М. В. ЛУРЬЕ, Б. И. АЛЕКСАНДРОВ

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990



ББК 22.141
Л86
УДК 512(075.4)

Лурье М. В., Александров В. И. Задачи на составление уравнений: Учеб. руководство.—3-е изд., перераб.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.—96 с.—ISBN 5-02-014250-6.

Посвящена традиционному разделу элементарной математики—задачам на составление уравнений. Выделяются и рассматриваются классы задач, объединенные общей идеей, анализируются особенности этих классов, показываются приемы решения задач каждого класса и дается методика решения более сложных задач. Содержит много задач для самостоятельного решения с ответами.

Большое количество примеров, взятых главным образом из письменных экзаменационных работ по математике Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, демонстрирует разнообразие идей, лежащих в основе этих задач, являющих собой своего рода маленькие математические загадки.

2-е изд.—1980 г.

Для широкого круга читателей, любящих решать задачи вообще. Будет особенно полезна абитуриентам вузов, школьникам и учителям.

Л $\frac{1602010000—010}{053(02)-90}$ 61-90

ISBN 5-02-014250-6

© «Наука».
Физматлит, 1976; 1980;
с изменениями, 1990

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4
§ 1. Задачи, связанные с понятиями «концентрация» и «процентное содержание» 5
§ 2. Задачи «на движение» 20
§ 3. Задачи, в которых число неизвестных превышает число уравнений системы 32
§ 4. Задачи, которые решаются при помощи неравенств . . 39
§ 5. Задачи с целочисленными неизвестными 47
§ 6. Задачи с альтернативным условием 53
§ 7. Задачи, в которых нужно находить наибольшие и наименьшие значения некоторых выражений 61
§ 8. Разные задачи. 75

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи на составление уравнений, или текстовые алгебраические задачи, представляют собой традиционный раздел элементарной математики. Интерес к нему вполне понятен. Решение задач подобного рода способствует развитию логического мышления, сообразительности и наблюдательности, умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования.

Настоящая книга призвана помочь учащимся и особенно тем из них, кто собирается поступать в высшие учебные заведения, разобраться в типах и методах решения таких задач. Задачи, послужившие примерами к изложенному в настоящей книге материалу, заимствованы большей частью из вариантов вступительных экзаменов в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова. Эти варианты составлены различными авторами, преподавателями и сотрудниками университета. В конце каждого параграфа и в разделе «Разные задачи» содержатся задачи для самостоятельного решения, которые помогут проверить, насколько усвоен прочитанный материал.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность М. И. Шабунину, рецензенту первого издания книги, за ценные советы, способствовавшие значительному улучшению рукописи, а также В. Г. Туринге, чьи замечания помогли устранить имеющиеся неточности.

§ 1. ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОНЯТИЯМИ «КОНЦЕНТРАЦИЯ» И «ПРОЦЕНТНОЕ СОДЕРЖАНИЕ»

Рассматривая задачи на составление уравнений, остановимся прежде всего на тех, решение которых связано с использованием понятий «концентрация» и «процентное содержание». Обычно в условиях таких задач речь идет о составлении сплавов, растворов или смесей двух или нескольких веществ.

Основные допущения, как правило, принимаемые в задачах подобного рода, состоят в следующем:

а) все получающиеся сплавы или смеси однородны;

б) при слиянии двух растворов, имеющих объемы V_1 и V_2, получается смесь, объем которой равен V_1+V_2, т. е.

$$V_0=V_1+V_2,$$

причем последнее соотношение является именно допущением, поскольку не всегда выполняется в действительности; при слиянии двух растворов не объем, а масса смеси равняется сумме масс составляющих ее компонент.

Рассмотрим для определенности смесь трех компонент A, B и C. Объем смеси V_0 складывается из объемов чистых компонент:

$$V_0=V_A+V_B+V_C,$$

а три отношения,

$$c_A=\frac{V_A}{V_0},\quad c_B=\frac{V_B}{V_0},\quad c_C=\frac{V_C}{V_0},$$

показывают, какую долю полного объема смеси составляют объемы отдельных компонент:

$$V_A=c_AV_0,\quad V_B=c_BV_0,\quad V_C=c_CV_0.$$

Отношение объема чистой компоненты (V_A) в растворе ко всему объему смеси (V_0)

$$c_A = \frac{V_A}{V_0} = \frac{V_A}{V_A + V_B + V_C} \qquad (*)$$

называется *объемной концентрацией* этой компоненты.

Концентрации — это безразмерные величины; сумма концентрации всех компонент, составляющих смесь, очевидно, равна единице:

$$c_A + c_B + c_C = 1.$$

Поэтому для того, чтобы структура раствора, состоящего из n компонент, была определена, достаточно знать концентрацию $(n-1)$-й компоненты.

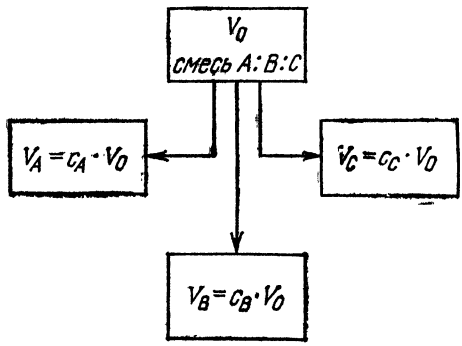


Рис. 1

Если известны концентрации c_A, c_B и c_C компонент, составляющих данную смесь, то ее объем можно разделить на объемы отдельных компонент (рис. 1):

$$V_0 = c_A V_0 + c_B V_0 + c_C V_0. \qquad (1)$$

Объемным процентным содержанием компоненты A называется величина

$$p_A = c_A \cdot 100\%,$$

т. е. концентрация этого вещества, выраженная в процентах.

Если известно процентное содержание вещества A, то его концентрация находится по формуле

$$c_A = \frac{p_A}{100}.$$

Так, например, если процентное содержание составляет 70 %, то соответствующая концентрация равна 0,7. Процентному содержанию 10 % соответствует концентрация 0,1 и т. д.

Таким же способом определяются и массовые концентрация и процентное содержание, а именно, как отношение массы чистого вещества A в сплаве к массе всего сплава. О какой концентрации, объемной или массовой, идет речь в конкретной задаче, всегда ясно из ее условия.

Встречается сравнительно немного задач, в которых приходится пересчитывать объемную концентрацию на массовую или наоборот. Для того чтобы это сделать, необходимо знать плотности компонент, составляющих раствор или сплав. Рассмотрим для примера двухкомпонентную смесь с объемными концентрациями компонент c_1 и c_2 $(c_1+c_2=1)$ и плотностями компонент ρ_1 и ρ_2. Масса смеси может быть найдена по формуле

$$M=V_1\rho_1+V_2\rho_2,$$

в которой V_1 и V_2 — объемы составляющих смесь компонент. Массовые концентрации компонент находятся из равенств

$$k_1=\frac{V_1\rho_1}{V_1\rho_1+V_2\rho_2}=\frac{c_1\rho_1}{c_1\rho_1+c_2\rho_2}=\frac{c_1\rho_1}{c_1(\rho_1-\rho_2)+\rho_2},$$

$$k_2=\frac{V_2\rho_2}{V_1\rho_1+V_2\rho_2}=\frac{c_2\rho_2}{c_1\rho_1+c_2\rho_2}=\frac{c_2\rho_2}{\rho_1+c_2(\rho_2-\rho_1)},$$

которые определяют связь этих величин с объемными концентрациями.

Как правило, в условиях задач рассматриваемого типа встречается один и тот же повторяющийся элемент: из двух или нескольких смесей, содержащих компоненты A_1, A_2, A_3, ..., A_n, составляется новая смесь путем перемешивания исходных смесей, взятых в определенной пропорции. При этом требуется найти, в каком отношении компоненты A_1, A_2, A_3, ..., A_n войдут в получившуюся смесь.

Для решения таких задач удобно ввести в рассмотрение объем или массу каждой смеси, а также концентрации составляющих их компонент A_1, A_2, A_3, ..., A_n. С помощью концентраций нужно «расщепить» каждую смесь на отдельные компоненты, как это сделано в формуле (1), а затем указанным в условии задачи способом составить новую смесь. При этом легко подсчитать, какой объем (какая масса) каждой компоненты входит в получившуюся смесь, а также полный объем (полную массу) этой смеси. После этого определяются концентрации компонент $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в новой смеси.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере следующей задачи.

Задача. *Имеются два куска сплава меди и цинка с массовым процентным содержанием меди p % и q % соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий r % меди?*

Решение. Составим иллюстративный рисунок к этой задаче (рис. 2). Концентрация меди в первом сплаве равна $p/100$, во втором — $q/100$.

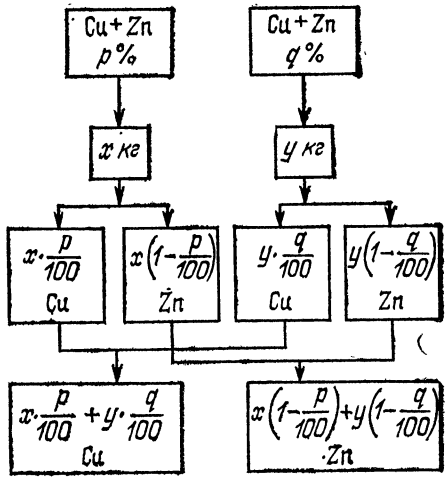


Рис. 2

Если первого сплава взять x кг, а второго y кг, то с помощью массовых концентраций можно «расщепить» эти величины на отдельные составляющие:

$$x = x\cdot\frac{p}{100}\ \text{(кг меди)} + x\left(1-\frac{p}{100}\right)\ \text{(кг цинка)}$$

и

$$y = y\cdot\frac{q}{100}\ \text{(кг меди)} + y\left(1-\frac{q}{100}\right)\ \text{(кг цинка)}.$$

Масса меди в получившемся сплаве равна

$$x\cdot\frac{p}{100}+y\cdot\frac{q}{100}\ \text{(кг меди)},$$

а масса этого сплава составит $(x+y)$ кг. Поэтому новая концентрация меди в сплаве, согласно определению, равна

$$\frac{x\cdot\frac{p}{100}+y\cdot\frac{q}{100}}{x+y}.$$

По условию задачи эта концентрация должна равняться $r/100$. Поэтому получаем уравнение

$$\frac{x\cdot\frac{p}{100}+y\cdot\frac{q}{100}}{x+y}=\frac{r}{100},$$

или

$$\frac{px+qy}{x+y}=r.$$

Решим полученное уравнение. Прежде всего заметим, что уравнение содержит два неизвестных x и y. Нетрудно понять, что оба неизвестных однозначно не находятся. Концентрация получающегося сплава определяется не массой взятых кусков, а отношением этих масс. Поэтому в задаче и требуется определить не сами величины x и y, а только их отношение.

Отметим попутно, что дроби вида

$$F(x,\ y)=\frac{ax+by}{cx+dy}$$

часто встречаются в задачах на составление уравнений. В числителе и знаменателе такой дроби стоят линейные однородные выражения, зависящие от x и y. Если не рассматривать случай $y=0$, то функция $F(x,\ y)$ зависит фактически только от одной переменной, а именно, от отношения $\frac{x}{y}$:

$$F(x,\ y)=\frac{a\cdot\frac{x}{y}+b}{c\cdot\frac{x}{y}+d}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

При этом уравнение $F(x,\ y)=C$ позволяет найти это отношение.

Запишем уравнение задачи в следующем виде:

$$x(p-r)=y(r-q).$$

Рассмотрим возможные случаи:

1) $p=r=q$.

В этом случае концентрации всех сплавов одинаковые и уравнение показывает, что имеется бесчисленное множество решений. Можно взять сколько угодно первого сплава и сколько угодно второго сплава.

2) $p=r\neq q$.

В этом случае уравнение приобретает вид

$$x\cdot 0=y(r-q),$$

откуда находим: x — любое, $y=0$. Физический смысл этого решения понятен: если концентрация сплава, который требуется получить, совпадает с концентрацией первого сплава, но не равна концентрации второго сплава, то первого сплава можно взять сколько угодно, а второго сплава не брать вовсе.

3) $p \neq r = q$.

Получаем уравнение

$$x(p-r) = y \cdot 0,$$

откуда находим: y — любое, $x=0$.

4) $p \neq r$, $p \neq q$, $q \neq r$.

В этом случае можно написать

$$x = y\frac{r-q}{p-r}.$$

Поскольку $y \neq 0$, то

$$\frac{x}{y} = \frac{r-q}{p-r}.$$

Это значение будет давать решение задачи, если выполняется неравенство

$$\frac{r-q}{p-r} > 0,$$

которое, как нетрудно показать, имеет место, если значение r заключено между значениями p и q. Таким образом, если $p \neq q$, то можно получить сплав с любым процентным содержанием меди между p и q.

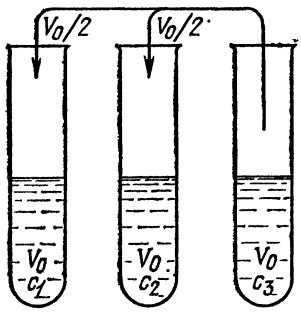


Рис. 3

Несмотря на то, что этот пример весьма простой, он достаточно хорошо иллюстрирует основной метод решения задач, связанных со смесями.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача. *Три одинаковые пробирки наполнены до половины растворами спирта. После того как содержимое третьей пробирки разлили поровну в первые две, объемная концентрация спирта в первой уменьшилась на* 20 % *от первоначальной, а во второй увеличилась на* 10 % *от первоначального значения. Во сколько раз первоначальный*

объем спирта в первой пробирке превышал первоначальный объем спирта во второй пробирке?

Решение. Введем в рассмотрение объем половины пробирки V_0 и концентрации растворов спирта в каждой из пробирок c_1 и c_2. Тогда первоначальный объем спирта в первой пробирке равен V_0c_1, во второй V_0c_2, в третьей V_0c_3 (рис. 3). Для того чтобы решить задачу, подсчитаем объемы спирта в первой и второй пробирках после того, как туда добавят содержимое третьей пробирки. Эти объемы будут равны: в первой пробирке

$$V_0c_1+\frac{1}{2}V_0c_3,$$

во второй пробирке

$$V_0c_2+\frac{1}{2}V_0c_3.$$

Найдем новые концентрации спирта в этих пробирках. Для первой пробирки она равна

$$c_1^*=\frac{V_0c_1+\frac{1}{2}V_0c_3}{\frac{3}{2}V_0},$$

для второй

$$c_2^*=\frac{V_0c_2+\frac{1}{2}V_0c_3}{\frac{3}{2}V_0}.$$

По условию задачи $c_1^*=0{,}8c_1$ и $c_2^*=1{,}1c_2$. Тогда имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}c_1+\frac{1}{3}c_3=0{,}8c_1,\\ \frac{2}{3}c_2+\frac{1}{3}c_3=1{,}1c_2,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}2c_1-5c_3=0,\\ 13c_2-10c_3=0.\end{cases}$$

Из этой системы, так же как и в предыдущей задаче, нельзя определить все три концентрации c_1, c_2 и c_3. Но благодаря тому, что уравнения системы представляют собой однородные линейные выражения, из нее можно найти отношения двух концентраций к третьей, например

c_1/c_3 и c_2/c_3:

$$m=\frac{c_1}{c_3}=\frac{5}{2}, \quad n=\frac{c_2}{c_3}=\frac{10}{13}.$$

Объем спирта в первой пробирке относится к объему спирта во второй пробирке как m/n. Действительно,

$$\frac{V_0c_1}{V_0c_2}=\frac{m}{n}=\frac{13}{4}.$$

Ответ. В 3,25 раза.

Обратимся теперь к задачам, которые можно объединить в одну группу из-за того, что их решение связано с выявлением общей закономерности изменения той или иной величины в результате многократно повторяющейся операции

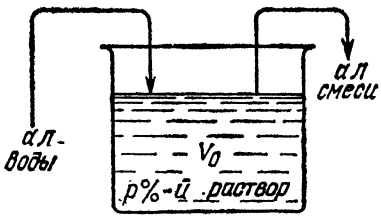


Рис. 4

Рассмотрим следующий пример.

В сосуде, объем которого равен V_0 л, содержится p %-й раствор соли (рис. 4). Из сосуда выливается a л смеси и доливается a л воды, после чего раствор перемешивается. Эта процедура повторяется n раз. Спрашивается, по какому закону меняется концентрация соли в сосуде, т. е. какова будет концентрация соли после n процедур?

Решение. Очевидно, что первоначальный объем соли в растворе равен

$$\frac{p}{100}\cdot V_0.$$

После того как отлили a л смеси, в растворе осталось

$$\frac{p}{100}\cdot V_0-\frac{p}{100}\cdot a=\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)$$

литров соли, а ее концентрация после добавления a л воды стала равной

$$c_1=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right).$$

После того как отлили еще a л смеси (но уже с концентрацией c_1), в растворе осталось соли

$$\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)-c_1\cdot a=\frac{p}{100}\cdot V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2,$$

а ее концентрация после добавления a л воды стала равной

$$c_2 = \frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2.$$

Нет надобности еще раз проделывать ту же процедуру, чтобы убедиться, что концентрация соли в растворе после n переливаний определяется формулой

$$\boxed{c_n = \frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n}, \qquad (2)$$

представляющей собой убывающую геометрическую прогрессию. Множитель

$$1-\frac{a}{V_0},$$

являющийся знаменателем этой прогрессии, показывает, во сколько раз убывает концентрация после очередного переливания.

Пример 1. *Пусть значение величины a/V_0 известно. После скольких переливаний концентрация соли в растворе уменьшится более чем в k раз?*

Решение. Используя формулу (2) для концентрации соли в растворе после n переливаний, получаем

$$\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n < \frac{1}{k}\cdot\frac{p}{100}.$$

Отсюда находим

$$n > \log_{1-a/V_0}\frac{1}{k}.$$

Наименьшее количество таких переливаний равно целой части числа $\log_{1-a/V_0}\frac{1}{k}$ плюс единица.

Пример 2. *Известно, что после n переливаний концентрация соли в растворе уменьшилась в k раз. Определить, какую часть объема сосуда составляют a л.*

Решение. Согласно формуле (2) имеем

$$\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n = \frac{1}{k}\cdot\frac{p}{100},$$

или

$$\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n = \frac{1}{k}.$$

Отсюда находим отношение a/V_0:

$$\frac{a}{V_0}=1-\frac{1}{\sqrt[n]{k}}.$$

Пример 3. *В каждом из двух сосудов находится по V_0 л кислоты одинаковой концентрации. Из первого сосуда отлили a л раствора и долили a л воды. Потом эту процедуру повторили еще раз. Из второго сосуда отлили $2a$ л раствора и долили $2a$ л воды. Потом эту процедуру повторили еще раз. Известно, что концентрация кислоты в первом сосуде оказалась в 25/16 раза больше, чем концентрация кислоты во втором сосуде. Какую часть от объема сосуда составляют a л?*

Решение. Используя полученные выше результаты, имеем

$$\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2=\frac{25}{16}\cdot\frac{p}{100}\left(1-\frac{2a}{V_0}\right)^2,$$

или

$$\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2=\frac{25}{16}\left(1-\frac{2a}{V_0}\right)^2.$$

Из этого уравнения находим отношение a/V_0. Извлекая из обеих частей уравнения арифметический корень, получаем

$$\left|1-\frac{a}{V_0}\right|=\frac{5}{4}\left|1-\frac{2a}{V_0}\right|.$$

Поскольку $a/V_0<1$ и $2a/V_0<1$, то

$$1-\frac{a}{V_0}=\frac{5}{4}\left(1-2\cdot\frac{a}{V_0}\right).$$

Отсюда находим искомое отношение:

$$\frac{a}{V_0}=\frac{1}{6}.$$

Ответ. 1/6 часть.

Приведем обобщение формулы (2) на случай, когда каждый раз в сосуд доливается не вода, а раствор той же соли с постоянной концентрацией $q/100$, т. е. речь идет о следующей задаче: в сосуде объемом V_0 л содержится p %-й раствор соли. Из сосуда выливается a л смеси и доливается столько же литров q %-го раствора соли, после чего раствор перемешивается. Спрашивается, по какому закону меняется концентрация соли в сосуде, т. е. какова будет концентрация после n процедур?

