=2\pm\log_3\left(2-\sqrt{4+a}\right)$;

при других a решений нет;

б) если a – любое, то $x_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2+1}$;

кроме того, если $a^2 \geq 1$, то при $x_{3,4} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$;

в) если $a < -2$, то $x_1 = \dfrac{2a^2 + a}{5}$, $x_2 = \dfrac{2a^2 - a}{3}$;

если $-2 \leq a \leq \dfrac{1}{2}$, то $x_1 = \dfrac{a - 2a^2}{5}$, $x_2 = -\dfrac{a + 2a^2}{3}$,

$x_3 = \dfrac{2a^2 + a}{5}$, $x_4 = \dfrac{2a^2 - a}{3}$;

если $-\dfrac{1}{2} \leq a \leq 0$, то $x_1 = \dfrac{a - 2a^2}{5}$, $x_2 = \dfrac{2a^2 - a}{3}$;

если $0 < a < 2$, то решений нет;

если $a \geq 2$, то $x_1 = \dfrac{2a^2 + a}{5}$, $x_2 = \dfrac{2a^2 - a}{3}$;

г) если $a < -1$, то $x = 1$; если $a = -1$, то $-3 \leq x \leq 1$;

если $-1 < a < 1$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{a + 7}{a - 1}$; если $a = 1$, то $x \geq 1$;

если $a > 1$, то $x = 1$.

д) если a – любое, то $x = 1$; кроме того если $a < 0$, то $x = \dfrac{2a + 1 + \sqrt{1 - 16a}}{2a}$; если $a = 0$, то $x = 5$; если $0 < a \leq \dfrac{1}{16}$, то $x_1 = 1 - \dfrac{1}{a}$, $x_{2,3} = \dfrac{2a + 1 \pm \sqrt{1 - 16a}}{2a}$; если $a > \dfrac{1}{16}$, то $x = 1 - \dfrac{1}{a}$;

е) если $a \leq -5 - 2\sqrt{6}$, то $x_{1,2} = \dfrac{a + 5 \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}$; если $-5 - 2\sqrt{6} < a < 0$, то решений нет; если $0 \leq a \leq 5 - 2\sqrt{6}$, то $x_{1,2} = \dfrac{a + 5 \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{5 - a \pm \sqrt{a^2 - 10a + 1}}{2}$; если $a > 5 - 2\sqrt{6}$, то $x_{1,2} = \dfrac{a + 5 \pm \sqrt{a^2 + 10a + 1}}{2}$;

ж) если $a = 3$, то $3 \le x < 5$; если $3 < a < 7$, то $x = \frac{a+3}{2}$; при остальных значениях a решений нет;

з) если $a \le 1$, то $x = \pm\log_{12}\left(1+\sqrt{1-a}\right)$; если $a > 0$, то решений нет.

24. Для каждого значения параметра a определите число корней следующих уравнений:

1) $\frac{|x|}{x} = a$;

2) $|x+1| + |x-1| = a$;

3) $|x-2| - |x+2| = a-1$;

4) $|3x-1| = a^2 + 2a - 3$;

5) $a\frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} = 1$;

6) $ax + \frac{|x|}{x} = 2a+1$;

7) $|x(x-2)| = a$;

8) $|x| = |x-2|(a-2)$;

9) $|x| = |(x-2)(a-2)|$;

10) $|x+2|(x-3) = a^2 - 1$;

11) $\frac{2|x|}{x^2+1} = |a| - 1$;

12) $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{a-|a|}$;

13) $x - \frac{1}{|x|} = a - \frac{1}{a}$;

14) $ax^2 + 4|x| - 5 = 0$;

15) $\frac{|x|+1}{x} = a^2 + a - 1$.

25. При различных значениях параметров a и b решите уравнение $|a(x-b)|+|x-1|=0$.

Ответ: если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то решений нет;

в остальных случаях $x = 1$.

26. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2+(a-3)|x|+a^2-4=0$ имеет в точности три корня?

Ответ: $a = 2$.

27. Сколько корней, в зависимости от параметра a, имеет уравнение $2|x|-|x-3|=a$?

