В.А. ДАЛИНГЕР

ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного педагогического университета

ББК 74.262

Далингер В.А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике: Учебное пособие. Омск: Изд–во ОмГПУ, 2005. – 456 с, – 121 ил. – 29 таб.

ISBN 5-8268-0868-3

Данное учебное пособие, которое представляет собой практико-ориентированную монографию, предназначено для студентов математических факультетов педагогических вузов, а также учителям математики общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, СПОУ. В нем рассмотрены как теоретические, так и практические основы организации и содержания поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике. В работе приведено большое число заданий по математике исследовательского характера.

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

Моей первой учительнице Анне Антоновне Сахно посвящаю

ВВЕДЕНИЕ

Модернизация образования в базовом звене – общеобразовательной школе, предполагает создание условий для повышения качества общего образования через использование эффективных методов обучения, обеспечение дифференциации и индивидуализации образования, введение предпрофильного и профильного обучения, системы государственной оценки качества образования и др. Модернизация общего образования в целом включает и реформирование математического образования.

Способность познавать окружающий мир, действовать адекватно полученной информации, создавая благо для людей, является важной чертой образованного человека, ответственность которого за сохранение цивилизации за последнее время значительно возросла.

Соответственно этому социальное ожидание нашего общества состоит в становлении человека нового типа, имеющего адекватные социальные и методологические установки, владеющего познавательными методами и средствами, обладающего потребностью и готовностью находить решения проблем разного уровня сложности.

Результативность и действенность найденных и принятых решений во многом зависит от уровня сформированности познавательных умений специалиста, в том числе исследовательских умений. Важность проблемы формирования этих умений подтверждает проведенный нами анализ большого числа профессиограмм специалистов. В каждую из них включены в качестве обязательных умения: проводить исследования, формулировать и решать проблемы, нести ответственность за принятое решение. Эти умения являются инвариантными, они позволяют определять уровень профессиональной и социальной компетенции специалиста.

В связи с этим можно сделать вывод о том, что исследовательские умения в процессе подготовки человека как к профессиональной деятельности, так и к жизнедеятельности в целом должны стать предметом пристального внимания ученых-методистов.

Совершенствование учебного процесса идет сегодня в направлении увеличения активных методов обучения, обеспечивающих глубокое проникновение в сущность изучаемой проблемы, повышающих личное участие каждого обучающегося и его интерес к учению.

Целый ряд активных методов был разработан в начале XX века: метод проектов (Дж. Дьюи), эвристический (Г.А. Армстронг), опытно-эвристический (А.Я. Герд), лабораторно-эвристический (Ф.А. Винтергальтер), метод лабораторных уроков (К.П. Ягодовский), естественно-научного обучения (А.П. Пинкевич) и др. В это же время был создан целый класс имитационных игровых и неигровых методов. К первым относятся: разыгрывание ситуаций в ролях, производственные деловые игры, ситуационно-ролевые игры, стажировка с выполнением различных ролей, организационно-деятельностные игры и т.д. Ко вторым относятся: решение производственных задач, анализ конкретных ситуаций, социально-психологический тренинг «мозговой штурм», анализ случайных ситуаций, метод инцидента действия по инструкции, баскет метод и т.д.

Многие из перечисленных методов Б.Е. Райков в свое время назвал исследовательскими методами. В исследовательском методе учащиеся осуществляют самостоятельный поиск знаний, испытывают увлеченность идеей и процессом учения; этот метод реализует познавательную самостоятельность и творческую активность.

Исследовательская деятельность является одной из форм творческой деятельности, поэтому ее следует рассматривать в качестве составной части проблемы развития творческих способностей учащихся. Интеллектуальное и нравственное развитие человека на основе вовлечения его в разнообразную самостоятельную деятельность в различных областях знаний можно рассматривать как стратегическое направление развития образования.

Развитие личности учащегося, его интеллекта, чувств, воли осуществляется лишь в активной деятельности. Человеческая психика не только проявляется, но и формируется в деятельности, и вне деятельности она развиваться не может. В форме нейтрально-пассивного восприятия нельзя сформировать ни прочных знаний, ни глубоких убеждений, ни гибких умений.

Способность учащихся к творческой (а значит, и к исследовательской) деятельности эффективно развивается в процессе их целесообразно организованной деятельности под руководством учителя.

Под творческой деятельностью обучающегося можно понимать всякую деятельность, которая осуществляется не по заранее заданному алгоритму, а на основе самоорганизации, способности самостоятельно планировать свою деятельность, осуществлять самоконтроль, перестройку своих действий в зависимости от возникшей ситуации, способность пересмотреть, и, если необходимо, изменить свои представления об объектах, включенных в деятельность.

Н.Д. Волкова так определяет творческую деятельность обучающихся: «Применительно к процессу обучения творческую деятельность учащихся можно рассматривать как деятельность, направленную на реализацию имеющихся у них знаний, способов действия и формирования на основании этого новых знаний, новых способов действия» [44, с. 8].

Нужно создавать условия, способствующие возникновению у учащихся познавательной потребности в приобретении знаний, в овладении способами их использования и влияющие на формирование умений и навыков творческой деятельности.

К чертам творческой деятельности личности можно отнести: логическое мышление, чувство новизны, целенаправленность действий, лаконизм, способность рассматривать явления и процессы с новых точек зрения и сближать отдельные области знаний, полноценность аргументации, способность чувствовать нечеткость рассуждений и т.д.

Развитие мышления учащихся может идти не только путем овладения специальными знаниями различных предметов, а и путем развития способностей к самостоятельной мыслительной деятельности.

А.Н. Колмогоров отмечал, что «даже простейшие математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно» [105, с. 3].

Высказанной мысли ученого созвучны рассуждения П.И. Пидкасистого, который отмечает, что зачастую «внимание и энергия учащихся в основном сосредоточивается на содержательной стороне, процессуальная и логико-операционная сторона научного знания от их внимания ускользает, и в результате они ею в достаточной степени не овладевают» [155, с. 88].

Далее он предлагает выход из создавшегося положения: «Чтобы самостоятельно конструировать знания, надо знать, что конструировать (понятие, закон, правило) и как конструировать. Следовательно, для того чтобы учащиеся могли самостоятельно, на творческом уровне добывать знания, они должны знать предмет своей познавательной деятельности и знать, как с ним работать. И этому их нужно обучать специально. Иными словами, учащихся надо учить познавательной деятельности, вооружать их учебно-познавательным аппаратом» [155, с. 88–89].

Успех исследовательской деятельности учащихся в основном обеспечивается правильным планированием видов и форм заданий, использованием эффективных систем заданий, а также умелым руководством учителя этой деятельностью.

Раскрывая роль учителя в организации учебного исследования, отметим следующую систему его действий:

- умение выбрать нужный уровень проведения учебного исследования в зависимости от уровня развития мышления учащегося;

- умение сочетать индивидуальные и коллективные формы проведения исследований на уроке;
- умение формировать проблемные ситуации в зависимости от уровня учебного исследования, его места в структуре урока и от цели урока.

Учитель должен выступать не столько в роли интерпретатора науки и носителя новой информации, сколько умелым организатором систематической самостоятельной поисковой деятельности учащихся по получению знаний, приобретению умений и навыков и усвоению способов умственной деятельности.

В процессе исследовательской деятельности учащиеся овладевают некоторыми навыками наблюдения, экспериментирования, сопоставления и обобщения фактов, делают определенные выводы. Необходимо создавать условия, способствующие возникновению у учащихся познавательной потребности в приобретении знаний, в овладении способами их использования и влияющие на формирование умений и навыков творческой деятельности.

Развивающая функция исследовательской деятельности по математике заключается в том, что в процессе ее выполнения происходит усвоение методов и стиля мышления, свойственных математике, воспитание осознанного отношения к своему опыту, формирование черт творческой деятельности и познавательного интереса к различным аспектам математики.

Мотивом учебного исследования может служить интерес, внутреннее противоречие, вызывающее потребность, стремление школьника к исследованию неопределенности, содержащей знания, неизвестные учащемуся. При этом проблемная ситуация является условием возникновения у субъекта деятельности внутреннего противоречия. Фиксация проблемной ситуации (вычленение основного противоречия) заканчивается формулированием проблемы – цели исследования.

В учебном исследовании целеполагание становится движущей силой только тогда, когда цель субъективно важна и значительна для участника этого процесса [27].

Одной из основных задач современного образования является формирование творческой личности, способной реализовывать свой творческий потенциал как в собственных интересах, так и в интересах общества. Важное место в решении данной задачи отводится развивающему обучению, при котором на передний план выдвигаются проблемы развития познавательных процессов и способностей учащихся. В связи с этим процесс обучения должен быть направлен не только на вооружение учащихся необходимыми знаниями, умениями и навыками, но и на формирование умений получать новые знания, творчески решать стоящие перед ними задачи.

Для формирования творческих качеств личности важно решение проблемы полноценного развития учащихся в процессе обучения математике. Усвоение научных основ математики и успешное решение математических задач, изучаемых в школе, предполагают достижение учащимися определенного уровня развития мышления, поскольку оно является не только конечной целью, но и условием успешного усвоения такого предмета, как математика.

Исходя из положения, что без активной деятельности не может быть достигнуто полноценное сознательное усвоение знаний (причем деятельность ученика в процессе обучения – это учебная деятельность, составной частью которой является процесс познания), психолого-педагогические исследования убедительно свидетельствуют о том, что все познавательные процессы эффективно развиваются при такой организации обучения, когда учащиеся включаются в активную поисковую деятельность.

Современной психологией и дидактикой накоплен большой теоретический и практический опыт по исследованию и решению проблемы интеллектуального развития учащихся при обучении математике. Основу его составляют психологические закономерности умственного развития школьников в процессе обучения, раскрытые в трудах А.В. Брушлинского, Л.С. Выготского, В.В. Давыдова, Е.Н. Кабановой-Меллер, З.И. Калмыковой, И.Я. Лернера, А.М. Матюшкина, Н.А. Менчинской, С.Л. Рубинштейна, И.С. Якиманской и др. Исходя из этих закономерностей, разработаны различные психолого-педагогические направления развития математического мышления учащихся (Р. Атаханов, Л.В. Виноградова, В.А. Крутецкий, Л.К. Максимов, Н.В. Метельский, А.А. Столяр, Л.М. Фридман, С.И. Шапиро и др.). Воспитанию у учащихся математического мышления, выявлению и исследованию его компонентов посвящены работы математиков-методистов Ю.М. Колягина, В.И. Крупича, Г.Л. Луканкина, О.С. Медведевой, В.И. Мишина, М.В. Потоцкого, И.М. Смирновой, Н.А. Терешина, С.И. Шварцбурда и др. Большой вклад в исследование вопросов формирования и развития математического мышления внесли математики Г. Вейль, Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, А.И. Маркушевич, А. Пуанкаре, А.Я. Хинчин, Г. Штейнгауз.

Особую роль в интеллектуальном развитии учащихся играет исследовательская деятельность учащихся, непосредственно связанная с усвоением математических знаний. Поэтому успешное решение стоящих перед школой задач возможно посредством приобщения учащихся к исследовательской деятельности и развития способностей к ней в процессе обучения.

Основным признаками учебного исследования являются:

а) постановка познавательной проблемы и цели исследования;

б) самостоятельное выполнение обучающимися поисковой работы;

в) направленность учебного исследования обучающихся на получение новых для себя знаний;

г) направленность учебного исследования на реализацию дидактических, развивающих и воспитательных целей обучения.

Фундамент исследовательского метода в обучении был заложен еще классиками педагогической науки: Я.А. Коменским, Ж.Ж. Руссо, К.Д. Ушинским и т.д. Дальнейшее развитие их идей продолжили отечественные педагоги и методисты: Б.В. Всесвятский, И.Я. Лернер, Н.И. Новиков, А.П. Пинкевич, Б.Е. Райков, М.Н. Скаткин и др.

Понятие исследовательской деятельности и организация учебно-воспитательного процесса на ее основе рассмотрены с разных сторон в ряде исследований психологов, философов и педагогов. Особый интерес представляют исследования, направленные на решение проблемы формирования исследовательских умений учащихся. Различные пути решения этой проблемы предлагаются: В.И. Андреевым, М.Г. Беккером, М.И. Линником, Р.И. Малафеевым, М.И. Махмутовым, И.Е. Мураховским, А.А. Никитиным, В.Г. Разумовским, А.А. Шаповаловым и другими.

Главную роль эффективного средства активизации учебного познания при обучении математике отводят исследовательской деятельности и современные педагоги и математики: А.Д. Александров, Я.И. Груденов, В.А. Гусев, О.Б. Епишева, В.И. Крупич, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр, А.Я. Цукарь и др.

Есть работы, посвященные проблемам организации исследовательской деятельности в области школьной математики (Е.В. Баранова, Б.А. Викол, М.З. Каплан, Л.З. Карелин, Е.В. Ларькина, Л.Э. Орлова, Г.В. Токмазов и др.), в которых рассматриваются различные способы изучения и анализа задач исследовательского характера.

Немало работ, в которых уделяется должное внимание личностно-деятельностному подходу к учебному процессу, его психодидактическому проектированию. Но, как правило, проблема организации исследовательской деятельности учащихся не раскрывается полностью, их разрозненное использование не приводит к снятию проблемы формирования исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения математике.

Стоит отметить, что в научной литературе по методике преподавания математики проблема приобщения учащихся к исследовательской деятельности реализуется через решение специальных исследовательских задач или через дополнительную работу над задачей. Такая работа обычно занимает много учебного времени и напрямую не связана с усвоением изучаемого материала, следовательно, очевидно, что в практике обучения математике она проводится эпизодически и бессистемно. Целесообразно было бы организовать достижение тех же целей непосредственно в процессе выполнения учащимися учебно-познавательной деятельности, связанной с усвоением программных математических знаний. Поэтому изучить учебное исследование необходимо как многоаспектное дидактическое явление. Такая позиция требует раскрытия всего потенциала учебных исследований, следовательно, необходимо, прежде всего, дать теоретическое описание этого средства и далее разработать методические рекомендации по его использованию в практике обучения.

Результаты проведенного нами анкетирования учителей математики общеобразовательных школ показывают, что большинство педагогов считают необходимым систематическое вовлечение учащихся в учебные исследования на уроках математики, но испытывают трудности, связанные с отсутствием соответствующего методического обеспечения.

Проведенный нами анализ психолого-педагогической и методической литературы, посвященной проблеме организации учебных исследований при обучении учащихся математике, позволяет констатировать, что в настоящее время каждый из авторов трактует сущность понятия учебного исследования на частных, конкретных примерах, иллюстрирующих только отдельные его аспекты. Поэтому нет единого подхода к определению самого понятия учебного исследования, соответственно не выявлены их основные функции, виды, структура, не раскрыты методические особенности организации и использования учебных исследований в процессе обучения учащихся.

Таким образом, в настоящее время имеют место *противоречия:*

- между потенциальными возможностями школьного математического образования в организации исследовательской деятельности и слабой разработанностью методов и средств ее реализации;

- между потребностью школьной практики в научно-обоснованной методике организации учебных исследований при обучении учащихся математике и ее фактической направленностью на формирование лишь знаний, умений и навыков;

- между сложившейся практикой школьного математического образования, не обеспечивающей должной самостоятельности учащихся, и требованиями вузов к математической подготовке учащихся общеобразовательных школ как в содержательном, так и процессуальном плане;

- между новыми образовательными целями и традиционным обучением математике;

- между наличием большого количества работ в теории и методике обучения математике, посвященных исследовательской деятельности учащихся и их низкой эффективностью в практике обучения.

Сейчас, когда предметно-ориентированная парадигма образования сменяется на личностно ориентированную, следует понять роль учащегося, его главную задачу в получении не только знаний о существующих зависимостях в окружающем мире и описываемых математическими моделями, но и в овладении методологией творческого поиска.

Заметим, что традиционное обучение приспособлено в основном для обучения фактам, а не для процесса получения фактов. С.Л. Рубинштейн отмечал, что «процесс накопления знаний и умений называется учением, а процесс приобретения способностей – развитием» [173, с. 221].

К недостаткам описания учения как деятельности в концепциях учения относят следующие [91]:

- недостаточно четкое разграничение деятельности учения и деятельностей, усваиваемых в учении;

- неполное и недостаточно систематичное использование общей схемы анализа процессов как деятельности личности в описании учения;

- констатация наличия в учении компонентов, свойственных любой деятельности, без указания специфики их содержания применительно к учению.

Учение включает в себя два процесса: собственно учение и действие, усваиваемое в учении; хотя оба процесса взаимосвязаны, но они не тождественны.

В учебном процессе одни цели достигаются на основе репродуктивного учения, другие на основе продуктивного. И.И. Ильясов отмечает, что «репродуктивное учение позволяет успешно формировать знания, умения и навыки, развивать логику, продуктивное учение дает возможность развивать творческие способности. Оба вида учения являются взаимодополняющими» [91, с. 145].

И.Я. Лернер [128] полагает, что основная функция продуктивного учения состоит, прежде всего, в усвоении опыта творческой деятельности, а не в усвоении знаний, умений и навыков.

Целью данной работы является разработка теоретических основ и практических рекомендаций по организации поисково-исследовательской деятельности учащихся и разработка такого математического содержания, на основе которого возможна организация такой деятельности.

В работе отмечено, что важным для учащихся является приобретение психического опыта исследовательской деятельности. Осознание собственного открытия, опыт самостоятельной работы качественно изменяют отношение учеников к процессу познания. В результате исследовательской деятельности у школьников развивается важнейшая составляющая личности – активность, благодаря чему в проблемных ситуациях учащийся может добиваться самостоятельного решения поставленной задачи.

Заметим, что уже долгое время организации поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике служит журнал «Квант», но в последнее время появляются и другие издания, которые посвящены исследовательской деятельности учащихся. Одно из изданий мы укажем, оказав тем самым, как нам представляется, помощь и учителю, и учащимся: научно-методический и информационно-публицистический журнал «Исследовательская работа школьников» (адрес редакции: 115419, Москва, ул. Донская, д. 37, тел. 8-(095)-959-99-50).

Желаем учителю успехов в организации поисково-исследовательской деятельности учащихся, а им, творцам XXI века, удач в научных дерзаниях.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

§ 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Большинство педагогов сходятся во мнении, что наиболее важной целью любого курса обучения является пробуждение в детях активных исследовательских интересов. Многие программы обучения подвергаются жесткой критике за то, что готовят потребителей готовых знаний.

Одним из первых сторонников исследовательского пути обучения, при котором ученики ставятся в положение первооткрывателей, был Ян Амос Коменский. Он полагал, что «следует учить главнейшим образом тому, чтобы они черпали знания не из книг, а наблюдали сами, …, чтоб исследовали и познавали самые предметы, а не помнили только чужие наблюдения и объяснения» [128, с. 140].

Через полтора столетия Жан Жак Руссо убедительно показал важность элементов обучения, которые в дальнейшем стали основой исследовательского метода.

В России идея исследовательского подхода в обучении была впервые выдвинута Н.И. Новиковым [140] во второй половине XVIII века. Большой вклад в разработку этого подхода в обучении внесли русские педагоги К.Д. Ушинский [195], Н.Ф. Бунаков [36], П.Ф. Каптерев [101] и др. Это были пока лишь первые попытки подхода к анализу исследовательского метода, напоминающие призывы к воспитанию самостоятельности учащихся, развитию их мышления без ясного осознания того уровня, которого надо и можно достигнуть. Так, К.Д. Ушинский, выдвигая познавательную самостоятельность учащихся, считал, что ученикам следует преподавать «не только те или другие познания, но и способность самостоятельно, без учителя, приобретать новые знания. Обладая такою умственною силою, извлекающею отовсюду полезную пищу, человек учится всю жизнь, что, конечно, и составляет одну из главнейших задач школьного обучения» [179, с. 50].

Во второй половине XIX века началась практическая реализация данного метода (Г. Амстронг, А.Я. Герд, Ф. Даниеман и др.). В 20-30 годы XX века активно разрабатывают исследовательский метод отечественные педагоги Б.В. Всесвятский [46], Б.Е. Райков [168], В.Ю. Ульянинский [168], В.В. Половцов [160], М.А. Рыбникова [174], М.Н. Салтыкова [175] и др.

В тот период совершенствовались различные названия этого метода: «метод исканий» (Б.В. Всесвятский), «метод лабораторных уроков» (К.П. Ягодовский) и др. Появляется новый термин «эвристика» (от греч. ευρίσχω – нахожу). Кроме того, в педагогической литературе утверждается термин «исследовательский метод», предложенный Б.Е. Райковым.

Разночтение наблюдалось не только в терминах, но и в определении сущности исследовательского метода. Так, Н.А. Рожковым [171] этот метод понимался как совокупность разнообразных приемов преподавания, в основе которых лежит самостоятельная познавательная деятельность учащихся. Н.Ф. Натали видел сущность исследовательского метода в том, что ученик воспринимает новые факты и явления не со слов учителя, а путем самостоятельных исканий и их открытий. Эвристики стали рассматривать как приемы исследования и обучения, согласно которым обнаружение истины должно происходить с помощью соответствующих наводящих вопросов.

Существовали и другие определения исследовательского метода, однако все педагоги сходились во мнении, что сущность исследовательского метода заключается в том, что результат работы неизвестен ученикам, он самостоятельно должен быть добыт ими. Общей в этих определениях была схема исследования: наблюдение – постановка вопроса – эксперимент – вывод. В результате были выделены основные черты исследовательского метода: соответствие научному методу мышления, самостоятельность и активность учащихся. Важное место при этом отводилось учителю, и его роль изменялась в зависимости от возраста учащихся.

Русский методист А.Я. Герд, независимо от основоположника исследовательского метода Г. Амстронга, сформулировал важные положения развивающего обучения: «Все реальные знания приобретены человеком путем наблюдения, сравнения и опыта, при помощи постепенно расширяющихся выводов и обобщений. Только таким путем, а никак чтением статей могут быть переданы знания детям. Ученики должны под руководством преподавателя наблюдать, сравнивать, описывать и обсуждать наблюдаемые факты и явления, делать выводы и обобщения и проверять их доступными способами» [54]. Следует отметить, что в исследованиях А.Я. Герда довольно полно выражена суть процесса самостоятельного приобретения новых знаний: «если ученик сам наблюдает и сам сравнивает, то знания его отчетливее, определеннее и составляют его собственность, приобретенную им самим» [54, с. 3–4].

В зарубежной педагогике идеи исследовательского метода связывают с именами У. Александера, Дж. Брунера, Э. де Боно, Дж. Дьюи, И. Петкова, П. Хальверсона и др.

На современном этапе довольно четко определили сущность исследовательского принципа в обучении М.Н. Скаткин и И.Я. Лернер. Они отмечают, что «сущность исследовательского принципа состоит в том, что в ходе обучения основам наук и трудовым процессам ученики знакомятся с методами исследования, применяемыми в каждой области знаний, и усваивают доступные им элементы исследовательской методики. Иными словами, обучение включает также формирование у школьников навыков самостоятельного добывания знаний путем исследования природы и общества».

Исследовательский метод в современной литературе интерпретируется как «целостная, системная, многоуровневая, динамичная, открытая процессуально-личностная модель учебно-исследовательской деятельности, отражающая в зависимости от специфики исследовательской ситуации, вариативную интеграцию логических, эвристических, эмпирических методов по отношению к которым он выполняет системообразующую функцию» (Л.А. Казанцева).

Современное состояние науки требует такого обучения, которое вооружает учащихся умениями самостоятельного добывания знаний. Этой цели и служит исследовательский подход в обучении. В этом плане следует отметить попытку И.Я. Лернера и М.Н. Скаткина [129] дать новую классификацию методов обучения, исходя из степени самостоятельности в познавательной деятельности учащихся. Авторы выделили пять методов обучения: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный, частично-поисковый, проблемный, исследовательский.

Вход личности в пространство методов предполагает моделирование учебно-исследовательской деятельности на основе их вариативного сочетания в зависимости от специфики проблемной, исследовательской ситуации.

Теоретической предпосылкой исследовательского подхода является то, что учебное исследование, как и научное, является процессом познания объективного мира, поэтому совпадают такие составляющие их элементы, как усвоение уже известного по данной проблеме; выявление новых фактов и явлений; установление непонятных явлений, подлежащих исследованию; изучение фактов, связанных с непонятными явлениями; объяснение непонятного; формулирование выводов из изученного; их применение к дальнейшему исследованию и практике. Однако специфика учебного процесса накладывает отпечаток на данные этапы, в связи с чем некоторые этапы научного познания могут отсутствовать.

Исследованием проблемы сравнительного анализа научного познания и обучения занимался С.А. Шапоринский [206]. Как и многие другие, он считает, что учение и научное познание – взаимопроникающие процессы: со стороны науки связующим звеном является выражение познанного как результата объективации, усвоения и логиической оценки познанного самим ученым, а со стороны учения – отражение объекта на основе уже выраженного знания о нем. По его мнению, основное отличие учебного процесса заключается в задании предмета познания, введение его обучающим в процесс учебного познания.

«Современная теория познания, логика науки и сравнительный анализ научного и учебного познания, – отмечает С.А. Шапоринский, – показывают, что без отражения объекта подлинное познание невозможно, поскольку при любом движении только в плоскости знаний как таковых, знаний как знаковых систем, полноценное усвоение содержания знаний невозможно» [206, с. 196].

Ученый считает, что в процессе обучения имеет место противоречие между уровнем овладения познавательными средствами, в том числе языком науки, и уровнем требований, необходимым для овладения новым фрагментом содержания обучения. Такого противоречия нет в научном познании, но он выделяет периодически возникающее противоречие между существующим категориальным аппаратом и новыми данными, требующими создания новой категориальной системы.

Сопоставление научной и учебной проблем проводили Э.М. Мирский [137] и М.И. Махмутов [133]. Первый, прежде чем сопоставить учебную и научную проблемы, замечает, что в обучении информационная ситуация содержит только необходимую информацию, в отличие от информационной ситуации в науке, где необходимую для постановки и тем более для решения проблемы информацию предстоит выделить.

М.И. Махмутов [133], сопоставляя постановку проблемы и процесс ее решения в науке и в обучении, указывает на различие, которое он усматривает в следующем: ученый формулирует проблему в результате анализа ситуации, возникающей в результате требований практики, а ученик имеет дело с проблемой, возникающей по логике учебного процесса.

Э.М. Мирский осуществил сопоставление научного творчества и обучения, результат которого можно представить в виде таблицы (таблица 1).

Таблица 1

Научное творчество	*Обучение*
1. Обнаружение противоречия или недостаточности научной теории, которая является объектом деятельности ученого. 2. Выявление информационного комплекса, позволяющего поставить проблему. 3. Постановка проблемы. 4. Решение проблемы, для реализации которой необходимо привлечение дополнительных сведений (имеющаяся научная информация, результаты эксперимента, развитие формального или понятийного аппарата научной области или привлечение арсенала других научных областей); решение может быть неоднозначным.	1. Возможность противоречия исключена. Представление о действительности основано на «правильных» систематизированных сведениях. 2. Получение строго сформулированных условий задачи. 3. Постановка проблемы. 4. Решение проблемы, для реализации которой вполне достаточно пройденного материала по данному и смежным предметам, обеспечено наличным формальным и понятийным аппаратом; решение ведет к однозначному ответу.

Анализ взаимосвязи научного и учебного познания позволяет заключить следующее:

- учебное познание циклично, а новизна результата познания субъективна, что позволяет ученику выполнять не весь цикл познания, а отдельные его элементы в различных сочетаниях под руководством учителя, что позволяет управлять исследовательской деятельностью школьников;
- центральным этапом учебного познания, интегрируемого на основе взаимосвязи его цикличности и теории и практики формирования у учащихся научных понятий, является этап учебной исследовательской деятельности учащихся, в котором целесообразно отражается научное познание;
- для осуществления учебного исследования учащимся необходимы определенные знания и практические умения и навыки, которыми к его началу они должны владеть;
- успешное учебное познание школьников возможно, если возбуждаются и развиваются их внутренние мотивы учения на всех этапах исследования и обеспечена рефлексия познавательной деятельности.

Таким образом, анализируя сущность научного и учебного исследований, можно сделать вывод, что основным их отличием является то, что научное исследование имеет одну цель – «открытие» нового, а учебное – несколько целей, главной из которых является обучение учащихся самой исследовательской деятельности, методам научного познания, способам мыслительной деятельности, развитию интуиции и творческих способностей.

Как отмечает А.С. Крыговская [115], различия касаются прежде всего отношения между передачей учащимся знаний, опыта и методов мышления, выработанных взрослыми, с одной стороны, свободным открытием и творчеством самих учащихся – с другой. Суть педагогической концепции состоит в ответе на вопрос: являются ли эти два фактора противоположными, или же, наоборот, они связаны в одном процессе? А.С. Крыговская формулирует следующий постулат: «Основное в обучении творческой математике состоит в обеспечении детям их естественного развития. Не нужно, чтобы дети приняли чуждую им, предложенную взрослым миром концепцию (быть может, недоступную их возрасту и способностям)» [115, с. 19]. Обязательное условие для того, чтобы этот постулат работал в школьной действительности, – знание мышления ученика на каждом этапе его развития. Это знание может быть приобретено только путем непрерывного и объективного наблюдения непосредственных реакций учеников на проблемные ситуации, что требует также невмешательства учителя в деятельность детей.

Математическая активность ребенка и ученика не должна быть заранее определена и ограничена математикой взрослых. Ребенок хочет и может создать свою собственную математику. Задача учителя состоит в том, чтобы обеспечить исходную ситуацию, вызывая и освобождая деятельность ребенка, которая развивается в дальнейшем независимо, без прямого вмешательства учителя. Значение имеет сама творческая деятельность, а не то, что она сотворила.

Таким образом, следует отметить наличие существенного различия в мотивационном аспекте анализируемых исследований. Если в научном исследовании степень сложности рассматриваемой проблемы неизвестна и исследователь не имеет уверенности в возможности получения им сколько-нибудь нового результата (он даже не знает о его существовании), то в учебном исследовании учащийся, как правило, заведомо знает о разрешимости задачи и посильности для него получения результата.

Большое значение исследовательской деятельности придают ученые-методисты и учителя математики Ю.М. Важенин [39], Э.Г. Готман [58], С.Г. Губа [62], Г.В. Дорофеев [80], Н.И. Зильберберг [86], Д.В. Клименченко [104], Г.К. Муравин [138], А.А. Окунев [144], Г.И. Саранцев [175], А.Я. Цукарь [204] и др. Причем большинство этих авторов связывают исследовательскую деятельность или с решением специально подобранных задач, или с дополнительной работой над задачей.

С.Г. Губа [62] отмечает, что развитию у учащихся интереса к поиску и исследованию математических закономерностей помогает варьирование задач на доказательство, когда одна и та же математическая закономерность может послужить основой для довольно большого числа внешне различных задач.

Д.В. Клименченко [104] считает, что формировать исследовательские навыки можно в процессе решения задач, требующих анализа условий и чертежа.

А.Я. Цукарь [204] предлагает организовать формирование элементов исследовательской деятельности в процессе дополнительной работы над задачей: сопоставление, сравнение, противопоставление задач, сходных в том или ином отношении, и составление задач взаимно обратной данной.

Таким образом, анализ научной литературы показал, что проблема использования учебных исследований в школьной математике многоаспектна и актуальна. И хотя в методической литературе можно довольно часто встретить упоминание об исследовательской деятельности учащихся, материал, посвященный этой проблеме, носит разрозненный, несистемный характер, подчеркивая либо важность поисково-исследовательской деятельности, либо представляя частные разработки и рекомендации по каким-то отдельным вопросам.

Чтобы раскрыть понятие учебного исследования, проанализируем определения, данные разными авторами, и выделим основные его характеристики. Большинство исследователей (Е.В. Баранова, Е.С. Кощеева, Е.В. Ларькина, Г.В. Токмазов и другие) рассматривают исследовательскую деятельность как часть творческой деятельности, продуктом которой являются новые знания. Вместе с тем творческая деятельность сама является объектом исследования и изучения и не имеет в дидактике довольно четкого и единого определения.

В определении учебного исследования, данном М.З. Каплан [100], выделены основные черты учебного исследования, отличающие его от научного, но не раскрыта сама сущность процесса исследования. Он рассматривает учебное исследование как метод обучения математике, включающий в себя пять уровней, опирающихся на соответствующие уровни сформированности математического мышления учащихся и способствующие ускорению перехода от одного уровня к другому, более высокому. При этом под учебным исследованием он понимает такое исследование, которое характеризуется двумя критериями:

1) исследуемая проблема ставится в соответствии с дидактическими целями (для реализации целей обучения);

2) само исследование, как метод обучения, носит двойственный обучающий характер:

а) обучает определенному содержанию;

б) обучает элементам исследовательской деятельности.

Кроме того, М.З. Каплан выделяет структурные компоненты учебного исследования в узком смысле:

- система знаний;

- система действий (знания о способах мыслительной деятельности и наличие некоторых умений их применения);

- расширенная система знаний и действий.

Исследовательская деятельность является одним из видов творческой деятельности. И.П. Калошина [96] считает, что к настоящему времени нет единого психологического критерия творческой деятельности.

Основываясь на критериях творческой деятельности, предложенных И.П. Калошиной [96], можно дать развернутое определение исследовательской деятельности через систему следующих признаков, согласно которым исследовательская деятельность:

- направлена на решение задач, для которых характерно отсутствие у субъекта способа решения задачи;

- связана с субъектом на осознаваемом или неосознаваемом уровнях новых для него знаний в качестве ориентировочной основы для последующей разработки способа решения задачи;

- характеризуется для субъекта неопределенной возможностью разработки новых знаний и на основе их способа решения задачи; неопределенность обусловлена отсутствием каких-либо других знаний, строго детерминирующих указанную разработку.

И.П. Калошина [97] выделяет такие механизмы творческой деятельности:

- поиск неизвестного с помощью механизма анализа через синтез;
- поиск неизвестного с помощью механизма взаимодействия интуитивного и логического;
- поиск неизвестного с помощью ассоциативного механизма;
- поиск неизвестного с помощью эвристических приемов и методов.

Психологическим критерием нормативной творческой деятельности считают планомерную, выполняемую теоретическим путем и на осознаваемом уровне разработку субъектом новых для него знаний – методических или предметных, на базе которых создается затем способ решения задачи [97].

К социальному критерию творческой деятельности относят получение объективно нового результата, нашедшего общественное признание. Творческая и исследовательская деятельности входят в состав продуктивной деятельности, что схематично можно изобразить так (рис. 1).

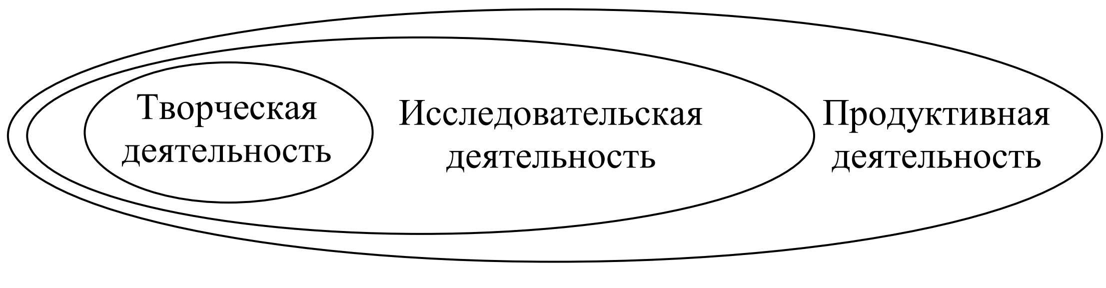


Рис. 1

Из рисунка видно, что творческая деятельности есть часть исследовательской, но есть и другая точка зрения.

И.Л. Беленок отмечает, что основным существенным признаком, выделяющим исследование среди других видов творческой деятельности, является ее цель – познание, в отличие от других, где основная цель – преобразование. Однако никакое сознательное преобразование невозможно без познания исходного и конечного состояний преобразуемого объекта. И в этом смысле исследование является неотъемлемой составной частью любого другого вида творческой деятельности. В этом и проявляется значимость исследовательской деятельности как основы, фундамента творчества.

Структуре, указанным видам деятельности, принадлежат следующие компоненты: цель деятельности, предмет деятельности, орудия деятельности, операции деятельности, продукт деятельности. И.П. Калошина [97] систему компонентов деятельности условно разделяет по иерархии на две группы:

- основная (цель деятельности, образец конечного продукта, сам продукт);
- вспомогательная (предмет, орудия, операции).

Процесс творческой деятельности можно логически представить следующим образом: возникновение проблемы (постановка задачи); подготовка к решению; формирование замысла; воплощение замысла; проверка и доработка. В структуру творческой деятельности входят процесс творческой деятельности, продукт творческой деятельности, личность творца, среда и условия, в которых протекает творчество.

К числу характеристик творческих способностей учащихся относят следующие умения [83]:

- самостоятельно переносить знания в новые условия;
- видеть новые проблемы в обычных условиях;
- усматривать структуру проблемы или задания;
- обнаруживать новую функцию знакомого объекта;
- проявлять дальновидность в предсказании исходов избранного пути решения проблемы;
- комбинировать ранее известные методы решения проблем для нахождения нового метода; находить более изящный – точный, ясный,

короткий способ решения при умелой опоре на уже известные способы;

- изложить и объяснить свою трактовку новой идеи и метода решения проблемы;

- составить свою композицию выполнения операций;

- проявлять способность «свертывать процесс рассуждения» и способность к рассуждению.

Ввиду важности для нашей работы понятия творческой деятельности мы посвящаем выявлению сущности этого понятия отдельный параграф (§4).

Для раскрытия сущности понятия учебного исследования можно выделить его характерные признаки:

1) учебное исследование – это процесс поисковой познавательной деятельности (изучение, выявление, установление чего-либо и т.д.);

2) учебное исследование всегда направлено на получение новых знаний, то есть исследование всегда начинается с потребности узнать что-либо новое;

3) учебное исследование предполагает самостоятельность учащихся при выполнении задания;

4) учебное исследование должно быть направлено на реализацию дидактических целей обучения.

М.З. Каплан [99] под учебным исследованием понимает специфический метод развивающего обучения, элементы которого можно найти в среде продуктивных методов обучения, какой бы классификации они не принадлежали. Он указывает те функции обучения, которые учебное исследование эффективно обеспечивает:

а) качественное усвоение знаний учащимися;

б) умение применять знания на практике, в том числе и в нестандартных ситуациях;

в) побуждение учащихся к самообразованию;

г) воспитательные и развивающие функции.

«Учебное исследование, – отмечает М.З. Каплан, – рассматривает учащегося не как объект для убеждения в истинности и необходимости получаемых знаний, а как субъект, непосредственно участвующий в их добывании. Другими словами, учебное исследование – метод обучения деятельностный, а поэтому эффективный» [99, с. 32].

Е.С. Кощеева дает такое определение учебно-исследовательской деятельности: учебно-исследовательскую деятельность следует понимать как организуемую педагогом деятельность обучаемых, направленную на поиск объяснения и доказательства закономерных связей и отношений, экспериментально наблюдаемых или теоретически анализируемых фактов, явлений, процессов, в которой преобладает самостоятельное применение учащимися приемов научных методов познания. В результате этой деятельности обучаемые активно овладевают знаниями, развивают свои исследовательские умения и способности.

Участвуя в учебном исследовании, учащиеся обучаются математической деятельности, ибо непосредственно проделывают эту деятельность. Учебные исследования создают своего рода платформу для активной мыслительной деятельности учащихся. В таком случае важна не только работа учащихся, но и то, каким образом они приобретаются.

На основании результатов анализа философского и психолого-педагогического аспектов проблемы можно отметить, что для творческой самореализации и саморазвития учащихся в процессе учебно-исследовательской деятельности необходимо овладение ими исследовательским методом, так как:

- через структуру исследовательского метода в обучении возможна реализация различных методов наук, на основе их вариативного сочетания в зависимости от специфики проблемной, исследовательской ситуации;
- исследовательский метод в обучении обуславливает эмоционально-ценностные свойства личности и является основой творческой самореализации учащихся и педагога.

Вопросы организации исследовательской деятельности учащихся всегда были в центре внимания психологов, дидактов и учителей. Но, несмотря на значительное количество эффективных теоретических разработок, они плохо внедряются в практику обучения, так как:

- наряду с большими достоинствами применение исследовательского метода связано с определенными трудностями: дефицит учебного времени, неоднородность учащихся в классе и т.д.;
- исследовательский метод применяется в массовой школе эпизодически без системы в организации учебно-исследовательской деятельности учащихся.

Учебное исследование как метод обучения математике не только формирует, развивает мышление учащихся, но и способствует формированию высшего типа мышления – творческого мышления, без которого немыслима творческая деятельность [99].

Анализ понятий учебного познания и учебной деятельности позволяет заключить, что для организации учебно-воспитательного процесса на основе исследовательской деятельности учащихся учебная и исследовательская деятельность должны рассматриваться как единая учебно-исследовательская деятельность.

Под учебно-исследовательской деятельностью учащихся понимается учебная деятельность по приобретению практических и теоретических знаний с преимущественно самостоятельным применением научных методов познания, что является условием и средством развития у обучающихся творческих исследовательских умений.

Структуру учебно-исследовательской деятельности определяют следующие компоненты: учебно-исследовательская задача, учебно-исследовательские действия и операции, действия контроля и оценки.

Содержанием учебно-исследовательской деятельности являются общие способы учебных и исследовательских действий, направленные на решение конкретно-практических и теоретических задач.

Поисково-исследовательская деятельность – это процесс решения поставленной проблемы на основе самостоятельного поиска теоретических знаний; предвиденье и прогнозирование как результатов решения, так и способов и процессов деятельности.

Участвуя в учебно-исследовательском или научно-исследовательском проекте, учащийся оказывается субъектом проектного образования. Проектное образование существенно отличается от классического следующими критериями:

- учащийся становится настоящим субъектом процесса обучения, сам отбирает нужную информацию, исходя из замысла проекта;
- в проектном образовании уменьшается доля готовых знаний, подлежащих усвоению.

К факторам, способствующим формированию учебно-исследовательской деятельности учащихся, можно отнести следующие:

- личностно ориентированный подход к обучению;
- ориентация на продуктивное достижение результата;
- проблемное обучение как инструмент развития опыта творческой деятельности;
- оптимальное сочетание логических и эвристических методов решения задач;
- креативная организация учебного процесса, максимальное насыщение его творческими ситуациями;
- создание ситуации совместной поисковой деятельности;
- детализация учебного процесса;
- создание психологической атмосферы, оптимальных условий для творческой деятельности.

Условиями, способствующими активизации поисково-исследовательской деятельности учащихся, являются:

- доброжелательная атмосфера в коллективе;
- сочетание индивидуальных и коллективных форм обучения;
- структурирование учебного материала по принципу нарастания познавательной трудности учебной работы;

- вооружение учащихся рациональными приемами познавательной деятельности;

- формирование внутренних стимулов к учению, самообразованию и др.

Тормозят же активную познавательную деятельность учащихся следующие факторы: при опросе вопросы учителя и ответы учащихся носят репродуктивный характер; при изучении нового материала на абсолютном большинстве уроков преобладает усвоение учащимися готовых знаний; закрепление и применение знаний проводятся в основном лишь по образцу и т.п.

Л.Б. Ительсон отмечает, что «личности, способные к подлинному творчеству, а не просто к решению задач, вспыхивают, как факелы, загоревшиеся от неведомого огня, случайно, независимо от наших сегодняшних способов обучения, а может быть, и вопреки им» [92, с. 86].

К общим принципам организации учебного процесса, обеспечивающим развитие поисково-исследовательской деятельности учащихся, можно отнести:

- педагогическое руководство в создании мотивов и стимулов к учению;

- привитие интереса к изучаемому объекту;

- вооружение учащихся необходимыми приемами познавательно-поисковой деятельности;

- систематическое осуществление принципа индивидуализации в обучении;

- широкое использование технических и наглядных средств обучения;

- внедрение в практику работы и систематическое использование компьютерных технологий;

- разработка творческих заданий, требующих нестандартных решений и самостоятельного поиска источников информации;

- сочетание и соединение дидактически и методически обоснованных методов, способствующих развитию познавательной деятельности и творческих способностей учащихся.

В настоящее время возросло внимание к разработке проектов и к формированию исследовательской деятельности в связи с индивидуализацией обучения при разработке индивидуальной образовательной траектории (маршрута).

Индивидуальный образовательный маршрут мы будем понимать, следуя А.П. Тряпицыной [191], как целенаправленно проектируемую дифференцированную образовательную программу, обеспечивающую учащемуся позицию субъекта выбора, разработки и реализации образовательной программы при осуществлении учителем педагогической поддержки его научного и профессионального самоопределения и самореализации.

Исследовательская деятельность может существовать в двух видах: учебно-исследовательская и научно-исследовательская, особенностью которых является то, что их содержанием выступает разрешение противоречий с целью нахождения субъективно или объективно нового знания. По своей структуре эти два вида исследовательской деятельности не отличаются друг от друга, но уровни строгости проведения доказательств могут отличаться и причем существенно.

Сопоставительный анализ процессов научного и учебного исследования показывает, что они имеют общую гносеологическую основу, но различаются по своим логико-психологическим и дидактическим характеристикам.

Предназначение исследовательской деятельности учащихся состоит в том, что, будучи формой активности индивида, она является условием и средством его психического развития. Психическое же развитие обеспечивает школьнику усвоение теоретических знаний и способствует формированию у него специфических способностей и качеств личности: любознательности, целеустремленности, научной фантазии.

М.И. Махмутов отмечает, что «поскольку научное познание есть процесс творческий, то сближение методов обучения с методами науки должно обеспечить развитие творческих способностей учащихся» [134, с. 60].

О.А. Ивашова и О.В. Шереметьева [90] выделяют три уровня учебного исследования в зависимости от степени самостоятельности деятельности учащихся:

- обнаружение проблемы и выдвижение гипотезы осуществляется либо самим учителем, либо под его непосредственным руководством; остальные этапы исследовательской деятельности выполняются учениками с большей долей самостоятельности;
- под непосредственным руководством учителя происходит лишь постановка проблемы, остальные этапы исследовательской деятельности выполняются самими учениками в индивидуальной или групповой работе;
- все элементы исследования осуществляются учениками самостоятельно.

Приобщение обучающихся к исследовательской деятельности можно реализовать через решение специальных исследовательских задач или через дополнительную работу над задачей.

Под исследовательской задачей будем понимать объект мыслительной деятельности, в котором в диалектическом единстве представлены составные элементы: предмет, условие и требование получения некоторого познавательного результата при раскрытии отношений между известными и неизвестными элементами задачи.

Различают несколько степеней проблемности исследовательской задачи [7]:

1) первая степень проблемности задачи свидетельствует о том, что способ решения задачи ученику известен, поскольку подобные задачи им решались и известен алгоритм их решения;

2) вторая степень проблемности означает, что способ решения необходимо вывести из известных способов, например, комбинированием;

3) третья степень проблемности характеризуется тем, что способ ее решения неизвестен учащимся; поиск решения представляет собой творческий процесс, но результат обладает субъективной новизной;

4) четвертая степень проблемности означает, что способ решения неизвестен в пределах области научных знаний; поисковая деятельность приобретает в этом случае истинно исследовательский характер и результаты решения задачи обладают объективной новизной.

К учебно-исследовательским задачам В.И. Андреев [6] относит те задания, которые представляют собой систему логически связанных учебных проблем, позволяющими в совокупности с эвристическими вопросами, указаниями и минимумом учебной информации открыть новые знания об объекте исследования, способе, приеме или средстве исследовательской деятельности. В своей классификации учебно-творческих задач в связи с их использованием для развития творческих способностей личности он выделяет не только виды учебно-творческих задач, но и развиваемые компоненты творческих способностей личности (таблица 2).

Таблица 2

Признак, основание для классификации	*Типы учебно-творческих задач*	*Виды учебно-творческих задач*	*Развиваемые компоненты творческих способностей личности*
Применение принципов и методов научного познания	Исследовательские задачи (задачи на применение методов и принципов научного познания)	Экспериментальные задачи; задачи на моделирование; задачи графические; задачи на формализацию, применение математических методов; задачи на применение принципа системности, дополнительности, историзма и т.д.	Способность к широкому переносу принципов, методов научного познания в новые ситуации

Аналогично определяет исследовательские задачи В.В. Успенский [194]. К школьным исследованиям он относит вопросы и задания учителя, а также вопросы самого ученика, которые вызывают его активную поисковую деятельность, направленную на самостоятельные «открытия» и разрешения учебно-познавательных проблем. Сразу же заметим, что если задача недоступна пониманию учащихся, то и проблемы нет.

Классифицировать исследовательские задачи И.В. Усачева и И.И. Ильясов [91] предлагают по содержанию научной информации, которую следует использовать при решении той или иной задачи. Научная информация по содержанию может быть следующих видов:

- информация о научных фактах (фактологическая);
- информация о научных гипотезах, концепциях и теориях, объясняющая и объединяющая некоторую совокупность научных фактов и взаимосвязь между ними;
- информация, объединяющая некоторую совокупность научных фактов, гипотез, концепций, теорий и законов, образующую основу данной науки или области знания;
- информация, отображающая и формирующая общий подход к познанию в некоторой области знания.

И.И. Ильясов [91] отмечает, что в познании решаются пять видов задач и тем самым получаются пять видов знаний: познание внешних, атрибутивных свойств предметов; познание зависимости между свойствами; познание связей или функций предмета в более сложном целом; познание зависимости между связями или функциями предметов; познание внутреннего строения объекта, состава элементов и структуры, связи элементов как детерминант внешних свойств объектов (качественных и количественных).

Д. Толлингерова [86] предложила компактную формулу для вычисления структурных элементов понятия «стратегия поиска объекта»:

$$S = \log_n m,$$

где S – число шагов поиска объекта (оно всегда целое и округляется в большую сторону), m – общее число объектов исследования, n – число классификационных групп.

Формула К. Шеннона [92] позволяет подсчитать количество информации об искомом объекте при том или ином числе объектов в классификационных группах:

$$J = (\log_2 m - \log_2 m_1)\frac{m_1}{m} + (\log_2 m - \log_2 m_2)\frac{m_2}{m},$$

где J – количество информации в единицах информации, m – общее число исследуемых объектов, m_1, m_2 – число объектов в группах деления.

Из формулы следует, что наибольшая информация об искомом объекте имеет место при делении всех объектов на группы с равным числом членов в каждой.

И.П. Калошина [97] классифицирует творческие исследовательские задачи на основе деятельного подхода:

а) задачи на разработку неизвестного предмета деятельности;

б) задачи на разработку орудия деятельности;

в) задачи на разработку операций деятельности;

г) задачи на разработку характеристик продукта деятельности;

д) различные виды комплексных задач на совместную разработку всех указанных компонентов или нескольких.

Ю.Н. Кулюткин, Г.С. Сухобская [118] считают задачу творческой, если решающему неизвестен способ ее решения. В качестве примера такой задачи они приводят следующую: «На языке суахили, на котором говорят некоторые африканские народы, записаны слова и даны их переводы: akupenda – он любит тебя, awapiga – он бьет их, nikupiga – я бью тебя, atupenda – он любит нас. Переведите на этот язык фразу «Я люблю их» (ответ: niwapenda).

«В основе всякой задачи, – пишет М.Н. Скаткин, – лежит противоречие между тем, что есть, и тем, чего человек хочет добиться. Это противоречие и движет мысль вперед» [178, с. 20].

О.В. Охтеменко [151] суть исследовательских заданий по алгебре видит в изучении алгебраических объектов (выражений, неравенств и их систем, а также функций и их графиков) с целью выяснения их свойств; при этом учащиеся проходят основные этапы математического исследования (постановка проблемы, построение математической модели, изучение данных, выдвижение гипотезы, ее доказательство, обобщение и применение результатов).

Е.В. Позднякова в работе «Формирование исследовательских умений учащихся 7 класса при обучении геометрии: Методическое пособие для учителя». (Новокузнецк: Изд-во КузГПА, 2003. 99 с.) указывает различные виды открытых задач, решение которых формирует исследовательские умения. Приведем их.

1. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение ставить цели работы

Первый уровень – цель задачи 1) «озвучена» в формулировке; 2) сформулирована на языке математики (как и сама задача). Например: *Какова цель задачи: «Существует ли параллелограмм, в котором две стороны и одна диагональ соответственно равны 5 см, 2 см, 2 см?» (Доказать (или опровергнуть) существование параллелограмма, в котором две стороны и одна диагональ соответственно равны 5 см, 2 см, 2 см).*

Второй уровень – цель задачи не «озвучена» в формулировке, но сформулирована на языке математики (как и сама задача). Например: *1) Какова цель задачи: «Почему одна диагональ параллелограмма всегда больше другой?» (Доказать, что одна диагональ параллелограмма всегда больше другой) 2) Какова цель задачи: «Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две части?» (Доказать истинность или ложность утверждения: «Любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две части».)*

Третий уровень – цель задачи не «озвучена» в формулировке, задача сформулирована не на языке математики. Например: *Какова цель задачи: «Где на прямоугольном дачном участке нужно поставить* *столб для фонаря, чтобы все углы участка были освещены одинаково?» (Найти точку внутри прямоугольника, равноудаленную от его углов).*

2. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение анализировать условия заданной ситуации

Первый уровень – условия, описывающие заданную ситуацию 1) сформулированы явно; 2) не содержат противоречия; 3) не содержат избыточных данных. Например: *Существует ли треугольник ABC, если одна из его сторон равна 4 см, вторая на 2 см меньше, а третья в 2 раза больше?*

Второй уровень – в условии задачи нарушено одно из требований 1)-3). Примеры: 1) *Можно ли найти периметр равнобедренного треугольника, если известны его высота и одна из его сторон?* В условии задачи содержится неопределенность: не указано, какая сторона треугольника известна. Для ответа на поставленный вопрос необходимо рассмотреть два возможных случая: а) известно основание треугольника; б) известна боковая сторона треугольника. *2) Можно ли найти периметр прямоугольного равнобедренного треугольника, если его катеты равны 5а, гипотенуза – 12а?* Условие задачи противоречиво: такого треугольника не существует. *3) Можно ли найти все стороны равнобедренного треугольника, если две его стороны относятся как 3:8, периметр равен 38 см, а одна сторона на 10 см больше другой?* В условии задачи содержатся избыточные данные: для нахождения всех сторон треугольника достаточно одной из следующих комбинаций данных: а) периметр и разность сторон; б) периметр и отношение сторон; в) отношение и разность сторон.

Третий уровень – хотя бы часть условий, характеризующих геометрическую ситуацию, учащиеся вводят самостоятельно. Например: *При каком условии четырехугольник ABCD является собственно параллелограммом, если векторы* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *равны?* В задачах на отыскание условий требуется находить как необходимые, так и достаточные условия.

В рассматриваемой задаче необходимое условие: векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на одной прямой; достаточное условие: вектор $\overrightarrow{AB}$ не перпендикулярен вектору $\overrightarrow{CD}$ (*ABCD* – не прямоугольник), $\left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{CD}\right|$ (*ABCD* не ромб).

3. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение выдвигать и обосновывать гипотезы

Первый уровень – открытые задачи, удовлетворяющие следующим требованиям: 1) для выдвижения гипотезы достаточно 1-2 проб; 2) доказательство гипотезы основывается на одной известной теореме; 3) отсутствует необходимость построения математической модели (задача сформулирована на языке математики). Например: *Два равных прямоугольных треугольника приложили один к другому таким образом, что их гипотенузы совпали, а неравные острые углы приложились один к другому. Каков вид получившегося при этом четырехугольника?* (Для определения вида четырехугольника достаточно одной пробы, а доказательство гипотезы: «Получившийся четырехугольник – прямоугольник» основывается на теореме о сумме углов треугольника.)

Второй уровень – открытые задачи, в которых нарушены требования 1)–2). Например: *Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Какова зависимость между смежными сторонами данного параллелограмма?* (Для доказательства гипотезы: «Одна смежная сторона в два раза больше другой» требуется применить теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, а также свойства равнобедренного треугольника.)

Третий уровень – открытые задачи, в которых нарушены требования 1)–3). Например: *Два пешехода P и Q равномерно идут по прямолинейным отрезкам. Какую линию описывает середина отрезка PQ при движении пешеходов?*

Для решения данной задачи учащимся необходимо: 1) построить математическую модель предложенной ситуации и переформулировать задачу на язык математики. 2) провести 2-3 пробы с целью выдвижения гипотезы, применяя знания о взаимном расположении двух прямых на плоскости; 3) доказать гипотезу, используя понятия «вектор», «длина вектора», правило сложения векторов, а также знания из курса физики (уравнение равномерного прямолинейного движения материальной точки). Усвоить процессуальную сторону деятельности по решению открытых задач, связанных с выдвижением и обоснованием гипотез (умение 3), помогают учебно-исследовательские карты, работа над которыми организуется либо в групповой, либо в индивидуальной формах. В дальнейшем учитель может усложнять работу по таким картам, не обозначая в них явно один или несколько этапов.

4. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение планировать решение проблемы

Первый уровень – открытые задачи, в которых учащимся 1) известен алгоритм решения задачи; 2) не требуется построение математической модели (задача сформулирована на языке математики). Например: *Как найти периметр равнобедренного треугольника (рис. 2), если известна его высота и основание?*

План решения

1) Найти AO (по свойству: «в равнобедренном треугольнике высота является медианой»).

2) Найти AB (по теореме Пифагора).

3) Найти периметр $AB + BC + AC$, используя определение равнобедренного треугольника ($AB = BC$).

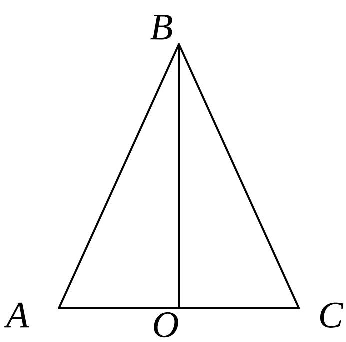


Рис. 2

Задача предъявляется учащимся после изучения теоремы Пифагора. Алгоритм решения элементарных задач 1) - 3) учащимся известен, следовательно, эта задача – стандартная.

Второй уровень – открытые задачи, алгоритм решения которых неизвестен. Например: *Как, зная сумму и разность длин двух отрезков, найти эти длины?*

Данная задача отличается от предыдущей тем, что учащиеся «открывают» алгоритм ее решения.

Третий уровень – открытые задачи прикладного характера, алгоритм решения которых неизвестен. Например: *Кузнечик прыгает по прямой большими и малыми прыжками. Большой прыжок составляет 12 см, малый – 7 см. Как ему попасть из точки О в точку А, находящуюся от О на расстоянии 3 см?*

При решении данной задачи учащиеся не только «открывают» алгоритм решения, но и переформулируют задачу в виде абстрактной геометрической задачи, строят математическую модель последней.

5. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение критически анализировать результат

Первый уровень – открытые задачи, в которых требуется выяснить: 1) верно ли утверждение, пользуясь одной теоремой (свойством, определением) или 2) верно ли решение задачи (приводится безошибочное решение). Например: *Верно ли утверждение: «Если два угла равны, то они вертикальные?»*.

Второй уровень – открытые задачи, в которых требуется выяснить: 1) верно ли утверждение, пользуясь несколькими теоремами (свойствами, определениями) или 2) верно ли решение задачи (решение задачи содержит логическую ошибку). Например: *Верно ли решена задача: «На плане с масштабом 1:10000 изображен прямоугольник, имеющий на плане стороны 2 и 3. Вычислить площадь этого прямоугольника в натуре»?*

Решение

$$S_1 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$S_2 = 6 \cdot 10000 = 60000$$

Ответ: $S_2 = 60000$

Третий уровень – открытые задачи, в которых требуется выяснить, рационально ли приведенное решение. Ответ обосновать (предложить еще один вариант решения задачи).

Открытые задачи можно использовать на всех этапах обучения в качестве устных упражнений (преимущественно задачи первого уровня), групповых или индивидуальных заданий (классных и домашних), заданий для проведения зачета по изученной теме. Такие задачи позволяют глубже и прочнее усвоить теоретический материал, повышают интерес к изучению геометрии, служат пропедевтикой учебно-исследовательской деятельности (то есть подготавливают учащихся к такой деятельности), развивают такие важные качества мышления, как критичность, гибкость, нестандартность, способствуют овладению учащимися приемами анализа, синтеза, сравнения, обобщения, прививают навыки творческой деятельности. Разный уровень открытых задач позволяет дифференцировать обучение, что способствует гуманизации образования.

Основными методами решения исследовательских задач (вернее поиска рационального условия) Е.В. Позднякова называет «мозговой штурм» и синектику (личная эмпатия).

«Мозговой штурм»

1) Прочтите внимательно условие задачи и предложите все возможные, в том числе абсурдные, гипотезы для его выполнения. При выдвижении гипотез запрещается их критика.

2) Сделайте анализ предложенных гипотез и выберите те из них, которые наиболее вероятны.

Синектика

Синектика – это метод решения творческих задач путем поиска аналогий.

Можно использовать также метод номинальных групп (он был в 1968 г. описан Дельбеком и Ван де Веном). Его суть состоит в следующем.

1) Группа (например, класс) делится на несколько маленьких групп по 8–10 человек.

2) Молчаливое генерирование (7–10 минут каждый участник в своей рабочей тетради набрасывает свои задумки).

3) Составление общего списка предложений (участники по порядку называют свои предложения, а все записывают их).

4) Уточнение идей (не следует стараться все укрупнять и обобщать; следует избегать оценочных суждений).

5) Этап голосования и ранжирования идей (из всего перечня выбираются 8 предложений – наиболее актуальных. Этим выбранным предложениям присваиваются баллы; самому значимому 8 баллов, а самому слабому – 1 балл).

6) Подсчет голосов (карточки, на которых записаны эти 8 предложений, складываются по порядку набранных баллов).

Каждая группа оформляет полученные результаты в виде плаката (таблица 3).

Таблица 3

№ п/п	*Предложения*	*Количество голосов*	*Сумма баллов*
1		10	80
2		5	40
..		..	..
..		..	..
8		3	9

Заметим, что этот метод исключает дискуссию участников.

Если предложение высоким баллом оценивает более 50% участников, то это абсолютно согласованное решение. Если, например, какое-то предложение лишь двумя участниками оценено по максимуму, то это особое мнение.

Где-то к середине (по времени) игры определяется выступающий от микрогруппы, задача которого – обосновать позиции, отраженные в таблице.

При обсуждении предложений каждой микро группы, участвующие становятся в критическую позицию.

Заметим, что использование этого метода в связи со спецификой математики ограничено. Отметим здесь, что установить истину стоит большого труда, а чтобы обнаружить заблуждение, часто достаточно одного эксперимента.

Для успешного выполнения исследовательских заданий учащиеся должны владеть определенными *исследовательскими умениями*, то есть сознательно выполнять интеллектуальные операции, являющиеся способами осуществления действий по реализации исследовательской деятельности.

Анализируя схему учебного математического исследования, О.В. Охтеменко пришла к следующему перечню учебно-исследовательских умений:

1. умение перевести задачу с естественного языка на математический, то есть подобрать для изучаемой ситуации готовую математическую модель или предложить новую;

2. умение интерпретировать полученный математический результат;

3. умение выдвинуть гипотезу (на основе анализа данных, по аналогии с известным решением, в результате рассмотрения частных случаев, пользуясь правдоподобными рассуждениями);

4. умение подобрать контрпример для опровержения неверного общего утверждения и подтверждающий пример для доказательства частного утверждения;

5. умение отличать правдоподобные рассуждения от доказательных;

6. умение проводить доступное доказательство общих утверждений (запись закономерности в буквенной форме и доказательство с помощью алгебраических преобразований, с опорой на определение, применением метода от противного, методом исчерпывающих проб);

7. умение построить алгоритм решения задач некоторого класса, используя полученный теоретический результат или обобщив частные случаи, и применять его для решения конкретной задачи;

8. умение применять полученные знания и способы действия в дальнейшей работе;

9. умение осуществлять самоконтроль в ходе работы и корректировать ее.

В.А. Гусев [65], опираясь на научные концепции творческой, исследовательской и учебной деятельности, выделил систему исследовательских умений при решении геометрических задач. Именно эти умения составляют исследовательскую деятельность учащихся на самом первом ее этапе. Перечислим эти исследовательские умение:

- умение выделять элементы задачи;

- умение находить фигуры, попадающие под данный элемент задачи;

- умение выявлять связи между фигурами, попадающими под данный элемент задачи;

- умение устанавливать связи между полученными связями, которые, в конечном счете, и приводят к решению данной задачи;

- умение оценивать полноту и непротиворечивость системы связей;

- умение строить структурный граф проведенного исследования (решения задачи).