Окончательное решение имеет вид

$$\boxed{c_n=\frac{p}{100}+\frac{p-q}{100}\left[\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n-1\right].} \qquad (3)$$

Для доказательства этой формулы обозначим концентрацию раствора соли, который содержится в сосуде после n переливаний, через c_n. Тогда после очередной $(n+1)$-й процедуры, которая состоит в том, что выливают a л раствора с концентрацией c_n и доливают a л q%-го раствора, концентрация соли становится равной c_{n+1}:

$$c_{n+1}=\frac{V_0c_n-ac_n+a\frac{q}{100}}{V_0},$$

или

$$c_{n+1}=\left(1-\frac{a}{V_0}\right)c_n+\frac{a}{V_0}\cdot\frac{q}{100}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Постараемся определить концентрацию c_n из полученного соотношения. При этом будем учитывать, что начальное значение концентрации известно:

$$c_0=\frac{p}{100} \text{ при } n=0.$$

Запишем следующие два равенства:

$$c_{n+1}=\left(1-\frac{a}{V_0}\right)c_n+\frac{a}{V_0}\cdot\frac{q}{100},$$

$$c_n=\left(1-\frac{a}{V_0}\right)c_{n-1}+\frac{a}{V_0}\cdot\frac{q}{100}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Вычитая эти выражения почленно друг из друга, получим

$$c_{n+1}-c_n=\left(1-\frac{a}{V_0}\right)(c_n-c_{n-1}).$$

Если обозначить разность концентраций c_n-c_{n-1} через u_n, последнее равенство можно переписать в более простом виде:

$$u_{n+1}=\left(1-\frac{a}{V_0}\right)u_n,$$

или

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(1-\frac{a}{V_0}\right).$$

Отсюда видно, что последовательность чисел u_n образует геометрическую прогрессию со знаменателем $1-\frac{a}{V_0}$:

$$u_n=u_1\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^{n-1}.$$

Первый член этой прогрессии легко определяется:

$$u_1=c_1-c_0=\left[\left(1-\frac{a}{V_0}\right)\frac{p}{100}+\frac{a}{V_0}\cdot\frac{q}{100}\right]-\frac{p}{100},$$

$$u_1=\frac{q-p}{100}\cdot\frac{a}{V_0}.$$

После этого находим

$$u_n = \frac{q-p}{100} \cdot \frac{a}{V_0} \left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^{n-1},$$

или

$$c_n - c_{n-1} = \frac{q-p}{100} \cdot \frac{a}{V_0} \left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^{n-1}.$$

Запишем последнее равенство для значений n, равных $1, 2, \ldots, n$, и сложим получающиеся соотношения между собой:

$$c_1 - c_0 = \frac{q-p}{100} \cdot \frac{a}{V_0} \cdot 1,$$

$$c_2 - c_1 = \frac{q-p}{100} \cdot \frac{a}{V_0} \cdot \left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^1$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_n - c_{n-1} = \frac{q-p}{100} \cdot \frac{a}{V_0} \cdot \left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^{n-1}$$

$$c_n - c_0 = \frac{q-p}{100} \cdot \frac{a}{V_0} \frac{\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n - 1}{\left(1 - \frac{a}{V_0}\right) - 1},$$

или

$$c_n = c_0 + \frac{p-q}{100} \left[\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n - 1\right].$$

При сложении правых частей рассматриваемых равенств использовалась формула для суммы членов геометрической прогрессии.

Подставляя вместо c_0 ее значение $p/100$, получим формулу (3). Заметим, что при $q=0$ эта формула переходит в ранее полученную формулу (2).

Формула (2) тесно связана с известным в теории процентов правилом начисления *«сложных процентов»*.

Мы говорим, что имеем дело со «сложными процентами», в том случае, когда некоторая величина подвержена поэтапному изменению. При этом каждый раз ее изменение составляет определенное число процентов от значения, которое эта величина имела на предыдущем этапе.

Рассмотрим сначала случай, когда в конце каждого этапа величина изменяется на одно и то же постоянное число p процентов.

Некоторая величина A, исходное значение которой равно A_0, в конце первого этапа будет равна

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

В конце второго этапа ее значение станет равным

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_1 = A_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Здесь множитель $1+\frac{p}{100}$ показывает, во сколько раз величина увеличилась за один этап. В предыдущих задачах о концентрациях эту роль играл множитель $1-\frac{a}{V_0}$.

В конце третьего этапа

$$A_3 = A_2 + \frac{p}{100} A_2 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

и т. д.

Нетрудно понять, что в конце n-го этапа значение величины A определяется формулой

$$\boxed{A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.} \qquad (4)$$

Эта формула показывает, что значение величины A растет (или убывает, если $p < 0$) как геометрическая прогрессия, первый член которой равен A_0, а знаменателем прогрессии служит величина

$$1 + \frac{p}{100}.$$

Формула (4) является исходной формулой при решении многих задач на проценты.

Пример. *Сберкасса выплачивает* 3 % *годовых. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?*

Решение. Пусть вклад составляет A_0 руб. Тогда через n лет размер вклада станет равным $2A_0$ руб. Имеем

$$A_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n = 2A_0,$$

$$n = \log_{1,03} 2 \approx 23.$$

Ответ. Через 23 года.

Формула (4) имеет интересное приложение. Во многих областях практики имеются величины, которые испытывают приращение не скачкообразным образом, а меняются непрерывно, так что их изменение за этап составляет p %.

Нетрудно определить, как меняются эти величины, если начисление процентов производить в течение каждого этапа не один раз, а m раз из расчета p % за этап (т. е. каждый раз начислять по p/m %). Легко понять, что за n этапов начисление процентов произойдет mn раз.

Воспользовавшись формулой (4), получаем

$$A_n(m) = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{mn}.$$

Здесь $A_n(m)$ — значение величины A в конце n-го этапа при условии, что в течение каждого этапа проценты начислялись m раз.

Неограниченно увеличивая число m, мы переходим к рассмотрению непрерывного изменения величины A. Тогда предельное значение величины A в конце n-го этапа определится формулой

$$A_n = \lim_{m \to \infty} \left[A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{mn} \right].$$

Таким образом, задача о непрерывном начислении процентов приводит к необходимости вычислить один из замечательных пределов математики. Этот предел обозначается буквой e и является основанием *натуральных логарифмов*:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2{,}7182\ldots$$

Окончательный вид рассматриваемой формулы такой:

$$A_n = A_0 e^{\frac{p}{100} n}.$$

Показательная функция, стоящая в правой части последней формулы, называется *экспонентой*.

В заключение этого параграфа приведем обобщение формулы (4) на случай, когда прирост величины A на каждом этапе свой.

Пусть величина A в конце первого этапа испытывает изменение на $p_1\%$, в конце второго этапа — на $p_2\%$, в конце третьего этапа — на $p_3\%$ и т. д. Если $p_k > 0$, то величина A на этом этапе возрастает; если $p_k < 0$, то величина A на этом этапе убывает.

Как говорилось выше, изменение величины A на $p\%$ равносильно умножению этой величины на множитель $1 + \frac{p}{100}$. Поэтому окончательный вид искомой формулы такой:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \ldots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right). \qquad (5)$$

Здесь A_0 — первоначальное значение величины A.

Иногда в задачах на составление уравнений встречается понятие «средний процент прироста». Под этим термином понимают такой постоянный процент прироста, который за n этапов давал бы такое же изменение величины A, которое она получает в действительности, при неравных поэтапных процентах изменения.

Средний процент прироста $q\%$ определяется формулой

$$A_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \ldots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{q}{100}\right)^n,$$

или

$$\frac{q}{100}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{p_n}{100}\right)}-1.$$

Отсюда видно, что средний процент прироста не равен среднему арифметическому величин p_1, p_2, ..., p_n. Здесь существует полная аналогия с определением известного из физики понятия «средняя скорость движения».

Пример. *Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4 %. На следующий год она увеличилась на 8 %. Определить средний ежегодный прирост продукции за этот период.*

Решение. Обозначим средний ежегодный прирост продукции через q %. Тогда

$$\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{8}{100}\right)=\left(1+\frac{q}{100}\right)^2.$$

Отсюда находим

$$q=\sqrt{104\cdot 108}-100\approx 5{,}98.$$

Упражнения

1. В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70 %-го раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90 %-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился r %-й раствор серной кислоты? Найти все r, при которых задача имеет решение.

Ответ. $\frac{4r-280}{90-r}$, $70\leqslant r\leqslant 76\frac{2}{3}$.

2. Из двух жидкостей, плотности которых равны 2 г/см³ и 3 г/см³ соответственно, составлена смесь. Сколько граммов каждой жидкости взято и какова плотность смеси, если 4 см³ смеси весят в десять раз меньше, чем вся первая жидкость, а 50 см³ смеси весят столько же, сколько вся вторая жидкость, входящая в ту же смесь?

Ответ. 1080/11 г, 1350/11 г, 27/11 г/см³.

3. Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора вдвое больше по массе, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго раствора испарилось по 200 г воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по массе, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?

Ответ. 5 г и 20 г.

4. Имеются три смеси, составленные из трех элементов A, B и C. В первую смесь входят только элементы A и B в весовом отношении 3 : 5, во вторую смесь входят только элементы B и C в весовом отношении 1 : 2, в третью смесь входят только элементы A и C в весовом отношении 2 : 3. В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы A, B и C содержались в весовом отношении 3 : 5 : 2?

Ответ. 20 : 6 : 3.

5. Три одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из второго и третьего сосудов отливают по a л (строго больше половины) спирта и доливают водой. Затем из третьего сосуда отливают a л смеси и доливают его водой. После этого объем спирта в первом и втором сосудах, вместе взятых, в 6/5 раза больше, чем объем спирта в первом и третьем сосудах, вместе взятых. Какую часть объема сосуда составляют a л?

Ответ. 2/3.

6. В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинают поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получился 5 %-й раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара получили бы 10 %-й раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.

Ответ. Первая труба подает жидкость быстрее в два раза.

7. Выработка продукции за первый год работы предприятия возросла на p %, а за следующий год по сравнению с первоначальной она возросла на 10 % больше, чем за первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59 %.

Ответ. На 17 %.

8. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

Ответ. 10 %.

9. В оленеводческом совхозе стадо увеличивается в результате естественного прироста и приобретения новых оленей. В начале первого года стадо составляло 3000 голов, в конце года совхоз купил 700 голов. В конце второго года стадо составляло 4400 голов. Определить процент естественного прироста.

Ответ. 10 %.

10. Смесь равных объемов двух веществ имеет массу $6\frac{2}{13}$ г. Масса второго вещества в смеси равна массе 52/7 см^3 первого вещества, а плотность второго вещества равна 1 г/см^3. Найти объем каждого вещества в смеси.

Ответ. 4 см^3.

§ 2. ЗАДАЧИ «НА ДВИЖЕНИЕ»

Рассмотрим теперь задачи на составление уравнений, которые условно можно назвать задачами «на движение». Система уравнений, которую необходимо составить на основании условий этих задач, обычно содержит такие параметры движения, как пройденное расстояние (s, l, r), скорости движущихся тел (u, v, w), время движения (t, T). Следует заметить, что обозначение тех или иных неизвестных обычно принятыми для них в физике буквами концентрирует внимание на существе задачи, делает систему урав-

нений более понятной для решающего задачу, исключает случайные ошибки, которые могут возникать из-за безликости введенных обозначений.

Допущения, которые обычно принимаются (если не оговорено противное) в условиях задач «на движение», состоят в следующем:

а) движение на отдельных участках считается равномерным; при этом пройденный путь определяется по формуле

$$s = vt;$$

б) повороты движущихся тел принимаются мгновенными, т. е. происходят без затрат времени; скорость при этом также меняется мгновенно;

в) если тело движется по течению реки, то его скорость w слагается из скорости в стоячей воде v и скорости течения реки u:

$$w = v + u,$$

а если против течения реки, то его скорость равна

$$w = v - u.$$

Если в условии задачи речь идет о движении плотов, то этим хотят сказать, что тело движется со скоростью течения реки.

К задачам «на движение» относятся также и задачи, в которых кто-либо выполняет какую-нибудь работу, или задачи, связанные с наполнением и опорожнением резервуаров. В задачах такого типа работа или объем резервуара играет роль расстояния, а производительности объектов, совершающих работу, аналогичны скоростям движения.

В задачах на составление уравнений вообще и в первую очередь в задачах «на движение» полезно составить иллюстративный чертеж. Этот чертеж следует делать таким, чтобы на нем была видна динамика движения со всеми характерными моментами — встречами, остановками и поворотами. Хороший чертеж позволяет понять содержание задачи, не заглядывая в ее текст. Примеры таких чертежей приведены ниже.

При решении задач «на движение» часто встречаются следующие два элемента:

а) движение навстречу друг другу (рис. 5); если первоначальное расстояние между двумя точками, движущимися навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2, равно s_0, то

время, через которое они встретятся, равно

$$T = \frac{s_0}{v_1 + v_2};$$

б) движение в одном направлении (рис. 6); если первоначальное расстояние между двумя точками, из которых

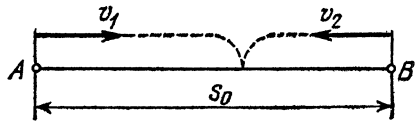


Рис. 5

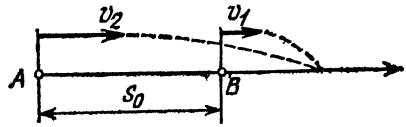


Рис. 6

одна догоняет другую, равно s_0, то время, через которое вторая точка (скорость v_2) догонит первую (скорость v_1), равно

$$T = \frac{s_0}{v_2 - v_1} \qquad (v_2 > v_1).$$

Рассмотрим теперь методику составления уравнений по тексту задачи. Сделаем это на конкретных примерах.

Задача. *Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В* 9 ч *утра из города A в город B отправляется плот и одновременно*

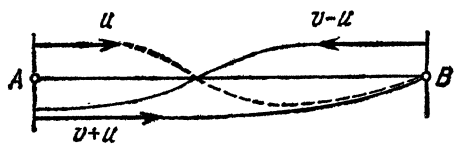


Рис. 7

из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 ч. *Доплыв до города A, лодка поворачивает обратно и приплывает в город B одновременно с плотом. Успеют ли лодка и плот прибыть в город B к* 9 ч *вечера (того же дня)?*

Решение. Ознакомившись с условием этой задачи, составим следующий чертеж (рис. 7).

Выделим из условия задачи предложения, математическая запись которых образует уравнения. Их два:

лодка и плот отправляются одновременно и встречаются через 5 часов;

лодка возвращается в город B одновременно с плотом.

Для математической записи этих предложений нужно решить вопрос, какие неизвестные ввести в рассмотрение. В основу выбора неизвестных может быть положен простой принцип: неизвестные следует вводить так, чтобы с их помощью наиболее легко записать в виде уравнений имеющиеся в задаче условия. При этом вовсе не обязательно, чтобы величина, которую требуется определить, фигурировала в числе неизвестных.

Например, в рассматриваемой задаче такие параметры, как расстояние между городами s, скорость течения реки (и плота) u и скорость лодки в стоячей воде v, позволяют очень просто записать все имеющиеся условия.

Условие задачи	Уравнение
Лодка и плот отправляются одновременно и встречаются через 5 ч	$\frac{s}{u+(v-u)}=5 \quad (v>u)$
Лодка возвращается в B одновременно с плотом	$\frac{s}{u}=\frac{s}{v-u}+\frac{s}{v+u}$

В последнем уравнении отношение s/u представляет собой время движения плота, $s/(v-u)$ — время движения лодки вверх по течению, $s/(v+u)$ — время движения лодки вниз по течению реки.

Таким образом, получается система двух уравнений с тремя неизвестными. Ясно, что все три неизвестных s, u и v из этой системы двух уравнений однозначно найти нельзя. Поэтому обратимся еще раз к условию задачи. Что же требуется определить? В задаче спрашивается, успеют ли лодка и плот приплыть в город B к 9 ч вечера, т. е. больше или меньше 12 ч время движения лодки. Поскольку это время равно s/u, то выясняется, что нужно определить не сами неизвестные s и u, а только их отношение, величину s/u.

Систему уравнений задачи можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{s}{v}=5, \\ \frac{1}{u}=\frac{1}{v-u}+\frac{1}{v+u}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{s}{v}=5, \\ \frac{1}{u/v}=\frac{1}{1-u/v}+\frac{1}{1+u/v}. \end{cases}$$

Таким образом, эта система фактически содержит только два неизвестных: s/v и u/v.

Из второго уравнения определяется значение отношения u/v. Оно равно $\sqrt{2}-1$. Таким образом, имеем

$$\frac{s}{v}=5, \quad \frac{u}{v}=\sqrt{2}-1.$$

После этого сразу определяется отношение s/u:

$$\frac{s}{u}=\frac{s/v}{u/v}=\frac{5}{\sqrt{2}-1}=5(\sqrt{2}+1)>12.$$

Значит, лодка и плот не успеют приплыть в пункт B к 9 ч вечера того же дня.

Замечание. Условие этой задачи не содержит величин, имеющих размерность длины. Поэтому здесь можно было бы обозначить расстояние между городами через 1. Фактически это означало бы, что расстояние между городами выбрано за единицу измерения длины. Тогда из первого уравнения находится скорость движения лодки и затем время движения $1/u$.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача. *Два велосипедиста и пешеход одновременно отправились из пункта A в пункт B. Более чем через час после выезда у первого велосипедиста сломался велосипед, и он продолжал путь пешком, двигаясь в* 4,5 *раза медленнее, чем на велосипеде. Его обгоняют: второй велосипедист — через* 5/8 ч *после поломки, а пешеход — через* 10,8 ч *после поломки. К моменту поломки второй велосипедист проехал расстояние в два раза большее, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на* 5/36 ч *более позднему, чем момент поломки. Через сколько часов после начала движения сломался велосипед?*

Решение. Чертеж к этой задаче (рис. 8) показывает, что удобно ввести четыре неизвестных: скорости велоси-

педистов v_1 и v_2, скорость пешехода u и время движения до поломки t. Очевидно, что $v_1 > v_2 > u$; $v_1/4{,}5 < u$; $t > 1$.

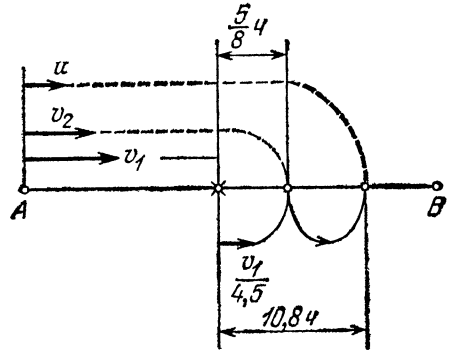


Рис. 8

Выделим из текста задачи условия, которые предстоит записать в виде уравнений. Их три.

Условие задачи	Уравнение
Второй велосипедист обогнал первого через 5/8 ч после поломки	$v_2\left(t+\frac{5}{8}\right)=v_1 t+\frac{v_1}{4{,}5}\cdot\frac{5}{8}$
Пешеход обогнал первого велосипедиста через 10,8 ч после поломки	$u\,(t+10{,}8)=v_1 t+\frac{v_1}{4{,}5}\cdot 10{,}8$
К моменту поломки второй велосипедист проехал расстояние в два раза большее, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 ч более позднему, чем момент поломки	$v_2 t=2u\left(t+\frac{5}{36}\right)$

Таким образом, мы располагаем тремя уравнениями, которые содержат четыре неизвестные величины v_1, v_2, u и t, и поэтому однозначно найти все четыре неизвестных из этой системы нельзя. Однако каждое из составленных уравнений является линейным однородным уравнением относительно переменных v_1, v_2 и u *). Поэтому, разделив

*) Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящая от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется линейной однородной, если она име-

каждое из них на u, заметим, что число неизвестных уменьшается до трех (t и два отношения v_1/u и v_2/u):

$$\begin{cases} \frac{v_2}{u}\left(t+\frac{5}{8}\right)=\frac{v_1}{u}t+\frac{v_1}{u}\cdot\frac{1}{4{,}5}\cdot\frac{5}{8}, \\ t+10{,}8=\frac{v_1}{u}t+\frac{v_1}{u}\cdot\frac{1}{4{,}5}\cdot 10{,}8, \\ \frac{v_2}{u}\cdot t=2\left(t+\frac{5}{36}\right). \end{cases}$$

Подставляя значение отношения v_1/u из второго уравнения в первое, найдем

$$\frac{v_2}{u}=\frac{t+10{,}8}{t+2{,}4}\cdot\frac{t+5/36}{t+5/8}.$$

Используя третье уравнение, получаем

$$\frac{t+10{,}8}{t+2{,}4}\cdot\frac{t}{t+5/8}=2,$$

или

$$t^2-4{,}75t+3=0.$$

Отсюда находим два значения t:

$$t_1=\frac{3}{4},\quad t_2=4.$$

Поскольку известно, что поломка произошла более чем через час после начала движения, то решением задачи служит второй корень уравнения.

Ответ. Через 4 ч.

Замечание. Рассмотрение этих двух примеров показывает, в чем состоит методика составления уравнений по тексту задачи. Ее сущность заключается в том, чтобы выделить в тексте задачи те предложения, которые представляют собой связи между параметрами движения. После введения неизвестных по принципу наибольшего удобства записи этих связей получаются уравнения, определяющие решение задачи.

Рассмотрим теперь задачи на составление уравнений, в которых движение происходит по кольцевым дорогам.

Задача. *Три гонщика стартуют одновременно из одной точки шоссе, имеющего форму окружности, и едут в одном направлении с постоянными скоростями. Первый гонщик впервые после старта догнал второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной старту, а через полчаса после этого он вторично, не считая момента старта, догнал третьего гонщика.*

ет вид $F=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — коэффициенты. Соответствующее уравнение $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$ называется линейным однородным уравнением.

Второй гонщик впервые догнал третьего через 3 ч после старта. Сколько кругов в час делает первый гонщик, если второй гонщик проходит круг не менее чем за двадцать минут?

Решение. Особенность этой и ей подобных задач состоит в том, что движение происходит по кольцевой замкнутой дороге и гонщик, движущийся с большей скоростью, в некоторый момент оказывается как бы сзади гонщика, который движется с меньшей скоростью. Возникает своеобразная ситуация, при которой гонщик, находящийся «впереди», как бы догоняет гонщика, находящегося «сзади».

Однако, несмотря на запутанную, на первый взгляд, картину движения, легко проследить движение каждого гонщика, приняв во внимание простое соображение: если один из одновременно стартовавших гонщиков в первый раз догоняет другого, то он проходит расстояние, на один круг большее, чем этот гонщик; если он догоняет его во второй раз, то это означает, что он проходит расстояние, на два круга большее, чем другой гонщик и т. д.