Ответ: если $a < -3$, то корней нет;

если $a = -3$, то один корень;

если $a > -3$, то два корня.

28. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x-a^2\right|=a$ имеет один положительный и один отрицательный корень?

Ответ: $0 < a < 1$.

29. При каких значениях параметра a все корни уравнения $|x-2|=ax$ принадлежат промежутку [1; 3]?

Ответ: $0 \le a \le \frac{1}{3}$.

30. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение $(c+3-|x+2|)\left(c+x^2+4x\right)=0$ имеет ровно три корня.

Ответ: –3; 4.

31. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение $(c+3-|x+2|)\left(c+x^2+4x\right)=0$ имеет ровно два корня.

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)\cup\left\{\frac{\sqrt{29}-7}{2}\right\}$.

32. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(x^2-6|x|-a\right)^2+12\left(x^2-6|x|-a\right)+37=\cos\frac{18\pi}{x}$ имеет ровно два корня.

Ответ: –3; 9.

33. Решите уравнение $\sqrt{2}+\cos x=\left|\cos\frac{4x}{3}\right|\cdot\sin x$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}+6\pi n, n\in Z$.

34. Укажите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $\left(a-|x+2|\right)\left(a-x^2\right)=0$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: a = 4.

35. Найдите значение параметра a, при котором уравнение $\frac{a-x^2}{|a|-x-2}=0$ имеет единственный корень. Если таких значений несколько, запишите в ответе их сумму.

Ответ: a = 5.

36. При каком значении параметра a уравнение $|x-a|+x+a-3=0$ имеет бесконечное множество решений?

Ответ: a = 1,5.

37. При каких значениях параметра a уравнение $\left(a+4x-x^2-1\right)\left(a+1-|x-2|\right)=0$ имеет три корня?

38. При каких значениях параметра a число корней уравнения $\left|x^2-8|x|+7\right|=a$, равно a?

Ответ: 7.

39. При каких значениях параметра a уравнение $|x-4|+|6+x|=a^2+2a+10$ имеет только два корня?

1) a = 0; 2) a < 0; 3) $-2\le a\le 0$; 4) a > 2 и a < –2.

Ответ: 4).

40. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $x-\frac{p}{2}=4\left|4|x|-p^2\right|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

Ответ: $p = 1$ и $p=-\frac{1}{4}$;

при $p = 1$: $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{10}$, $x=\frac{3}{5}$;

при $p=-\frac{1}{4}$: $x=-\frac{1}{20}$, $x=0$, $x=\frac{1}{12}$.

41. При каких значениях параметра a для любого x существуют y такие, что $\sin(a+x+y)=\cos\left(2a+\frac{\pi}{3}\right)\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{\left|x-\frac{3}{2}\right|}{2\cos a}$?

Ответ: $a=\pi+2\pi k, k\in Z$.

42. При каких значениях параметра a уравнение $9^{a^2}\cdot\log_2\left(\left|x^2-4x+3\right|+1\right)+3^{3a-\left|x^2-4x+3\right|}\cdot\log_2\frac{1}{1+3a-2a^2}=0$ имеет три решения?

Ответ: $a=\frac{1}{2}$, $a = 1$.

43. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $2\log_a|x-1|-\log_a x=1$ равна 34?

Ответ: $a = 4$.

44. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\left|\log_3(x+2)\right|=-(x+a)^2$.

Ответ: при $a = 1$, $x = -1$;

при других a решений нет.

45. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{(x+3a-3\pi-4)(|x+\pi|+a-2\pi+2)}+\log_{\pi}\dfrac{a^2+\pi^2+4}{2(a-\pi)|x+2|-x^2-4x-2a\pi}=0$ имеет по крайней мере одно целочисленное решение?

Ответ: $a_1=\pi+3$, $a_2=\pi+1$, $a_3=\pi$.

46. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $x\sin ax=|x|$.

Ответ: если a – любое, то $x = 0$; кроме того, если $a < 0$, то $x_1=\dfrac{\pi(1+4m)}{2a}$, $m\le -1$ – целое, $x_2=\dfrac{\pi(-1+4p)}{2a}$, $p\in N$; если $a > 0$, то $x_1=\dfrac{\pi(1+4k)}{2a}$, $k\ge 0$ – целое; $x_2=\dfrac{\pi(-1+4n)}{2a}$, $n\le 0$ – целое.