Е.В. Позднякова выделяет следующие структурные элементы общих исследовательских умений:

- уметь ставить цель работы;

- уметь анализировать условия заданной ситуации;

- уметь выдвигать и обосновывать гипотезы;

- уметь планировать решение проблемы;

- уметь критически анализировать результат.

М.В. Таранова под учебно-исследовательской задачей понимает обобщенную цель учебно-исследовательской деятельности, поставленную перед учеником в виде обобщенного учебного или исследовательского (проблемного) задания на предметной области задачи. Ее цель – развитие ученика, подведение его к овладению обобщенными приемами учебно-исследовательской деятельности. Цель понимается как опознанное учащимися отражение их будущих действий для достижения ими результата.

С.Л. Рубинштейн отмечает, что цель исследования должна быть посильна учащемуся, поскольку проблемы, решаемые ученым и учащимся в процессе познания, различны генетически (по источнику возникновения) и, следовательно, мотивы деятельности различны.

Для решения математических исследовательских задач учащийся должен владеть различными аспектами математической деятельности. М.А. Радионов [167] (аналогично А. Маслоу) приводит такую схему мотивационной иерархии математической деятельности (рис. 3)

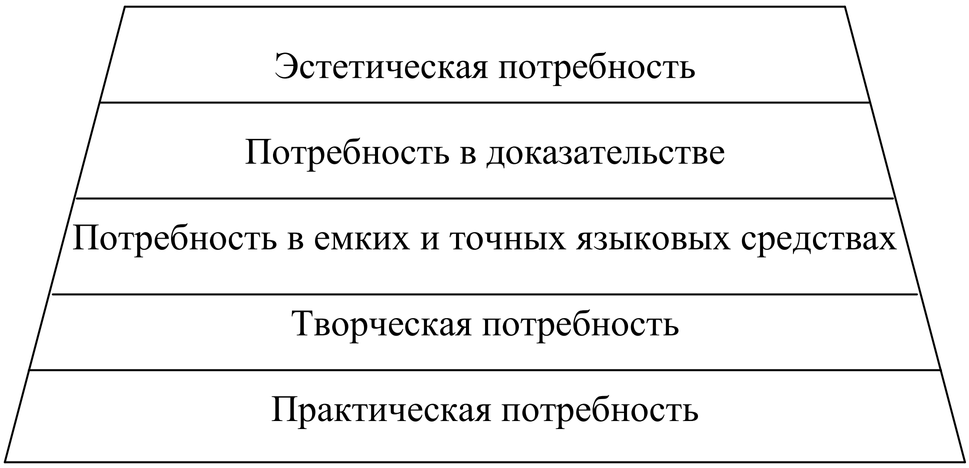


Рис. 3

Практическая потребность проявляется на этапе выбора проблемы и на этапе соотношения полученного результата с ограничениями, накладываемыми реальной проблемой. Творческая потребность характерна на этапе постановки проблемы, на этапе выдвижения гипотезы и на этапе обоснования гипотезы. Потребность в емких и точных языковых средствах требуется на этапе формализации исходной проблемы, защиты актуальности и новизны проблемы, точных формулировках обоснования и защиты выполненного проекта. Потребность в доказательствах становится актуальной на этапе обоснования решения проблемы.

Эстетическая потребность может реализоваться на всех этапах проекта, но в большей степени она реализуется при окончательном оформлении полученного результата.

Привлечение школьников к учебным исследованиям должно идти в двух направлениях – содержательном и организационном. Содержательная самостоятельность проявляется в том, чтобы ученик мог без помощи со стороны поставить перед собой учебную задачу и представить ход ее решения. Организационная самостоятельность выражается в умении ученика организовать свою работу по решению постановленной задачи.

Таким образом, перед учителем встает проблема поиска эффективных форм и способов учебной деятельности учащихся, которые бы не просто вовлекали бы их в исследовательскую работу, но и способствовали обучению самой этой деятельности. В конечном счете, необходимо так организовать познавательную деятельность школьников, чтобы процедура учебного исследования усваивалась ими вместе с тем содержанием, на котором оно осуществляется.

Для целей стимулирования и развития поисково-исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения математике А.В. Ефремов отмечает, что «учебный процесс должен быть организован таким образом, чтобы он позволял учащимся находить различные методы решения задачи (аналитические, графические и т.д.); видоизменять условия и предвидеть возможные изменения в ответе, то есть умение наблюдать в действии диалектику перехода количественных изменений в качество; извлекать из полученных данных сведения, использование которых может оказаться целесообразным при решении других задач; использовать примененный метод решения данной задачи к самостоятельному получению новых способов и приемов решения; применить имеющиеся знания по данной теме и решению примеров и задач других тем; ориентироваться в различных проблемных ситуациях» [83, с. 8–9].

Роль учителя и ученика в учебном исследовании наиболее полно определил И.Я. Лернер [125], который основным методом обучения опыту творческой деятельности считает исследовательский.

Сущность исследовательского метода обусловлена его функциями. Во-первых, он формирует черты творческой деятельности, которые составляют содержание третьего элемента социального опыта. Во-вторых, организует творческое усвоение знаний, то есть учит применять известные знания для решения проблемных задач и добывать новые в результате такого решения. В-третьих, обеспечивает овладение методами научного познания в процессе деятельности по поиску этих методов. И, наконец, он является условием формирования интереса, потребности в творческой деятельности, ибо вне деятельности мотивы, проявляющиеся в интересе и потребности, не возникают. Одной деятельности для этого недостаточно, но и без нее данная цель недостижима.

Учитывая эти функции, назначение исследовательского метода, по мнению И.Я. Лернера, заключается в организации поисковой творческой деятельности учащихся по решению проблем и проблемных задач.

Кроме того, он считает, что подавляющая масса исследовательских заданий должна представлять собой небольшие поисковые задачи, требующие, однако, прохождения всех или большинства этапов процесса исследования. Целостное их решение и обеспечит выполнение исследовательским методом его функций.

И.Я. Лернер утверждает, что необходимо четко отличать исследовательский метод, предполагающий поиск решения целостной проблемной задачи, от эвристического.

Целостная задача требует умений: анализировать условие ее в соотнесении с вопросом задачи; преобразовывать основную проблему в ряд частных проблем, подчиненных главной; проектировать план и этапы решения проблемы; формулировать гипотезу; синтезировать различные направления поисков; проверять решение и т.д. Для того чтобы ученики могли решать целостную задачу, их необходимо учить самостоятельно выполнять каждый из ее этапов, а также отдельные процедуры творческой деятельности с помощью специально созданных конструкций – учебных задач. В одном случае их учат видеть проблемы, предлагая ставить вопросы к изложенному содержанию; в другом – строить доказательство; в третьем – делать выводы из представленных фактов; в четвертом – высказывать предположение; в пятом – составлять план проверки решения и т.д. Поэлементное усвоение опыта творческой деятельности, овладение отдельными этапами решения проблемных задач обеспечивается эвристическим методом. Однако исследования психологов и дидактов показали, что ограничение учебного процесса участием ребят только в частичном решении творческих задач не приводит к формированию умений исследовать и решать целостные проблемы, как бы они ни были просты [125].

При исследовательском методе обучения познавательная деятельность ученика по своей структуре приближается к исследовательской деятельности ученого. Научное исследование – это один из видов познавательной деятельности, направленный на выработку новых научных знаний. В логическом словаре Н.И. Кондакова [110] исследование – это процесс научного изучения какого-либо объекта с целью выявления закономерностей его возникновения, развития и преобразования в интересах общества. Любое подлинное исследование есть единство накопленного предшествующего опыта, имеющихся знаний, способов подхода к изучаемому объекту. Результатом исследования должно стать получение новых научных знаний объективной истины. В психологическом словаре трактовка понятия «исследование» опирается на определение Теодорсона, который считает, что любая честная попытка систематически изучить проблему или что-то добавить к человеческому знанию о проблеме может считаться исследованием. В словаре русского языка [180] понятие «исследовать» означает подвергнуть научному рассмотрению в целях познания, выяснения чего-либо; изучить что-либо. Таким образом, из анализа данных определений можно сделать вывод, что понятие «исследование» обладает двумя существенными признаками: первое, что это – процесс поисковой познавательной деятельности (изучить, выяснить, установить, выявить, получить и т.д.); второе, что оно всегда начинается с потребности получить что-либо новое.

Под учебным заданием обычно понимают любой вид поручения учителя учащимся, заключающийся в требовании выполнить какие-либо учебные (теоретические или практические) действия [134, с. 226]. Следовательно, в научном исследовании принимает участие один или несколько субъектов, но все незнающие исход решения поставленной проблемы, а в учебном исследовании задействованы два субъекта – учитель и ученик, причем первому известно решение, а второму – нет. Поэтому от соотношения роли учителя и ученика при решении учебного задания будет зависеть, является оно исследовательским или нет. Только при изменении соотношения преподавания и учения путем разумного ограничения объясняющей функции учителя и расширения деятельности учащихся по самостоятельному раскрытию и объяснению сущности новых понятий школьники будут вовлекаться в исследовательскую деятельность [19].

Деятельность учителя состоит, прежде всего, в построении такой совокупности заданий, которая бы обеспечила творческое применение учащимися основных знаний (идей, понятий, методов познания) при решении главных, доступных им проблем курса, овладение чертами творческой деятельности, постепенное усложнение решаемых учащимися проблем [125].

Любопытно свидетельство одного педагога, который три года проработал в специальной группе с высокоодаренными учащимися, а затем вернулся в обычную «среднюю» группу. Занятия стали куда эффективнее, чем до приобретения опыта работы с высокоодаренными. По мнению преподавателя, он «привык» больше внимания уделять развитию самостоятельности, независимости в суждениях и оценках. И эта методика, перенесенная на «рядовых» учащихся, дала великолепные результаты. К сожалению, такой опыт удается зафиксировать лишь в самых общих выражениях, а не в виде конкретных приемов, которым может научиться всякий учитель.

Иногда все же педагоги-практики пытаются запечатлеть свой опыт в виде афоризмов, правил и даже «заповедей». Вот «шесть заповедей», составленных одной преподавательницей средней школы:

1. Не соглашайтесь с ответом ученика, если ответ просто затвержен и принят на веру. Требуйте доказательств.

2. Никогда не разрешай спор учащихся самым легким способом, то есть попросту сообщив им правильный ответ или верный способ решения.

3. Внимательно слушай своих учеников, лови каждую высказанную ими мысль, чтобы не упустить случая раскрыть для них что-то новое.

4. Постоянно помни – обучение должно опираться на интересы, мотивы и чаяния школьника.

5. Расписание уроков и школьные звонки не должны быть определяющим фактором учебного процесса.

6. В процессе обучения не может быть универсальной методики, а также раз и навсегда установленной программы.

В работе [142] предлагаются следующие рекомендации педагогам по выработке у детей исследовательских наклонностей:

- не занимайтесь наставлениями; помогайте детям действовать независимо; не давайте прямых инструкций относительно того, чем они должны заниматься;

- не делайте скоропалительных допущений, на основе тщательного наблюдения и оценки определяйте сильные и слабые стороны детей, не следует полагаться на то, что они уже обладают определенными базовыми навыками и знаниями;

- не сдерживайте инициативы детей и не делайте за них то, что они могут сделать (или могут научиться делать) самостоятельно;

- научитесь не торопиться с вынесением суждения;

- научите детей прослеживать межпредметные связи;

- приучите детей к навыкам самостоятельного решения проблем, исследования и анализа ситуаций;

- используйте трудные ситуации, возникшие у детей в школе или дома, как область приложения полученных навыков в решении задач;

- помогайте детям научиться управлять процессом усвоения знаний;

- подходите ко всему творчески.

Таким образом, в задачу учителя входит оказание помощи учащимся в определении целей, получении информации, изыскании необходимых ресурсов и оценке своей работы.

Исследовательский метод, даже при его простых вариантах, предполагает готовность ученика к самостоятельному прохождению необходимых этапов исследования.

Важно подчеркнуть, что именно этот метод способен играть решающую роль в развитии творческих возможностей учащихся до уровня, обеспечивающего дальнейшее саморазвитие каждого ученика в зависимости от его природных задатков и усердия.

Таким образом, появляется третий существенный признак учебного исследования – самостоятельность учащихся при выполнении учебного задания.

Анализ научной и методической литературы показал, что в связи с усилением развивающей функции обучения на современном этапе большинство авторов, занимающихся проблемой организации исследовательской деятельности учащихся и формирования у них исследовательских умений, видят основную цель такой работы в развитии учащихся. С этим нельзя не согласиться, поскольку реализация развивающей функции обучения требует от учителя не простого изложения знаний в определенной системе, а предполагает посредством знаний учить учащихся мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже полученные.

Но повышение эффективности, достижение более высоких результатов обучения, как и во многих других сферах практической деятельности человека, определяется целенаправленным многократным употреблением какого-либо методического приема или дидактического средства, использованием на протяжении длительного времени и в определенной системе, а не разовым или однократным их применением.

Как показал анализ литературы, в основном школьники вовлекаются в исследовательскую деятельность при решении самих исследовательских задач или в процессе дополнительной работы над задачей. Но такая работа занимает много учебного времени или требует дополнительного времени, что не позволяет регулярно использовать учебные исследования. Эффективность такой работы может быть достигнута, если учебные исследования разместить непосредственно в структуре учебного процесса, путем переноса центра внимания с развивающей функции учебных исследований на дидактическую. В связи с этим стоит отметить и тот факт, что наряду с формированием базовых эвристик, основой которых являются действия выведения следствий, преобразования требования задачи, и т.д., возникает потребность в овладении специальными эвристиками, обусловленных содержанием учебного материала. Следовательно, организация учебных исследований должна быть адекватна поставленной дидактической целью обучения, что является четвертым существенным признаком учебных исследований, а формирование специальных эвристик – пятым.

На основе обобщения и анализа результатов теоретических исследований по данной проблеме нами были выделены следующие основные признаки учебных исследований:

- процесс поисковой познавательной деятельности;
- потребность получения чего-либо нового;
- самостоятельный поиск;

- направленность на достижение целей обучения;
- формирование специальных эвристик.

Итак, под учебным исследованием мы будем понимать такой вид познавательной деятельности учащихся, который способствует формированию следующих умений:

- добывать новые предметные знания, приемы и способы действий;
- самостоятельно организовывать поиск;
- достигать поставленных целей обучения;
- формировать мыслительные операции такие как аналогия, классификация, обобщение и т.п.

Таким образом, повышенный научный уровень содержания образования в школе на современном этапе ставит актуальными задачи развития познавательной активности учащихся, формирования у них потребности и умений самостоятельно приобретать знания. Поэтому появилось стремление использовать с этой целью в процессе обучения некоторые атрибуты научного исследования для организации учебных исследований.

§ 2. ФУНКЦИИ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Проблема организации поисково-исследовательской деятельности учащихся в последнее время все больше привлекает внимание педагогов-исследователей, так как психологами установлено, что воспитание и обучение способствуют формированию развивающейся личности лишь в том случае, если педагог организует собственную деятельность ребенка по усвоению накопленного человечеством опыта. Большинство исследователей единодушны в том, что главной функцией учебных исследований является развивающая, поэтому предлагают вовлекать учащихся в исследовательскую деятельность с целью развития их творческих способностей и исследовательских умений. Если проявляется должная забота о развитии мышления и вооруженности учащихся приемами умственной деятельности, то достигается более высокая результативность процесса обучения. Но учить мыслить, самостоятельно приобретать знания необходимо в единстве с процессом овладения основами наук, то есть учителю необходимо учитывать единство образовательной и развивающей функций обучения. Поэтому необходимо видеть и развивающее, и дидактическое назначения учебных исследований.

Для определения возможных функций учебных исследований обратимся к анализу исследований, проведенных за последние годы, а также точек зрения на этот счет, которые были высказаны в педагогической и методической печати.

Рассматривая исследовательскую деятельность как важнейший фактор активизации познавательной деятельности учащихся, В.И. Садкова отмечает, что ее можно использовать в разных целях: например, с целью введения учащихся в новую тему или с целью обнаружения нового свойства изучаемого математического объекта и пр.

В работах М.З. Каплан [100] учебное исследование характеризуется, как уже отмечалось выше, двумя основными критериями. Для нас наибольший интерес представляет первый из них: исследуемая проблема ставится для достижения целей обучения. Кроме того, раскрывая методические особенности организации учебных исследований на различных структурных этапах урока математики и на уроках разных типов, автор показывает, что они могут использоваться с целью открытия новых знаний учащихся и закрепления уже изученных [100].

Отметим точку зрения Е.С. Петровой [153], которая считает, что в результате последовательного выполнения исследовательских задач учащиеся могут самостоятельно знакомиться с новым теоретическим материалом. А.Е. Захарова и Г.Б. Лудина полагают, что проводимые школьниками исследования способствуют выявлению свойств объектов, систематизации и обобщению полученных знаний. Мысль о том, что исследование является способом углубления знаний учащихся, неоднократно высказывал академик П.М. Эрдниев [214]. Е.В. Ларькина [222] утверждает, что задачи на исследование, как и другие математические задачи, можно использовать с целью закрепления и углубления теории.

Описывая основы технологии развивающего обучения математике, Т.П. Григорьева [60], Т.А. Иванова [87], Л.И. Кузнецова [150], Е.Н. Перевощикова [150] уделяют особое значение использованию приемов, позволяющих включать учащихся в аналитико-синтетическую деятельность по раскрытию содержания математических понятий и по конструированию их определений. Кроме того, они отмечают, что использование специальных вопросов-заданий, отражающих ход исследования, способствует «открытию» существенных свойств нового понятия, «открытию» закономерности, отражаемой в изучаемой теореме, или «открытию» доказательства теоремы.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод о том, что вопрос о дидактических функциях исследований авторами не рассматривался, лишь попутно указывались некоторые функции в контексте решения задачи о поиске эффективных путей умственного развития учащихся.

Для дальнейшего анализа рассмотрим некоторые конкретные учебные исследования, имеющиеся в методической литературе по математике.

Большое значение исследовательской деятельности в обучении математике уделял известный отечественный педагог-математик А.А. Столяр. Он предлагал привлекать учащихся к построению маленьких теорий, построение которых основано на модели, включающей три главных аспекта математической деятельности:

1) математизацию эмпирического материала (МЭМ);

2) логическую организацию математического материала (ЛОММ), полученного в результате первого аспекта деятельности;

3) применение математической теории (ПМТ), полученной в результате второго аспекта деятельности.

Математический материал, полученный в качестве описания конкретной ситуации обычно представляет собой конечное множество предложений $M = \{P1, P2, \ldots, Pn\}$. Под ЛОММ следует понимать выявления из М возможно минимального подмножества А (АММ) посылок («локальных аксиом»), из которых следуют все остальные предложения М.

Таким образом, такая «локальная» (в рамках небольшой темы) ЛОММ и означает построение маленькой теории. Описание исследований осуществляется в виде решения нескольких серий задач на доказательство, связанных общей идеей ЛОММ. Организованная таким образом работа способствует получению эквивалентных определений изучаемого понятия и систематизации знаний. А.А. Столяр отмечает, что если преподавание нацелено на организацию рассуждений учащихся с тем, чтобы они были в состоянии открывать для себя те факты, которые составляют содержание предложений системы, а затем и логически упорядочить их, то это приводит к более быстрому развитию мышления учащихся и к пониманию изучаемого материала.

Процесс организации, методические особенности работы учителя, пути активизации исследовательской деятельности учащихся были предметом изучения Е.В. Ларькиной [222]. Ее идея заключается в решении исследовательских заданий, которые предполагают формирование, например, такого элемента исследовательской деятельности, как организация полного и сокращенного перебора возможных вариантов решения. Верный метод решения такого задания состоит в полном переборе всех возможных вариантов решения. По окончании решения данного задания учащиеся обобщают полученный результат.

Пути активизации деятельности учащихся в ходе решения такого задания предлагаются следующие: учащиеся подбирают вопросы к условию задания с целью поиска метода решения, записывают ход своих рассуждений, аргументируют свои действия; учитель организует дискуссию, разбивает задание на подзадачи, выступает в роли оппонента в ходе дискуссии, корректирует действия учащихся, организует повторную дискуссию.

Большое значение исследовательской деятельности учащихся уделяет Г.И. Саранцев. Особо отметим его мысль о том, что «задача методики преподавания математики заключается в разработке оптимального варианта, обеспечивающего наилучшие результаты в обучении и развитии учащихся» [175, с. 93].

А.А. Окунев [145] полагает, что навыки исследовательской работы формируются в том случае, если ученик является активным участником поиска нескольких решений одной задачи. Это может происходить и на лабораторно-практических занятиях, и в процессе изучения теоретического материала на уроке, и в ходе самостоятельных домашних исследований. При этом исследования организуются с целью обнаружения закономерностей, выявления свойств фигур и т.п.

Мнение А.А. Окунева разделяют Э.Г. Готман и З.А. Скопец [59]. Они считают, что, решая одну и ту же задачу различными методами, можно лучше исследовать специфику того или иного метода, его преимущества и недостатки в зависимости от содержания задачи. Э.Г. Готман и З.А. Скопец утверждают, что, решая одну задачу, нужно стремиться к тому, чтобы научиться сразу видеть тот или иной способ, пригодный для ее решения. Нередко найденный способ решения может быть полезен в дальнейшем для решения более трудных задач. Решение задач, допускающих ряд решений – увлекательная работа, требующая знания всех разделов школьной математики.

Идею поиска различных способов решений одной задачи продолжают Г. Домкина и Т. Лаптева [79], которые демонстрируют возможность применения почти всей планиметрии (15 способов решения) в одной геометрической задаче.

Н.И. Зильберберг [86] рекомендует в плане каждого урока выделять отдельным пунктом исследовательские задания школьников и указывает несколько путей привлечения учащихся к исследовательской деятельности: работу с утверждениями следует строить по специальной схеме; полезна работа со статьями из журналов и книг; следует организовывать самостоятельное открытие теорем и получать новые признаки изученной фигуры.

Е.В. Баранова [19] считает, что учебные исследования целесообразно организовывать при: выявлении существенных свойств понятий, установлении связей данного понятия с другими; ознакомлении с фактом, отраженном в теореме, доказательстве теоремы (в том числе с разными способами), обобщении теоремы, составлении обратной теоремы и проверке ее истинности, установлении связей данной теоремы с другими.

Проведенный нами анализ процесса усвоения математических знаний показывает, что поисково-исследовательскую деятельность учащихся целесообразно организовывать при:

а) выявлении существенных свойств понятий или отношений между ними;

б) установлении связей данного понятия с другими;

в) ознакомлении с фактом, отраженном в формулировке теоремы, в доказательстве теоремы;

г) обобщении теоремы;

д) составлении обратной теоремы и проверке ее истинности;

е) выделении частных случаев некоторого факта в математике;

ж) обобщении различных вопросов;

з) классификации математических объектов, отношений между ними, основных фактов данного раздела математики;

и) решении задач различными способами;

к) составлении новых задач, вытекающих из решения данных;

л) построении контрпримеров и т.д.

Г.К. Муравин [138] предлагает для развития способностей учащихся наряду с самостоятельными исследованиями использовать исследовательские работы. Кроме того, он отмечает, что они удачно вписываются в структуру учебного процесса, позволяя таким образом связать отдельные вопросы курса алгебры между собой (например, алгебру и геометрию, геометрию и физику), а также осуществлять пропедевтику некоторых вопросов из школьного курса алгебры и начал анализа. Приведем пример.

Исследовательская работа «График расстояния».

Туристы отправились на байдарках по течению реки из пункта А в пункт В со скоростью 5 км/час. После 3 часов пути они сделали остановку на 1 ч, а затем поплыли дальше со скоростью 6 км/ч. На рис. 4 изображена схема маршрута туристов, на которой отмечены отрезки пути длиной в 1 км.

Схема маршрута туристов

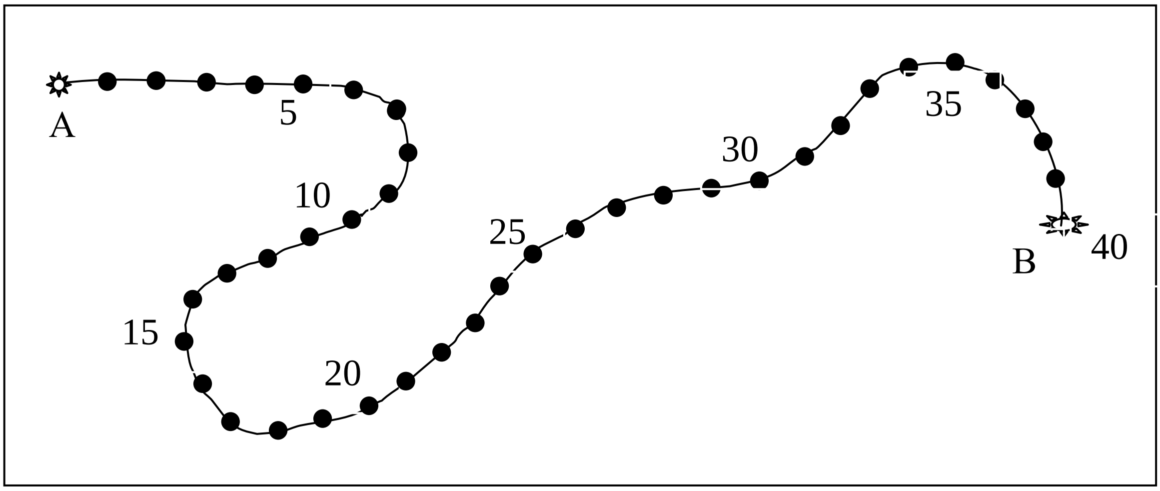


Рис. 4

Приборы и материалы: схема маршрута туристов в масштабе 1:200000, измерительный циркуль, линейка.

Указания к работе: 1) определите на схеме точку, в которой находились туристы через 1 ч после отправления из А; 2) найдите расстояние (по прямой) от этой точки до пункта В; 3) запишите полученный результат в таблицу; 4) постройте график зависимости *d* от *t*.

Данная исследовательская работа может быть предложена учащимся или при изучении темы «График функции», или на следующих этапах обучения с целью повторения и закрепления соответствующего материала.

Работы таких методистов-исследователей, как Э.Г. Готман [58], Г.В. Дорофеев [80], Н.М. Рогановский [169], А.А. Окунев [145] и других, посвященные привлечению учащихся к исследовательской деятельности в процессе решения задач, подтверждают, что результатом такой работы является не только развитие исследовательских умений учащихся, но и закрепление полученных знаний, их углубление, систематизация и обобщение.

В настоящее время учебные исследования преимущественно используются для достижения развивающих целей обучения, поскольку они являются мощным инструментом формирования мышления, так как:

- обладают большими потенциальными возможностями для развития умственных операций;
- формируют активность и целенаправленность мышления;
- развивают гибкость мышления;
- формируют культуру логических рассуждений.

Поскольку во всех работах, посвященных привлечению учащихся к исследовательской деятельности в процессе решения задач, доказывается развитие исследовательских умений и навыков (формируются умения выдвигать гипотезу, выявлять существенные аспекты исследуемой ситуации и т.д.), то развивающая функция исследований очевидна.

Кроме того, учебные исследования помогают достижению познавательного отношения к действительности, в силу того, что они формируют широту кругозора и являются стимулом познавательного интереса, способствуют воспитанию научного мировоззрения, выполняя, таким образом, воспитывающую функцию.

Наконец, нельзя не принять во внимание и тот факт, что именно с помощью учебных исследований можно осуществлять контроль знаний основных разделов школьной математики и владение определенными методами решений, уровень логического мышления и т.п.

Подход, основанный на стимулировании активной исследовательской деятельности ученика, иногда называют самообучением, описывая который, Каган [134] отмечает, что с его помощью можно:

- повысить вовлеченность ребенка в учебный процесс, способствующий повышению эффективности усвоения;
- стимулировать интеллектуальные усилия ребенка;
- повысить уверенность ребенка в своих силах;
- воспитать определенную независимость взглядов.

Таким образом, анализ всего массива выделенных разными авторами функций учебных исследований по математике (которые можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 5) позволил определить пять основных: 1) дидактическую; 2) развивающую; 3) воспитывающую; 4) контролирующую и 5) управления.

Рис. 5. Функции учебных исследований

К основным дидактическим функциям поисково-исследовательской деятельности мы относим следующие:

- функцию открытия новых (неизвестных ученику) знаний (т.е. установление существенных свойств понятий; выявление математических закономерностей; отыскание доказательства математического утверждения и т.п.);

- функцию углубления изучаемых знаний (т.е. получение определений, эквивалентных исходному; обобщение изученных теорем; нахождение различных доказательств изученных теорем и т.п.);

- функцию систематизации изученных знаний (т.е. установление отношений между понятиями; выявление взаимосвязей между теоремами; структурирование учебного материала и т.п.);

- функцию развития учащегося, превращение его из объекта обучения в субъект управления, формирование у него самостоятельности к самоуправлению (самообразованию, самовоспитанию, самореализации);

- функцию обучения учащихся способам деятельности.

§ 3. СТРУКТУРА И ОСНОВНЫЕ ВИДЫ УЧЕБНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Эффективное использование учебных исследований при обучении математике предполагает знание их структуры и назначение основных ее компонентов. Для этого обратимся к анализу точек зрения психологов, педагогов, математиков и методистов, относящихся к исследуемой нами проблеме.

Обычно в психологических описаниях процесса мышления отмечается, что его началом является постановка вопроса: первая фаза – это выявление задачи (или проблемы); далее человек выдвигает те или иные гипотезы, осуществляет их проверку (практическую или умственную), сопоставляет гипотезы и результаты их проверки, вносит коррекции и т.д. Завершается мыслительный процесс решения задачи ответом на вопрос. Очень часто завершаемым моментом данного процесса является постановка нового вопроса. Отметим, что далеко не всегда человек легко и просто «видит» вопросы (проблемы, задачи), которые перед ним ставятся. Его нужно учить умению «видеть» вопросы и тем более формулировать гипотезы и проверять их.

Многими психологами отмечается, что в процессе мышления объект как бы поворачивается разными сторонами и это позволяет выявить его скрытые свойства (С.Л. Рубинштейн); в ходе деятельности с объектом возникают не только прямые, но и побочные продукты, обнаружение которых дает толчок к творческому решению задачи (Я.А. Пономарев); важным моментом процесса мышления является умственный эксперимент.

Наиболее отчетливо компоненты учебного исследования были выделены еще Генрихом Пестолоцци, который создал систему обучения, основанную на наблюдении, обобщении этих наблюдений и выработке понятий. Впоследствии эти основные компоненты уточнялись как зарубежными, так и отечественными педагогами и методистами. Например, В.Ю. Ульянинский [168], характеризуя исследовательскую работу в ее школьном применении как самостоятельное решение разного рода вопросов, выделял этапы: 1) непосредственного активного наблюдения, 2) самостоятельного экспериментирования исходного и проверочного и 3) самодеятельного творческого воспроизведения.

В работах известного отечественного педагога Б.Е. Райкова [168] определен исследовательский метод как «метод умозаключения от конкретных фактов, самостоятельно наблюдаемых и изучаемых школьниками», и выделены следующие стадии этого процесса:

1) наблюдение и постановка вопросов;
2) построение предположительных решений;
3) исследование предположительных решений и выбор одного из них как наиболее вероятного;
4) проверка гипотезы и окончательное ее утверждение.

Определив сущность исследовательского метода, И.Я. Лернер [125] выделяет следующие этапы учебного исследования:

1) наблюдение фактов и явлений;

2) выяснение непонятных явлений, подлежащих исследованию;

3) изучение фактов, связанных с такими явлениями;

4) объяснение этих фактов;

5) фактические выводы, требующие приложения знаний о данном факте или явлении.

Несмотря на различную терминологию, употребляемую разными авторами, нетрудно выделить то общее содержание, которое ими раскрывается, то есть схему исследования: наблюдение – постановка вопроса – эксперимент – вывод. Но этими авторами процесс познания нового рассматривался применительно к любому школьному предмету. Нас же больше интересуют учебные исследования при изучении математики.

Рассмотрим, какие этапы математических учебных исследований выделяются в методической литературе по математике. Так, М.Д. Касьяненко общую схему математического исследования представляет следующим образом:

а) изучение связей между рассматриваемыми объектами;

б) поиск других объектов, имеющих общие свойства с данными;

в) построение новых понятий и гипотез;

г) их проверка;

д) систематизация полученных результатов;

е) отыскание границ их применимости.

Г.К. Муравин [138] представляет самостоятельные исследования учащихся по математике в виде следующего относительно завершенного исследовательского цикла: наблюдение – гипотеза – проверка гипотезы.

Пример 1. Постройте на координатной плоскости прямую:

$$3x + 4y = 12.$$

Производя с помощью измерительного циркуля и линейки необходимые измерения, заполните таблицу 4, где x – абсцисса точки на прямой $3x + 4y = 12$, d – расстояние от этой точки до начала координат.

Постройте график зависимости d от x.

Таблица 4

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
d											

При обсуждении результатов полезно предложить учащимся высказать предположения о поведении графика функции d вне рассмотренного промежутка.

Хотя следует заметить, что задачи, решение которых не предполагает прохождения всех этапов исследовательского цикла, также следует отнести к задачам исследовательского характера. Приведем пример.

Пример 2. Дана последовательность 111; 213; 141; 516; … . Установите закономерность следования членов последовательности.

Видно, что кроме как поставить по-другому запятые, не обнаруживается другой закономерности. Путем мыслительных операций учащиеся приходят к выводу: 11; 12; 13; 14; 15; … .

Это исследовательское задание на выявление закономерности, включающее учащегося в поисково-исследовательскую деятельность, не требует для своего решения прохождения всех этапов исследовательского цикла.

Но, естественно, есть задачи и совершенно иного характера; решение их требует длительного, глубокого, разностороннего исследования. Приведем пример.

Пример 3. При каких значениях x и y верно равенство $x^2 + y^2 = 9$?

Видно, что из целых чисел лишь пара чисел (0 и 3) обращает уравнение в верное числовое равенство, при всех же остальных равенство неверно.

Г.Э. Дьюдени (английский математик; 1857 – 1930) нашел две дроби, подстановка которых в указанное равенство обращает его в верное равенство: $\frac{415280564497}{348671682660}$ и $\frac{676702467503}{348671682660}$. Возникает чисто научный вопрос: «А есть ли другие пары чисел, образующие уравнение $x^2 + y^2 = 9$ в верное равенство?»

Решение этой задачи требует многочисленной итерации этапов исследовательского цикла.

Применительно к процессу обучения математике в средней школе, А.Е. Захарова и Г.Б. Лудина к основным компонентам учебного исследования относят:

- постановку проблемы исследования;
- осознание его целей;
- предварительный анализ имеющейся информации по рассматриваемому вопросу;
- условия и методы решения задач, близких к проблеме исследования;
- выдвижение и формулировка исходной гипотезы;
- анализ и обобщение полученных в ходе исследования результатов;
- проверка исходной гипотезы на основе полученных фактов;
- окончательная формулировка новых результатов, свойств, закономерностей;
- определение места найденного решения поставленной проблемы в системе имеющихся знаний.

Таким образом, различия в выделенных разными авторами этапах учебного исследования и их количестве объясняются существованием различных видов математических исследований. Рассматривая исследования определенного вида, каждый автор выделяет этапы, наиболее характерные именно для него. Однако легко заметить, что многие из них отражают одну и ту же суть. Так, например, этапы: наблюдение, изучение связей между данными объектами, анализ имеющейся информации – можно объединить в один этап учебного исследования, суть которого в изучении и анализе задачной ситуации. С данным этапом напрямую связана постановка проблемы исследования. В одних случаях с проблемы начинается исследование, а в других – проблема есть результат наблюдений за данными объектами. Под учебной проблемой понимается отражение логико-психологического противоречия процесса усвоения, определяющее направление умственного поиска, пробуждающее интерес к исследованию сущности неизвестного и ведущее к усвоению нового понятия или нового способа действия. Проблема в обучении используется в тесной связи с проблемной ситуацией, которая определяет начальный момент мышления, вызывающий познавательную потребность ученика и создающей внутренние условия для активного усвоения новых знаний и способов деятельности [134, с. 111].

Проблемная ситуация порождается учебной ситуацией, которая содержит две группы элементов: известные и неизвестные (или новые). Постановка проблемы преследует следующие дидактические цели: привлечь внимание ученика к данному вопросу (задаче); возбудить у него познавательный интерес и другие мотивы деятельности; поставить ученика перед таким посильным познавательным затруднением, преодоление которого активизировало бы его мыслительную деятельность; указать ученику на противоречия между возникшей у него познавательной потребностью, с одной стороны, и невозможностью ее удовлетворения посредством имеющегося запаса знаний, умений и навыков – с другой.

Проблема зарождается только в результате детального анализа ситуации, ясного расчленения известного и неизвестного. Успех формулировки проблемы, четкость ее постановки зависят, прежде всего, от понимания смысла возникающих вопросов, которые являются логической формой выражения проблемы. В результате большой аналитико-синтетической работы уясняется смысл неизвестного и формулируется (или осознается в готовой формулировке) учебная проблема. В этом заключается суть анализа проблемной ситуации и формулировки проблемы учеником.

Составление плана решения поставленной проблемы зависит от умения и опыта ученика в предвидении следующих шагов. Смутно представляя себе результат решения, он мысленно забегает вперед, фиксируя последовательность своих действий на основе опыта решения проблем вообще, имеющихся знаний, или пытается путем догадки на основе интуитивного мышления добиться частичного или полного решения. В итоге такой попытки возникает идея, предположение о принципе, на котором оно основано. Однако предположение не всегда оказывается приемлемым способом решения возникшей проблемы. Часто только одно из многих предположений может содержать гипотезу. Гипотезой может считаться, как правило, только обоснованное предположение. В теории обучения гипотеза является психолого-дидактической категорией, которая служит учителю средством активизации мыслительной деятельности ученика, а для ученика она является приемом творческого воображения и принципом решения учебной проблемы [27]. Все приведенные выше авторы этап выдвижения гипотезы считают важным и необходимым для учебного исследования и отмечают, что выдвижение гипотезы возможно только на основе тщательного изучения фактов, явлений, условий задачи (проблемы).

Раскрывая этапы учебного исследования, все авторы единодушны в том, что после выдвижения гипотезы обязательно должен следовать этап ее проверки (подтверждения, доказательства, обоснования или опровержения). В математике можно считать, что гипотеза доказана, если ее содержание получается путем выведения следствий из известных знаний учащихся. Если для строгого доказательства гипотезы у ученика не хватает имеющихся знаний, то иногда ограничиваются ее подтверждением с помощью правдоподобных рассуждений.

Таким образом, для доказательства гипотезы учащиеся должны уметь проводить анализ предложенного учителем учебного материала, выделять в нем главные элементы, сравнивать, сопоставлять, синтезировать, обобщать и делать необходимые выводы. Главное, что ученик должен уметь держать в уме основную цепочку рассуждений и не терять цель анализа фактов (условий). Если ученик нацелено строит цепочку рассуждений, то он «ощущает потребность» (или сразу может заметить) того, чего не хватает в имеющихся фактах или в наличном учебном материале для достижения поставленной цели. Тогда ученик будет искать дополнительные факты, прибегать к помощи учителя или самостоятельно добывать необходимую информацию из различных источников.

Таким образом, анализ этапов исследований, выделяемых разными авторами, позволяет сделать вывод, что обязательными из них являются четыре, которые и образуют основную структуру учебного исследования:

1) постановка проблемы;
2) выдвижение гипотезы;
3) проверка гипотезы;
4) вывод.

В зависимости от способа выдвижения гипотезы Е.В. Баранова [19] выделяет следующие виды учебных исследований:

- интуитивно-опытные;
- опытно-индуктивные;
- индуктивные;
- дедуктивные.

Анализ этапов различных исследований, выделяемых разными авторами, показал, что главными и обязательными из них являются три, которые и образуют основную структуру учебного исследования (рис. 6):

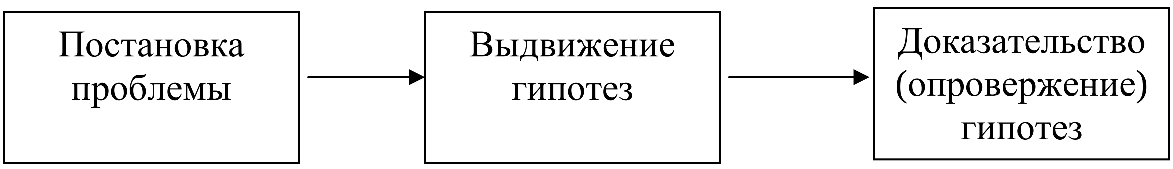


Рис. 6

При более детальном анализе структуры учебного исследования можно выделить и такие его этапы, как:

- мотивация учебной деятельности;
- постановка проблемы исследования;
- анализ имеющейся информации по рассматриваемому вопросу;
- экспериментирование (проведение измерений, испытаний, проб и т.д.) с целью получения фактического материала;
- систематизация и анализ полученного фактического материала;
- выдвижение гипотезы;
- подтверждение или опровержение гипотез;
- доказательство гипотез.

Очевидно, что различные виды исследований имеют свои особенности, поэтому для каждого из них характерно свое сочетание названных этапов.

Несколько иной точки зрения на выделение этапов учебного исследования придерживается Е.С. Кощеева. На основе анализа литературы она выделяет следующие этапы: анализ явлений, процессов их связей и отношений; формулировку задачи; формулировку конечной и промежуточных целей выполнения исследовательского задания; предсказание результатов исследовательского задания; планирование деятельности по выполнению эксперимента; выполнение самостоятельного эксперимента; осуществление взаимоконтроля и самоконтроля на всех этапах деятельности; анализ и оценка результата; оформление хода выполнения задания и результатов; формулирование выводов; обсуждение результатов.

О.В. Охтеменко [151] выделяет три вида учебных исследований: урок-исследование, мини-исследование, исследовательский комплекс.

«Урок-исследование» – это исследовательское задание, в выполнении которого заняты все учащееся класса, рассчитанное на целый урок и содержащее все или большинство исследовательских компонентов; его выполнение является обязательным для всех учащихся.

«Мини-исследование» выполняется всеми или большинством учащихся, занимает часть урока или предлагается в качестве домашнего задания, включает лишь отдельные исследовательские компоненты; по усмотрению учителя его выполнение является обязательным или добровольным.

«Исследовательский комплекс» выполняется отдельными учащимися исключительно добровольно; задание рассчитано на несколько уроков или может быть предложено как продолжительное домашнее задание, содержит все или большинство исследовательских компонентов.

Эта классификация является эмпирической; основное ее назначение – выбор оптимального для конкретной ситуации варианта включения исследовательских заданий в процессе обучения.

Приведем пример мини–исследования «Сумма расстояний» из цикла заданий, содержащих уравнения и неравенство с модулем.

1. Точка x движется слева направо по координатной прямой, на которой отмечены две точки a и b ($a< b$). Как меняется сумма расстояний от точки x до точек a и b в зависимости от ее положения относительно отрезка $[a, b]$? Каково наименьшее значении этой суммы? Запишите эти условия на языке уравнений и неравенств.

2. Закончите предложение «Сумма расстояний от точки координатной прямой до двух других точек равна расстоянию между ними тогда и только тогда, когда…».

3. Решите уравнения:

а) $|x-10|+|x-2|=8$; д) $|x^2-4|+|x^2-1|=2$;

б) $|x+6|+|x+2|=3$; е) $|x^2+4|+|x^2+1|=5$;

в) $|3x-8|+|3x-2|=6$; ж) $|x^2+x-2|+|x^2+x-6|=4$;

г) $|x^2-4|+|x^2-1|=3$; з) $|x^2-x-2|+|x^2-x+4|=10$.

Это задание может быть предложено восьмиклассникам после изучения квадратных уравнений или в конце 9 класса при итоговом повторении; для его выполнения учащимся должно быть известно определение модуля и геометрический смысл модуля разности между числами. Заметим, что использование модуля вносит в решение привычных уравнений элемент новизны, что помогает поддерживать интерес учащихся при решении задач на повторение, а также позволяет использовать на этом этапе обучения дифференцированные задания.

В основе решения предложенных выше задач лежат следующие положения. Задание «Решить уравнение $|x+2|+|x-3|=5$» на геометрическом языке может быть сформулировано так: найти все точки числовой оси, для которых сумма расстояний до точки (–2) и до точки 3 равна 5. Любая точка отрезка [–2; 3] обладает этим свойствам, а для любой точки вне этого отрезка сумма расстояний больше 5.

Мы в данном параграфе рассмотрели различные виды учебных исследований, но это не означает, что мы дали полную характеристику их классификаций, возможны и другие подходы, что и должно стать предметом исследования читателя.

§ 4. ТВОРЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ УЧАЩИХСЯ КАК ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ ИХ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Становление личности и развитие ее творческого мышления – основная цель современного образования, она же является приоритетной и при обучении математике. Творческий, продуктивный процесс в любой области интеллектуальной деятельности – это многогранный, феноменально сложный процесс, содержащий множество составляющих; он связан с высоким напряжением всех духовных сил человека, требует интенсивной умственной деятельности и воображения, концентрации внимания, волевого напряжения, мобилизации всех знаний и опыта. Однако не всякую интеллектуальную деятельность можно назвать творческой. Умственный труд может быть и механическим с однообразно повторяющимися операциями, в основе которых лежат алгоритмы.

Творчество – это целенаправленная теоретическая и практическая деятельность человека, которая приводит к созданию новых, ранее неизвестных гипотез, теорий, методов, новых технологий, произведений искусства и литературы. Все эти формы творчества связаны с мышлением и его производной – интеллектом. В этой связи возникает одна интересная и важная проблема, охарактеризовать которую можно следующим образом.

Известно, что изобретение компьютера сделало в отношении умственного труда по сути то же, что изобретение механического двигателя в отношении ручного труда. Это послужило толчком для решения задачи четкого и конкретного описания мыслительных процессов человека, которые регулируют организацию поиска решения проблемы, не основываясь на идеях одной логики. Возникла необходимость в рассмотрении эвристической и учебно-эвристической деятельности, которая является одним из основных предметов исследования такой науки, как педагогическая эвристика. Последняя, в свою очередь, изучает основы организации продуктивной учебной и последующей профессиональной деятельности специалиста.

Знакомство с эвристическими методами в процессе учебно-познавательной работы составляет основу эффективности последующей научно-практической деятельности человека. По мнению зарубежных ученых, существует более прагматическое и глобальное понимание значения творчества: наличие педагогической эвристической деятельности в обучении, есть критерий потенциальной экономической, политической, военной мощи государства. Так, американские ученые заявляют, что «выявление и выращивание творческих личностей является проблемой общенационального значения» [183, с. 10]. Одним словом, если будущий специалист готовится к такой профессиональной деятельности, при которой он должен часто принимать собственные решения в изменяющихся (динамических) и нестандартных ситуациях, то ему необходимы знания эвристики, алгоритмическая же деятельность таких знаний не требует.

Таким образом, необходимость искать практические подходы к решению проблемы развития творческих качеств мышления ни у кого не вызывает сомнения. Остается лишь вопрос – как это осуществить практически?

Активная позиция человека в процессе овладения знаниями предполагает использование методов научного познания. Их удачное преломление к процессу обучения в школе находится в центре внимания многих исследователей, поскольку обеспечивает активную позицию школьников в учебном процессе и, как следствие, повышает его эффективность. Решение теоретических и практических аспектов этой проблемы опирается на работы психологов П.Я. Гальперина, В.В. Давыдова, З.И. Калмыковой, А.Н. Леонтьева, Я.А. Пономарева, С.Л. Рубинштейна, Ю.А. Самарина, Н.В. Талызиной, Л.М. Фридман, Д.Б. Эльконина и др., дидактов Ю.К. Бабанского, М.Ф. Данилова, Л.Н. Ланда, Дж. Брунер и др. и методистов Х.Ж. Ганеева, З.И. Слепкань, В.М. Монахова, А.А.Столяра и др.

В условиях быстро меняющегося мира обществу необходимы творчески мыслящие люди, способные сосуществовать с окружающей средой в самом широком смысле, творчески реализовать себя в личной жизни и профессиональной деятельности. Основная тенденция изменения приоритетных целей школьного образования проявляется в постановке на первый план задач развития личности учащихся на основе внутреннего потенциала. Образование должно позволить человеку понять самого себя, окружающую среду и содействовать его социальной роли в процессе труда и жизни в обществе.

Современному обществу нужен человек, самостоятельно и критически мыслящий, умеющий видеть и решать возникающие проблемы. Общество информационных технологий заинтересовано в том, чтобы выпускники школы были способны самостоятельно, активно действовать, принимать решения, гибко адаптироваться к изменяющимся условиям жизни, грамотно использовать информацию.

Проблема познания и развития продуктивных качеств мышления интересовала многих ученых. Вопросами исследования творческого мышления в той или иной степени занимались такие зарубежные и отечественные психологи и педагоги, как А.В. Брушлинский, Д.Б. Богоявленская, В.Н. Дружинин, З.И. Калмыкова, А.М. Матюшкин, Я.А. Пономарев, М.А. Холодная, И.С. Якиманская и др., а также методисты и математики Х.Ж. Ганеев, Т.П. Григорьева, Г.В. Дорофеев, О.Б. Епишева, Т.А. Иванова, Л.И. Кузнецова, И.Ф. Шарыгин и др. Ими разработаны продуктивные методы и эвристические приемы обучения, способствующие развитию творческого мышления учащихся, однако в их исследованиях не в полной мере был изучен вопрос о возможностях развития творческого мышления посредством поисково-исследовательских задач.

Проблема исследовательской деятельности школьников имеет богатую историю, с момента появления в педагогике исследовательского метода основное внимание ей уделялось в естественнонаучных и гуманитарных областях (Б.В. Всесвятский, В.Е. Райков и др.); эти направления исследовательской деятельности школьников продолжают оставаться приоритетными и на сегодняшний день (В.И. Андреев, А.В. Леонтович, И.Д. Чечель и др.). Общие аспекты формирования различных приемов математической исследовательской работы учащихся затронуты в трудах ученых-математиков: А.Н. Колмогорова, А.И. Маркушевича, Б.В. Гнеденко, В.Г. Болтянского, Л.Д. Кудрявцева, Д. Пойа и др.

Один из принципов новой концепции школьного математического образования состоит в том, чтобы при обучении математике «предпочитать эвристическое исследование доктринальному изложению» [183, с. 8]. Появление задач, требующих исследования, в учебниках по математике 7–9 классов под редакцией Г.В. Дорофеева, исследовательских работ в учебниках по алгебре авторов К.С. Муравина, Г.К. Муравина и Г.В. Дорофеева (7–8 класс) свидетельствует о возможности включения учебного исследования в процесс обучения математике. Однако, как показывает анализ методических публикаций, дидактических пособий, изучение опыта работы учителей, развивающий потенциал исследовательских заданий по алгебре и геометрии используется в повседневной школьной практике недостаточно, что определяет целесообразность проведения дальнейшей работы в этом направлении.

Среди положительных мотивов учения ведущая роль принадлежит любознательности и интересу, поэтому проблему развития творческого мышления учащихся мы рассматриваем во взаимосвязи с педагогической проблемой формирования познавательного интереса к математике. Давняя идея «учения с увлечением» приобретает сегодня новый смысл, потому что школа, перестав быть единственным «окном», через которое ученик открывает мир, «должна повысить свою конкурентоспособность по сравнению с другими, внешне привлекательными, но зачастую пустыми и даже вредными компонентами окружающей образовательной среды» [99].

Иногда считают, что творчество – это создание такого нового продукта, которое имеет положительную общественную значимость, способствует прогрессивному развитию человечества. По поводу такого определения справедливо выдвигается возражение: общественной значимости не имеет ни творчество детей, ни решение взрослым человеком головоломки; в истории известно немало случаев, когда блестящие достижения творческой мысли людей долгое время не обретали общественной значимости. К этому нужно добавить, что, если различается общественная и индивидуальная значимость, то нет сколько-нибудь веской причины для игнорирования индивидуальных интересов и индивидуального творчества. И еще одно соображение: «привязывание» творчества только к прогрессу, как в приведенном выше определении, даже при научно-объективном понимании прогресса дает повод для очерчивания излишне узкого круга явлений, относимых к творчеству.

Творчество неоднородно: многообразие творческих проявлений поддается классификации по разным основаниям. Отметим лишь, что существуют разные виды творчества: производственно-техническое, изобразительное, научное, политическое, организаторское, философское, религиозное, повседневно-бытовое и т.п.; иначе говоря, виды творчества соответствуют практической и духовной деятельности.

Осознание потребности, постановка и формулирование пробле мы – это начальные рубежи процесса поиска решения проблемы. Фиксируя конкретную проблемную ситуацию и цель исследования, проблема направляет весь творческий процесс в его сложном движении к результату. Идеальное, как центральное звено творческого процесса, рождается под непосредственным воздействием проблемности и для удовлетворения соответствующей потребности субъекта.

К.Д. Ушинский [195], не ставя знака равенства между умом и знанием, все же считал возможным рассматривать ум вне знаний. Он понимал ум как хорошо организованную систему знаний и исходил из того, что при большом количестве знания могут быть недостаточно упорядочены между собой, не соотнесены и не соподчинены друг с другом, то есть не систематизированы. Умственная деятельность, осуществляемая на базе несистематизированных или в большей или меньшей мере изолированных друг от друга знаний, является малоэффективной. Такие знания весьма трудно применять и использовать в многообразных ситуациях. А так как динамичность умственной деятельности зависит от многообразия вновь образующихся знаний, то несистематизированные знания не являются залогом достаточно активного проявления мышления.

Любая исследовательская деятельность школьников невозможна без их напряженной, активной мыслительной деятельности, то есть без творческого мышления.

Потребность творчества как вида деятельности и стиля мышления диктуется самой жизнью, объективными особенностями структуры исторического времени на всех этапах деятельности человека и уходит своими корнями в самые глубокие традиции человеческой культуры. Поэтому творческое мышление можно охарактеризовать как общечеловеческий феномен. Все возрастающий объем информации на современном этапе развития науки, культуры, причем информации не всегда доброкачественной, требует от субъекта переработки ее содержания и выработки своего отношения к ней. Для этого необходимы такие качества, как информированность, эвристичность, конструктивность.

Обычно, когда исследуют процесс мышления, то выделяют два основных подхода – операциональный и личностно-мотивационный. Применительно к творческому мышлению необходимо учитывать оба, так как на его формирование влияют особенности личности: эмоциональные, волевые и т.д. При личностном подходе (Н.С. Лейтес [123], С.Л. Рубинштейн [172], Б.М. Теплов [185] и др.), который базируется на признании целостного характера творческой личности и ее индивидуальности, большое внимание уделяется самобытности, самоценности личности, накопленного ею опыта, умственной активности, работоспособности и др.

Установлено, что для творческой личности характерны такие свойства, как:

– пытливость ума;

– любознательность;

– гибкость мышления;

– способность комбинировать и образовывать аналогии;

– открытая позиция по отношению к окружающему миру;

– умение удивляться происходящему в мире;

– готовность отказаться от привычных способов мышления;

– готовность к риску, сильная мотивация;

– высокая степень понимания проблемы и удовлетворения от ее решения;

– готовность к интенсивному и напряженному умственному труду;

– готовность к преодолению различных препятствий и т.д.

И.П. Волковым, Т.В. Орловой и др. показано, что целостность творческой личности, учитывая ее индивидуально-психологические особенности, достигается при наличии трех групп способностей, которые представлены в таблице 5.

Таблица 5

Группы способностей творческой личности

Мотивационные	*Содержательно-операционные*		*Организационно-коммуникативные*
Познавательный интерес и стремление к самообразованию; личная значимость творческой деятельности; стремление к успеху, творческим достижениям; стремление к лидерству, к получению высокой оценки своей работы от преподавателя и сотрудников.	Интеллектуально-логические: способность анализировать и сравнивать; способность выделять главное, отбрасывать второстепенное; способность описывать явления, процессы. Способность объяснять и давать определения явлению или процессу; способность к систематике и классификации; способность доказывать, обосновывать свои суждения.	Интеллектуально-эвристические: способность генерировать идеи, выдвигать гипотезы; способность к фантазии, творческому воображению, ассоциативность мышления. Перенос знаний и умений в новые ситуации. Независимость суждений, критичность, способность к оценочным действиям.	способность видеть цель и проявлять интеллектуальные и волевые усилия для ее достижения; способность к планированию своей деятельности; способность к самоконтролю; самооценка личностью своих возможностей, личностных качеств, достижений в творческой деятельности; способность отстаивать свою точку зрения и убеждать других; способность избегать конфликтов и успешно их разрешать.

В.С. Шубинский [213] характеризует творческое мышление как процесс создания новых общественно-значимых материальных и духовных ценностей. Кульминацией всего процесса является момент открытия, озарения, эврики. Автор далее в своей работе раскрывает механизм творчества как процесса, который представляет собой следующие звенья и этапы:

1. Звено столкновения с новым (парадоксальность, факт осознания и аномалии, ошибки в природе по сравнению с тем, что от нее ожидалось, формулирование вопроса, возникновение творческого затруднения):

2. Звено творческой неопределенности (муки творчества);

3. Звено открытой работы (период тупиков):

а) I этап – возникновение творческой интуиции:

–звено эврики;

–звено решения (развития решения);

б) II этап – эвристический:

–звено критики, подтверждения и воплощения;

в) III этап – завершения (практические критерии и средства доказательства правильности, ценности полученного результата).

С.Л. Рубинштейн [172] наиболее типичной ситуацией, в которой возникает процесс поиска и обнаружения субъективно неизвестного, считает проблемную ситуацию, а сам поиск происходит на основе инсайта, т.е. неожиданными, внезапными озарениями.

Я.А. Понамарев [161] подробно исследует сознательные и бессознательные фазы творческого мышления:

I фаза – сознательная работа, которая характеризуется особым деятельностным состоянием как предпосылкой интуитивного проблеска новой идеи;

II фаза – бессознательная работа над проблемой;

III фаза – переход от бессознательного в сознательное, когда в сферу сознания поступает идея решения из бессознательного в виде гипотезы, замысла;

IV фаза – сознательная, когда происходит развитие идеи, ее оформление, проверка и оценка.

Все эти фазы у автора связываются с различным состоянием души человека и психики в целом. Считается, что вопросы воспринимаются сердцем «творца» и процесс восприятия зависит от его личных впечатлений, переживаний и далее начинает «перевариваться» в подсознании.

В.И. Андреев [6] возникновение новых идей, оригинальных решений связывает с активизацией подсознательных процедур творческого мышления и активизацией логических, сознательных процедур деятельности. Он отмечает двойственную природу творческого мышления: с одной стороны, в нем сочетаются логические приемы (анализ, синтез, обобщение, доказательство, классификация и др.), с другой – эвристические (эмпатия, свободное ассоциирование, различные типы аналогий). По В.И. Андрееву [6], творческое мышление отражает диалектику теоретического и практического мышления, и творческое мышление шире и глубже отражает объективную реальность.

З.И. Калмыкова [95] определяет творческое мышление «как общую способность к приобретению новых знаний, как интеллектуальную (умственную) способность к учению». Она выделяет следующие признаки творческого мышления: 1) уровень обобщенности; 2) широта применения новых знаний; 3) быстрота усвоения; 4) легкость усвоения; 5) темп продвижения и обучения; 6) высокая степень новизны применяемого на его основе продукта; 7) оригинальность как специфическая черта мышления, возникающая в проблемной ситуации, включающей неизвестные звенья.

Автор считает, что для поиска нового принципиального решения нужно преодолеть «барьер прошлого опыта» и при решении любой задачи необходимо учитывать не реальные условия, а ситуацию, требующую видения существенных признаков и возможности использования минимальных исходных знаний.

З.И. Калмыкова [95] рассматривает творческое мышление как синоним продуктивного мышления. Процесс продуктивного мышления, по ее мнению, не однороден, а скачкообразен, часть его происходит без адекватного отражения в голове, так как творческая деятельность и мышление представляют собой процесс самостоятельного познания окружающей действительности как результат сложного переплетения и взаимодействия репродуктивного и продуктивного мышления.

В.В. Давыдов [66] считает, что творческое мышление – это мышление теоретическое, которое осуществляется в плане мыслительного эксперимента, для которого характерны такие мыслительные действия, как планирование, анализ как способ выявления генетически исходной основы некоторого целого, рефлексия как раскрытие внутренних взаимоотношений собственных мыслительных действий, их обоснование и опосредованность.

Э.Ш. Хамитов под творческим мышлением и творческой деятельностью подразумевает активное взаимодействие субъекта с объектом, в ходе которого субъект целенаправленно изменяет окружающий мир, создает новое, социально значимое в соответствии с требованиями объективных закономерностей. Он пишет, что творческая деятельность выражается, в конечном счете, в самостоятельном переносе ранее усвоенных знаний и умений в новую ситуацию, что, в свою очередь, поможет нешаблонному выдвижению и решению новых задач, видению новой проблемы в знакомой ситуации, обнаружении новых функций окружающих предметов и объектов, комбинации ранее известных способов решения задач в новой ситуации и др.

В работах психологов, посвященных творческому мышлению, следует отметить исследование креативности, под которым понимается способность к порождению оригинальных идей и использованию нестандартных способов мыслительной деятельности. Этому направлению творческого мышления посвятили свои работы Д.Б. Богоявленская [26], Дж. Гилфорд [218], Е. Торрнс [218] и др. Дж. Гилфорд вводит в рассмотрение новый термин «дивергентное мышление», под которым он понимает мышление, направленное на нахождение различных путей и вариантов решения задач, видение различных аспектов проблемы, нахождение различных связей элементов действительности. Связанное с целостным, интуитивным и релятивным мышлением, дивергентное мышление противопоставляется у Дж. Гилфорда последовательному линейному или «конвергентному» мышлению.

У Д.Б. Богоявленской [26] дивергентное мышление называется многоаспектным. Тем самым подчеркивается способность мыслить вширь, выделять другие атрибуты объекта, обеспечивающие выход за пределы, за рамки однажды начатого направления, решения, гипотезы.

А.С. Шаров [207] рассматривает критическое мышление и акцентирует внимание на его качествах, на его формировании и развитии. Он выделяет следующие качества критического мышления.

Адекватность. Проявляется в установлении причинно-следственных связей и соответствия между этапами решения задачи. Адекватность – это точность, логичность и аргументированность собственного процесса мышления.

Вариативность. Проявляется по отношению к мышлению в том, что не просто выделяются альтернативы хода мышления, но они сравниваются и упорядочиваются между собой по степени важности и значимости. Вариативность – основа для эвристичного и продуктивного мышления.

Осмысленность. Заключается в том, что человек должен достаточно ясно и отчетливо представлять себе, что ему надо сделать для достижения целей или решения проблем, насколько улавливается и осознается как собственный процесс мышления, так и процесс мышления другого человека.

Целостность. Проявляется в том, что в процессе мышления человек старается связать и согласовать между собой отдельные части проблемы, мысли, соблюдает определенную последовательность и очередность в мышлении.

Как видно из предшествующего анализа различных направлений в исследовании творческого мышления, оно выступает как сложно структурированный многокомпонентный вид мышления. Анализ психолого-педагогической литературы показал, что основными особенностями, характеризующими творческое мышление, являются: создание субъективно нового продукта, выходящего за пределы сложившейся системы знаний человека; становление психических новообразований; отсутствие четко выраженных этапов мышления; наличие интуитивного момента; присутствие как осознанности, так и неосознанности; рефлексия; субъективная оценка результатов мыслительной деятельности. Основными свойствами творческого мышления, отличающими его от «нетворческого», являются оригинальность, гибкость, беглость, самостоятельность, перенос знаний.

Остановимся на характеристике некоторых из наиболее интересных попыток определить математическое творчество. Бесспорно, и это отмечают почти все исследователи, математическое творчество связано с уровнем развития интеллекта вообще, т.е. общих интеллектуальных способностей. Однако многие педагоги, психологи, математики (А. Пуанкаре [165], Ж. Адамар [3] и др.) выдвигают и защищают положение о специфичности познавательной и творческой деятельности в области математики и математических способностей.

Итак, считается общепризнанным, что деятельность по решению математических проблем характеризуется большим своеобразием и не является простой качественной модификацией общих интеллектуальных процессов. Это утверждение, как считает Г.Д. Глейзер [55], можно считать доказанным различными методами исследования: внешним наблюдением, методом анализа словесного отчета о процессе мышления при решении математических задач, методами корреляционного и факторного анализа.