Обратимся к задаче. Обозначим длину кольцевого пути буквой s, а скорости гонщиков v_1, v_2 и v_3 соответственно. Очевидно, что $v_1 > v_2 > v_3$.

Первый гонщик приближается ко второму со скоростью $v_1 - v_2$, к третьему — со скоростью $v_1 - v_3$, а второй гонщик приближается к третьему со скоростью $v_2 - v_3$.

В тот момент, когда один из гонщиков догоняет другого в первый раз, он проходит расстояние, на s большее, чем другой гонщик, во второй раз — расстояние, на $2s$ большее, чем другой гонщик, и т. д.

Приведем схему составления уравнений задачи.

Условие задачи	Уравнение
Первый гонщик догоняет в первый раз второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной старту (т. е. пройдя 4,5 круга)	$\frac{s}{v_1 - v_2} = \frac{4{,}5s}{v_1}$
Через полчаса после встречи со вторым гонщиком первый гонщик вторично догоняет третьего	$\frac{4{,}5s}{v_1} + \frac{1}{2} = \frac{2s}{v_1 - v_3}$
Второй гонщик впервые догнал третьего через 3 ч после старта	$\frac{s}{v_2 - v_3} = 3$

Учитывая, кроме того, что по условию задачи второй гонщик проходит один круг не менее чем за двадцать минут, получаем неравенство

$$\frac{s}{v_2} \geqslant \frac{1}{3},$$

которое потребуется нам для отыскания однозначного ответа.

Условие задачи требует найти не сами неизвестные s, v_1, v_2 и v_3, а только отношение v_i/s. Система уравнений показывает, что имеет смысл ввести новые неизвестные n, m, k:

$$n=\frac{v_1}{s}, \qquad m=\frac{v_2}{s}, \qquad k=\frac{v_3}{s},$$

определяющие, сколько кругов в час делает каждый гонщик. Тогда система уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} n-m=\frac{2}{9}n, \\ n-k=\frac{4n}{9+n}, \\ m-k=\frac{1}{3}, \end{cases}$$

а полученное из условия задачи неравенство дает

$$m \leqslant 3.$$

Складывая первое и последнее уравнения между собой и вычитая из получившейся суммы второе уравнение системы, получаем квадратное уравнение для определения величины n:

$$2n^2-15n+27=0.$$

Отсюда находим два значения n:

$$n_1=4{,}5; \qquad n_2=3.$$

Первое из этих значений не удовлетворяет условию задачи, так как $m_1=3{,}5>3$. При $n=n_2=3$ получаем $m_2=2\frac{1}{3}<3$. Следовательно, $n=3$ есть решение задачи.

Ответ. Первый гонщик делает 3 круга в час.

В качестве последнего примера в этом параграфе рассмотрим задачу «на выполнение работы». Как уже отмечалось, такие задачи с полным правом можно причислить к задачам «на движение».

Задача. *Две машины, рывшие туннель навстречу друг другу, закончили его проходку за* 60 *дней. Если бы первая машина работала* 18 *дней, а вторая* 16 *дней, то вместе они прошли бы* 60 м *туннеля. Если бы первая машина выполнила* 2/3 *всей работы второй машины по проходке туннеля, а вторая* 0,3 *всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого на* 6 *дней больше, чем второй. Сколько метров туннеля в день проходит каждая машина?*

Решение. Введем, аналогично скоростям в задачах «на движение», производительности машин v_1 (м/день) и v_2 (м/день). Тогда величина всей работы — длина туннеля — аналогична расстоянию в задаче «на движение» и определится суммой

$$60v_1 + 60v_2.$$

Здесь $60v_1$ — объем работы, выполненной первой машиной, а $60v_2$ — объем работы, выполненной второй машиной.

Составим уравнения задачи.

Условие задачи	Уравнение
Если бы первая машина работала 18 дней, а вторая — 16 дней, то было бы пройдено 60 м туннеля	$18v_1 + 16v_2 = 60$
Если бы первая машина выполнила 2/3 всей работы второй машины, а вторая — 0,3 всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого на 6 дней больше, чем второй	$\frac{\frac{2}{3}(60v_2)}{v_1} - \frac{0{,}3\,(60v_1)}{v_2} = 6$

После упрощений система уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} 9v_1 + 8v_2 = 30, \\ 9v_1^2 + 3v_1v_2 - 20v_2^2 = 0. \end{cases}$$

Эту систему удобнее всего решить, если записать второе соотношение в виде квадратного уравнения для отношения производительностей v_1/v_2:

$$9\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + 3\left(\frac{v_1}{v_2}\right) - 20 = 0.$$

Из двух решений этого уравнения берем положительное:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{3}, \quad \text{т. е.} \quad 3v_1 = 4v_2.$$

Используя этот результат совместно с первым уравнением системы, находим

$$v_1 = 2 \text{ м/день}; \quad v_2 = 1{,}5 \text{ м/день}.$$

Замечание. Второе уравнение рассматриваемой системы имеет форму, которая часто встречается в различных задачах по элементарной математике. Соотношение вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

может быть записано в виде квадратного уравнения для

а) отношения x/y, если $A \neq 0$:

$$A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\frac{x}{y} + C = 0;$$

б) отношения y/x, если $C \neq 0$:

$$A + B\frac{y}{x} + C\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Аналогично этому функция двух переменных x и y

$$F(x, y) = \frac{Ax^2 + Bxy + Cy^2}{A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2}$$

в случае, если $y \neq 0$, является функцией только одной переменной, а именно, отношения x/y:

$$F(x, y) = \frac{A(x/y)^2 + B \cdot x/y + C}{A_1(x/y)^2 + B_1 \cdot x/y + C_1} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Упражнения

1. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 ч после его выезда из города B навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в три раза больше, чем скорость велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через 3, а через 2 ч после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A. Найти расстояние между городами A и B.

Ответ. 180 км.

2. Первая и вторая бригады одновременно начали выполнять некоторую работу. Более чем через час после начала работы первую бригаду сменила третья, которая вместе со второй работала до завершения всей работы. На выполнение работы указанным способом ушло 5,5 ч. Первая бригада за все время, пока она работала, сделала столько, сколько третья делает за час. Если бы первая бригада проработала на 6 ч больше, чем это было на самом деле, то она сделала бы столько же, сколько было сделано второй бригадой. Если бы три бригады все время работали вместе, то работа была бы выполнена в 1,5 раза быстрее, чем в действительности. Сколько времени работала первая бригада?

Ответ. 2,5 ч.

3. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через 2 ч после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал

велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал 2/5 всего пути от B до A?

Ответ. 8 ч 45 мин.

4. Две трубы, действуя вместе в течение 1 ч, наполняют водой 3/4 бассейна. Если сначала первая труба наполнит 1/4 часть бассейна, а затем вторая при выключенной первой доведет объем воды до 3/4 бассейна, то на это понадобится 2,5 ч. Если первую трубу включить на 1 ч, а вторую — на полчаса, то они наполнят бассейн более чем наполовину. За какое время наполняет бассейн каждая труба?

Ответ. 2 ч и 4 ч.

5. Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой дорожки стадиона, а третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав 3 круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 мин после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз через каждые 6 мин?

Ответ. 0,5 круга в минуту.

6. Города A и B расположены на берегу реки, причем город A расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно навстречу друг другу выходят две лодки, которые встречаются посередине между городами A и B. Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов B и A, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на расстоянии 20 км от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов A и B, поплыли обе против течения, то лодка, вышедшая из A, догнала бы лодку, вышедшую из B, в 150 км от B. Найти расстояние между городами A и B.

Ответ. 100 км.

7. Два парохода, скорость которых в стоячей воде одна и та же, отправляются от двух пристаней: первый пароход от пристани A вниз по течению, второй — от пристани B вверх по течению. Каждый пароход, дойдя до конечного пункта, стоит там 45 мин и возвращается обратно. Если пароходы отправляются от начальных пунктов одновременно, то на обратном пути они встречаются в точке K, которая в два раза ближе к A, чем к B. Если первый пароход отходит от A на 1 ч позже, чем второй пароход отходит от B, то на обратном пути пароходы встречаются в 20 км от A. Если первый пароход отходит от A на 30 мин раньше, чем второй отходит от B, то на обратном пути они встречаются на 5 км выше K. Найти скорость течения реки и время, за которое второй пароход доходит от A до K.

Ответ. 7,5 км/ч; 20 мин.

8. Автозавод изготовляет легковые и грузовые автомобили. В первый день было изготовлено грузовых автомобилей на 100 машин больше, чем легковых. Во второй день было изготовлено легковых автомобилей на 150 машин больше, чем в первый день, а грузовых машин — на 50 больше, чем в первый день. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей было изготовлено в первый день, если во второй день было изготовлено машин в 1,2 раза больше, чем в первый?

Ответ. 450 и 550.

9. Два экскаватора разной конструкции должны проложить две траншеи одинакового поперечного сечения длиной в 960

и 180 м. Вся работа продолжалась 22 дня, в течение которых первый экскаватор прокладывал бо́льшую траншею. Второй же экскаватор начал работать на 6 дней позднее первого, отрыл меньшую траншею, 3 дня ремонтировался и затем помогал первому. Если бы не нужно было тратить времени на ремонт, то работа была бы закончена за 21 день. Сколько метров траншеи может отрыть в день каждый экскаватор?

Ответ. 40 м, 20 м.

10. Русло реки разделяется длинной отмелью на две протоки одинаковой длины, но с разной скоростью течения. Две байдарки, имеющие в стоячей воде одинаковую скорость, выходят одновременно по течению: первая в левую протоку, вторая — в правую. Первая байдарка прошла свою протоку на 5 мин быстрее, чем вторая. Затем они поднялись против течения теми же протоками, и при этом вторая байдарка прошла свой путь на 30 мин быстрее, чем первая. Если бы скорость байдарок в стоячей воде была в два раза больше, то обратный путь вторая байдарка прошла бы на 4 мин быстрее, чем первая. За какое время первая байдарка прошла свою протоку, идя вниз по течению?

Ответ. 40 мин.

§ 3. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ЧИСЛО НЕИЗВЕСТНЫХ ПРЕВЫШАЕТ ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ

Среди примеров, рассмотренных в предыдущих параграфах, уже встречались задачи, в которых число неизвестных в системе уравнений превышало число самих уравнений. Причины, приводившие к такой ситуации, связаны со способом решения задач. Если выбирать неизвестные для составления уравнений, руководствуясь принципом наибольшего удобства математической записи условий задачи, то та величина, которую необходимо найти, может не войти в их число. Как правило, такая величина представляется некоторой комбинацией введенных неизвестных, поэтому может случиться, что однозначное определение всех неизвестных из системы уравнений невозможно, тем не менее искомая комбинация этих неизвестных находится однозначно.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих этот класс задач на составление уравнений.

Задача. *Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в* 5 *раз дешевле, авторучка — в* 2 *раза дешевле, а книга — в* 2,5 *раза дешевле, чем на самом деле, то та же покупка стоила бы* 8 *руб. Если бы портфель стоил в* 2 *раза дешевле, авторучка — в* 4 *раза дешевле, а книга — в* 3 *раза дешевле, то за ту же покупку школь-*

ник уплатил бы 12 *руб. Сколько стоит вся покупка и за что было уплачено больше: за портфель или за авторучку?*

Решение. Наиболее естественно ввести в этой задаче стоимости портфеля, авторучки и книги: x, y и z руб. соответственно. Тогда первое и второе условия задачи дают два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2{,}5}=8, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=12, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x+5y+4z=80, \\ 6x+3y+4z=144. \end{cases}$$

Таким образом, мы располагаем системой двух уравнений, в которой содержатся три неизвестных. Понятно, что определить все три неизвестных однозначно из такой системы нельзя. Однако условие задачи и не требует этого. Необходимо найти лишь стоимость всей покупки, т. е. величину $x+y+z$. А такая комбинация неизвестных легко находится из приведенной системы уравнений.

Действительно, коэффициенты при неизвестных в системе таковы, что, сложив почленно уравнения системы, получим

$$8x+8y+8z=224,$$

или

$$x+y+z=28,$$

т. е. вся покупка стоит 28 руб.

Сравним между собой величины x и y. Исключая величину z из системы уравнений, находим

$$2x-y=32,$$

или

$$x+(x-y)=32.$$

Поскольку $x>0$, $y>0$, $z>0$ и $x+y+z=28$, то ясно, что $x<28$. Значит, $x-y>4$, т. е. $x>y$.

Ответ. 28 руб.; портфель дороже авторучки.

Таким образом, центральным местом рассмотренной задачи явилось вычисление определенной комбинации неизвестных, а именно их суммы, на основе системы уравнений, из которой сами неизвестные однозначно не находятся.

Рассмотрим еще один пример задачи подобного типа.

Задача. *Имеются два различных сплава меди со свинцом. Если взять* 1 кг *первого сплава и* 1 кг *второго сплава и переплавить их, то получится сплав, содержащий* 65 % *меди. Известно, что если взять два куска—кусок* I *и кусок* II *первого и второго сплавов соответственно, имеющих суммарную массу* 7 кг, *и переплавить их, то получится сплав с содержанием* 60 % *меди. Какова масса меди, содержащейся в сплаве, получающемся при совместной переплавке куска первого сплава, равного по массе куску* II, *и куска второго сплава, равного по массе куску* I?

Решение. Введем процентные содержания меди в сплавах: p % — в первом (концентрация меди $p/100$) и q % — во втором (концентрация меди $q/100$), а также массу куска I — x кг и массу куска II — y кг. Составим уравнения задачи.

Условие задачи	Уравнение
1 кг первого сплава, переплавленный с 1 кг второго сплава, дает сплав, содержащий 65% меди	$\frac{1\cdot\frac{p}{100}+1\cdot\frac{q}{100}}{2}=\frac{65}{100}$
Суммарная масса куска I и куска II равна 7 кг	$x+y=7$
Если переплавить кусок I и кусок II, то получится сплав, содержащий 60% меди	$\frac{x\cdot\frac{p}{100}+y\cdot\frac{q}{100}}{x+y}=\frac{60}{100}$

Таким образом, получается система трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} p+q=130, \\ x+y=7, \\ px+qy=420. \end{cases}$$

Конечно, все четыре неизвестных из такой системы однозначно найти нельзя. Поэтому обратимся к вопросу, на который нужно ответить. Требуется определить, какова масса меди, содержащейся в сплаве, получающемся при совместной переплавке куска первого сплава, равного по массе куску II, и куска второго сплава, равного по массе куску I, т. е. величину

$$Q=y\cdot\frac{p}{100}+x\cdot\frac{q}{100}=\frac{qx+py}{100}.$$

Система уравнений этой задачи обладает такой структурой, что величину $qx+py$ можно легко найти. Действительно, перемножая почленно первое и второе уравнения и вычитая из произведения третье уравнение, получаем

$$(p+q)(x+y)-(px+qy)=qx+py=490.$$

После этого находим величину Q:

$$Q=4{,}9 \text{ кг}.$$

Ответ. 4,9 кг.

Наконец, последний пример задачи этого типа.

З а д а ч а. *Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая труба наполняет резервуар за* 40 мин; *вторая, третья и четвертая, работая одновременно,— за* 10 мин; *вторая, третья и пятая — за* 20 мин *и, наконец, пятая и четвертая — за* 30 мин. *За сколько времени наполняют резервуар все пять труб при одновременной работе*?

Р е ш е н и е. Несомненно, что наиболее удобными неизвестными, которые можно было бы ввести в этой задаче, являются следующие: объем резервуара V_0, производительности насосов u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 соответственно. Тогда сразу же составляются четыре уравнения:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{V_0}{40}, \\ u_2+u_3+u_4 = \frac{V_0}{10}, \\ u_2+u_3+u_5 = \frac{V_0}{20}, \\ u_4+u_5 = \frac{V_0}{30}, \end{cases}$$

из которых все шесть неизвестных, разумеется, однозначно не находятся. Однако в условии сказано, что требуется определить не производительности отдельных насосов, а время наполнения резервуара при совместной работе всех пяти труб, т. е., в конечном счете, общую производительность всех насосов: $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5$. Это легко сделать, умножив первое уравнение на 2 и сложив результат со всеми остальными:

$$2(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)=\frac{7V_0}{30},$$

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=\frac{7V_0}{60}.$$

Отсюда находится время наполнения резервуара

$$T = \frac{V_0}{u_1+u_2+u_3+u_4+u_5} = \frac{V_0}{7V_0/60} = \frac{60}{7}.$$

Ответ: 60/7 мин.

В предыдущих задачах система уравнений, не позволяя определить сами неизвестные, тем не менее давала возможность найти некоторую комбинацию этих неизвестных. Однако не исключена возможность и такой ситуации, при которой меньшее количество уравнений позволяет найти большее количество неизвестных. Конечно, при этом система уравнений имеет специальную структуру. Рассмотрим следующий пример.

Задача. *Три пункта A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной* $\frac{1}{2}AB$; *к отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги AC примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной AC, и шириной* 4 км. *Площадь леса на* 20 км^2 *больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.*

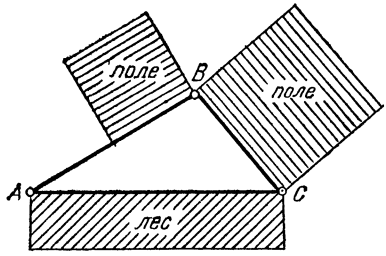


Рис. 9

Решение. Пусть $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$ (рис. 9). Тогда, исходя из условий задачи, можно составить только одно уравнение:

$$4z - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = 20,$$

или

$$z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5. \qquad (1)$$

Таким образом, имеется одно уравнение с тремя неизвестными. Решение задачи может быть найдено, если учесть, что x, y, z — это стороны треугольника и, значит, удовлетворяют известным геометрическим неравенствам:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & x+y \geqslant z; \\ \text{б)} & x+z \geqslant y; \\ \text{в)} & y+z \geqslant x. \end{array} \qquad (2)$$

Эти неравенства дают необходимые и достаточные условия, при которых три отрезка x, y и z образуют треугольник; в случае обращения одного из неравенств в равенство треугольник вырождается в отрезок прямой.

Подставляя выражение для z из (1) в (2), получаем неравенство

$$x+y\geqslant\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+5,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{4}-2\right)^2+\left(\frac{y}{2}-1\right)^2\leqslant 0.$$

(Здесь относительно переменных x и y было использовано преобразование, называющееся *выделением полного квадрата.*)

Поскольку сумма двух неотрицательных слагаемых не может быть меньше нуля, то последние неравенства выполняются только в том случае, если

$$\frac{x}{4}-2=0 \quad \text{и} \quad \frac{y}{2}-1=0.$$

Это и есть те дополнительные уравнения задачи, которые позволяют определить решение. Находим

$$x=8, \quad y=2, \quad z=10.$$

Поскольку $x+y=z$, то становится ясным, что пункты A, B и C находятся на одной прямой. Площадь леса, равная $4z$ км^2, составляет 40 км^2. Конечно, такая задача может быть решена только при специальном подборе числовых данных.

Упражнения

1. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе делают за час 20 деталей. К работе приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 ч. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на всю работу, если бы с начала и до конца он делал ее один?

Ответ. 16 ч.

2. К бассейну объемом в 300 м^3 проведены три трубы: через первую и вторую вода поступает, через третью выливается. Если все три трубы включены одновременно, то количество воды в бассейне увеличивается ежеминутно на 20 м^3. Бассейн начали наполнять водой, включив первую и третью трубы. Более чем через 12 мин после начала работы в бассейне оказалось 100 м^3 воды. В этот момент первую и третью трубы закрыли и включили вто-

рую трубу, завершившую наполнение бассейна. Всего на наполнение бассейна было затрачено 30 мин. Определить, за какое время наполнился бы бассейн, если бы его с начала и до конца наполняла только вторая труба.

Ответ. 22,5 мин.

3. Совхоз располагает тракторами четырех марок *А*, *Б*, *В* и *Г*. Бригада из четырех тракторов (два трактора марки *Б* и по одному трактору марок *В* и *Г*) производит вспашку поля за два дня. Бригада из двух тракторов марки *А* и одного трактора марки *В* тратит на эту работу три дня, а три трактора марок *А*, *Б* и *В* — четыре дня. За сколько времени выполнит работу бригада, составленная из четырех тракторов различных марок?

Ответ. $1\frac{5}{7}$ дня.

4. Туристский клуб разработал маршруты нескольких походов: а) двухдневный байдарочный поход; б) двухдневный велосипедный поход; в) восьмидневный комбинированный поход (четыре дня на байдарке, четыре дня пешком); г) пятидневный поход (один день на плоту, один день на байдарке, три дня пешком); д) шестидневный поход (три дня на плоту и три дня пешком). Третий маршрут длиннее второго на 40 км, второй длиннее первого на 80 км, а длина четвертого маршрута 90 км. Предполагается, что при каждом данном способе передвижения за каждый день проходится одно и то же расстояние. Найти протяженность пятого маршрута.

Ответ. 90 км.

5. Три экскаватора получили задание вырыть по котловану: первый и второй — емкостью по 800 м^3, а третий — емкостью 400 м^3. Первый и второй экскаваторы вместе вынимают за час грунта втрое больше, чем третий. Первый и третий экскаваторы начали работу одновременно, а второй — в тот момент, когда первый вынул уже 300 м^3 грунта. Когда третий экскаватор выполнил 2/3 своей работы, второй вынул 100 м^3 грунта. Первым выполнил свое задание третий экскаватор. Сколько кубических метров грунта вынул первый экскаватор к моменту, когда третий закончил рыть свой котлован?

Ответ. 600 м^3.