47. Решите неравенства:

1) $0{,}3|x|-1\le\dfrac{6-|x|}{2}$.

Ответ: [–5; 5].

2) $(|x|-8)(|x|-2)>0$.

Ответ: $(-\infty;-8)\cup(-2;2)\cup(8;+\infty)$.

3) $x^2-8x-\dfrac{5}{|x+5|}+4>0$.

Ответ: $[3;4)\cup(4;5]$.

4) $\dfrac{|x+3|+x}{x+2}>1$.

Ответ: $(-5;-2)\cup(-1;+\infty)$.

5) $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$.

6) $|13-2x| \geq |4x-9|$.

Ответ: $\left[-2;\frac{11}{3}\right]$.

7) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2};2\right]$.

8) $|7-2x| < |3x-7| + |x+2|$.

Ответ: $(-\infty;-2) \cup \left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

9) $x-\sqrt{1-|x|} < 0$.

Ответ: $\left[-1;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

10) $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{|x|}{x} \geq 0$.

Ответ: $[-\sqrt{3};0) \cup (0;2]$.

11) $\dfrac{|x^2-2x|-1-2x}{x^2-2+|x^2+3x|} \geq 0$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{9}{3}\right] \cup \left[-\frac{7}{6};+\infty\right)$.

12) $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|} \leq 0$.

Ответ: $x < \frac{1}{3}$.

13) $\dfrac{(x^2-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2x\right)}{|x-2|-4x+3} \geq 0$.

Ответ: $x=-1$.

14) $\left|\left|x^3-x-1\right|-5\right|\ge x^3+x-8$.

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt[3]{6}\right]$.

15) $\left|\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right|\le 1$.

Ответ: $\left[-2;+\infty\right)$.

16) $\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right|+\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-12\le 0$.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{7}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

17) $\log_3\frac{\left|x^2-4x\right|+3}{x^2+\left|x-5\right|}\ge 0$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$.

18) $\left|\left|x^2+4x+3\right|-\left|x^2-x-2\right|\right|\ge 5\left|x+1\right|$.

Ответ: $\left(-\infty;-3\right]\cup\{-1\}\cup\left[2;+\infty\right)$.

19) $|x|\le\frac{18-3|x|}{|x|}$.

Ответ: $(-6;0)\cup(0;3)$.

20) $\frac{12+x}{|x|}\ge|x|$.

Ответ: $[-3;0)\cup(0;4]$.

21) $|x+1|\le\sqrt{(x+2)^2\left(x^2-25\right)}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{26}\right]\cup[26;+\infty)\cup\{-1\}$.

22) $\left|3x^2-2\right|^{-\sqrt{1+x}}>\left|3x^2-2\right|^{1+\sqrt{x}}$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1\right)$.

23) $4^{\frac{x^2}{2}-2x} \ge 2^{|2x-10|+x}$.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[5;+\infty)$.

24) $\left|\log_{x-3} 4-2\right|+\sqrt{1-\lg 2x}+1 \le \cos^2\left(x^2-5x\right)$.

Ответ: 5.

25) $\left|1-\log_2 3\right| x \le 1-\log_2 3$.

26) $\left|\frac{1}{2}-\lg 5\right| x \ge 0{,}5-\lg 5$.

27) $\left|\log_5 x\right| \le \left|\log_5 x-2\right|$.

28) $\log_3^2\left(|x|-2\right) \le 1$.

29) $\log_{\frac{1}{2}}^2-\left|\log_2 x\right| \le 2$.

48. Найти сумму всех целых решений неравенства $\left|\frac{x^2-5x-4}{x+1}\right| \le 2$.

Ответ: 22.

49. Найдите длину ограниченного промежутка, являющегося решением неравенства $\left|\frac{x^2-3x-4}{x+1}\right| \le 2$.

Ответ: 4.

50. Найдите наименьшее натуральное число, являющееся решением неравенства $2|x+1| > x+4$.