Обширное и глубокое исследование психологии математических способностей школьников, проведенное В.А. Крутецким, позволило ему выдвинуть гипотезу о роли функциональных особенностей мозга в случаях математической одаренности: «…мозг некоторых людей своеобразно ориентирован (настроен) на выделение из окружающего мира раздражителей типа пространственных и числовых отношений, символов и на оптимальную работу именно с такого рода раздражителями» [114, с. 78].

Важное значение для понимания структуры «математического мышления» имеют исследования по проблеме математических способностей (например, работы В.А. Крутецкого [114]). Анализ этой работы и многих других авторов позволяет сделать вывод о комплексной природе математической деятельности. Разные авторы называют в качестве наиболее важных различные структурно-функциональные элементы математической деятельности. В качестве обязательных элементов называют такие общие мыслительные операции, как сравнение, дедукция, анализ и синтез. В качестве специфических математических способностей обычно называют такие: 1) манипулирование пространственными объектами; 2) манипулирование идеями и понятиями в абстрактной форме, без опоры на конкретное; 3) классификация; 4) понимание и использование символов; 5) применение знаний в новой ситуации; 6) интеллектуальная любознательность; 7) экстраординарная память, «сильная математическая память»; 8) хорошая ориентация в сфере количественных отношений; 9) сильное зрительное воображение; 10) быстрота мысли; 11) умение отыскивать сходное в отдаленных сферах.

Известно, что многие из названных специальных способностей имеют сложный характер и опираются на достаточно хорошо сформированные общие мыслительные способности. Наиболее полное описание компонентов математических способностей проведено В.А. Крутецким [114]. Однако, как отмечает Г.Д. Глейзер [55], несмотря на желание В.А. Крутецкого уйти от категорий общего характера (например, таких как способность к абстрактному мышлению), ему все же не удалось с достаточной четкостью разложить на более элементарные и специальные такие сравнительно сложные (комплексные) способности, как гибкость мышления, способность к «последовательному, правильному, расчлененному, логическому рассуждению», способность обобщать математический материал.

Для преодоления этих недостатков, как полагает Г.Д. Глейзер [55], пути к более глубокому пониманию структуры «математического мышления» и математических способностей надо искать в направлении проникновения в сложную диалектическую природу соответствующих продуктивных процессов и психических новообразований как единства общего и особенного (специального). Поэтому в поле зрения исследователей структуры «математического мышления» должны находиться по меньшей мере три вида анализа: 1) изучение общих закономерностей мышления и общих мыслительных способностей как основы для формирования специфически математических мыслительных способностей; 2) изучение закономерностей формирования математических способностей на основе достаточно хорошо сформированных общих мыслительных способностей; 3) изучение способа сочетания («сплава» общих и специальных моментов в уже сформированных математических способностях (или общих и специальных действий, операций и способностей в структуре развитого «математического мышления»).

Ряд ученых, такие как Ж. Пиаже [154], Н. Бурбаки [37], полагают, что успех на пути исследования структуры математического мышления заложен в сопоставлении общих закономерностей мышления с методами математики.

Разработка способов активизации мыслительной деятельности учащихся в процессе обучения получила свое развитие в конце XIX–начале XX века и ознаменовалась внедрением в преподавание отдельных учебных предметов эвристического, опытно-эвристического методов и лабораторных уроков.

Поскольку к началу 20-х годов XX века в практике отечественной школы основным методом обучения учащихся считался «исследовательский метод», то к этому времени были сформулированы тезисы, выражающие его суть. Использование исследовательского метода в обучении 1) способствует формированию навыков умственного труда и развитию логического мышления в области конкретных фактов; 2) соответствует законам интеллектуального и психического развития ребенка, природным свойством которого является любознательность.

Современные теории обучения, излагаемые в зарубежной литературе, имеют свои особенности, которые уже включают такие виды деятельности ученика по усвоению новых знаний, как слушание и усвоение изложения материала учителем; повторение и запоминание того, что излагает учитель; усвоение знаний в процессе собственной деятельности, организованной и руководимой учителем. Следует отметить и тот факт, что усиление внимания к развитию мыслительных способностей учащихся и поиска путей развития этих способностей привели американских педагогов к распространению школьных исследовательских работ, внеурочных форм занятий.

Анализ данных, полученных нами в ходе рассмотрения психолого-педагогической литературы, показал, что исследовательский метод в обучении учащихся математике используется достаточно давно. Объяснение этому явлению мы нашли в работах М.И. Махмутова. Так, автор отмечает: «…поскольку научное познание есть процесс творческий, то сближение методов обучения с методами науки должно обеспечить развитие творческих способностей учащихся» [134, с. 60].

Психологами установлено, что условием и источником психической активности индивида является сложная система потребностей, мотивов, интересов, стремлений, которые формируются и развиваются под влиянием среды на основе имеющихся у субъекта деятельности врожденных задатков (Д.Н. Богоявленская [26], В.А. Крутецкий [114], З.И. Калмыкова [95] и др.). Но раньше, чем потребность вызовет действие, субъект переживает сложный психический процесс мотивации, результатом которого является мотив – побудительная причина деятельности человека, направленный на удовлетворение возникшей потребности. «Потребность, – отмечает С.Л. Рубинштейн, – возникает тогда, когда человек не знает, как осуществить действие (решение задачи), при условии, что он вообще хочет его осуществить» [172, с. 347]. Для нас последнее замечание особенно важно, поскольку мотивом научного исследования может стать затруднение, неопределенность, проблема, содержащая знания, неизвестные человечеству и имеющие общественную значимость, что часто является одним из тех факторов, которые оказывают влияние на интерес ученого к рассматриваемой проблеме. Кроме того, исследуемая неопределенность вызывает внутренне противоречие, которое становится побудительной причиной интереса, а затем и мотива деятельности.

На первичность потребности в разрешении внутреннего противоречия в научном познания указывают и исследования Ж. Адамара [3], А. Пуанкаре [165] и др.

Однако для учащегося – субъекта исследовательской деятельности – категория «потребность» по отношению к категории «интерес» вторична, поскольку затруднение, неопределенность, проблема, содержащая знания, неизвестные только школьнику, не всегда являются причиной внутренних противоречий, которые бы вызывали его действия. Неопределенность, предлагаемая учителем, прежде всего, должна вызывать интерес учащегося к предложенной проблеме, а затем уже – потребность, желание и стремление познать явление или объект исследования. Потребность в этом случае есть следствие интереса (мотива). «Мотивом… считается интерес индивида к объекту действий, его желание и стремление узнать новое об объекте или сделать что-то по-новому» [20, с. 123].

Особенностями исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения являются следующие:

- направленность на овладение знаниями и умениями в процессе исследования;
- направленность на усвоение приемов и способов научных методов познания (аналогия, индукция, дедукция и пр.);
- влияние на изменение личности самого ученика, его развитие (целеустремленность, любознательность, развитие творческого потенциала).

Основным содержанием исследовательской деятельности являются как теоретические знания, так и приемы, способы деятельности, а также соответствующие им умения и навыки: наблюдение, анализ, сравнение, аналогия, обобщение, классификация и пр. При этом эмпирическим знаниям соответствуют эмпирические (формальные) действия, теоретическим знаниям – теоретические (или содержательные) действия в процессе исследования.

Потребностью в исследовательской деятельности является стремление учащихся к исследованию неопределенностей, проблем, задач, содержащих знания, неизвестные школьнику.

Специфика учебного исследования состоит в том, что при его осуществлении учащийся открывает новые знания и овладевает ими и новыми способами действий. Предназначение исследовательской деятельности учащихся состоит в том, что, будучи формой активности индивида, она является условием и средством его психического развития. Психическое же развитие обеспечивает школьнику усвоение теоретических знаний и способствует формированию у него специфических способностей и качеств личности: любознательности, целеустремленности, научной фантазии.

§ 5. ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

При подборе упражнений, предназначенных для углубления основного курса, необходимо ориентироваться на его основные содержательные линии.

При изучении преобразований числовых и алгебраических выражений школьники должны научиться выполнять достаточно длинные сложные задания, поскольку технические умения являются базовыми для решения задач практически во всех разделах школьной математики.

Учащиеся должны овладеть основными способами решения уравнений. Прежде всего имеются в виду уравнения, приводимые при помощи преобразований к линейным или квадратным, линейные и квадратные уравнения с модулем. Отдельный вид – уравнения, решаемые способом разложения на множители.

Очень важной является функциональная линия. Учащиеся должны научиться строить графики дробно-линейной функции, графики функций, содержащих переменную под знаком модуля. Основная задача – эскизное построение графиков, а не аналитическое исследование функции. Учащиеся должны освоить некоторые виды содержательной деятельности, связанной с графиками: определение числа корней уравнения, приближенных значений корней, решение уравнений и неравенств графическим способом.

Развитие числовой линии происходит в основном в ходе решения содержательных задач по разделам: делимость чисел, признаки делимости, доказательство рациональности или иррациональности числа, приближенные значения, вычисления, сравнения чисел.

Таким образом, цель изучения алгебры заключается в развитии вычислительных и формально-оперативных умений учащихся до уровня, позволяющего уверенно их применять при решении задач курсов математики и смежных предметов (физики, химии, информатики и др.); в усвоении аппарата уравнений и неравенств как важного средства математического моделирования прикладных задач; в осуществлении функциональной подготовки школьников.

Рассмотрим типологию задач, формирующих творческое мышление при обучении алгебре и геометрии.

Ни с чем в своей деятельности человек не сталкивается так часто и ни в чем так сильно не нуждается, как в способности ставить и решать задачи самых разнообразных типов и различной степени сложности. Разносторонняя деятельность людей и почти вся история человечества – это постановка и решение все новых встающих перед ними задач. Однако задачи предстают перед человеком не в виде уже готового, кем-то составленного задачника или даже решебника, а в форме противоречий жизненных обстоятельств, которые надо разрешать. Иногда можно слышать, что школа или вуз не должны сеять среди учащихся и студентов зерна сомнений и что главная их задача – преподавать уже утвердившиеся основы современной науки. Но при этом все же нельзя забывать, что любой, даже, казалось бы, теперь самый авторитетный факт науки, который в учебнике отображается как совершено бесспорная истина, на самом деле является результатом неустанных человеческих поисков, когда-то зарождавшихся в виде новых и чрезвычайно трудных задач. В педагогической практике нужно учитывать, что ученик – это не сосуд, который надо наполнить, а факел, который надо зажечь. Человек, для которого «…дважды два четыре, само собой разумеется, никогда не станет великим математиком», – таково изречение Брехта. Известно также высказывание академика П.Л. Капицы: «Перед тем как решить крупную проблему, ученым надо уметь решать ее в малых формах».

Рассмотрев различные классификации, предложенные психологами, педагогами и методистами, можно сделать вывод о том, что все они строятся на выделении основополагающего признака, который может опираться либо на содержательную часть задачи, либо на деятельностную сторону работы обучающегося. Другой принцип классификации задач, в основу которой были положены дидактические цели и основные функции использования задач, был предложен Н.А. Ждан [211] (рис. 8).

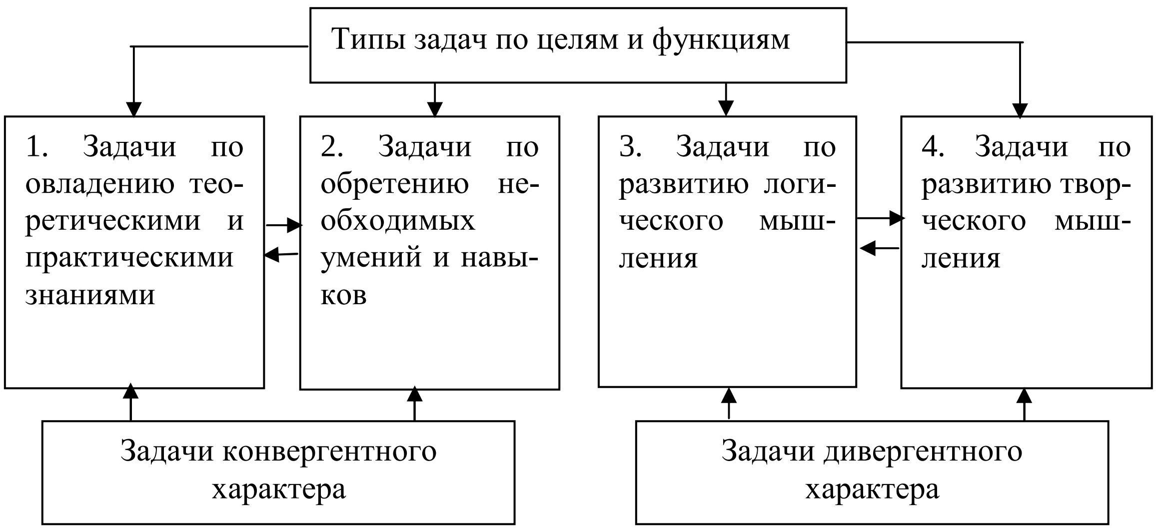


Рис. 8. Классификация задач по целям и функциям

При этом следует отметить, что под конвергентными задачами понимаются задачи, имеющие решения (в этом случае в основном превалирует алгоритмический способ мышления). Под дивергентными понимаются задачи, решение которых предусматривает творческий процесс, т.е. наряду с обилием способов решения налицо и многие варианты ответов. В.А. Шелонцев [211] и другие подчеркивают, что на формирование и развитие творческого мышления направлены прежде всего задачи дивергентного характера.

Известна таксономия задач, предложенная Д. Толлингеровой [189]. Эта таксономия нам интересна прежде всего потому, что в ней отдельным таксоном выделяются задачи, способствующие формированию творческого мышления. Но для полноты картины мы приведем эту таксономию полностью.

I. Задачи, требующие мнемонического воспроизведения данных:

1.1. Задачи по узнаванию;

1.2. Задачи по воспроизведению отдельных фактов, чисел, понятий;

1.3. Задачи по воспроизведению дефиниций, норм, правил;

1.4. Задачи по воспроизведению больших текстов, блоков, стихов, таблиц и т.п.

II. Задачи, требующие простых мыслительных операций с данными:

2.1. Задачи по выявлению фактов (измерение, взвешивание, простые исчисления и т.п.);

2.2. Задачи по перечислению и описанию фактов (исчисления, перечень и т.п.);

2.3. Задачи по перечислению и описанию процессов и способов действий;

2.4. Задачи по разбору и структуре (анализ и синтез);

2.5. Задачи по составлению и развлечению (сравнение и разделение);

2.6. Задачи по распределению (категоризация и классификация);

2.7. Задачи по выявлению взаимоотношений между фактами (причина, следствие, цель, средства, влияние, функция, полезность, инструмент, способ и т.п.);

2.8. Задачи по абстракции, конкретизации и обобщению;

2.9. Решение несложных примеров (с неизвестными величинами и т.п.).

III. Задачи, требующие сложных мыслительных операций с данными:

3.1. Задачи по переносу (трансляция, трансформация);

3.2. Задачи по изложению (интерпретация, разъяснение смысла, значения, обоснование);

3.3. Задачи по индукции;

3.4. Задачи по дедукции;

3.5. Задачи по доказыванию (аргументацией) и проверке (верификацией);

3.6. Задачи по оценке.

IV. Задачи, требующие сообщения данных:

4.1. Задачи по разработке обзоров, конспектов, содержания и т.д.;

4.2. Задачи по разработке отчетов, трактатов, докладов и т.п.;

4.3. Самостоятельные письменные работы, чертежи, проекты и т.п.

V. Задачи, требующие творческого мышления:

5.1. Задачи по практическому приложению;

5.2. Решение проблемных задач и ситуаций;

5.3. Постановка вопросов и формулировка задач или заданий;

5.4. Задачи по обнаружению на основании собственных наблюдений (на сенсорной основе).

Процесс решения учащимися одной и той же системы или группы задач можно организовать по-разному. Например:

1. Учащимся заранее сообщается метод решения какой-либо группы задач (что зачастую и происходит в традиционной методике), тогда решение этих задач будет сводиться к применению уже известных знаний, известного метода.

2. Создается ситуация, в результате которой учащиеся самостоятельно могут прийти к методу решения этих задач, т.е. к новой, неизвестной до этого мысли или идеи. Этот случай важен тем, что учащиеся оказываются в условиях проблемной ситуации.

При реализации второго подхода становится актуальным вопрос об общем принципе построения такой системы задач, чтобы в процессе решения она оказалась достаточно сильным источником и стимулятором исследовательской деятельности, направленной на самостоятельное приобретение новых знаний, на открытие новых приемов и способов решения задач, что, в свою очередь, способствует выработке навыков самостоятельной работы учащихся. Особенно это важно в работе с учащимися математических классов, где рациональная связь между теорией и практикой, учебной деятельностью может стимулировать в процессе решения задач проявление интуиции, находчивости и сообразительности в отыскании скрытых зависимостей, появление неожиданно новой комбинации исходных данных задачи и т.п.

Характеризуя такие задачи, известный американский математик Д. Пойа пишет: «Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы» [158, с. 34].

В подавляющем большинстве исследований подчеркивается, что при решении задач большое значение имеют ранее накопленные знания и опыт человека. В этом отношении весьма справедлива гипотеза А.В. Брушлинского о том, что «…в мышлении не только прошлое (предыдущие этапы мыслительного процесса), но и наоборот, настоящее оказывает затем какое-то обратное влияние на прошлое» [34, с. 8], то еесть только с появлением настоящего и начинается бытие прошлого. Уже свершившийся в прошлом мыслительный акт существует не как «вещь» абсолютно неизменная, а как динамически изменяющийся процесс, избирательно используемый по мере его включения в дальнейший ход мышления, что позволяет наметить пути понимания того, как осуществляется мысленное предвосхищение будущего, то есть как строится и раскрывается замысел какой-то новой идеи.

Решение любой задачи представляет собой производное двух факторов: особенностей самой задачи (имеется в виду прежде всего ее структурная характеристика: соотношение частей или компонентов) и индивидуально-типологической характеристики тех, кто ее решает. Вот почему составителям задач нужно уметь строить такие задачи, в плане усложнения, которые бы удовлетворяли запросам каждого учащегося (то есть задачи могут выступать в роли индикаторов скрытых возможностей учащихся).

И.Я. Лернер [127] считает, что деятельность преподавателя состоит, прежде всего, в построении такой совокупности заданий, которая бы обеспечивала творческое применение обучающимися основных знаний (идей, понятий, методов познания) при решении главных, доступных им проблем курса, овладение чертами творческой деятельности, постепенное усложнение проблем, решаемых обучающимися.

Очень часто усложнение задач проявляется в применении излишне большого вычислительного аппарата, который нередко создает видимость мыслительных усилий учащихся, а на самом деле искусственно сдерживает стремление к более активным формам умственного труда. Нет сомнений в том, что для начальных упражнений необходимы и такие весьма простые задачи, требующие возрастающей умственной нагрузки.

При усложнении исходных данных и требований к задаче желательно учитывать те моменты, которые лежат в основе ее постепенного усложнения, осуществляемого путем включения какого-либо компонента этой задачи в новые системы связей.

Влияние неоднократного включения какого-то одного исходного данного задачи в новые системы связей особенно наглядно можно обнаружить в тех задачах, которые решаются с помощью преобразования исходных данных путем их соподчинения, то есть включения каждого позже обнаруживаемого данного в систему уже ранее известных данных.

Что же касается поисково-исследовательских задач, то анализ учебников и задачников показывает, что такие задачи предлагаются очень редко. Анализ посещенных занятий учителей школ показывает, что обычно методика обучения учащихся алгебре и геометрии строится на основе использования традиционных методов и очень редко используется исследовательский метод и решение различных творческих задач.

Помимо педагогики и психологии исследованием задач интересуется философия, социология, науковедение, логика, математика, кибернетика.

Исследования проблем творчества в психологическом и педагогическом аспектах становятся особо актуальными. Мы в соответствии с темой исследования рассмотрим соотношение творчества и решения задач. Понятие творчества, как известно, весьма многогранно.

В соответствии с проблематикой сосредоточим внимание на том, с какими характеристиками решаемых субъектом задач сопряжено творчество. Одним из важнейших средств интенсификации обучения математике является эффективная организация и управление поисковой деятельностью школьников в процессе решения математических задач. Умение решать математические задачи проявляется в настоящее время недостаточно, хотя именно это умение наиболее ярко характеризует состояние математических знаний учащихся и уровень их математического развития. Во многом это происходит потому, что школьные математические задачи, которые предлагаются учебниками, как правило, ограничены одной темой, не предусматривают широких связей между разделами курса математики.

Рассмотрим классификацию учебно-творческих задач в контексте использования их для развития творческих способностей личности (таблица 6.)

Таблица 6

Признак, основания для классификации	*Типы учебно-творческих задач*	*Виды учебно-творческих задач*	*Развиваемые компоненты творческих способностей личности*
1	2	3	4
Проблемность	Задачи с явно выраженным противоречием	Задачи-проблемы Задачи-парадоксы Задачи-антиномии	Видение противоречия, способность формулировать проблему, диалектичность мышления
Процендуры работы с информацией	Задачи с дефрмированной информацией	Задачи с недостающей исходной информацией; задачи с избыточной информацией; задачи с противоречивой исходной информацией	Способность находить нужную информацию и переносить ее, применять в условиях задачи
Прогнозирование	Задачи на прогнозирование	На прогрессивные экстраполяции; на регрессивные экстраполяции; на непосредственное выдвижение гипотезы	Способность генерировать идеи, выдвигать гипотезы
Оптимизация	Задачи на оптимизацию	Задачи на выбор оптимального решения; задачи на оптимизацию процесса, функционирование объекта; задачи на оптимизацию затрат, средств деятельности	Гибкость, рационализм мышления

Продолжение таблицы 6

1	2	3	4
Рецензирование	Задачи на рецензирование	Задачи на обнаружение ошибок; задачи на проверку результата; задачи на оценку процесса и результата	Критичность мышления, способность к оценочным суждениям
Разработка алгоритмических и эвристических предписаний	Задачи на разработку алгоритмических предписаний	Задачи на разработку алгоритма (алгоритмического предписания); задачи на выявление наиболее эффективных характеристик; задачи на разработку эвристических предписаний, правил	Способность к обобщению и свертыванию мыслительных операций, способность к рефлексии мышления
Переформулировка задачи	Задачи на корректную постановку задачи	Задачи на уточнение цели; задачи на уточнение условий; задачи на уточнение требований и ограничений	Способность формулировать и переформулировать задачи
Инверсия	Задачи-«оборотни», противоположные некоторой данной	Задачи на поиск способа решения, который противоположен наиболее очевидному, и задачи, требующие рассмотрения способа решения от конца к началу	Способность преодолеть инерцию мышления, способность к широкому переносу знаний, умений
Применение принципов и методов	Исследовательские задачи (задачи на применение методов	Задачи на моделирование; задачи графические; задачи на формализацию, применение методов; задачи на применение принципа	Способность к широкому переносу принципов, методов в новые ситуации
Изобретение	Задачи на изобретение	Задачи на изобретение новых конструкций; задачи на изобретение новых способов деятельности; задачи на изобретение новых веществ	Способность к изобретательской деятельности
Доминирование сответствующих логических процедур деятельности	Задачи логические	Задачи на описание явлений, процессов; задачи на объяснение; задачи на доказательство; задачи на установление причинно-следственных связей	Интеллектуально-логические способности
Процедуры управления	Задачи на управление	Задачии на выработку целей, стратегий деятельности; задачи на планирование деятельности; задачи на организацию	Способности к самоуправлению в учебно-творческой деятельности

Продолжение таблицы 6

1	2	3	4
Доминирование соответствующих	Задачи коммуникативно-творческие	Задачи на распределение обязанностей в процессе коллективной творческой деятельности; задачи на поиск	Коммуникативное-творческие способности
Доминирование соответствующих процедур общения в решении творческих задач	Задачи коммуникативно-творческие	Задачи на распределение обязанностей в процессе коллективной творческой деятельности; задачи на поиск средств взаимопомощи и сотрудничества; задачи на поиск средств взаимоконтроля и т.д.	Коммуникативно-творческие способности
Конструирование	Конструкторские задачи	Задачи на поиск нового конструкторского решения: а) на расчленение объекта; б) на синтез нескольких объектов; в) на замещение одного из элементов системы; г) использование аналога в конструировании нового	Способность к конструированию

Для воспитания у учащихся устойчивого интереса к изучению математики, творческого отношения к учебной деятельности (математического характера) необходима постановка учебных математических задач проблемного (поискового) математического характера. Задачи указанной целевой направленности могут быть весьма разнообразными (по форме, в которой они поставлены; по той дидактической цели, которой они служат; по месту в процессе обучения).

Поисковая задача – это любая нестандартная задача, при предъявлении которой учащиеся не знают заранее ни способа ее решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение. Учащиеся в ходе решения таких (поисковых) задач должны провести поиск плана решения задачи, установить, какой теоретический материал дает ключ к тому или иному решению. Ю.М. Колягин [106] отмечает, что поисковые задачи могут использоваться для введения изучения новой темы, для самостоятельного установления школьниками какого-либо факта, подлежащего изучению, для иллюстрации этого факта, для более глубокого усвоения теоретического материала, для выработки некоторых необходимых умений и навыков в целях контроля и самоконтроля, для возбуждения и развития интереса к математике, для приобщения учащихся к деятельности творческого характера, для развития у школьников математического мышления, а также в целях воспитания.

Информация различного рода, получаемая учащимися в процессе решения задач, должна быть критически оценена не только учителем, но и учащимися. Из нее следует выделить наиболее важное и полезное. Такие (особые) умения формируются при решении поисково-исследовательских задач.

Поисково-исследовательская задача – это, как правило, серия частных задач (первая из которых поисковая) и одна или две общего вида (исследовательского характера). Процесс решения поисково-исследовательской задачи, как и любой исследовательской задачи, состоит из нескольких этапов.

В процессе решения поисково-исследовательской задачи ключевое значение придается переформулированию мотивационной задачи (формулировке более общей задачи); мотивационная задача понимается нами как задача, на основании которой строится обобщение.

Как показал теоретический анализ и эксперимент при решении поисково-исследовательской задачи, наиболее приемлемыми являются следующие этапы исследования увеличения объема:

1. Мотивационная деятельность;
2. Постановка проблемы;
3. Сбор фактического материала;
4. Анализ полученных материалов (результатов);
5. Выдвижение гипотезы;
6. Проверка гипотезы;
7. Доказательство истинности гипотезы;
8. Вывод.

Покажем, как на каждом из этапов исследования можно организовать формирование компонентов творческого мышления (таблица 7.)

Таблица 7

Этапы исследования	*Формирование компонентов творческого мышления*
1. Мотивационная деятельность	Видение противоречий
2. Постановка проблемы	Способность формулировать проблему, диалектичность мышления. Обобщение
3. Сбор фактического материала	Находить нужную информацию и переносить ее, применять в условиях задачи, гибкость мышления, Способность генерировать идеи
4. Систематизация и анализ полученных результатов	Критичность мышления, способность оценочных суждений, анализ, классификация, обобщение
5. Выдвижение гипотезы	Способность выдвигать гипотезы
6. Проверка гипотезы	Интеллектуально-логические способности
7. Доказательство истинности гипотезы	Находить нужную информацию и переносить ее, применять в условиях задачи, гибкость мышления, Способность генерировать идеи
8. Вывод	Способность оценочных суждений, анализ, классификация, обобщение

Построение содержательно-методической линии поисково-исследовательских задач связано с основными принципами построения любой содержательно-методической линии: *научности, доступности, систематичности, последовательности.* Как отмечает А.Я. Блох, «понятие содержательно-методической линии возникло в итоге длительного поиска, направленного на выделение специфической категории, при помощи которой можно было бы проводить изучение методических особенностей учебных материалов и конструировать их» [25, с. 34].

Содержательно-методические линии, развиваемые в школьных курсах математики, должны отражать идейную сторону математики-науки и являться важнейшим средством обеспечения преемственности всего материала этих курсов.

Перечислим основные содержательно-методические линии современного школьного курса алгебры: числовая, функциональная, уравнений и неравенств, тождественных преобразований. М.А. Родионов отмечает, что курс алгебры по отношению к каждой содержательной линии построен в основном линейно, постоянно осуществляется переход к новому содержанию.

Достижение цели развития мышления в процессе обучения требует тщательного отбора вопросов курса математики, подлежащих обязательному усвоению с целью высвобождения учебного времени на сознательное, глубокое и прочное их усвоение в процессе решения разнообразных задач.

В число критериев отбора содержания обучения математике должен быть включен критерий, определяющий ценность учебного материала для решения задач математического развития учащихся как в явном виде (структура, номенклатура, научные трактовки, основные понятия и т.п.), так и в неявном виде (например, возможность постановки познавательных задач, решение которых формирует творческое и математическое мышление). Ясно, что потенциальные возможности математического развития учащихся через содержание обучения, если они реализуются в учебных пособиях, должны быть заложены не только в теоретическом, но и в задачном материале.

Учитывая вышесказанное, при построении содержательно-методической линии поисково-исследовательских задач необходимо отобрать и составить достаточное количество поисково-исследовательских задач такого типа, чтобы на этапах исследования можно было организовать развитие творческого мышления.

§ 6. ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ И СОСТАВЛЕНИЮ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ

Целостность творческой личности, учитывая ее индивидуально-психологические особенности, достигается при наличии трех групп способностей.

1. Мотивационные способности: познавательный интерес и стремление к самообразованию; личная значимость творческой деятельности; стремление к успеху, творческим достижениям; стремление к лидерству, к получению высокой оценки своей работы преподавателем.

2. Содержательно-операционные способности: а) *интеллектуально-логические*: способность анализировать и сравнивать; способность выделять главное, отбрасывать второстепенное; способность описывать явления; б) *интеллектуально-эвристические*: способность генерировать идеи, выдвигать гипотезы; способность к фантазии, творческому воображению, ассоциативность мышления; перенос знаний и умений в новые ситуации; независимость суждений, критичность и др.

3. Организационно-коммуникативные способности: способность видеть цель и проявлять интеллектуальные и волевые усилия для ее достижения; способность к планированию своей деятельности; способность к самоконтролю; самооценка личностью своих возможностей, личностных качеств, достижений в творческой деятельности.

Развитие этих способностей играет существенную роль при формировании творческого мышления, поэтому при организации обучения решению поисково-исследовательских задач необходимо создать максимальные условия для развития указанных способностей

Анализ показывает, что творческое мышление характеризуется сложной структурой и множеством компонентов. Основной особенностью творческого мышления является создание субъективно нового продукта, выходящего за пределы сложившейся системы знаний человека. Основными свойствами творческого мышления являются *гибкость, оригинальность, самостоятельность, перенос знаний, беглость, нетривиальность («нешаблонность»), широта, критичность, глубина, открытость, реверсивность мышления.*

В связи с этим при подборе и составлении поисково-исследовательских задач необходимо учитывать, что в процессе решения этих задач можно создать условия для формирования вышеуказанных свойств творческого мышления: гибкости, оригинальности, самостоятельности, переноса знаний, беглости и др.

Рассмотрим основные приемы обучения учащихся решению поисково-исследовательских задач.

Высшим уровнем проблемного обучения является творческое обучение, при котором учащиеся активно участвуют в поиске и формулировании проблем, а затем и в их решении. Примером творческого обучения может служить руководство творческим поиском учащегося, когда решение какой-либо проблемы разбивается учителем на ряд проблем-ступеней, решение которых учащийся находит самостоятельно. Такой характер носит процесс обучения решению поисково-исследовательских задач.

Поисково-исследовательские задачи предполагают различные методы решения. Поэтому их условно можно классифицировать следующим образом:

1. Поисково-исследовательские задачи, в основе решения которых лежит индуктивный метод.

2. Поисково-исследовательские задачи, в основе решения которых лежит дедуктивный метод.

3. Поисково-исследовательские задачи, в основе решения которых лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов.

4. Поисково-исследовательские задачи, в основе которых лежат аналитико-синтетический метод или же комбинация различных методов.

Учитывая тот факт, что для поиска решения поисково-исследовательских задач существуют различные методы, можно выделить различные приемы поэтапного обучения учащихся решению поисково-исследовательских задач.

Рассмотрим прием обучения решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит индуктивный метод, но прежде введем понятие мотивационной задачи. *Мотивационная задача – это задача, на основе которой строится обобщение.*

Прием 1. Обучение решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит индуктивный метод.

1. Проанализировать условие мотивационной задачи.

а) Выполнить чертеж, рисунок;

б) Выделить данные и искомые;

в) Проанализировать данные, выявить связи между ними и всевозможные расположения фигур.

Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи.

Поочередно, двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними, а затем, используя связи между искомыми и данными, определить способ решения.

2. Сформулировать задачу более общего вида (постановка проблемы); при формулировке задачи учитывать возможность использования метода полной математической индукции.

а) Изменить условие задачи так, чтобы мотивационная задача являлась бы частным случаем;

б) Переформулировать задачу так, чтобы задачу более общего вида в процессе исследования (или истинность результатов исследования) можно было бы доказать методом полной математической индукции, кроме этого должна быть возможность нахождения зависимости между параметрами.

Определить, можно ли разрешить проблему тем же методом, что и мотивационную задачу, если нет, то разрешить проблему по следующей схеме:

а) Решить несколько «частных» задач;

б) Проанализировать полученные результаты;

в) Выдвинуть гипотезу;

г) Доказать гипотезу методом полной математической индукции.

Проиллюстрируем использование данного приема на примере.

***Пример* 1.** Доказать неравенство (*мотивационная задача*)

$$\frac{4k^2}{9}\left(1-\frac{9(xy+xz+yz)}{k^2}\right)\geq\left(x-\frac{k}{3}\right)^2, \qquad (1)$$

если $x+y+z=k$, $k\in N$, а затем доказать неравенство более общего вида.

1. Проанализировав условие мотивационной задачи, учащиеся определяют, что неравенство (1) можно доказать, используя синтетический метод.

2. Учащиеся формулируют условие задачи более общего вида: «Найти зависимость между параметрами c, b и d, при которой неравенство

$$c\left(1-\frac{x_1x_2+x_1x_3+...+x_2x_3+x_2x_4+...x_{n-1}x_n}{b}\right)\geq(x_1-d)^2 \qquad (2)$$

справедливо, если $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k$, $k \in N$».

Формулируя задачу более общего вида, учащиеся изменяют формулировку мотивационной задачи, числовые коэффициенты заменяют параметрами, количество слагаемых увеличивают до n, где $n \in N$ (множество натуральных чисел). Учитывая эти изменения, учащиеся должны при исследовании в итоге выразить параметры c, b и d через n и k ($n, k \in N$) и доказать неравенство (2) методом полной математической индукции (так как любой другой метод не позволит доказать истинность неравенства (2) для всех натуральных чисел).

3. *Сбор фактического материала*. Учащиеся решают «частные» задачи, используя синтетический метод доказательства неравенства.

4. *Систематизация, анализ фактического материала. Выдвижение гипотезы*. Учащиеся анализируют решение «частных» задач, находят зависимость между параметрами c, b и d, выдвигают гипотезу.

5. *Доказательство истинности гипотезы*. Учащиеся доказывают истинность гипотезы методом полной математической индукции.

6. *Вывод*. Учащиеся записывают результаты исследования и делают некоторые обобщения:

«Неравенство $c\left(1 - \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_2x_3 + x_2x_4 + ... x_{n-1}x_n}{b}\right) \geq (x_1 - d)^2$ истинно, если $c = \left(k - \frac{k}{n}\right)$, $b = \frac{n^2 - n}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2$, $d = \frac{k}{n}$, $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k$ $n \geq 3$, $n \in N$, $k \in N$».

Нетрудно увидеть зависимость между параметрами c, b и d:

$$c = k - d\,,\; b = \frac{n^2 - n}{2}(d)^2,\; b = \frac{n^2 - n}{2}(k - c)^2.$$

Необходимо отметить, что если у учащихся на этапах исследования появлялись трудности, то учителю необходимо задавать наводящие вопросы или предложить решение вспомогательной задачи. Это поможет разрешить проблемы. Практика показывает, что при обучении учащихся решению поисково-исследовательских задач наибольшие трудности у учащихся появляются при формулировке более общей задачи (*постановке проблемы*), но нужно учитывать, что постановка проблемы – это «ключ» ко всему исследованию, поэтому учителю необходимо на первых уроках-исследованиях (на занятиях-исследованиях по элективным курсам) самому формулировать более общую задачу и подробно рассказывать, что постановка проблемы непосредственно связана с основным методом решения поисково-исследовательской задачи. Необходимо формировать у учащихся навыки прогнозирования; начать следует с простых заданий, постепенно переходя к более сложным задачам. В самом начале исследования следует учить учащихся думать о том, каким методом (способом) будет решаться более общая задача.

Прием 2. Обучение решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит дедуктивный метод.

1. Проанализировать условие мотивационной задачи.

а) Выполнить чертеж, рисунок;

б) *Выделить данные и искомые;*

в) *Проанализировать данные, выявить связи между ними и всевозможные расположения фигур.*

Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи.

Поочередно, двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними, а затем, используя связи между искомыми и данными, определить способ решения.

2. Сформулировать задачу более общего вида. Если решение мотивационной задачи вызывает большие трудности, то разрешить проблему по следующей схеме:

а) *Проанализировать и определить наиболее оптимальный метод для решения общей задачи;*

б) *Выдвинуть предположения о результатах решения задачи общего вида;*

г) *Решить задачу в общем виде;*

д) *Найти решение мотивационной задачи, используя результаты решения общей задачи.*

Проиллюстрируем использование данного приема на примере.

***Пример* 2.** Найти производную $y^{(100)}$, если $y=\cos\left(\sqrt[20]{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (*мотивационная задача*).

Найти производную более сложной функции.

1. Проанализировав условие мотивационной задачи, учащиеся определяют, что ее можно решить поэтапно, но это вызывает некоторые вычислительные трудности.

2. Учащиеся формулируют условие задачи более общего вида, числовые коэффициенты заменяют параметрами.

Проблема. Найти $y^{(n)}$, если $y=\cos(kx+b)$.

Нетрудно заметить, что процесс решения задачи в общем виде проще, чем решение самой мотивационной задачи.

Поэтому учащиеся решают задачу в общем виде. И получают следующие результаты:

$$y^{(4m-3)}=-k^{4m-3}\sin(kx+b);$$

$$y^{(4m-2)}=-k^{4m-2}\cos(kx+b);$$

$$y^{(4m-1)}=k^{4m-1}\sin(kx+b);$$

$$y^{(4m)}=-k^{4m}\cos(kx+b).$$

Используя эти результаты, учащиеся находят решение мотивационной задачи (применяют *дедуктивный метод*).

Применение приема обобщения, который является основным для всех поисково-исследовательских задач, как и других эвристических приемов, зависит от специфических особенностей решаемой задачи, и поэтому трудно сначала очертить круг задач, к которому он применим. При поиске решения целесообразно поставить себе и такой вопрос: нельзя ли обобщить предложенную задачу так, чтобы из решения обобщенной задачи вытекало бы решение данной?

Прием 3. Обучение решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов.

1. Проанализировать условие мотивационной задачи. Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи.

а) Выполнить чертеж, рисунок;

б) Выделить данные и искомые;

в) Проанализировать данные, выявить связи между ними и всевозможные расположения фигур.

Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи.

Почередно, двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними, а затем, используя связи между искомыми и данными, определить способ решения.

2. Сформулировать задачу более общего вида.

Изменить условие задачи так, чтобы мотивационная задача явилась бы частным случаем (числовые коэффициенты или числовые данные заменить на параметры).

Определить, можно ли разрешить проблему тем же методом, что и мотивационную задачу. Если нельзя или этот метод вызывает большие трудности при решении, то разрешить проблему по следующей схеме:

а) решить несколько частных задач различными способами;

б) проанализировать полученные результаты и определить рациональный способ для решения более общей задачи;

в) выдвинуть гипотезу;

г) доказать гипотезу или решить более общую задачу рациональным способом.

Проиллюстрируем использование данного приема на примере такой задачи.

***Пример* 3.** Найти неопределенный интеграл (*мотивационная задача*)

$$\int (2x-1)\sqrt{3x+2}dx.$$

Найти неопределенный интеграл более общего вида.

1. Проанализировав условие мотивационной задачи, учащиеся определяют, что ее можно решить методом подстановки или методом интегрирования по частям.

2. Учащиеся формулируют условие задачи более общего вида, числовые коэффициенты заменяют параметрами, а также вместо линейного множителя берут квадратный трехчлен. В результате получают две проблемы.

Проблема 1. Найти неопределенный интеграл вида $\int (ax+b)\sqrt[n]{kx+l}dx$ наиболее рациональным способом.

Проблема 2. Найти неопределенный интеграл вида $\int (ax^2+bx+c)\sqrt[n]{kx+l}\,dx$ наиболее рациональным способом.

3. *Сбор фактического материала*. Учащиеся решают «частные» задачи тремя способами (методом подстановки, методом интегрирования по частям и используя «искусственные» преобразования).

4. *Систематизация, анализ, выдвижение гипотезы*. Учащиеся анализируют решение каждого способа и отмечают, что метод подстановки наиболее рациональный, а также находят некоторые закономерности, используя которые, выдвигают гипотезу.

5. *Доказательство истинности гипотезы*. *Решение более общей задачи*. Учитывая, что найден рациональный способ решения, учащиеся находят этим способом решение более общей задачи, выполняют проверку и записывают полученные результаты исследования.

Приведем полученные в ходе эксперимента результаты учащихся.

$$\int (ax+b)\sqrt[n]{kx+l}\,dx = \frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^2}\left(\frac{a(kx+l)}{2n+1}+\frac{bk-al}{n+1}\right)+C,$$

где $a,b,k,l\in R$, $a\neq 0, k\neq 0$, $n\in N$, $n\geq 2$.

$$\int (ax^2+bx+c)\sqrt[n]{kx+l}\,dx=$$

$$=\frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^3}\left(\frac{a(kx+l)^2}{3n+1}+\frac{(bk-2al)(kx+l)}{2n+1}+\frac{al^2+ck^2-blk}{n+1}\right)+C,$$

где $a,b,c,k,l\in R$, $a\neq 0, k\neq 0$, $n\in N$, $n\geq 2$.

Как показал эксперимент, решением подобных задач можно активизировать познавательную деятельность обучающихся, расширить круг учащихся, проявляющих интерес к математике.

Прием 4. Обучение решению поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит аналитико-синтетический метод.

1. Проанализировать условие мотивационной задачи.

а) Выделить данные и искомые;

б) Проанализировать данные, выявить связи между ними и всевозможные расположения фигур.

2. Определить метод (или способ) решения мотивационной задачи.

Поочередно, двигаясь от искомых к данным и от данных к искомым, искать связи между ними, а затем, используя связи между искомыми и данными, определить способ решения.

3. Найти решение мотивационной задачи. (*Решение мотивационной задачи – это цепочка логических умозаключений.*)

4. Сформулировать задачу более общего вида.

Изменить условие задачи так, чтобы мотивационная задача являлась бы частным случаем (числовые коэффициенты или числовые данные заменить на параметры, но не более двух).

5. Найти решение обобщенной задачи.

При решении обобщенной задачи можно использовать тот же метод, что и при решении мотивационной задачи.

Проиллюстрируем использование данного приема на примере.

***Пример* 4.** Решить уравнение (*мотивационная задача*)

$$(x^2-4x+9)\left(5^y+5^{-y}+7\right)=45.$$

1. Учащиеся, анализируя условие мотивационной задачи, замечают, что при ее решении можно построить логическую цепочку умозаключений.

2. Учащиеся находят решение мотивационной задачи, построив логическую цепочку умозаключений, и получают, что $x=2, y=0$ (*аналитико-синтетический метод*)

3. Проанализировав решение мотивационной задачи, учащиеся формулируют более общую задачу.

Проблема. При каких значениях b уравнение:

$$(x^2-4x+a+8)\left(5^y+5^{-y}+a+1\right)=a^2+7a+b^2$$

имеет единственное решение?

4. Обобщенную задачу следует решать тем же способом, что и мотивационную.

Учить учащихся догадываться тоже надо учить, также как мы учим их доказывать. Разрабатывая методику обучения поэтапному поиску решения поисково-исследовательской задачи, нужно учитывать эвристическую информацию, заложенную в условии каждой поисково-исследовательской задачи, то есть информацию, которая способствует нахождению пути к открытию решения.

В процессе решения поисково-исследовательских задач можно реализовать некоторые дидактические функции.

Рассмотрим более детально один из этапов решения поисково-исследовательских задач: *сбор фактического материала* при решении индуктивным методом и при сочетании индуктивного и дедуктивного методов. Основой этого этапа является решение «частных» задач. Наиболее важным для обучения, воспитания и развития учащихся является решение «частных» задач несколькими способами.

Решение задач должно стать важным средством интенсификации процесса обучения математике. Именно задачи могут обеспечить органическое единство изучения всех тем курса математики.

Задачный материал по каждой теме должен быть подобран таким образом, чтобы его решение способствовало уяснению учащимися данной темы и новых математических идей, заложенных в ней; помогало бы повторению предыдущего материала на основе нового, решению старых задач новыми методами; содержало бы в себе пропедевтику последующих тем курса.

При обучении решению поисково-исследовательских задач следует реализовать принцип тесной взаимосвязи различных тем математики.

Роль внутрипредметных связей в учебном процессе велика; они непосредственно влияют на достижение обучающей, развивающей и воспитывающей целей обучения. При этом внутрипредметные связи формируют у учащихся научное мировоззрение, помогают видеть мир в движении и развитии, способствуют установлению логических связей между понятиями, тем самым развивают логическое мышление учащихся, выступают средством предупреждения и ликвидации формализма в знаниях школьников, позволяют сформировать такую систему знаний, которая предстает перед учащимися не как застывшая, а как динамичная, качественно изменяющаяся, сокращают затраты учебного времени, способствуют устранению перегрузки школьников.

Возможность осуществления этого принципа мы рассмотрим на примере решения проблемной поисково-исследовательской задачи (на этапе *сбора фактического материала*):

***Пример* 5**. *Проблема*. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x^{2n}-a$, $x^{2n}-b$ и на $x^{2n}-c$ равны соответственно $x-a$, $x-b$, $x-c$. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $R(x)$, если $R(x)=(x^{2n}-a)(x^{2n}-b)(x^{2n}-c)$.

Частные задачи

Задача 1. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на x^2-1, x^2-4 равны соответственно $x-1$, $x-4$. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^4-5x^2+4.

При решении *задачи* 1 учащиеся используют теорему о делении многочленов с остатком:

$P(x) = N(x)(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)+ax^3+bx^2+cx+d$. $P(2) = -2$, $P(-2) = -6$, $P(1) = 0$.

Задача 2. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на x^2+1, x^2+9 равны соответственно $x+1$, $x+9$. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^4+10x^2+9.

При решении этой задачи учащиеся используют тот же способ, что и для решения *задачи* 1, находят комплексные корни $i,-i,3i,-3i$ квадратных уравнений $x^2+1=0$, $x^2+9=0$ и выполняют действия с комплексными числами:

$P(x) = N(x)(x-i)(x+i)(x-3i)(x+3i)+ax^3+bx^2+cx+d$.

$P(i) = i+1$, $P(-i) = -i+1$, $P(-3i) = -3i+9$, $P(3i) = 3i+9$, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}-ia-b+ic+d=i+1,\\ ia-b-ic+d=-i+1,\\ -27ia-9b+3ic+d=3i+9,\\ 27ia-9b-3ic+d=-3i+9;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-b+d=1,\\ -9b+d=9;\end{cases}\Rightarrow a=0,\ b=-1,$$

$c = 1, d=0$, следовательно, остаток от деления многочленов $P(x)$ на x^4+10x^2+9 равен $-x^2+x$.

***Пример* 6.** *Проблема*. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на x^2-a, x^2-b и на x^2-c равны соответственно $x-a$, $x-b$, $x-c$. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $K(x)$, если $K(x)=(x^2-a)(x^2-b)(x^2-c)$.

Перед учащимися возникает проблема найти другой способ решения, так как параметры a, b и c могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, и, следовательно, нужно рассматривать очень много вариантов, что существенно усложняет процесс решения этой задачи.

Для решения этой задачи учащиеся находят более рациональный способ («искусственный» способ).

Учитывая условие задачи и то, что $N(x)$, $F(x)$, $L(x)$ не являются нулевыми многочленами, учащиеся записывают три равенства

$$P(x) = (x^2 - a)N(x) + x - a,$$
$$P(x) = (x^2 - b)F(x) + x - b,$$
$$P(x) = (x^2 - c)L(x) + x - c,$$

а затем, выполнив ряд равносильных преобразований, они получают равенство:

$$P(x) = \frac{1}{(a-b)(a-c)} K(x)((N(x) - F(x) + L(x)) - x^2 + x,$$

из которого следует, что остатком от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $K(x)$ является многочлен $-x^2 + x$.

При решении этих «частных» задач учащиеся используют теорему о делении многочленов с остатком, метод Гаусса для решения систем линейных уравнений, действия с комплексными числами и нахождение комплексных корней квадратных уравнений, а также алгебраические преобразования. Таким образом, тема «многочлены» изучается учащимися не сама по себе, а в комплексе с другими.

Дадим рекомендации для учителя по составлению поисково-исследовательских задач.

Как было отмечено выше, поисково-исследовательские задачи можно условно классифицировать по «основному» методу решения, отсюда следует вывод о том, что составление поисково-исследовательских задач непосредственно связано с методом решения. Кроме этого при составлении поисково-исследовательских задач необходимо учитывать дидактические, развивающие и воспитывающие функции этих задач.

Так как составление поисково-исследовательских задач связано с обобщением, то здесь уместно ввести понятие уровневого обобщения.

Операция обобщения не является однозначно определенной. Например, при обобщении понятия квадрата можно перейти как к понятию ромба, так и к понятию прямоугольника. На следующем этапе возникает понятие параллелограмма. Обобщающим является как понятие ромба, так и понятие прямоугольника. Дальнейшая линия обобщений дает понятия четырехугольник, многоугольник, геометрическая фигура, множество. На каждом шагу обобщения понятия происходит абстрагирование от некоторых свойств исходного понятия (например, отказ сначала от равенства длин сторон, потом от равенства углов, затем от параллельности сторон, далее от числа сторон, наконец от того, что граница состоит из отрезков).

В математике термину «обобщение» придается и иной смысл, в контексте применяя его к получению общих результатов, объединяющих ряд разрозненных утверждений.

Введем обобщение *первого уровня* и обобщение *второго уровня*.

Если числовые коэффициенты любого уравнения, неравенства, тождества, функции и т.д. (а также числовые значения компонентов алгебраических задач, значение элементов геометрических задач) заменить на параметры, то такое обобщение является обобщением *первого уровня*.

Если после обобщения *первого уровня* изменить вид уравнения, неравенства, тождества, функции и т.д. на более сложный (а также если увеличить число компонентов (элементов) задачи), то такое обобщение является обобщением *второго уровня*.

Рассмотрим требования, которые нужно учитывать при составлении поисково-исследовательских задач, если в основе решения лежит индуктивный метод.

1. Мотивационная задача должна быть *поисковой*.

2. При формулировке задачи более общего вида (*постановка проблемы*) мотивационная задача должна являться частным случаем.

3. При формулировке задачи более общего вида (*постановка проблемы*) нужно числовые коэффициенты заменить на параметры (не

более двух), компоненты (элементы одного вида), входящие в условие задачи, увеличить до числа n ($n \in N$) или один из компонентов связать числом с n ($n \in N$), то есть выполнить обобщение на *втором уровне*.

4. Изменить формулировку мотивационной задачи так, чтобы задачу более общего вида в процессе исследования (или истинность результатов исследования) можно было бы доказать методом полной математической индукции, кроме этого должна быть возможность нахождения зависимости между параметрами.

5. Зависимости между параметрами, компонентами можно определить при решении «частных» задач.

Проиллюстрируем выполнение требований при составлении поисково-исследовательской задачи, если в основе поиска решения которой лежит индуктивный метод.

***Пример* 7.** Рассмотрим одну из поисковых задач. Доказать неравенство $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$ для все $x \in R$ (*мотивационная задача*).

Почему мы выбрали эту поисковую задачу ?

1. Для данной задачи можно выполнить обобщение на *втором уровне*.

а) Вместо числа $\frac{1}{2}$ ввести параметр a;

б) Вместо многочлена четвертой степени записать многочлен 2^n-ой степени.

2. При решении «частных» задач можно найти зависимость между параметром a и показателем степени.

Переформулируем мотивационную задачу: При каких значениях a неравенство $x^{2^n} - x + a > 0$ справедливо при всех $n \in N$ и $x \in R$.

Таким образом, получили неравенство более общего вида. Зависимость между параметром a и показателем степени можно определить при решении «частных» задач (используется *индуктивный метод*) $a \geq \frac{n}{4}$, $n \in N$ $(n > 1)$.

Неравенство общего вида $x^{2^n} - x + \frac{n}{4} > 0$ можно доказать методом полной математической индукции.

Заметим, что для данной мотивационной задачи можно выполнить обобщение еще на более высоком уровне, введением двух параметров.

Отметим, что все перечисленные выше пять требований для данной задачи выполняются. Если хотя бы одно требование не будет выполняться, то составить такую поисково-исследовательскую задачу будет проблематично. Кроме этого необходимо выделить одно из основных требований – требование 4: *изменить формулировку мотивационной задачи так, чтобы задачу более общего вида в процессе исследования (или истинность результатов исследования) можно было бы доказать методом полной математической индукции; кроме этого должна быть возможность нахождения зависимости между параметрами.* Для выполнения этого требования нужно научиться прогнозировать, предвидеть результат всего исследования. Формирование умения прогнозировать играет положительную роль в развитии творческого мышления.

Рассмотрим требования, которые нужно учитывать при составлении поисково-исследовательских задач, если в основе решения лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов.

1. Мотивационная задача должна быть *поисковой*.

2. Мотивационную задачу можно решить различными способами.

3. При формулировке задачи более общего вида (*постановка проблемы*) мотивационная задача должна являться частным случаем.

4. При формулировке задачи более общего вида (*постановка проблемы*) нужно числовые коэффициенты (числовые значения элементов) заменить на параметры (обобщение *первого уровня*).

5. Зависимость между параметрами, компонентами можно определить при решении «частных» задач (используя *индуктивный метод*).

6. Задачу более общего вида можно решить теми же способами, что и мотивационную, но решить нужно рациональным способом, то есть решить задачу в общем виде (используя *дедуктивный метод*).

Проиллюстрируем составление поисково-исследовательской задачи, в «основе» решения которой лежит сочетание индуктивного и дедуктивного методов.

***Пример* 8.** Рассмотрим одну из поисковых задач: Составить уравнение общей касательной к графикам функций $y = 3x^2 + 4x + 1$ и $y = 3x^2 + 2x + 1$.

Почему мы выбрали эту поисковую задачу ?

1. Данная мотивационная задача поддается обобщению *первого уровня.*

Если заменить числовые коэффициенты на параметры, то можно сформулировать проблему: «Составить уравнение общей касательной к графикам функций $y = ax^2 + bx + c$ и $y = ax^2 + dx + p$».

2. Данную мотивационную задачу можно решить *различными* способами, этими же способами можно решить и задачу более общего вида.

Если решить несколько «частных» задач различными способами, то можно найти некоторую зависимость между параметрами, а также выбрать наиболее рациональный способ для решения задачи более общего вида (*индуктивный метод*).

При решении задачи общего вида (используя *дедуктивный метод*) получим, что: «Квадратичные функции $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2 + dx + p$ имеют общую касательную, уравнение которой имеет вид $y = \left(\frac{d+b}{2} + \frac{2a(p-c)}{b-d}\right)x - \frac{(b-d)^2}{16a} + \frac{p+c}{2} - \frac{a(p-c)^2}{(b-d)^2}$, при условии $a \in R, a \neq 0$, $d \in R$, $b \in R$, $d \neq b$, $c \in R$».

Таким образом, на данном примере проверяется выполнимость всех шести требований. Нужно отметить, что все требования должны выполняться. Одним из основных требований является то, что мотивационную задачу можно решить несколькими способами. Решение задачи различными способами и нахождение рационального способа играют существенную роль в совершенствовании знаний, для реализации внутрипредметных связей и для развития творческого мышления.

Рассмотрим требования, которые нужно учитывать при составлении поисково-исследовательских задач, в основе поиска решения которой лежит дедуктивный метод.

1. Мотивационная задача должна быть *поисковой;*

2. Процесс решения мотивационной задачи (вычислительные преобразования) намного сложнее процесса решения задачи общего вида;

3. При формулировке задачи более общего вида (*постановка проблемы*) мотивационная задача должна являться частным случаем;

4. При формулировке задачи более общего вида (*постановка проблемы*) нужно числовые коэффициенты (числовые значения элементов) заменить на параметры (обобщение *первого уровня*).

Проиллюстрируем выполнение требований при составлении поисково-исследовательской задачи, в основе решения которой лежит дедуктивный метод.

***Пример* 9.** Чтобы составить поисково-исследовательскую задачу, в основе решения которой лежал бы дедуктивный метод, учителю необходимо:

1. Подобрать такую задачу, которую можно легко решить в общем виде, для чего нужно двигаться в обратном порядке.

Проблема. При какой зависимости параметров a, b и c уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ имеет решение?

2. Создать вычислительные трудности для решения «частной» задачи: При каких значениях параметра c уравнение

$$\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cos x = c$$

имеет решение? (*мотивационная задача*).

Рассмотрим требования, которые нужно учитывать при составлении поисково-исследовательских задач, в основе решения которых лежит аналитико-синтетический метод.

1. Мотивационная задача должна быть *поисковой*.

2. Процесс решения мотивационной задачи выстраивается как логическая цепочка умозаключений.

3. При формулировке задачи более общего вида (*постановка проблемы*) мотивационная задача должна являться частным случаем.

4. При формулировке задачи более общего вида (*постановка проблемы*) нужно числовые коэффициенты (числовые значения элементов) заменить на параметры (обобщение *первого уровня*).

5. Процесс решения обобщенной задачи выстраивается как логическая цепочка умозаключений.

Проиллюстрируем выполнение требований при составлении поисково-исследовательской задачи, в основе решения которой лежит аналитико-синтетический метод.

Ярким примером поисково-исследовательских задач, при решении которых используется аналитико-синтетический метод, являются нестандартные уравнения, системы уравнений и нестандартные неравенства. Как показывает практика, составление таких заданий для учителя не является большой проблемой.

При составлении необходимо использовать определения, аксиомы, теоремы, следствия, основные свойства (*например*: $a^{2n} \geq 0$; $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, если $a>0\,, b>0$; если функции f и g монотонно возрастающие, то и функция $f+g$ также является монотонно возрастающей и т.д.)

***Пример* 10.** Решить уравнение (*мотивационная задача*)

$$(x^3-y-1)^2+(y-2)^2+7^{3z-1}+7^{-3z+1}=\frac{4}{(2t-3)^2-2}.$$

Почему мы составили такую поисковую задачу ?

1. Так как при решении этой задачи можно построить логическую цепочку умозаключений.

2. Решение обобщенной задачи осуществляется тем же способом, что и частной задачи.

Уравнение $(x^3-y-1)^2+(y-2)^2+7^{3z-1}+7^{-3z+1}=\frac{4}{(2t-3)^2-2}$ можно условно назвать заданием «открытого» вида: его решение лежит на «поверхности». Для его решения достаточно построить логическую цепочку умозаключений.

Это же уравнение учитель может предложить учащимся в «закрытом» виде

$$x^6-2x^3y-2x^3+2y^2-2y+7^{3z-1}+7^{-3z+1}=\frac{-20t^2+60t-21}{4t^2-12t+5}.$$

Для решения необходимо найти эвристические приемы, искусственные преобразования, а затем построить логическую цепочку умозаключений.

Используя уровень «открытости» заданий, учитель может осуществлять идею дифференцированного обучения как при групповой, так и при индивидуализированной формах организации учебной работы.

Отметим, что составление и решение таких задач является актуальным в настоящее время, так как подобные задания предлагаются в измерительных материалах ЕГЭ. Кроме этого составление и решение таких задач развивает мышление учащихся, они приобретают опыт творческой работы.

Процедура отбора математических задач является элементом планирования процесса обучения, которое включает следующие операции:

- отбор наиболее рационального содержания обучения на данном уроке и вне урока, выделение в нем главного;
- выбор оптимального сочетания методов и средств обучения для реализации намеченных учебно-воспитательных задач;
- определение оптимального темпа обучения;
- выбор форм организации учебной работы школьников (общеклассные, групповые или индивидуальные);
- определение содержания и методов домашней работы учащихся и др.

При отборе и составлении поисково-исследовательских задач необходимо принимать во внимание следующие требования:

- при отборе и составлении поисково-исследовательских задач учитывать, что в процессе их решения будут использоваться все возможные обобщения;
- решение поисково-исследовательских задач будет направлено на нахождение определенных зависимостей между величинами, вывод определенных формул, которые можно использовать в дальнейшем;
- в процессе решения «частных» задач возможность нахождения рационального способа решения;
- в процессе решения поисково-исследовательских задач можно создать условия для формирования способностей (компонентов) творческого мышления.

ГЛАВА II. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Обучение математике обладает уникальными возможностями в плане интеллектуального развития учащихся, в формировании компонентов и качеств мышления, необходимых не только для продолжения образования и освоения новых областей знаний, но и обеспечивающих успешность профессиональной деятельности и полноценность повседневной жизни в современном обществе. В первую очередь это развитие абстрактного и логического мышления, воспитание алгоритмической культуры, и в то же время – приобретение опыта творческой деятельности.

Овладение учащимися в процессе обучения математике *математическими методами мышления*, включающим в себя все способы научного познания – дедукцию и индукцию, обобщение, сравнение, аналогию и т.п., способствует выработке у них *математического стиля мышления,* характеризуемого, прежде всего, доказательностью, критичностью, независимостью логической схемы рассуждения от его содержания, структурированностью рассуждений. Эти качества мышления необходимы каждому человеку независимо от сферы его деятельности, но именно обучение математике способно внести наибольший вклад в их развитие.

Еще более трехсот лет назад английский философ Д. Локк писал, что математику следует изучать не столько для того, чтобы сделаться математиками, сколько для того, чтобы стать разумными людьми. Этому тезису созвучна современная расстановка акцентов в определении целей и задач школьного математического образования: «Обучение математике в школе должно быть ориентированно не столько на *собственно математическое образование* в узком смысле слова, сколько на *образование с помощью математики*» (Г.В. Дорофеев).

В этой главе мы рассмотрим содержательный и процессуальный компоненты исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения математике.

Проблема исследовательской деятельности школьников имеет богатую историю, однако с момента появления в педагогике исследовательского метода основное внимание уделялось учебным исследованиям в естественнонаучной и гуманитарной областях (Б.В. Всесвятский, В.Е. Райков и др.); эти направления исследовательской деятельности школьников продолжают оставаться приоритетными и на сегодняшний день (В.И. Андреев, А.В. Леонтович, И. Д. Чечель и др.).

Общие аспекты формирования различных приемов *математической* исследовательской работы учащихся затронуты в трудах ученых-математиков В.Г. Болтянского, Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогорова, Л.Д. Кудрявцева, А.И. Маркушевича, Д. Пойа и др.

В работах математиков-методистов учебное исследование чаще всего рассматривается либо как элемент углубленного изучения математики, либо как форма факультативной работы (Б.А. Викол, Н.К. Костюкова, Г.В. Токмазов, И.М. Челябов). Что же касается *основных уроков* в *общеобразовательной школе*, то большее внимание уделяется исследовательской работе учащихся на геометрическом материале (В.А. Гусев, З.П. Каплан, Е.В. Ларькина, Л.М. Лоповок, А.Я. Цукарь). Между тем, один из принципов новой концепции школьного математического образования состоит в том, чтобы при обучении математике «предпочитать эвристическое исследование доктринальному изложению».

В своей работе мы опираемся на сформулированное С.Л. Рубинштейном положение о том, что «основным способом существования психического является его существование в качестве процесса или деятельности». При этом любой мыслительный процесс, благодаря которому человек включается в познавательную деятельность, начинается и осуществляется в силу определенных причин – побуждений, мотивов и т.д. Тем самым процессуальный аспект мышления оказывается тесно связан с его личностным аспектом, и прежде всего – с мотивационным. Негативное отношение школьника к математике препятствует развитию его математического мышления. Среди положительных мотивов учения ведущая роль принадлежит любознательности и интересу, поэтому проблему развития математического мышления учащихся мы рассматриваем во взаимосвязи с педагогической проблемой формирования познавательного интереса к математике.

§ 1. РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Развивающая функция обучения требует от учителя не простого изложения знаний в определенной системе, а предполагает также учить школьников мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже известные. Уместно в связи с этим привести слова французского философа М. Монтеня: «Мозг хорошо устроенный стоит больше, чем мозг хорошо наполненный».