6. Имеются три куска различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего куска то же, что во взятых вместе 1 г из первого и 1 г из второго куска. Масса третьего куска равна суммарной массе части первого куска, содержащей 10 г золота, и части второго куска, содержащей 80 г золота. Третий кусок, масса которого в 4 раза больше первого, содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом куске?

Ответ. 12,5 г.

7. Две трубы, работая вместе, подают в бак 100 л жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 л каждого раствора и 20 л воды, то получится 40 л 20 %-го раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный раствор, то получится 30 %-й раствор кислоты. Какой концентрации получится кислота, если подавать в первоначально пустой бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый?

Ответ. 0,5.

8. Из пункта *А* по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в полтора раза, а между третьим и вторым — в два раза. Скорость какого автомобиля, первого или второго, больше и во сколько раз, если известно, что третий автомобиль не обгонял первых двух?

Ответ. Скорость первого автомобиля в 9/8 раза больше, чем второго.

9. Продают три куска ткани. Из первого продали половину, из второго 2/3, а третий кусок, в котором было 1/3 всей ткани, продали весь. Сколько процентов ткани продано, если всего осталось ее вдвое меньше, чем было во втором куске?

Ответ. 75 %.

10. В лаборатории имеются растворы соли четырех различных концентраций. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 3:2:1, то получится 15 %-й раствор. Второй, третий и четвертый растворы, взятые в равной пропорции, дают при смешении 24 %-й раствор, и, наконец, раствор, составленный из равных весовых частей первого и третьего растворов, имеет концентрацию 10 %. Какая концентрация получится при смешении второго и четвертого растворов в пропорции 2:1?

Ответ. 0,29.

§ 4. ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ РЕШАЮТСЯ ПРИ ПОМОЩИ НЕРАВЕНСТВ

В предыдущих параграфах нам уже встретились задачи, которые содержали среди прочих такие условия, математическая запись которых была эквивалентна неравенствам. Так, например, разбор второй и третьей задач второго параграфа показал, что однозначное решение этих задач можно найти только в том случае, если учесть неравенства, следующие из их условия.

Более важную роль играли неравенства в последней из задач, рассмотренных в предыдущем параграфе. В этой задаче только учет неравенств позволил получить два дополнительных соотношения и тем самым найти решение. Более того, существует целый класс задач, рассчитанных на умение составлять не только уравнения, но и неравенства. Эти задачи уместно было бы назвать «задачами на составление уравнений и неравенств».

Проиллюстрируем сказанное несколькими примерами.

Задача. *Из пункта А в пункт В в* 8 ч *утра выходит скорый поезд. В этот же момент из В в А выходят пассажирский и курьерский поезда, причем скорость пассажирского поезда в два раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд прибывает в пункт В в* 13 ч 50 мин *того же дня, а встречает курьерский поезд не ранее*

10 ч 30 мин *утра. Найти время прибытия пассажирского поезда в пункт A, если известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее часа.*

Решение. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 10. Как это встречалось раньше, здесь удобно ввести

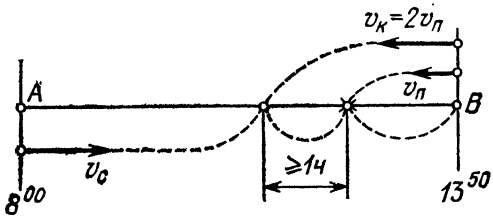


Рис. 10

расстояние между городами s, а также скорости поездов: $v_п$ — пассажирского, $v_с$ — скорого. Тогда скорость курьерского поезда $v_к$ будет равна $2v_п$.

Составим, как обычно, уравнения (в данном случае уравнения и неравенства) с помощью следующей таблицы:

Условие задачи	Уравнение, неравенство
Скорый поезд прибывает в пункт B в 13 ч 50 мин, т. е. через 5 ч 50 мин	$\frac{s}{v_с}=\frac{35}{6}$ (1)
Скорый поезд встречается с курьерским поездом не ранее 10 ч 30 мин утра, т. е. не менее чем через 2 ч 30 мин	$\frac{s}{v_с+2v_п}\geqslant\frac{5}{2}$ (2)
Между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее часа	$\frac{s}{v_с+v_п}-\frac{s}{v_с+2v_п}\geqslant 1$ (3)

Последнее неравенство необходимо пояснить. Отношение

$$\frac{s}{v_с+2v_п}$$

есть время, прошедшее от начала движения до встречи скорого и курьерского поездов, а время до встречи скорого и пассажирского поездов равно отношению

$$\frac{s}{v_с+v_п}.$$

Разность этих отношений равна времени, прошедшему от момента встречи скорого поезда с курьерским до момента встречи скорого поезда с пассажирским. Эта разность, по условию, больше или равна 1.

Неравенства (2) и (3) можно преобразовать так:

$$\frac{\frac{s}{v_c}}{1+2\frac{v_п}{v_c}} \geqslant \frac{5}{2}, \quad \frac{\frac{s}{v_c}}{1+\frac{v_п}{v_c}} - \frac{\frac{s}{v_c}}{1+2\frac{v_п}{v_c}} \geqslant 1.$$

Подставляя в эти неравенства значение отношения s/v_c из первого уравнения и выполняя преобразования, получим систему неравенств:

$$\frac{v_п}{v_c} \leqslant \frac{2}{3}, \quad 12\left(\frac{v_п}{v_c}\right)^2 - 17\left(\frac{v_п}{v_c}\right) + 6 \leqslant 0,$$

или

$$\frac{v_п}{v_c} \leqslant \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{2}{3} \leqslant \frac{v_п}{v_c} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Отсюда видно, в чем состоит узловой момент решения этой задачи. Получена система почти исключающих друг друга неравенств. Для того чтобы такая система была совместна, необходимо выполнение равенства

$$\frac{v_п}{v_c} = \frac{2}{3}.$$

Именно это равенство дает нам недостающее уравнение.

В задаче требуется найти время прибытия пассажирского поезда в пункт A, т. е. величину $s/v_п$. Имеем:

$$\frac{s}{v_п} = \frac{s}{v_c} \cdot \frac{v_c}{v_п} = \frac{35}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{35}{4}.$$

Итак, пассажирский поезд затрачивает на дорогу 8 ч 45 мин и прибывает в пункт A в 16 ч 45 мин.

Еще один пример подобной задачи.

Задача. *В 7 ч утра из пункта A в пункт B по течению реки отправляются байдарка и катер. Байдарка приплывает в пункт B в 17 ч того же дня. Катер же, дойдя до пункта B, мгновенно поворачивает назад и на своем пути из B в A встречает байдарку не позднее 15 ч, а прибывает в пункт A не ранее 23 ч того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если известно, что собственная скорость катера в два раза больше собственной скорости байдарки.*

Решение. Своеобразие этой задачи, как и предыдущей, состоит в том, что составленных уравнений недостаточно для однозначного определения всех неизвестных. Это помогают сделать имеющиеся в задаче условия, выражающиеся в виде неравенств.

Пусть $v_к$, $v_б$ и u — скорости катера, байдарки (в стоячей воде) и реки соответственно, $v_к = 2v_б$, s — расстояние между пунктами A и B. Тогда имеем следующую таблицу:

Условия задачи	Уравнение или неравенство
Байдарка находилась в пути 10 ч	$\frac{s}{v_б+u}=10$ (1)
На обратном пути из B в A катер встретил байдарку не позднее 15 ч того же дня	$\frac{s+(2v_б-u)\frac{s}{2v_б+u}}{3v_б}\leqslant 8$ (2)
Катер прибыл обратно в пункт A не ранее 23 ч того же дня	$\frac{s}{2v_б+u}+\frac{s}{2v_б-u}\geqslant 16$ (3)
Катер может двигаться против течения	$2v_б>u$ (4)

Поясним, как было составлено неравенство (2) системы. Пусть t — время (в часах), прошедшее с начала движения до встречи катера и байдарки. Тогда

$$(v_б+u)t+(2v_б-u)\left(t-\frac{s}{2v_б+u}\right)=s.$$

Здесь $s/(2v_б+u)$ — время движения катера вниз по реке из A в B. Найдя время t из полученного уравнения, мы приходим к левой части неравенства (2).

Найдем решение системы неравенств (1) — (4). Разделив числитель и знаменатель каждой из дробей в левой части (2) и (3) на $v_б+u$ и учитывая равенство (1), получаем

$$\frac{10+10\cdot\frac{2v_б-u}{2v_б+u}}{3\cdot\frac{v_б}{v_б+u}}\leqslant 8 \qquad (2')$$

и

$$\frac{\frac{10}{2v_б+u}}{\frac{v_б+u}{}}+\frac{\frac{10}{2v_б-u}}{\frac{v_б+u}{}}\geqslant 16. \qquad (3')$$

Полученные неравенства можно представить в следующей форме:

$$5\left(\frac{v_б}{u}+1\right)\leqslant 3\left(2\cdot\frac{v_б}{u}+1\right),$$

$$5\left(\frac{v_б}{u}+1\right)\frac{v_б}{u}\geqslant 2\left[4\left(\frac{v_б}{u}\right)^2-1\right],$$

или

$$\frac{v_б}{u}\geqslant 2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{3}\leqslant\frac{v_б}{u}\leqslant 2.$$

Отсюда видно, что эта система неравенств непротиворечива, если $v_б/u=2$, т. е. $v_б=2u$. Тогда из уравнения (1) получаем

$$\frac{s}{3u}=10, \quad \text{т. е.} \quad \frac{s}{u}=30.$$

В задаче требуется найти время прибытия катера в пункт B. Находим

$$T=\frac{s}{2v_б+u}=\frac{s}{5u}=\frac{1}{5}\cdot 30=6.$$

Ответ. Катер приплывает в пункт B в 13 часов.

Примером оригинального использования неравенства служит следующая задача.

Задача. *Пункт A стоит в поле на расстоянии* 8 км *от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A в B так, что часть пути пройдет по дороге, то даже при самом удачном выборе пути движения на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать напрямик по полю. Найти максимально возможное расстояние между A и B.*

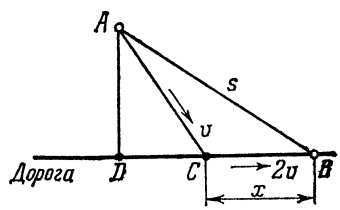


Рис. 11

Решение. Обозначим расстояние от A до B через s (рис. 11). Расстояние AD от пункта A до дороги по условию равно 8 км.

Пусть C — точка, в которой автомобиль выезжает с поля на дорогу. При этом достаточно ограничиться рассмотрением только прямолинейных участков AC по полю, поскольку любой криволинейный путь от A до C длиннее отрезка AC и, значит, требует большего времени движения. По тем же соображениям точку C можно считать лежащей между точками B и D.

Если обозначить скорость движения автомобиля по полю через v, то условие задачи приводит к неравенству

$$\frac{s}{v} \leqslant \frac{AC}{v} + \frac{CB}{2v},$$

или

$$s \leqslant AC + \frac{1}{2} \cdot CB,$$

справедливому при *любых* значениях CB.

Обозначим $CB = x$. Тогда $DC = \sqrt{s^2 - 64} - x$ и $AC = \sqrt{64 + (\sqrt{s^2 - 64} - x)^2}$. В этих обозначениях имеем

$$s \leqslant \sqrt{64 + (\sqrt{s^2 - 64} - x)^2} + \frac{x}{2}.$$

Требуется найти s, при котором полученное неравенство выполняется при *любых* значениях x.

Перепишем неравенство в виде

$$s - \frac{x}{2} \leqslant \sqrt{64 + (\sqrt{s^2 - 64} - x)^2}.$$

Поскольку $s - \frac{x}{2} > 0$, то допустимо возвести обе части неравенства в квадрат, после чего получаем квадратичное относительно x неравенство

$$3x^2 + 4x(s - 2\sqrt{s^2 - 64}) \geqslant 0.$$

Это неравенство должно выполняться тождественно, т. е. при всех значениях величины x, определяющей положение точки C, в которой автомобиль выезжает с поля на дорогу.

Квадратичная функция, стоящая в левой части полученного неравенства, имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -4(2\sqrt{s^2 - 64} - s)/3$. Для того чтобы неравенство выполнялось при *всех* $x \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы второй корень x_2 не был положительным, т. е.

$$\frac{4}{3}(2\sqrt{s^2 - 64} - s) \leqslant 0 \qquad (s \geqslant 8),$$

или

$$s \geqslant 2\sqrt{s^2 - 64},$$

откуда следует, что $8 \leqslant s \leqslant 16/\sqrt{3}$.

Таким образом, максимально возможное расстояние между пунктами A и B составляет $16/\sqrt{3}$ км.

Ответ. $16/\sqrt{3}$ км.

Приведем еще один пример задачи рассматриваемого типа.

Задача. *Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по* 20 *марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по* 23 *марки на лист, то по крайней мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по* 21 *марке, то всего у него станет* 500 *марок. Сколько листов в альбоме?*

Решение. Пусть в альбоме m листов, а у школьника имеется N марок. Тогда уравнение и неравенства этой задачи составляются следующим образом.

Условие задачи	Уравнение, неравенство
Если школьник наклеит по 20 марок на лист, то ему не хватит альбома	$20m < N$
Если школьник наклеит по 23 марки на один лист, то по крайней мере один лист окажется пустым	$23(m-1) \geqslant N$
Если школьнику подарить такой же альбом, в котором на каждом листе по 21 марке, то всего у него будет 500 марок	$21m + N = 500$

Таким образом, в этой задаче имеется одно уравнение и два неравенства. Выразим N из уравнения этой системы и подставим его в каждое из неравенств:

$$20m < 500 - 21m,$$
$$23(m-1) \geqslant 500 - 21m.$$

Учитывая, что m — целое число, из первого неравенства этой системы находим, что $m \leqslant 12$, а из второго неравенства — что $m \geqslant 12$.

Сравнивая между собой эти результаты, получаем $m = 12$.

Ответ. В альбоме 12 листов.

Некоторое отличие последней задачи от предыдущих состоит в том, что ее решение получается не только при помощи неравенств, но и с существенным использованием того обстоятельства, что неизвестное в этой задаче — целое число. Только это условие позволило получить единственное решение. Задачи, в которых неизвестные представляют собой целые числа, будут рассмотрены в следующем параграфе.

Упражнения

1. Расстояние между станциями A и B равно 360 км. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выходят два поезда. Поезд, отправившийся из A, прибывает на станцию B не ранее чем через 5 ч. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше, чем через два часа после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

Ответ. Скорость поезда, вышедшего из B, больше.

2. Из пункта A в пункт C в 9 ч утра отправился скорый поезд. В это же время из пункта B, расположенного между пунктами A и C, выходят два пассажирских поезда, первый из которых следует в пункт A, а второй — в пункт C, причем скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже чем через 3 ч после его отправления, потом проходит пункт B не ранее 14 ч того же дня и, наконец, прибывает в пункт C одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 ч после встречи с первым пассажирским поездом. Найти время прибытия в пункт A первого пассажирского поезда.

Ответ. 16 ч 30 мин.

3. Из A в B по течению реки плывет плот. Одновременно с тем, когда плот начал путь из A в B, из B в A навстречу ему поплыла лодка, которая встречает плот не ранее чем через 2 ч и затем прибывает в A, затратив на весь путь менее 3 ч 20 мин. Успеет ли плот преодолеть путь из A в B за 5 ч, если расстояние между A и B равно 20 км?

Ответ. Не успеет.

4. Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных?

Ответ. 9 пятиэтажных домов и 8 девятиэтажных домов.

5. Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B со скоростью течения реки, проходит путь от A до B за 24 ч. Весь путь от A до B и обратно моторная лодка проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость моторной лодки увеличилась на 40 %, то тот же путь (т. е. путь от A до B и обратно) занял бы у лодки не более 7 ч. Найти время, за которое моторная лодка проходит путь от A до B в случае, когда ее собственная скорость не увеличена.

Ответ. За 4 ч.

6. В 9 ч утра из пункта A выезжает велосипедист, который едет до пункта B. Через 2 ч после выезда велосипедиста из A в B выезжает автомобилист, который догоняет велосипедиста не позже 12 ч дня. Продолжая движение, автомобилист прибывает в пункт B, мгновенно поворачивает и едет из B в A. На этом пути автомобилист встречает велосипедиста и потом прибывает в пункт A в 17 ч того же дня. Найти время прибытия велосипедиста в пункт B, если известно, что между двумя встречами велосипедиста и автомобилиста прошло не более 3 ч.

Ответ. 18 ч.

7. От пристани A вниз по реке, скорость течения которой равна v км/ч, отходит плот. Через час вслед за ним выходит ка-

тер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/ч. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить все те значения v, при которых к моменту возвращения катера в A плот проходит более 15 км.

Ответ. $5 < v < 10$.

8. Расстояние между A и B равно 7 км. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу и встретились раньше чем через 1 час. Если бы первый шел вдвое быстрее, чем он шел на самом деле, а скорость движения второго была бы на 2 км/ч больше его фактической скорости, то к моменту встречи второй прошел бы большую часть пути. Скорость какого пешехода больше?

Ответ. Скорость второго пешехода больше.

9. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста и встречаются позже, чем через 5 ч после выезда. На следующий день они выезжают одновременно в одну и ту же сторону из пунктов C и D, расстояние между которыми 36 км, причем велосипедист, едущий впереди, движется со скоростью, на 6 км/ч больше, чем накануне, а велосипедист, едущий сзади, движется с той же скоростью, что и накануне. Хватит ли второму велосипедисту двух часов, чтобы догнать первого?

Ответ. Не хватит.

10. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в город A позже, чем автобус приходит в город B.

Ответ. $30 < v \leqslant 33{,}6$.

§ 5. ЗАДАЧИ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

В этом параграфе рассматриваются задачи на составление уравнений или неравенств, в которых неизвестные величины могут принимать только целые значения. Весьма часто эти задачи составлены таким образом, что их однозначное решение находится только при условии существенного использования этого обстоятельства. Один из примеров задач такого типа нам уже встретился в конце предыдущего параграфа. Рассмотрим еще несколько примеров.

Задача. *Из города A в городе B отправился путешественник, который в первый день преодолел* $1/n$*-ю часть всего пути. В следующий день он прошел* $1/m$*-ю часть оставшегося пути. В следующие дни он проходит попеременно то* $1/n$*-ю часть, то* $1/m$*-ю часть пути, оставшегося к концу предыдущего дня. Через 10 дней такого движения выяснилось, что он прошел 31/32 всего расстояния между городами A и B. Найти m и n, если известно, что* $m > n$; m, n*—целые числа.*

Решение. К концу первого дня расстояние s_1, отделяющее путешественника от города B, равно

$$s_1 = s - \frac{1}{n}s = \left(1 - \frac{1}{n}\right)s,$$

где s — расстояние между городами.

К концу второго дня расстояние s_2, отделяющее его от города B, становится равным

$$s_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)s - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{n}\right)s = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right)s.$$

Повторяя эти рассуждения (см. формулу сложных процентов в § 1), получаем, что к концу 10-го дня пути до города B осталось пройти расстояние s_{10}, равное

$$s_{10} = s\left(1 - \frac{1}{n}\right)^5\left(1 - \frac{1}{m}\right)^5 = \frac{1}{32}s.$$

Поэтому единственное уравнение в этой задаче имеет вид

$$s\left(1 - \frac{1}{n}\right)^5\left(1 - \frac{1}{m}\right)^5 = \frac{1}{32}s. \qquad (1)$$

Извлекая корень пятой степени из обеих его частей, получаем

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{mn}{(m-1)(n-1)} = 2. \qquad (2)$$

Таким образом, предстоит найти единственное решение одного уравнения с двумя неизвестными. Оказывается, что это можно сделать, но только с учетом, что m и n — целые положительные числа ($m > n$).

Выражая, например, m из последнего уравнения, получаем

$$m(n-2) = 2(n-1)$$

и поскольку $n = 2$ не удовлетворяет этому уравнению, находим

$$m = \frac{2n-2}{n-2} = 2 + \frac{2}{n-2}.$$

Принимая во внимание, что m — целое число, заключаем, что и дробь $2/(n-2)$ также должна быть целым числом. Учитывая, что $m > 0$ и $n > 0$, нетрудно увидеть, что

рассматриваемое отношение принимает целые значения только при $n=3$ и $n=4$. Если $n=3$, то $m=4$. Если $n=4$, то $m=3$. Учитывая условие задачи: $m>n$, получаем единственное решение: $m=4$, $n=3$.

Итак, решение найдено.

Рассмотрим еще один пример.

Задача. *В автогонках принимают участие команды, имеющие одинаковое число автомобилей марки «Волга» и марки «Москвич», причем в каждой команде число всех автомобилей меньше 7. Если в каждой команде число автомобилей марки «Волга» оставить без изменения, а число автомобилей марки «Москвич» увеличить в три раза, то общее число «Москвичей», участвующих в гонках, будет на 50 больше общего числа «Волг», а число автомобилей в каждой команде превысит 12. Определить число команд, участвующих в гонках, и число «Волг» и «Москвичей» в каждой команде.*

Решение. Обозначим число команд, участвующих в гонках, через N, а число «Волг» и «Москвичей» в каждой команде — через m и n соответственно.

Условие задачи приводит к следующей системе уравнений и неравенств.