Ответ: 3.

51. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\left|x-1+|x-2|\right| > 7$.

Ответ: 6.

52. Найдите сумму всех целых чисел, являющихся решениями неравенства $\frac{\sqrt{56-x-x^2}-x-7}{\left|2x^2-x-4\right|-\left|x^2-2x-2\right|} \le 0$.

Ответ: 25.

53. Найдите длину ограниченного промежутка, являющегося решением неравенства $\left|x^3-6x^2+9x-6\right| \geq x^5-2^3+6x^2-13x+6$.

Ответ: 2.

54. Решите неравенство $\left|\left|x^2-8x+2\right|-x^2\right| \geq 2x+2$.

Ответ: $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[6;+\infty)$.

55. Решите неравенство $\left|\left|x^3+x-3\right|-5\right| \leq x^3-x+8$.

Ответ: $\left[-\sqrt[3]{5};8\right]$.

56. Решите неравенство $\left|x^2+7x+10\right|+\left|x+7\right| \leq x^2+8x+21$.

Ответ: $[-9;-4]\cup[-3;+\infty)$.

57. Найдите длину ограниченного промежутка, являющегося решением неравенства $\dfrac{2}{|x-1|} > \dfrac{1}{|x+1|}$.

Ответ: 1.

58. Решите неравенство $\dfrac{1}{|x-2|} > \dfrac{1}{|x+2|}$.

Ответ: $(0;2)\cup(2;+\infty)$.

59. Решите неравенство $|1-3x|^{\sqrt{5x^2+7x-2}} \geq |1-3x|^2$ при $x<0$.

Ответ: $(-\infty;-2]$.

60. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\left|x+|1-x|\right| > 3$.

Ответ: 3.

61. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{-x^2+2x+8}}{\left|x^2-7x+6\right|-\left|x^2-x-2\right|} \geq 0$.

Ответ: $\left[-2;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};2+\sqrt{2}\right)\cup\{4\}$.

62. Решите неравенство $\left|3x^3-2x^2-5x+1\right|\le x^3-2x^2-x+1$.

Ответ: $\left[0;\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$.

63. Решите неравенство $\left|\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right|>\left|\sqrt{x^2+x+1}+2x+2\right|$.

Ответ: $(-\infty;-0{,}75)$.

64. Решите неравенство

$$\left|4^{3x}-2^{4x+2}\cdot 3^{x+1}+20\cdot 12^x\cdot 3^x\right|\ge 8\cdot 6^x\cdot\left(8^{x-1}+6^x\right).$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup\left[\log_{\frac{4}{3}}4;\log_{\frac{4}{3}}7\right]\cup\left[\log_{\frac{4}{3}}12;+\infty\right)$.

65. Решите неравенство

$$\log_{|x-2|}\left(9^x-4^x\right)<\log_{|x-2|}\left(3^x+2^x\right)+\log_{|x-2|}\left(3^{x-2}+2^x\right).$$

Ответ: $(0;1)\cup(2;3)$.

66. Решите неравенство $\sin\left(1{,}5\pi\left(2^x+\sin 0{,}5\pi x\right)\right)+\left|3^x+3^{-x}-4\right|\le -1$.

Ответ: 0.

67. Решите неравенства с двумя переменными:

а) $x-|y|-\sqrt{x^2+y^2-1}\ge 1$.

Ответ: (1; 0).

б) $y-\dfrac{1}{|\cos x|}-\sqrt{1-y-x^2}\ge 0$.

Ответ: (0; 1).

68. Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства $\log_2(x-1)-\log_{0,5}\dfrac{|x-2|}{6-x}+\log_2\dfrac{(6-x)|x-2|}{x-1}>a$ содержится единственное целое число.

Ответ: $2\le a<\log_2 9$.

69. В зависимости от значений параметра a решите неравенства:

а) $\dfrac{x^2-2x+2^{|a|}}{x^2-a^2}>0$;

б) $\left|\dfrac{ax-5}{3}+x\right|<3$;

в) $|x-a|<3x-x^2-1$;

г) $|x-3a|-|x+a|<2a$;

д) $\left|x^2-a^2\right|>2a^2$;

е) $|x+2|-|2x+8|\ge a$.