Учебная дисциплина должна рассматриваться не как предмет с набором готовых знаний, а как специфическая интеллектуальная деятельность человека. Обучение же должно в разумной мере проходить в форме повторного открытия, а не простой передачи суммы знаний. Учебную дисциплину надо изучать не столько ради лишних фактов, сколько ради процесса их получения, и тогда, по словам Б. Рассела, предмет предстанет как могучее орудие познания и преобразования природы, а не как формальная схема, в которой «неизвестно, о чем говорится».

Сейчас в школе обучение в значительной степени строится по формуле:

«Усвоение = Понимание + Запоминание».

Но если мы хотим действительно еще и развивать молодежь, то должны руководствоваться следующей формулой:

«Овладение = Усвоение + Применение знаний на практике».

А.А. Ляпунов отмечал: «Действительно ценные знания составляются не из того, о чем человек слышал, а из того, чем он умеет пользоваться».

Познавательные процессы эффективно развиваются лишь при такой организации обучения, при которой школьники включаются в активную поисковую деятельность. Поиск нового составляет основу для развития воли, внимания, памяти, воображения и мышления.

Наш опыт и опыт других учителей показывает, что эффективным средством обучения и развития является организация учебных исследований, цель которых состоит в том, чтобы помочь учащимся самостоятельно открыть новые знания и способы деятельности, углубить и систематизировать изученное.

В этом параграфе мы приведем темы различных учебных исследований, которые можно организовать с учащимися в процессе обучения их математике в различных классах. Часть заданий будет прокомментирована или же подробно рассмотрена, другая же часть предложена для самостоятельной работы. Анализ предложенных заданий исследовательского характера покажет читателю то, что математика – это прежде всего труд.

1. Прямые, содержащие высоты треугольника, вписанного в гиперболу $y=\frac{1}{x}$, пересекаются в точке, лежащей на гиперболе (рис. 9а, б).

Зададим координаты вершин треугольника: $A\left(x_1;\frac{1}{x_1}\right)$; $B\left(x_2;\frac{1}{x_2}\right)$; $C\left(x_3;\frac{1}{x_3}\right)$. Составим уравнение прямых *AC*, *AB*, *BC*, а затем найдем уравнения высот *AK*, *BK*, *CK*. Решив систему трех уравнений с тремя неизвестными, мы установим, что координаты точки K удовлетворяют уравнению гиперболы $y = \frac{1}{x}$.

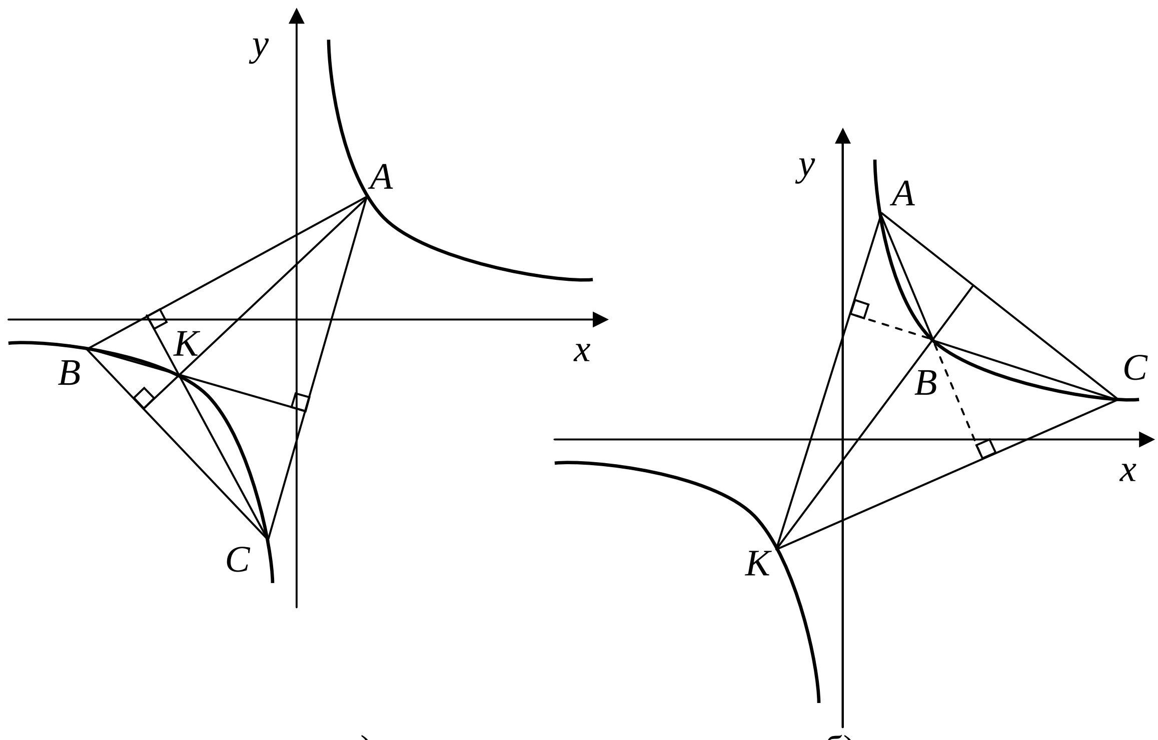


Рис. 9

Естественно, напрашивается некоторое обобщение этого факта. Учащимся, например, можно предложить провести исследование такого вопроса: «Обладают ли такими свойствами кривые, задаваемые уравнениями $y = \frac{ax+b}{cx+d}$?».

Далее целесообразно рассмотреть такой вопрос: «Не будут ли прямые, содержащие высоты треугольника, вписанного в график функции $y = a^x$, пересекаться в точке, лежащей на графике обратной функции $y = \log_a x$?».

Заметим, что исследование поставленных вопросов можно провести с помощью как чисто математических выкладок, так и компьютерного эксперимента.

Приведем в работе результаты исследования поставленного вопроса, проведенного учащимися Седельниковской средней школы

№ 1 Омской области под руководством Заслуженного учителя Российской Федерации Э.В. Молнина.

Задача № 1. Вершины треугольника ABC лежат на одной из ветвей гиперболы $y=\frac{1}{x}$, $A(1;\ 1)$, $B(0{,}5;\ 2)$, $C(4;\ 0{,}25)$. Найти точку пересечения высот треугольника ABC.

Решение

Областью определения будет множество значений $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Множеством значений функции – $y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Для нахождения точки пересечения высот треугольника воспользуемся уравнением прямой $y = kx + b$, уравнением прямой, проходящей через две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, свойством угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых $k \cdot k_1 = -1$ и решением системы уравнений $\begin{cases} y=kx+b \\ y=k_1x+b_1 \end{cases}$.

Составим уравнение прямой AB: $\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-1}{0{,}5-1}$, $\Rightarrow y = -2x + 3$ (1). Угловой коэффициент $k = -2$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB) $k_1 = 0{,}5$. Так как эта прямая должна пройти через точку С, то получаем $0{,}25 = 0{,}5 \cdot 4+ b$, $b = -1{,}75$, и уравнение $y = 0{,}5x - 1{,}75$ – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки С.

Составим уравнение прямой AC: $\frac{y-1}{0{,}25-1}=\frac{x-1}{4-1}$, $y = -0{,}25x + 1{,}25$, $k = -0{,}25$. Угловой коэффициент прямой перпендикулярной к прямой (AC) $k_1 = 4$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку B: $2 = 4 \cdot 0{,}5 + b_1$, $b_1= 0$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки B_0, будет $y = 4x$ (2).

Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2): $\begin{cases} y=-2x+3 \\ y=4x \end{cases}$.

Решив систему, получим $x = 0{,}5$, $y = 2$. $P(0{,}5;\ 2)$.

Проверим, будет ли эта точка P лежать на графике функции $y=\frac{1}{x}$. $2=\frac{1}{0{,}5} \Leftrightarrow 2 = 2$. Да, точка Р лежит на графике.

Итак, мы доказали, что если вершины треугольника ABC лежат на графике функции $y=\frac{1}{x}$, то и точка пересечения его высот также лежит на графике этой же функции.

Рассмотрев еще несколько задач, где вершины треугольника лежат на одной из ветвей гиперболы, получим тот же результат. Докажем это утверждение в общем виде.

Задача № 2. Вершины треугольника ABC лежат на одной из ветвей гиперболы $y=\frac{1}{x}$, $A\left(x_1;\frac{1}{x_1}\right)$, $B\left(x_2;\frac{1}{x_2}\right)$, $C\left(x_3;\frac{1}{x_3}\right)$. Найти точку пересечения высот треугольника ABC.

Решение

Областью определения будет множество значений $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Множеством значений функции – $y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Составим уравнение прямой AB: $\dfrac{y-\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y=-\frac{1}{x_1x_2}x+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. Угловой коэффициент $k=-\frac{1}{x_1x_2}$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), $k_1 = x_1x_2$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $\frac{1}{x_3}=x_1x_2x_3+b$, $b=\frac{1}{x_3}-x_1x_2x_3$ и уравнение $y=x_1x_2x+\frac{1}{x_3}-x_1x_2x_3$ (1) – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой AC: $\frac{y-\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}}=\frac{x-x_1}{x_3-x_1}$. Выполнив преобразования, мы найдем угловой коэффициент $k=-\frac{1}{x_1x_3}$. Угловой коэффициент прямой перпендикулярной к прямой (AC) $k_1 = x_1x_3$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку B: $\frac{1}{x_2}=x_1x_2x_3+b_1$, $b_1=\frac{1}{x_2}-x_1x_2x_3$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки B, будет уравнение $y=x_1x_3x+\frac{1}{x_2}-x_1x_2x_3$ (2).

Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y=x_1x_2x+\frac{1}{x_3}-x_1x_2x_3 \\ y=x_1x_3x+\frac{1}{x_2}-x_1x_2x_3 \end{cases}$$

Решив систему, получим $x=-\frac{1}{x_1x_2x_3}$, $y=-x_1x_2x_3$.

Проверим, будет ли эта точка P лежать на графике функции: $-x_1x_2x_3=\frac{1}{\left(-\frac{1}{x_1x_2x_3}\right)}$, $\Rightarrow$ $-x_1x_2x_3=-x_1x_2x_3$. Да, точка P лежит на графике.

Итак, мы доказали, что если вершины треугольника ABC лежат на графике функции $y=\frac{1}{x}$, то и точка пересечения его высот также лежат на графике этой же функции.

Задача № 3. Дана функция $y=\frac{4x+5}{2x+3}=2-\frac{1}{2x+3}$. На одной из ветвей ее лежат вершины треугольника *ABC*. Доказать, что точка пересечения его высот также лежит на графике этой же функции.

Решение

Областью определения будет множество значений $x\in(-\infty;-1{,}5)\cup(-1{,}5;+\infty)$.

Множеством значений функции – $y\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Вершины треугольника имеют координаты: $A(-1{,}75;\ 4)$, $B(-2;\ 3)$, $C(-4;\ 2{,}2)$.

Составим уравнение прямой *AB*: $\frac{y-3}{4-3}=\frac{x+2}{-1{,}75+2}$, $\Rightarrow y = 4x +11$. Угловой коэффициент $k = 4$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (*AB*), $k_1 = -0{,}25$. Так как эта прямая должна пройти через точку *C*, то получаем $2{,}2 = -0{,}25 \cdot (-4) + b$. $B = 1{,}2$, и уравнение $y = -0{,}25x + 1{,}2$ (1) – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника *ABC*, проведенной из точки *C*.

Составим уравнение прямой *AC*: $\frac{y-2{,}2}{4-2{,}2}=\frac{x+4}{-1{,}75+4}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = 0{,}8x + 5{,}4$, $k = 0{,}8$. Угловой коэффициент прямой перпендикулярной к прямой (*AC*) $k_1 = -1{,}25$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку *B*: $3 = -1{,}25 \cdot (-2) + b_1$, $b_1 = 0{,}5$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника *ABC*, проведенная из точки *B*, будет $y = -1{,}25x + 0{,}5$ (2). Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y=-0{,}25x+1{,}2 \\ y=-1{,}25x+0{,}5 \end{cases}.$$

Решив систему, получим $x = -0{,}7$, $y = 1{,}375$. $P\ (-0{,}7;\ 1{,}375)$.

Проверим, будет ли эта точка *P* лежать на графике функции $y=2-\frac{1}{2x+3}$. $1{,}375=2-\frac{1}{-1{,}4+3}$, $1{,}375=2-\frac{5}{8}$, $1{,}375 = 1{,}375$. Да, точка *P* лежит на графике.

Итак, мы доказали, что если вершины треугольника *ABC* лежат на графике дробно-линейной функции, то и точка пересечения его высот также лежит на графике этой же функции.

Задача № 4. Дана функция $y=\frac{3|x|-4}{2|x|-4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{|x|-2}$. На одной из ветвей ее лежат вершины треугольника *ABC*. Доказать, что точка пересечения его высот также лежит на графике этой же функции.

Решение

Областью определения будет множество значений $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

Множеством значений функции – $y\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$.

Вершины треугольника имеют координаты: $A(2{,}25;\ 5{,}5)$, $B(4;\ 2)$, $C(6;\ 1{,}75)$.

Для нахождения точки пересечения высот треугольника воспользуемся уравнением прямой $y = kx + b$, уравнением прямой, проходящей через две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, свойством угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых $k \cdot k_1 = -1$ и решением системы уравнений $\begin{cases} y=kx+b \\ y=k_1x+b_1 \end{cases}$.

Составим уравнение прямой *AB*: $\frac{y-2}{5{,}5-2}=\frac{x-4}{2{,}25-4}$, $\Rightarrow y = -2x + 10$. Угловой коэффициент $k = -2$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (*AB*), $k_1 = 0{,}5$. Так как эта прямая должна пройти через точку *C*, то получаем $1{,}75 = 0{,}5 \cdot 6 + b$. $b = -1{,}25$, и уравнение $y = 0{,}5x - 1{,}25$ (1) – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника *ABC*, проведенной из точки *C*.

Составим уравнение прямой *AC*: $\frac{y-1{,}75}{5{,}5-1{,}75}=\frac{x-6}{2{,}25-6}$, $y=-x+\frac{31}{4}$, $k = -1$. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (*AC*), $k_1 = 1$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку *B*:

$2 = 4 + b_1$ $b_1 = –2$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки B, будет $y = x – 2$ (2).

Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y = 0{,}5x - 1{,}25 \\ y = x - 2 \end{cases}.$$

Решив систему, получим $x = 1{,}5$, $y = –0{,}5$. $P(1{,}5; –0{,}5)$.

Проверим, будет ли эта точка P лежать на графике функции $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{|x| - 2}$. $-\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{|1{,}5| - 2}$, $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Да, точка P лежит на графике.

Итак, мы доказали, что если вершины треугольника ABC лежат на графике дробно-линейной функции, то и точка пересечения его высот также лежит на графике этой же функции.

Задача № 5. Функция $y = \frac{1}{1 - |x|}$. Треугольники ABC, $A(1{,}5; –2)$, $B(2; –1)$, $C(3; –0{,}5)$; $A_1B_1C_1$, $A_1(–2; –1)$, $B_1(–4; -\frac{1}{3})$, $C_1(–1{,}5; –2)$. Найти точку пересечения высот в каждом треугольнике.

Решение

Областью определения будет множество значений $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Множеством значений функции – $y \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

Составим уравнение прямой AB: $\frac{y + 2}{-1 + 2} = \frac{x - 1{,}5}{2 - 1{,}5}$, $\Rightarrow y = 2x – 5$. Угловой коэффициент $k = 2$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), $k_1 = –0{,}5$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $–0{,}5 = –0{,}5 \cdot 3 + b$, $b = 1$, и уравнение $y = –0{,}5x +1$ (1) – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой AC: $\frac{y + 2}{-0{,}5 + 2} = \frac{x - 1{,}5}{3 - 1{,}5}$, $\Rightarrow y = x – 3{,}5$. Угловой коэффициент $k = 1$. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AC), $k_1 = -1$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку B: $-1 = -2 + b_1$, $b_1 = 1$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки B, будет $y = -x + 1$ (2). Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y = -0{,}5x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}.$$

Решив систему, получим $x = 0$, $y = 1$. $P(0; 1)$.

Проверим, будет ли эта точка P лежать на графике функции $y = \dfrac{1}{1-|x|}$. $1 = \dfrac{1}{1-|0|} \Rightarrow 1 = 1$. Да, точка P лежит на графике этой функции.

Итак, мы доказали, что если вершины треугольника ABC лежат на графике дробно-линейной функции, то и точка пересечения его высот также лежит на графике этой же функции.

Повторив эти вычисления для точек $A_1B_1C_1$, мы убедимся, что и в этом треугольнике точка пересечения его высот будет лежать на графике этой же функции.

Теперь рассмотрим такие задачи, где две вершины треугольника совпадают с вершинами гиперболы, а третья произвольно лежит на одной из ветвей гиперболы.

Задача № 6. Дана функция $y = \dfrac{1}{x}$. На графике этой функции лежат вершины треугольника ABC. $A(-1; -1)$, $B(1; 1)$, $C(0{,}5; 2)$. Доказать, что точка P пересечения высот треугольника ABC также лежит на графике этой же функции.

Решение

Областью определения будет множество значений $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множеством значений функции – $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Составим уравнение прямой AB: $\dfrac{y+1}{2} = \dfrac{x+1}{2}$, $\Rightarrow y = x$. Угловой коэффициент $k = 1$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), $k_1 = -1$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $2 = -1 \cdot 0,5 + b$, $b = 2,5$, и уравнение $y = -x + 2,5$ (1) - это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой BC: $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-1}{0,5-1}$, $\Rightarrow y = -2x + 3$. Угловой коэффициент $k = -2$. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (BC), $k_1 = 0,5$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку A: $-1 = -0,5 + b_1$ $b_1 = -0,5$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки A, будет $y = 0,5x - 0,5$ (2). Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y = -x + 2,5 \\ y = 0,5x - 0,5 \end{cases}.$$

Решив систему, получим $x = 2$, $y = 0.5$. $N(2; 0,5)$.

Проверим, будет ли эта точка N лежать на графике функции $y = \frac{1}{x}$. $0,5 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow 0,5 = 0,5$. Мы убедились, что точка N лежит на графике этой функции.

Итак, мы доказали, что если вершины треугольника ABC лежат на графике функции, то и точка пересечения его высот также лежит на графике этой же функции.

Повторив эти вычисления для точек A, B, $C_1(0,25; 4)$, мы убедимся, что и в этом треугольнике точка пересечения его высот будет лежать на графике этой же функции.

А сейчас докажем, что это утверждение справедливо для любой точки $C(x_0, \frac{1}{x_0})$, лежащей на графике этой функции.

Решение

$A(-1; -1)$, $B(1; 1)$, $C(x_0, \frac{1}{x_0})$.

Составим уравнение прямой AB: $\frac{y+1}{2}=\frac{x+1}{2}$, $\Rightarrow y = x$. Угловой коэффициент $k = 1$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), $k_1 = -1$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $\frac{1}{x_0}=-1\cdot x_0+b$, $\Rightarrow$ $b=\frac{1}{x_0}+x_0$, и уравнение $y=-x+\left(\frac{1}{x_0}+x_0\right)$ (1) - это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой BC: $\frac{y-1}{\frac{1}{x_0}-1}=\frac{x-1}{x_0-1}$, $\Rightarrow$ $y=-\frac{1}{x_0}\cdot x+1+\frac{1}{x_0}$. Угловой коэффициент $k=-\frac{1}{x_0}$. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (BC), $k_1 = x_0$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку A: $-1 = -x_0 + b_1$, $b_1 = x_0 - 1$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки A, будет $y = x_0x + x_0 - 1$ (2). Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y=-x+\left(\frac{1}{x_0}+x_0\right). \\ y=x_0x+x_0-1 \end{cases}$$

Решив систему, получим $x=\frac{1}{x_0}$, $y = x_0$. $N(\frac{1}{x_0}; x_0)$.

Проверим, будет ли эта точка N лежать на графике функции $y=\frac{1}{x}$. $x_0=\frac{1}{\frac{1}{x_0}}$ $\Leftrightarrow x_0 = x_0$. Мы убедились, что точка N лежит на графике этой функции.

Задача № 7. Дана функция $y=\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$. Вершины $A(-2; 0)$ и $B(0; 2)$ треугольника ABC лежат в вершинах данной гиперболы, а третья вершина C лежит на одной из ветвей этой же гиперболы, то есть $C\left(x_0; \frac{x_0+2}{x_0+1}\right)$.

Решение.

Областью определения будет множество значений $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Множеством значений функции – $y \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Составим уравнение прямой AB: $\frac{y-0}{2} = \frac{x+2}{2}$, $\Rightarrow y = x + 2$. Угловой коэффициент $k = 1$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), $k_1 = -1$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $\frac{x_0+2}{x_0+1} = -1 \cdot x_0 + b$, $\Rightarrow$ $b = x_0 + \frac{x_0+2}{x_0+1}$, и уравнение $y = -x + \left(x_0 + \frac{x_0+2}{x_0+1}\right)$ (1) – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой BC: $\frac{y-2}{\frac{x_0+2}{x_0+1} - 2} = \frac{x-0}{x_0-0}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{x_0+1}x + 2$. Угловой коэффициент $k = -\frac{1}{x_0+1}$. Угловой коэффициент прямой перпендикулярной к прямой (BC) $k_1 = x_0 + 1$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку A: $0 = (x_0 + 1)(-2) + b_1$, $b_1 = 2(x_0 + 1)$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки A, будет $y = (x_0 + 1)x + 2(x_0 + 1)$ (2). Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y = -x + \left(x_0 + \frac{x_0+2}{x_0+1}\right) \\ y = (x_0+1)x + 2(x_0+1) \end{cases}.$$

Решив систему, получим $x = -\frac{x_0}{x_0+1}$, $y = x_0 + 2$, $N\left(-\frac{x_0}{x_0+1}; x_0+2\right)$.

Проверим, будет ли эта точка N лежать на графике функции $y=1+\dfrac{1}{x+1}$. $x_0+2=1+\dfrac{1}{-\dfrac{x_0}{x_0+1}+1}$ $\Leftrightarrow$ $x_0 + 2 = x_0 + 2$. Мы убедились, что точка N лежит на графике этой функции.

Итак, мы доказали, что если две вершины треугольника совпадают с вершинами гиперболы, а третья вершина движется по любой из ветвей гиперболы, то и точка пересечения высот каждого треугольника будет также двигаться по этой ветви гиперболы.

Обладают ли этим свойством высоты треугольника, с вершинами на графике, для других взаимно обратных функций? Оказалось, такие функции есть.

Задача № 8. Рассмотрим функции $y=\sqrt{|x|}$ и $y = x^2$.

Вершины треугольника ABC , $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(4;\ 2)$ лежат на графике функции $y=\sqrt{|x|}$. Докажем, что точка пересечения высот треугольника лежит на графике функции $y = x^2$

Решение

Областью определения будет множество значений $x\in(-\infty;+\infty)$.

Множеством значений функции – $y\in[0;+\infty)$.

Составим уравнение прямой AB: $\dfrac{y-0}{1-0}=\dfrac{x-0}{1-0}$, $\Rightarrow$ $y = x$. Угловой коэффициент $k = 1$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), $k_1 = –1$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $2 = –1 \cdot 4 + b$, $b = 6$, и уравнение $y = –x – 6$ – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой AC: $\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{x-0}{4-0}$, $\Rightarrow$ $y = 0{,}5x$, $k = 0{,}5$. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AC), $k_1 = –2$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку B:

$1 = -2 \cdot 1 + b_1$ $b_1 = 3$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки B, будет $y = -2x + 3$. (2)

Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2): $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$.

Решив систему, получим $x = -3$, $y = 9$. $P(-3; 9)$.

Проверим, будет ли эта точка P лежать на графике функции $y = x^2$ $9 = (-3)^2 \Leftrightarrow 9 = 9$. Да, точка P лежит на графике функции $y = x^2$.

А сейчас рассмотрим треугольник AB_1C_1 при $x < 0$ с координатами: $A(0; 0)$, $B_1(-1; 0)$, $C_1(-4; 0)$.

Проделав все вычисления, аналогичные предыдущим, получим, что точка P принадлежит графику $y = x^2$.

Рассмотрим случай, когда вершины треугольника ABC будут иметь координаты: $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, а $C(x_0; \sqrt{|x_0|})$, где $x_0 > 0$, C – произвольная точка графика функции $y = \sqrt{|x|}$.

Составим уравнение прямой AB: $\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-0}{1-0}$, $\Rightarrow$ $y = x$. Угловой коэффициент $k = 1$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), $k_1 = -1$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $\sqrt{|x_0|} = -x_0 + b$, $b = \sqrt{|x_0|} + x_0$, и уравнение $y = -x + x_0 + \sqrt{|x_0|}$ (1) – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой AC: $\frac{y-0}{\sqrt{|x_0|}-0} = \frac{x-0}{x_0-0}$, $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{\sqrt{|x_0|}}x$.

Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AC), $k_1 = -\sqrt{|x_0|}$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку B: $1 = -\sqrt{|x_0|} + b_1$ $b_1 = 1 + \sqrt{|x_0|}$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки B, будет : $y = -\sqrt{|x_0|}\,x + 1 + \sqrt{|x_0|}$. (2)

Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y = -x + x_0 + \sqrt{|x_0|} \\ y = -\sqrt{|x_0|}x + 1 + \sqrt{|x_0|} \end{cases}.$$

Решив систему, получим $x = -\left(\sqrt{|x_0|} + 1\right)$, $y = \left(\sqrt{|x_0|} + 1\right)^2$

Мы получили точку пересечения высот $P(-\left(\sqrt{|x_0|} + 1\right); \left(\sqrt{|x_0|} + 1\right)^2)$.

Проверим, будет ли эта точка P лежать на графике функции $y = x^2$. $\left(\sqrt{|x_0|} + 1\right)^2 = \left(-\left(\sqrt{|x_0|} + 1\right)\right)^2$. Да, точка P лежит на графике функции $y = x^2$.

А теперь рассмотрим, что будет, если вершины треугольника будут лежать на одной из ветвей параболы, то есть при $x \le 0$ или $x \ge 0$.

Задача № 9. Дана функция $|y| = \sqrt{|x|}$ и ей обратная $y = x^2$ при $x \ge 0$. На графике функции $y = x^2$ лежат вершины треугольника ABC с координатами: $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(2; 4)$. Докажем, что точка пересечения высот треугольника лежит на графике функции $|y| = \sqrt{|x|}$.

Решение

Областью определения будет множество значений $x \in (-\infty; +\infty)$.

Множеством значений функции – $y \in (-\infty; +\infty)$.

Составим уравнение прямой AB: $\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-0}{1-0}$, $\Rightarrow y = x$. Угловой коэффициент $k = 1$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), $k_1 = -1$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $4 = -1 \cdot 2 + b$, $b = 6$, и уравнение $y = –x + 6$ (1) – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой АС: $\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-0}{2-0}$, $\Rightarrow y = 2x$, $k = 2$. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AC), $k_1 = -0,5$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку B: $1 = -0,5 \cdot 1 + b_1$, $b_1 = 1,5$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки B, будет $y = –0,5x + 1,5$. (2)

Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2): $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = -0{,}5x + 1{,}5 \end{cases}$.

Решив систему, получим $x = 9$, y =–3. P (9; –3).

Проверим, будет ли эта точка P лежать на графике функции $|y| = \sqrt{|x|}$. $|-3| = \sqrt{|9|}$ $\Leftrightarrow$ 3 = 3. Да, точка P лежит на графике функции .

Аналогично доказывается и при $x \leq 0$. Утверждение остается справедливым. Мы также рассмотрели показательную и ей обратную логарифмическую функции и обнаружили, что можно найти такой треугольник, вершины которого будут лежать на графике одной из этих функций, а точка пересечения его высот будет лежать на графике функции, ей обратной.

Задача № 10. Дана функция $y = 2^x + 6$ и ей обратная функция $y = \log_2(x - 6)$. На графике функции $y = 2^x + 6$ лежат вершины треугольника ABC с координатами: A(0; 7), B(2; 10), C(1; 8). Докажем, что точка пересечения высот треугольника лежит на графике функции $y = \log_2(x - 6)$.

Решение

Составим уравнение прямой AB: $\frac{y-7}{10-7} = \frac{x-0}{2-0}$, $\Rightarrow$ $y = \frac{3}{2}x + 7$. Угловой коэффициент k = 1,5. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AB), k_1 = $-\frac{2}{3}$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $8 = -\frac{2}{3} + b$, $b = 8\frac{2}{3}$, и уравнение $y = -\frac{2}{3}x + 8\frac{2}{3}$ – (1) – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой AC: $\frac{y-7}{8-7} = \frac{x-0}{1-0}$, $\Rightarrow y = x + 7$, k = 1. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AC), k_1 = –1. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку B:

$10 = -1 \cdot 2 + b_1$ $b_1 = 12$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника *ABC*, проведенная из точки *B*, будет $y = -x + 12$. (2)

Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 8\frac{2}{3} \\ y = -x + 12 \end{cases}.$$

Решив систему, получим $x = 10$, $y = 2$; $P(10; 2)$.

Проверим, будет ли эта точка P лежать на графике функции $y = \log_2(x-6)$. $2 = \log_2(10 - 6) \Rightarrow 2 = 2$. Да, точка P лежит на графике функции $y = \log_2(x-6)$.

Выбор других треугольников с вершинами на графике одной функции показал, что других треугольников, обладающих таким свойством, нет. Отсюда мы сделали вывод: для показательной и ей обратной логарифмической функций можно найти только один такой треугольник (этот вывод требует более глубокого анализа).

Задача №11. Вершины треугольника ABC лежат на одной из ветвей гиперболы $y = \frac{1}{x+a}$, $A(x_1;\ \frac{1}{x_1+a})$, $B(x_2;\ \frac{1}{x_2+a})$, $C(x_3;\ \frac{1}{x_3+a})$. Найти точку пересечения высот треугольника *ABC*.

Решение

Областью определения будет множество значений $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$.

Множеством значений функции – $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Составим уравнение прямой *AB*: $\dfrac{y - \frac{1}{x_1+a}}{\frac{1}{x_2+a} - \frac{1}{x_1+a}} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{(x_1+a)(x_2+a)}x + \dfrac{x_1}{(x_1+a)(x_2+a)} + \dfrac{1}{x_1+a}$. Угловой коэффициент $k = -\dfrac{1}{(x_1+a)(x_2+a)}$. Тогда угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (*AB*), $k = (x_1+a)(x_2+a)$. Так как эта прямая должна пройти через точку C, то получаем $\frac{1}{x_3+a}=(x_1+a)(x_2+a)x_3+b$, $b=-\frac{1}{x_3+a}+(x_1+a)(x_2+a)x_3$, и уравнение $y=(x_1+a)(x_2+a)x+\frac{1}{x_3+a}-(x_1+a)(x_2+a)x_3$ – это уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенной из точки C.

Составим уравнение прямой AC: $\frac{y-\frac{1}{x_1+a}}{\frac{1}{x_3+a}-\frac{1}{x_1+a}}=\frac{x-x_1}{x_3-x_1}$. Выполнив преобразования, мы найдем угловой коэффициент $k=-\frac{1}{(x_1+a)(x_3+a)}$. Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной к прямой (AC), $k=(x_1+a)(x_3+a)$. Найдем b_1 для прямой, проходящей через точку B: $\frac{1}{x_2+a}=(x_1+a)(x_3+a)x_2+b_1$, $b_1=-\frac{1}{x_2+a}+(x_1+a)(x_3+a)x_2$. Уравнением прямой, на которой лежит высота треугольника ABC, проведенная из точки B, будет уравнение

$$y=(x_1+a)(x_3+a)x+\frac{1}{x_2+a}-(x_1+a)(x_3+a)x_2. \qquad (2)$$

Найдем точку пересечения этих прямых (1) и (2):

$$\begin{cases} y=(x_1+a)(x_2+a)x+\frac{1}{x_3+a}-(x_1+a)(x_2+a)x_3 \\ y=(x_1+a)(x_3+a)x+\frac{1}{x_2+a}-(x_1+a)(x_3+a)x_2 \end{cases}$$

Решив систему

$$x=-\left(a+\frac{1}{(x_1+a)(x_2+a)(x_3+a)}\right),\ y=-(x_1+a)(x_2+a)(x_3+a),$$

получим Р$\left(-\left(a+\frac{1}{(x_1+a)(x_2+a)(x_3+a)}\right);-(x_1+a)(x_2+a)(x_3+a)\right)$.

Проверим, будет ли эта точка Р лежать на графике функции:

$$-(x_1+a)(x_2+a)(x_3+a)=\frac{1}{-\left(a+\frac{1}{(x_1+a)(x_2+a)(x_3+a)}\right)+a}, \qquad \Rightarrow$$

$-(x_1+a)(x_2+a)(x_3+a)=-(x_1+a)(x_2+a)(x_3+a)$. Да, точка P лежит на графике.

Итак, мы доказали, что если вершины треугольника ABC лежат на графике функции $y=\frac{1}{x+a}$, то и точка пересечения его высот также лежит на графике этой же функции.

Проделав данную работу, мы сделали вывод, что любое первоначальное высказывание о свойстве точек пересечения высот треугольника с вершинами, лежащими на графике какой-то функции, справедливо для функции обратно пропорциональной зависимости, для дробно-линейных функций, дробно-линейных функций, содержащих модуль, для функции $y=\frac{1}{x}$, где две вершины треугольника совпадают с вершинами гиперболы, а третья вершина движется по любой ветви гиперболы, а точка пересечения высот каждого треугольника также движется по этой ветви гиперболы, для других взаимнообратных функций. А для показательной функции и ей обратной логарифмической функции можно найти только один треугольник, у которого вершины будут лежать на графике данной функции и точка пересечения высот будет также лежать на графике этой функции.

2. Можно ли вписать в графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$, где $0 < a < a^{-e}$ ($e^{-e} \approx 1/15$), равнобедренный треугольник, такой, что его вершины принадлежат одновременно этим графикам?

В других терминах сходная задача выглядит следующим образом: всегда ли уравнение $a^x = \log_a x$ при $0 < a < a^{-e}$ имеет три корня?

3. Точка M движется по сторонам квадрата (рис. 10). По аналогии с известными тригонометрическими функциями введем новые функции:

$$\text{san}\,\alpha = x - y,\ \text{cas}\,\alpha = x + y,\ \text{tig}\,\alpha = x^2 - y^2.$$

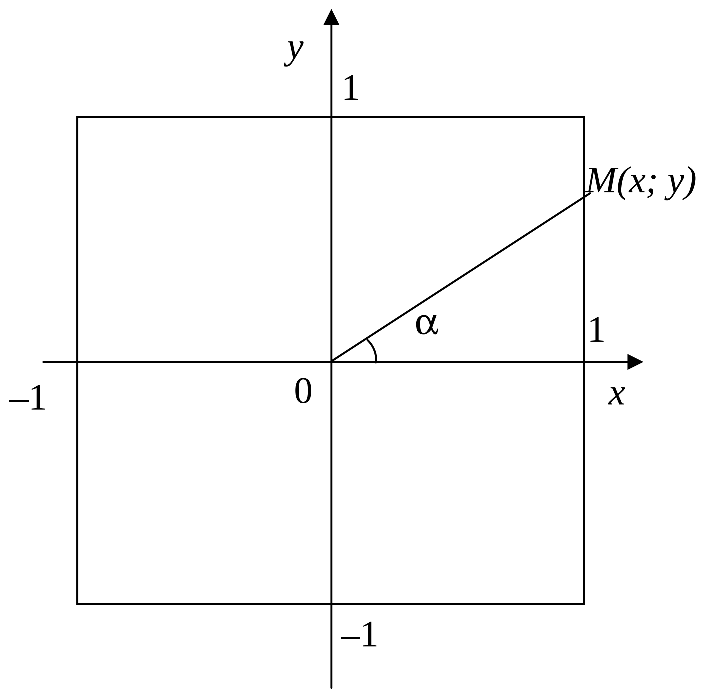


Рис. 10

Установите связи между этими функциями (по аналогии с обычными $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$) и постройте их графики.

4. Введем понятие антипериодической функции: функция $y = f(x)$ называется антипериодической, если существует такое число $T \neq 0$ что для всех значений аргумента x из области определения функции, имеет место равенство: $f(x + T) = -f(x)$.

Учащимся можно предложить дать ответ на такие вопросы:

а) Какой будет сумма (разность) двух антипериодических функций?

б) Каким будет произведение (частное) двух антипериодических функций?

в) Какой будет сумма (разность) двух функций, одна из которых периодическая, а другая – антипериодическая?

г) Каким будет произведение (частное) двух функций, одна из которых периодическая, а другая – антипериодическая?

д) Какой будет суперпозиция двух функций $y = f(g(x))$, одна из которых периодическая, а другая – антипериодическая?

Ранее мы только формулировали проблемы, которые могут стать гипотезами исследования. Теперь же покажем, как можно проводить исследование гипотез, как естественно они могут вырастать из простых вопросов, постепенно усложняясь и доходя до весьма сложных проблем.

5. 1) Сократите дроби:

а) $\frac{3737373737}{8181818181}$;

б) $\frac{56056056056}{73073073073}$;

в) $\frac{25302530253023}{49504950495045}$.

Решение

а) $\frac{3737373737}{8181818181}=\frac{37\cdot 101010101}{81\cdot 101010101}=\frac{37}{81}$;

б) $\frac{56056056056}{73073073073}=\frac{56\cdot 1001001001}{73\cdot 1001001001}=\frac{56}{73}$;

в) $\frac{25302530253023}{49504950495045}=\frac{23\cdot 1100110011001}{45\cdot 1100110011001}=\frac{23}{45}$.

2) Сократите нижеуказанные дроби самостоятельно и, проанализировав все решения, сделайте некоторые обобщения:

а) $\frac{532800532800532800 48}{854700854700854700 77}$;

б) $\frac{2800028000280 0028}{6700067000670 0067}$;

в) $\frac{133320001333200012}{277750002777500025}$.

6. Какая из дробей больше $\frac{200420043}{200420047}$ или $\frac{200520053}{200520057}$?

Решение

Будем сравнивать не сами числа, а их дополнения до единицы. $\frac{4}{200520057}<\frac{4}{200420047}$, откуда $\frac{200420043}{200420047}<\frac{200520053}{200520057}$.

Этим же способом сравните дроби:

а) $\dfrac{1234567895}{1234567897}$ и $\dfrac{2345678905}{2345678907}$;

б) $\dfrac{1231451678}{1231451679}$ и $\dfrac{2132452678}{2132452679}$;

в) $\dfrac{989898987}{989898989}$ и $\dfrac{878787877}{878787879}$.

7. Сравните числа:

а) $\dfrac{1998}{2000}$ и $\dfrac{19981999}{20002001}$;

б) $\dfrac{1234567890}{2345678901}$ и $\dfrac{1234567892}{2345678903}$;

в) $\dfrac{88888884}{88888887}$ и $\dfrac{99999995}{99999998}$;

г) $\dfrac{10^{1998}-1}{10^{1999}-1}$ и $\dfrac{10^{1999}-1}{10^{2000}-1}$;

д) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2000}+k\right)^3+4000}{\sqrt[3]{2000}+k}$ и $3\cdot\sqrt[3]{4000000}$, где $k>0$;

е) $\dfrac{23^{2004}+1}{23^{2005}+6}$ и $\dfrac{23^{2005}+6}{23^{2006}+38}$.

Учащиеся знают несколько способов сравнения чисел:

– путем умножения числителя и знаменателя на соответствующее число уравнять знаменатели и, сравнивая числители, дать ответ на поставленный вопрос;

– составить разность этих числе и по знаку этой разности дать ответ;

– найти отношение этих чисел и сравнить его с единицей;

– разделить у каждой дроби числитель на знаменатель и сравнить результаты.

В применении к предложенным числам ни один из перечисленных способов не является рациональным. Каждый требует громоздких вычислений. Выход из создавшегося положения мы сможем найти, если откажемся от привычных действий. Покажем, как это может быть сделано.

а) Введем обозначения $a = 1998$, $b = 2000$, тогда

$$19981999 = 19980000 + 1999 = 19980000 + 1998 + 1 =$$
$$= a \cdot 10000 + a + 1 = 10001 \cdot a + 1,$$
$$20002001 = 20000000 + 2001 = 20000000 + 2000 + 1 =$$
$$= b \cdot 10000 + b + 1 = 10001 \cdot b + 1.$$

Сравниваем такие две дроби:

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{10001a+1}{10001b+1}.$$

Пока мы не знаем, какой знак неравенства нужно поставить между ними, будем писать знак «$\vee$», заменяющий союз «или». Умножив обе части неравенства на произведение знаменателей $b(10001b + 1)$, сведем сравнение дробей к сравнению выражений с целыми коэффициентами.

Итак, что больше: $\frac{a}{b} \vee \frac{10001a+1}{10001b+1}$?

$$a(10001a + 1) \vee b(10001b + 1), \text{ т.е. } a \vee b.$$

Но так как $a < b$ (это видно из условия задачи), то окончательно имеем $\frac{1998}{2000} < \frac{19981999}{20002001}$.

б) Введем обозначения $a = 1234567890$, $b = 2345678901$. Тогда

$$1234567892 = 1234567890 + 2 = a + 2,$$
$$2345678903 = 2345678901 + 2 = b + 2.$$

Следовательно, сравниваются дроби

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{a+2}{b+2},$$

что сводится к сравнению выражений

$$a(b + 2) \vee b(a + 2),\ 2a \vee 2b,\ a \vee b.$$

Но по условию $a < b$, а значит, $\frac{1234567890}{2345678901} < \frac{1234567892}{2345678903}$.

в) Введем обозначение $a = 11111111$, тогда

$$88888884 = 88888888 - 4 = 8a - 4,$$
$$88888887 = 88888888 - 1 = 8a - 1,$$
$$99999995 = 99999999 - 4 = 9a - 4,$$
$$99999998 = 99999999 - 1 = 9a - 1.$$

Таким образом, нужно ответить на вопрос, что больше

$$\frac{8a-4}{8a-1} \vee \frac{9a-4}{9a-1}?$$

Он сводится (учитывая, что $a > 1$) к сравнению выражений:

$$(8a-4)(9a-1) \vee (9a-4)(8a-1),$$
$$72a^2 - 8a - 36a + 4 \vee 72a^2 - 9a - 32a + 4,$$
$$-44a \vee -41a.$$

Так как $a > 0$, то $-44a < -41a$, а значит, $\frac{88888884}{88888887} < \frac{99999995}{99999998}$.

г) Введем, как это было в трех предыдущих случаях, обозначения: $a = 10^{1998}$, тогда

$$10^{1999} = 10^{1998} \cdot 10 = 10 \cdot a,$$
$$10^{2000} = 10^{1999} \cdot 10 = 10 \cdot a \cdot 10 = 100 \cdot a.$$

Таким образом? (учитывая, что $a > 1$), нужно поставить верный знак неравенства между дробями

$$\frac{a-1}{10a-1} \vee \frac{10a-1}{100a-1},$$
$$(a-1)(100a-1) \vee (10a-1)^2,$$
$$100a^2 - a - 100a + 1 \vee 100a^2 - 20a + 1,$$
$$-100a \vee -20a.$$

По условию $a > 0$, тогда $-100a < -20a$, а значит,

$$\frac{10^{1998}-1}{10^{1999}-1} < \frac{10^{1999}-1}{10^{2000}-1}.$$

д) Два сравниваемых числа могут находиться в одном из трех возможных соотношений: либо первое число равно второму, либо первое число больше второго, либо первое число меньше второго. Не зная пока, каково соотношение между этими двумя числами, используем, как и прежде, знак «$\vee$»:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{2000}+k\right)^3+4000}{\sqrt[3]{2000}+k} \vee 3\cdot\sqrt[3]{4000000},\ k>0.$$

Каково бы ни было соотношение между сравниваемыми числами, такое же соотношение останется и между произведениями, которые получаются, если сравниваемые числа умножить на знаменатель первого из них (этот знаменатель положительный):

$$\left(\sqrt[3]{2000}+k\right)^3+4000 \vee 3\cdot\sqrt[3]{4000000}\cdot\left(\sqrt[3]{2000}+k\right),$$

$$2000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k+3\cdot\sqrt[3]{2000}\cdot k^2+k^3+4000 \vee 3\cdot\sqrt[3]{2000^3}+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k,$$

$$\left(6000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k\right)+k^2\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{2000}+k\right) \vee 6000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k.$$

При любых $k > 0$ левая часть полученного соотношения больше его правой части. Таким образом, знак «$\vee$» надо заменить знаком «>», то есть

$$\left(6000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k\right)+k^2\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{2000}+k\right) > 6000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k.$$

Переходя от полученного соотношения последовательно к предыдущим соотношениям, можно установить, что при любых $k > 0$ имеем: $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2000}+k\right)^3+4000}{\sqrt[3]{2000}+k} > 3\cdot\sqrt[3]{4000000}$.

е) Воспользуемся подстановкой $23^{2004}=m$. Будем иметь дроби: $\dfrac{m+1}{23m+6}$ и $\dfrac{23m+6}{529m+38}$. Составим разность дробей и преобразуем ее:

$$\frac{m+1}{23m+6}-\frac{23m+6}{529m+38}=\frac{(m+1)(529m+38)-(23m+6)^2}{(23m+6)(529m+38)}=$$

$$=\frac{529m^2+38m+529m+38-529m^2-276m-36}{(23m+6)(529m+38)}=\frac{291m+2}{(23m+6)(529m+38)}$$

Учитывая, что $m > 0$, можем сделать вывод о том, что последняя дробь (а она есть разность первой и второй исходных дробей) положительна, а значит первая дробь больше второй.

2) Сравните самостоятельно дроби:

а) $\dfrac{30^{2002}-7}{30^{2003}-7}$ и $\dfrac{30^{2003}-7}{30^{2004}-7}$;

б) $\dfrac{11111115}{11111116}$ и $\dfrac{22222225}{22222224}$;

в) $\dfrac{2002}{2003}$ и $\dfrac{20022003}{20032004}$;

г) $\dfrac{7887887}{9889889}$ и $\dfrac{4554554}{6556556}$;

д) $\dfrac{7666667}{8555558}$ и $\dfrac{4333334}{5222225}$.

8. Учащимся по программе показывают основное свойство пропорции, а именно:

$$\text{если } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ то } a\cdot d=b\cdot c.$$

Полезно рассмотреть с ними и производные свойства пропорций:

а) если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ и $\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

Эти свойства легко доказываются. Пусть задана верная пропорция $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, докажем равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}$. Перемножая крайние, а затем и средние члены пропорции, получаем $a\cdot b+c\cdot b=a\cdot b+a\cdot d$, откуда $c\cdot b=a\cdot d$. Но последнее равенство верное, а значит, верно и доказываемое равенство.

б) Из цепочки пропорций $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{k}{m}=\dfrac{l}{n}=\ldots=\dfrac{r}{s}$ можно вывести следующие равенства:

$$\frac{a+c+k+l+\ldots+r}{b+d+m+n+\ldots+s}=\frac{a-c-k-l-\ldots-r}{b-d-m-n-\ldots-s}=\ldots=$$
$$=\frac{a+c-k+l-\ldots+r}{b+d-m+n-\ldots+s}=\frac{a-c-k+l+\ldots+r}{b-d-m+n+\ldots+s}=\frac{a}{b}.$$

Эти производные свойства пропорций учащиеся затем смогут применить при изучении теоремы синусов.

Известно, что $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$, где R – радиус описанной около треугольника окружности. Используя производные свойства пропорций, получаем $\dfrac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=2R$, откуда $\dfrac{a+b+c}{2}=R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$. В левой части последнего равенства стоит полупериметр (P) треугольника, и тогда

$$P=R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma).$$

Значит, площадь треугольника можно вычислить по формуле

$$S_\Delta=P\cdot r=R\cdot r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

где r – радиус вписанной в треугольник окружности.

9. Пусть имеем $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}$.

Докажите самостоятельно следующее свойство пропорции: $\dfrac{\sqrt{a_1a_2}}{\sqrt{b_1b_2}}=\dfrac{\sqrt{a_1a_{100}}}{\sqrt{b_1b_{100}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a_1a_9a_{101}}}{\sqrt[3]{b_1b_9b_{101}}}=\dfrac{\sqrt[4]{a_4a_{24}a_{1003}a_{10006}}}{\sqrt[4]{b_4b_{24}b_{1003}b_{10006}}}=\ldots=\dfrac{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}=\dfrac{a_1}{b_1}$.

10. При изучении квадратных уравнений учащиеся могут провести ряд учебных исследований. Наметим два из них.

1) Установить, что произойдет с корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, если поменять местами коэффициенты a и c?; поменять знак коэффициента b?

Дадим ответы на поставленные вопросы (Ответ на первый вопрос: получится уравнение, корни которого обратны корням данного уравнения. Ответ на второй вопрос: получится уравнение, корни которого противоположны корням исходного уравнения).

2) Найти общую форму записи уравнений

$$2x^2+5x+2=0 \qquad \left(x_1=-2,\ x_2=-\frac{1}{2}\right),$$

$$3x^2-10x+3=0 \qquad \left(x_1=3,\ x_2=\frac{1}{3}\right),$$

$$4x^2+17x+4=0 \qquad \left(x_1=-4,\ x_2=-\frac{1}{4}\right),$$

$$5x^2-26x+5=0 \qquad \left(x_1=5,\ x_2=\frac{1}{5}\right)$$

и сделать выводы о корнях квадратного уравнения в зависимости от коэффициентов уравнения.

Учащиеся смогут выдвинуть гипотезу о том, что если уравнение имеет вид $ax^2 \pm (a^2+1)x + a = 0$, то его корнями являются соответственно числа $\frac{1}{a}$, a (для случая, когда второй коэффициент отрицательный) или $-\frac{1}{a}$, $-a$ (для случая, когда второй коэффициент положительный).

Затем эта гипотеза доказывается.

Рассмотрим уравнение $ax^2 + (a^2+1)x + a = 0$ и найдем его корни:

$$x_{1,2} = \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2}}{2a} = \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} =$$
$$= \frac{-(a^2+1) \pm |a^2-1|}{2a}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что перед нами квадратное уравнение с целыми коэффициентами (даже если бы они были дробными, уравнение можно было бы свести к уравнению с целыми коэффициентами), то есть $a \in Z$, и тогда $a^2 - 1 > 0$, а значит, $x_{1,2} = \frac{-(a^2+1) \pm (a^2-1)}{2a}$, откуда $x_1 = -a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

11. Можно найти такие пары чисел, разность которых равна их произведению. Приведем примеры:

а) $\frac{4}{5} - \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 9}$;

б) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4}$;

в) $\frac{3}{5} - \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 8}$.

Определите вид этих чисел.

Ответ: $\frac{m}{n} - \frac{m}{n+m} = \frac{m \cdot m}{n \cdot (n+m)}$.

12. Может ли квадрат гипотенузы равняться сумме катетов прямоугольного треугольника? Вопрос, казалось бы, странный, ибо известна теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$. Но рассмотрим такие примеры:

1) $a = 0{,}4;\ b = 1{,}2.\ a^2 = 0{,}16;\ b^2 = 1{,}44,$

$a^2 + b^2 = 0{,}16 + 1{,}44 = 1{,}6,$

$a + b = 0{,}4 + 1{,}2 = 1{,}6,$ *откуда*

$(0{,}4)^2 + (1{,}2)^2 = 0{,}4 + 1{,}2.$

2) $a = \frac{3}{5};\ b = \frac{6}{5}.\ a^2 = \frac{9}{25};\ b^2 = \frac{36}{25},$

$a^2 + b^2 = \frac{9}{25} + \frac{36}{25} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5},$

$a + b = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{9}{5},$ *откуда*

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}.$

3) $a = \frac{10}{13};\ b = \frac{15}{13}.\ a^2 = \frac{100}{169};\ b^2 = \frac{225}{169},$

$a^2 + b^2 = \frac{100}{169} + \frac{225}{169} = \frac{325}{169} = \frac{25}{13},$

$a + b = \frac{10}{13} + \frac{15}{13} = \frac{25}{13},$ *откуда*

$\left(\frac{10}{13}\right)^2 + \left(\frac{15}{13}\right)^2 = \frac{10}{13} + \frac{15}{13}.$

Найти пары чисел, для которых выполняется равенство: $a^2 + b^2 = a + b$.

Ответ: $a = \frac{n^2 + nk}{n^2 + k^2};\ b = \frac{k^2 + nk}{n^2 + k^2},$ *где* $n \in N, k \in N.$

13. Задана тригонометрическая функция

$$f(x) = A\sin ax + B\sin bx + C\cos cx,$$

где $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ и a, b, c рациональные положительные числа. Докажите, что если $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}$ – рациональные числа, то период заданной функции *f(x)* равен общему кратному периодов функций, являющиеся слагаемыми, входящие в формулу, задающую функцию *f(x)*.

14. Докажите формулу для «сложного» квадратного корня $\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$.

Указание: реализуйте тригонометрическую идею получения этой формулы, используя следующие равенства:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right);$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right),$$

где $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; выражение $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ преобразуйте с помощью тригонометрической подстановки $b = a^2 \cos^2 \alpha$.

Эту формулу имеет смысл применять лишь тогда, когда $A^2 - B$, является точным квадратом. Например, разности 36 – 20 = 16, 25 – 24 = 1 являются точными квадратами. Поэтому выражения $\sqrt{6+\sqrt{20}}$, $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ могут быть легко упрощены:

а) $\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{16}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{16}}{2}} = \sqrt{5}+1;$

б) $\sqrt{5-\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{25-24}}{2}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{25-24}}{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$

15. Выведите из определений четной и нечетной функций следующие свойства:

а) сумма или разность двух четных (нечетных) функций есть четная (нечетная) функция;

б) произведение или частное двух одинаковых по четности функций есть четная функция;

в) произведение или частное двух разных по четности функций есть нечетная функция;

г) композиция двух функций одинаковой четности есть функция той же четности;

д) композиция двух функций разной четности есть функция четная;

е) если внутренняя функция четная, то ее композиция с произвольной внешней функцией есть функция четная.

Обобщите эти свойства, доказав следующие утверждения:

а) алгебраическая сумма конечного числа функций одинаковой четности есть функция той же четности;

б) произведение конечного числа четных функций есть четная функция;

в) произведение четного числа нечетных функций есть четная функция;

г) произведение нечетного числа нечетных функций есть нечетная функция.

16. Замечательные отрезки в трапеции (рис. 11).

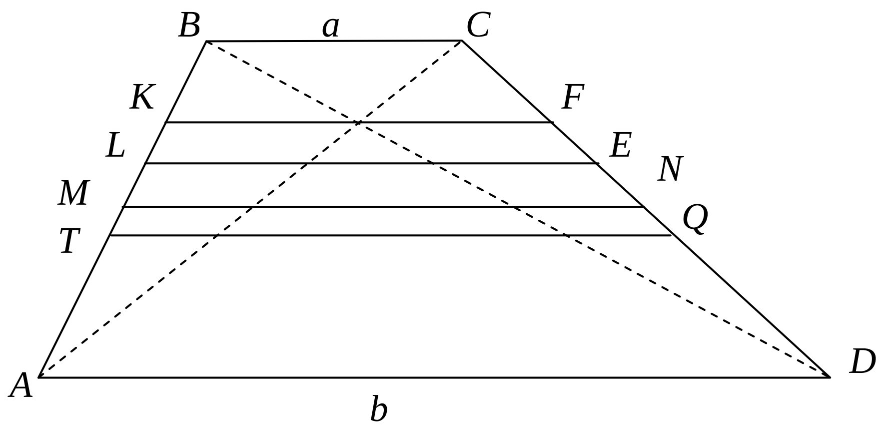


Рис. 11

Докажите, что последовательность проведенных отрезков в произвольной трапеции такова:

$$BC<KF<LE<MN<TQ<AD.$$

Докажите, что имеют место неравенства:

$$a<\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{a\cdot b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<b.$$

Заметим, что KF – среднее гармоническое (отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей); LE – отрезок, делящий трапецию на две подобные; MN – средняя линия трапеции; TQ – отрезок, делящий трапецию на две равновеликие трапеции.

17. Рассмотрим арифметическую прогрессию, у которой первый член равен 15873 и разность прогрессии также равна 15873. Запишем несколько членов прогрессии: 15873; 31746; 47619; 63492; 79365; 95238; …. Умножим члены прогрессии на 7 (почти «шоковое состояние») получим: 111111; 222222; 333333; 444444; 555555; …. Почему?

На вопрос легко ответить, например, возьмем пятый член прогрессии. Умножая на 7, получаем число, все цифры которого – 5. Это получается в связи с небольшим «секром»: $79365 \cdot 7 = (5 \cdot 15873) \cdot 7 = 5 \cdot (15873 \cdot 7) = 5 \cdot 111111 = 555555$.

18. Арифметические прогрессии с переменными разностями (см. работу В.А. Далингер, О.О.Князева, О.И. Муравская Арифметические прогрессии с переменными разностями: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1998. – 100с.).

В школьном курсе математики рассматриваются лишь арифметические прогрессии с постоянными разностями $d = const$. Понятие арифметической прогрессии допускает совершенно естественное обобщение, если положить, что разность арифметической прогрессии сама будет являться функцией натурального аргумента, то есть $d_n = d(n)$. В таком случае мы будем иметь дело с арифметическими прогрессиями с переменными разностями. Изучение таких прогрессий следует вести по той же схеме, что и изучение обычных арифметических прогрессий: формула общего члена, формула суммы n первых членов прогрессии, характеристическое свойство и т.п.

Многие известные последовательности являются арифметическими прогрессиями с переменной разностью. Например, фигурные (многоугольные и пирамидальные) числа, показательные последовательности, некоторые возвратные последовательности, последовательность степеней натуральных чисел.

Определение: Числовая последовательность, члены которой, начиная со второго, определяются по формуле: $a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$, где $d_n = d(n)$ – функция натурального аргумента, называется арифметической прогрессией с переменной разностью.

Имеет место следующий факт: в случае, когда закон изменения разности d_n задается произвольно, последовательность частичных сумм любой последовательности есть ни что иное, как арифметическая прогрессия с переменной разностью. Получается довольно общая ситуация. Это заставляет на первых этапах изучения арифметических прогрессий с переменными разностями рассматривать более частные случаи. Например, ограничить свой выбор закона изменения разности d_n.

1) Рассмотрим различные случаи, когда разность прогрессии имеет рациональный вид:

а) $d_n = n$, $a_1 = 1$ (получим известную последовательность треугольных чисел);

б) $d_n = \dfrac{1}{n(n-1)}, a_1 = 1$ (получим гармонический ряд $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n}, ...$);

в) $d_n = 2^{n-1}$, $a_1 = 2$ (получим последовательность степеней, показателями которых являются натуральные числа $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$);

2) Дадим определения:

- арифметической прогрессией 1-го порядка называется последовательность $\{a_n\}$, члены которой, начиная со второго, определяются по формуле $a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$, где $d_n = b_0 + b_1 n$;

- арифметическая прогрессия с переменной разностью называется прогрессией k-го порядка, если ее разность d_n имеет рациональный вид, то есть $d_n = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + ... + b_k n^k$, $b_k \neq 0, b_i \in R$, $n, k \in N$.

а) Пусть имеем арифметическую прогрессию 1-го порядка, где $a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$, $d_n = b_0 + b_1 n$. Докажите, что $a_n = a_1 + (n-1)b_0 + \dfrac{n(n-1)}{2} b_1$.

Докажите, что $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}b_0 + \frac{n(n^2-1)}{6}b_1.$

б) Пусть имеем арифметическую прогрессию 2-го порядка, где $a_n = a_{n-1}+d_{n-1}$, $d_n = b_0+b_1n+b_2n^2$.

Докажите, что $a_n = a_1 + (n-1)b_0 + \frac{n(n-1)}{2}b_1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}b_2.$

Докажите, что $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}b_0 + \frac{n(n^2-1)}{6}b_1 + \frac{n^2(n^2-1)}{12}b_2.$

в) Пусть имеем арифметическую прогрессию 3-го порядка, где $a_n = a_{n-1}+d_{n-1}$, $d_n = b_0+b_1n+b_2n^2+b_3n^3$.

Докажите, что

$$a_n = a_1 + (n-1)b_0 + \frac{n(n-1)}{2}b_1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}b_2 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}b_3.$$

Докажите, что

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}b_0 + \frac{n(n^2-1)}{6}b_1 + \frac{n^2(n^2-1)}{12}b_2 + \frac{n(n^2-1)(3n^2-1)}{60}b_3.$$

3) Исследуйте вопрос о суммировании степеней чисел натурального ряда с помощью арифметических прогрессий с переменными разностями.

4) Рассмотрите различные случаи, когда разность прогрессии имеет нерациональный вид, например, $d_n = \log_2 n$; $d_n = 2^{2n+1}$ и т.д.

19. Дана последовательность $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5},\ldots$. Найдите формулу n-го члена последовательности и рекуррентную формулу, связывающую члены a_{n+1} и a_n.

Ответ: $a_n = \frac{n}{n+1}$; $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

20. Выясните, каков ответ на поставленный вопрос: «Коль скоро существуют подобные фигуры, могут ли быть подобные параболы, гиперболы и т.д.?».

Гипотеза. Все параболы подобны.

Проверка гипотезы. Для проверки предположения достаточно доказать подобие двух парабол.

Рассмотрим параболу $y = ax^2$(*) и параболу $y = m(x+b)^2 + c$(**), где $a \neq 0$ и $m \neq 0$.

Парабола, заданная уравнением (**), получена параллельным переносом параболы, заданной уравнением $y = mx^2$ на вектор $\overline{(-b;c)}$. Гомотетия с центром в точке, с координатами $(-b;c)$ и коэффициентом $\frac{m}{a}$ задается формулами $x' = \frac{m}{a}x$; $y' = \frac{m}{a}y$.

Образом параболы (*) в этой гомотетии является линия (**). То есть преобразование переводит параболу $y = ax^2$ в параболу $y = m(x+b)^2 + c$, то есть эти параболы подобны. Гипотеза верна.

21. Дан русский текст и его перевод (построчный) на язык Ам-Ям (таблица 8):

Таблица 8

Текст	*Перевод*
Мышка ночью пошла гулять	Ам ту му ям
Кошка ночью видит – мышка!	Ту ля бу ам
Мышку кошка пошла поймать	Гу ля ту ям

Составьте фрагмент русско-ам-ямского словаря по этому переводу. В языке племени Ам-Ям нет знаков препинания.

Решение

1. Слова: гулять, видеть, поймать встречаются в своих строчках по одному разу, поэтому им соответствуют слова: «му», «бу» и «гу».

2. Так как слово мышь встречается во всех трех строчках, то ему соответствует «ту».

3. Так как слово ночь встречается в первой и второй строках, то ему соответствует «ам».

4. Так как слово пошла встречается в первой и третьей строках, то ему соответствует «ям».

5. Так как слово кошка встречается во второй и третьей строках, то ему соответствует «ля».

Ответ: фрагмент словаря выглядит так: гулять – му, видит – бу, поймать – гу, мышь – ту, ночью – ам, пошла – ям, кошка – ля.

22. Для рационализации неравенств используются следующие замены выражений:

а) $a^x - b$ на $(a-1)(x-\log_a b)$;

б) $\log_a x$ на $(a-1)(x-1)$;

в) $\log_a b - c$ на $(a-1)(b-a^c)$;

г) $\sqrt[2k]{a} - b$ на $(a-b^{2k})$; здесь b>0, а в случаях в) и г) $b \geq 0$.

Как правило, a, b, c являются функциями. Докажите справедливость указанных замен.

Каждая из указанных замен приводит обычно к изменению области допустимых значений (ОДЗ), причем, и это очень важно, ОДЗ нового неравенства шире, чем у исходного, так что потери решений не происходит, а полученные в конце решения надо еще проверить на вхождение в ОДЗ исходного неравенства. Другими словами, решениями исходного неравенства будут те из полученных решений, которые лежат в его ОДЗ, в таком случае мы будем говорить, что новое неравенство равносильно исходному в его ОДЗ. Следовательно, надо начинать решения с нахождения ОДЗ исходного неравенства. Заметим также, что когда a, b, c зависят от x, получаемое после замены неравенство вовсе не обязательно будет рациональным.

Рассмотрим три примера.

а) Решить неравенство $\log_{2x}(x-3)\log_{x+1}(2x-4) > 0$.