Условие задачи	Уравнение, неравенство
В каждой команде число всех автомобилей меньше 7	$m+n<7$
Если в каждой команде число «Волг» оставить без изменения, а число «Москвичей» увеличить в три раза, то «Москвичей» станет на 50 больше, чем «Волг»	$3nN-mN=50$
При этом число автомобилей в каждой команде превысит 12	$m+3n>12$

Оказывается, что даже такого небольшого количества информации достаточно для однозначного определения трех целых положительных неизвестных m, n и N. Действительно, представим последнее неравенство системы в виде

$$(m+n)+2n>12,$$

или

$$n>6-\frac{m+n}{2}.$$

Так как m и n — натуральные числа, то первое неравенство системы можно записать так: $m+n \leqslant 6$; очевидно также, что $n < 6$. Используя эти ограничения, получаем, что $3 < n < 6$.

Возможны варианты:

1) $n=4$, $m=1$;
2) $n=4$, $m=2$;
3) $n=5$, $m=1$.

Соответственно этому единственное имеющееся в системе уравнение дает:

1) $11N=50$;
2) $10N=50$;
3) $14N=50$.

Поскольку N — целое число, то решение получается только во втором случае. Итак, $N=5$.

Ответ. В гонках участвовало 5 команд, в каждой из которых имеется 2 «Волги» и 4 «Москвича».

Наконец, последний пример задачи такого типа.

Задача. *Встречаются две команды шашистов A и B. По условиям соревнований каждый участник одной команды играет по одной партии с каждым участником другой команды. Общее число предстоящих партий в 4 раза больше числа всех игроков в обеих командах. Однако из-за болезни два игрока не смогли явиться на матч, в связи с чем число всех сыгранных в матче партий оказалось на 17 меньше предполагавшегося. Сколько игроков выступило в матче за команду A, если известно, что в ней было меньше игроков, чем в команде B?*

Решение. Обозначим количество игроков, которые должны были выступить соответственно за команды A и B, через m и n $(n > m)$.

Очевидно, что планировалось сыграть mn партий. Первое условие задачи приводит к уравнению

$$mn = 4(m+n).$$

Второе уравнение сразу написать нельзя, так как неизвестно, к каким командам относились заболевшие игроки. Возможны три случая:

1) если заболели игроки команды A, то

$$(m-2)\,n = mn - 17;$$

2) если заболели игроки команды B, то

$$(n-2)\,m = mn - 17;$$

3) если заболело по одному игроку из команд A и B, то

$$(m-1)(n-1)=mn-17.$$

Первый случай дает $2n=17$, что невозможно, поскольку n — целое число. Второй случай также невозможен по этой причине: $2m \neq 17$. В третьем случае получаем систему

$$\begin{cases} mn=4(m+n), \\ m+n=18, \\ n>m. \end{cases}$$

Отсюда легко находим $m=6$, $n=12$.

Ответ. За команду A выступило 5 игроков.

В последней задаче, помимо рассматриваемой, встретилась и другая особенность, присущая целому классу задач на составление уравнений. Эта особенность будет подробно рассмотрена в следующем параграфе. Ее сущность состоит в том, что когда формулировка условия не позволяет однозначно составить систему уравнений, то следует рассмотреть все возможные случаи. При этом, как правило, оказывается, что только один из них непротиворечив, что и позволяет найти решение задачи. Но об этом — в следующем параграфе.

Упражнения

1. Некто купил 30 птиц за 30 монет. Из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена 1 монета, за каждые две горлицы — также 1 монета, за каждого голубя — 2 монеты. Сколько было куплено птиц каждой породы?

Ответ. 9 воробьев, 10 горлиц, 11 голубей.

2. Покупатель купил несколько одинаковых тетрадей и одинаковых книг, причем книг куплено на 4 штуки больше, чем тетрадей. За все тетради он заплатил 72 коп., а за все книги — 6 руб. 60 коп. Если бы тетрадь стоила столько, сколько стоит книга, а книга — столько, сколько стоит тетрадь, то покупатель истратил бы на покупку меньше, чем 4 руб. 44 коп. Сколько куплено тетрадей?

Ответ. 2 тетради.

3. Вася и Петя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшегося другому. Квадрат трети числа орехов, доставшихся Пете, меньше увеличенного на 1 числа орехов, доставшихся Васе. Сколько орехов у каждого?

Ответ. 14 и 25 орехов.

4. Имеются одинаковые наборы почтовых марок, состоящие из гашеных и негашеных марок, причем в каждом наборе число

гашеных марок более чем на 2 превосходит число негашеных. Если в каждом наборе число гашеных марок увеличить в 4 раза, а число негашеных оставить без изменения, то число гашеных марок в одном наборе превысит число негашеных не более чем на 20, а общее число марок во всех имеющихся наборах станет равным 44. Определить число имеющихся наборов и число гашеных и негашеных марок в каждом наборе.

Ответ. 2 набора, состоящие из 5 гашеных и 2 негашеных марок каждый.

5. Четыре школьника сделали в магазине канцтоваров следующие покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 коп; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 коп.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 коп.; четвертый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвертый школьник?

Ответ. 39 коп.

6. Около дома посажены липы и березы, причем общее их количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берез увеличить на 18, то берез станет больше, чем лип. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше, чем берез. Сколько лип и сколько берез было посажено?

Ответ. 11 лип и 5 берез.

7. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей более чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в три раза, а красных — в два раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько было в каждом комплекте синих и красных карандашей.

Ответ. 3 комплекта по 7 синих и 3 красных карандаша.

8. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

Ответ. 11 «двоек», 7 «троек», 10 «четверок», 2 «пятерки».

9. В учебном корпусе на каждом этаже находится одинаковое количество аудиторий. Всего в корпусе 96 аудиторий и площадь каждой из них равна 46 м². При строительстве корпуса суммарные затраты на земляные работы, отделочные и оборудование аудиторий не превысили 252 720 руб., причем на отделочные работы было израсходовано по 2760 руб. на каждый этаж постройки, на оборудование аудиторий — по 2000 руб. на каждую аудиторию и на земляные работы на отведенном под строительство участке земли — по 14 руб. на 1 м² земельного участка. Известно, что площадь участка земли не превосходит 2550 м², а общая площадь всех аудиторий одного этажа в 5 раз меньше, чем площадь земельного участка. Сколько этажей в корпусе?

Ответ. 12.

10. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем 20-копеечных монет было больше, чем 15-копеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты на билет в кино. Половину оставшихся у

него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

Ответ. 2 пятнадцатикопеечные монеты и 6 двадцатикопеечных монет.

§ 6. ЗАДАЧИ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМ УСЛОВИЕМ

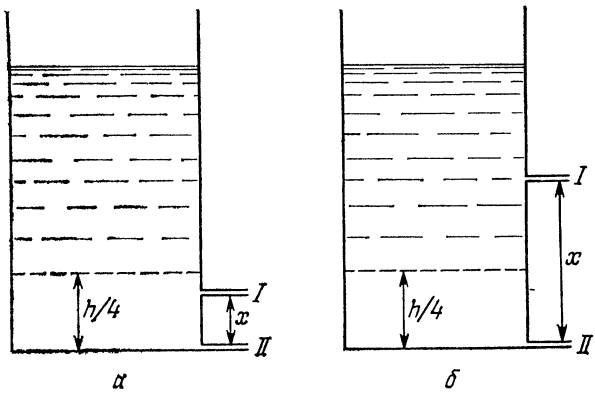
Как уже было сказано, последняя из разобранных в конце предыдущего параграфа задач обладала особенностью, заслуживающей специального рассмотрения. Ее условие было сформулировано таким образом, что при составлении одного из уравнений возникала альтернатива: в зависимости от того, в какой команде заболели игроки, это уравнение записывалось по-разному, и нужно было рассмотреть несколько вариантов. Заметим, что в других разделах элементарной математики задачи, для решения которых необходимо рассматривать несколько возможных вариантов, не так уж редки. Например, при решении уравнений или неравенств с модулями приходится рассматривать случаи, когда выражения, стоящие под знаком модуля, положительны (или равны нулю) и когда они отрицательны. При решении логарифмических неравенств исследуются случаи, когда основания входящих в задачу логарифмов больше или меньше единицы, и т. д. Каждая из таких задач требует рассмотрения всех возможных вариантов, и решение находится лишь после того, как все эти возможности будут исследованы. В этом смысле задачи на составление уравнений не представляют исключения.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сказанное.

Задача. *В бассейн проведены две трубы разной пропускной способности. Первая из труб расположена на боковой стене, а вторая — на дне бассейна. Обе трубы могут работать на слив и на наполнение. Пропускная способность каждой трубы при переходе от наполнения к сливу не меняется и не зависит от уровня воды над ней. Первая труба работает на слив лишь тогда, когда уровень воды выше уровня расположения ее входа. Бассейн наполнили на* 1/4 *и включили первую трубу на слив, а вторую — на наполнение. При этом оказалось, что бассейн наполнился за время, в* 13/12 *раза больше, чем то, которое потребуется для наполнения первоначально пустого бассейна одной только второй трубой. В другой раз при наполненном доверху бассейне включили обе трубы на слив, и*

тогда оказалось, что вся вода вытекла из бассейна за время, составляющее 5/18 *от времени, необходимого для наполнения первоначально пустого бассейна одной первой трубой. Во сколько раз пропускная способность второй трубы больше пропускной способности первой?*

Решение. Исходя из условия задачи нельзя сказать сразу, находится ли вход в первую трубу выше 1/4 высоты бассейна или он ниже этого уровня. В то же время первое условие задачи (первую трубу включили на слив, а



а *б*

Рис. 12

вторую — на наполнение) приводит в каждом из возможных случаев расположения входа первой трубы к разным уравнениям. Для того чтобы найти решение, необходимо рассмотреть оба возможных варианта.

I *случай*: $x < h/4$ (рис. 12, *а*). Здесь h — высота бассейна, x — уровень расположения входа первой трубы. Обозначим пропускные способности труб буквами v_1 и v_2 соответственно, а площадь дна бассейна примем равной 1. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{3h/4}{v_2 - v_1} = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{h}{v_2}, \\ \dfrac{h - x}{v_1 + v_2} + \dfrac{x}{v_2} = \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{h}{v_1}. \end{cases}$$

Так же как и в случаях, многократно встречавшихся раньше, эта система уравнений фактически содержит только две неизвестные величины: x/h и v_2/v_1. Действительно,

систему можно записать так:

$$\begin{cases} \dfrac{3/4}{\dfrac{v_2}{v_1}-1}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{v_2}{v_1}}, \\ \dfrac{1-x/h}{1+\dfrac{v_2}{v_1}}+\dfrac{x/h}{\dfrac{v_2}{v_1}}=\dfrac{5}{18}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим неизвестные:

$$\frac{x}{h}=\frac{169}{288}, \qquad \frac{v_2}{v_1}=\frac{13}{4}.$$

Неравенство $x<h/4$ показывает, что в рассмотренном случае отношение x/h меньше $1/4$. Поэтому решение $x/h=169/288$ не удовлетворяет условиям задачи.

II *случай*: $x\geqslant\frac{h}{4}$ (рис. 12, *б*). В этом случае система уравнений задачи имеет другой вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{h}{4}}{v_2}+\dfrac{h-x}{v_2-v_1}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{h}{v_2}, \\ \dfrac{h-x}{v_1+v_2}+\dfrac{x}{v_2}=\dfrac{5}{18}\cdot\dfrac{h}{v_1}. \end{cases}$$

Преобразуя эту систему так же, как и в предыдущем случае, получим два уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{h}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{v_2}{v_1}}+\dfrac{1-\dfrac{x}{h}}{\dfrac{v_2}{v_1}-1}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{v_2}{v_1}}, \\ \dfrac{1-\dfrac{x}{h}}{1+\dfrac{v_2}{v_1}}+\dfrac{\dfrac{x}{h}}{\dfrac{v_2}{v_1}}=\dfrac{5}{18} \end{cases}$$

для определения двух неизвестных v_2/v_1, x/h. Решая эту систему, находим неизвестные:

$$\frac{x}{h}=\frac{1}{3}, \qquad \frac{v_2}{v_1}=3.$$

Поскольку в данном случае $x\geqslant h/4$, т. е. $x/h\geqslant 1/4$, то найденное отношение v_2/v_1 дает решение задачи.

Ответ. В 3 раза.

Таким образом, решение этой задачи удалось найти после того, как были рассмотрены оба возможных случая.

Непротиворечивым оказался только один из них, который и определил решение задачи.

Рассмотрим еще один пример задачи подобного типа, на этот раз — задачу «на движение».

Задача. *Из города A в город B, расстояние между которыми* 200 км, *мотоциклист ехал* 6 *часов. Сначала он двигался со скоростью* v_1, *превышающей* 15 км/ч, *а потом со скоростью* v_2, *причем время движения с каждой скоростью пропорционально этой скорости. Через* 4 *часа после выезда мотоциклист был в* 120 км *от города A. Определить скорости* v_1 *и* v_2.

Решение. Время движения мотоциклиста со скоростью v_1 обозначим через t_1, а со скоростью v_2 — через t_2. Тогда условия задачи приводят к трем уравнениям для четырех неизвестных:

$$\begin{gathered} v_1t_1 + v_2t_2 = 200, \\ t_1 + t_2 = 6, \\ \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}. \end{gathered}$$

Однако четвертое уравнение в этой задаче сразу составить нельзя. Не ясно, то ли 120 км были пройдены за 4 часа со скоростью v_1, то ли движение на этом пути происходило с той и с другой скоростью. Поэтому необходимо рассмотреть два случая.

I *случай.* Если $t_1 \geqslant 4$, то четвертое уравнение имеет вид

$$4v_1 = 120, \quad \text{т. е.} \quad v_1 = 30 \text{ км/ч}.$$

II *случай.* Если $t_1 < 4$, то четвертое уравнение таково:

$$v_1t_1 + (4 - t_1)v_2 = 120,$$

и отсюда с учетом первого и второго уравнений имеем

$$v_2 = 40 \text{ км/ч}.$$

Разберем *первый* случай: $v_1 = 30$ км/ч, тогда

$$\begin{cases} 30t_1 + v_2t_2 = 200, \\ t_1 + t_2 = 6, \\ \dfrac{30}{v_2} = \dfrac{t_1}{t_2}, \\ 4 \leqslant t_1 < 6. \end{cases}$$

Исключив t_2 и v_2 из первых трех уравнений системы, получаем для t_1 уравнение

$$3t_1^2 - 28t_1 + 54 = 0.$$

Один из корней этого уравнения меньше 4, другой корень не подходит, поскольку он больше 6, и, значит, такой случай отпадает.

Во *втором* случае ($v_2 = 40$ км/ч) имеем смешанную систему:

$$\begin{cases} v_1 t_1 + 40 t_2 = 200; \\ t_1 + t_2 = 6, \\ \frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1}{40}, \quad 0 < t_1 < 4, \\ v_1 = 40 \frac{t_1}{t_2} > 15. \end{cases}$$

Из этой системы находим $v_1 = 20$ км/ч, $t_1 = 2 < 4$.

Ответ. $v_1 = 20$ км/ч; $v_2 = 40$ км/ч.

В качестве последнего примера в этом разделе рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Из пункта A одновременно выходят три пешехода и одновременно возвращаются в тот же пункт, обойдя маршрут, состоящий из прямолинейных отрезков AB, BC, CD, DA, которые образуют равнобочную трапецию (AB, CD — боковые стороны). На указанных отрезках скорости всех пешеходов постоянны и равны: у первого* 6, 8, 5 *и* 8 км/ч *соответственно, у второго* — 7, 7, 6 *и* 8 км/ч *соответственно. Скорость третьего пешехода на каждом из отрезков равна либо* 7 км/ч, *либо* 8 км/ч, *причем на всем пути он меняет скорость один раз. Определить отношение меньшего основания трапеции к боковой стороне.*

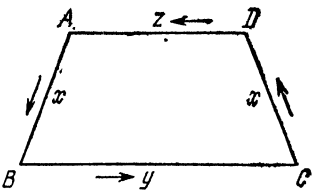


Рис. 13

Решение. Обозначим стороны равнобочной трапеции $ABCD$ (рис. 13) через x, y, x и z соответственно. Тогда условие о том, что первый и второй пешеходы пройдут весь путь за одно и то же время, запишется в виде уравнения

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{x}{5} + \frac{z}{8} = \frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{x}{6} + \frac{z}{8},$$

из которого находим

$$\frac{2}{35} x = \frac{1}{56} y$$

или

$$\frac{y}{x}=\frac{16}{5}. \qquad (1)$$

Второе уравнение сразу написать нельзя: не известно, на каких участках каковы были скорости третьего пешехода (в этом состоит особенность задач рассматриваемого типа). Поскольку, однако, известно, что в процессе движения он менял скорость только один раз, то надлежит рассмотреть 6 случаев: скорость третьего пешехода на одном, двух или трех участках была 7 км/ч и скорость того же пешехода на одном, двух или трех участках была 8 км/ч. Соответственно этому возможны 6 вариантов второго уравнения:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{7}+\frac{x+y+z}{8}$;

2) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{7}+\frac{x+z}{8}$;

3) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{7}+\frac{z}{8}$;

4) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{8}+\frac{x+y+z}{7}$;

5) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{8}+\frac{x+z}{7}$;

6) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{8}+\frac{z}{7}$.

Первое из этих уравнений противоречиво. Из второго уравнения находим

$$\frac{y}{x}=\frac{83}{15},$$

что противоречит соотношению (1). Из третьего уравнения имеем

$$\frac{y}{x}=\frac{68}{15},$$

что также противоречит соотношению (1). Из четвертого уравнения получаем $z/x=7/3$, из пятого — $z/x=83/15$, из шестого — $z/x=98/15$.

Рассмотрим три последних соотношения. Они не противоречат условию (1). Однако проверим, может ли при таком соотношении сторон существовать трапеция. Для ее существования необходимо выполнение неравенств

$$x+y+x\geqslant z$$

и

$$x+z+x \geqslant y,$$

т. е.

$$\frac{z}{x}-\frac{y}{x} \leqslant 2 \text{ и } \frac{y}{x}-\frac{z}{x} \leqslant 2.$$

Решения пятого и шестого уравнений не удовлетворяют этим условиям; решение четвертого дает ответ задачи. Поскольку $7/3 < 16/5$, то меньшее основание трапеции $-z$.

Ответ. Отношение меньшего основания трапеции к боковой стороне равно 7:3.

Упражнения

1. Между пунктами A и B расположен пункт C, причем $AC=17$ км, $BC=3$ км. Из пункта A в пункт B выехала машина, которая, не проехав и двух километров, остановилась. Через некоторое время она двинулась дальше в пункт B, и в этот же момент из пункта C в пункт B отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист, каждый из которых, достигнув B, сразу же поворачивает назад. С кем раньше поравняется машина, с пешеходом или велосипедистом, если ее скорость в 4 раза больше скорости велосипедиста и в 8 раз больше скорости пешехода?

Ответ. С велосипедистом.

2. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 ч раньше. Найти скорости поездов.

Ответ. 50 км/ч, 40 км/ч.

3. Самолет совершает посадку и движется по земле в течение некоторого времени равномерно со скоростью v. Затем летчик включает тормоза, и движение самолета становится равнозамедленным, причем в каждую секунду скорость уменьшается на 2 м/с. Путь от места приземления до места полной остановки равен 4 км. Отношение времени, за которое самолет проходит первые 400 м, к времени, за которое самолет проходит весь путь по земле, равно 4:65. Определить скорость v.

Ответ. $v=100$ м/с.

4. Расстояние между расположенными на одном шоссе пунктами A и B равно 120 км. Одновременно из пункта A и пункта B выехали соответственно велосипедист и мотоциклист. Через 2 часа после начала движения они встретились. Если бы скорость велосипедиста была в 2 раза больше, а скорость мотоциклиста на 10 км/ч меньше, чем на самом деле, то момент, когда они встретились, наступил бы на 1 час позднее, чем в действительности. Определить, за какое время велосипедист проезжает расстояние между пунктами A и B.

Ответ. За 12 ч.

5. Имеются два картофельных поля. Сначала первое поле было убрано бригадой A, а затем второе поле было убрано вместе бригадами A и B. После того как была убрана 1/3 всей площади, оказалось,

что время, необходимое на окончание уборки, в 21/13 раза меньше времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада A. Известно, кроме того, что если бы второе поле убирала только бригада B, то ей для этого потребовалось бы время, вдвое большее времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада A. Во сколько раз производительность бригады A больше производительности бригады B?

Ответ. В 6 раз.

6. Вода из цилиндрического бассейна глубиной h вытекает по двум трубам разной пропускной способности, первая из которых расположена на дне бассейна, а вторая — на боковой стенке. Если при наполненном целиком бассейне открыть только вторую трубу, то вода будет протекать через нее в течение времени, которое в 4/3 раза меньше времени, нужного для слива всей воды из бассейна только через одну первую трубу. При действии обеих труб продолжительность слива всей воды из бассейна, наполненного целиком, в 4/3 раза больше, чем наполненного на 2/3. Пропускная способность труб не зависит от уровня воды над трубой. На какой высоте расположена вторая труба?

Ответ. $h/2$.

7. Три пешехода одновременно выходят из пункта A и одновременно прибывают в пункт D, пройдя по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, AD ($ABCD$ — параллелограмм). На каждом из этих отрезков скорости всех пешеходов постоянны и равны: у первого 3, 6, 5 и 8 км/ч соответственно, у второго — 4, 5, 6 и 7 км/ч соответственно. Скорость третьего пешехода на отрезке AD равна 8 км/ч, а на остальных отрезках совпадает либо со скоростью первого, либо со скоростью второго на соответствующем отрезке, однако ни с тем, ни с другим он не проходит весь маршрут целиком. Установить, является ли угол ABC острым или тупым.

Ответ. Угол ABC острый.