Ответы:

а) если a = 0, то $x\ne 0, x\ne 1$; если $a\ne 0$, то $x<-|a|, x>|a|$;

б) если a < –3, то $\dfrac{14}{a+3}<x<-\dfrac{4}{a+3}$; если a = –3, то x – любое;

если a > –3, то $-\dfrac{4}{a+3}<x<\dfrac{14}{a+3}$;

в) если $a\le 0$, то решений нет; если $0<a\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, то $1-\sqrt{a}<x<1+\sqrt{a}$; если $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<a\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, то $2-\sqrt{3-a}<x<1+\sqrt{a}$; если $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<a<3$, то $2-\sqrt{3-a}<x<2+\sqrt{3-a}$; если $a\ge 3$, то решений нет;

г) если $a\in(-\infty;0)$, то $x\in(-\infty;2a)$; если a = 0, то $x\in\varnothing$; если $a\in(0;+\infty)$, то $x\in(0;+\infty)$;

д) если $a\in(-\infty;0)$, то $x\in\left(-\infty;a\sqrt{3}\right)\cup\left(-a\sqrt{3};+\infty\right)$; если a = 0, то $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; если $a\in(0;+\infty)$, то $x\in\left(-\infty;-a\sqrt{3}\right)\cup\left(a\sqrt{3};+\infty\right)$;

е) если $a<-4$, то $a-6\le x\le -a-6$; если $-4\le a\le 2$, то $a-6\le x\le -\frac{a+10}{3}$; если $a>2$, то решений нет; если a = 2, то единственное решение x = –4.

70. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых неравенство $x^2+2|x-b|\ge b^2$ справедливо для всех действительных x.

Ответ: [–1; 1].

71. При каких значениях параметра a имеет решения неравенство $|x-a|+(x+2a+1)^2\le 2$?

Ответ: $-\frac{13}{12}\le a\le \frac{5}{12}$.

72. При каких значениях параметра a неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет по крайней мере одно отрицательное решение?

Ответ: $-\frac{13}{4}<a<3$.

73. При каких значениях параметра a неравенство $|ax^2-ax+1|\le 1$ выполняется при всех x из промежутка [0; 1]?

Ответ: $0\le a\le 8$.

74. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $\log_2(x-100)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{|x-101|}{105-x}+\log_2\frac{|x-103|(105-x)}{x-100}>a$ содержится единственное целое число?

Ответ: $0\le a<\log_2 3$.

75. При каких значениях параметра a неравенство $|5\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a+1|\le 6$ выполняется для любых значений x?

Ответ: $-\frac{24}{5}\le a\le 0$.

76. При каких значениях параметра a неравенство $\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3$ выполняется для любых значений x?

Ответ: $-\frac{12}{5} \le a \le 0$.

77. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\left|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x\cos x + 3\cos^2 x - a + 1\right| \le 3$ выполняется для любых значений x.

Ответ: $1 \le a \le \frac{17}{5}$.

78. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\frac{a - 2^{2x-x^2}}{|x-3| - 2a + 4} < 0$ не имеет решений.

Ответ: $a = 2$.

79. При каких значениях параметра a неравенство $\left|5\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a + 1\right| \le 6$ выполняется для любого $x \in R$.

Ответ: $-\frac{24}{5} \le a \le 0$.

80. В зависимости от параметра a решите неравенство $\left|\operatorname{ctg}\left(ax - \frac{\pi}{4}\right)\right| \ge a$.

Ответ: если $a < 0$, то $x \in R$, но $x \ne \frac{\frac{\pi}{4} + \pi n}{a}$;

если $a = 0$, то $x \in R$;

если $a > 0$, то $\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi k}{a} < x \le \frac{\pi}{4a} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg} a + \frac{\pi k}{a}$;

$\frac{\pi}{4a} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(-a) + \frac{\pi m}{a} \le x < \frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a} + \frac{\pi m}{a}, l, n, m \in Z$.