Решение

Найдем область определения неравенства:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x>0, x\neq \dfrac{1}{2}, \\ 2x-4>0, \\ x+1>0, x\neq 0; \end{cases} \qquad x>3$$

Воспользуемся заменой, указанной под буквой а). Будем иметь:

$$(x-3-1)(2x-1)(2x-4-1)(x+1-1)>0,$$

$$(x-4)(2x-1)(2x-5)x>0.$$

Используем метод интервалов (рис. 12)

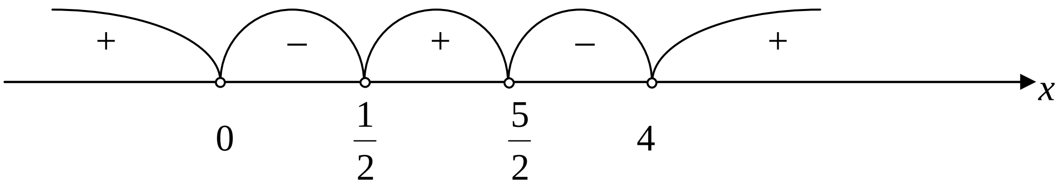


Рис. 12

Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $x>4$.

б) Решить неравенство:

$$\left(2^{x^2+1}-32\right)\left(|3x+1|-4\right)\left(\sqrt[4]{x+1}-1\right)\log_{x+3}\left(x^2-6x+6\right)<0\,.$$

Решение

Найдем область определения исходного неравенства:

$$\begin{cases} x+1\geq 0, \\ x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ x^2-6x+6>0; \end{cases} \qquad \textit{получаем} \quad x\in \left[-1;\, 3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3+\sqrt{3};\, +\infty\right).$$

Используя указанные выше а)-г) замены, получаем:

$$\left(x^2+1-5\right)\left((3x+1)^2-16\right)\left((x+1)-1\right)\left(\left(x^2-6x+6\right)-1\right)\left((x+3)-1\right)<0.$$

Решение этого неравенства не представляет сложности, предоставляем читателю возможность самостоятельно получить ответ (не забудьте учесть область определения исходного неравенства).

в) Решить неравенство: $|x|^{x^2-x-2}<1.$

Решение

Областью определения исходного неравенства являются все действительные числа, кроме нуля.

Перепишем неравенство в виде $|x|^{x^2-x-2}-1<0.$ Используя указанные замены а) и г), получим

$$(|x|-1)(x^2-x-2)<0,$$
$$(x^2-1)(x^2-x-2)<0,$$
$$(x-1)(x+1)^2(x-2)<0,$$

откуда, методом интервалов, находим ответ $x\in(1;2)$.

23. Для определения положения корней трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ относительно некоторого числа *p* вычисляются его дискриминант *D* и значение *f(p)* и записывается, кроме того, неравенство, учитывающее положение абсциссы вершины графика трехчлена относительно этой точки *p*. Таким образом, для определения положения корней квадратного трехчлена, относительно точки *p*, существенны знаки трех значений, которые называют опорными: *D*, *f(p)*, *f′(p)*. Исследуйте возможные положения корней квадратного трехчлена в зависимости от знаков трех опорных значений.

24. Пусть квадратные трехчлены $f(x)=x^2+px+q$ и $g(x)=x^2+rx+s$ имеют по два различных корня $x_{1,2}$ и $x_{3,4}$, $p\neq r$. Последнее условие показывает, что уравнение *f(x)* = *g(x)* имеет единственный корень, который мы обозначим через x_0.

Докажите справедливость утверждений:

1) $x_2<x_1<x_4<x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0)>0,\ f'(x_0)>0, \\ g'(x_0)<0; \end{cases}$

2) $x_2<x_4<x_1<x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0)<0, \\ f'(x_0)>g'(x_0); \end{cases}$

3) $x_2<x_4<x_3<x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0)>0, \\ \left[\begin{array}{l} f'(x_0)<g'(x_0)<0, \\ f'(x_0)>g'(x_0)>0; \end{array} \right. \end{cases}$

4) $x_4 < x_2 < x_1 < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} g'(x_0) < f'(x_0) < 0, \\ g'(x_0) > f'(x_0) > 0; \end{array}\right. \end{cases}$

5) $x_4 < x_2 < x_3 < x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) > 0, \\ f'(x_0) > g'(x_0); \end{cases}$

6) $x_4 < x_2 < x_3 < x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) > 0,\ f'(x_0) < 0, \\ g'(x_0) > 0. \end{cases}$

Проиллюстрируем эти утверждения геометрически (рис. 13, 14, 15, 16).

1)

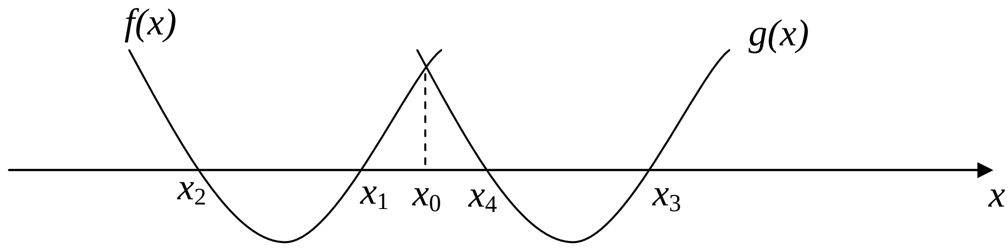


Рис. 13

2)

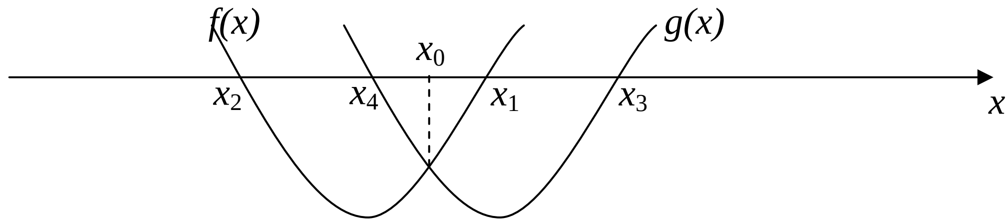


Рис. 14

3)

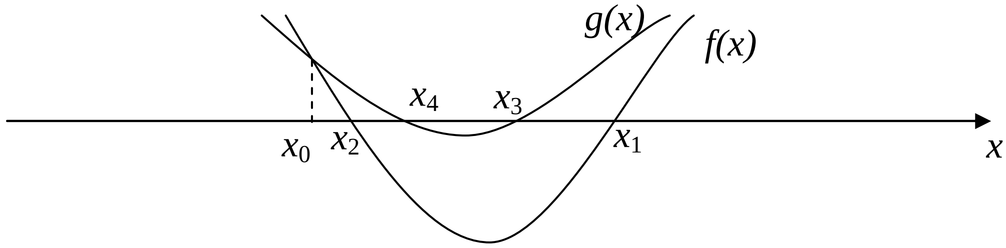


Рис. 15

4)

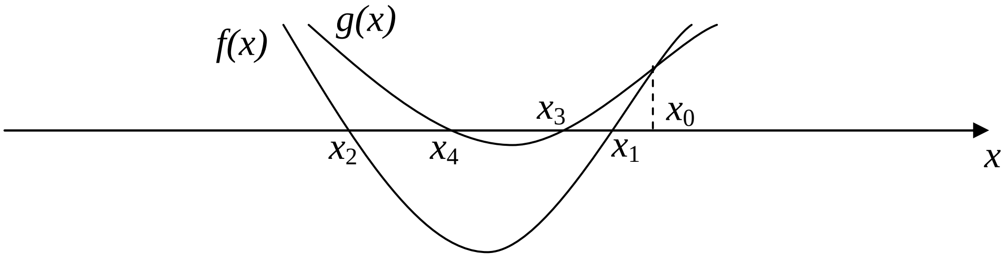


Рис. 16

25. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Заполните три последние колонки таблицы 36 из указанных условий (сведения, содержащиеся в четырех первых колонках этой таблицы 9).

Таблица 9

D	*a*	*b*	*c*	*Знаки*		*Абсолютные значения корней*
				x_1	x_2	
+	+	+	+			
+	+	–	+			
+	+	+	–			
+	+	–	–			
0	+	+	+			
0	+	–	+			
–	+	+	+			
–	+	–	+			
+	–	+	+			
+	–	–	+			
+	–	+	–			
+	–	–	–			
0	–	+	+			
0	–	–	+			
–	–	+	+			
–	–	–	+			

26. Ответьте на вопрос: «Какая функция, $y_1 = 2^x$ или $y_2 = 4^x$, растет быстрее?»

Эксперимент показал, что все учащиеся давали один ответ: «Функция $y_2 = 4^x$ растет быстрее, чем функция $y_1 = 2^x$, так как основание 4 больше основания 2».

Это утверждение ошибочно. Действительно, найдем приращения указанных функций при возрастании аргумента x от $x = -2$ до $x = -1$. Для функции $y_2 = 4^x$ имеем:

$$\Delta y_2 = y_2(-1) - y_2(-2) = 4^{-1} - 4^{-2} = \frac{3}{16}.$$

Для функции $y_1 = 2^x$ имеем:

$$\Delta y_1 = y_1(-1) - y_1(-2) = 2^{-1} - 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Имеем что $\Delta y_2 < \Delta y_1$, следовательно, функция $y_2(x)$ не может всюду на промежутке $-2 \le x \le -1$ возрастать быстрее функции $y_1(x)$. Оказывается, что если $b > c > 1$, то области определения этих функций (а это все множество действительных чисел) распадаются на два промежутка, зависящих от b и c, на одном из которых функция $y_2(x)$ возрастает медленнее, а на другом быстрее функции $y_1(x)$.

Прежде чем сформулировать теорему, заметим, что если $b > c > 1$, то $b = c^k$, где $k > 1$.

Теорема: Если $c > 1$, $k > 1$, то функция $y = b^x = c^{kx}$ на промежутке $-\infty < x < -\frac{1}{k-1}\log_c k$ возрастает медленнее, а на промежутке $-\frac{1}{k-1}\log_c k < x < +\infty$ возрастает быстрее функции $z(x) = c^x$.

Доказательство

Достаточно убедиться в том, что во всех точках промежутка $-\infty < x < -\frac{1}{k-1}\log_c k$ $y' < z'$, то есть $kc^{kx}\ln c < c^x \ln c$, $kc^{kx} < c^x$, откуда $k\left(c^{kx} - 1\right) < 1$.

Прологарифмировав обе части последнего неравенства по основанию *c*, получим неравенство $\log_c k + x(k-1) < 0$, этому неравенству удовлетворяют все *x* из промежутка $-\infty < x < -\frac{1}{k-1}\log_c k$. Эти же значения *x* удовлетворяют неравенству $kc^{x(k-1)} < 1$, а значит, и неравенству $kc^{kx} < c^x$. Таким образом мы доказали, что $y'(x) < z'(x)$ для всех *x* из промежутка $-\infty < x < -\frac{1}{k-1}\log_c k$.

Предоставляем возможность читателю самостоятельно доказать справедливость неравенства $kc^{kx} > c^x$ для всех *x* из промежутка $-\frac{1}{k-1}\log_c k < x < +\infty$.

27. Найти многочлен с целыми коэффициентами, для которого число $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ является корнем.

Решение

Имеем равенство $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 = 10 + 2\sqrt{21}$, откуда $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 - 10 = 2\sqrt{21}$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 - 10\right)^2 = 84$, откуда $\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 - 10\right)^2 - 84$. Заменим скобку $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$ на *x*, будем иметь $\left(x^2-10\right)^2 - 84$, $x^4 - 20x^2 + 16$ – это и есть искомый многочлен.

28. Известно, что внутри любого треугольника *ABC* (рис. 17) существует такая точка *P* (а их две), что $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$ (*).

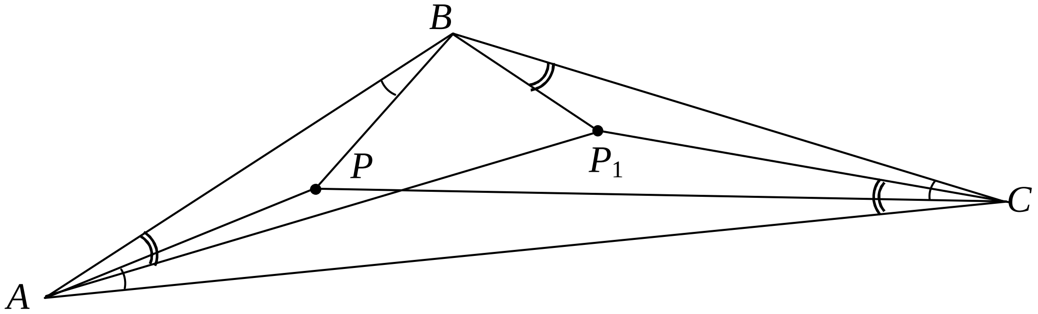


Рис. 17

Точки P и P_1 называются точками Крелля-Брокара.

а) Выполните следующее исследовательское задание: Найти способы построения точек Крелля-Брокара с помощью компьютера. (Дадим наводящие подсказки: строятся подобные треугольники на сторонах исходного треугольника или используются формулы для координат точек Крелля-Брокара)

Обозначим углы, содержащиеся в равенстве (*), через δ. Известно также, что $\delta \le 30°$ и что $\operatorname{ctg}\delta = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$. Ниже приведены теоремы, которые могут стать предметом исследования учащихся.

б) Исследуйте вопрос: «Может ли точка $P(P_1)$ лежать на биссектрисе, на медиане, на высоте или на двух из них?»

в) Докажите, что если P – центр описанной окружности, или центр вписанной окружности, или ортоцентр, то треугольник ABC правильный.

г) Докажите, что если точка Крелля-Брокара P есть точка пересечения медиан, то треугольник ABC правильный.

д) Докажите, что если точка Крелля-Брокара является пересечением медианы CM с биссектрисой AE (рис. 18), то треугольник правильный.

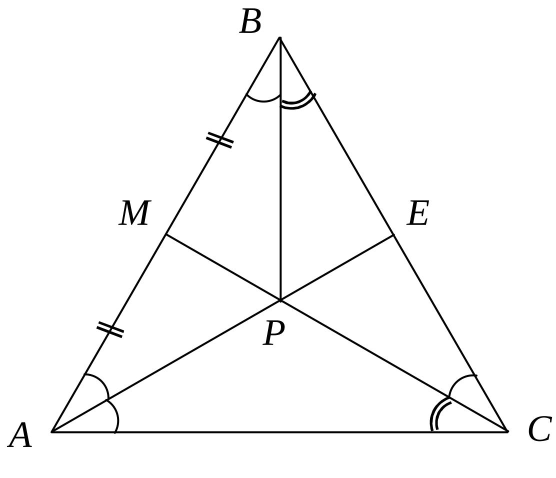


Рис. 18

Доказательство

Так как $BP = AP$, то отрезок PM в треугольнике ABP служит как медианой, так и высотой. Но тогда отрезок CM в треугольнике ABC также служит высотой и медианой, а значит, и биссектрисой, следовательно, точка P – пересечение биссектрис, треугольник ABC правильный.

е) Докажите, что если точка Крелля-Брокара P является точкой пересечения медианы CM с высотой BD, то треугольник ABC правильный. Предоставляем читателю возможность самостоятельно доказать эту теорему.

ж) Докажите, что если точка Крелля-Брокара P является точкой пересечения биссектрисы CM с высотой BD (рис. 19), то треугольник ABC правильный.

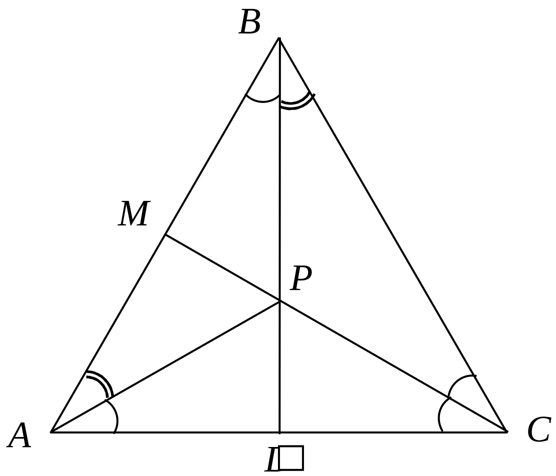


Рис. 19

Доказательство

Так как P – точка Брокара, то $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$ и $\angle ACM = \angle BCM$ (CM является биссектрисой в треугольнике ABC). Отсюда следует, что $\angle PAC = \angle ACM = \angle ACP$, в треугольнике ABC стороны AP и PC равны.

В равнобедренном треугольнике APC высота PD является и медианой, то есть $AD = DC$. Следовательно, высота BD в треугольнике ABC является и медианой. Точка Брокара P в треугольнике ABC является пересечением биссектрисы CM с медианой BD, отсюда, по предыдущей теореме, треугольник ABC правильный.

з) Докажите, что если в треугольнике ABC построена точка Крелля-Брокара P ($\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB = \delta$), то $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \dfrac{1}{8}$, где $\alpha = \angle A - \delta$, $\beta = \angle B - \delta$, $\gamma = \angle C - \delta$.

Доказательство

Применим теорему синусов к треугольникам *APB, BPC, CPA*:

$$\frac{BP}{AP}=\frac{\sin\alpha}{\sin\delta},\ \frac{CP}{BP}=\frac{\sin\beta}{\sin\delta},\ \frac{AP}{CP}=\frac{\sin\gamma}{\sin\delta},$$

$$\sin\alpha=\frac{BP\sin\delta}{AP},\ \sin\beta=\frac{CP\sin\delta}{BP},\ \sin\gamma=\frac{AP\sin\delta}{CP}.$$

Из этих равенств следует: $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin^3\delta$ и, так как $\sin\delta\le\frac{1}{2}$, то $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\frac{1}{8}$.

и) Докажите, что если в треугольнике *ABC* $\delta=30°$, то треугольник правильный.

Доказательство

Если $\delta=30°$, то $\alpha+\beta+\gamma=90°$. По доказанному $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin^3\delta$, в данном случае $\sin\delta=\frac{1}{2}$. $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{8}$. Поэтому $\alpha=\beta=\gamma=30°$, $\angle A=\angle B=\angle C=60°$.

Предложим читателю еще несколько фактов, относящихся к точкам Крелля-Брокара, которые предстоит доказать.

а) Докажите, что внутри ΔABC существует такая точка *P*, что $\angle ABP=\angle CAP=\angle BCP$ (первая точка Крелля-Брокара). Докажите, что существует еще и вторая точка Крелля-Брокара *Q*, для которой $\angle BAQ=\angle ACQ=\angle CBQ$.

б) На сторонах ΔABC внешним образом построены подобные ему треугольники: ΔCA_1B, ΔCAB_1, ΔC_1AB. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, причем это точка и есть одна из точек Крелля-Брокара.

в) Через точку Крелля-Брокара *P* треугольника *ABC* проведены прямые *AP*, *BP* и *CP*, пересекающие описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$ подобны.

г) Пусть *P* – точка Крелля-Брокара ΔABC. Докажите, что $\angle ABP$, $\angle CAP$, $\angle BCP$ не превосходят 30°.

29. Точка Микеля.

Четыре прямые образуют четыре треугольника (рис. 20).

а) Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (точка Микеля).

б) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

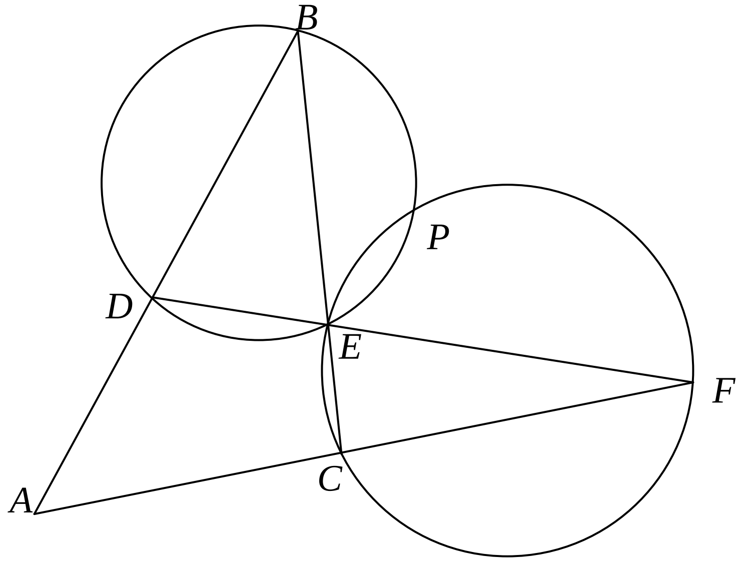


Рис. 20

Имеем следующие четыре треугольника: ΔABC, ΔDBE, ΔADF, ΔECF. Точка P – точка Микеля.

30. Педальный треугольник.

Дадим определение педального треугольника. Пусть дан треугольник ABC (рис. 21). Проведем высоты этого треугольника и соединим отрезками основания высот, получим треугольник $A_1B_1C_1$, который называется педальным по отношению к треугольнику ABC.

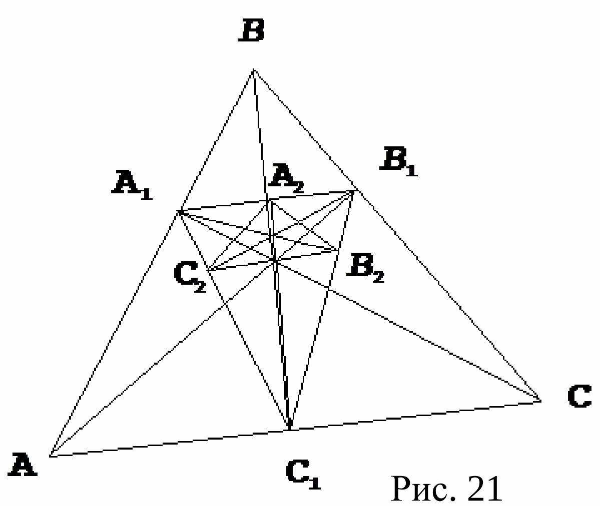


Рис. 21

В треугольник $A_1B_1C_1$ проведем высоты треугольника и соединим их отрезками, получим треугольник $A_2B_2C_2$, который называется педальным треугольником по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$. Продолжим описанные построения неограниченно.

1) Докажите, что все педальные треугольники подобны между собой.

2) Установите закономерность, если она есть, у последовательности: $P_{ABC}, P_{A_1B_1C_1}, P_{A_2B_2C_2}, \ldots,$ где P – периметр соответствующего треугольника.

3) Установите закономерность, если она есть, у последовательности: $S_{ABC}, S_{A_1B_1C_1}, S_{A_2B_2C_2}, \ldots,$ где S – площадь соответствующего треугольника.

4) Установите, есть ли закономерность у последовательности и если да, то какова она:

$$S_{A_1BB_1} + S_{B_1CC_1} + S_{A_1AC_1};$$
$$S_{A_1B_2A_2} + S_{B_1B_2C_2} + S_{C_1A_2C_2};$$
$$S_{B_2A_3B_3} + S_{C_2B_3C_3} + S_{A_2C_3A_3}; \ldots$$

5) Установите, есть ли закономерность у последовательности и если да, то какова она:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_1B_1B}}; \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{B_1C_1C}}; \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_1C_1A}}; \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{A_3B_2B_3}}; \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{B_3C_3C_2}}; \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{A_3C_3A_2}}; \ldots$$

Дадим более общее определение «педального треугольника».

Пусть A_1, B_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны ΔABC. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется педальным (подерным) треугольником точки P относительно треугольника ABC.

а) Пусть $A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки P относительно ΔABC. Докажите, что $B_1C_1 = BC \cdot \dfrac{AP}{2R}$, где R – радиус описанной окружности ΔABC.

б) Внутри остроугольного ΔABC дана точка P. Опустив из нее перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на стороны, получим $\Delta A_1B_1C_1$. Проделав для него ту же операцию, получим $\Delta A_2B_2C_2$, а затем $\Delta A_3B_3C_3$. Докажите, что эти треугольники подобны.

в) Докажите теорему. Если расстояния от педальной точки до вершин ΔABC равны x, y, z, то длины сторон педального треугольника равны $\frac{ax}{2R}, \frac{by}{2R}, \frac{cz}{2R}$, где R – радиус окружности, описанной около ΔABC, a, c, b – стороны исходного треугольника.

31. Координатный метод определения точки Ферма-Торричелли.

Дадим следующие определения.

Определение 1: Точкой Ферма для треугольника называется точка, для которой сумма расстояний до вершин треугольника является минимальной.

Определение 2: Точкой Торричелли для треугольника называется точка, из которой все стороны треугольника видны под равными углами.

Известно, что если углы ΔABC меньше 120°, то точка Ферма и точка Торричелли совпадают для данного треугольника (Кокстер Г.С. Введение в геометрию М.: Наука, 1966; Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М.: Просвещение, 1967).

а) Определите методом координат положение точки Ферма по заданным координатам вершин треугольника.

Указание: без ограничения общности можно считать, что одна вершина треугольника находится в начале координат (например, $A(0; 0)$), вторая вершина на оси Ox (например, $B(b; 0)$), а третья в верхней полуплоскости ($C(c; d)$).

б) Определите положение точки Ферма геометрическим методом, построив на сторонах ΔABC равносторонние треугольники ACB_1 и ABC_1, вне этого треугольника.

в) Определите метод получения координат точки Ферма-Торричелли.

г) Написать программу, позволяющую с помощью компьютера найти точку Ферма-Торричелли.

32. Исследуйте решение уравнений вида $\varphi(\varphi(x)) = x$ (А), где $\varphi(x)$ – некоторая функция.

Примерами таких уравнений могут быть:

(a) $\left(x^2-5x+5\right)^2-5\left(x^2-5x+5\right)+5=x$;

($б$) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+24}+24}=x$;

($в$) $\sin(\sin x)=x$;

($г$) $\sqrt{6-2\sqrt{6-2x}}=x$.

Действительно, в случае (а) $\varphi(x)=x^2-5x+5$, в случае (б) $\varphi(x)=\sqrt[3]{x+24}$, в случае (в) $\varphi(x)=\sin x$, в случае (г) $\varphi(x)=\sqrt{6-2x}$.

Наряду с уравнение (А) можно рассмотреть уравнение $\varphi(x)=x$.

Очевидно, что уравнение $\varphi(x)=x$ проще уравнения $\varphi(\varphi(x))=x$, поэтому следует попытаться использовать это обстоятельство для решения первого, более сложного, уравнения.

Приведем утверждения, которые можно применять при решении уравнения вида $\varphi(\varphi(x))=x$ (1), используя более простые уравнения вида $\varphi(x)=x$ (2).

Утверждение 1. Любой корень уравнения (2) является корнем уравнения (1).

В самом деле, пусть число x_0 является корнем уравнения (2). Тогда справедливо числовое равенство $\varphi(x_0)=x_0$. Используя это равенство два раза, получаем, что $\varphi(\varphi(x_0))=\varphi(x_0)=x_0$, то есть $\varphi(\varphi(x_0))=x_0$. А это означает, что число x_0 является корнем уравнения (1). Утверждение 1 доказано.

Отметим, что здесь и далее рассматриваются только действительные корни уравнений.

Утверждение 2. Пусть функция $\varphi(x)$ строго возрастает на множестве X и пусть $\varphi(x_0)\in X$ для любого $x_0\in X$, тогда уравнения (1) и (2) равносильны на множестве X.

Множество X может совпадать с областью существования функции $\varphi(x)$ или быть ее частью.

Как показано выше, любой корень уравнения (2) является корнем уравнения (1). Покажем теперь, что если функция $\varphi(x)$ строго возрастает на множестве *X* и $\varphi(x_0)\in X$ для любого $x_0 \in X$, то любой корень уравнения (1), принадлежащий множеству *X*, является корнем уравнения (2).

Пусть число $x_0 \in X$ и является корнем уравнения (1), тогда справедливо числовое равенство $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$. Докажем, что тогда справедливо и числовое равенство $\varphi(x_0) = x_0$.

Предположим противное, то есть что $\varphi(x_0) \neq x_0$. Тогда если $\varphi(x_0) > x_0$, то, учитывая, что $\varphi(x_0)\in X$ и $x_0 \in X$, в силу возрастания функции $\varphi(x)$ на множестве *X* получим, что справедливо числовое равенство $\varphi(\varphi(x_0)) > \varphi(x_0)$. Откуда, используя числовое неравенство $\varphi(x_0) > x_0$, получим, что $\varphi(\varphi(x_0)) > x_0$, а это противоречит условию $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$.

Если же $\varphi(x_0) < x_0$, то, учитывая, что $\varphi(x_0)\in X$ и $x_0 \in X$, в силу возрастания функции $\varphi(x)$ на множестве *X* получим, что справедливо числовое равенство $\varphi(\varphi(x_0)) < \varphi(x_0)$. Откуда получим, что $\varphi(\varphi(x_0)) < x_0$, а это противоречит условию $\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$.

Следовательно, предположение, что $\varphi(x_0) \neq x_0$, неверно. Тогда справедливо равенство $\varphi(x_0) = x_0$, то есть число x_0 является корнем уравнения (2).

Если же хотя бы одно из уравнений (1) и (2) не имеет корней, принадлежащих множеству *X*, то и другое уравнение не имеет корней, принадлежащих множеству *X*.

Действительно, пусть уравнение (2) не имеет корней, принадлежащих множеству *X*. Тогда если предположить, что уравнение (1) имеет корень $x_0 \in X$ и $\varphi(x_0)\in X$, то, как показано выше, и уравнение (2) имеет тот же корень, а это противоречит условию, что уравнение (2) не имеет корней. Аналогично, но со ссылкой на утверждение 1 доказывается, что если уравнение (1) не имеет корней, принадлежащих множеству *X*, то уравнение (2) не имеет корней, принадлежащих множеству *X*.

Утверждение 2 доказано полностью.

Отметим, что если функция $\varphi(x)$ строго возрастает на множестве X и $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$, то уравнения $\varphi(x) = x$, $\varphi(\varphi(x)) = x$, $\varphi(\varphi(\varphi(x))) = x$ и т.д. равносильны на множестве X. Естественно возникает вопрос: справедливо ли утверждение, аналогичное утверждению 2, но для строго убывающей функции $\varphi(x)$?

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sqrt[3]{1-x}$, она строго убывает на множестве R и $\varphi(x_0) \in R$ для любого $x_0 \in R$.

Уравнение $\varphi(x) = x$ имеет вид $\sqrt[3]{1-x} = x$, оно равносильно уравнению $x^3 + x - 1 = 0$, которое, как можно показать, имеет единственный корень $x_0 \in (0;1)$.

Уравнение $\varphi(\varphi(x)) = x$ имеет вид $\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-x}} = x$. Среди его корней есть числа 0 и 1, не являющиеся корнями уравнения $\varphi(x) = x$. Следовательно, для этой функции уравнения (1) и (2) не равносильны.

Таким образом, для строго убывающей функции $\varphi(x)$ утверждение о равносильности уравнений (1) и (2), аналогичное утверждению 2, вообще говоря, неверно.

Покажем, как можно применять утверждение 2 при решении уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+24}+24} = x$.

Функция $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+24}$ строго возрастает на множестве R, и $\varphi(x_0) \in R$ для любого $x_0 \in X$. Тогда на основания утверждения 2 заданное уравнение равносильно уравнению $\sqrt[3]{x+24} = x$.

Последнее уравнение равносильно уравнению $x^3 - x - 24 = 0$, которое имеет единственный корень $x_1 = 3$. Следовательно, и равносильное ему исходное уравнение так же имеет единственный корень x_1.

Ответ: 3.

Отметим, что применение традиционного способа решения исходного уравнения – последовательное возведение в третью степень – привод к уравнению девятой степени

$$x^9 - 72x^6 + 1278x^3 - x - 13848 = 0,$$

решение которого является более сложным, чем приведенное выше.

Пример 2. Решим уравнение $x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x - 6}$.

Выполним равносильные преобразования этого уравнения:

$$\left(\frac{x^3 + 6}{7}\right)^3 = 7x - 6,$$

$$\frac{\left(\frac{x^3 + 6}{7}\right)^3 + 6}{7} = x.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{x^3 + 6}{7}$, она строго возрастает на множестве *R*, и $\varphi(x_0) \in R$ для любого $x_0 \in X$. Уравнение $\frac{\left(\frac{x^3 + 6}{7}\right)^3 + 6}{7} = x$ имеет вид $\varphi(\varphi(x)) = x$, следовательно, по утверждению 2 оно равносильно уравнению $\varphi(x) = x$, то есть уравнению $\frac{x^3 + 6}{7} = x$, которое имеет три корня: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3$. Следовательно, и равносильное ему заданное уравнение имеет те же три корня.

Ответ: 1; 2; –3.

Сформулируем третье утверждение, доказательство которого почти дословно совпадает с доказательством утверждения 2.

Утверждение 3. Пусть функция $\varphi(x)$ строго возрастает на множестве X_1 и пусть множество X содержится в множестве X_1. Пусть $\varphi(x_0) \in X_1$ для любого $x_0 \in X$, тогда уравнения $\varphi(\varphi(x)) = x$ и $\varphi(x) = x$ равносильны на множестве X.

Пример 3. Найдем все корни уравнения $\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) = x$, принадлежащие промежутку $X = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ на множестве *X*. На этом множестве функция $\varphi(x)$ строго возрастает, но $\operatorname{tg} x_0$ принадлежит множеству X не для каждого $x_0 \in X$. Поэтому для решения заданного уравнения нельзя применить утверждение 2. Однако $\varphi(x_0) \in (-1; 1)$ для любого $x_0 \in X$, причем $X \subset (-1; 1)$ и функция $\varphi(x)$ строго возрастает на промежутке $X_1 = (-1; 1)$. Значит, по утверждению 3 исходное уравнение равносильно на множестве *X* уравнению $\operatorname{tg} x = x$.

Очевидно, что число $x_1 = 0$ является корнем последнего уравнения. Покажем, что других корней на множестве *X* это уравнение не имеет.

Для каждого $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ справедливо неравенство $\operatorname{tg} x_0 > x_0$ (см. учебник алгебры и начал анализа для X-XI классов), из которого следует, что нет числа $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, для которого выполнялось бы равенство $\operatorname{tg} x_0 = x_0$, то есть уравнение $\operatorname{tg} x = x$ не имеет корней на интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. В силу нечетности функций $\operatorname{tg} x$ *и* x получаем, что уравнение $\operatorname{tg} x = x$ не имеет корней и на интервале $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$. Следовательно, уравнение $\operatorname{tg} x = x$ на множестве *X* действительно имеет единственный корень $x_1 = 0$. Но тогда и исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 0$.

Ответ: 0.

Для решения уравнения $\varphi(\varphi(x)) = x$ полезны следующие два утверждения.

1) Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на области определения, которая является промежутком. Если уравнение $\varphi(x)=x$ не имеет корней, то уравнение $\varphi(\varphi(x))=x$ также не имеет корней.

Докажем это утверждение.

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на области определения $D(\varphi)$, которая является промежутком. Так как уравнение $\varphi(x)=x$ не имеет корней, то функция $y=\varphi(x)-x$ не меняет своего знака на $D(\varphi)$. (В противном случае по теореме о промежуточном значении непрерывной функции уравнение имело бы решения). Пусть, например, $\varphi(x)>x$ при всех x из $D(\varphi)$. Тогда, подставляя в это неравенство $\varphi(x)$ вместо x, получим $\varphi(\varphi(x))>\varphi(x)$ и, значит, $\varphi(\varphi(x))>x$ при всех x из $D(\varphi)$. Следовательно, уравнение $\varphi(\varphi(x))=x$ не может иметь решений.

2) Если функция $\varphi(x)$ является многочленом, то полином $\varphi(\varphi(x))-x$ делится на многочлен $\varphi(x)-x$.

Приведем примеры на применение утверждения 1.

Пример 4. Решите уравнения:

а) $\left(x^2-2|x|+3\right)^2-2\left|x^2-2|x|+3\right|=x$;

б) $\dfrac{\left(x+(x+0{,}9)\left(x^2+1\right)\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x+(x+0{,}9)\left(x^2+1\right)\right)^2+\left(x^2+1\right)^2}+\dfrac{x}{x^2+1}+1{,}8=0$.

Решение

а) Уравнение имеет вид $\varphi(\varphi(x))=x$, причем $\varphi(x)=x^2-2|x|+3$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на множестве действительных чисел. Легко заметить, что уравнение $\varphi(x)=x$, то есть уравнение $x^2-2|x|+3=x$ не имеет корней. Следовательно, по утверждению 1 исходное уравнение не имеет корней.

б) Так как $\dfrac{\left(x+(x+0{,}9)\left(x^2+1\right)\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x+(x+0{,}9)\left(x^2+1\right)\right)^2+\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{\dfrac{x}{x^2+1}+x+0{,}9}{\left(\dfrac{x}{x^2+1}+x+0{,}9\right)^2+1}$,

то прибавив к обеим частям уравнения *x*, получим, что уравнение равносильно уравнению вида $\varphi(\varphi(x))=x$, причем $\varphi(x)=\dfrac{x}{x^2+1}+x+0{,}9$.

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на множестве действительных чисел. Поскольку уравнение $\varphi(x)=x$, то есть уравнение $\dfrac{x}{x^2+1}=-0{,}9$, не имеет корней, то уравнение $\varphi(\varphi(x))=x$ не имеет корней.

33. Исследуйте решение уравнения вида $f(g(x))=f(h(x))$, где $f(x), g(x), h(x)$ – некоторые функции.

Рассмотрим некоторые подходы к решению уравнения вида $f(g(x))=f(h(x))$ (1).

Если функция $f(x)$ либо $\log_a x$, либо a^x, а *g(x), h(x)* – квадратные или линейные функции, то уравнения вида (1) являются традиционными для учащихся. Во всех школьных учебниках разъясняется, что в этих случаях решение уравнения (1) сводится к решению уравнения $g(x)=h(x)$ (2).

Но не во всех учебниках и учебных пособиях это разъяснение проведено должным образом. Однако равносильность уравнений (1) и (2) на области допустимых значений уравнения (1) легко доказать, используя строгую монотонность функции $f(x)$.

Заметим, что разбираемые в работе уравнения встречаются как среди олимпиадных задач, так и среди заданий, предлагаемых на вступительных экзаменах.

При решении уравнений вида (1) полезны следующие утверждения:

1. Решения уравнении (2), содержащиеся в области допустимых значений уравнения (1), являются решениями уравнения (1).

2. Если $f(x)$ – строго монотонная функция, то уравнения (1) и (2) равносильны на области допустимых значений уравнения (1).

3. Если $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ многочлены, то полином $f(g(x))-f(h(x))$ делится на многочлен $g(x)-h(x)$.

Утверждение 1 очевидно. Докажем утверждение 2. Пусть функция $f(x)$ строго монотонная, например, строго возрастающая, $g(x_0)\neq h(x_0)$ и x_0 входит в область допустимых значений уравнения (1). Тогда: если $g(x_0)>h(x_0)$, то $f(g(x_0))>f(h(x_0))$; если $g(x_0)<h(x_0)$, то $f(g(x_0))<(h(x_0))$. Следовательно, $f(g(x_0))\neq(h(x_0))$. Это означает, что уравнение (1) не может иметь решений, отличных от корней уравнения (2), содержащихся в области допустимых значений (1).

Доказательство утверждения 3 также не представляет трудности, поэтому мы его предоставляем читателю.

Перейдем к примерам.

1. Решите уравнения:

а) $\left(x^2-3\right)^2+3\left(x^2-3\right)=(x-2)^2+3(x-2)$;

б) $\left(x^2+2|x+5|\right)^2-4x^2-6|x+5|+3|x|=0$.

Решение. а) Уравнение имеет вид (1), при этом $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=x^2-3$, $h(x)=x-2$.

Разделив многочлен

$$f(g(x))-f(h(x))=\left(x^2-3\right)^2+3\left(x^2-3\right)-(x-2)^2-3(x-2)=$$
$$=x^4-4x^2+x+2$$

на многочлен

$$g(x)-h(x)=x^2-x-1,$$

получим x^2+x-2. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2-x-1=0,\ x^2+x-2=0.$$

Первое уравнение имеет корни, равные $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; второе уравнение имеет решения, равные 1 и –2. В итоге получаем, что исходно уравнение имеет четыре корня: $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=1$, $x_4=-2$.

Замечание. Многочлен $f(g(x))-f(h(x))$ можно разложить на множители следующим образом

$$f(g(x))-f(h(x))=g^2(x)-h^2(x)+3(g(x)-h(x))=$$
$$=(g(x)-h(x))((g(x)+h(x))+3).$$

б) Перепишем уравнение в виде

$$\left(x^2+2|x+5|\right)^2-3\left(x^2+2|x+5|\right)=x^2-3|x|.$$

Это уравнение имеет вид (1), причем

$$f(x)=x^2-3x,\ g(x)=x^2+2|x+5|,\ h(x)=|x|.$$

Так как

$$f(g(x))-f(h(x))=g^2(x)-h^2(x)-3(g(x)-h(x))=$$
$$=(g(x)-h(x))(g(x)+h(x)+3),$$

то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x^2+2|x+5|=|x|,\ x^2+2|x+5|=3-|x|.$$

Эти уравнения не имеют решений. Действительно, если $|x|\le 1$, то $|x+5|\ge 4$; если $|x|>1$, то $x^2\ge|x|$; поэтому $x^2+2|x+5|>|x|$. Следовательно, первое уравнение не имеет решений. Если $|x|\le 3$, то $x^2+2|x+5|\ge 4$ и $3-|x|\le 3$. Если же $|x|>3$, то $x^2+2|x+5|>0$, $3-|x|<0$. Поэтому второе уравнение не имеет решений. Отсюда следует, что уравнение б) не имеет решений.

2. Решите уравнения:

а) $\left(x^2+x-2\right)^3+x^2-2=x^3$;

б) $2^{x^2-3x+1}-3^{3x-x^2-1}=4^x-9^{-x}$.

Решение. а) Переписав уравнение в виде

$$(x^2+x-2)^3+x^2+x-2=x^3+x,$$

мы увидим, что оно имеет вид (1). При этом

$$f(x)=x^3+x,\ g(x)=x^2+x-2,\ h(x)=x.$$

Поскольку функция $f(x)$ возрастающая, то уравнение равносильно уравнению $x^2+x-2=x$, и, значит, имеет два корня $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$.

б) Положим

$$f(x)=2^x-3^{-x},\ g(x)=x^2-3x+1,\ h(x)=2x.$$

Тогда уравнение можно переписать в виде $f(g(x))=f(h(x))$. Так как функции 2^x и -3^{-x} являются возрастающими, то функция $f(x)$ такая же, поэтому уравнение равносильно уравнению $g(x)=h(x)$, то есть уравнению $x^2-3x+1=2x$. Отсюда получаем, что решениями исходного уравнения будут $x_1=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Легко видеть, что утверждение 2 справедливо и в том случае, если функция $f(x)$ строго монотонна лишь на множестве значений функции $g(x)$ и $h(x)$. В некоторых случаях удобно воспользоваться этим замечанием.

Если функция $f(x)$ в уравнении (1) четная, то легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

1'. Если функция $f(x)$ четная, то решения совокупности уравнений

$$g(x)=h(x),\ g(x)=-h(x), \tag{3}$$

содержащиеся в области допустимых значений уравнения (1), являются корнями уравнения (1).

2'. Если функция $f(x)$ четная и строго монотонная при $x>0$, то на области допустимых значений уравнение (1) равносильно совокупности уравнений (3).

Заметим, что утверждение 2' справедливо и в случае, если функция $f(x)$ четная и строго монотонная как при положительных значения функций $g(x)$ и $h(x)$, так и при отрицательных значениях этих функций.

Приведем примеры.

3. Решите уравнения:

а) $2^{x-2} + 2^{2-x} = 2^{x^2-1} + 2^{1-x^2}$;

б) $\sin^2 x - 2|\sin x| = \cos^2 2x - 2|\cos 2x|$.

Решение. а) Уравнение имеет вид (1), причем

$$f(x) = 2^x + 2^{-x},\ g(x) = x - 2,\ h(x) = x^2 - 1.$$

Легко заметить, что функция $f(x)$ четная. Так как $f'(x) = (2^x - 2^{-x})\ln 2$ и $2^x > 2^{-x}$ при $x > 0$, то функция $f(x)$ является возрастающей при $x > 0$. Отсюда следует, что уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2 - 1 = x - 2, x^2 - 1 = -x + 2.$$

Отсюда получаем, что уравнение имеет два корня $x_1 = -\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

б) Уравнение имеет вид (1) и

$$f(x) = x^2 - 2|x|,\ g(x) = \sin x,\ h(x) = \cos x.$$

Ясно, что функция $f(x)$ четная и $|g(x)| \le 1$, $|h(x)| \le 1$ при всех x. Легко заметить, что функция $f(x)$ строго возрастающая на сегменте [-1; 0] и строго убывающая на сегменте [0; 1]. Поэтому уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = \cos 2x, \sin x = -\cos 2x.$$

Нетрудно видеть, что если x – решение первого уравнения совокупности, то $-x$ – корень второго уравнения. Верно и обратное. Поэтому, решив первое уравнение, получим, что решениями исходного уравнения будут $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, где k – произвольное целое число.

Если функция $f(x)$ нечетная, то решение уравнение вида

$$f(g(x))+f(h(x))=0 \qquad (4)$$

сводится к решению уравнения $f(g(x))=f(-h(x))$.

4. Решение уравнения:

а) $x\left(|x|+\sqrt{1+x^2}\right)+(3x-1)\left(|3x-1|+\sqrt{9x^2-6x+2}\right)=0$;

б) $(2x+1)\sqrt{7+(2x+1)^2}+x\sqrt{7+x^2}=0$.

Решение а) Область допустимых значений уравнения – множество всех действительных чисел. Легко заметить, что уравнение имеет вид (3), причем

$$f(x)=x\left(|x|+\sqrt{1+x^2}\right),\ g(x)=x,\ h(x)=3x-1.$$

Очевидно, что функция $f(x)$ нечетная. Убедимся, что она строго возрастающая. Пусть $x_1<x_2$. Если $x_1\geq 0$, то ясно, что $f(x_1)<f(x_2)$. Если $x_1<0$, $x_2>0$, то $f(x_1)<0<f(x_2)$. Если же $x_1<x_2<0$, то $0<-x_2<-x_1$, и, значит, $f(-x_2)<f(-x_1)$. Учитывая нечетность функции $f(x)$, получаем, что $f(x_1)<f(x_2)$. Теперь ясно, что уравнение эквивалентно уравнению $x=1-3x$, и, следовательно, уравнение имеет единственное решение $x=\frac{1}{4}$.

Решение б) Область допустимых значений уравнения – все действительные числа. Легко заметить, что уравнение имеет вид (3), причем $f(x)=x\sqrt{7+x^2}$, $g(x)=2x+1$, $h(x)=x$. Запишем заданное уравнение в виде $(2x+1)\sqrt{7+(2x+1)^2}=-x\sqrt{7+x^2}$.

Это уравнение может быть записано в виде $f(2x+1)=-f(x)$. В виду нечетности функции *f(y)* можем записать $f(2x+1)=f(-x)$. Так как функция *f(y)* монотонна (читателю надлежит доказать этот факт самостоятельно), то можем записать $2x+1=-x$, откуда $x=-\frac{1}{3}$.

34. Исследуйте решение уравнений вида $f\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=xg(x)$, где *f(x)*, *g(x)* – некоторые функции.

Заметим, что это уравнение является обобщением класса уравнений $f(g(x))=f(h(x))$.

Для указанного уравнения $f\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=xg(x)$ справедливы следующие утверждения, полезные при их решении.

1. Корни уравнения

$$f(x)=xg(x), \qquad (*)$$

входящие в область допустимых значений уравнения

$$f\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=xg(x), \qquad (**)$$

являются решениями уравнения (**).

2. Если функция *f(x)* возрастающая и *g(x)* > 0, или функция *f(x)* убывающая и *g(x)* < 0 на области допустимых значений уравнения (**), то уравнения (**) и (*) равносильны на области допустимых значений уравнения (**).

3. Если функция *f(x)* является многочленом *n*-ой степени и *g(x)* – многочлен, то полином $p(x)=g^n(x)f\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)-xg^{n+1}(x)$ делится на многочлен $f(x)-xg(x)$.

35. В журнале «Наука и жизнь» № 11, 1982 г., есть статья А. Знаменского «Вариации на тему Пифагора». В ней говорится о равенстве площадей фигур очень интересной конфигурации.

Во всех предложенных задачах рассматриваются площади комбинаций фигур, их вложения или изъятия, связанные с подобием треугольников, построенных на сторонах прямоугольного треугольника и с теоремой Пифагора. На первый взгляд, кажутся невероятными предложенные равенства площадей, особенно в тех задачах, где фигуры не фиксированы, а могут свободно «блуждать» в плоскости чертежа. В нашей работе говорится о том, что для площадей любых подобных фигур, построенных на сторонах данного прямоугольного треугольника, справедливо равенство, где с одной стороны – сумма площадей фигур, построенных на катетах, а с другой – площадь фигуры, построенной на гипотенузе.

Некоторыми следствиями из теоремы Пифагора занимался самый знаменитый геометр V века Гиппократ Хиосский, изобретатель «лунок», позволяющих доказать следующие утверждение: площадь равнобедренного прямоугольного треугольника равна сумме площадей двух «лунок», образованными дугами полуокружностей, построенных на катетах, и полукругом, построенным на гипотенузе.

Эта задача подсказывает и другую постановку факта: сумма площадей «лунок», построенных на катетах в произвольном прямоугольном треугольнике, равна площади самого этого треугольника. С решения этих двух задач учащиеся могут и начать свой исследовательский поиск.

Рассмотрим подробно указанные факты.

Решение задач Гиппократа Хиосского

Задача 1. (Гиппократа Хиосского).

Докажем, что $S_1 + S_2 = S_3$, где S_1 и S_2 – площади двух «лунок» (рис. 22).

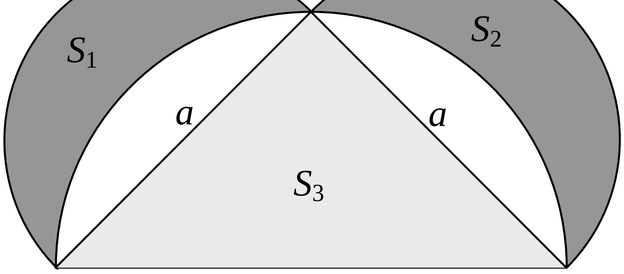


Рис. 22

Получаем: $S_1 + S_2 = 2\left(\frac{\pi a^2}{8} - \left(\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)\right) = \frac{a^2}{2} = S_3$.

Задача 2. Доказать, что $S_2 + S_3 = S_1$ (рис. 23), где S_2 и S_3 – площади двух «лунок», *a, b* – катеты, *c* – гипотенуза.

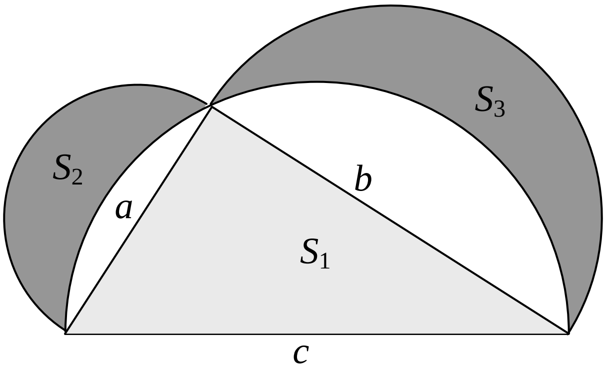


Рис. 23

Доказательство

Имеем $S_2 + S_3 = \left(\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8}\right) - \left(\frac{\pi c^2}{8} + \frac{ab^2}{2}\right) = \frac{1}{2}ab$.

Пропорциональность радиусов

Из уроков геометрии известно, что не только сходственные стороны в подобных треугольниках пропорциональны, но и любые сходственные элементы, например, радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники. Докажем это утверждение.

Утверждение 1. В подобных треугольниках радиусы вписанных окружностей пропорциональны сходственным сторонам. Докажем, что $\frac{a}{R_2} = \frac{b}{R_3} = \frac{c}{R_1}$. Пусть $\frac{a}{b} = k$, где k – коэффициент пропорциональности. Докажем, что $\frac{R_2}{R_3} = k$. Радиус вписанной окружности через стороны прямоугольного треугольника выразится следующим образом: $R = \frac{a+b-c}{2}$. Из подобия треугольников *CAD* и *BCD* имеем: $b = \frac{a}{k}$,

$h = \frac{a}{k}$, $b = \frac{h}{k}$. Найдем $\frac{R_3}{R_2} = \frac{h + b_c - b}{h + a_c - a}$, используя предыдущие равенства. Имеем $\frac{R_2}{R_3} = k$.

Утверждение 2. Для радиусов окружностей, вписанных в подобные треугольники, выполняется равенство $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$ (рис. 24).

Доказательство

Так как $\frac{a}{R_2} = \frac{b}{R_3} = \frac{c}{R_1}$, откуда $R_2 = \frac{aR_1}{c}$, $R_3 = \frac{bR_1}{c}$ и $R_2^2 + R_3^2 = \frac{a^2R_1^2}{c^2} + \frac{b^2R_1^2}{c^2} = \frac{(a^2 + b^2)R_1^2}{c^2} = R_1^2$, поэтому $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$.

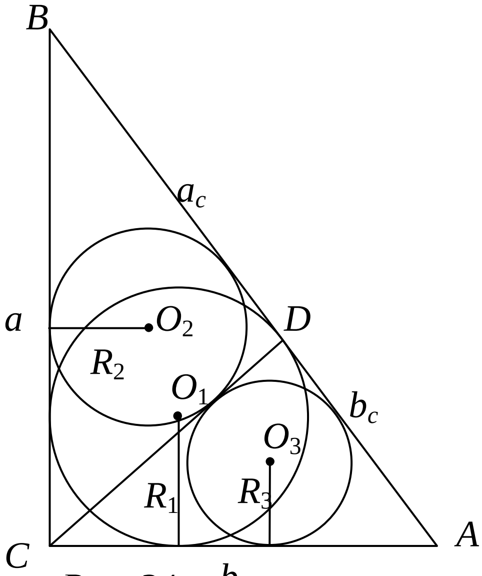


Рис. 24

Отсюда следует, что для площадей кругов с радиусами, удовлетворяющими условию $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$, справедливо равенство $S_1 = S_2 + S_3$, которое получается из предыдущего, умножением обеих его частей на π.

Теорема Пифагора для радиусов

Докажем теорему Пифагора для радиусов окружностей, вписанных в подобные треугольники.

Задача 3. Доказать, что $S_3 = S_1 + S_2$ (рис. 25).

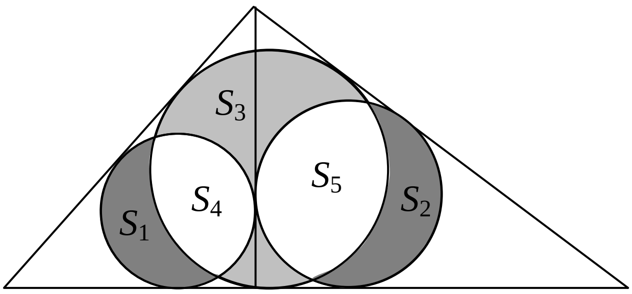


Рис. 25

Доказательство

Так как $S_3 + S_4 + S_5 = S_1 + S_4 + S_5 + S_2$, то $S_3 = S_1 + S_2$ – соотношение площадей лепестков.

«Лепестком» будем называть фигуру, ограниченную частью окружности и отрезками касательных, проведенных к окружности из одной точки. «Лепестки» будем называть подобными, если сохраняется угол между касательными. Этого условия достаточно, чтобы все линейные размеры сходственных «лепестков» были пропорциональны. Докажем это утверждение.

Утверждение 3. «Лепестки» с равными углами между касательными, подобны.

Пусть $\dfrac{R}{R_1} = k$ (рис. 26). Докажем, что $\dfrac{AC}{A_1C_1} = k$.

Доказательство

Так как $AC = \dfrac{R}{\operatorname{tg}\alpha}$ и $A_1C_1 = \dfrac{R_1}{\operatorname{tg}\alpha}$, то $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{R}{R_1} = k$.

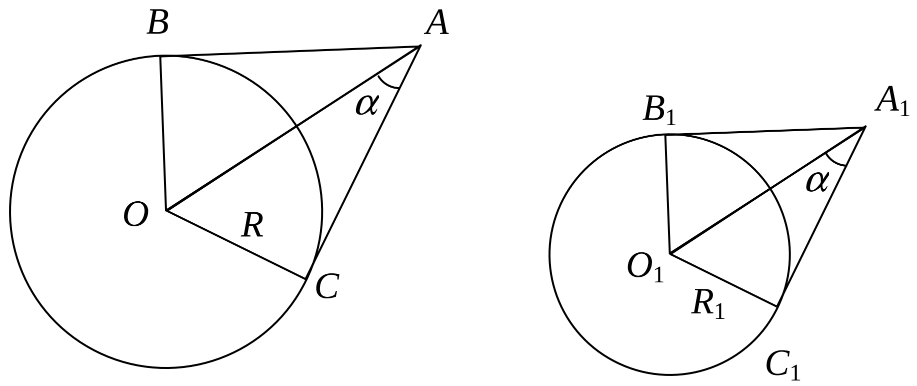


Рис. 26

Утверждение 4. Пусть три «лепестка» имеют равные углы между отрезками касательных с радиусами, связанными отношением $R_1^2 = R_2^2 = R_3^2$, и пусть S_1, S_2, S_3 – площади соответствующих «лепестков», то докажем, что $S_1 = S_2 + S_3$.

Доказательство

Так как $R_2 = kR_1$, $R_3 = kR_1$ и $k^2 + m^2 = 1$, то получим

$$S_1 = \frac{\pi R_1^2 (180^\circ - 2\alpha)}{360^\circ} + 2R_1 \frac{AC}{2},$$

$$S_2 = \frac{\pi R_2^2 (180^\circ - 2\alpha)}{360^\circ} + 2R_2 \frac{A_1C_1}{2},$$

$$S_3 = \frac{\pi R_3^2 \left(180^\circ - 2\alpha\right)}{360^\circ} + 2R_3 \frac{A_2C_2}{2}.$$

Найдем сумму S_2 и S_3:

$$S_2 + S_3 = \frac{\pi k^2 R_1^2 \left(180^\circ - 2\alpha\right)}{360^\circ} + 2k^2 R_1 \frac{AC}{2} + \frac{\pi m^2 R_1^2 \left(180^\circ - 2\alpha\right)}{360^\circ} + 2m^2 R_1 \frac{A_1C_1}{2} =$$

$$= \frac{\pi R_1^2 \left(180^\circ - 2\alpha\right)}{360^\circ}\left(k^2 + m^2\right) + 2R_1 \frac{AC}{2}\left(k^2 + m^2\right) = \frac{\pi R_1^2 \left(180^\circ - 2\alpha\right)}{360^\circ} + 2R_1 AC = S_1,$$

откуда $S_1 = S_2 + S_3$.

Задача 4. Доказать, что $S_1 = S_2 + S_3$ (рис. 27).

Доказательство

Так как $S_1 + S_5 + S_4 + S_2 = S_4 + S_2 + S_5 + S_2 + S_3$, то $S_1 = S_2 + S_3$.

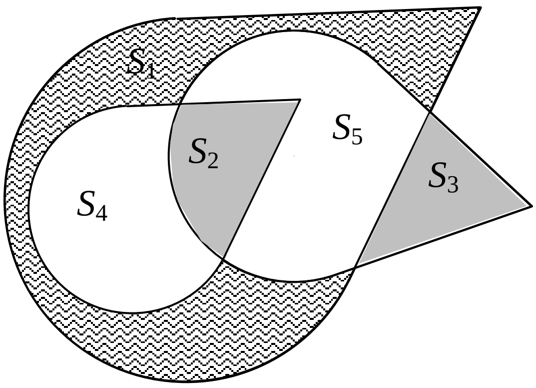


Рис. 27

Задача 5. Доказать, что $S_1 = S_2$ (рис. 28).

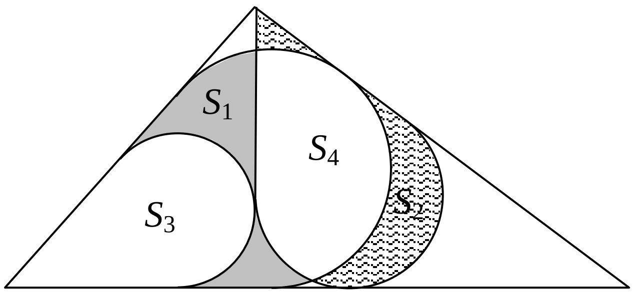


Рис. 28

Доказательство

Так как $S_1 + S_3 + S_4 = S_2 + S_3 + S_4$, то $S_1 = S_2$.

Задача 6. Доказать, что $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5$ (рис. 29).

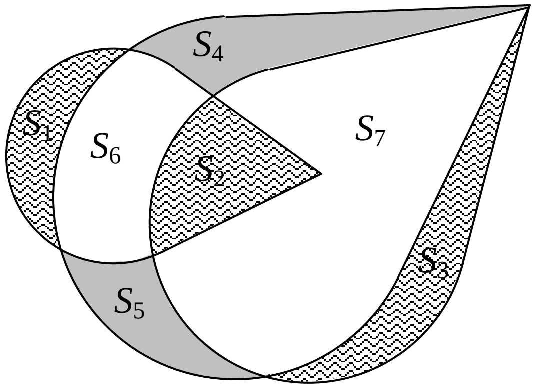


Рис. 29

Доказательство

Так как $S_4 + S_6 + S_7 + S_2 + S_5 = S_7 + S_2 + S_3 + S_1 + S_6 + S_2$, то $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5$.

Соотношение площадей сегментов

Рассмотрим сегменты кругов с одинаковыми центральными углами и радиусами, связанными соотношениями $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$.

Утверждение 5. Для площадей сегментов с равными центральными углами окружностей, вписанных в подобные прямоугольные треугольники, имеет место равенство $S_1 = S_2 + S_3$.

Пусть S_1, S_2, S_3 – площади сегментов с соответствующими радиусами R_1, R_2, R_3, (рис. 30), а радиусы R_2 и R_3 выражаются через R_1 равенствами $R_2 = kR$, $R_3 = mR$, откуда $k^2 + m^2 = 1$.

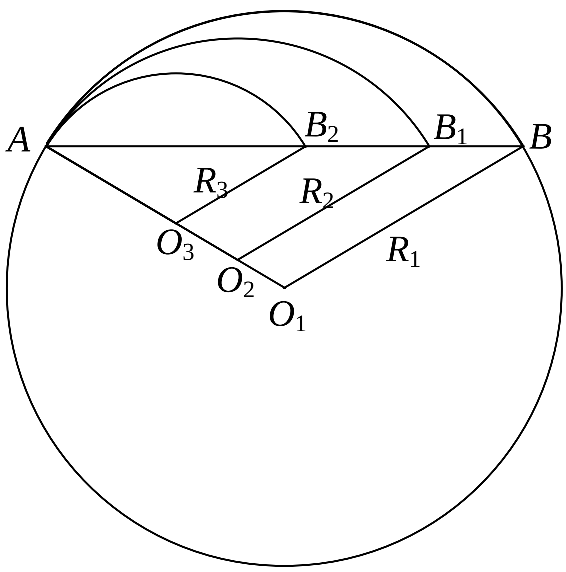


Рис. 30

Получим: $S_1=\dfrac{\pi R_1^2\alpha}{360^\circ}-S_{ABO_1}$; $S_2=\dfrac{\pi R_2^2\alpha}{360^\circ}-S_{AB_1O_2}$; $S_3=\dfrac{\pi R_3^2\alpha}{360^\circ}-S_{AB_2O_3}$.

Рассмотрим сумму $S_2+S_3=\dfrac{\pi k^2R_3^2\alpha}{360^\circ}-k^2S_{ABO_1}+\dfrac{\pi m^2R_1^2\alpha}{360^\circ}-m^2S_{ABO_1}=$

$=\dfrac{\pi R_1^2\alpha}{360^\circ}\left(k^2+m^2\right)-\left(k^2+m^2\right)S_{ABO_1}=S_1$.

Задача 7. Доказать, что $S_1=S_2$ (рис. 31).

Доказательство

Так как площади сегментов связаны равенством $S_{R_1}+S_{R_2}=S_{R_3}$, то $S_1+S_2+S_3+S_4=S_3+S_2+S_2+S_4$, то $S_1=S_2$.

Задача 8. Доказать, что $S_1+S_2=S_3+S_4$ (рис. 32).

Доказательство

Так как $S_5+S_3+S_2'+S_6+S_4+S_7=S_5+S_2'+S_7+S_1+S_6+S_2'+S_2''$, то $S_3+S_4=S_2'+S_2''+S_1$ и $S_3+S_4=S_2+S_1$.