8. Три бегуна одновременно стартуют в пункте A и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CM, MA (ABC — треугольник, M — середина отрезка AB). На каждом из указанных отрезков скорости всех бегунов постоянны и равны: у первого $13\frac{5}{7}$, 10, 10 и 16 км/ч соответственно, а у второго — $12\frac{12}{13}$, 14, 12 и 14 км/ч соответственно. Третий бегун на участке BC бежит рядом с одним из других бегунов, на участке MA его скорость та же, что и на участке AB, причем на всем пути он меняет скорость не более чем дважды. Определить, является ли угол ABC острым или тупым.

Ответ. Угол ABC острый.

9. Три самосвала, грузоподъемность первого из которых 12 т, второго — не меньше 2 т, а третьего — не меньше, чем второго, должны быть загружены песком с помощью двух транспортеров. Первый транспортер загружает 1/2 т песка в минуту, второй — 2/3 т в минуту. Самосвалы могут подъезжать к транспортерам в любом порядке, причем загрузка одного самосвала может производиться только одним транспортером. Кроме того, начав загрузку при помощи одного из транспортеров, самосвал не может уже переехать на догрузку к другому. Время погрузки считается от начала загрузки первого самосвала до окончания загрузки последнего. При соблюдении этих условий минимальное время загрузки

составляет 22,5 мин. Предполагается, что на смену у транспортера загруженного самосвала другим порожним самосвалом время не теряется. Если же все самосвалы загружаются лишь с помощью одного второго транспортера, то погрузка занимает 36 мин. Определить грузоподъемности второго и третьего самосвалов.

Ответ. 3 т, 9 т.

10. Из пункта A одновременно стартуют три бегуна и одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, образующих треугольник ABC. На каждом из указанных отрезков скорости у бегуна постоянны и равны: у первого 10, 16 и 14 км/ч соответственно, у второго — 12, 10 и 16 км/ч соответственно. Третий бегун в пунктах B и C оказывается не один и меняет скорость на маршруте один раз. Установить, является ли треугольник ABC остроугольным или тупоугольным.

Ответ. Треугольник ABC тупоугольный.

§ 7. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ НУЖНО НАХОДИТЬ НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

В особую группу можно выделить задачи, для решения которых необходимо найти экстремум той или иной функции, т. е. определить, при каких значениях неизвестной эта функция достигает наибольшего или наименьшего значения. Отличительная особенность каждой такой задачи состоит в том, что одно или несколько условий в ее формулировке, позволяющие получить либо дополнительное уравнение, либо выделить единственное решение из многих возможных, составляют задачу на отыскание наибольшего или наименьшего значения некоторой функции.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача. *Автомобиль выезжает из пункта A и едет с постоянной скоростью v* км/ч *до пункта B, отстоящего от пункта A на расстояние* 24,5 км. *В пункте B автомобиль переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на* 54 км/ч, *и движется так до полной остановки. Затем автомобиль сразу же поворачивает обратно и возвращается в A с постоянной скоростью v. Какова должна быть скорость v, чтобы автомобиль за наименьшее время проехал путь от A до полной остановки и обратно до пункта A указанным выше способом?*

Решение. Подсчитаем время, которое затрачивает автомобиль на весь путь от A до полной остановки и обратно. Покажем, что это время определяется одним неизвестным параметром v.

1. Расстояние 24,5 км автомобиль проезжает за время

$$t_1 = \frac{24{,}5}{v}.$$

2. Вслед за этим он двигался до полной остановки с ускорением -54 км/ч^2 в течение времени

$$t_2 = \frac{v}{54},$$

пройдя при этом расстояние s, которое определяется по известной формуле для равноускоренного движения:

$$s = vt_2 - \frac{54t_2^2}{2}, \qquad s = \frac{v^2}{54} - \frac{v^2}{2 \cdot 54} = \frac{v^2}{108}.$$

3. Время, затраченное на обратный путь, равно

$$t_3 = \frac{24{,}5 + \frac{v^2}{108}}{v} = \frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{108}.$$

Поэтому полное время движения автомобиля

$$T = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{54} + \left(\frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{108}\right) = \frac{49}{v} + \frac{v}{36}.$$

Таким образом, время движения автомобиля от пункта A до полной остановки и обратно является функцией одной переменной v — его скорости на первом участке:

$$T = T(v) = \frac{v}{36} + \frac{49}{v}.$$

Определим теперь, при каком значении v эта функция достигает своего минимума. Для этого вычислим ее производную $T'(v)$

$$T'(v) = \frac{1}{36} - \frac{49}{v^2}.$$

Необходимым условием экстремума дифференцируемой функции является равенство нулю ее производной

$$T'(v) = \frac{1}{36} - \frac{49}{v^2} = 0 \qquad (v > 0).$$

Отсюда находим, что $v = 42$. При этом значении переменной функция $T(v)$ имеет минимум, поскольку $T'(v) > 0$ при $v > 42$ и $T'(v) < 0$ при $v < 42$. Таким образом, при скорости 42 км/ч автомобиль, двигаясь указанным выше

способом, затратит на весь путь минимально возможное время.

Заметим, что функция $T(v)$ состоит из двух слагаемых: одно из них пропорционально скорости движения v, а другое обратно пропорционально этой скорости. Таким образом, она относится к классу функций вида (рис. 14)

$$y(x)=bx+\frac{a}{x}.$$

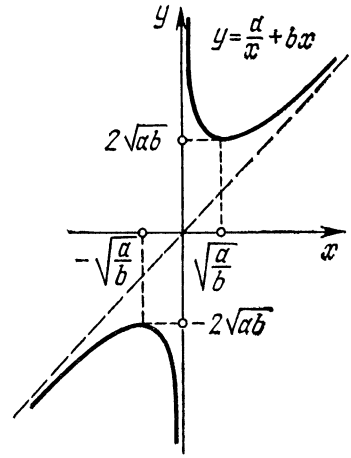


Рис. 14

Если числа a и b имеют одинаковые знаки, то такая функция обладает точками экстремума. Покажем, как найти эти точки, не прибегая к дифференцированию. Воспользуемся известным неравенством «среднее арифметическое неотрицательных чисел больше или равно их среднему геометрическому»:

$$\frac{A+B}{2}\geqslant\sqrt{AB}\quad(A\geqslant 0,\quad B\geqslant 0). \tag{1}$$

В формуле (1) равенство имеет место тогда и только тогда, когда $A=B$.

Для функции

$$y=bx+\frac{a}{x}\qquad(a>0,\quad b>0),$$

применяя неравенство (1), получаем

$$y=\frac{a}{x}+bx\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{x}\cdot bx}=2\sqrt{ab},\quad\text{если}\quad x>0.$$

Таким образом, функция $y(x)$ при $x>0$ больше или равна $2\sqrt{ab}$. При этом равенство достигается в случае, если

$$\frac{a}{x}=bx,\ \text{т. е.}\ x=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Значит, локальный минимум рассматриваемой функции равен $2\sqrt{ab}$ и достигается при $x=\sqrt{a/b}$.

Аналогичным образом, при $x<0$ функция $y(x)$ имеет локальный максимум, так как при этом $y\leqslant -2\sqrt{ab}$; максимум достигается при $x=-\sqrt{a/b}$ и равен $-2\sqrt{ab}$.

Для частного случая $a=b=1$ имеем известное неравенство

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2,$$

т. е. сумма взаимно обратных чисел по модулю всегда больше или равна 2.

Используя рассмотренное свойство для функций $T(v)$, получаем неравенство

$$T(v)=\frac{v}{36}+\frac{49}{v}\geqslant 2\sqrt{\frac{v}{36}\cdot\frac{49}{v}}=2\frac{1}{3}.$$

Таким образом, минимальное время движения автомобиля равно $2\frac{1}{3}$ ч. Искомая скорость определяется из равенства

$$\frac{v}{36}=\frac{49}{v}.$$

Легко видеть, что она равна 42 км/ч.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача. *Три бригады должны выполнить работу. Первая бригада делает в день* 200 *деталей, вторая — на* m *деталей меньше, чем первая* $(0<m<200)$, *а третья — на* 5 m *деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют* 1/5 *всей работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполняют оставшиеся* 4/5 *работы. На сколько деталей в день меньше должна делать вторая бригада, чем первая, чтобы вся работа была выполнена указанным способом как можно скорее?*

Решение. Из условия задачи понятно, что вторая бригада делает в день $200-m$ деталей, а третья бригада — $200+5m$ деталей. Если обозначить через Q общее количество деталей, которое нужно сделать, то время всей работы t слагается из двух частей:

$$t_1=\frac{Q/5}{400-m}$$

— времени работы отдельно первой и второй бригад,

$$t_2=\frac{4Q/5}{600+4m}$$

— времени совместной работы бригад, так что

$$t(m)=t_1+t_2=\frac{Q/5}{400-m}+\frac{4Q/5}{600+4m}=\frac{110\cdot Q}{60000+250m-m^2}.$$

Таким образом, время всей работы t является функцией только одной переменной m.

Найдем, при каком значении m функция $t(m)$ достигает минимума. Для этого приравняем производную функции $t(m)$ нулю:

$$t'(m)=\frac{220\cdot Q\,(m-125)}{(60\,000+250m-m^2)^2}=0.$$

Из этого уравнения находим $m=125$. Легко видеть, что $t'(m)>0$ при $m>125$ и $t'(m)<0$ при $m<125$. Следовательно, при $m=125$ функция $t(m)$ действительно достигает минимума.

Этот же результат можно было бы получить, не прибегая к дифференцированию. Поскольку числитель дроби $t(m)$ не зависит от m, то значение этой функции определяется величиной знаменателя, являющегося квадратичной функцией от m. Хорошо известно, что квадратичная функция

$$y=ax^2+bx+c,$$

графики которой приведены на рис. 15, имеет точку максимума при $a<0$ и точку минимума при $a>0$. В том и другом случаях экстремум достигается при $x=-b/2a$.

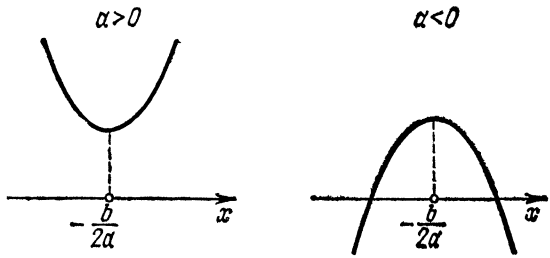


Рис. 15

Ясно теперь, что t будет наименьшим, если знаменатель

$$60\,000+250m-m^2$$

дроби будет наибольшим, т. е. при $m=125$, причем это значение находится в допустимом для данной задачи интервале: $0<m<200$.

Итак, работа будет выполнена за наименьшее время, если вторая бригада будет делать на 125 деталей в день меньше, чем первая.

Ответ. $m=125$ деталей.

Задача. *Между двумя портами, удаленными друг от друга на расстояние* 1200 км, *с постоянной скоростью курсирует теплоход. Затраты на рейс в одном направлении слагаются из двух частей. Первая часть, связанная с обслуживанием пассажиров, пропорциональна времени нахождения теплохода в пути, а другая, обусловленная стоимостью топлива, пропорциональна кубу скорости движения. Найти скорость, с которой должен идти теплоход, чтобы затраты на рейс были минимальны, если известно, что при скорости* 90 км/ч *затраты равны* 11,61 *тыс. руб., причем стоимость обслуживания пассажиров составляет* 16/27 *стоимости топлива.*

Р е ш е н и е. Обозначим искомую скорость теплохода через v, а затраты на рейс — через Q. Кроме того, учтем, что время движения t теплохода в одном направлении равно $1200/v$.

Из условия задачи имеем

$$Q = k_1 t + k_2 v^3 = k_1 \cdot \frac{1200}{v} + k_2 v^3,$$

откуда видно, что Q является функцией только одной переменной v. Здесь k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Для определения коэффициентов k_1 и k_2 используем остальные условия задачи, согласно которым

$$Q(90) = k_1 \cdot \frac{1200}{90} + k_2 \cdot 90^3 = 11\,610$$

и

$$k_1 \cdot \frac{1200}{90} = \frac{16}{27} \cdot k_2 \cdot 90^3.$$

Получаем систему двух линейных уравнений:

$$\frac{40}{3} k_1 + 729\,000 k_2 = 11\,610,$$

$$\frac{40}{3} k_1 = 432\,000 k_2,$$

из которой определяем: $k_1 = 324$, $k_2 = 0{,}01$.

Таким образом, затраты на рейс теплохода при скорости движения v определяются выражением

$$Q(v) = \frac{388\,800}{v} + 0{,}01 \cdot v^3.$$

Найдем, при каком значении $v > 0$ эта функция достигает минимума. Для этого составим ее производную $Q'(v)$ и приравняем ее нулю:

$$Q'(v) = -\frac{388\,800}{v^2} + 0{,}03v^2 = 0,$$

или

$$Q'(v) = \frac{0{,}03\,(v^2 - 3600)\,(v^2 + 3600)}{v^2} = 0.$$

Отсюда видно, что $v = 60$. Кроме того, $Q'(v) > 0$ при $v > 60$ и $Q'(v) < 0$ при $0 < v < 60$, т. е. функция $Q(v)$ при $v = 60$ имеет минимум. Таким образом, затраты на рейс будут минимальны при скорости движения 60 км/ч.

Ответ. 60 км/ч.

Рассмотрим еще один пример подобной задачи.

Задача. *Лаборатории необходимо заказать некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместимостью* 100 л. *Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату площади поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной площади ее поверхности. При этом колба объемом в* 1 л *обходится в* 1 *руб.* 25 *коп., и в этом случае стоимость труда составляет* 20 % *стоимости колбы (толщину стенок колбы считать пренебрежимо малой). Хватит ли на выполнение работы* 100 *руб.?*

Решение. Обозначим стоимость колбы с площадью поверхности s через $q(s)$. Тогда по условию задачи

$$q(s) = ks^2 + ms. \tag{1}$$

Здесь k и m — коэффициенты пропорциональности. Определим эти коэффициенты.

Пусть R — радиус колбы, тогда $s = 4\pi R^2$, откуда

$$R = \sqrt{\frac{s}{4\pi}}.$$

Отсюда объем колбы равен

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)^3.$$

Определяя площадь поверхности колбы как функцию ее объема, получаем

$$s = \sqrt[3]{36\pi V^2}.$$

Если $V = 1$ л, то $s = \sqrt[3]{36\pi}$ (дм^2). Подставим это значение в формулу (1):

$$q(\sqrt[3]{36\pi}) = 1{,}25 = k(\sqrt[3]{36\pi})^2 + m\sqrt[3]{36\pi}.$$

Мы получили первое уравнение для определения коэффициентов k и m. Второе уравнение получается из условия, что стоимость труда составляет 20 % стоимости колбы:

$$k(\sqrt[3]{36\pi})^2 = 0{,}2\left[k(\sqrt[3]{36\pi})^2 + m\cdot\sqrt[3]{36\pi}\right].$$

Если решить эти два уравнения совместно, то для k и m получаются следующие значения:

$$k = \frac{0{,}25}{(\sqrt[3]{36\pi})^2}; \quad m = \frac{1}{\sqrt[3]{36\pi}}.$$

Поскольку общая вместимость колб известна и составляет 100 л, то число этих колб равно

$$N=\frac{100}{V}=\frac{100\cdot\sqrt{36\pi}}{(\sqrt{s})^3}.$$

Общая стоимость работы выразится формулой

$$Q=q\cdot N=\frac{25\cdot\sqrt{36\pi}}{(\sqrt[3]{36\pi})^2}\cdot\sqrt{s}+\frac{100\sqrt{36\pi}}{\sqrt[3]{36\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Мы видим, что полная стоимость работы состоит из двух частей: одна пропорциональна $\sqrt{s}$, а другая обратно пропорциональна $\sqrt{s}$. При уменьшении s одно из слагаемых уменьшается, но другое увеличивается. Поэтому найдем такое значение s, при котором общая стоимость колб будет наименьшей. Для этого вычисляем производную функции Q:

$$Q'(s)=\frac{25\sqrt{36\pi}}{(\sqrt[3]{36\pi})^2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{s}}-\frac{100\sqrt{36\pi}}{\sqrt[3]{36\pi}}\cdot\frac{1}{2s\sqrt{s}},$$

или

$$Q'(s)=\frac{25\sqrt{36\pi}}{(\sqrt[3]{36\pi})^2}\cdot\frac{1}{2s\sqrt{s}}(s-4\sqrt[3]{36\pi}).$$

При том значении s, при котором функция $Q(s)$ минимальна, производная $Q'(s)$ равна 0. Поэтому получаем

$$s=4\cdot\sqrt[3]{36\pi}.$$

Очевидно, что при $s<4\sqrt[3]{36\pi}$ выполняется условие $Q'<0$, а при $s>4\sqrt[3]{36\pi}$ — условие $Q'>0$, т. е. участок монотонного убывания функции $Q(s)$ сменяется участком ее монотонного возрастания. Это означает, что при найденном значении s функция $Q(s)$ имеет наименьшее значение. При этом оказывается, что число

$$N=\frac{100}{V}=\frac{100\sqrt{36\pi}}{(\sqrt{s})^3}=12{,}5$$

не будет целым. Значит, колб должно быть изготовлено не менее 13 и стоимость работы будет больше, чем 100 руб., т. е. 100 руб. не хватит на выполнение указанной работы.

Ответ. Не хватит.

Рассмотрев эти четыре задачи, можно отметить общую закономерность их решения. В каждой задаче сначала

выявлялось выражение, изменение которого позволило бы дать ответ на поставленный вопрос. В первой задаче это было время всего движения, во второй задаче — время выполнения работы, в третьей — затраты на рейс, в четвертой — стоимость изготовления колб. Затем вводился переменный параметр, от которого это выражение зависело. Таким образом, возникала функция, для которой отыскивалось наибольшее или наименьшее значение. Во всех рассмотренных случаях для этой цели использовалась производная.

Рассмотрим теперь пример задачи, условие которой приводит к уравнению, связывающему вводимые неизвестные с их производными.

Задача. *Студентка биологического факультета проводила эксперименты по выращиванию бактерий в питательной среде. При этом она заметила, что скорость увеличения числа бактерий в любой момент времени пропорциональна числу бактерий, которое имеется в этот момент времени, причем коэффициент пропорциональности равен* 0,5 *(время измеряется в часах). По заданию необходимо вырастить колонию бактерий численностью более* 20 000 *единиц. Каково наименьшее время выращивания колонии бактерий указанной численности, если известно, что первоначально в питательную среду было помещено* 200 *бактерий?*

Решение. Обозначим численность колонии бактерий в произвольный момент времени t через $N(t)$. Тогда скорость роста колонии определяется производной $N'(t)$ числа бактерий по времени. Условие задачи приводит к уравнению

$$N'(t) = 0{,}5 \cdot N(t), \qquad (2)$$

которому должна удовлетворять функция $N(t)$.

В отличие от уравнений, встречавшихся нам при разборе задач предыдущих параграфов, в это уравнение входит неизвестная функция, причем не только она сама, но и ее производная. Такое уравнение являет собой пример *дифференциальных уравнений*, имеющих важное значение во многих областях знаний.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что дифференциальное уравнение (2) имеет решения вида

$$N(t) = C \cdot e^{0{,}5t}, \qquad (3)$$

где C — произвольный постоянный коэффициент, причем известно, что формула (3) исчерпывает *все множество решений* этого уравнения.

Для определения неизвестного коэффициента C используется *начальное условие*, имеющееся в задаче, а именно при $t=0$ число помещенных в среду бактерий $N(0)$ равно 200. Используя решение (3), получим

$$N(0)=200=C\cdot e^{0,5\cdot 0}=C$$

откуда находим, что $C=200$. Таким образом, число бактерий в питательной среде меняется по закону $N(t)=200\cdot e^{0,5t}$.

По условию задачи необходимо найти наименьшее время T такое, что $N(t)\geqslant 20\,000$. Следовательно,

$$200e^{0,5T}\geqslant 20\,000,$$

или

$$T\geqslant 2\ln 100.$$

Ответ. $2\ln 100\approx 9{,}2$ ч.

В заключение этого параграфа рассмотрим пример задачи, в которой требуется найти экстремальное (наименьшее или наибольшее) значение *линейной* функции $F=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ нескольких *неотрицательных* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии, что эти переменные удовлетворяют заданной системе *линейных* уравнений или неравенств. Подобные задачи возникают в связи с планированием производства, управления различными процессами, в экономике и т. д. Математическая дисциплина, изучающая эти вопросы, называется «*линейным программированием*». Рассмотрим один из простейших примеров задач на составление уравнений и неравенств, который можно сформулировать как задачу линейного программирования.

Задача. *Предприятие выпускает изделия двух типов путем последовательной обработки каждого из них сначала в цехе А, а затем в цехе Б. Обработка каждого изделия первого типа занимает* 5 ч *в цехе А и* 3 ч *в цехе Б; обработка каждого изделия второго типа занимает* 2 ч *в цехе А и* 4 ч *в цехе Б. Цех А в состоянии работать не более* 150 ч, *цех Б — не более* 132 ч *в месяц. Известно, что предприятие за каждое изготовленное изделие первого и второго типов получает прибыль соответственно* 300 *и* 200 *рублей. Определить, сколько изделий каждого типа следует выпускать в месяц, чтобы обеспечить предприятию наибольшую прибыль, и какова эта прибыль.*

Решение. Обозначим через x и y искомые числа изделий первого и второго типов соответственно, а через

F — прибыль предприятия, полученную за счет производства x изделий первого типа и y изделий второго типа. Очевидно, что

$$F = F(x, y) = 300x + 200y. \tag{4}$$

Тогда рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: найти неотрицательные числа x и y, для которых функция $F = 300x + 200y$ имеет наибольшее значение при условиях

$$\begin{cases} 5x + 2y \leqslant 150, \\ 3x + 4y \leqslant 132, \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

(x и y — целые числа).