81. При каком максимальном значении параметра b и любых значениях параметров a и c неравенство $|a| \cdot b \cdot \sin cx \le a^2 + 1$ выполняется для любого $x \in R$?

Ответ: $b = 2$.

82. Решите неравенство при различных значениях параметра a $|\sin(2x-4)| \le a$.

Ответ: $2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin a + \pi n \le x \le 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin a + \pi n$;

$2 - \frac{1}{2}\arcsin a + \pi k \le x \le 2 + \frac{1}{2}\arcsin a + \pi k, k, n \in Z$.

83. Решите неравенство $|\cos(x-2)| \ge a$, где a параметр, значения которого принадлежат интервалу (0;1).

Ответ: $2 - \arccos a + 2\pi n \le x \le 2 + \arccos a + 2\pi n$;

$2 + \arccos(-a) + 2\pi k \le x \le 2 + 2\pi - \arccos(-a) + 2\pi k, k, n \in Z$.

84. Решите неравенство $\operatorname{ctg}|2x-3| \le a$.

Ответ: $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} a + \frac{1}{2}\pi n \le x \le \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\pi n$;

$\frac{3}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\pi k < x \le \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} a - \frac{1}{2}\pi k, n, k \in Z$.

85. Решите неравенство $|\operatorname{tg}(3x-2)| \le a$, где a положительный параметр.

Ответ: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} a + \frac{1}{3}\pi n \le x \le \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} a + \frac{1}{3}\pi n, n \in Z$.

86. Решите неравенство $|\sin(2x+b)| \ge a$, где a и b – параметры, причем $|a| \le 1$.

Ответ: $-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\arcsin|a| + \pi n \le x \le -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\arcsin|a| + \frac{\pi}{2} + \pi n$;

$-\frac{b}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin|a| + \pi k \le x \le -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\arcsin|a| + \pi k, k, n \in Z$.

87. Каково наибольшее значение параметра a, при котором имеет решение неравенство $\sqrt{a^5}\left(8x-x^2-16\right)+\dfrac{\sqrt{a}}{8x-x^2-16}\geq -\dfrac{2a}{3}\left|\cos x\right|$?

Ответ: $a=\dfrac{1}{9}$.

88. При каких значениях параметра a неравенство $16x^2+axy-y\geq x-16y^2-\dfrac{1}{64}$ выполняется для всех пар чисел $(x,\ y)$ таких, что $|x| = |y|$?

Ответ: $a = 32$.

89. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $5x+7|x-a|+3|x+3|+6|x-3|>145$ выполняется для всех x.

90. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2}\right)$.

2) $\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$

Ответ: $(-6;4)$; $(2;1)$; $(0;-3)$.

3) $\begin{cases} |x-1|+y=4, \\ x-|y-2|=3. \end{cases}$

Ответ: $(x;5-x)$, где $x\geq 3$.

4) $\begin{cases} x+|y+1|=7, \\ |x-1|+y=5. \end{cases}$

Ответ: $(x;6-x)$, где $1\leq x\leq 7$.

5) $\begin{cases} |x+2|+|y|=2, \\ y+2=|x+2|. \end{cases}$

Ответ: $(t;t)$, где $-2 \le t \le 0$;

$(t;-t-4)$, где $-4 \le t \le -2$.

6) $\begin{cases} |x-3|+|y-2|=3, \\ y+|x-3|=5. \end{cases}$

Ответ: $(t;t+2)$, где $0 \le t \le 3$;

$(t;8-t)$, где $3 < t \le 6$.

7) $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: (0,5; 0,5); (0,5; –0,5);

(–0,5; 0,5); (–0,5; –0,5).

8) $\begin{cases} |x|+|y|=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Ответ: (1; 2); (1; –2); (–1; 2); (–1; –2);

(2; 1); (2; –1); (–2; 1); (–2; –1).

9) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{y}+\dfrac{y-3x}{x}=1, \\ x|y|+x^2+y^2=1+2x. \end{cases}$

Ответ: $(1;1)$; $\left(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$.

10) $\begin{cases} x^2-xy+4=0, \\ |x-2|+y^2-4y=0. \end{cases}$

Ответ: $(2;4)$.