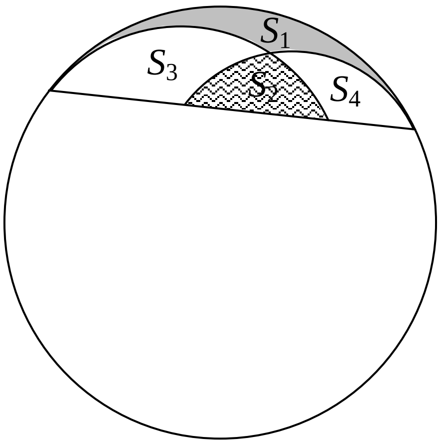


Рис. 31

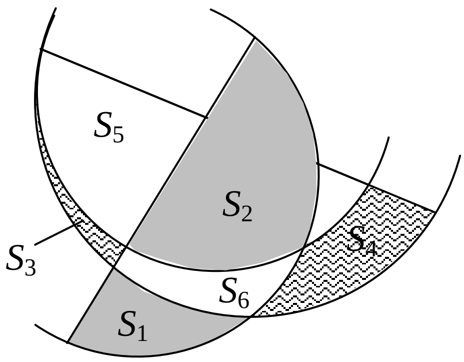


Рис. 32

Задача 9. Доказать, что $S_1=S_2+S_3$ (рис. 33).

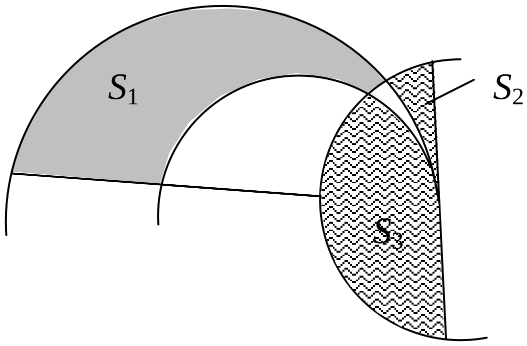


Рис. 33

Решение этой задачи аналогично решению предыдущей задачи.

Задача 10. Доказать, что $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6 + S_7$ (рис. 34).

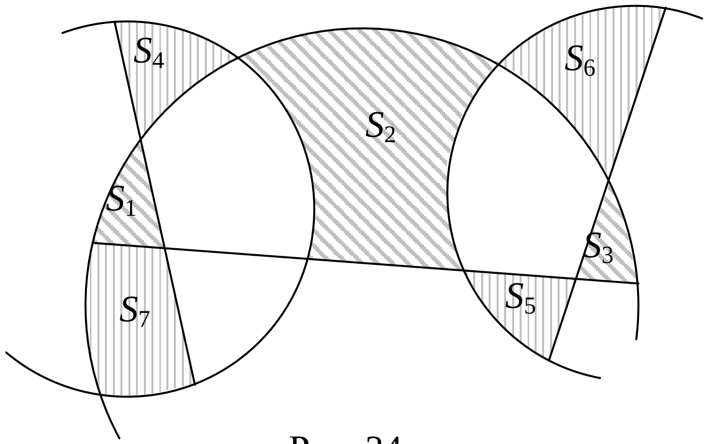


Рис. 34

Доказательство

Так как $S_1 + S_8 + S_2 + S_9 + S_3 = S_6 + S_9 + S_7 + S_4 + S_8 + S_5$, то $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6 + S_7$.

Соотношение площадей дельтоидов

Дельтоидом будем называть выпуклые четырехугольники, имеющие единственную ось симметрии, совпадающую с их диагональю, меньшие стороны которых равны радиусу окружности, а две другие – отрезки касательных.

Рассмотрим три дельтоида с меньшими сторонами-радиусами R_1, R_2, R_3 и равными углами между касательными. Докажем, что площади их связаны соотношением: $S_1 = S_2 + S_3$.

Утверждение 6. Площади дельтоидов, соответствующих радиусам R_1, R_2, R_3, связаны соотношением $S_1 = S_2 + S_3$ (рис. 35).

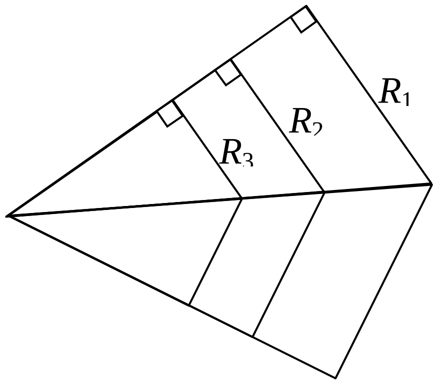


Рис. 35

Найдем выражение площадей дельтоидов $S_1=\frac{R_1^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, $S_2=\frac{R_2^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, $S_3=\frac{R_3^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}$. Найдем сумму S_2 и S_3;

$$S_2+S_3=\frac{R_2^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}+\frac{R_3^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{R_2^2+R_3^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{R_1^2}{\mathrm{tg}\,\alpha}=S_1,$$

поэтому $S_1=S_2+S_3$.

На основании доказанного легко решаются задачи 11 и 12.

Задача 11. Доказать, что $S_1+S_2+S_3=S_6+S_7$ (рис. 36).

Доказательство

Так как $S_{R_1}+S_{R_2}=S_{R_3}$, то

$$S_7+S_8+S_4+S_9+S_5+S_6+S_2=S_4+S_2+S_5+S_9+S_8+S_2+S_9+S_1,$$

поэтому $S_1+S_2+S_3=S_6+S_7$.

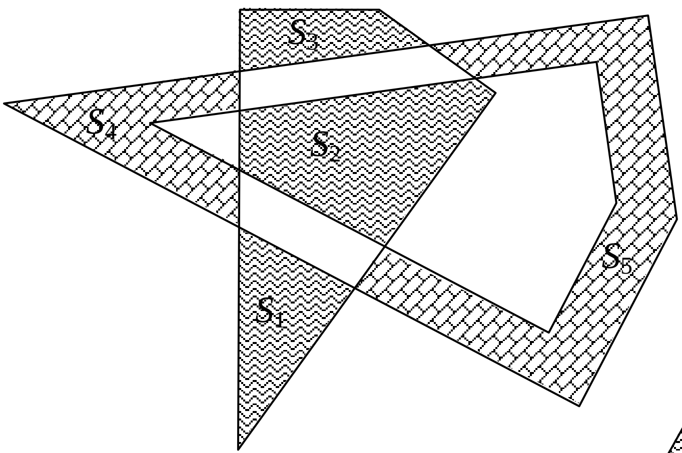


Рис. 36

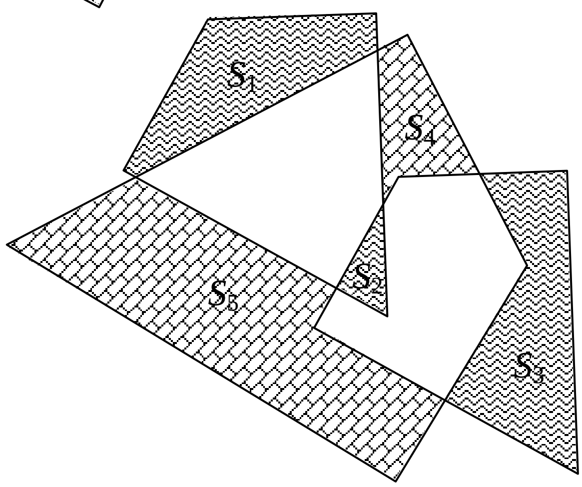


Рис. 37

Задача 12. Доказать, что $S_1+S_2+S_3=S_4+S_5$ (рис. 37).

Задача решается аналогично предыдущей.

Соотношение площадей изъятий

Рассмотрим фигуры, полученные изъятием из «лепестков» кругов с радиусами соответственно R_1, R_2, R_3 и равными углами между касательными. Покажем, что их площади связаны равенством $S'_{R_1} = S'_{R_2} + S'_{R_3}$.

Утверждение 7. Для площадей-изъятий имеет место равенство: $S'_{R_1} = S'_{R_2} + S'_{R_3}$ (рис. 38).

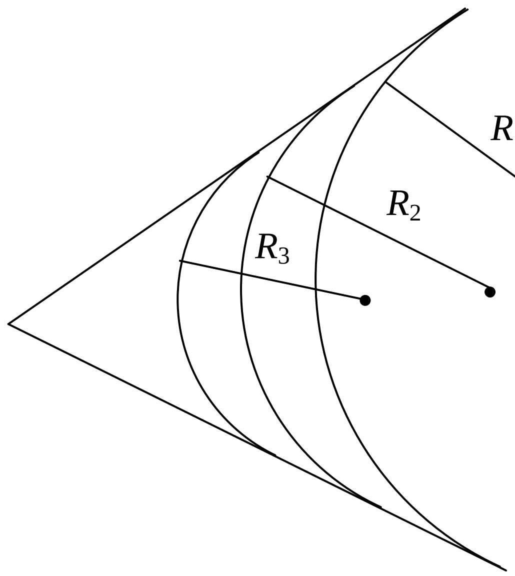


Рис. 38

Доказательство

Выразим площади-изъятия как разности между площадями соответствующих «лепестков» и кругов, содержащихся в них, при этом: $R_2 = kR_1$ и $R_3 = mR_1$, где $m^2 + k^2 = 1$.

$$S'_{R_1} = S_1 - S_{R_1} = S_1 - S_{R_1};$$
$$S'_{R_2} = S_2 - S_{R_2} = k^2 S_1 - k^2 S_{R_1};$$
$$S'_{R_3} = S_3 - S_{R_3} = m^2 S_1 - m^2 S_{R_1}.$$

Откуда получим:

$$S_{R_2} + S_{R_3} = k^2 S_1 - k^2 S_{R_1} + m^2 S_1 - m^2 S_{R_1} =$$
$$= k^2\left(S_1 - S_{R_1}\right) + m^2\left(S_1 - S_{R_1}\right) = \left(S_1 - S_{R_1}\right)\left(k^2 + m^2\right) = S'_{R_1}.$$

В итоге: $S'_{R_1} = S'_{R_2} + S'_{R_3}$.

На основании полученного результата легко решается следующая задача.

Задача 13. Доказать, что $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9$ (рис. 39).

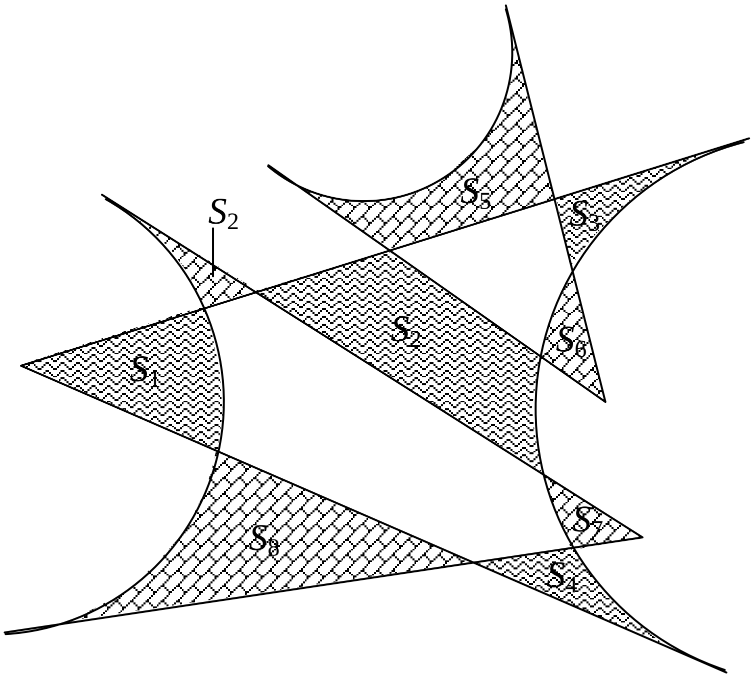


Рис. 39

Доказательство

Так как $S_1 + S_{11} + S_4 + S_2 + S_{10} + S_3 = S_5 + S_{10} + S_6 + S_9 + S_{11} + S_7 + S_8$, то получим: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9$.

Заключение

Как видно из работы, самая известная школьная теорема Пифагора имеет немало вариаций, в которых доказываются равенства площадей различных фигур, по построению зависящих от гипотенузы и катетов прямоугольного треугольника. Возможно, что рассмотренные в задачах элементы, связанные с прямоугольным треугольником, далеко не единственные, и можно продолжить поиск в этом направлении.

Без сомнения, подобными свойствами обладают и другие комбинации фигур, более того, не исключено, что объемы сходных комбинаций пространственных фигур обладают аналогичными свойствами. С заданной степенью точности полученные результаты могут быть использованы в любой практической деятельности, связанной с измерением, сравнениями и оценкой величин площадей.

36. Нахождение объема фигуры, заданной неравенствами:

а) $|x|+|y|+|z|\le 1$ (это задание было выполнено учеником 11 класса школы № 3 г. Калачинска Е. Лисковец, под руководством учителя В.В. Воробьева).

Решение

Построим мысленно фигуру, ограниченную неравенством $|x|+|y|+|z|\le 1$. Пусть $|x|+|y|+|z|=1$.

Если $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, то получим уравнение плоскости $x+y+z=1$ – это треугольник ABC, где $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

Если $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$, то получим уравнение плоскости $x+y-z=1$ – это треугольник ABC_1, где $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C_1(0;0;-1)$.

Если $x \le 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, то получим уравнение плоскости $-x+y+z=1$ – это треугольник A_1BC, где $A_1(-1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

Если $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \ge 0$, то получим уравнение плоскости $x-y+z=1$ – это треугольник AB_1C, где $A(1;0;0)$, $B_1(0;-1;0)$, $C(0;0;1)$.

Если $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \le 0$, то получим уравнение плоскости $x-y-z=1$ – это треугольник AB_1C_1, где $A(1;0;0)$, $B_1(0;-1;0)$, $C_1(0;0;-1)$.

Если $x \le 0$, $y \le 0$, $z \ge 0$, то получим уравнение плоскости $-x-y+z=1$ – это треугольник A_1B_1C, где $A_1(-1;0;0)$, $B_1(0;-1;0)$, $C(0;0;1)$.

Если $x \le 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$, то получим уравнение плоскости $-x+y-z=1$ – это треугольник A_1BC_1, где $A_1(-1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C_1(0;0;-1)$.

Если $x \le 0$, $y \le 0$, $z \le 0$, то получим уравнение плоскости $-x-y-z=1$ – это треугольник $A_1B_1C_1$, где $A_1(-1;0;0)$, $B_1(0;-1;0)$, $C_1(0;0;-1)$.

Таким образом, мы получили фигуру (которая задана неравенством $|x|+|y|+|z|\le 1$) $ABCA_1B_1C_1$ – правильный октаэдр, ребро которого равно $\sqrt{2}$.

Объем пирамиды $CABA_1B_1$ равен $\frac{1}{3}CO\cdot S_{ABA_1B_1}$.

$V=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2=\frac{2}{3}$, тогда $V_{ABCA_1B_1C_1}=\frac{4}{3}$ куб. ед.

Ответ: $\frac{4}{3}$ куб. ед.

б) $|x|+|y|+|z|\le d$, где $d>0$

Решение

Построим фигуру, ограниченную неравенством $|x|+|y|+|z|\le d$. Пусть $|x|+|y|+|z|=d$.

Если $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, то получим уравнение плоскости $x+y+z=d$ – это треугольник ABC, где $A(d;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ d;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ d)$.

Если $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\le 0$, то получим уравнение плоскости $x+y-z=d$ – это треугольник ABC_1, где $A(d;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ d;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ -d)$.

Если $x\le 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, то получим уравнение плоскости $-x+y+z=d$ – это треугольник A_1BC, где $A_1(-d;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ d;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ d)$.

Если $x\ge 0$, $y\le 0$, $z\ge 0$, то получим уравнение плоскости $x-y+z=d$ – это треугольник AB_1C, где $A(d;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ -d;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ d)$.

Если $x\ge 0$, $y\le 0$, $z\le 0$, то получим уравнение плоскости $x-y-z=d$ – это треугольник AB_1C_1, где $A(d;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ -d;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ -d)$.

Если $x\le 0$, $y\le 0$, $z\ge 0$, то получим уравнение плоскости $-x-y+z=d$ – это треугольник A_1B_1C, где $A_1(-d;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ -d;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ d)$.

Если $x \le 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$, то получим уравнение плоскости $-x+y-z=d$ – это треугольник A_1BC_1, где $A_1(-d;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ d;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ -d)$.

Если $x \le 0$, $y \le 0$, $z \le 0$, то получим уравнение плоскости $-x-y-z=d$ – это треугольник $A_1B_1C_1$, где $A_1(-d;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ -d;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ -d)$.

Таким образом, мы получили фигуру (которая задана неравенством $|x|+|y|+|z| \le d$) $ABCA_1B_1C_1$ – правильный октаэдр, ребро которого равно $d\sqrt{2}$.

Объем пирамиды $CABA_1B_1$ равен $\frac{1}{3}CO \cdot S_{ABA_1B_1}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot d \cdot 2d \cdot \frac{2d}{2} = \frac{2}{3}d^3$, тогда $V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{4}{3}d^3$ куб. ед.

Ответ: $\frac{4}{3}d^3$ куб. ед.

в) $\left|x-\frac{m}{a}\right|+\left|y-\frac{n}{b}\right|+\left|z-\frac{k}{c}\right| \le d$, где $d > 0$

Решение

Построим фигуру, ограниченную неравенством $\left|x-\frac{m}{a}\right|+\left|y-\frac{n}{b}\right|+\left|z-\frac{k}{c}\right| \le d$. Пусть $\left|x-\frac{m}{a}\right|+\left|y-\frac{n}{b}\right|+\left|z-\frac{k}{c}\right| = d$.

1. Если $x \ge \frac{m}{a}$, $y \ge \frac{n}{b}$, $z \ge \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $x+y+z=d+\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{k}{c}$ – это треугольник ABC, где $A(\frac{m}{a}+d;\ \frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $B(\frac{m}{a};\ d+\frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $C(\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ d+\frac{k}{c})$.

2. Если $x \geq \frac{m}{a}$, $y \geq \frac{n}{b}$, $z \leq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $x + y - z = d + \frac{m}{a} + \frac{n}{b} - \frac{k}{c}$ – это треугольник ABC_1, где $A(\frac{m}{a}+d;\ \frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $B(\frac{m}{a};\ d+\frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $C_1(\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ -d+\frac{k}{c})$.

3. Если $x \leq \frac{m}{a}$, $y \geq \frac{n}{b}$, $z \geq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $-x + y + z = d - \frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{k}{c}$ – это треугольник A_1BC, где $A_1(-d+\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $B(\frac{m}{a};\ d+\frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $C(\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ d+\frac{k}{c})$.

4. Если $x \geq \frac{m}{a}$, $y \leq \frac{n}{b}$, $z \geq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $x - y + z = d + \frac{m}{a} - \frac{n}{b} + \frac{k}{c}$ – это треугольник AB_1C, где $A(d+\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $B_1(\frac{m}{a};\ -d+\frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $C(\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ d+\frac{k}{c})$.

5. Если $x \geq \frac{m}{a}$, $y \leq \frac{n}{b}$, $z \leq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $x - y - z = d + \frac{m}{a} - \frac{n}{b} - \frac{k}{c}$ – это треугольник AB_1C_1, где $A(d+\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $B_1(\frac{m}{a};\ -d+\frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $C_1(\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ -d+\frac{k}{c})$.

6. Если $x \leq \frac{m}{a}$, $y \leq \frac{n}{b}$, $z \geq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $-x - y + z = d - \frac{m}{a} - \frac{n}{b} + \frac{k}{c}$ – это треугольник A_1B_1C, где $A_1(-d+\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $B_1(\frac{m}{a};\ -d+\frac{n}{b};\ \frac{k}{c})$, $C(\frac{m}{a};\ \frac{n}{b};\ d+\frac{k}{c})$.

7. Если $x \le \dfrac{m}{a}$, $y \ge \dfrac{n}{b}$, $z \le \dfrac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $-x+y-z=d-\dfrac{m}{a}+\dfrac{n}{b}-\dfrac{k}{c}$ – это треугольник A_1BC_1, где $A_1(-d+\dfrac{m}{a};\ \dfrac{n}{b};\ \dfrac{k}{c})$, $B(\dfrac{m}{a};\ d+\dfrac{n}{b};\ \dfrac{k}{c})$, $C_1(\dfrac{m}{a};\ \dfrac{n}{b};\ -d+\dfrac{k}{c})$.

8. Если $x \le \dfrac{m}{a}$, $y \le \dfrac{n}{b}$, $z \le \dfrac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $-x-y-z=d-\dfrac{m}{a}-\dfrac{n}{b}-\dfrac{k}{c}$ – это треугольник $A_1B_1C_1$, где $A_1(-d+\dfrac{m}{a};\ \dfrac{n}{b};\ \dfrac{k}{c})$, $B_1(\dfrac{m}{a};\ -d+\dfrac{n}{b};\ \dfrac{k}{c})$, $C_1(\dfrac{m}{a};\ \dfrac{n}{b};\ -d+\dfrac{k}{c})$.

Таким образом, мы получили фигуру (которая задана неравенством $\left|x-\dfrac{m}{a}\right|+\left|y-\dfrac{n}{b}\right|+\left|z-\dfrac{k}{c}\right| \le d$) $ABCA_1B_1C_1$ – правильный октаэдр, ребро которого равно $d\sqrt{2}$.

Объем пирамиды $CABA_1B_1$ равен $\dfrac{1}{3}CO \cdot S_{ABA_1B_1}$.

$V=\dfrac{1}{3}\cdot d\cdot 2d\cdot\dfrac{2d}{2}=\dfrac{2}{3}d^3$, тогда $V_{ABCA_1B_1C_1}=\dfrac{4}{3}d^3$ куб. ед.

Ответ: $\dfrac{4}{3}d^3$ куб. ед.

г) $|ax-m|+|by-n|+|cz-k| \le d$ $(d>0)$

Решение

Построим фигуру, ограниченную неравенством

$$|ax-m|+|by-n|+|cz-k| \le d.$$

Пусть $|ax-m|+|by-n|+|cz-k| = d$.

1. Если $x \ge \dfrac{m}{a}$, $y \ge \dfrac{n}{b}$, $z \ge \dfrac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $ax+by+cz=d+m+n+k$ – это треугольник ABC, где $A(\dfrac{m+d}{a} \, \dfrac{n}{b} \, \dfrac{k}{c})$, $B(\dfrac{m}{a} \, \dfrac{n+d}{b} \, \dfrac{k}{c})$, $C(\dfrac{m}{a} \, \dfrac{n}{b} \, \dfrac{k+d}{c})$.

2. Если $x \geq \frac{m}{a}$, $y \geq \frac{n}{b}$, $z \leq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $ax+by-cz=d+m+n-k$ – это треугольник ABC_1, где $A(\frac{m+d}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k}{c})$, $B(\frac{m}{a}-\frac{n+d}{b}-\frac{k}{c})$, $C_1(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k-d}{c})$.

3. Если $x \leq \frac{m}{a}$, $y \geq \frac{n}{b}$, $z \geq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $-ax+by+cz=d-m+n+k$ – это треугольник A_1BC, где $A_1(\frac{m-d}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k}{c})$, $B(\frac{m}{a}-\frac{n+d}{b}-\frac{k}{c})$, $C(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k+d}{c})$.

4. Если $x \geq \frac{m}{a}$, $y \leq \frac{n}{b}$, $z \geq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $ax-by+cz=d+m-n+k$ – это треугольник AB_1C, где $A(\frac{m+d}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k}{c})$, $B_1(\frac{m}{a}-\frac{n-d}{b}-\frac{k}{c})$, $C(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k+d}{c})$.

5. Если $x \geq \frac{m}{a}$, $y \leq \frac{n}{b}$, $z \leq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $ax-by-cz=d+m-n-k$ – это треугольник AB_1C_1, где $A(\frac{m+d}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k}{c})$, $B_1(\frac{m}{a}-\frac{n-d}{b}-\frac{k}{c})$, $C_1(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k-d}{c})$.

6. Если $x \leq \frac{m}{a}$, $y \leq \frac{n}{b}$, $z \geq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $-ax-by+cz=d-m-n+k$ – это треугольник A_1B_1C, где $A_1(\frac{m-d}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k}{c})$, $B_1(\frac{m}{a}-\frac{n-d}{b}-\frac{k}{c})$, $C(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k+d}{c})$.

7. Если $x \leq \frac{m}{a}$, $y \geq \frac{n}{b}$, $z \leq \frac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $-ax+by-cz=d-m+n-k$ – это треугольник A_1BC_1, где $A_1(\frac{m-d}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k}{c})$, $B(\frac{m}{a}-\frac{n+d}{b}-\frac{k}{c})$, $C_1(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}-\frac{k-d}{c})$.

8. Если $x \leq \dfrac{m}{a}$, $y \leq \dfrac{n}{b}$, $z \leq \dfrac{k}{c}$, то получим уравнение плоскости $-ax-by-cz=d-m-n-k$ – это треугольник $A_1B_1C_1$, где $A_1(\dfrac{m-d}{a} - \dfrac{n}{b} - \dfrac{k}{c})$, $B_1(\dfrac{m}{a} - \dfrac{n-d}{b} - \dfrac{k}{c})$, $C_1(\dfrac{m}{a} - \dfrac{n}{b} - \dfrac{k-d}{c})$.

Таким образом, мы получили фигуру (которая задана неравенством $|ax-m|+|by-n|+|cz-k| \leq d$) $ABCA_1B_1C_1$ – правильный октаэдр.

Пусть точка O середина отрезка AA_1, найдем координаты этой точки $x_0 = \dfrac{\dfrac{m+d}{a} + \dfrac{m-d}{a}}{2} \Rightarrow x_0 = \dfrac{m}{a}$, аналогично находим y_0, z_0; $O\left(\dfrac{m}{a}; \dfrac{n}{d}; \dfrac{k}{c}\right)$. Затем находим координаты точки середины отрезка BB_1 и координаты точки середины отрезка CC_1 и получим, что $x = \dfrac{m}{a}$; $y = \dfrac{n}{b}$; $z = \dfrac{k}{c}$ из этого следует, что все эти отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке $O\left(\dfrac{m}{a}; \dfrac{n}{d}; \dfrac{k}{c}\right)$ и делятся в этой точке пополам.

Докажем, что эти отрезки (AA_1, BB_1, CC_1) попарно перпендикулярны. Найдем координаты векторов $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{CC_1}$ и получим, что $\vec{AA_1}\left\{\dfrac{m-d}{a} - \dfrac{m+d}{a}; \dfrac{n}{b} - \dfrac{n}{b}; \dfrac{k}{c} - \dfrac{k}{c}\right\} \Rightarrow \vec{AA_1}\left\{-\dfrac{2d}{a}; 0; 0\right\}$, аналогично находим координаты векторов $\vec{BB_1}\left\{0; -\dfrac{2d}{b}; 0\right\}$, $\vec{CC_1}\left\{0; 0; -\dfrac{2d}{c}\right\}$. Скалярное произведение векторов $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$, $\vec{AA_1}$ и $\vec{CC_1}$, $\vec{BB_1}$ и $\vec{CC_1}$ равно нулю, следовательно, $\vec{AA_1} \perp \vec{BB_1}$, $\vec{AA_1} \perp \vec{CC_1}$, $\vec{BB_1} \perp \vec{CC_1}$. Длины векторов $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{CC_1}$ равны соответственно $|\vec{AA_1}| = \dfrac{2d}{a}$, $|\vec{BB_1}| = \dfrac{2d}{b}$, $|\vec{CC_1}| = \dfrac{2d}{c}$.

Объем пирамиды $CABA_1B_1$ равен $\frac{1}{3}CO \cdot S_{ABA_1B_1}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2d}{a} \cdot \frac{2d}{b} = \frac{2d^3}{3abc}$, тогда $V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{4d^3}{3abc}$ куб. ед.

Ответ: $\frac{4d^3}{3abc}$ куб. ед.

37. Интерес представляет исследование вопроса, в каком отношении делится высота правильной пирамиды плоскостью сечения.

Приведем исследования учащегося 10 кл. А.В. Мирко МОУ «СОШ № 3» г. Калачинска Омской области (руководитель: учитель математики В.В. Воробьев). С докладом на эту тему учащийся выступал на XXXVI региональной научно-практической конференции школьников и учащейся молодежи Омской области и занял призовое место.

Задача № 1. Боковые ребра *PA, PB, PC* правильной треугольной пирамиды *PABC* (рис. 40) делятся плоскостью α, соответственно, в отношении 2 : 3; 3 : 2; 4 : 1, считая от вершины *P*. В каком отношении плоскость α делит высоту этой пирамиды?

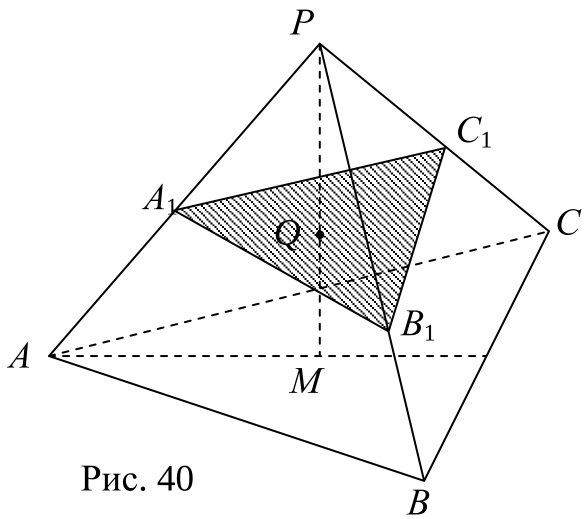


Рис. 40

Дано: *PABC* – правильная треугольная пирамида; $\frac{PA_1}{AA_1} = \frac{2}{3}$;

$\frac{PB_1}{BB_1} = \frac{3}{2}$; $\frac{PC_1}{CC_1} = \frac{4}{1}$.

Найти: $\dfrac{QM}{PQ}$.

Решение

Пусть A_1, B_1, C_1 – точки пересечения ребер PA, PB, PC с плоскостью α. Поместим в каждую из точек A, B и C массу, равную единице.

Так как $AP=\frac{5}{2}A_1P$ и $AA_1=\frac{3}{2}A_1P$, то $\frac{5}{2}A_1=1A+\frac{3}{2}P$, то есть A_1 – центр масс множества точек $1A$ и $\frac{3}{2}P$.

Аналогично: $\frac{5}{3}B_1=1B+\frac{2}{3}P$; $\frac{5}{4}C_1=1C+\frac{1}{4}P$.

Далее, так как пирамида правильная, то $3M = 1A + 1B + 1C$.

Пусть Q – центр масс всех шести рассмотренных материальных точек, то есть

$$1A+\frac{3}{2}P+1B+\frac{2}{3}P+1C+\frac{1}{4}P=\frac{65}{12}Q.$$

Произведем группировку масс:

$$\left(1A+\frac{3}{2}P\right)+\left(1B+\frac{2}{3}P\right)+\left(1C+\frac{1}{4}P\right)=\frac{5}{2}A_1+\frac{5}{3}B_1+\frac{5}{4}C_1=\frac{65}{12}Q\Rightarrow Q\in\alpha.$$

Произведем другую группировку масс:

$$(1A+1B+1C)+\left(\frac{3}{2}P+\frac{2}{3}P+\frac{1}{4}P\right)=3M+\frac{29}{12}P=\frac{65}{12}Q\Rightarrow Q\in PM.$$

Значит, Q – точка пересечения плоскости α и отрезка PM. Из последнего равенства видно, что Q – центр масс множества точек $\frac{29}{12}P$ и $3M$, и по правилу рычага $\frac{29}{12}PQ=3QM$. Откуда $\frac{QM}{PQ}=\frac{29}{36}$.

Ответ: $\dfrac{QM}{PQ}=\dfrac{29}{36}$.

Задача № 2. Дано: $PABC$ (рис. 41) - правильная треугольная пирамида.

$\dfrac{AA_1}{PA_1} = \dfrac{m}{n}$;

$\dfrac{BB_1}{PB_1} = \dfrac{t}{s}$;

$\dfrac{CC_1}{PC_1} = \dfrac{f}{g}$.

Найти: $\dfrac{QM}{PQ}$.

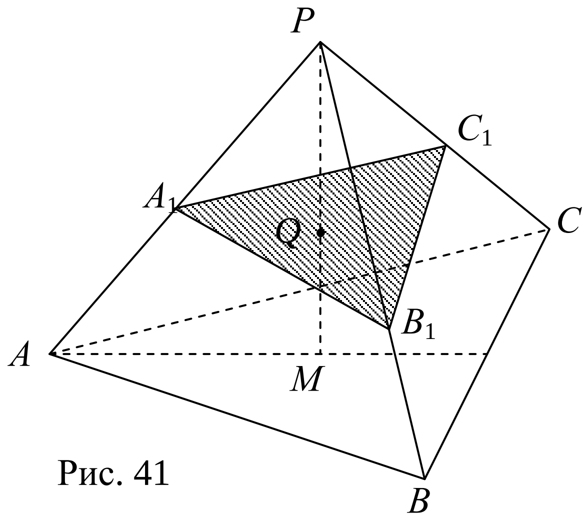


Рис. 41

Решение

Пусть A_1, B_1, C_1 – точки пересечения ребер PA, PB, PC с плоскостью α. Поместим в каждую из точек A, B и C массу, равную единице.

Так как $AP = \dfrac{m+n}{n} A_1P$ и $AA_1 = \dfrac{m}{n} A_1P$, то $\dfrac{m+n}{n} A_1 = 1A + \dfrac{m}{n} P$, то есть A_1 – центр масс множества точек $1A$ и $\dfrac{m}{n} P$.

Аналогично: $\dfrac{t+s}{s} B_1 = 1B + \dfrac{t}{s} P$; $\dfrac{f+g}{f} C_1 = 1C + \dfrac{f}{g} P$.

Далее, так как пирамида правильная, то $3M = 1A + 1B + 1C$.

Пусть Q – центр масс всех шести рассмотренных материальных точек, то есть

$$\left(1A + \frac{m}{n} P\right) + \left(1B + \frac{t}{s} P\right) + \left(1C + \frac{f}{g} P\right) = \frac{m+n}{n} A_1 + \frac{t+s}{s} B_1 + \frac{f+g}{g} C_1 =$$

$$= \left(1 + \frac{m}{n} + 1 + \frac{t}{s} + 1 + \frac{f}{g}\right) Q = \left(3 + \frac{m}{n} + \frac{t}{s} + \frac{f}{g}\right) Q \Rightarrow Q \in \alpha.$$

Произведем другую группировку масс:

$$\left(3 + \frac{m}{n} + \frac{t}{s} + \frac{f}{g}\right) Q = (1A + 1B + 1C) + \left(\frac{m}{n} P + \frac{t}{s} P + \frac{f}{g} P\right) =$$

$$= 3M + \left(\frac{m}{n} + \frac{t}{s} + \frac{f}{g}\right) P = \left(3 + \frac{m}{n} + \frac{t}{s} + \frac{f}{g}\right) Q \Rightarrow Q \in PM.$$

Значит, Q – точка пересечения плоскости α и отрезка PM. Из последнего равенства видно, что Q – центр масс множества точек $\left(\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}\right)$ и $3M$ и по правилу рычага $\left(\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}\right)PQ=3QM$. Откуда $\frac{QM}{PQ}=\frac{1}{3}\left(\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}\right)$ или $\frac{QM}{PQ}=\frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{BB_1}{PB_1}+\frac{CC_1}{PC_1}\right)$.

Ответ: $\frac{QM}{PQ}=\frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{BB_1}{PB_1}+\frac{CC_1}{PC_1}\right)$.

Задача №3. Дано: $ABCD$ (рис. 42) – параллелограмм.

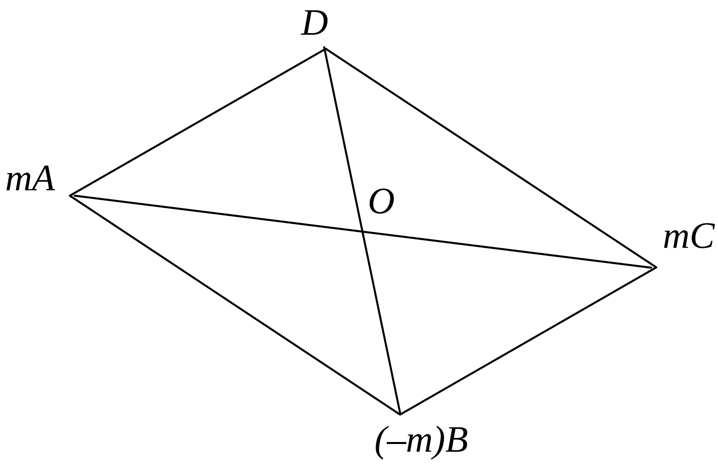


Рис. 42

Доказать: центром масс трех материальных точек mA, $(-m)B$, mC является четвертая вершина D, то есть $mD = mA + (-m)B + mC$.

Решение

Пусть O – центр параллелограмма, а Z – искомый центр масс. Тогда по теореме: если точка Z служит центром масс системы материальных точек, то при любом выборе в пространстве точки O справедливо равенство:

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+...+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+...+m_n}.$$

Тогда по формуле:

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{m\overrightarrow{OA}-m\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}}{m-m+m}=\frac{m\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OD}-m\overrightarrow{OA}}{m-m+m}=\overrightarrow{OD},$$

то есть $Z = D$, что и требовалось доказать.

Задача № 4. Основанием пирамиды $SABCD$ (рис. 43) служит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α отсекает от трех боковых ребер SA, SB, SC соответственно треть, пятую часть и четверть, считая от вершины S. Определить, какую часть отсекает эта плоскость от четвертого ребра пирамиды.

Дано: $SABCD$ – четырехугольная пирамида,

$$\frac{A_1S}{A_1A}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{B_1S}{B_1B}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{C_1S}{C_1C}=\frac{1}{3}.$$

Найти: $\frac{D_1S}{D_1D}$.

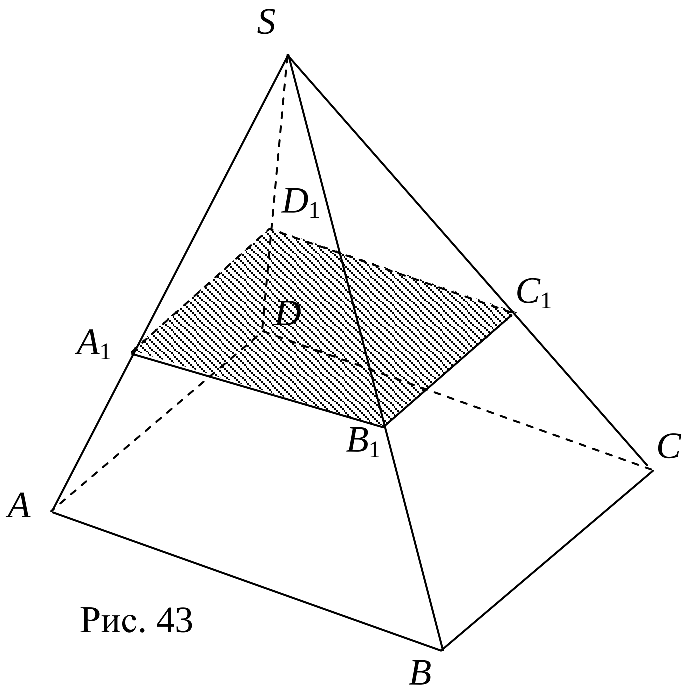


Рис. 43

Решение

Пусть плоскость α пересекает ребра SA, SB, SC, SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Мы знаем из задачи №3, что точка D – центр масс материальных точек $1A$, $(–1)B$ и $1C$. Подберем теперь для точки S три такие массы m', m'', m''', чтобы центром масс материальных точек $1A$ и $m'S$ служила точка A_1, центром масс материальных точек $1B$ и $m''S$ служила точка B_1, центром масс материальных точек $1C$ и $m'''S$ служила точка C_1. Так как точка A_1 принадлежит отрезку SA, то массы 1 и m', помещенные в точки A и S, должны быть одинаковых знаков, то есть $m' > 0$. При этом по правилу рычага $1\cdot A_1A=(m')A_1S$, откуда (в силу условия $\frac{A_1S}{A_1A}=\frac{1}{2}$) находим $m' = 2$. Аналогично найдем $m'' = –4$ и $m''' = 3$. Рассмотрим систему из всех шести материальных точек $1A$, $2S$, $(–1)B$, $(–4)S$, $1C$, $3S$, и пусть Z – их центр масс. Произведем две различные группировки этих материальных точек:

$$Z=\frac{(1A+2S)+((-1)B+(-4)S)+(1C+3S)}{1+2+(-1)+(-4)+1+3}=\frac{3A_1+(-5)B_1+4C_1}{2}\Rightarrow Z\in\alpha$$

$$Z=\frac{(1A+(-1)B+1C)+(2S+(-4)S+3S)}{2}=\frac{1D+1S}{2}\Rightarrow Z\in SD.$$

Следовательно, $Z = D_1$, причем из равенства $Z=\dfrac{1D+1S}{2}$ следует, что D_1 – середина ребра SD, то есть плоскость α отсекает половину этого ребра.

Ответ: $\dfrac{D_1S}{D_1D}=\dfrac{1}{1}$.

Задача № 5. Дано: $PABCD$ (рис. 44) – четырехугольная пирамида,

$\dfrac{AA_1}{PA_1}=\dfrac{m}{n}$;

$\dfrac{BB_1}{PB_1}=\dfrac{t}{s}$;

$\dfrac{CC_1}{PC_1}=\dfrac{f}{g}$.

Найти: $\dfrac{DD_1}{PD_1}$.

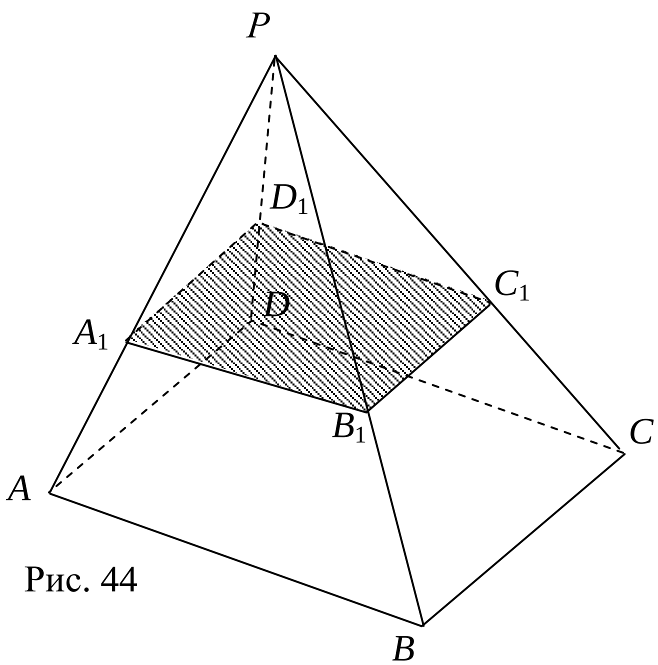


Рис. 44

Решение

Пусть плоскость α пересекает ребра PA, PB, PC, PD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Мы знаем из задачи №3, что точка D – центр масс материальных точек $1A$, $(-1)B$ и $1C$. Подберем теперь для точки P три такие массы m', m'', m''', чтобы центром масс материальных точек $1A$ и $m'P$ служила точка A_1, центром масс материальных точек $1B$ и $m''P$ служила точка B_1, центром масс материальных точек $1C$ и $m'''P$ служила точка C_1. Так как точка A_1 принадлежит отрезку PA, то массы 1 и m', помещенные в точки A и P, должны быть одинаковых знаков, то есть $m' > 0$. При этом по правилу рычага $1\cdot A_1A=(m')A_1P$, откуда (в силу условия $\frac{A_1P}{A_1A}=\frac{m}{n}$) находим $m' = \frac{m}{n}$. Аналогично найдем $m'' = -\frac{t}{s}$ и $m''' = \frac{f}{g}$. Рассмотрим систему из всех шести материальных точек $1A$, $\frac{m}{n}P$, $(-1)B$, $(-\frac{t}{s})P$, $1C$, $\frac{f}{g}P$, и пусть Z – их центр масс. Произведем две различные группировки этих материальных точек:

$$Z=\frac{\left(1A+\left(\frac{m}{n}\right)P\right)+\left((-1)B+\left(-\frac{t}{s}\right)P\right)+\left(1C+\left(\frac{f}{g}\right)P\right)}{1+\frac{m}{n}-1-\frac{t}{s}+1+\frac{f}{g}}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{m}{n}\right)A_1+\left((-1)+\frac{t}{s}\right)B_1+\left(1+\frac{f}{g}\right)C_1}{1+\frac{m}{n}-\frac{t}{s}+\frac{f}{g}}\Rightarrow Z\in\alpha.$$

$$Z=\frac{(1A+(-1)B+1C)+\left(\left(\frac{m}{n}\right)P+\left(-\frac{t}{s}\right)P+\left(\frac{f}{g}\right)P\right)}{1+\frac{m}{n}-\frac{t}{s}+\frac{f}{g}}=\frac{1D+\left(\frac{m}{n}-\frac{t}{s}+\frac{f}{g}\right)}{1+\frac{m}{n}-\frac{t}{s}+\frac{f}{g}}\Rightarrow Z\in PD.$$

Следовательно, $Z = D_1$, причем из равенства

$$Z=\frac{1}{1+\frac{m}{n}-\frac{t}{s}+\frac{f}{g}}\left(1D+\left(\frac{m}{n}-\frac{t}{s}+\frac{f}{g}\right)\right)P\Rightarrow D_1=\frac{1}{1+\frac{m}{n}-\frac{t}{s}+\frac{f}{g}}$$

то есть $\frac{DD_1}{PD_1}=\frac{1}{1+\left(\frac{AA_1}{PA_1}\right)-\left(\frac{BB_1}{PB_1}\right)+\left(\frac{CC_1}{PC_1}\right)}$.

Ответ: $\frac{DD_1}{PD_1}=\frac{1}{1+\left(\frac{AA_1}{PA_1}\right)-\left(\frac{BB_1}{PB_1}\right)+\left(\frac{CC_1}{PC_1}\right)}$.

Задача № 6. Дано: $PABCD$ (рис. 45) – четырехугольная пирамида, $\frac{AA_1}{PA_1}=\frac{1}{2}$; $\frac{BB_1}{PB_1}=\frac{2}{3}$; $\frac{CC_1}{PC_1}=\frac{3}{2}$.

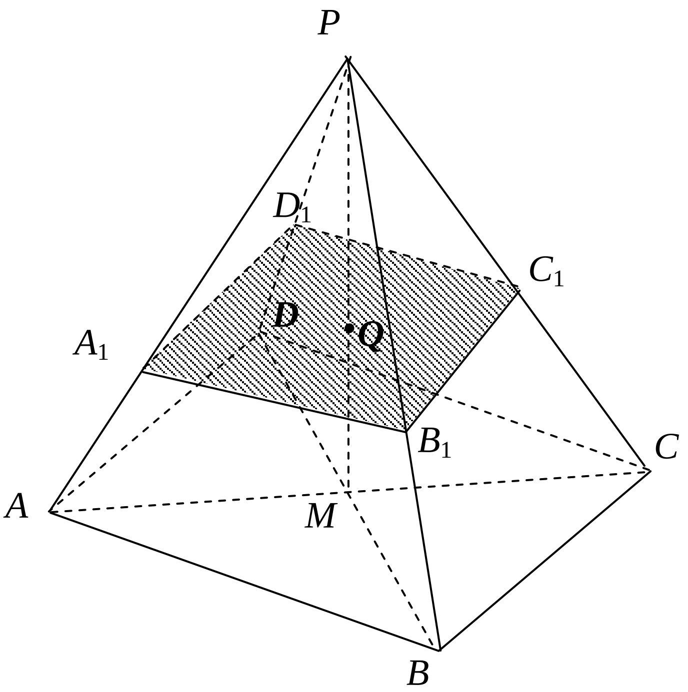


Рис. 45

Найти: $\frac{QM}{PQ}$.

Решение

Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 – точки пересечения ребер PA, PB, PC, PD с плоскостью α. Поместим в каждую из точек A, B, C и D массу, равную единице.

Так как: $AP=\frac{3}{2}A_1P$ и $AA_1=\frac{1}{2}A_1P$, то $\frac{3}{2}A_1=1A+\frac{1}{2}P$, то есть A_1 – центр масс множества точек $1A$ и $\frac{1}{2}P$.

Аналогично: $\frac{5}{3}B_1=1B+\frac{2}{3}P$; $\frac{5}{2}C_1=1C+\frac{1}{2}P$.

Воспользуемся формулой, выведенной в задаче № 5.

$$\frac{DD_1}{PD_1}=\frac{1}{1+\left(\frac{AA_1}{PA_1}\right)-\left(\frac{BB_1}{PB_1}\right)+\left(\frac{CC_1}{PC_1}\right)},$$

откуда $\dfrac{DD_1}{PD_1}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}$ то есть $\dfrac{10}{7}D_1=1D+\dfrac{3}{7}P$.

Далее, так как пирамида правильная, то $4M = 1A + 1B + 1C + 1D$.

$$Q=\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+\frac{10}{7}=\frac{149}{21}.$$

Пусть Q – центр масс всех шести рассмотренных материальных точек, то есть

$$\frac{149}{21}Q=\left(1A+\frac{1}{2}P\right)+\left(1B+\frac{2}{3}P\right)+\left(1C+\frac{3}{2}P\right)+\left(1D+\frac{3}{7}P\right)=$$
$$=\frac{3}{2}A_1+\frac{5}{3}B_1+\frac{5}{2}C_1+\frac{10}{7}D_1\Rightarrow Q\in\alpha.$$

Произведем другую группировку масс:

$$\frac{149}{21}Q=(1A+1B+1C+1D)+\left(\frac{1}{2}P+\frac{2}{3}P+\frac{3}{2}P+\frac{3}{7}P\right)=4M+\frac{65}{21}P\Rightarrow Q\in PM.$$

Значит, Q – точка пересечения плоскости α и отрезка PM. Из последнего равенства видно, что Q – центр масс материальных точек $\dfrac{65}{21}P$ и $4M$ и по правилу рычага $\dfrac{65}{21}PQ=4QM$, то есть $\dfrac{QM}{PQ}=\dfrac{65}{84}$

Ответ: $\dfrac{QM}{PQ}=\dfrac{65}{84}$.

Задача №7. Дано: $PABCD$ (рис. 46) – четырехугольная пирамида, $\dfrac{AA_1}{PA_1}=\dfrac{m}{n}$; $\dfrac{BB_1}{PB_1}=\dfrac{t}{s}$; $\dfrac{CC_1}{PC_1}=\dfrac{f}{g}$.

Найти: $\dfrac{QM}{PQ}$.

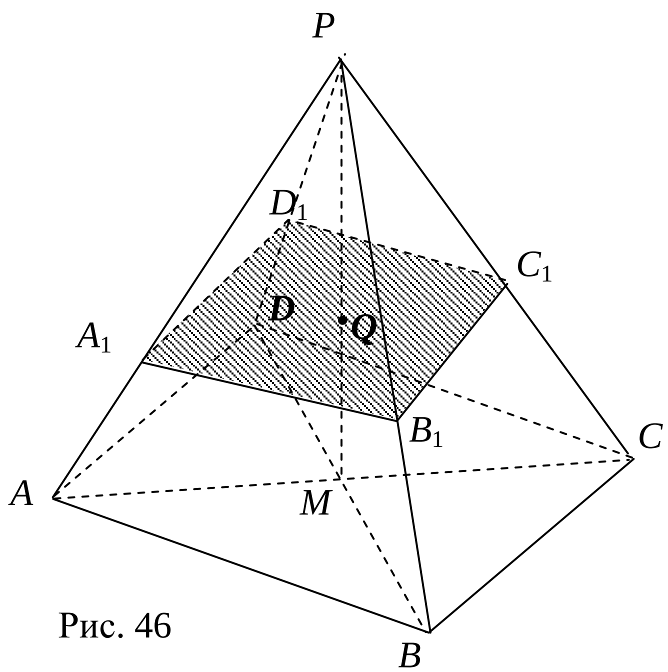


Рис. 46

Решение

Предположим, что $\frac{DD_1}{PD_1}=\frac{e}{h}$.

Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 – точки пересечения ребер PA, PB, PC, PD с плоскостью α. Поместим в каждую из точек A, B, C и D массу, равную единице.

Так как: $AP=\frac{m+n}{n}A_1P$ и $AA_1=\frac{m}{n}A_1P$, то $\frac{m+n}{n}A_1=1A+\frac{m}{n}P$, то есть A_1 – центр масс множества точек $1A$ и $\frac{m}{n}P$.

Аналогично:

$$\frac{t+s}{s}B_1=1B+\frac{t}{s}P;\ \frac{f+g}{g}C_1=1C+\frac{f}{g}P;\ \frac{e+h}{h}D_1=1D+\frac{e}{h}P.$$

Далее, так как пирамида правильная, то $4M = 1A + 1B + 1C + 1D$.

Пусть Q – центр масс всех шести рассмотренных материальных точек, то есть

$$\left(1A+\frac{m}{n}P\right)+\left(1B+\frac{t}{s}P\right)+\left(1C+\frac{f}{g}P\right)+\left(1D+\frac{e}{h}P\right)=$$

$$=\frac{m+n}{n}A_1+\frac{t+s}{s}B_1+\frac{f+g}{g}C_1+\frac{e+h}{h}D_1=$$

$$=\left(1+\frac{m}{n}+1+\frac{t}{s}+1+\frac{f}{g}+1+\frac{e}{h}\right)Q=\left(4+\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}+\frac{e}{h}\right)Q\Rightarrow Q\in\alpha.$$

Произведем другую группировку масс:

$$\left(4+\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}+\frac{e}{h}\right)Q=(1A+1B+1C+1D)+\left(\frac{m}{n}P+\frac{t}{s}P+\frac{f}{g}P+\frac{e}{h}P\right)=$$

$$=4M+\left(\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}+\frac{e}{h}\right)P\Rightarrow Q\in PM.$$

Значит, Q – точка пересечения плоскости α и отрезка PM. Из последнего равенства видно, что Q – центр масс материальных точек $\left(\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}+\frac{e}{h}\right)P$ и $4M$ и по правилу рычага

$\left(\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}+\frac{e}{h}\right)PQ=4QM$, то есть $\frac{QM}{PQ}=\frac{1}{4}\left(\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}+\frac{e}{h}\right)$, или, основываясь на примере задачи № 5, воспользуемся выведенной нами формулой:

$$\frac{QM}{PQ}=\frac{1}{4}\left(\frac{m}{n}+\frac{t}{s}+\frac{f}{g}+\frac{e}{h}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{BB_1}{PB_1}+\frac{CC_1}{PC_1}+\frac{DD_1}{PD_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{BB_1}{PB_1}+\frac{CC_1}{PC_1}+\frac{1}{1+\left(\frac{AA_1}{PA_1}\right)-\left(\frac{BB_1}{PB_1}\right)+\left(\frac{CC_1}{PC_1}\right)}\right).$$

Ответ: $\frac{QM}{PQ}=\frac{1}{4}\left(\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{BB_1}{PB_1}+\frac{CC_1}{PC_1}+\frac{1}{1+\left(\frac{AA_1}{PA_1}\right)-\left(\frac{BB_1}{PB_1}\right)+\left(\frac{CC_1}{PC_1}\right)}\right)$.

Последнее задание по сути выражает такую теорему: «Если плоскость делит боковые ребра правильной пирамиды в каких-либо отношениях, то, основываясь на этих условиях, можно найти, в каком отношении делит эта плоскость высоту пирамиды».

Указание: Используйте идею «точек масс» (Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1997).

Приведем основные сведения, необходимые для решения.

Пусть на плоскости задана система точек с приписанными им массами, то есть имеется набор пар (X_i; m_i), где X_i – точка плоскости, а m_i – положительное число. Центром масс системы точек X_1, X_2,…, X_n с массами m_1, m_2,…, m_n называют точку O, для которой выполняется равенство

$$m_1\overrightarrow{OX_1}+m_2\overrightarrow{OX_2}+\mathrm{K}\ +m_n\overrightarrow{OX_n}=\vec{0}.$$

Центр масс любой системы точек существует, причем только один.

Важнейшим свойством центра масс, на котором основаны почти все его применения, является теорема о группировке масс: центр масс системы точек останется прежним, если часть точек заменить одной точкой, которая расположена в их центре масс и которой приписана масса, равная сумме их масс.

Рассмотрите исследуемую проблему для правильной пятиугольной пирамиды.

38. Исследуйте следующие вопросы:

а) На какие шесть треугольников (по площади) делят треугольник его медианы (Ответ: Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольника).

б) Для произвольного треугольника существует зависимость между его площадью и площадью треугольника, построенного на его медиане (Ответ: Площадь треугольника, построенного на медиане, равна $\frac{3}{4}$ площади исходного треугольника). Докажите отмеченный факт.

в) Исследуйте аналогичные вопросы на случай биссектрис и высот.

г) Докажите следующие равенства, опираясь на рисунок (рис. 47).

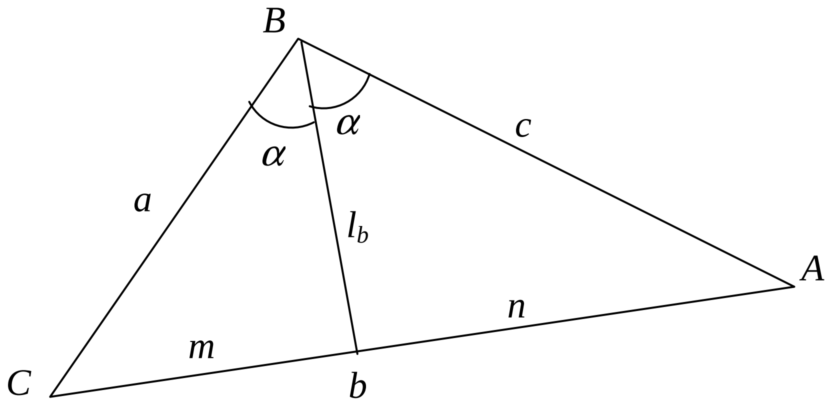


Рис. 47

$l_b^2 = ac - mn;$

$l_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\alpha.$

д) Можно ли найти площадь треугольника, если он разбит на n частей лучами, проведенными из вершин треугольников, и если известна площадь одной из частей?

На этот вопрос отвечает следующая теорема: «Если площадь треугольника разбита на n неравновеликих частей лучами, проведенными из вершин треугольника, притом, что площадь одной из частей известна, то всегда можно найти площадь всего треугольника».

Указание: Используйте идею «точек масс» (Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1997).

39. Используя теорему о группировке масс, решите следующие задачи:

а) Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остается на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан треугольников ABC, если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.

б) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}$. Докажите, что центры масс треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

40. Есть много неверных утверждений, которые на первый взгляд кажутся верными, но на самом деле эти утверждения ложны. Для опровержения такого рода утверждений нужно построить соответствующий Контрпример. Рассмотрите нижеследующие утверждения и вопросы:

а) Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 $м^2$?

(Ответ: Да, существует. Действительно, рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами AB = 1 *см* и BC = 500 *м*. Пусть O – точка пересечения его диагоналей. Легко проверить, что площадь ΔAOD больше 1 $м^2$, а все его высоты меньше 1 см).

б) Будет ли прямоугольником четырехугольник $ABCD$, у которого два противоположных угла ($\angle A$ и $\angle C$) равны по 90°?

(Ответ: Необязательно, например, четырехугольник (рис. 48), удовлетворяющий указанным условиям, прямоугольником не является).

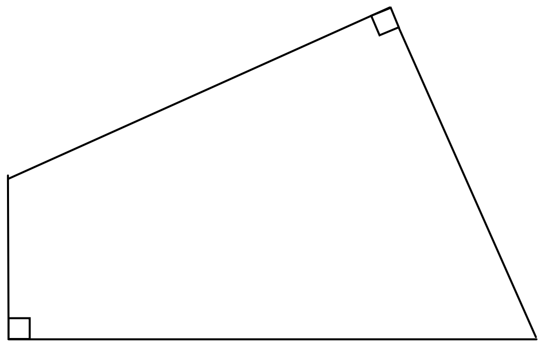


Рис. 48

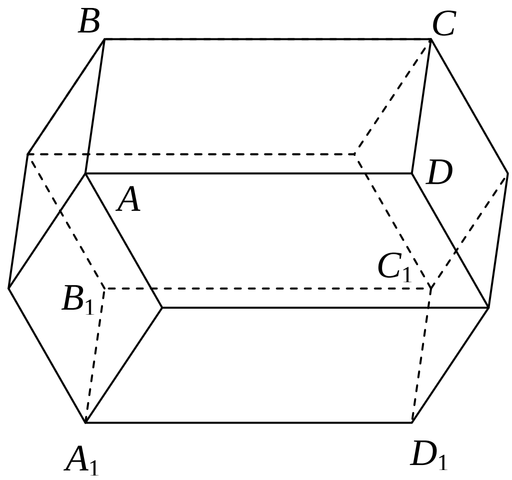


Рис. 49

в) Верно ли следующее определение призмы: «Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани параллелограммы».

(Ответ: Определение неверно. Контрпример приведен на рис. 49).

г) Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные грани которой перпендикулярны основанию пирамиды?

(Ответ: Такая пирамида существует. Приведите пример такой пирамиды.)

д) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны: стороны AB и CD; углы A и C. Обязательно ли этот четырехугольник параллелограмм?

(Ответ: Нет, необязательно. На рисунке 50 показано, как получить нужный четырехугольник $ABCD$).

е) В остроугольном ΔABC проведены медиана AM, биссектриса BK и высота CH. Может ли площадь треугольника, образованного точками пересечения этих отрезков, быть больше $0{,}499S_{ABC}$?

(Ответ: Да, может.)

ж) Существует ли выпуклый многогранник, имеющий только шестиугольные грани?

(Ответ: Не существует; докажите этот факт).

Указание: воспользуйтесь формулой Эйлера для многогранников: В + Г – Р = 2, где В – число вершин; Г – число граней, Р – число ребер).

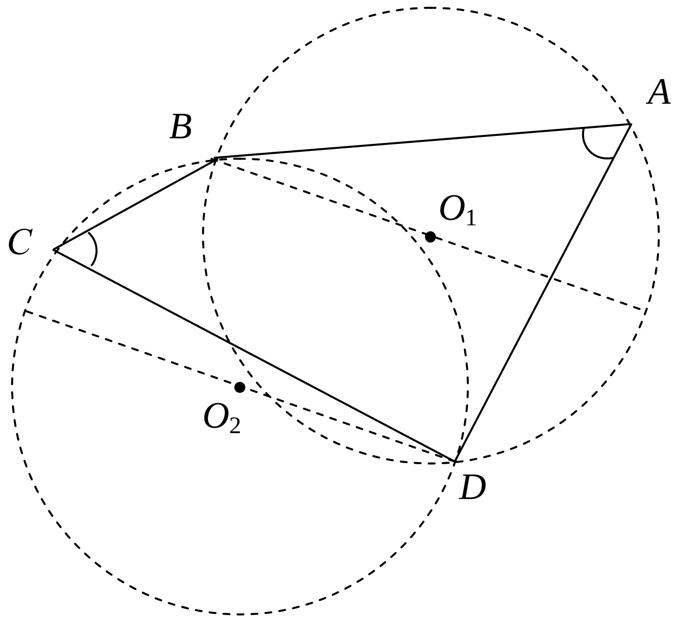


Рис. 50

41. Докажите равенство:

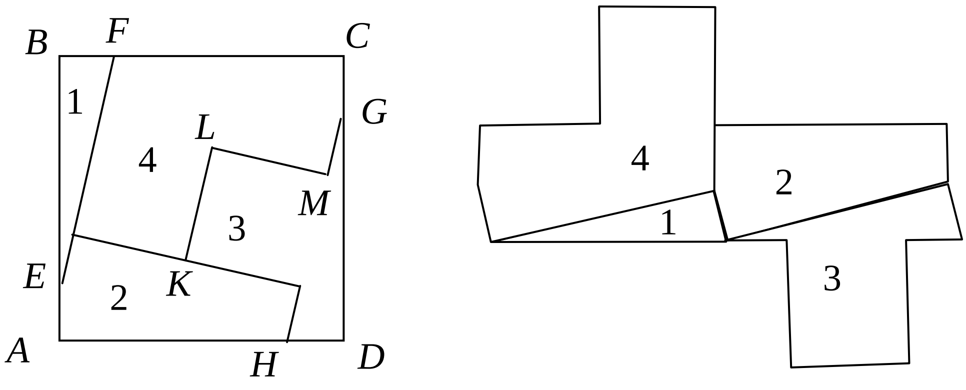
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

Обобщите это равенство, распространяя его на все другие случаи.