Чтобы лучше понять, что представляет собой система четырех неравенств (5), обратимся к ее геометрической интерпретации. Введем на плоскости прямоугольную систему координат. Истолковывая x и y как координаты точки на плоскости Oxy, выясним, прежде всего, геометрический смысл неравенства

$$5x + 2y \leqslant 150. \tag{6}$$

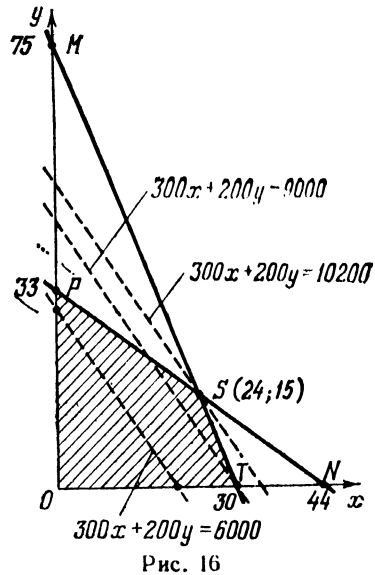


Рис. 16

Известно, что множество точек, определяемое уравнением $5x + 2y = 150$, есть прямая линия на плоскости (прямая MT на рис. 16). Эта прямая делит плоскость на две части — верхнюю и нижнюю полуплоскости. Координаты любой точки нижней полуплоскости удовлетворяют неравенству (6), а сами эти точки лежат либо ниже прямой MT, либо на ней. Точки верхней полуплоскости, лежащие выше прямой MT, описываются неравенством $5x + 2y > 150$.

Аналогично, неравенство $3x + 4y \leqslant 132$ определяет полуплоскость, точки которой лежат ниже прямой $3x + 4y = 132$, изображенной на рис. 16 в виде прямой PN, или на этой прямой.

Очевидно, что неравенства $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ определяют точки первого квадранта рассматриваемой плоскости, включая его границы.

Нетрудно теперь заключить, что если какая-либо пара чисел x, y удовлетворяет всем неравенствам системы (5), то соответствующая точка (x, y) принадлежит одновременно всем четырем полуплоскостям, определяемым неравенствами этой системы; другими словами, такая точка лежит внутри многоугольника $OPST$ или на его границе. Эта область на рис. 16 заштрихована.

Каждая точка многоугольника $OPST$ определяет вариант производства изделий первого и второго типов с учетом ограниченности времени работы каждого цеха. Исходная задача теперь может быть переформулирована следующим образом: среди точек многоугольника найти такую, в которой линейная функция F принимает наибольшее значение.

Дадим геометрическое толкование функции F, определяющей прибыль предприятия. Пусть прибыль равна фиксированному значению F_0, например 6000 руб. Легко видеть, что множество точек на плоскости, в которых функция (4) принимает значение 6000, изображается прямой, уравнение которой

$$300x + 200y = 6000. \qquad (7)$$

На рис. 16 эта прямая изображена пунктирной линией, делящей многоугольник $OPST$ на две части. Всем общим точкам этой прямой и многоугольника $OPST$ соответствует одно и то же значение прибыли $F_0 = 6000$, в том числе и точкам $x = 20$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = 30$.

Другому фиксированному значению прибыли F_1, равному, например, значению 9000, отвечает другая прямая, параллельная прямой (7).

Придавая F различные значения, получаем семейство параллельных прямых, являющихся линиями уровня для функции F, т. е. линиями, во всех точках которых функция F принимает постоянное значение $F = \text{const}$.

Пересечем многоугольник $OPST$ прямой $F = 300x + 200y = F_0$ и будем перемещать ее параллельно самой себе в направлении увеличения значений F_0. Перемещение будем осуществлять до такого предельного положения, когда многоугольник $OPST$ окажется целиком в нижней полуплоскости относительно предельной прямой, причем хотя бы одна его точка принадлежит этой прямой. В случае, изображенном на рис. 16, параллельный сдвиг при-

ведет прямую в такое предельное положение, когда у нее окажется только одна общая точка с многоугольником — вершина S. Координаты этой вершины определяются числами $x=24$ и $y=15$. Им соответствует максимальное значение прибыли $F=300\cdot 24+200\cdot 15=10\,200$.

Ответ. 24 и 15; 10 200 руб.

Упражнения

1. По двум взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку движутся две автомашины со скоростями v_1 и v_2. Определить минимальное в процессе движения расстояние между машинами, если в начальный момент времени расстояния машин от перекрестка были равны d_1 и d_2 соответственно.

Ответ. $s=\left[\dfrac{(v_1d_2-v_2d_1)^2}{v_1^2+v_2^2}\right]^{1/2}$.

2. Автомобиль едет от пункта A до пункта B с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на a км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением a км/ч^2. Каково должно быть значение a, чтобы через 3 ч после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту B?

Ответ. $a=14$.

3. Два автомобиля едут по шоссе друг за другом на расстоянии 20 м с одинаковой скоростью 24 м/с. Шоферы, заметив впереди препятствие, начинают тормозить. В результате автомобили переходят на равнозамедленное движение и движутся так до полной остановки. Шофер переднего автомобиля начал торможение на 2 с раньше шофера заднего автомобиля. Ускорение переднего автомобиля —4 м/с^2. Наименьшее расстояние, на которое сближались автомобили, равнялось 4 м. Определить, какой автомобиль остановился раньше, и найти ускорение заднего автомобиля.

Ответ. Второй автомобиль остановился раньше; —8 м/с^2.

4. Грузовой лифт спускается с башни высотой 320 м. Сначала он движется со скоростью 20 м/с, а потом его скорость мгновенно переключается и становится равной 50 м/с. Спустя некоторое время после начала движения лифта с вершины башни сбрасывают камень, который совершает свободное падение и достигает земли одновременно с лифтом. Известно, что в процессе движения камень был все время выше лифта, причем максимальная разность высот между ними составляла 60 м. В момент переключения скорости лифта скорость камня превышала 25 м/с, но была меньше 45 м/с. Определить, спустя какое время после начала движения лифта сбросили камень. При решении задачи ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ. 2 с.

5. Некто нанял пароход для перевозки грузов на расстояние в 1000 км. Он предлагает плату хозяину парохода в размере 1500 золотых монет, но требует вернуть 9 золотых монет за каждый час пребывания парохода в пути. Предполагается, что пароход будет двигаться с постоянной скоростью. Если эта скорость будет равна v км/ч, то в конце пути хозяин обязан выплатить

команде премию, равную $10 \cdot v$ золотым монетам. С какой скоростью хозяин должен вести пароход, чтобы заработать максимальное число золотых монет? Каково это число?

Ответ. 30 км/ч; 900 монет.

6. Требуется построить несколько одинаковых жилых домов с общей площадью 40 тыс. м². Затраты на постройку одного дома, имеющего s м² жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $s\sqrt{s}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{s}$. Строительство дома площадью 1600 м² обходится в 184,8 тыс. руб., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32 % стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей; найти эту сумму.

Ответ. $2800 \cdot \sqrt{2}$ тыс. руб.; 8 домов.

7. Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути несколько остановок. На первой остановке в поезд садится 5 пассажиров, а на каждой следующей — на 10 пассажиров больше, чем на предыдущей остановке. На каждой остановке 50 пассажиров выходят из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт B приедет менее 12 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462?

Ответ. Невозможен.

8. Некоторое предприятие приносит убытки, составляющие 31 тыс. руб. в год. Для превращения его в рентабельное было предложено увеличить ассортимент продукции. Подсчеты показали, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, составят 25 тыс. руб. в год, а дополнительные расходы окажутся равными 5 тыс. руб. в год при освоении одного нового вида, но освоение каждого последующего потребует на 10 тыс. руб. в год больше расходов, чем освоение предыдущего. Можно ли указанным способом сделать предприятие рентабельным?

Ответ. Нельзя.

9. Две точки P_1 и P_2 находятся по разные стороны от пункта A: точка P_1 на 200 м левее пункта A, а точка P_2 на 100 м правее этого пункта. Обе точки одновременно начинают двигаться навстречу друг другу, причем скорость каждой из них в данный момент времени пропорциональна расстоянию другой точки до пункта A в этот же момент времени. Коэффициент пропорциональности в законах движения точек одинаков и, если время измеряется в минутах, равен 1. Успеет ли точка P_2 достичь пункта A за одну минуту?

Ответ. Успеет.

10. *(задача о диете).* Диета должна обеспечивать ежесуточную потребность организма не менее чем в 36, 40 и 12 единицах некоторых микроэлементов M_1, M_2 и M_3 соответственно. Для удовлетворения этой потребности решено использовать два вида продуктов $П_1$ и $П_2$. Содержание микроэлементов M_1, M_2 и M_3 в этих продуктах (в 1 г) дано в таблице:

	M_1	M_2	M_3
$П_1$	6	10	6
$П_2$	18	10	2

Известно, что стоимость 5 г продукта $П_1$ равна стоимости 8 г продукта $П_2$. Определить, какое количество продукта $П_1$ и продукта $П_2$ нужно использовать, чтобы удовлетворялось ежесуточная потребность организма в микроэлементах и чтобы общая стоимость питания была минимальна.

Ответ. 1 г и 3 г.

§ 8. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6% примесей. Какой процент примесей в руде?

Ответ. 53%.

2. Имеются три слитка. Первый слиток имеет массу 5 кг, второй — 3 кг, и каждый из этих двух слитков содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найти массу третьего слитка и процент содержания меди в нем.

Ответ. 10 кг; 69%.

3. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они встретились бы через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

Ответ. 3 ч.

4. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода достиг мотоциклист?

Ответ. На 2 км.

5. Двое рабочих выполнили всю работу за 10 дней, причем последние два дня первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнил бы всю работу, если известно, что за первые 7 дней они вместе выполнили 80% всей работы?

Ответ. За 14 дней.

6. С маяка, находящегося в море на расстоянии 500 м от берега, видна лишь передняя стена пристани длиной

40 м. Между маяком и берегом параллельно передней стене пристани движется пароход длиной 50 м с постоянной скоростью 5 м/с. Пароход загораживает всю пристань от смотрителя маяка в течение 4 с. Каково расстояние парохода от берега? (Считать, что берег прямолинейный и передняя стена пристани идет вдоль берега. Шириной корабля пренебречь.)

Ответ. 125 м.

7. Фрукты в магазин были доставлены двумя машинами, по 60 ящиков в каждой; при этом в 21 ящике были груши, а в остальных — яблоки. Сколько ящиков с грушами было в каждой машине, если известно, что в первой машине на один ящик с грушами приходилось в три раза больше ящиков с яблоками, чем во второй?

Ответ. 6 и 15.

8. Пристани A и B находятся на противоположных берегах озера. Пароход плывет из A в B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 18 км/ч. В момент выхода парохода из A навстречу ему из B в A отправляется движущаяся с постоянной скоростью лодка, которая встречается с пароходом в 11 ч 10 мин. В 11 ч 25 мин лодка находится на расстоянии 3 км от A. Направляясь из B в A после стоянки, пароход догоняет лодку в 11 ч 40 мин. Определить время прибытия лодки в A.

Ответ. 11 ч 55 мин.

9. В поле работают тракторные бригады, оснащенные одинаковым количеством гусеничных тракторов и одинаковым количеством колесных тракторов, причем в каждой бригаде число всех тракторов меньше 9. Если в каждой бригаде число колесных тракторов увеличить в 3 раза, а гусеничных — в 2 раза, то общее число колесных тракторов во всех бригадах будет на 27 больше общего числа гусеничных тракторов, а в каждой бригаде число тракторов превысит 20. Определить число бригад, работающих в поле, и число тракторов каждого вида в бригаде.

Ответ. 3 бригады; 3 гусеничных трактора, 5 колесных.

10. Автобус отправляется из пункта A в пункт B и после шестиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из A в B в 8 ч 50 мин автобус догоняет велосипедиста, который движется из A в B с постоянной скоростью 15 км/ч. В 9 ч 02 мин велосипедист находится на расстоянии 21 км от A. Автобус, возвра-

щаясь из B в A после остановки в B, встречается с велосипедистом в 9 ч 14 мин и затем прибывает в A в то же время, когда велосипедист приезжает в B. Определить время отправления автобуса из A.

Ответ. 8 ч 32 мин.

11. С завода на стройку нужно перевести 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 т. Масса маленького блока 0,2 т, большого—3,6 т, причем большой блок занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

Ответ. 20 рейсов.

12. Поле имеет форму прямоугольника. На одной из его сторон на расстоянии до ближайшего угла, равном 1/10 этой стороны, стоит столб. Если пойти от столба до самого далекого угла по границе поля (по двум сторонам), то на это уйдет 1 ч 3 мин; если же пойти напрямик, то потребуется 45 мин. Чтобы пройти поле из угла в угол по диагонали, нужно более 48 мин. За сколько минут можно дойти от столба до ближайшего угла (скорость ходьбы всегда одна и та же)?

Ответ. За 4 мин.

13. Пункты A и B находятся на двух шоссе, пересекающих друг друга под углом 120° в точке C. Если идти из A в B сначала по первому шоссе до перекрестка C, а потом по второму, то потребуется 5 ч. Туристы идут из A в B напрямик без дороги и проделывают путь за 6,5 ч. Если туристы пойдут без дороги напрямик от A до середины D отрезка шоссе CB, то они затратят на путь AD более 5 ч. Сколько времени нужно, чтобы дойти от A по шоссе до перекрестка C, если скорость ходьбы без дороги в 1,5 раза меньше, чем скорость ходьбы по шоссе? (Шоссе считать прямым.)

Ответ. 2 ч 40 мин.

14. В детский сад привезли мороженое четырех видов. Каждый ребенок должен был выбрать одну порцию мороженого. Оказалось, что число выбранных порций каждого вида равно цене в копейках одной порции этого же вида. Число выбранных порций второго вида больше числа выбранных порций первого вида на столько же, на сколько число выбранных порций четвертого вида больше числа выбранных порций третьего вида. Порций первого и третьего видов вместе было выбрано на 4 меньше, чем порций второго и четвертого видов месте. Одна порция второго

вида стоит дороже одной порции четвертого вида. За выбранное детьми мороженое уплатили 4 руб. 20 коп. Сколько ребят в детском саду?

Ответ. 40 ребят.

15. В лотерее разыгрывались фотоаппараты, часы, шариковые ручки и транзисторные приемники на общую сумму 240 руб. Сумма цен одного транзисторного приемника и одних часов на 4 руб. больше суммы цен одного фотоаппарата и одной ручки, а сумма цен одних часов и одной ручки на 24 руб. меньше суммы цен одного фотоаппарата и одного приемника. Цена ручки равна целому числу рублей, не превосходящему 6. Число выигранных фотоаппаратов равно цене (в рублях) одного фотоаппарата, поделенной на 10, число выигранных часов равно числу выигранных приемников и равно числу выигранных фотоаппаратов. Количество выигранных ручек в 3 раза больше числа выигранных фотоаппаратов. Сколько было выиграно фотоаппаратов, часов, ручек и приемников?

Ответ. 3 фотоаппарата, 3 часов, 9 ручек, 3 приемника.

16. Брат и сестра собрали каждый по 40 грибов, из них 52 белых гриба. Сколько белых грибов собрал каждый, если известно, что отношение числа белых грибов к числу остальных грибов у брата в 4 раза больше, чем у сестры?

Ответ. 32 и 20.

17. В двух колоннах, по 28 автомобилей в каждой, было 11 «Жигулей», остальные — «Москвичи». Сколько «Москвичей» было в каждой колонне, если известно, что в первой из них на каждую машину «Жигули» приходилось в два раза больше «Москвичей», чем во второй?

Ответ. 24 и 21.

18. Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 т, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 т, однако понадобилось на восемь вагонов больше, и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 т, однако понадобилось еще на пять вагонов больше, но при этом все вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Ответ. 1750 т.

19. Мотоциклист отправляется из пункта A в пункт B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 48 км/ч. В момент отправления мото-

циклиста из A навстречу ему из B в A выходит турист, идущий с постоянной скоростью. Турист встречается с мотоциклистом в 17 ч 15 мин. В 20 ч 55 мин турист находился на расстоянии 2 км от A. Направляясь из B в A после стоянки в B, мотоциклист догоняет туриста в 17 ч 35 мин. Определить время прибытия туриста в пункт C, находящийся на полпути между A и B.

Ответ. В 19 ч.

20. Заработная плата некоторой категории служащих повышалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. Определить, на сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз, если до первого повышения зарплата была 70 руб., а после второго она составила 92 руб. 40 коп.

Ответ. На 10% и на 20%.

21. Два трактора вспахивают поле, разделенное на две равные части. Оба трактора начали одновременно и каждый вспахивает свою половину. Через 5 ч после того момента, когда они совместно вспахивали половину всего поля, выяснилось, что первому трактору осталось вспахать 1/10 часть своего участка, а второму—4/10 своего участка. Сколько времени понадобится второму трактору, чтобы одному вспахать все поле?

Ответ. 50 часов.

22. Пароход плывет от пристани A к пристани B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из A в B в 8 ч пароход догоняет лодку, которая движется из A в B с постоянной скоростью 3 км/ч. В 8 ч 10 мин лодка находится на расстоянии 1,5 км от A. Пароход, направляясь из B в A после стоянки в B, встречается в 8 ч 20 мин с лодкой и затем прибывает в A в то же время, когда приходит в B. Определить время прибытия лодки в B.

Ответ. В 8 ч 30 мин.

23. 24 школьника разбились на две группы. Первая из них пошла в цирк, а вторая—в кино. При этом оказалось, что на цирк и кино было затрачено одинаковое количество денег. Если бы билет в цирк стоил на 20 коп. дешевле, а билет в кино—на 20 коп. дороже, то, истратив на билеты в цирк и на билеты в кино те же суммы денег, в цирк и в кино смогли бы пойти вместе 15 школьников. Если бы при прежней стоимости билетов вторая группа школьников пошла в цирк, а первая группа—в

кино, то на билеты в цирк ушло бы на 19 руб. 20 коп. больше, чем на билеты в кино. Сколько стоили билеты в цирк и в кино?

Ответ. 1 руб. и 20 коп.

24. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, который сначала двигался равноускоренно с ускорением 4 км/ч^2, а после того, как его скорость возросла от 0 до v, продолжал двигаться равномерно со скоростью v. Расстояние между пунктами A и B равно 32 км. На первую половину пути велосипедист затратил в полтора раза больше времени, чем на вторую. Определить скорость v.

Ответ. 8 км/ч.

25. Пункт A стоит в поле на некотором расстоянии от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт B так, что расстояние от A до B равно 10 км. Скорость движения автомобиля по дороге в три раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из A в B так, что часть пути проделать по дороге, то даже при самом удачном выборе пути движения на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать напрямик по полю. Найти минимальное возможное расстояние пункта A от дороги.

Ответ. $20\sqrt{2}/3$ км.

26. На станциях железной дороги A и B стоят два поезда, которые должны ехать в одном направлении, причем поезд, отправляющийся со станции A, должен будет пройти станцию B. Трогаясь с места, каждый из поездов движется равноускоренно со своим ускорением, а после того, как его скорость достигает 60 км/ч, продолжает движение равномерно с этой скоростью. Известно, что ускорение поезда A равно 100 км/ч^2, поезд A переходит на равномерное движение на 12 мин позднее поезда B. Расстояние между поездами, после того как оба поезда перешли на равномерное движение, составляет 6 км. Минимальное расстояние между поездами составляло 2 км. Какой из двух поездов отправился раньше и на сколько?

Ответ. Поезд A отправился на 6 мин раньше B.

27. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

Ответ. 40% и 43,33%.

28. В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м³ воды в час. Вторая труба наливает в час на $2d$ м³ меньше, чем первая ($0 < d < 15$), а третья труба наливает в час на $11d$ м³ больше, чем первая. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 2/11 бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 9/11 бассейна. При каком значении d бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

Ответ. 10.

29. Два поезда вышли одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 120 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них уменьшил свою скорость на 12 км/ч, а другой — на 9 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 ч позже. Найти скорости поездов.

Ответ. 60 км/ч и 45 км/ч.

30. Две хозяйки затратили одинаковое количество денег на покупки. Первая купила картофель, а вторая — яблоки, причем картофеля было куплено на 8 кг больше, чем яблок. Если бы яблоки и картофель стоили на 10 коп. за килограмм дороже, то в этом случае первая хозяйка купила бы картофеля на 3 кг больше, чем вторая яблок. Если бы при первоначальной стоимости первая хозяйка купила столько килограммов яблок, сколько у нее оказалось картофеля, а вторая купила бы столько картофеля, сколько у нее оказалось яблок, то первой пришлось бы истратить на 3 руб. 20 коп. больше, чем второй. Сколько стоили килограмм яблок и килограмм картофеля?

Ответ. 30 коп. и 10 коп.

31. В цехе работают три бригады. Работая одновременно, они выполняют дневную норму цеха за 5 ч. Вторая бригада, работая одна, выполняет дневную норму цеха на 5 ч быстрее, чем одна третья бригада. За сколько часов одна вторая бригада выполняет дневную норму цеха, если известно, что третья бригада выполняет ее вдвое быстрее, чем первая?

Ответ. За 10 ч.