11) $\begin{cases} \left|y+\dfrac{1}{x}\right|+\left|\dfrac{13}{6}+x-y\right|=\dfrac{13}{6}+x+\dfrac{1}{x}, \\ x^2+y^2=\dfrac{97}{36}. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{2}{3}\right)$; $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right)$.

12) $\begin{cases} \left|x+\dfrac{1}{y}\right|+\left|\dfrac{10}{3}-x+y\right|=\dfrac{10}{3}+y+\dfrac{1}{y}, \\ x^2+y^2=\dfrac{82}{9}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};-3\right)$; $\left(3;-\dfrac{1}{3}\right)$.

13) $\begin{cases} |x+1|+|y+1|=8, \\ 2x-|y+1|=5. \end{cases}$

Ответ: $(4;2)$; $(4;-4)$.

14) $\begin{cases} \log_{|x-y|}\dfrac{xy}{2}=2, \\ x-xy+y=1. \end{cases}$

Ответ: $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

15) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|\sin x|+\log_{|\sin x|}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\cos 2y, \\ \lg^2 y+2^{\sin z}=1. \end{cases}$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$;

$y=\pi m, m\in Z$;

$z=\pi n, n\in Z$.

16) $\begin{cases} y+|x+1|=1, \\ |y-x|=5. \end{cases}$

17) $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5, \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$

91. Сколько корней имеет система уравнений $\begin{cases} \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{x}=\sqrt{3}, \\ |x|\ge\dfrac{3}{11}. \end{cases}$

Ответ: семь.

92. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} |x^2+5x+4|-9x^2+5x+4-10x|x|=0, \\ x^2-2(a+1)x+a(a+2)=0 \end{cases}$ имеет только одно решение?

93. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} |x|+\log_2(4y+a^2)=3, \\ \log_a(x^2+1)+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

94. Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} \log_2(x+a)+2|y|=2, \\ \log_a(y^2+1)+|x|=2 \end{cases}$ будет иметь единственное решение.

95. При каких значениях параметра а имеет единственное решение система $\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-5a, \\ x^2+y^2=1? \end{cases}$

Ответ: $a=\dfrac{2}{5}$.

96. При каких значениях параметра a совместна система

$$\begin{cases} y(ax-1)=2|x+1|+2xy, \\ yx+1=x-y. \end{cases}$$

Ответ: $a>0,\ a\le -5-4\sqrt{2}$.

97. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = 2$.

98. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ |x| + |y| = a, \end{cases}$ является совместной?

Ответ: $1 \le a \le \sqrt{2}$.

99. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = \dfrac{4}{3}$.

100. При каких значениях параметра a имеют единственное решение системы:

а) $\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 2, \\ 2|x+1| + ay = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{x - |x|}, \\ (x+a)^2 + y + a = 3? \end{cases}$

101. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{|x| - x}, \\ (x-a)^2 + (y - 3a + 2)^2 = 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $a \in \left(0; \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

102. При каких значениях параметра a система неравенств имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} |x-2a| \le 5, \\ \log_2(x+a) \le 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_3(a+x) \le 1, \\ |a-x| \le 2? \end{cases}$

103. Решите смешанные системы уравнений и неравенств:

а) $\begin{cases} |x| + \log_5(2y+9) = 1, \\ \log_3(y^2+5) \le 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x \le 2, \\ \log_{|x-3|}(|x+2|-5) = 1. \end{cases}$

104. Изобразите на координатной плоскости xOy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $(x+|x|)^2 + (y-|y|)^2 \ge 1$.

Ответ: Объединение множеств точек $(x; y)$, описываемых системами неравенств $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2}, \\ y \ge 0, \\ x \le 0, \\ y \le -\frac{1}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} x > 0, \\ y < 0, \\ x^2 + y^2 \ge \frac{1}{4}. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. – Минск: «Асар», 1996.

2. Гайдуков И.И. Абсолютная величина. Пособие для учителя. Изд. 2. – М.: Просвещение, 1968.

3. Голубев В.И. Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике (но материалам ведущих вузов страны). – Львов: "Квантор", 1991.