(Ответ: При любом четном $n = 2k$ справедливо равенство $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$).

42. Разрезать бумажный квадрат размером $\sqrt{6}\times\sqrt{6}$ на четыре части, которыми можно оклеить куб размером 1 х 1 х 1.

(Ответ: Разрезать квадрат можно так, как показано на рис. 51. Здесь *ABCD*, *EFGH* и *KLMN* – квадрат, $AB = \sqrt{6}$, $EF = 2$, а точки *M* и *N* делят отрезок *GH* в отношении 1 : 2 : 1).



а) б)

Рис. 51

Бумажной фигурой, составленной из полученных четырех частей (см. рис. 51б), оклеивается куб.

43. Можно ли расставить на ровной поляне четыре одинаковые каменные (цилиндрической формы, высотой с человека) тумбы и проложить круглую дорожку вокруг них так, чтобы из любой точки этой тропинки (кроме, быть может, нескольких отдельных точек) три тумбы были бы хотя бы частично видны, а четвертая была ими полностью загорожена?

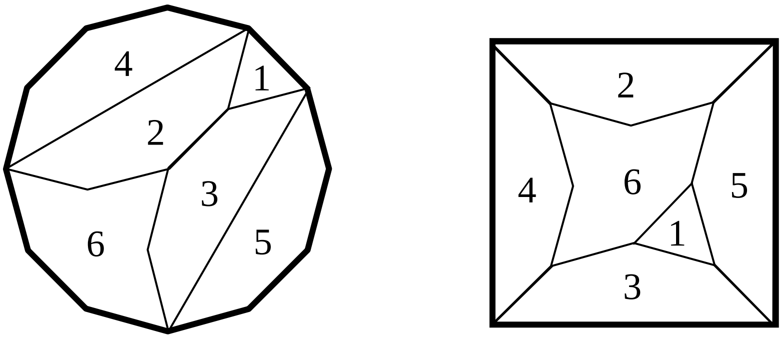
(Ответ: Да. Сделайте рисунок, на котором будут показаны четыре тумбы, три из которых стоят вплотную к четвертой, центральной. Радиус тропинки следует выбрать так, чтобы на ней пересекались касательные к парам окружностей (докажите, что отношение радиусов тропинки и тумбы равно $\sqrt{20+8\sqrt{3}}$).

44. Как разрезать правильный двенадцатиугольник, чтобы из его частей можно было бы сложить квадрат (рис. 52а)?

Тонкими линиями показаны линии разреза. Решение задачи проиллюстрировано на рис. 52б.

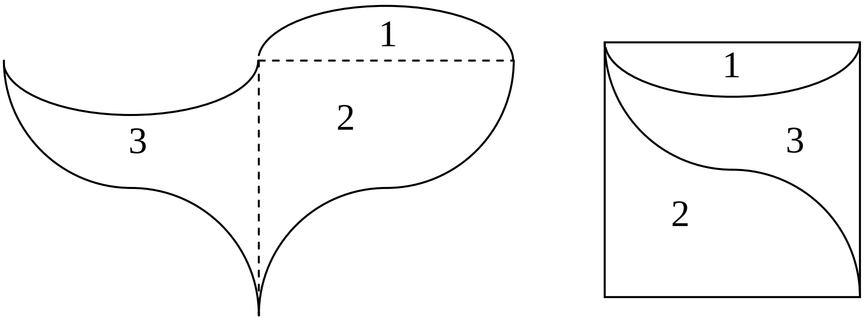
45. Как разрезать фигуру, изображенную на рис. 53а, на три части так, чтобы затем из них сложить квадрат?

Пунктиром показаны линии разреза. Решение задачи проиллюстрировано на рис. 53б.



а) б)

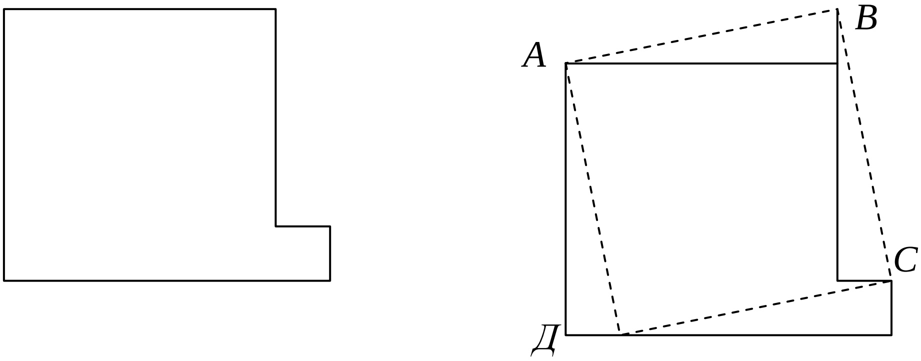
Рис. 52



а) б)

Рис. 53

46. Разрезать фигуру, изображенную на рис. 54а, на три части так, чтобы из них можно было бы сложить квадрат. Решение задачи показано на рис. 54б: квадрат *ABCD*.

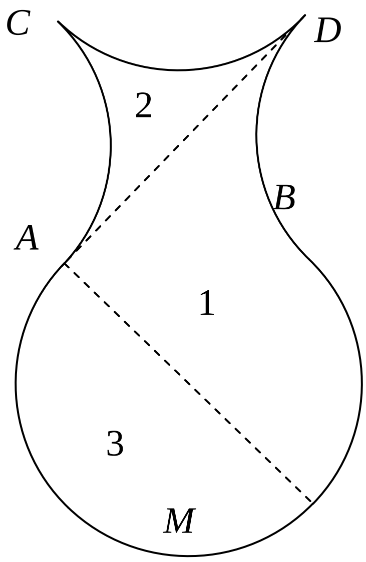


а) б)

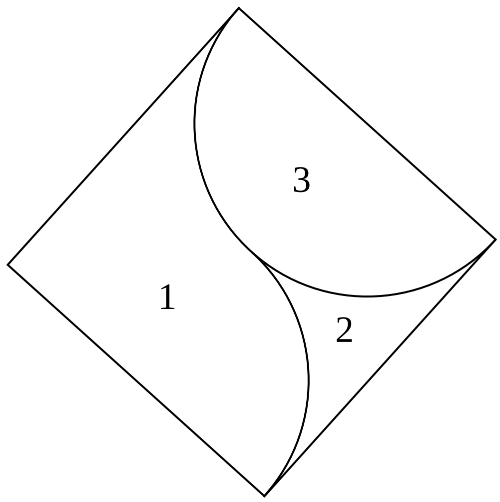
Рис. 54

47. Разрезать фигуру, изображенную на рис. 55а, на три части так, чтобы из них можно было бы получить квадрат.

Изображенная фигура состоит из дуги AMB, которая представляет собой $\frac{3}{4}$ окружности радиуса 5 см; дуги CD, AC, BD равны $\frac{1}{4}$ той же окружности. На рисунке пунктиром показана линия разреза. Искомый квадрат показан на рис. 55б.



а)

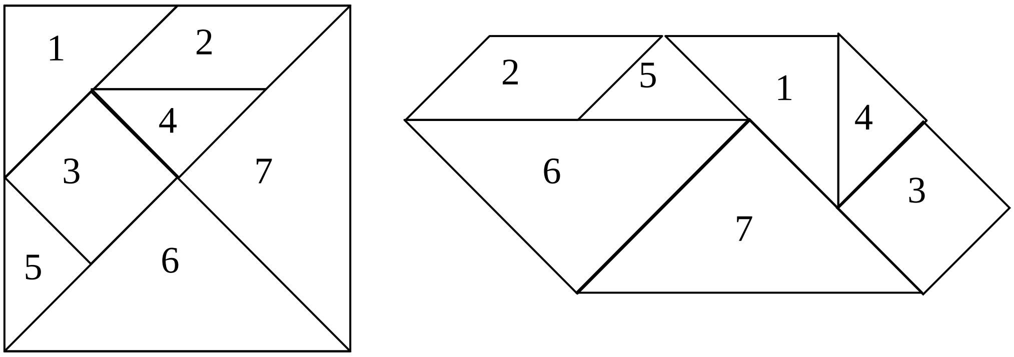


б)

Рис. 55

Вообще следует заметить, что задачи, подобные задачам №№ 36, 37, 38, 39, несут в себе большую смысловую нагрузку. По сути дела они отрабатывают понятие равновеликости фигур, а в данном случае еще и вопрос о квадратуре фигур (обратить данную фигуру в равновеликий с ней квадрат значит найти квадратуру данной фигуры).

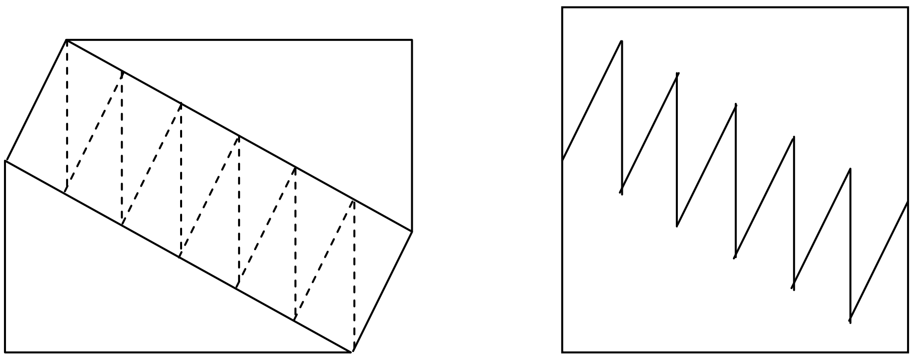
48. Вырежьте из листа бумаги квадрат. Разрежьте его так, как показано на рис. 56а. Из полученных семи частей составьте 13 различных выпуклых многоугольников. На рис. 56б показан самый трудный из них – выпуклый шестиугольник. (Это древнейшая китайская игра танграм, известная в Китае под названием чи-чао-тю – хитроумный узор из семи частей).



а) б)

Рис. 56

49. Разрезать фигуру, изображенную на рис. 57, на две части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник. Решение задачи показано на рис. 57б.

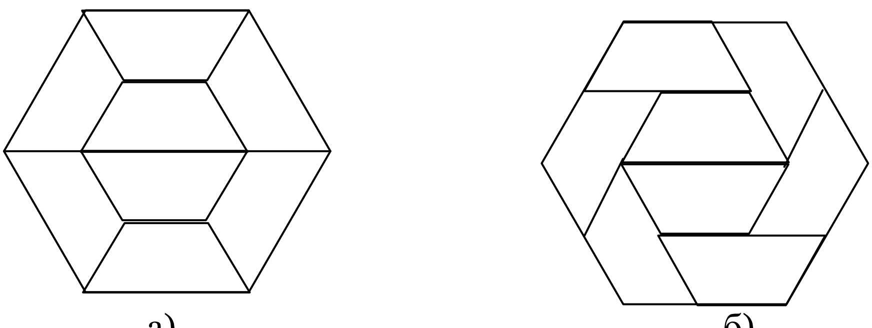


а) б)

Рис. 57

50. Разрезать правильный шестиугольник на 8 равных частей.

Два возможных способа показаны на рисунке 58 а,б.



а) б)

Рис. 58

51. Разрезать фигуру, изображенную на рисунке 59а, на четыре равные части. Ответ к задаче показан на рисунке 59б.

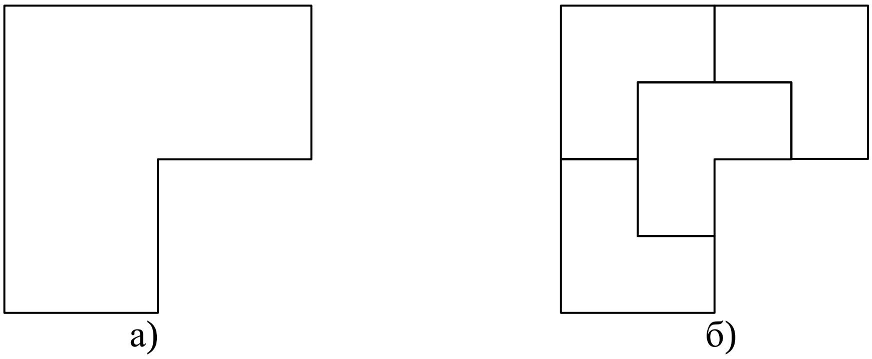


Рис. 59

52. Квадрат разрезали по его диагоналям на четыре равных треугольника. Покажите, какие выпуклые многоугольники можно сложить из этих четырех треугольников.

Приведем некоторые выпуклые многоугольники, которые можно сложить из образовавшихся четырех треугольников (рис. 60 а, б, в, г, д).

Заметим, что эта задача может решаться либо с помощью модели, либо мысленным конструированием.

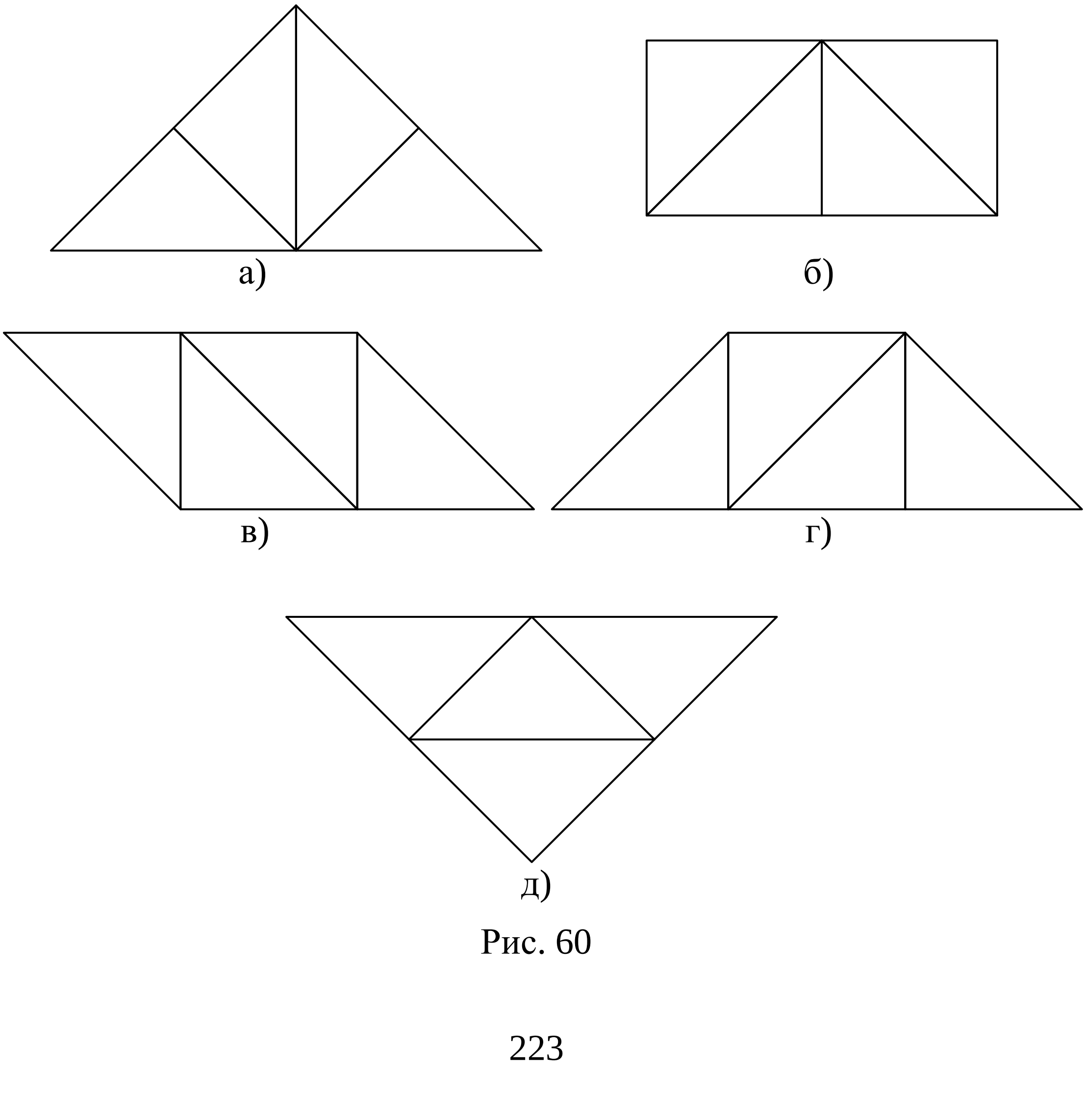


Рис. 60

53. Как разрезать прямоугольник на:

а) четыре равных треугольника;

б) шесть равных треугольников;

в) четыре равных прямоугольника;

г) пять равных прямоугольников;

д) три равнобедренных треугольника;

е) четыре равнобедренных треугольника?

54. Решите задачу: «Четверо охотятся на зайца, сидящего в одной из вершин куба. Охотникам заяц не виден, и они стреляют по вершинам куба залпом, то есть все одновременно делают по выстрелу – каждый в свою вершину (любую, по его выбору). Если в какой-то из них оказался заяц, то он будет убит. Если никто не попал в зайца, то до следующего залпа заяц либо перебегает по ребру в одну из соседних вершин (любую, по своему выбору), либо остается на месте. Есть ли у охотников способ наверняка убить зайца?

(Ответ: Нет).

55. Как сделать теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом средством познания.

В педагогической литературе различают меру и характер обученности. И.Я. Лернер отмечает, что мера обученности обусловлена объемом усвоенного школьником содержания образования; характер обученности определяется видом усвоенного содержания образования.

Как уже было сказано ранее, в настоящее время акцент в учебном процессе сделан на меру обученности. Об этом свидетельствуют и огромное число дисциплин в школе, и чрезмерно перегруженные программы школьных курсов, и используемые учителем технологии обучения, в основном ориентированные на передачу учащимся готовой учебной информации. Логика научного открытия изучаемого материала, процесс получения знаний в таком случае остаются часто скрытыми от учащихся, и они видят их как результат обработки авторами учебника или учителем.

Нельзя сказать, чтобы сформулированные в школьной программе цели обучения математике определены неправильно. Каждая из них сама по себе в отдельности вполне разумна и правомерна. Но недостаток состоит в том, что взятые вместе, они образуют только некоторый эклектический конгломерат, в котором не ясна внутренняя связь между отдельными целями и способами их достижения. Получается так, что знания накапливаются как-то сами по себе, умения и навыки формируются попутно с накапливаемыми знаниями, а параллельно этому идут процессы развития мышления и способностей учащихся.

Ведущей функцией обучения учащихся доказательству должна быть развивающая, а не информационная. Изучение теорем в школе имеет своей целью не только сообщение школьникам некоторых математических результатов, но и методов, с помощью которых эти результаты получаются. Уместно в связи с этим напомнить слова А. Дистервега: «Плохой учитель преподносит истину, хороший – учит ее находить».

В качестве примера, подтверждающего целесообразность перевода теоремы из предмета изучения в средство изучения, рассмотрим из курса алгебры 8 класса теорему о среднем геометрическом и среднем арифметическом двух положительных чисел.

I. Докажем, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ имеют место следующие неравенства:

1) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$;

2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$;

3) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$;

4) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$;

5) $\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$;

6) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{2}$; при $0< x < \pi/2$.

Докажем эти неравенства поочередно.

1) Запишем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом на случай чисел a и b, b и c, a и c: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$; $b+c \geq 2\sqrt{bc}$; $a+c \geq 2\sqrt{ac}$. Так как левая и правая части этих неравенств при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ положительны, то эти неравенства одинакового смысла можно почленно перемножить, в результате чего получим: $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ac}$. Окончательно имеем: $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$.

2) Запишем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом для пар чисел a и b, $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$. Обе части неравенств положительны, неравенства одинакового смысла, значит, мы их можем почленно перемножить. Будем иметь: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{ab}}$. Преобразовав правую часть неравенства, окончательно получим: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$;.

3) Запишем на основании указанной теоремы следующие неравенства для пар чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$; $\frac{c}{a}$ и 1: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}} = 2\sqrt{\frac{a}{c}}$; $\frac{c}{a}+1 \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot 1} = 2\sqrt{\frac{c}{a}}$. Сложив полученные неравенства почленно, получим:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}} = 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right). \qquad (1)$$

Запишем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\sqrt{\frac{a}{c}}$ и $\sqrt{\frac{c}{a}}$:

$$\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}} = 2.$$

Тогда неравенство (1) может быть записано в следующем виде: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1 \geq 4$. Откуда окончательно имеем: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$;

4) Запишем теорему для пар чисел a^4 и b^4, c^4 и d^4:

$$a^4+b^4 \geq 2\sqrt{a^4b^4}=2a^2b^2;\ c^4+d^4 \geq 2\sqrt{c^4d^4}=2c^2d^2.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2(a^2b^2 + c^2d^2). \quad (2)$$

По теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем неравенство: $a^2b^2+c^2d^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^2d^2}=2abcd$.

С учетом последнего неравенства, неравенство (2) может быть записано следующим образом: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

5) Запишем в развернутом виде квадрат суммы трех чисел:

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+$$

$$+2ac+2bc+c^2=\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)+\frac{1}{2}\left(2ab+2bc+2ac\right)=$$

$$=\left(a^2+bc\right)+\left(b^2+ac\right)+\left(c^2+ab\right)+\frac{ab+ac}{2}+\frac{bc+ab}{2}+\frac{ac+bc}{2}.$$

Применим к каждой скобке: $(a^2 + bc)$; $(b^2 + ca)$; $(c^2 + ab)$ теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом неотрицательных чисел. Будем иметь $a^2+bc \geq 2a\sqrt{bc}$; $b^2+ac \geq 2b\sqrt{ac}$; $c^2+ab \geq 2c\sqrt{ab}$.

Эту же теорему применим и к каждому из слагаемых:

$$\frac{ab+ac}{2}=\frac{ab}{2}+\frac{ca}{2};\frac{bc+ab}{2}=\frac{bc}{2}+\frac{ab}{2};\frac{ac+bc}{2}=\frac{ac}{2}+\frac{bc}{2};$$

$$\frac{ab}{2}+\frac{ca}{2} \geq a\sqrt{bc};\frac{bc}{2}+\frac{ab}{2} \geq b\sqrt{ac};\frac{ac}{2}+\frac{bc}{2} \geq c\sqrt{ab}.$$

Тогда мы можем записать:

$$(a+b+c)^2 \geq 2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ac}+2c\sqrt{ab}+a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}=$$

$$=3a\sqrt{bc}+3b\sqrt{ac}+3c\sqrt{ab}.$$

Откуда окончательно имеем: $\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$;

6) При $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ значения $\dfrac{1}{\sin x}$ и $\dfrac{1}{\cos x}$ положительны, а значит, мы можем записать, согласно теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом, такое неравенство:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\ge 2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}.$$

Для $x \in (0; \pi/2)$ очевидно, что $0<\sqrt{\sin 2x}<1$, но тогда имеем: $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}\ge 2\sqrt{2};$.

Аналогичным образом могут быть доказаны для положительных чисел a, b, c и такие неравенства:

а) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c;$

б) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2};$

в) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9;$

г) $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\ge\dfrac{a+b+c}{3};$

д) $a^4+b^4+c^4\ge 2\sqrt{2}abc;$

е) $\dfrac{a^2}{(b-1)^2}+\dfrac{c^2}{(b-1)^2}+\dfrac{b^2}{(a-1)^2}+\dfrac{c^2}{(a-1)^2}\ge\dfrac{4\sqrt{abc}}{(a-1)(b-1)}.$

II. Теорему о среднем можно применить и к решению задач геометрии. Покажем это на двух задачах.

Задача 1. Прямоугольный параллелепипед задан тремя своими измерениями a, b, c. Можно ли подобрать такие числовые значения a, b, c, чтобы объем прямоугольного параллелепипеда был бы численно больше 1/3 суммы объемов трех кубов с ребрами a, b, c?

Решение

Объем прямоугольного параллелепипеда можно записать в таком виде: $V=abc=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$. По теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех положительных чисел a^3, b^3, c^3 имеем $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} > \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = V$. Итак, имеем $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} > V$, что позволяет ответить на вопрос задачи отрицательно.

Задача 2. Задана площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда. Найти максимум его объема.

Решение

Пусть *a, b, c* – три измерения прямоугольного параллелепипеда, *S* – площадь полной поверхности, *V* – объем. Очевидно такое равенство $S = 2(ab + ac + bc)$. Объем будет выражаться формулой $V = abc$. Сумма трех чисел *ab, ac, bc* равна $\dfrac{S}{2}$, а их произведение равно V^2. По теореме о среднем мы можем записать:

$$V^2 = (abc)^2 < \left(\frac{ab+bc+ac}{3}\right)^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^3.$$

Имеем $V < \sqrt{\left(\dfrac{S}{6}\right)^3}$. Если $ab = bc = ac$, что то же самое, $a = b = c$ мы получим $V = \sqrt{\left(\dfrac{S}{6}\right)^2}$. Можно сделать вывод, что из всех прямоугольных параллелепипедов с данной площадью поверхности куб имеет наибольший объем.

III. Теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом можно использовать и для решения уравнений. Покажем это на примере.

Задача: Решить уравнение

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2} + \sqrt{x^2-3x^3+2x-1} = 2x^2+2x+2.$$

Решение

Для решения этого уравнения воспользуемся несколько раз теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Первое слагаемое, стоящее в левой части неравенства, запишем в виде $\sqrt{1\cdot\left(3x^3+2x^2+2\right)}$ и тогда это есть среднее геометрическое 1 и $3x^3+2x^2+2$. По теореме имеем $\sqrt{1\cdot\left(3x^3+2x^2+2\right)}\le\dfrac{3x^3+2x^2+2+1}{2}$;

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}\le\frac{3x^3+2x^2+3}{2} \qquad (1)$$

Аналогично поступаем со вторым слагаемым. Будем иметь

$$\sqrt{x^2-3x^3+2x-1}\le\frac{x^2-3x^3+2x}{2} \qquad (2)$$

Сложив почленно неравенства (1) и (2), будем иметь

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{x^2-3x^3+2x-1}\le\frac{3x^3+2x^2+3}{2}+\frac{x^2-3x^3+2x}{2},$$

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{x^2-3x^3+2x-1}\le\frac{3x^2+2x+3}{2}.$$

Раз левая часть исходного уравнения не больше выражения $\dfrac{3x^2+2x+3}{2}$, то и его правая часть должна обладать тем же свойством, то есть $2x^2+2x+2\le\dfrac{3x^2+2x+3}{2}$.

Решим это неравенство:

$$4x^2+4x+4\le 3x^2+2x+3,$$

$$x^2+2x+1\le 0,$$

$$\left(x+1\right)^2\le 0,$$

$$x=-1.$$

Здесь приведем еще одно уравнение, решаемое на основе этой теоремы:

$$\sqrt{x^6+x^5-2x^2+2x-1}+\sqrt{3x^2-x^6-x^5}=\frac{3x^2-2x+3}{2}.$$

Ответ: $x=1$.

IV. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{4^{3-5x^2}}+4\sqrt{4^{5x^2-2}}$.

Учитывая, что каждое слагаемое суммы положительно, применим теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Будем иметь $y=\sqrt{4^{3-5x^2}}+4\sqrt{4^{5x^2-2}}\geq 2\sqrt{\sqrt{4^{3-5x^2}}\cdot 4\sqrt{4^{5x^2-2}}}=4\sqrt{\sqrt{4^{3-5x^2}\cdot 4^{5x^2-2}}}=$

$=4\sqrt{\sqrt{4^{3-2}}}=4\sqrt{2}$. Итак, наименьшее значение функции равно $4\sqrt{2}$.

Мы привели лишь несколько примеров, иллюстрирующих теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом не с позиции предмета изучения, а средства обучения. Пытливый ум читателя, его опыт позволят расширить число таких примеров, в чем мы и желаем ему успехов.

Заметим, что судить об уровне развития познавательно-исследовательской деятельности можно судить по тому, способен ли учащийся сделать средством познания то, что прежде являлось предметом изучения.

56. Числовая функция для любых действительных чисел x и y удовлетворяет равенству $f(x+y)=f(x)+f(y)+80xy$. Найдите $f\left(\frac{4}{5}\right)$, если $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$.

Решение

Так как $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$, то будем иметь:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+80\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=2+2+5=9.$$

Имеем также, что

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+80\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=9+9+20=38.$$

Обозначим $f\left(\frac{1}{5}\right)=a$. $f\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+80\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=2a+\frac{16}{5}$.

Имеем также следующее равенство:

$$f\left(\frac{4}{5}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+80\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=2\left(2a+\frac{16}{5}\right)+\frac{64}{5}=4a+\frac{96}{5}.$$

Теперь имеем:

$$38=f(1)=f\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+80\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=4a+\frac{96}{5}+a+\frac{64}{5}=5a+32.$$

Из равенства $5a + 22 = 38$ получаем: $a = \frac{6}{5}$, тогда

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 4 \cdot \frac{6}{5} + \frac{96}{5} = 24.$$

57. Поисково-исследовательская деятельность учащихся может быть направлена на обобщение известных фактов. Покажем это на следующих примерах.

а) Точка *K* делит медиану *AD* треугольника *ABC* (рис. 61а) в отношении 3 : 1, считая от вершины. В каком отношении прямая *BK* делит площадь треугольника *ABC*?

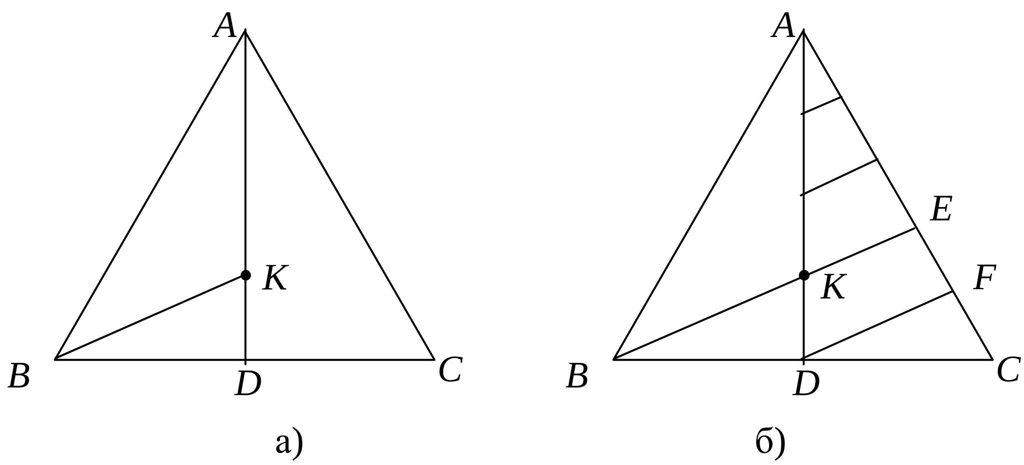


Рис. 61

Решение

Треугольники *BAE* и *BEC* имеют общую вершину и их основания лежат на одной прямой, так что искомое отношение их площадей равно отношению длин отрезков *AE* и *EC*, и, таким образом, требуется узнать, в каком отношении прямая *BE* делит сторону *AC*.

Вычислительный путь связан с большими трудностями и вряд ли приведет к успеху. Воспользуемся геометрической идеей решения. В самом деле, нам надо узнать, в каком отношении делится одна сторона угла *DAC*, если его вторая сторона разделена на 4 равных отрезка.

Проведем через точки деления медианы прямые, параллельные *BK* (рис. 61б). На стороне *AC* возникают четыре равных отрезка. Так как AD – медиана ($BD = DC$) и $DF \parallel BE$, то DF – средняя линия ΔBCE, и, следовательно, $FC = EF$.

Таким образом, сторона AC разделена на 5 равных отрезков и искомое отношение равно 3 : 2.

В качестве исследовательского задания предлагаем обобщить эту задачу (вместо отношения 3 : 1 взять отношение $k : m$; в решении существенно не то, что AD – медиана, а лишь то, что точка D делит BC в известном отношении).

б) Решите задачу: «На боковых сторонах AB и AC равнобедренного ΔABC (рис. 62) взяты точки K и L так, что $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{AL}{LC} = \frac{1}{2}$. В каком отношении прямая KL делит высоту AD?»

Идея решения этой задачи та же, что и в предыдущей задаче.

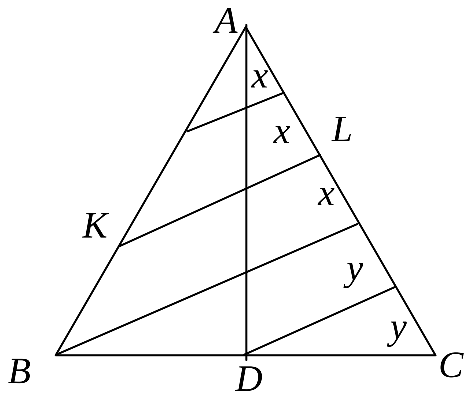


Рис. 62

Обобщите эту задачу, взяв произвольный треугольник ABC, в котором известно, в каком отношении делят его стороны точки D, K и L.

в) Решите задачу: «Дана трапеция (рис. 63) с основаниями 2 см и 5 см. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найти длины полученных отрезков».

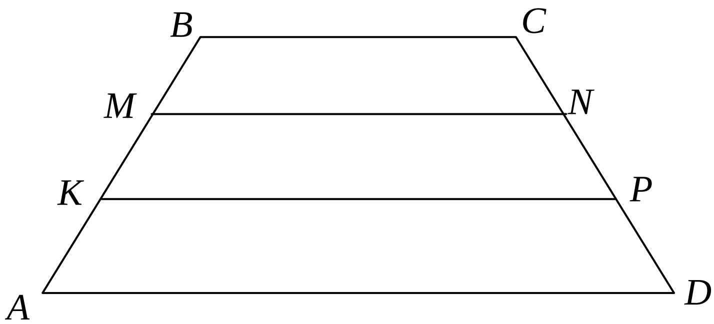


Рис. 63

Длины отрезков MN и KP можно найти, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} MN = \dfrac{2 + KP}{2}, \\ KP = \dfrac{5 + MN}{2}. \end{cases}$$

Решите ту же самую задачу для случая, когда боковая сторона разделена на 6 равных частей. Ясно, что решать эту задачу таким же путем, как и предыдущую, не следует (мы будем иметь систему пяти уравнений с пятью неизвестными).

Решать эту задачу следует по рис. 64.

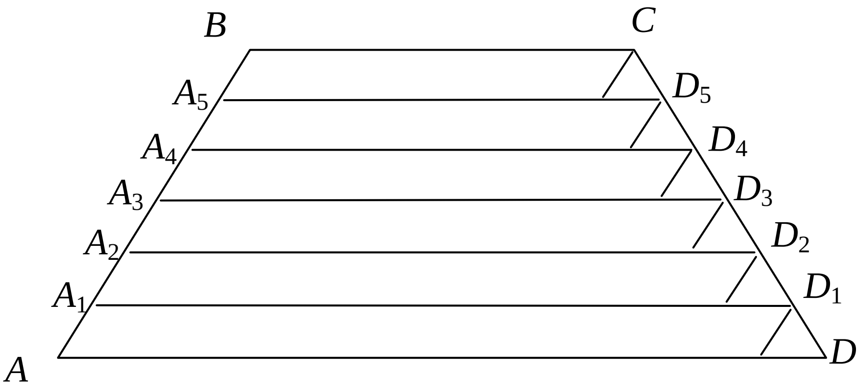


Рис. 64

Обобщите эти две задачи на случай, когда основания трапеции равны a и b, а боковая сторона разделена на n равных частей.

58. Поисково-исследовательская деятельность учащихся может быть направлена на всестороннее изучение того или иного объекта. Приведем примеры таких заданий.

1) Исследование функции $f(x) = \ln\left(e^{x} + 3e^{-x}\right)$.

1. Преобразования

1.1. Вычислите $f(\ln 3)$.

1.2. Докажите тождество $f(x) = f(\ln 3 - x)$.

1.3. Докажите, что при всех x выполняется неравенство $f(x) > x$.

1.4. Докажите, что при всех x выполняется неравенство $f(x) > -x + \ln 3$.

2. Исследование

2.1. Какой вывод о расположении графика функции *f(x)* можно сделать из свойств 1.3 и 1.4?

2.2. Докажите, что прямая $x=\ln\sqrt{3}$ является осью симметрии графика функции *y* = *f(x)*.

2.3. Как ведет себя график функции *y* = *f(x)* при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$?

2.4. Начертите график функции y, опираясь на свойства 2.1–2.3. Каковы координаты точки минимума?

2.5. Проведите аналитическое исследование функции *y* = *f(x)*.

3. Уравнения и неравенства

3.1. Решите уравнение *f(x)* = 2ln 2.

3.2. При каких *a* уравнение *f(x)* = *a* имеет два положительных корня?

3.3. Решите уравнение *f(x)* = *x* + ln 7.

3.4. Решите неравенство *f(x)* < ln 5 – *x*.

4. Производная

4.1. Докажите, что производная функции *y* = *f(x)* возрастает на всей числовой оси.

4.2. Найдите область значений производной функции *y* = *f(x)*.

2) Исследование функции $f(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$.

1. Преобразования

1.1. Вычислите $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

1.2. Докажите тождество $f(x)=1-\dfrac{2}{9^x+1}$.

1.3. Вычислите $f\left(\log_3\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

1.4. Докажите тождество $f(u+v)=\dfrac{f(u)+f(v)}{1+f(u)f(v)}$.

2. Исследование

2.1. Докажите, что функция *f(x)* – нечетная.

2.2. Докажите, что при всех *x* верно неравенство –1 < *f(x)* < 1.

2.3. Найдите предельные значения *f(x)* при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

2.4. Докажите, что функция *f(x)* возрастает на всей числовой оси.

2.5. Постройте график функции *y = f(x)*.

3. Уравнения и неравенства

3.1. Решите уравнение $f(x) = -\frac{1}{2}$.

3.2. Решите уравнение $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.3. Решите неравенство $f(x) > \frac{8}{9^x + 1}$.

4. Производная

4.1. Докажите тождество $f'(x) = \left(1 - f^2(x)\right)\ln 3$.

4.2. Найдите наибольшее значение первой производной функкции *f(x)*.

4.3. По графику функции *y = f(x)* постройте эскизы графиков функций *f '*, *f ''*, *f '''*.

4.4. Докажите, что абсциссы точек перегиба графика *f '(x)* (они же – экстремумы *f ''* или корни *f '''*) удовлетворяют уравнению $3f^2(x) = 1$. Найдите их.

3) Исследование функции $f(x) = \frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{4}{1 - \log_2 x}$.

1. Исследование вспомогательной функции $f(x) = \frac{1}{1+t} + \frac{4}{1-t}$.

1.1. Найдите область определения функции *y = y(t)*.

1.2. Найдите корни функции *y = y(t)*.

1.3. Вычислите координаты экстремумов функции *y = y(t)*.

1.4. Найдите предельные значения функции *y = y(t)* при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$.

1.5. Постройте график функции *y = y(t)*.

2. Исследование функции $y = f(x)$

2.1. Составьте таблицу значений x, при которых $\log_2 x = -1;\ 1;$ $-\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3}$; –3; 0.

2.2. Найдите область определения функции $y = f(x)$.

2.3. Найдите ее точки экстремума.

2.4. Вычислите предельные значения функции $y = f(x)$ в граничных точках области определения.

2.5. Постройте график функции $y = f(x)$.

2.6. Найдите ее область значений.

3. Уравнения и неравенства

3.1. Решите уравнение $f(x) = \frac{1}{2}$.

3.2. Решите неравенство $f(x) \geq 5$.

3.3. Найдите число решений уравнения $f(x) = a$ в зависимости от a.

4. Производная

4.1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 1$.

4.2. Вычислите приближенное значение $f(0{,}97)$.

4) Дан тетраэдр $PABC$, $BA = BC = BP = 1$, $BP \perp (ABC)$, $AB \perp BC$.

а) Нарисуйте его плоскости симметрии.

б) Установите форму сечения плоскостью, проходящей:

– через AB;

– через AC;

– параллельно (PAC);

– через B параллельно AC.

в) Вычислите расстояния:

– от C до (PAB);

– от B до (PAC);

– между PB и AC.

г) Вычислите углы между:

– PC и плоскостями граней;

– PC и AB;

– (APC) и плоскостями граней;

– двумя плоскостями симметрии.

д) Найдите площадь сечения, проходящего через PA под углом φ к (PAB).

е) Вычислите радиус сферы:

– описанной около тетраэдра;

– вписанной в тетраэдр.

5) Исследование уравнения $\left(\sqrt{a-x^2}-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$ (таблице 10)

Таблица 10

1. Решение "в лоб"	*2. Параметр а как функция от х*	*3. Поведение графика в зависимости от а*
1.1. Заметив, что справа стоит полный квадрат, сведите уравнение к двум независимым уравнениям (1): $\sqrt{a-x^2}=x$ и (2): $\sqrt{a-x^2}=1-x$. 1.2. В каждом из уравнений избавьтесь от радикала, указав ограничения на x, нужные для обеспечения равносильности. 1.3. Найдите единственный корень уравнения (1) при каждом $a \ge 0$. 1.4. При каких значениях a уравнение (2) не имеет решений? 1.5. Какое значение параметра a разделяет случаи, когда второе уравнение имеет одно или два решения? 1.6. Выпишите таблицу корней уравнения (2) в зависимости от a. 1.7. При каких a некоторые из корней уравнений (1) и (2) совпадают? 1.8. Запишите решения исходного уравнения при каждом значении a.	2.1. Заметив, что справа стоит полный квадрат, сведите уравнение к двум независимым уравнениям (1): $\sqrt{a-x^2}=x$ и (2): $\sqrt{a-x^2}=1-x$. 2.2. В каждом из уравнений избавьтесь от радикала, указав ограничения на x, нужные для обеспечения равносильности. 2.3. Найдите единственный корень уравнения (1) при каждом $a \ge 0$. 2.4. Для решения уравнения (2) постройте график a как функции от x. 2.5. Определите число решений уравнения (2) и их вид с использованием графика. 2.6. На том же чертеже рассмотрите график a как функции от x, получающийся при решении уравнения (1). Найдите точку пересечения графиков. 2.7. Выпишите таблицу решений исходного уравнения в зависимости от a.	3.1. Заметив, что справа стоит полный квадрат, сведите уравнение к двум независимым уравнениям (1): $\sqrt{a-x^2}=x$ и (2): $\sqrt{a-x^2}=1-x$. 3.2. В каждом из уравнений избавьтесь от радикала, указав ограничения на x, нужные для обеспечения равносильности. 3.3. Изобразите на плоскости (x, y) «постоянные» прямые $y = x$ и $y = 1 - x$ и семейство концентрических полуокружностей $y=\sqrt{a-x^2}$ при различных значениях a (например, при $a=\frac{1}{4};\frac{1}{2};1;4$) 3.4. При каком значении а полуокружность касается прямой $y=1-x$? 3.5. Сколько решений имеет исходного уравнение в зависимости от a? 3.6. Найдите все решения исходного уравнения в зависимости от a.

6) Исследование неравенства $x-\sqrt{a-x^2}\le 2, a>0$ (таблица 11)

Таблица 11.

1. Решение "в лоб"	*2. Параметр а как функция от х.*	*3. Поведение графика в зависимости от а.*
1.1. Замените неравенство равносильной совокупностью неравенств, не содержащих неизвестное под радикалом. 1.2. Решите неравенство при $a = 9$. 1.3. Решите вспомогательное уравнение $x^2-2x+2-\frac{a}{2}=0$. 1.4. Пусть x_- и x_+ – корни квадратного трехчлена $x^2-2x+2-\frac{a}{2}$. Решите неравенства $x_- < 2$ и $x_+ > 2$ относительно a. 1.5. Решите исходное неравенство при $a < 2$. 1.6. Решите исходное неравенство при $2 \le a \le 4$. 1.7. Решите исходное неравенство при $a > 4$. 1.8. Запишите решение исходного неравенства при всех значениях a.	2.1. Замените неравенство равносильной совокупностью неравенств, не содержащих неизвестное под радикалом. 2.2. На плоскости с координатами (a, x) постройте графики функций $a = x^2$ и $a = 2x^2 - 4x + 4$. Пересекаются ли графики этих функций? 2.3. Заштрихуйте на плоскости (a, x) область решения исходного неравенства. 2.4. По графику опишите словами решение исходного неравенства при каждом a. 2.5. Запишите формулами решение исходного неравенства.	3.1. На плоскости (x, y) постройте график прямой $y = x - 2$ и полуокружности $y=\sqrt{a-x^2}$ при различных значениях a (например, при $a = 1; 4; 9$). 3.2. Опишите по чертежу решение исходного неравенства при выбранных в п. 3.1 значениях a. 3.3. При каких значениях а прямая $y = x - 2$ пересекается с полуокружностью $y=\sqrt{a-x^2}$? Найдите при этих a абсциссы точек пересечения. 3.4. Запишите решение исходного неравенства в общем виде.

59. Применение различных обобщений способствует формированию теоретического мышления.

Обобщение нередко осуществляется путем выделения одинакового математического содержания для различных задач. Составление математической модели – это наиболее распространенный вид обобщения. Он состоит в переводе происходящих в действительности процессов на язык математики. Обобщение решения конкретных задач может дать единый метод решения целого класса однородных задач. В качестве примера рассмотрим три задачи.

а) Два населенных пункта расположены по одну сторону от прямой шоссейной дороги. У дороги требуется построить автозаправочную станцию и проложить к ней дороги от населенных пунктов. В каком месте следует построить станцию, чтобы суммарная длина дорог от нее до населенных пунктов была наименьшей?

б) Участки двух дачников расположены по берегу реки. На этих участках установлены емкости для хранения воды, используемой для полива. Соседи решили на берегу реки поставить насос для подачи воды и провести от него трубы к каждой из емкостей. Укажите, где нужно установить насос и как положить трубы, чтобы их расход был наименьшим.

в) По одну сторону от забора растут два дерева. Сережа и Саша долго соревновались: кто быстрее добежит от одного дерева до другого. Каждый раз Сережа немного опережал товарища. Саша, который был лучшим учеников в классе по математике, предложил изменить правила соревнования. Его предложение заключалось в том, чтобы бежать от дерева к дереву не сразу по прямой, а подбегая по дороге к забору и касаясь его. На что надеется Саша, рассчитывая выиграть соревнование?

Эти задачи, несмотря на различие формулировок, имеют одно и то же математическое содержание: точки A и B расположены по одну сторону от прямой a. На прямой a нужно указать точку M такую, чтобы длина ломаной AMB была наименьшей. Геометрическая модель изображена на рис. 65. Саша потому и надеется обогнать товарища, что уже прикинул, где должна быть расположена точка забора (M), которая делает линию AMB кратчайшей.

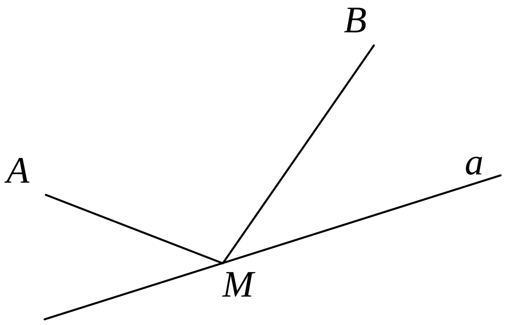


Рис. 65

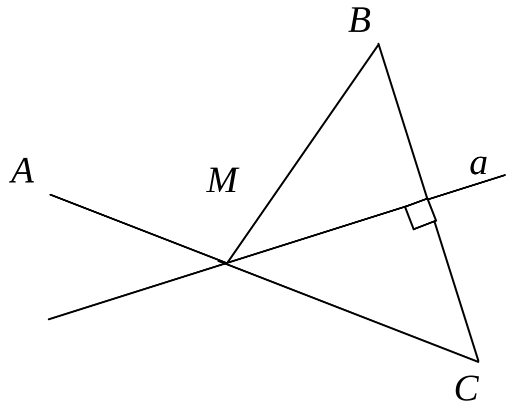


Рис. 66

Решение

Если бы точки A и B лежали по разные стороны от прямой a (так как расположены точки A и C на рис. 66), то искомая точка M была бы точкой пересечения отрезка AC и прямой a. Точки B и C симметричны относительно a. Поэтому $AM + MB = AM + MC = AC$ и точка M построена.

При решении математических задач, например, геометрических, часто применяется *индуктивные обобщения*. Метод решения «по индукции» осуществляется следующим образом. Рассматривается самый простой частный случай задачи, когда она решается легко. Решив эту задачу, обобщают ее на другой более сложный, но все же частный случай, используя в решении результат предыдущей задачи. Таким образом доходят до заданной первоначальной задачи, обобщающей все предыдущие. Приведем пример:

Задача: Докажите, что сумма расстояний от любой точки M правильного треугольника до его сторон равна длине высоты треугольника.

Решение

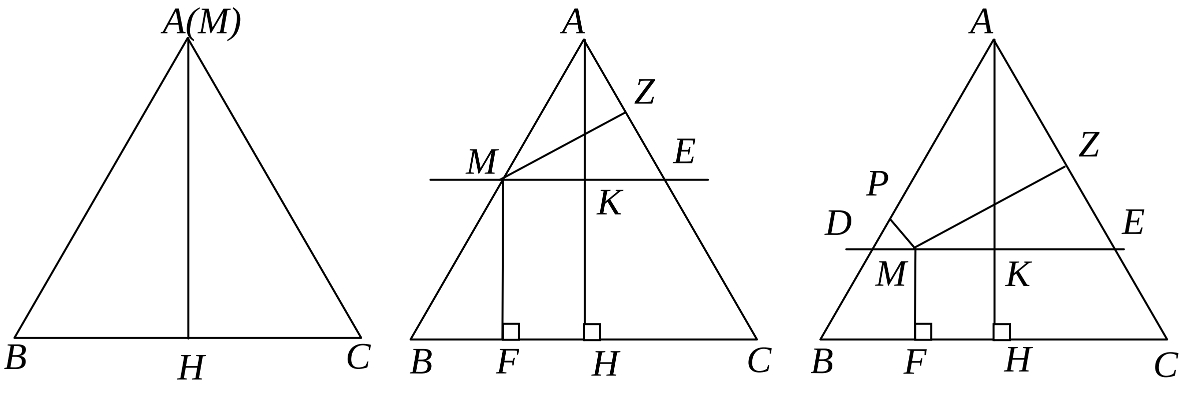
а) Рассмотрим сначала простой случай (рис. 67а), когда заданная точка M – вершина треугольника. Ясно, что сумма расстояний от точки M до сторон треугольника равна длине высоты AH.

б) Более общий случай показан на рис. 67б. Точка M находится на стороне треугольника. Проведем через точку M прямую $ME \parallel BC$. Треугольник MAE правильный, и, значит, высоты AK и MZ равны.

Тогда $MZ + MF = AK + KH = AH$.

в) Наконец, общий случай (рис. 67в): точка M – произвольная, внутренняя точка правильного треугольника ABC. Проведем через нее прямую $DE \parallel BC$, тогда треугольник ADE правильный. На основании доказанного в пункте а) запишем, что $AK = PM + MZ$.

Тогда $AH = PM + MZ + KH = PM + MZ + MF$.



а) б) в)

Рис. 67

Таким образом, обобщения при решении задач способствуют пониманию задачи, ведут к открытию способа решения и обосновывают его.

Обобщения при решении задач приводят к формулированию теорем, правил, выводу формул.

Обобщение систематизирует знания учащихся, так как требует установить и осмыслить взаимосвязи между понятиями и отношениями, о которых идет речь в задаче. В ходе выяснения таких взаимосвязей у учащихся составляется некий целостный образ, в котором одно знание следует из другого и связано с ним. В конце концов, некоторая группа знаний, расположенных в определенной последовательности по отношению друг к другу, составит систему.

В качестве примера рассмотрим обобщения при решении задач геометрической прогрессии.

Рассмотрев ряд применений геометрической прогрессии, полезно провести с учащимися обобщающую беседу примерно следующего содержания.

В начале обратить внимание учащихся на то, что в задачах «на прогрессию» фигурирует несколько чисел из следующих пяти:

b_1 – первый член, q – знаменатель,

n – число членов, b_n – n-й член,

S_n – сумма первых n членов прогрессии.

Назовем эти числа компонентами задачи. Между ними установлены два основных соотношения:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \text{ и } S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Следовательно, если заданы три компонента из пяти возможных, то два оставшихся могут быть вычислены.

Таким образом, возможные десять типов задач «на геометрическую прогрессии» определяются данными:

1) b_1, q, b_n; 2) b_1, q, n; 3) b_1, q, S_n; 4) b_1, n, b_n;
5) b_1, b_n, S_n; 6) b_1, n, S_n; 7) q, n, b_n; 8) q, b_n, S_n;
9) n, b_n, S_n; 10) q, n, S_n.

Типы задач, помеченные в этом списке номерами 1), 3), 5), 8), приводят к системам простейших показательных уравнений. А задачи типа 4), 6), 9) – к системам рациональных уравнений, остальные – к системам линейных уравнений. Такое систематизирующее обобщение полезно уже тем, что выделяет три основных метода решения задач «на геометрическую прогрессию».

60. При доказательстве теорем и решении задач в большинстве школьных учебников геометрии традиционно используются три основных признака равенства треугольников. Однако при решении задач зачастую приходится пользоваться и другими признаками равенства треугольников, доказательство которых, в свою очередь, опирается на основные. Предлагаем в данной работе и другие признаки равенства треугольников по различным комбинациям его элементов, которые подразделяются на основные и дополнительные (см. статью Р.А. Акбердин, А.Н. Казаченко, Н.В. Мирвода, Е.А. Куприянова. Некоторые подходы к доказательствам признаков равенства треугольников // Математика и информатика: Наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов: Ежегодник. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002. – Вып. 2. – С. 46-53.)

Интересен для исследовательской деятельности вопрос: «Справедлив ли признак равенства треугольников по некоторому заданному набору трех его элементов?»

Для ответа на этот вопрос целесообразно использовать не метод прямого доказательства (именно он и использован в школьных учебниках геометрии для доказательства признаков равенства треугольников), а конструктивный и аналитический методы.

В основе конструктивного метода лежит использование задач на построение по заданному набору элементов. Общепринятой, как известно, является четырехэтапная схема решения задач (анализ, построение, доказательство, исследование). При использовании этого метода, для установления факта наличия признаков равенства треугольников по заданным элементам особую роль играет исследование. Если при исследовании выясняется, что задача может иметь не более одного решения, тогда можно сделать вывод, что данный набор элементов определяет признак равенства треугольников, в противном случае признак равенства не имеет места.

Сущность аналитического метода заключается в следующем. Рассматривается задача на нахождение некоторого элемента α_4 треугольника по трем его заданным элементам α_1, α_2, α_3. Возможны следующие случаи:

а) элемент α_4 определяется однозначно; но в этом случае еще нельзя утверждать, что набор элементов α_1, α_2, α_3 определяет признак равенства (возможны два подслучая):

– элемент α_4 в совокупности с какой-либо парой из элементов α_1, α_2, α_3 определяет ранее доказанный признак равенства, то в этом случае и данный набор элементов определяет признак равенства треугольников;

– ни один набор из элемента α_4 и пар из элементов α_1, α_2, α_3 не определяет признак равенства треугольников, то в этом случае и данный набор элементов не определяет признак равенства треугольников.

б) Элемент определяется не однозначно – α_1, α_2, α_3 определяют признак равенства.

В таблицах 12, 13, 14 дадим различные комбинации основных и дополнительных элементом. Относительно некоторых наборов однозначно дан ответ, что именно они однозначно определяют или не определяют признак равенства треугольников, а относительно других предстоит исследование, которое даст ответ на вопрос: «Определяет ли этот набор признак равенства треугольников или нет?»

Для треугольника ABC в таблицах использованы следующие обозначения: a, b, c – соответственно стороны BC, AC, AB; l_c, h_c, m_c - соответственно биссектриса, высота и медиана, проведенные из вершины C; R и r – соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей; P – периметр.

Таблица 12

Признаки равенства треугольников по двум основным (ОЭ) и одному дополнительному (ДЭ) элементам

ОЭ / ДЭ	c, a	c, b	b, a	c, $\angle A$	c, $\angle B$	b, $\angle A$	b, $\angle C$	a, $\angle B$	a, $\angle C$	a, $\angle A$	b, $\angle B$	c, $\angle C$	$\angle A$, $\angle B$	$\angle B$, $\angle C$	$\angle A$, $\angle C$
l_c	–1	–1	1	0	0	–1	1	–1	–1	0	0	1	1	1	1
h_c	–1	–1	–1	1	1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	1	1	1	1
m_c	1	1	1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	1	1	1
r	–1	–1	–1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
R	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	1	1	1
P	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 13

Признаки равенства треугольников по двум дополнительным (ДЭ) и одному основному (ДО) элементам

ДЭ / ОЭ	h_a, h_b	m_a, m_b	l_a, l_b	h_a, m_a	h_a, m_b	h_a, l_a	h_a, l_b	m_a, l_a	m_a, l_b	h_a, R	h_a, r	m_a, R	m_a, r	l_a, R	l_a, r	R, r
c	–1	1	0	–1	1	–1	1	0	0	–1	1	–1	0	–1	0	–1
a	–1	1	–1	1	–1	0	0	0	0	–1	1	1	0	0	1	–1
b	–1	1	–1	–1	–1	–1	0	0	0	–1	1	–1	0	–1	0	–1
$\angle A$	1	0	0	–1	–1	–1	0	0	0	1	1	–1	0	–1	0	1
$\angle B$	–1	0	0	1	–1	1	0	0	0	1	1	1	0	–	0	1
$\angle C$	–1	0	0	–1	–1	–1	0	0	0	1	1	–1	0	–1	0	1

Таблица 14

Признаки равенства треугольников по трем дополнительным элементам

	h_c, h_b	m_a, m_b	m_c, m_b	l_a, l_b	l_c, l_b	h_c, m_a	h_b, m_c	h_b, l_a	h_b, l_c	h_b, R	h_b, r	m_b, R	m_b, r	l_b, R	l_b, r	h_b, m_b	h_a, m_a	m_a, r
h_a	–1	–1	–1	0	0	–1	1	0	0	0	–1	0	0	0	0	0		1
m_a	1		1	0	0		–1	0	0	0	0	0	0	0	0	–1		0
l_a	0	0	0		0	0	0		0	0	0	0	0	0	–1	0	0	0

Учащимся можно предложить такое исследовательское задание: «Для каждой ячейки, стоящей на пересечении строки и столбца последних трех таблиц, укажите, однозначно ли определяют (или не определяют) наборы трех данных признак равенства треугольников).

В таблицах использованы следующие условные обозначения:

1 – по заданному набору элементов справедлив признак равенства треугольников;

–1 – по заданному набору элементов не справедлив признак равенства треугольников;

0 – задача не исследована.

61. Одним из средств активизации поисково-исследовательской деятельности учащихся является их деятельность по самостоятельному составлению задач.

Процесс обучения учащихся составлению задач имеет дидактическое и развивающее направления. Любая задача состоит из условия и требования. В процессе составления задач учащийся устанавливает зависимости между известными и искомыми величинами, входящими как в условие, так и требование задачи. Чтобы ответ на требование задачи был однозначен, учащийся, подбирая известные и неизвестные величины и процессы, их описывающие, вынужден мысленно неоднократно ее решать, что, в конечном счете, приводит к задаче, в которой данных необходимо и достаточно для однозначного ответа.

Поиск основных структурных компонентов задачи – это прежде всего поиск основного отношения задачи. В зависимости от основного отношения задачи, от его перестройки меняется и каждая последующая стадия ее переформулировки. Каждая новая переформулировка задачи – это не только речевой, но и мыслительный акт. В зависимости от очередной переформулировки одна и та же задача выступает перед тем, кто ее решает, по-разному и представляет для него неодинаковые трудности, потому что формулировка задачи непременно включает тот или иной вид анализа.

Во всей структурно-компонентной характеристике задачи, с точки зрения ее основного отношения, требование задачи представляет весьма существенную часть, с которой как бы зарождаются и начинают формироваться все последующие видоизменения задачи, сам анализ, синтез, обобщение всего остального компонентного состава.

Процесс составления задачи помогает учащимся естественным образом подойти к освоению таких методически трудных вопросов, как анализ условия готовой задачи, поиск плана ее решения, проверка наличия необходимых и достаточных условий для существования решения и многого другого.

В связи с этим подчеркнем один очень важный момент. Психологический аспект задачи проявляется в роли организатора тех внешних условий (исходных и привнесенных данных), которые необходимым образом вызывают мышление. Все это дает основание думать, что поставить, сформулировать и приступить к решению задачи – это значит найти проявление тех внешних ситуативных обстоятельств, через которые обеспечивается умственная и вся его личностная целеустремленность. Если внешние условия будут предъявляться учащемуся не в виде характерного для задачи состава условий и требований, то они не будут его ставить в проблемную ситуацию. Учащийся в этом случае ограничивается фиксацией каких-либо безразличных фактов. Другими словами, задача – это уже продукт некоторого анализа, лежащей в ее основе проблемы, и если предъявить задачу в готовом виде, то этот анализ может пройти мимо внимания решающего.

Как правило, учащиеся решают уже готовые, кем-то составленные задачи и сами мало прилагают усилий либо к их построению, либо к достаточно глубокому преобразованию, осуществляемому в процессе решения.

Часто в учебной работе с учащимися доминируют задачи, для решения которых не требуется ставить новых вопросов или даже пытаться частично перестраивать те из них, которые зафиксированы в исходной формулировке задачи. Такая работа, предполагающая усвоение учащимися учебного материала в форме «готовых» заданий, обрекает их на скуку и пассивность.

Поэтому в процессе обучения надо стараться поставить учащегося в такую ситуацию, чтобы он не только решал, но и сам как бы порождал решаемую им задачу, самостоятельно выявляя ее в процессе многообразных переформулировок.

Итак, становится актуальным вопрос не только о том, как научить учащихся решать уже готовые, четко сформулированные задачи, но и как помочь им самостоятельно усматривать, выявлять и ставить новые задачи. Такая работа является поисково-исследовательской.

Учащимся предлагается составить задачи по следующим темам курса геометрии.

а) Подобные треугольники:

– отрезки, заключенные между параллельными прямыми;

– отношение сторон подобных треугольников;

– отношение площадей подобных треугольников;

– треугольник, образованный основаниями высот заданного треугольника.

б) Вписанные углы:

– углы, опирающиеся на равные дуги;

– величина угла между двумя хордами;

– угол между касательной и хордой;

– четыре точки, лежащие на одной окружности;

– вписанный угол и подобные треугольники;

– вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями.

в) Окружности:
– касательные к окружностям;
– произведение длин отрезков хорд;
– касающиеся окружности;
– две касательные, проведенный из одной точки;
– окружности, вписанные в сегмент.
г) Площадь:
– медиана делит площадь треугольника пополам;
– площади треугольников, на которые разбит четырехугольник;
– прямые и кривые, делящие фигуры на равновеликие части.
д) Треугольники:
– вписанная и описанная окружности;
– прямоугольные треугольники;
– правильные треугольники;
– треугольники с углами 60° и 120°;
– целочисленные длины сторон треугольника.
е) Многоугольники:
– вписанные и описанные четырехугольники;
– пятиугольники;
– шестиугольники;
– вписанные и описанные многоугольники;
– произвольные выпуклые многоугольники.
ж) Геометрические места точек (ГМТ):
– ГМТ – прямая или отрезок;
– ГМТ – окружность или дуга окружности;
– гомотетия.
з) Векторы:
– векторы сторон многоугольников;
– скалярное произведение;
– суммы векторов;
– вспомогательные проекции.

Относительно задач на геометрическое место точек отметим следующее. Полное и всестороннее представление о геометрической фигуре в самом широком смысле слагается из трех обособленных понятий: величина, вид, положение. Эти понятия могут существовать вместе и раздельно, поэтому их можно рассматривать или все разом, или попарно, или каждое в отдельности, что дает возможность подходить к геометрическим фигурам с различных сторон. Решая какую-нибудь задачу о фигуре или фигурах, мы можем подходить к ней или постепенно усложняя задачу введением новых данных, или же временно отбрасывая некоторые из данных рассматриваемой задачи.

Всякая задача о геометрической фигуре содержит несколько данных. В большинстве случаев эти данные по своему характеру разнородны: одни из них служат преимущественно для определения вида фигуры, другие для определения положения ее на плоскости или в пространстве, третьи – для определения численного значения ее длины, площади, объема и т.д. Элементами, служащими для определения вида фигуры, в элементарной геометрии обычно являются угловые элементы и отношения линейных элементов, тогда как элементами, характеризующими численные соотношения, являются по преимуществу линейные элементы.