32. В соревнованиях по бегу на дистанцию 120 м участвуют три бегуна. Скорость первого из них на 1 м/с больше скорости второго, а скорость второго бегуна равна полусумме скоростей первого и третьего. Определить скорость третьего бегуна, если известно, что первый бегун пробежал дистанцию на 3 с быстрее третьего.

Ответ. 8 м/с.

33. К двум бассейнам подведены две трубы разного диаметра (к каждому бассейну своя труба). Через первую трубу налили в первый бассейн определенный объем воды и сразу после этого во второй бассейн через вторую трубу налили такой же объем воды, причем на все это вместе ушло 16 ч. Если бы через первую трубу вода текла столько времени, сколько через вторую, а через вторую трубу—столько времени, сколько через первую, то через первую трубу налилось бы воды на 320 м³ меньше, чем через вторую. Если бы через первую трубу проходило на 10 м³/ч меньше, а через вторую — на 10 м³/ч больше воды, то чтобы налить в бассейны (сначала в первый, а потом во второй) первоначальные объемы воды, ушло бы 20 ч. Сколько времени лилась вода через каждую из труб?

Ответ. 10 ч и 6 ч.

34. Школьник купил в магазине несколько тетрадей и карандашей, причем все тетради стоили столько же, сколько все карандаши, а тетрадей было на три штуки больше, чем карандашей. Если бы при этом один карандаш стоил на 10 коп. дороже, а одна тетрадь стоила тоже на 10 коп. дороже, то, истратив те же деньги, что и раньше, как на тетради, так и на карандаши, можно было бы купить тетрадей на одну больше, чем карандашей. Если бы школьник купил по первоначальной стоимости тетрадей столько, сколько было куплено карандашей, а карандашей столько, сколько было куплено тетрадей, то за карандаши пришлось бы уплатить на 90 коп. больше, чем за тетради. Сколько стоит один карандаш и одна тетрадь?

Ответ. 20 коп. и 10 коп.

35. Из пункта A в пункт B, расположенный на противоположном берегу озера, одновременно вышли моторная лодка и катер. К моменту, когда катер прибыл в пункт B, моторная лодка прошла половину пути и была в 30 км от B. Известно, что если бы катер шел из A в B с большей скоростью, увеличив ее на 3 км/ч, то лодка пришла бы в пункт B на 6 ч позже катера. Найти скорость моторной лодки.

Ответ. 6 км/ч.

36. Имеются три несообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем V и может быть заполнен первым шлангом за 3 ч, вторым шлангом — за 4 ч, третьим шлангом — за 5 ч. К каждому из резервуаров может быть подключен любой из этих трех шлангов. После того как произведено подключение к каждому из резервуаров по

одному шлангу каким-либо способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-то резервуар наполнится, соответствующий шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. Заполнение считается законченным, если наполнены все три резервуара. При самом быстром способе подключения заполнение закончится через 6 ч. Если бы все резервуары сообщались, то заполнение окончилось бы через 4 ч. Найти объемы второго и третьего резервуаров.

Ответ. $\frac{2}{15}V$ и $2V$.

37. В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 т нефти, по второму — 400 т, по третьему — 500 т. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 ч. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 ч. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.

Ответ. 3500 т и 4800 т.

38. Двум бригадам общей численностью до 18 человек было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив это время между собой поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена бригады меньше девяти часов. Сколько человек в каждой бригаде?

Ответ. По 9 человек.

39. Города A, B, C, D расположены так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами $AB=6$ км, $BC=14$ км, $CD=5$ км, $AD=15$ км,

$AC = 15$ км. Из одного из городов одновременно вышли три туриста, идущих без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше, чем турист, закончивший маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на 0,5 км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч.

Ответ. 7 км/ч; 19/3 км/ч; 13/2 км/ч.

40. Число учащихся в классе, повысивших свою успеваемость, заключено в пределах от 2,7 до 3,2% от общего числа учащихся. Каково наименьшее число учащихся в классе?

Ответ. 32.

41. Из пункта A в B вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 мин после своего выезда из B. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 ч быстрее пешехода?

Ответ. 5.

42. Группу людей попытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Тогда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд: все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы тех же людей попытались построить по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем один ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

Ответ. 119 человек.

43. Имеется некоторое количество проволоки. Если ее намотать на катушки, на которых умещается по 800 м проволоки, то одна катушка будет намотана не полностью. То же самое произойдет, если пользоваться только катушками, на которых умещается по 900 м проволоки, причем таких катушек понадобится на 3 меньше. Если же проволоку наматывать только на катушки, на которых умещается по 1100 м, то таких катушек понадобится еще на 6 меньше, но при этом все такие катушки будут намотаны полностью. Сколько метров проволоки было?

Ответ. 25 300 м.

44. Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в нее притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 ч. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода (собственная скорость — скорость в неподвижной воде).

Ответ. 11 км/ч.

45. От пристани A к пристани B против течения реки отошел катер, собственная скорость которого в стоячей воде в 7 раз больше скорости течения реки. Одновременно навстречу ему от пристани B, расстояние от которой до A по реке равно 20 км, отошла лодка. На каком расстоянии от B произошла встреча катера с лодкой, если известно, что через полчаса после начала движения лодке оставалось проплыть 4 км до встречи и что катер затратил на весь путь до встречи с лодкой на 20 мин больше, чем на путь от места встречи до пункта B?

Ответ. 8 км.

46. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый; при этом было 44 попадания, остальные — промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в два раза больше попаданий, чем у второго?

Ответ. 24 и 20.

47. Смешав по 2 $см^3$ трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго вещества занимает объем на 0,5 $см^3$ больший, чем 4 г третьего вещества. Найти плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого вещества.

Ответ. 4 $г/см^3$.

48. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 7 часов утра выехал автомобиль и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге, в 5/3 раза, а автомобиль — в 1,5 раза. Они встретились в 9 ч 15 мин. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 11 ч 15 мин, если он путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

Ответ. Не сможет.

49. В классе выписывают три журнала, причем общее число выписываемых экземпляров меньше 30. Число подписчиков на журнал «Квант» кратно числу подписчиков

на журнал «Советское фото», которых, в свою очередь, в пять раз меньше, чем подписчиков на журнал «Ровесник». Если число выписываемых «Квантов» увеличить в 4 раза, то их станет на 21 больше, чем количество выписываемых «Ровесников». Сколько учеников в классе выписывает журнал «Квант»?

Ответ. 9.

50. В начале года в сберкассу на книжку было положено 1640 руб. и в конце года было взято обратно 882 руб. Еще через год на книжке снова оказалось 882 руб. Сколько процентов начисляет сберкасса в год?

Ответ. 5 %.

51. Саша, Наиль, Миша и Марина ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных Сашей, Наилем и Мишей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Саша поймал на две рыбы меньше, а Марина — на двенадцать рыб меньше, то количества рыб, пойманных Сашей, Наилем, Мишей и Мариной, образовывали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на 18 рыб меньше Марины?

Ответ. 18 рыб.

52. В три сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятые в порядке номеров, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?

Ответ. 200 г.

53. Химический завод имеет цеха трех типов. В каждом цехе первого, второго и третьего типов работает соответственно 350, 80 и 30 рабочих, а также 91, 19 и 8 технологов. Всего в цехах завода работают 980 рабочих и 252 технолога. Найти число цехов каждого типа, если известно, что их общее число не превосходит 15.

Ответ. 2 цеха первого и второго типов; 4 цеха третьего типа.

54. Бассейн наполняется двумя трубами. Сначала включили одну из труб, а затем, не ранее, чем через 4 ч, включили вторую трубу. После этого прошло еще не менее 2 ч, когда в результате их совместной работы бассейн был наполнен. Известно, что одна из труб наполняет бассейн вдвое

быстрее, чем другая труба, но не быстрее, чем на 5 ч. За какое время наполняет бассейн каждая труба?

Ответ. 5 ч и 10 ч.

55. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 120 л воды в минуту, а во вторую — 40 л. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, а объем воды в третьей цистерне в два раза меньше, чем во второй, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Сколько литров воды поступает за одну минуту в третью цистерну?

Ответ. 80 л.

56. При одновременной работе двух насосов разной мощности бассейн наполнился водой за 8 ч. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в 1,2 раза, а второго — в 1,6 раза, и при одновременной работе обоих насосов бассейн стал наполняться за 6 ч. За какое время будет наполнен бассейн одним первым насосом после ремонта?

Ответ. За 10 ч.

57. Два лыжника вышли с линии старта одновременно с постоянными скоростями по одному и тому же маршруту, причем скорость первого лыжника составила 7/6 скорости второго. Вслед за ними через 20 мин отправился третий лыжник, который, двигаясь со скоростью 18 км/ч, догнал второго лыжника на 30 мин раньше, чем первого. Какова скорость первого лыжника?

Ответ. 14 км/ч.

58. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 ч. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 ч. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

Ответ. За 8 ч.

59. Число двухкомнатных квартир в доме в четыре раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в пять раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

Ответ. 132.

60. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 9 ч утра выехал автомобилист, и одновременно с ним из города в село вы-

ехал мотоциклист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге, в 1,5 раза, а мотоциклист — в $1\frac{2}{4}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 12 ч, автомобилист приехал в город в 14 ч 20 мин, а мотоциклист приехал в село в 16 ч. Определить, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 ч 40 мин, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

Ответ. Не сможет.

61. Четверо лингвистов (каждый по отдельности) занимаются математической обработкой текста. Если первые трое будут работать по одному часу, а четвертый — два часа, то вместе они успеют обработать 26 страниц текста. Если второй будет работать два часа, а остальные — по часу, то будет обработано 40 страниц текста. Сколько страниц текста будет обработано, если первый будет работать три часа, второй — пять часов,, а третий — семь часов?

Ответ. 130.

62. Расстояние между городами равно 840 км. Одновременно навстречу друг другу из этих городов выходят поезда, которые встречаются через 6 ч. Если бы один из поездов вышел на $1^3/_4$ ч раньше, то поезда встретились бы через 5 ч после выхода второго. Определить скорость каждого поезда.

Ответ. 60 и 80 км/ч.

63. Два студента одновременно начали готовиться к экзамену, назначенному для обоих на один и тот же день. Первый студент должен прочитать 240 страниц, второй — 420. Каждый читает ежедневно одно и то же целое число страниц, причем первый прочитывает на 12 страниц меньше второго. После того, как они все прочли по одному разу, у них осталось время на повторение: у первого — семь дней, у второго — пять дней. Определить, какое целое число страниц в день надо было читать каждому студенту, чтобы на повторение им осталось по три дня.

Ответ. 20 и 35.

64. Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел переход, и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через два часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по

кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 км от пункта B.

Ответ. 3 км/ч, 15 км/ч.

65. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Автомобиль без остановок дважды проехал по всему шоссе в одном направлении. В момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 км/ч и через 22,5 мин после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найти длину всего пути мотоцикла, если этот путь на 5,25 км короче длины всего шоссе.

Ответ. 21 км.

66. Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота и меди равно 1 : 2, а во втором 2 : 3. Если сплавить 1/3 первого слитка с 5/6 второго, то в полученном слитке окажется столько золота, сколько было в первом меди, а если 2/3 первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

Ответ. 1,2 кг, 2,4 кг.

67. В магазине продано 12 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

Ответ. 5,5, 4 и 2,5.

68. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 240 км, в 6 часов утра вышли навстречу друг другу пассажирский и скорый поезда. Первую половину пути каждый из поездов шел с постоянной скоростью, причем скорость скорого поезда была на 25% больше скорости пассажирского. На второй половине пути каждый поезд увеличил свою скорость на 20 км/ч. Пассажирский поезд прибыл в пункт B не ранее 8 ч 42 мин, а скорый поезд прибыл в пункт A не позднее 8 ч 12 мин того же дня. С какой скоростью прошел первую половину пути пассажирский поезд?

Ответ. 80 км/ч.

69. Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 ч быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою

скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найти скорость второго туриста.

Ответ. 4 км/ч.

70. Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему из пункта B, расположенного ниже по течению реки, выходит катер. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению реки. Найти, какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

Ответ. 2/5.

71. Из Москвы в Куйбышев нужно перевезти по железной дороге 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых 2 т. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 т. Грузоподъемность вагона 80 т. Найти минимальное число вагонов, достаточное для перевозки всех контейнеров.

Ответ. 15.

72. На фабрике несколько одинаковых поточных линий вместе выпускали в день 15000 банок консервов. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 5. Фабрика стала выпускать 33792 банки в день. Сколько поточных линий было первоначально?

Ответ. 6.

73. Мастер, работая вместе с учеником, помог выполнить часть задания, а затем прекратил свою работу. Оставшуюся часть задания ученик закончил один. В результате время, затраченное на выполнение задания, оказалось в три раза меньше времени, необходимого ученику для выполнения этого задания им одним. Во сколько раз мастер затратил бы больше времени, выполняя один все задание, по сравнению с тем временем, которое он затратил на помощь ученику?

Ответ. В 1,5 раза.

74. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в 1-й сосуд налито 5 кг, а во 2-й — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в 1-м сосуде увеличилось в p раз, а во 2-м сосуде — в q раз. О числах p и q известно лишь, что $pq=9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

Ответ. $18\frac{1}{3}$ кг.

75. Человек в лодке начал грести против течения быстрой реки. Однако через 4 мин лодка оказалась на 80 м ниже по течению. Развернув ее, он перестал грести, и, пока он отдыхал, лодку снесло на 40 м. Затем он принялся грести по течению, причем лодка двигалась относительно воды с той же скоростью, как и в первые 4 мин, и прошла еще 40 м. В целом после разворота лодки прошло 100 секунд. Какова скорость течения реки?

Ответ. 40 м/мин.

76. В сообщении о реконструкции цеха указано, что в результате реконструкции процент высвободившихся рабочих заключен в пределах от 1,7 до 2,3%. Определить минимально возможное число рабочих, первоначально занятых в цехе.

Ответ. 44.

77. Сплавляя два одинаковых по весу куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержалось 12 кг хрома. Если бы первый кусок был в два раза тяжелее, то в сплаве содержалось бы 16 кг хрома. Известно, что процентное содержание хрома в первом куске на 5% меньше, чем во втором. Найти процентное содержание хрома в каждом куске чугуна.

Ответ. 5 и 10%.

78. Из пункта A в пункт B едет трактор. Радиус переднего колеса трактора меньше радиуса заднего колеса. На пути из A в B переднее колесо сделало на 200 оборотов больше, чем заднее. Если бы длина окружности переднего колеса была бы в 5/4 раза больше, то на пути из A в B оно сделало бы на 80 оборотов больше, чем заднее колесо. Найти длины окружностей переднего и заднего колес трактора, если длина окружности заднего колеса на 1 м больше длины окружности переднего колеса.

Ответ. 2 и 3 м.

79. Два лыжника стартовали на дистанции 10 км друг за другом с интервалом в 6 мин. Второй лыжник догнал первого в двух километрах от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найти скорость первого лыжника.

Ответ. 10 км/ч.

80. Известно, что 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 2 руб. 38 коп., а 2 кг лука и 4 кг огурцов стоят 8 руб. 20 коп. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе?

Ответ. 4 руб. 32 коп.

81. Кооперативу садоводов предлагается указать длину и ширину земельного участка прямоугольной формы, одна из сторон которого должна прилегать к шоссе. Нужно, чтобы площадь участка равнялась 150 га. Участок придется огородить забором, причем 1 м забора, прилегающего к шоссе, стоит 10 руб., а 1 м забора на трех оставшихся сторонах — 5 руб. Какими должны быть стороны участка, чтобы стоимость забора была минимальной?

Ответ. 1000 м вдоль шоссе; 1500 м — перпендикулярно ему.

82. В бассейн проведены три трубы. Одна первая труба наполняет бассейн в 2,6 раза быстрее, чем одна вторая труба, а одна вторая труба наполняет бассейн на 3 ч медленнее, чем одна третья труба. За сколько часов одна третья труба наполняет бассейн, если все три трубы, работая одновременно, наполняют бассейн за 3 ч 45 мин.

Ответ. 15 часов.

83. Поезд метро состоит из нескольких вагонов, причем в каждом вагоне находится одинаковое число пассажиров. Количество пассажиров в одном вагоне превосходит число вагонов на 9. Когда на станции во 2-й вагон вошло 10 человек, а из остальных вагонов вышло по 10 человек, то число пассажиров во втором вагоне оказалось равным числу пассажиров, оставшихся во всех остальных вагонах. Сколько пассажиров было первоначально в каждом вагоне?

Ответ. 15.

84. Мелиораторы провели работы по осушению заболоченного прямоугольного участка площадью 2,7 га. Нужно было по двум наиболее коротким сторонам прокопать траншеи, а по двум другим — каналы. Сечение канала составляет 4 м^2, траншеи — 2 м^2. Определить длины сторон участка, если за время работ было вынуто 2760 м^3 грунта.

Ответ. 300 и 90 м.

85. В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых в свою очередь в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

Ответ. 6.

86. Станции A, B и C находятся на одной и той же железной дороге, причем расстояние от B до C равно 200 км. Известно, что скорый поезд, вышедший из A, и пассажирский поезд, вышедший одновременно с ним из C, встретились на станции B. Найти расстояние между станциями A и C, если оно меньше 300 км, а скорый поезд идет в 1,5 раза быстрее, чем пассажирский.

Ответ. 100 км.

87. В магазин привезли 100 кг клюквы, состоящей на 99% из воды. После длительного хранения и усушки содержание воды в клюкве уменьшилось до 98%. Каким стал новый вес клюквы?

Ответ. 50 кг.

88. Если идти шагом вверх по поднимающемуся эскалатору, то можно подняться на 10 с раньше, чем стоя на нем. Если же не идти, а бежать вверх, то можно выиграть еще 5 с. Пассажир, стоя на эскалаторе, поднялся на половину высоты эскалатора, после чего последний остановился. Вторую половину подъема пассажир прошел шагом. Сколько времени занял у него весь подъем, если известно, что человек бегает в два раза быстрее, чем ходит?

Ответ. 45 с.

89. Общий вес снаряжения туристской группы равен 202 кг. Если распределить его так, чтобы каждому юноше пришлось нести по 16 кг, а каждой девушке — по 9 кг, то 4 кг останутся нераспределенными. Поэтому юноши берут себе еще по 2 кг, в результате чего удается облегчить рюкзак каждой девушки на 1 кг, а одну из них освободить вовсе. При этом все снаряжение оказывается распределенным. Сколько юношей и девушек в туристской группе?

Ответ. 9 и 6.

90. По оценке социологов за период в 24 года — с 1966 г. по 1989 г. включительно — в городе N должно было быть заключено 3150 браков. Фактически в 1966 г. состоялось 100 браков. Каждый последующий год заключалось на 5 браков больше, чем в предыдущий, пока не была досрочно, причем за целое число лет, достигнута предварительная оценка — 3150 браков. После этого, вплоть до конца 1989 г., годовое число вступлений в брак сократилось на 11 по сравнению с годом достижения оценки. На сколько процентов реальное число браков за 24 года превысило предварительную оценку?

Ответ. На 18%.

91. На прямой дороге последовательно расположены пункты A, B, C и D. Расстояния от пункта A до пунктов B,

C и D находятся в отношении 5 : 7 : 40. В направлении от D к A по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первый пешеход в пути между A и B встретил 3 автобуса. Второй пешеход между A и C встретил 2 автобуса. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов встретил третий пешеход в пути между A и D?

Ответ. 16.

92. Команда школьников, состоящая из мальчиков и девочек, участвовала в командных соревнованиях по шахматам. Мальчики этой команды сыграли в совокупности 60 партий, а девочки — 40. Из всех сыгранных мальчиками партий мальчики выиграли 45% партий, а из всех сыгранных девочками партий девочки выиграли 50% партий. Мальчики проиграли на 7 партий больше, чем девочки сыграли вничью. За победу в одной партии дается 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков; школьники одной и той же команды друг с другом не играют. Сколько очков принесли своей команде мальчики, если вся команда набрала 52 очка?

Ответ. 36.

93. В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

Ответ. 20 м.

94. Для приготовления смеси из двух жидкостей A и B было взято два сосуда емкостью по 15 л каждый, в которых находилось всего 15 л жидкости A. Затем первый сосуд доверху долили жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд дополнили доверху смесью из первого сосуда. Затем из второго сосуда отлили в первый 6 л получившейся смеси. После этого в первом сосуде оказалось жидкости A на один литр больше, чем во втором. Сколько литров жидкости A было первоначально во втором сосуде?

Ответ. 5 л.

95. Строительство туннеля велось в 3 смены с одинаковым планом проходки на каждую смену. Скорость проходки во вторую смену была в 1,2 раза большей, чем в первую, а в третью смену возросла на 0,6 м/ч по сравнению со второй. Вторая смена выполнила план проходки на 1 ч быстрее, чем первая, а третья смена выполнила половину плана на 3 ч быстрее, чем вторая смена весь план. Определить скорость проходки туннеля в первую смену.

Ответ. 2 м/ч.

Учебное изданке

Лурье Михаил Владимирович
Александров Борис Иванович

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Заведующий редакцией *С. З. Зеленский*
Редактор *Ф. И. Кизнер*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 32874

Сдано в набор 27.04.89. Подписано к печати 04.01.90.
Формат 84×108/32.
Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 5,04. Усл. кр.-отт. 5,35. Уч.-изд. л. 5,31.
Тираж 250 000 экз. Заказ № 689 Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового
Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография»
Государственного комитета СССР по печати.
113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано в типографии № 2
Госкомиздата РСФСР 152901 Рыбинск, ул. Чкалова, 10