4. Гущо Л.В.. Ильина М.С. Единый государственный экзамен. Математика: Учебное пособие. – М.: Изд-во «Московский Лицей», 2007.

5. Далингер В.А. Все для обеспечения успеха на выпускных и вступительных экзаменах но математике. Выпуск 3. Рациональные и иррациональные уравнения, неравенства и их системы: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1995.

6. Далингер В.А. Все для обеспечения успеха па выпускных и вступительных экзаменах по математике. Выпуск 4. Нестандартные уравнения, неравенства и методы их решения: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ. 1995.

7. Далингер В.А. Все для обеспечения успехи па выпускных и вступительных экзаменах но математике. Выпуск 5. Показательные, логарифмические уравнения, неравенства и их системы: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ. 1996.

8. Далингер В.А. Все для обеспечения успеха на выпускных и вступительных экзаменах по математике. Выпуск 6. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1996.

9. Далингер В.А. Начала математического анализа в задачах: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ГОУ ОмГПУ, 2009.

10. Далингер В.Л. Типичные ошибки по математике на вступительных экзаменах и как их не допускать. – Омск, Изд-во ОИУУ, 1991.

11. Денищева Л.О., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др. Единый государственный экзамен 2002: Контрольные измерительные материалы: – Математика. М.: Просвещение, 2002.

12. Денищева JI.О., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др. Единый государственный экзамен. Математика. – М.: Просвещение, 2003.

13. Денищева JI.О., Глазков Ю.А. Краснянская, Кузина Г.П., Семенов П.В. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому Государственному экзамену. Математика – М.: Интеллект-Центр, 2002.

14. Козко А.И. Математика. Письменный экзамен. Решение задач. Методы и идеи: учебное пособие / А.И. Козко, Ю.Н. Макаров, В.Г. Чирский. – М.: Изд-во «Экзамен», 2006.

15. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому государственному экзамену. – М.: Айрис-пресс. 2006.

16 Лапно Л.Д., Ионов М.А., Математика. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ: Учебное пособие. – М.: Изд-во «Экзамен», 2006.

17. Лапно Л.Д.. Филонов А.Н. Единый государственный экзамен. Математика. Типовые тестовые задания: Учебно-практическое пособие. – М.: «Экзамен», 2003.

18. Литвиненко В.П.. Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. Учебное пособие для студентов физ.-мат. специальностей институтов и учителей. Изд. 2, перер. и доп. – М.: Просвещение, 1991.

19. Лысенко Ф.Ф и др. Математика. ЕГЭ-2007. Вступительные экзамены. Пособия для самостоятельной подготовки. – Ростов-на-Дону: Изд-во «Легион», 2006.

20. Модуль действительного числа (основные свойства, эффективные схемы и методы решений уравнений и неравенств, примеры решения стандартных и нестандартных задач, сводка основных формул). Справочное пособие. Вып. 2. / В.И. Голубев, А.М. Гольдман, А.В. Портнов, А.Б. Петериков, Р.В. Разумейко. Под ред. Г.В. Шишкина. – Пущино: ОНТИ Пушкинский научный центр, 1992. (МГУ, Международная ассоциация «Лицей»).

21. Рурукин А.П. Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. Выпускной, вступительный, ЕГЭ на 5+. – М.: «ВАКО», 2006.

22. Фельдман Я.С., Жаржевский А.Я. Математика: Решение задач с модулями: Пособие для абитуриентов и старшеклассников. – СПб: ООО «Оракул», 1997.

23. Хазанкин Р.Г., Зильберберг Н.И. и др. Математическая подготовка и развитие школьников в условиях ЕГЭ / Под ред. Р.Г. Хазанкина. – 2-е изд. испр. – Уфа: Изд-во: НОУ «Уральский РЭК», 2004.

Виктор Алексеевич Далингер

Задачи с модулями: учебное пособие

Компьютерная верстка А.А. Козлова

Лицензия ЛР №020074

Подписано к печати	Формат 60 84/16
Бумага писчая	Ризография
Усл. печ. л.	Уч.-изд. л.
Тираж	Заказ

644099, г. Омск, Набережная Тухачевского, 14

ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»