Для оказания помощи учащимся в составлении задач приведем формулы для вычисления площади треугольника при заданных его различных элементах (таблица 15).

Введем следующие обозначения в треугольнике ABC:

a, b, c – длины сторон;

A, B, C – величины углов;

L_a, L_b, L_C – длины внутренних биссектрис;

E_a, E_b, E_c – длины внешних биссектрис (отрезки биссектрис внешних углов треугольника от его вершин до точек пересечения с противолежащими сторонами; если $b = c$, то E_a неопределена);

M_a, M_b, M_c – длины медиан;

H_a, H_b, H_c – длины высот;

r – радиус вписанной в треугольник окружности;

R – радиус описанной около треугольника окружности;

r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей;

p – полупериметр;

S – площадь треугольника ABC;

S_L – площадь треугольника, вершинами которого являются основания биссектрис треугольника ABC;

S_M – площадь треугольника, вершинами которого являются основания медиан треугольника ABC;

S_H – площадь треугольника, вершинами которого являются основания высот треугольника ABC;

S_r – площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания сторон с вписанной окружностью;

$S_{L,R}$ – площадь треугольника, вершинами которого являются точки пересечения внутренних биссектрис с описанной окружностью;

S_T – площадь треугольника, стороны которого касаются окружности, описанной около треугольника;

S_B – площадь треугольника, вершинами которого являются центр вневписанных окружностей;

$S_{La,Ea}$ – площадь треугольника, образованного внутренней и внешней биссектрисой и продолжением стороны a.

Таблица 15

№	*Данные элементы*	*Формулы для вычисления площади треугольника*
1	2	3
1	a, H_a	$S=\dfrac{aH_a}{2}$
2	b, c, A	$S=\dfrac{bc\sin A}{2}$
3	a, b, c, p	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
4	a, A, B, C	$S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$
5	H_a, A, B, C	$S=\dfrac{H_a^2\sin A}{2\sin B\sin C}$

1	2	3
6	p, r	$S = pr$
7	a, b, c, R	$S = \dfrac{abc}{4R}$
8	r, A, B, C	$S = r^2 \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$
9	R, A, B, C	$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$
10	R, H_a, H_b, H_c	$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{2rH_aH_bH_c}$
11	H_a, H_b, H_c	$S = \left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{H_a}+\dfrac{1}{H_b}+\dfrac{1}{H_c}\right)\left(\dfrac{1}{H_a}+\dfrac{1}{H_b}-\dfrac{1}{H_c}\right)}\right)^{-1} \times$ $\times\left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{H_a}-\dfrac{1}{H_b}+\dfrac{1}{H_c}\right)\left(\dfrac{1}{H_b}+\dfrac{1}{H_c}-\dfrac{1}{H_a}\right)}\right)^{-1}$
12	p, H_a, H_b, H_c	$S = \dfrac{P}{\dfrac{1}{H_a}+\dfrac{1}{H_b}+\dfrac{1}{H_c}}$
13	M_a, M_b, M_c	$S = \dfrac{1}{3}\sqrt{(M_a+M_b+M_c)(M_a+M_b-M_c)}\times$ $\times\sqrt{(M_a-M_b+M_c)(M_b+M_c-M_a)}$
14	M_a, A, B, C	$S = 2{M_a}^2 \sin A \sin B \sin C\left(2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A\right)^{-1}$
15	a, b, M_c	$S = \dfrac{1}{4}\sqrt{\left(a^2-(2M_c-b)^2\right)\left((2M_c+b)^2-a^2\right)}$
16	a, b, L_c	$S = \dfrac{L_c(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-L_c^2(a+b)^2}$
17	a, b, L_c, C	$S = \dfrac{L_c(a+b)}{4ab}\sin\dfrac{C}{2}$
18	b, c, L_a, E_a	$S = \dfrac{b^2-c^2}{4bc}L_aE_a\,(b \neq c)$
19	r, r_a, r_b, r_c	$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$
20	p, a, r_a	$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$
21	a, r_b, r_c	$S = \dfrac{ar_br_c}{r_b+r_c} = \dfrac{br_ar_c}{r_a+r_c} = \dfrac{cr_ar_b}{r_a+r_b}$
22	p, r_a, r_b, r_c	$S = \dfrac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{p}$

1	2	3
23	$b, c, S_{La,\,Ea}$	$S=\dfrac{b^2-c^2}{2bc}S_{L_a,E_a}(b\neq c)$
24	a, b, c, S_L	$S=\dfrac{S_L(a+b)(a+c)(b+c)}{2abc}$
25	S_M	$S = 4S_M$
26	A, B, C, S_H	$S=\dfrac{S_H}{2\cos A\cos B\cos C}$
27	A, B, C, S_r	$S=\dfrac{S_r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$
28	R, r, S_r	$S=\dfrac{2RS_r}{r}$
29	$R, r, S_{L,R}$	$S=\dfrac{2rS_{L,R}}{R}$
30	$S_{L,R}, S_r$	$S=2\sqrt{S_{L,R}S_r}$
31	S_B, R, r	$S=\dfrac{r}{2R}S_B$
32	S_H, S_T	$S=\sqrt{S_H S_T}$
33	S_r, S_B	$S=\sqrt{S_r S_B}$
34	r, R, A, B, C	$S=rR(\sin A+\sin B+\sin C)$

Приведем также теоремы о свойствах трапеции, которые дадут ученику мощный инструмент для составления задач.

62. Задан произвольный треугольник *ABC* (рис. 68). На его сторонах построены внешним образом равносторонние треугольники *APB*, *AQC*, *CRB*.

Проведем отрезки *BQ*, *CP*, *AR*. Они пересекутся в точке *F* (точка Ферма). Доказать, что вокруг четырехугольников *FAPB*, *FAQC*, *FCRB* можно описать окружности и что они пересекаются в точке *F*.

Указание: доказательство начните с поворота ΔAPC вокруг точки *A* на 60°.

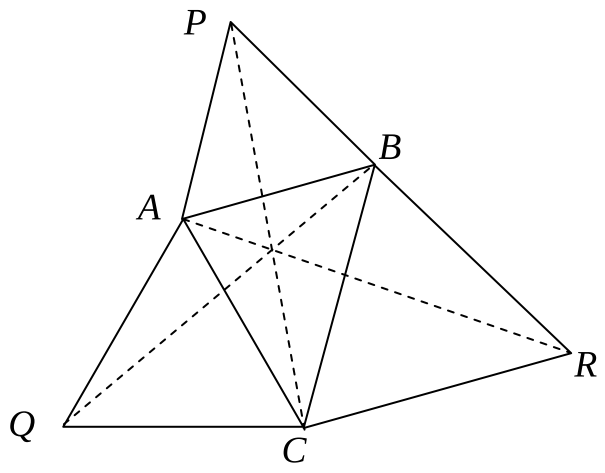


Рис. 68

63. Докажите теорему. Если одна диагональ делит четырехугольник на два равновеликих треугольника, то она делит пополам другую диагональ. И, наоборот, если одна диагональ четырехугольника делит пополам его другую диагональ, то она делит пополам площадь этого треугольника.

64. Докажите следующие две теоремы Брахмагупты (598 – 660 г. г., индийский математик и астроном).

1) Если вписанный четырехугольник имеет длины сторон a, b, c, d и его полупериметр p, то его площадь S равна:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

2) Если вписанный четырехугольник имеет перпендикулярные диагонали, пересекающиеся в точке P, то прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная одной из его сторон, делит противоположную ей сторону пополам.

Если читатель испытает затруднения и не сможет доказать эти теоремы, то он может обратиться к книге Г.С.М. Кокстера, С.Л. Грейтцера. Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978. 223 с.

65. Задача Фаньяно. Пусть задан произвольный треугольник ABC (рис. 69). Проведем в нем высоты и основания высот соединим отрезками. Полученный треугольник MNK называется ортотреугольником.

Докажите, что ортотреугольник имеет наименьший периметр из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник.

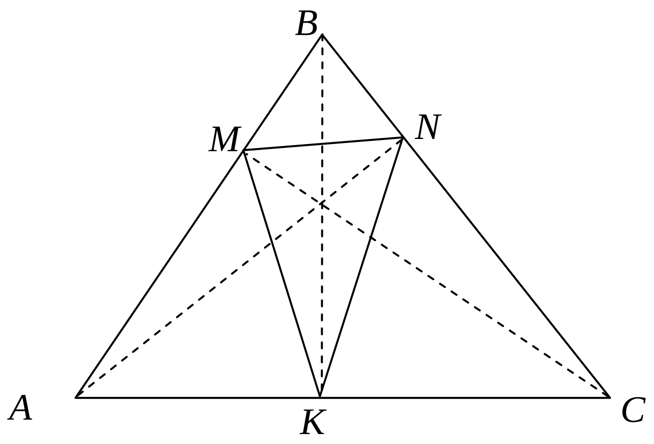


Рис. 69

Для установления справедливости факта можно провести компьютерный эксперимент. Суть его может состоять в следующем. В остроугольный треугольник вписываются всевозможные треугольники, в том числе и ортотреугольник. Периметры этих треугольников на экране дисплея представляются в виде отрезков. Сопоставляя длины этих отрезков, можно экспериментально убедиться в том, что периметр ортотреугольника наименьший.

Доказать эту теорему можно с помощью свойств зеркального отображения относительно сторон треугольника, но вначале следует вписать в заданный остроугольный треугольник ортотреугольник и еще одни – произвольный. Затем отобразить треугольник ABC относительно стороны BC (получим ΔBA_1C); затем относительно стороны A_1C (получим ΔB_1A_1C); и т.д. Получим рисунок 70.

Затем следует вспомнить, что высоты треугольника ABC делят пополам углы его ортотреугольника. Отсюда будет следовать, что после указанных отражений стороны этого ортотреугольника будут последовательно отложены на прямой (они образуют отрезок), а стороны другого треугольника образуют ломаную. Ясно, что длина отрезка короче длины ломаной. Это и доказывает теорему.

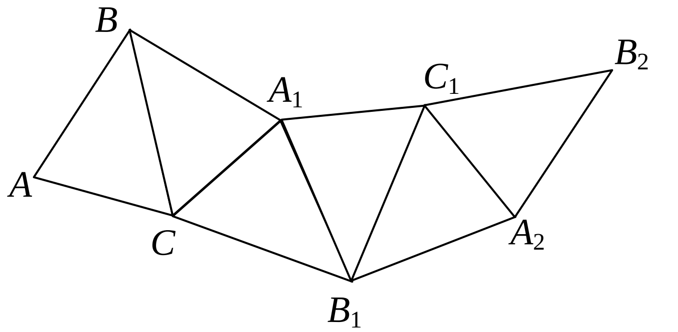


Рис. 70

66. Доказать, что среди чисел 0, 1, 2, …, $3^к$ – 1 можно найти $2^к$ различных чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других.

Доказательство

Для решения нам потребуется двоичная и троичная системы счисления. Всякое натуральное число n можно записать, и притом единственным образом, в виде $n = 2^k + c_1 2^{k-1} + c_2 2^{k-2} + \ldots + c_k$, где c_i принимают значения 0 или 1. Числа 1, c_1, c_2, … называются цифрами двоичного разложения. Условимся писать $(n)_2 = \overline{1c_1c_2\ldots c_k}$.

Примеры. $(8)_2$ - 1000, $(17)_2$ = 10001 и т.п.

Наряду с этим для каждого натурального числа n существует, и притом только одно, представление в виде $n = b_0 3^l + b_1 3^{l-1} + \ldots + b_l$, где b_0 = 1 или 2, b_i при i > 1 могут принимать одно из трех значений 0, 1 или 2. Будем сокращенно писать $(n)_3 = \overline{b_0b_1\ldots b_l}$ и называть b_0, b_1, …, b_l - цифрами троичного разложения.

Примеры. $(5)_3$ = 12, $(26)_3$ = 222, $(3^k - 1)_3 = \underbrace{22\ldots2}_{k\ раз}$.

Перейдем к решению задачи. Любое число m от 0 до 3^k - 1 однозначно представляется в виде $(d)_3 = \overline{d_1d_2d_3\ldots d_k}$ (*), где числа d_i могут принимать любое из трех значений 0, 1 или 2. (Если троичная запись числа m имеет менее k цифр, то мы дополняем эту запись нулями слева). Скажем, $(0)_3 = \underbrace{00\ldots0}_{k}$; $\left(\dfrac{3^k - 1}{2}\right)_3 = \underbrace{11\ldots1}_{k}$; $(3^k - 1)_3 = \underbrace{22\ldots2}_{k}$. Среди этих чисел, по комбинаторной лемме, имеется 2^k таких, у которых в представлении (*) участвуют только 0 и 1. Покажем, что они удовлетворяют условиям задачи. Сумма двух таких чисел, t и s, которую можно получить, суммируя в представлении (*) троичные знаки на каждом месте, не может записываться только нулями и двойками (так как t и s различны). В то же время, любое число вида $2u$, где u записывается нулями и единицами, имеет в представлении (*) только 0 или 2. Поэтому равенство $2u = t + s$ или $u = (t + s)/2$ невозможно, что требовалось доказать.

67. Доказать, что среди 79 последовательных натуральных чисел всегда найдется число, сумма цифр которого делится на 13. Привести пример 78 последовательных чисел, сумма которых не делится на 13.

Доказательство

Заметим сначала, что сумма цифр числа $n + 1$ возрастет но сравнению с суммой цифр числа n на единицу, если последняя цифра числа n не равна 9, и уменьшается на $9s - 1$, если число n оканчивается s девятками. Рассмотрим два случая.

А. Среди чисел n, $n + 1$, $n + 2$, ... , $n + 78$ не встречается число, оканчивающееся двумя (или более) нулями. Пусть число n имеет десятичное разложение $n = \overline{a_1 a_2 ... a_{s-2} a_{s-1} a_s}$.

Числа $n + 1$, $n + 2$, ... , $n + 78$ могут отличаться от n только двумя последними десятичными знаками. Пусть $a_{s-1} + a_s = k$. Покажите сами, что сумма последних двух цифр в любой серии из 49 подряд идущих двузначных чисел (начинающейся с $\overline{a_{s-1} a_s}$) принимает все значения от l до $l + 12$, где $l \le k$. Поэтому среди чисел n, $n + 1$, $n + 2$, ... , $n + 48$ в случае А обязательно найдется число, сумма цифр которого делится на 13. Эта оценка окончательна, что доказывает пример последовательности 1, 2, ..., 48, 49.

Б. Пусть среди чисел n, $n + 1$, $n + 2$, ... , $n + 78$ встречается число, оканчивающееся двумя нулями. Обозначим это число n_0, а сумму его цифр – через k_0. Сумму цифр числа $n_0 - 1$ обозначим через s_0. Очевидно, можно рассматривать лишь тот случай, когда ни k_0, ни s_0 на 13 не делятся. Проверьте сами, что среди чисел n_0, $n_0 + 1$, ... , $n + 39$ обязательно найдется число, сумма цифр которого делится на 13 (это связано с тем, что суммы цифр чисел n_0, $n_0 + 1$, ... , $n + 39$ принимают все значения от k_0 до $k_0 + 12$). Совершенно аналогично показывается, что среди чисел $n_0 - 1$, ..., $n_0 - 39$ обязательно найдется число, сумма цифр которого делится на 13 (так как суммы цифр чисел от $n_0 - 1$ до $n_0 - 39$ меняются от s_0 до $s_0 - 12$).

Если даны 79 подряд расположенных чисел, причем среди них есть число с двумя нулями на конце, то либо левее, либо правее него будет 39 чисел подряд. Как было отмечено, среди этих чисел обязательно найдется такое, сумма цифр которого делится на 13.

Утверждение задачи, таким образом, полностью доказано. Приведем пример, который показывает, что в условии задачи число 79 нельзя уменьшить. Рассмотрим следующие 78 чисел: $\underbrace{9\ldots9}_{8}61$; …;

$\underbrace{9\ldots9}_{10}$; $1\underbrace{0\ldots0}_{10}$; …; $1\underbrace{0\ldots0}_{8}38$.

Проверьте сами, что среди этих чисел нет такого, сумма цифр которого делится на 13.

68. Все натуральные числа разбиты произвольным образом на две группы. Доказать, что хотя бы в одной из них найдутся три числа, одно из которых является средним арифметическим двух других.

Доказательство

1-й способ. Попробуем отыскать все разбиения чисел от 1 до 9 на такие две группы, чтобы ни в одной группе не было трех чисел, одна из которых есть среднее арифметическое двух других. Изобразим белыми кружками числа группы, содержащей 1, и черными кружками числа второй группы. Числу 2 может соответствовать как белый, так и черный кружок, что изображено на рис. 71.

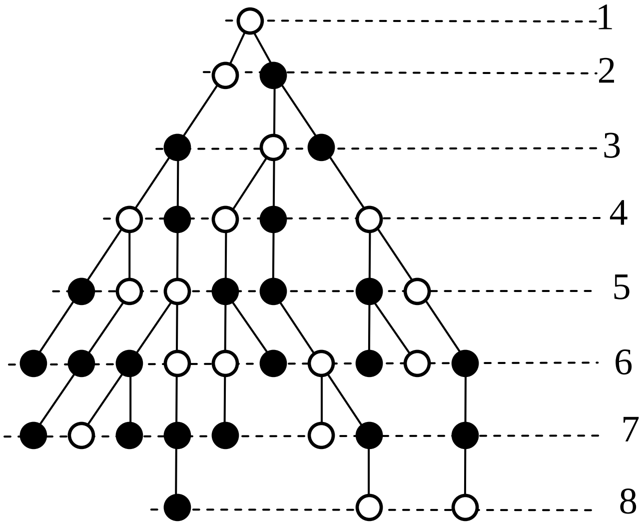


Рис. 71

К цепочке из двух белых кружков можно пририсовать только черный (иначе в белую группу войдут числа 1, 2, 3), а цепочку ○—● можно продолжить двумя способами. Продолжая это построение, придем к схеме, изображенной на рис. 71. Из этой схемы видно, что ни одну из цепочек нельзя продолжить требуемым образом. Следовательно, утверждение задачи справедливо даже тогда, когда на две группы разбиваются не все натуральные числа, а лишь первые девять.

2-й способ. Если три числа 5, 7, 9 оказались в одной группе, то все доказано.

Пусть они находятся в разных группах. Будем ту группу, в которой оказались два из этих чисел, называть первой, а сами эти числа обозначим a и b. Очевидно, $2a - b > 0$ и $2b - a > 0$. Если хотя бы одно из чисел $2a - b$, $2b - a$ окажется в первой группе, то утверждение справедливо, так как $\dfrac{a+(2b-a)}{2}=b$ и $\dfrac{b+(2a-a)}{2}=a$.

Предположим теперь, что числа $2a - b$ и $2b - a$ оба находятся во второй группе.

Если их среднее арифметическое, равное $(a - b)/2$ (оно является целым числом), находится во второй группе, то все доказано. Если же число $(a + b)/2$ окажется в первой группе, то утверждение также справедливо, так как в первой группе находятся числа a и b.

70. В каждой вершине треугольника написано неотрицательное число, причем сумма всех этих чисел равна 3 000. Каждое число заменяется на среднее арифметическое чисел, стоящих в соседних вершинах, и эта операция повторяется 10 раз. Доказать, что после этого каждое из чисел станет меньше, чем 1 002.

71. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1960}$?

Доказательство

Данное уравнение можно переписать в виде $\sqrt{x}+\sqrt{y}=14\sqrt{10}$.

Докажем сначала, что числа $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ представляются в виде $\sqrt{x}=k\sqrt{10}$, $\sqrt{y}=m\sqrt{10}$, где k и m – неотрицательные целые числа. Проведем доказательство для $\sqrt{y}$. Имеем:

$$\sqrt{x}=14\sqrt{10}-\sqrt{x},$$
$$x=10\cdot 196-28\sqrt{10y}+y.$$

Отсюда:

$$\sqrt{10y}=\frac{y+1960-x}{28}.$$

В правой части равенства стоит рациональное число. Квадратный корень из целого числа a является рациональным числом тогда и только тогда, когда число a является полным квадратом. Поэтому $10y = b^2$. Но если квадрат целого числа делится на 10, то само это число делится на 10. Отсюда $b = 10m$ и, следовательно, $y = 10m^2$. Поэтому $\sqrt{y}=m\sqrt{10}$ и, аналогично, $\sqrt{x}=k\sqrt{10}$. Подставляя в исходное уравнение вместо $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ их выражения через k и m и сокращая на $\sqrt{10}$, получаем $k + m = 14$. Последнее уравнение в целых неотрицательных числах имеет 15 решений:

$$k_1 = 14,\ m_1 = 0;\ k_2 = 13,\ m_2 = 1;\ ...;\ k_{15} = 0,\ m_{15} = 14.$$

Соответственно этому исходное уравнение имеет следующие 15 решений:

$$x_1 = 10\cdot 14^2,\ y_1 = 0;$$

$$x_2 = 10\cdot 13^2,\ y_2 = 10;\ \ldots;\ x_{15} = 0,\ y_{15} = 10\cdot 14^2.$$

72. Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ – число иррациональное.

Доказательство

Проведем доказательство от противного. Пусть число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ - рационально, т. е. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=\frac{p}{q}$ (p, q - целые). Тогда $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\frac{p}{q}-\sqrt{3}$. Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$5+2\sqrt{10}+2=\frac{p^2}{q^2}+3-\frac{2p}{q}\sqrt{3},$$

т. е.

$$\sqrt{10}+\frac{p}{q}\sqrt{3}=\frac{p^2}{2q^2}-2=\frac{p_1}{q_1}.$$

Снова возводя в квадрат, получим:

$$\sqrt{10}+\frac{3p^2}{q^2}+\frac{2p}{q}\sqrt{30}=\frac{p_1^{\ 2}}{q_1^{\ 2}};$$

отсюда:

$$\sqrt{30}=\frac{q}{2p}\left(\frac{p_1^{\ 2}}{q_1^{\ 2}}-\frac{3p^2}{q^2}-10\right),$$

т. е. $\sqrt{30}$ - рациональное число. Но это не так: число $\sqrt{30}$ иррационально.

Полученное противоречие и доказывает иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

73. Докажите следующие утверждения:

а) Известно, что $\left(\sqrt{2}-1\right)^7=\sqrt{57122}-\sqrt{57121}$. Докажите, что $\left(\sqrt{2}+1\right)^7=\sqrt{57122}+\sqrt{57121}$.

б) Доказать, что tg1° – число иррациональное.

в) Доказать, что функция $f(x)$ = sin x + sin $\sqrt{2}\,x$ – непериодическая.

г) Доказать, что последовательность чисел $\log_2 3$, $\log_2 4$, …, $\log_n(n+1)$, … убывает.

д) Доказать неравенство $\log_{81}576 < \log_{36}192$.

е) Сумма пяти целых чисел равна 0. Доказать, что сумма пятых степеней этих чисел делится на 15.

ж) На классной доске написаны числа 1, 2, 3, …, 1966. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их разность. Очевидно, что после 1965 повторений этой операции на доске останется одно число. Доказать, что это число нечетно.

з) Доказать, что в числе $\left(6+\sqrt{37}\right)^{999}$ первые 999 знаков после запятой нули.

к) Доказать, что среди первых десяти миллионов цифр разложения $\sqrt{2}$ в десятичную дробь ни одна цифра не повторяется 5000001 раз подряд.

Решение трех последних задач читатель найдет в книге Е.Б. Данкина, С.А. Молчанова, А.Л. Розенталя. Математические соревнования Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1970. 95 с.

74. В указанной книге читатель найдет доказательство и такой интересной теоремы: Если число F_n является простым, то число $3^{2^{2^n-1}}+1$ делится на F_n, где F_n числа Ферма, и они равны $2^{2^k}+1$, $k = 0$, 1, 2, …

75. Доказано, что существует бесконечно много прогрессий, образованных из трех разных простых чисел, первыми членами которых является число 3, например: 3, 7, 11; 3, 11, 19; 3, 13, 23; 3, 17, 31; 3, 23, 43 и т.д.

Выполните следующие задания:

а) Найдите еще четыре арифметические прогрессии с первым членом 3;

б) Докажите, что не может быть арифметической прогрессии, образованной из трех разных простых чисел, первым членом которой было бы число 2.

в) Найдите четыре арифметические прогрессии, образованные из трех простых чисел, первым членом которых является любое простое нечетное число.

г) Существует только одна арифметическая прогрессия с разностью 2, составленная из трех простых чисел. Найдите ее.

д) Существует только одна арифметическая прогрессия с разностью 4, составленная из трех простых чисел. Найдите ее.

е) Докажите, что не может быть арифметической прогрессии, составленной из трех простых чисел, с нечетной разностью.

ж) Найдите несколько арифметических прогрессий с разностью 6, образованных тремя простыми числами.

з) Докажите, что арифметическая прогрессия с разностью 6, образованная из пяти простых чисел: 5, 11, 17, 23, 29, является единственной.

76. Числа 11 и 11 111 111 111 111 111 111 111 = $\dfrac{10^{23}-1}{9}$ простые (доказательство последнего факта принадлежит М. Крайчикову). Докажите, что если число, все цифры которого есть единицы, простое, то число его цифр также должно быть простым.

Заметим, что это условие, однако, не является достаточным, так как, например, 111 = 3·37, 11 111 = 41·271, 1 111 111 = 239·4649. Число $\dfrac{10^{37}-1}{9}$, имеющее 37 цифр, также составное.

Л. Мозер нашел все простые числа меньшие 100 000, не меняющие своего значения, если их цифры записать в обратном порядке. Их оказалось 102. Вот все такие числа меньшие 1000: 101, 131, 151, 181, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929. Неизвестно, существует ли бесконечно много таких простых чисел.

Читатель имеет возможность доказать или опровергнуть этот факт, тем самым вписав свое имя в анналы истории математики.

77. Таким же недоказанным фактом является следующий.

Если все натуральные числа выписать последовательно в строчки по n чисел в n-й строке, то есть составить бесконечную треугольную таблицу (рис. 72)

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15

…………………………

Рис. 72

то в каждой строке этой таблицы, начиная со второй, найдется по крайней мере одно простое число.

78. Два наименьших простых числа 2 и 3 являются последовательными натуральными числами. Докажите, что не существует других двух последовательных натуральных чисел, которые оба были бы простыми.

79. Докажите или опровергните следующее утверждение: «Каждое четное число представляет собой разность двух простых чисел» (Этот факт в математике не доказан).

80. Найдите все нечетные числа, представляющие собой разность двух простых чисел.

Решение

Если натуральное нечетное число n является разностью двух простых чисел, $n = p - q$, то одно из этих простых чисел должно быть четным, а другое нечетным, следовательно, одно из чисел p и q, и как легко видеть, именно число q, должно быть равно 2. Таким образом, имеем $n = p - 2$, где p – простое нечетное число.

Итак, все натуральные нечетные числа, которые являются разностью двух простых чисел, меньше простых нечетных чисел на 2, следовательно, это числа 1, 3, 5, 9, 11, …

Существует бесконечно много и таких нечетных чисел, которые не являются разностью двух простых чисел, например, все числа вида $6k + 1$, где k – натуральное число. Докажите этот факт.

81. Гипотеза Гильбрайта. Н.Л. Гильбрайт высказал в 1958 г. следующее предположение.

Если мы выпишем последовательные простые числа, затем в первой строке – разности последовательных простых чисел, во второй – абсолютные величины разностей последовательных чисел первой строки, в третьей – абсолютные величины разностей последовательных чисел второй строки и т. д., то в каждой строке первым числом будет 1.

Так, например, первые 17 строк (следующих за последовательностью простых чисел) выглядят следующим образом (рис. 73):

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61
1 2 2 4 2 4 2 4 6 2 6 4 2 4 6 6 2
1 0 2 2 2 2 2 2 4 4 2 2 2 2 0 4
1 2 0 0 0 0 0 2 0 2 0 0 0 2 4
1 2 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 2 2
1 2 0 0 0 2 0 0 0 2 0 2 0
1 2 0 0 2 2 0 0 2 2 2 2
1 2 0 2 0 2 0 2 0 0 0
1 2 2 2 2 2 2 2 0 0
1 0 0 0 0 0 0 2 0
1 0 0 0 0 0 2 2
1 0 0 0 0 2 0
1 0 0 0 2 2
1 0 0 2 0
1 0 2 2
1 2 0
1 2
1

Рис. 73

Гипотеза Гильбрайта проверена для первых 63 418 строк. Однако мы не знаем общего доказательства ее истинности.

82. Среди двузначных чисел найдите такие простые числа, которые остаются простыми при каждой перестановке их цифр (например, 13 и 31; 17 и 71).

Среди трехзначных чисел найдите такие простые числа, которые остаются простыми при каждой перестановке их цифр (например, 113, 131, 311; 199, 919, 991).

83. Докажите теорему. Если a и b – натуральные числа и произведение ab делится на простое число p, то по крайне мере одно из чисел a и b делится на p.

Указание: доказательство проведите методом от противного. Если читателю не удастся доказать теорему, то обратитесь к книге В. Серпинского «Что мы знаем и чего не знаем о простых числах». М. Л. Изд-во физмат литературы, 1963. 91 с.

84. Докажите теорему. Если p – простое число, то для каждого целого числа a число $a^p - a$ делится на p.

Указание. Доказательство проведите методом математической индукции.

85. Каждая из арифметических прогрессий

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$$

и

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots$$

содержит бесконечно много простых чисел.

В связи с этим напрашивается вопрос: какие бесконечные арифметические прогрессии, составленные из натуральных чисел, содержат бесконечно много простых чисел?

Пусть дана бесконечная арифметическая прогрессия

$$a, a + r, a + 2r, \dots,$$

у которой первый член a и разность r – натуральные числа.

Если a и r имеют общий делитель $d > 1$, то, очевидно, каждое из чисел нашей последовательности будет делиться на d и поэтому, как легко видеть, ни один член прогрессии, кроме, быть может, первого члена, не будет простым числом. Отсюда следует: для того чтобы арифметическая прогрессия с первым членом a и разностью r содержала бесконечное число простых чисел, необходимо, чтобы a и r не имели общего делителя, большего 1. Как доказал еще в 1837 г. П.Г. Лежен Дирихле, это условие является также и достаточным.

86. Известны многочлены, которые для многих последовательных натуральных чисел x принимают значения, являющиеся простыми числами. Примером такого многочлена может служить многочлен Эйлера $x^2 + x + 41$, который для $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 39$ дает разные простые числа. Докажите, что существуют натуральные числа x, для которых значение многочлена будет составным числом.

Указание: достаточно найти одно такое натуральное значение x, для которого значение будет составным числом; можно доказать этот же факт и чисто дедуктивно (в общем виде).

Многочлен $x^2 - 79x + 1601$ дает простые числа для $x = 0, 1, 2, \ldots, 78, 79$, однако эти числа не все разные.

Возникает вопрос, существуют ли многочлены, которые для натуральных значений переменной дают бесконечное множество простых чисел. Очевидно, существуют такие многочлены первой степени, например, многочлен $2x + 1$, но не известно ни одного такого многочлена степени выше первой.

87. Относительно многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами напрашивается вопрос, когда такой многочлен при натуральных значениях x дает бесконечно много простых чисел. Легко доказать, что необходимым условием этого является требование, чтобы многочлен был неприводимым. Однако такое условие не является достаточным, ибо, как легко доказать, многочлен $x^2 + x + 2$ является неприводимым, но ни при одном натуральном значении x не дает простого числа: для каждого натурального x его значение есть число четное большее 2.

Легко также доказать, что кроме неприводимости многочлен $f(x)$ должен удовлетворять еще следующему условию: не существует ни одного натурального числа большего 1, которое являлось бы делителем числа $f(x)$ при каждом целом значении x.

Являются ли эти условия достаточными для того, чтобы многочлен с целыми коэффициентами, где коэффициент при наивысшей степени x положителен, давал бесконечно много простых чисел для натуральных x? В прошлом веке В.Я. Буняковский высказал предположение, что это так. Из данной гипотезы сейчас же следует, что существует бесконечно много простых чисел вида $x^2 + 1$, где x – натуральное число. Из нее же следует также, что существует бесконечно много натуральных чисел x, для которых $x^2 + x + 41$ является числом простым.

88. От разрушенной колоннады квадратной формы удалось обнаружить уцелевшие 4 колонны. Как экономичнее провести раскопки этой колоннады?

Возможные результаты исследования

Для того чтобы провести раскопки наиболее экономично, необходимо восстановить границы разрушенной колоннады. Тогда данная задача преобразуется в геометрическую задачу следующего содержания: Восстановить квадрат по четырем точкам, лежащим на границе квадрата.

В условии задачи содержится неопределенность относительно расположения четырех известных точек, поэтому необходимо рассмотреть следующие случаи:

1) Все 4 точки лежат на одной прямой (рис. 74). Тогда раскопки можно проводить следующим образом: копая по прямой, содержащей 4 уцелевшие колонны (известные точки), найти крайние колонны (вершины квадрата A, B); для восстановления границы участка восстановить перпендикуляры l_1 и l_2 из точек A и B на прямую AB; повернуть прямую l_2 вокруг точки A на 90° по часовой стрелке; найти точки $D = l_1 \cap l_2'$, $C = l_2 \cap l_2'$, где l'_2 – образ l_2 при повороте; $ABCD$ – искомый квадрат (рис. 74).

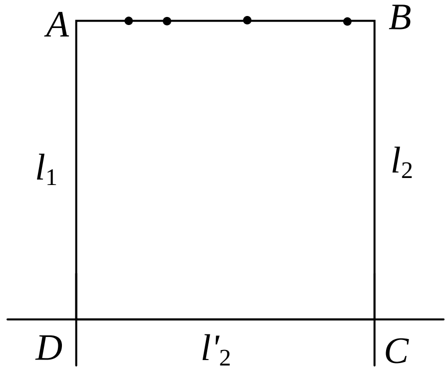


Рис. 74

2) Три точки лежат на одной стороне квадрата. Возможны два случая: а) одна точка лежит на противоположной стороне квадрата; б) одна точка лежит на смежной стороне квадрата. Раскопки можно проводить так:

а) Копая по прямой, содержащей три уцелевшие колонны (три точки), найти пограничную колонну (вершину квадрата А); для восстановления границы участка из точки *A* восстановить перпендикуляр *l* на прямую *AB*; через точку *M* (уцелевшая колонна) провести прямую *a*, параллельную *AB*; найти точку $D = l \cap a$; повернуть прямую *a* вокруг точки А на 90° против часовой стрелки; найти точки $C = a \cap a'$, $B = BA \cap a'$, где *a'* – образ прямой *a* при повороте; *ABCD* – искомый квадрат (рис. 75).

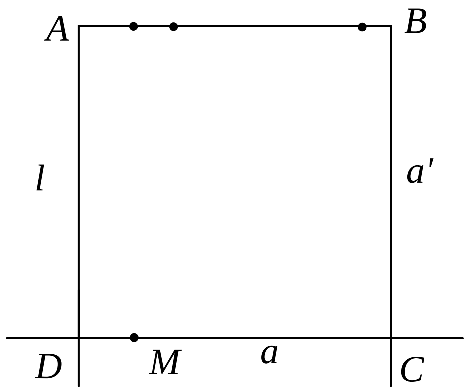


Рис. 75

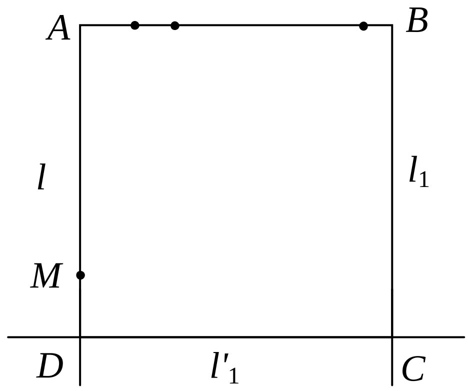


Рис. 76

б) Из точки *M* (уцелевшая колонна) опускаем перпендикуляр *l* на прямую, содержащую три других известных точки (три колонны) и находим одну из вершин квадрата (например, *A*); копая по прямой, содержащей три уцелевшие колонны, находим вторую пограничную колонну (вершину *B*); из точки В восстанавливаем перпендикуляр l_1 на прямую *AB*; осуществляем поворот прямой l_1 вокруг точки *A* на 90° по часовой стрелке и находим точки *C* и *D* (рис. 76).

Если никакие три точки не лежат на одной прямой, то необходимо выяснить, лежат ли какие-нибудь две точки на одной стороне квадрата. Очевидно, что если мы будем копать по прямой, содержащей две точки (любые две уцелевшие колонны) и найдем еще одну точку (колонну), то эти две исследуемые точки принадлежат одной стороне квадрата. Итак, возможны следующие ситуации:

3) Две точки лежат на одной прямой, две на другой (решение аналогично случаю 2).

4) Две точки принадлежат одной прямой, а две лежат на других прямых, отличных от первой. Возможны два случая: а) две точки лежат на параллельных сторонах квадрата;

б) две точки лежат на смежных сторонах квадрата.

В случае а) для восстановления границы участка достаточно опустить перпендикуляры a и b из точек C и D на прямую l, содержащую две данные точки; найти вершины квадрата $A = l \cap a$, $B = l \cap b$; построить образ b' прямой b при повороте вокруг точки A на 90° по часовой стрелке; найти вершины $C = b \cap b'$, $D = a \cap b'$ (рис. 77).

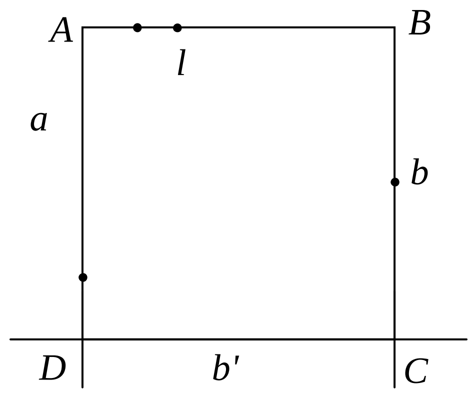


Рис. 77

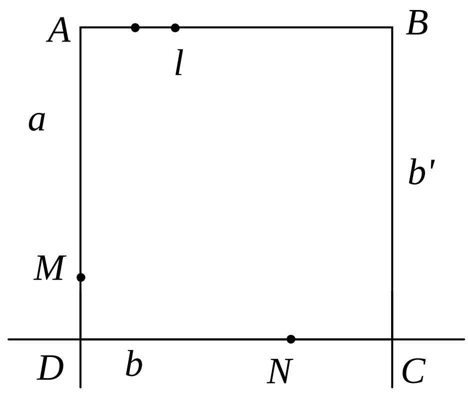


Рис. 78

В случае б) для восстановления границы участка достаточно из точки M (точка, ближайшая к прямой l) опустить перпендикуляр a на прямую l, а из точки N провести прямую b, параллельную l; найти вершины квадрата $A = l \cap a$, $D = l \cap b$; осуществить поворот прямой b вокруг точки A на 90° против часовой стрелки; найти вершины $B = l \cap b'$, $C = b \cap b'$, где b' – образ прямой b при указанном повороте (рис. 78).

5) Все 4 точки лежат на разных сторонах квадрата. Для решения данной задачи рассмотрим вспомогательную задачу: Отрезки, концами которых служат внутренние точки противоположных сторон квадрата, перпендикулярны. Докажите, что эти отрезки равны.

Доказательство

Пусть EF и MN данные отрезки (рис. 79). При помощи параллельных переносов отобразим данные отрезки так, чтобы их образам принадлежал центр O квадрата. M_1N_1 – образ отрезка MN, E_1F_1 – образ отрезка EF. Так как параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, а угол переводит в равный ему угол, то $M_1N_1 = MN$, $E_1F_1 = EF$ и $M_1N_1 \perp E_1F_1$.

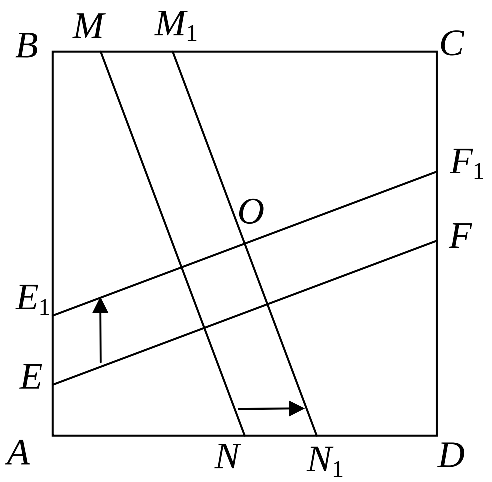


Рис. 79

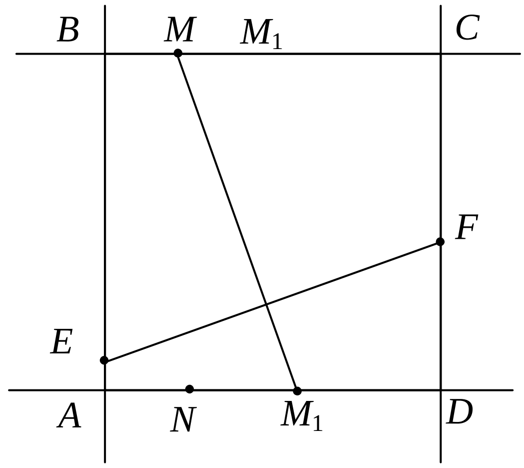


Рис. 80

Рассмотрим поворот вокруг центра квадрата на 90° против часовой стрелки. При таком повороте прямая BC перейдет в прямую AB, а прямая AD – в прямую CD. Тогда точка M_1 перейдет в точку E_1, а N_1 – в точку F_1, то есть отрезок E_1F_1 – образ отрезка M_1N_1. Поворот сохраняет расстояние между точками, значит $E_1F_1 = M_1N_1$, следовательно $EF = MN$.

Вернемся к исходной задаче. Пусть E и F – точки, принадлежащие паре противоположных сторон, M и N – точки, принадлежащие другой паре сторон. Построим отрезок MM_1 так, что $MM_1 \perp EF$ и $MM_1 = EF$. Точки M_1 и N определят одну из сторон квадрата. Остальные стороны легко построить (рис. 80).

89. Проезжая в автобусе мимо кинотеатра, некто успел заметить только часы (но не минуты!) начала четырех сеансов:

1-й сеанс – 12 ч. … м.

2-й сеанс – 13 ч. … м.

……………………..

7-й сеанс – 23 ч. … м.

8-й сеанс – 24 ч. … м.

Как по этим данным восстановить начало всех сеансов (предполагается, что продолжительность каждого из восьми сеансов одинакова).

90. Из таблицы 16

Таблица 16

1	2	3	…	n
$n + 1$	$n + 2$	$n + 3$	…	$2n$
$2n + 1$	$2n + 2$	$2n + 3$	…	$3n$
……………………………………………………………………..				
$(n - 1)n + 1$	$(n - 1)n + 2$	$(n - 1)n + 3$	…	n^2

выбраны n чисел так, что никакие два из выбранных чисел не стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце таблицы. Какова сумма выбранных чисел?

91. Если два целых числа дают одинаковые остатки при делении на некоторое третье положительное число p, то их разность делится на p; поэтому если числа M и N дают одинаковые остатки при делении на каждое из n последовательных простых чисел 2, 3, 5, …, p_n. Это обстоятельство позволяет предложить своеобразную «систему счисления», позволяющую записывать большие числа небольшим числом «цифр». А именно, условимся принимать за последнюю «цифру» числа остаток от деления его на 2 (эта «цифра» может иметь значения 0 и 1), за предпоследнюю – остаток от деления числа на 3 (эта «цифра» может иметь значения 0, 1 и 2) и т.д.; при этом, например, с помощью

10 «цифр» можно будет однозначно записать все целые числа от 0 до $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 715\,071\,357$. Эта система счисления имеет то большое достоинство (весьма ценное для использования ее в современных вычислительных машинах), что в ней ни сложение, ни умножение чисел не связаны с операцией «перенесения единиц в следующий разряд»: k-я «цифра» суммы (или произведения) двух чисел полностью определяется k-ми «цифрами» слагаемых (множителей) – она равна остатку, который дает при делении на соответствующее простое число p_k сумма (произведение) k-х «цифр». Недостатком же этой системы счисления является отсутствие простого правила, позволяющего сравнить два записанных по этой системе числа, т.е. по их «цифрам» определить, какое из них больше.

Требуется найти такое правило.

92. В числовом треугольнике (рис. 81)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 15 & 10 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1
\end{array}
$$

Рис. 81

каждое число равно сумме трех чисел, стоящих в предыдущей строке непосредственно над ним, справа от него и слева от него. Каковы номера тех строк этого треугольника, в которых ни одно число не делится на 3? А на 5? А на 7?

93. Задача о моделировании движения бильярдного шара. Пусть бильярдный стол представляет некоторую область Д. В качестве Д может быть прямоугольник, тогда имеем обычный прямоугольный бильярд, но может быть треугольник, круг, эллипс и т.д. Будем пренебрегать трением при движении шара, и пусть направление шара меняется только при ударе о борт бильярда по закону абсолютно упругого отображения после удара шара в точке P, то есть шар движется так, что его угол падения равен углу отражения (рис. 82). Если борт бильярда, то есть граница Г области в окрестности точки P, является криволинейным, то углы, образованные и отраженные отрезками траектории, определяются с касательной к линии Г (рис. 83). Граница может иметь угловые точки. Касательная в такой точке не определена, поэтому можно считать, что траектория шара, попавшего в такую точку, заканчивается в ней (рис. 84).

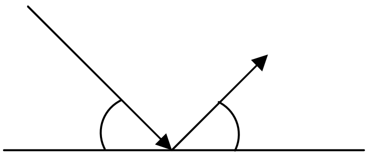


Рис. 82

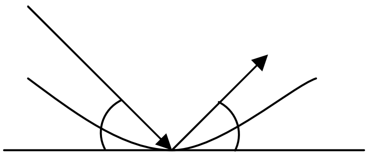


Рис. 83

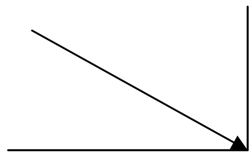


Рис. 84

Напишите программу, описывающую траекторию движения шара в случае прямоугольного, треугольного, кругового и эллипсовидного бильярдов.

94. Задача об оптимальной стратегии преследования. Пусть на плоскости преследователь Р (катер-перехватчик, милиционер, лиса) гоняются за убегающим И (соответственно: уходящим кораблем, нарушителем, зайцем). Будем считать, что преследователь и убегающий движутся с постоянными скоростями, соответственно p и v. Преследователь стремится поймать убегающего за кратчайшее время, а убегающий стремится избегать встречи. Если Р и И имеют возможность изменять направления своего движения, то И будет стремиться убегать по отрезкам, а Р будет направлять свое движение в соответствии с движением точки И. Составьте программу для моделирования преследования на экране компьютера.

Читатель для решения этой задачи найдет необходимые рекомендации в книгах:

а) *Совертков П.И.* Занимательное компьютерное моделирование в элементарной математике: учебн. пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2004. 384 с.

б) *Петросян Л.А., Рихсиев Б.Б.* Преследование на плоскости. М., 1991.

95. Задача об окружности девяти точек (окружность Эйлера). Составьте программу для моделирования на экране компьютера теоремы: «В любом треугольнике ABC середины сторон A_1, B_1, C_1, основания высот треугольника A_2, B_2, C_2 и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с вершинами треугольника, то есть точки A_3, B_3, C_3, расположены на одной окружности (рис. 85)».

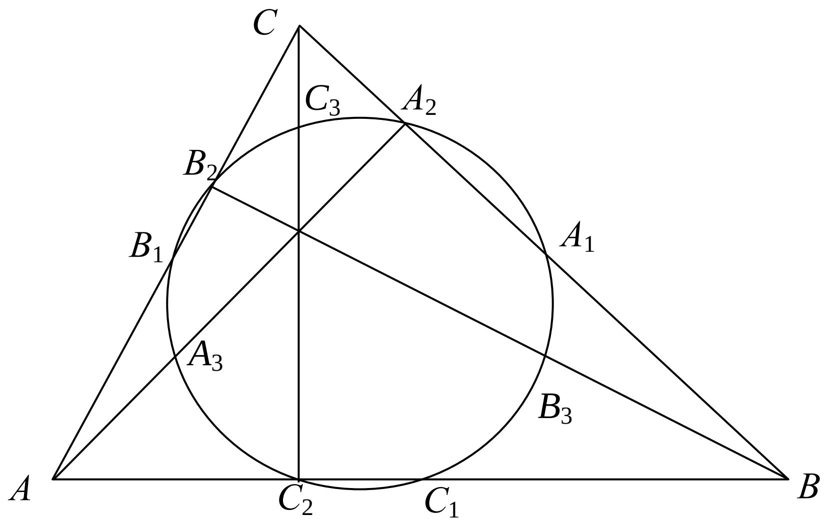


Рис. 85

96. Задача о нахождении точки Ферма-Торричелли с помощью компьютера. Точкой Ферма для треугольника называется точка, для которой сумма расстояний до вершин треугольника является минимальной. Точкой Торричелли для треугольника называется точка, из которой все стороны треугольника видны под равными углами. Если углы треугольника меньше 120°, то точки Ферма и Торричелли совпадают для данного треугольника. Составьте программу для компьютера, определяющую по заданным вершинам треугольника положение точки Ферма-Торричелли.

Указание: Поместите одну вершину треугольника в начало координат, другу на ось Ox, а третью – в верхнюю полуплоскость.

97. Задача о нахождении точек Крелля-Брокара. Точка K_1 для данного треугольника ABC называется первой точкой Крелля-Брокара, если $\angle K_1AB = \angle K_1BC = \angle K_1CA$. Точка K_2 для данного треугольника ABC называется второй точкой Крелля-Брокара, если $\angle K_2AC=\angle K_2CB=\angle K_2BA$. Составьте программы для компьютера, позволяющие построить точки Крелля-Брокара двумя способами:

а) построить на сторонах заданного треугольника внешним образом треугольники, подобные исходному, а затем провести прямые, соединяющие попарно вершины построенных и заданного треугольников;

б) использовать формулы для координат точек.

98. Задача о построении треугольника Наполеона на экране компьютера. Если на сторонах данного треугольника вне его построены равносторонние треугольники, то центры построенных треугольников являются вершинами равностороннего треугольника, называемого внешним треугольников Наполеона. Окружности, описанные около построенных треугольников, имеют общую точку.

Если на сторонах данного треугольника построены внутри него равносторонние треугольники, то центры построенных треугольников являются вершинами равностороннего треугольника, называемого внутренним треугольником Наполеона. Центры внутреннего и внешнего треугольников Наполеона совпадают.

Составьте программу для компьютера для построения на экране дисплея треугольников Наполеона.

99. Задача о моделировании на компьютере ломаной линии в окружности, касающейся круга. Пусть даны: окружность ω с центром O и радиусом R; окружность ω_1 с центром O_1 и радиусом r; окружность ω_1 расположена внутри круга, ограниченного окружностью ω. Обозначим расстояния между центрами окружностей через d, и пусть дана точка M_0 на окружности ω. Требуется построить ломаную $M_0M_1M_2M_3\ldots$, вершины которой расположены на окружности ω, а каждое звено ломаной касается окружности ω_1 (рис. 86). Составьте программу, моделирующую на экране дисплея построение такой ломаной.

100. Задача о геометрических паркетах. Геометрическим паркетом (замощением плоскости) называется покрытие плоскости без пропусков и без перекрытий заданными фигурами. Данные фигуры могут быть правильными многоугольниками, некоторыми многоугольниками или фигурами с заданными свойствами.

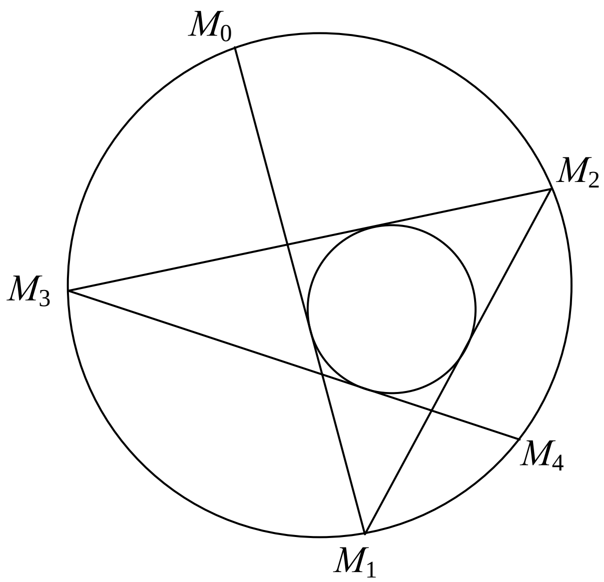


Рис. 86

1) Паркет из правильных многоугольников.

а) Каким одним типом правильного многоугольника можно замостить некоторую окрестность точки?

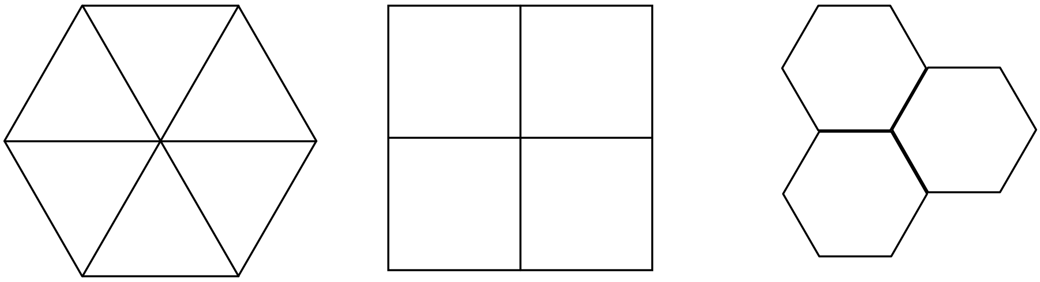
Дадим ответ на поставленный вопрос. Угол правильного n-угольника равен $\varphi_n = \frac{(n-2)180°}{n}$. Получаем величины углов многоугольников (таблица 17).

Таблица 17

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ_n	60°	90°	108°	120°	$\frac{5\cdot 180°}{7}$	135°	140°	144°	$\frac{9\cdot 180°}{11}$	150°

Укладывая целое число углов вокруг данной точки, получаем, что 360°: φ_n, то есть равно 60°, 90°, 120°.

Итак, окрестности точки можно замостить одним типом правильного многоугольника только при n = 3, 4, 6. Такие паркеты можно продолжить от окрестности точки, и они реализуются на всей плоскости (рис. 87).



а) б) в)

Рис. 87

б) Выясните вопрос о замощении окрестности точки тремя многоугольниками.

в) Выясните вопрос о замощении окрестности точки четырьмя многоугольниками.

г) Выясните вопрос о замощении окрестности точки пятью и шестью многоугольниками.

2) Паркет из неправильных четырехугольников.

а) Паркет из произвольного четырехугольника.

Сумма внутренних углов произвольного четырехугольника равна 360°, поэтому этими углами можно замостить окрестность точки. Для этого достаточно рассмотреть еще три четырехугольника. Постройте математическую модель для составления программы изображения паркета на экране компьютера.

б) Паркет из равносторонних пятиугольников Рейнхардта.

Правильными пятиугольниками невозможно замостить плоскость, то есть покрыть ими всю плоскость без пропусков и наложений. Но существуют равносторонние пятиугольники с двумя прямыми углами, которыми можно замостить плоскость. Рассмотрим два типа таких «двупрямоугольных пятиугольников».

Один тип характеризуется тем, что прямые углы прилежат к одной стороне (рис. 88).

Этот тип не представляет особого интереса с математической точки зрения, так как такой пятиугольник можно представить в виде объединения двух правильных фигур: квадрата и равностороннего треугольника.

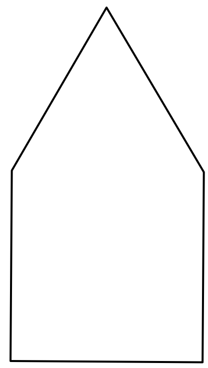


Рис. 88

Во втором типе равносторонних пятиугольников прямые углы не прилежат к одной стороне. Равносторонние пятиугольники этого типа называют пятиугольниками Рейнхардта (по имени немецкого математика, выделившего пять типов пятиугольников, которыми можно замостить плоскость). Такой пятиугольник (рис. 89) можно легко построить при помощи циркуля и линейки.

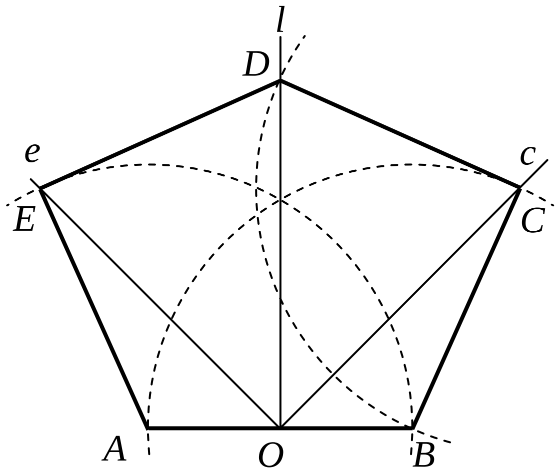


Рис. 89

Этапы построения пятиугольника Рейнхардта:

– построим отрезок AB, который будет стороной пятиугольника;

– пусть O – середина отрезка AB и l – серединный перпендикуляр этого отрезка;

– построим лучи c, e с началами в точке O, образующими углы величиной 45° с отрезком AB;

– циркулем с центром в точке B и радиусом AB делаем засечку на луче c в точке C; аналогично, циркулем с центром в точке A и радиусом AB, делаем засечку на луче e в точке E;

– сохраняя растров циркуля равным отрезку AB и центром в точке C (или E), делаем засечку в точке D на серединном перпендикуляре l;

– соединив последовательно точки B, C, D, E, A, получим пятиугольник Рейнхардта.

- Напишите программу построения пятиугольника Рейнхардта, а затем программу для получения геометрического паркета, составленного из этих пятиугольников.

- Докажите интересные свойства пятиугольника Рейнхардта:

– углы C и E, построенные вышеуказанным способом, прямые ($BC^2 + CD^2 = BD^2$);

– сумма углов A, B, D равна полному углу (360°);

– не существует окружности, вписанной в пятиугольник Рейнхардта;

– площадь пятиугольника Рейнхардта равна площади квадрата со стороной, равной OC;

– расстояние от вершины D до точки пересечения диагоналей AC и BE равно стороне пятиугольника;

– биссектриса угла EDS пересекает диагональ BE в точке L, которая принадлежит окружности с диаметром BD;

– биссектриса угла C и биссектриса угла ODE пересекаются в точке P, лежащей на стороне AE пятиугольника;

– $\angle EDC = 4\angle BAC = 2\angle ECB$;

– диагональ AC является биссектрисой угла BCE трапеции $ABCE$.

Материал о геометрических паркетах читатель найдет в следующих публикациях:

а) Гаврилова Н.Е., Масленникова О.Н. Использование компьютерной графики при создании мозаичных орнаментов // Информатика и образование. 2001. № 10. С.83–84.

б) Совертков П.И., Слива М.В., Хохлов Д.Н. Геометрический паркет на экране компьютера // Элементарная математика, математическое образование, геометрия и информатика. 2000. №4. С. 3–19.

101. Задачи на определение информации по заданным вопросам.

а) Имеется колода из 32 игральных карт (в колоде отсутствуют все четыре шестерки). Задумана одна из карт. На заданные вопросы даются ответы «да» или «нет». Какое наименьшее число вопросов нужно задать, чтобы угадать задуманную карту?

б) Задумано число среди 1, 2, …, 100. Какое минимальное число вопросов следует задать, чтобы определить с гарантией задуманное число?

в) Задумано целое число от 0 до 127. На заданные вопросы следуют ответы «да» или «нет» и разрешается один раз обмануть. Покажите, что достаточно одиннадцати вопросов, чтобы угадать задуманное число.

Указания (вернее, программы) по нахождению числа на промежутке $[a; b]$ методом половинного деления и нахождения числа в бинарной системе счисления, читатель найдет в сборнике «Элементарная математика, математическое образование, геометрия и информатика». № 2. 2000.

102. Поисково-исследовательскую работу учащихся можно организовывать не только индивидуально, но и в группах или со всем классом. В качестве примера проведем математическую деловую игру (МДИ) «Кругосветное путешествие» и опишем ее основные характеристики.

Цели МДИ. 1) создать условия для реализации знаний теоретического материала по сферической геометрии на примере задач географии и астрономии; 2) методом погружения в ролевую ситуацию раскрыть или поддержать творческий потенциал учащихся, познакомить с элементами исследовательской деятельности; 3) создать условия для преодоления учащимися неуверенности в высказывании гипотез; 4) закрепить навыки работы в группе.

Сюжет МДИ. Сюжетная линия носит исследовательский характер. Имитационная цель игры состоит в том, чтобы помочь команде корабля (экипажу самолета) проложить правильный маршрут движения, решив при этом следующие задачи:

– по данным координатам точек земной поверхности восстановить изображение маршрута движения корабля (самолета);

– используя теоретический материал из раздела «элементы сферической геометрии», провести необходимые вычисления и ответить на вопрос задачи.

Для решения этих задач создаются две группы – команда корабля и экипаж самолета. Игра проходит в форме скрытого соревнования между этими группами. В качестве сюжетных задач можно взять задачи из астрономии или географии. Примерами таких задач могут явиться задачи следующего содержания.

Задача 1. «Какую геометрическую фигуру представляет собой кратчайший трансатлантический путь «Нью-Йорк – Кейптаун»? Сделать рисунок. Чему равна длина этого пути, если радиус Земли R = 6370 км, географические координаты Нью-Йорка 41° с.ш., 74° з.д., а Кейптауна 34° ю.ш., 74° в.д.?»

Задача 2. «Самолет вылетает из Осло (Норвегия), направляясь по кратчайшему пути к аэродрому X, находящемуся в Южной Америке на экваторе. Свидетели отлета из Осло видят, как самолет исчезает на горизонте в точке, лежащей точно на западе. Каков пункт прибытия самолета? Какова длина трассы полета? В какой точке горизонта должны ждать самолет встречающие его люди на аэродроме X?»

<u>Роли МДИ.</u> Правильно составленный набор ролей является одним из условий динамичности игры. Роли распределяются так, чтобы ученик мог работать в процессе игры в разных режимах: и в групповом, и в индивидуальном. Кроме того, необходимо учитывать психологический комфорт участника, играющего конкретную роль (учет потребностей и возможностей учащегося). С учетом этих требований роли распределялись следующим образом:

– капитан корабля или самолета (хорошо успевающий ученик с высокими организаторскими способностями);

– команда корабля или экипаж самолета (формируется из учеников класса и делится на расчетную группу и графическую группу).

<u>Теоретическое поле.</u> Необходимый теоретический материал (определения, формулировки теорем, микро-задачи). Выполняется в виде

наглядной основы для учеников и аналогичной заготовки на доске, в которых указано, какие теоретические моменты необходимо отметить в соответствующих «ячейках» теоретического поля. В предлагаемой МДИ это такие понятия геометрии на сфере, как сферические координаты, расстояние между двумя точками на сфере, сферический треугольник, теорема косинусов для произвольного и прямоугольного сферического треугольника (таблица 18).

Колонка 2 таблицы дается в готовом виде, остальные заполняются учащимися самостоятельно.

Задания МДИ. Для коллективной работы обычно предлагаются задания среднего уровня сложности, для индивидуальной целесообразно задания дифференцировать (например, распределить на три уровня сложности, соответствующих базовому, среднему и продвинутому уровню усвоения материала). Дифференциация задач также зависит от уровня математической подготовки и профиля. В предлагаемой МДИ это могут быть задачи следующего содержания.

I уровень.

Задача 1. Какое кругосветное путешествие короче: по экватору или по 60° с.ш.?

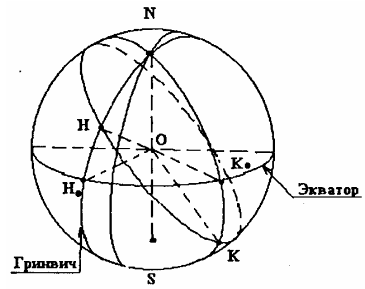
Задача 2. Каким видом транспорта можно быстрее совершить «кругосветное» путешествие (с возвращением в точку отправления): самолетом по экватору (средняя скорость 800 км/ч), на морском судне по 60° ю.ш. (средняя скорость 40 км/ч) или на лыжах по 89° ю.ш. (средняя скорость 12 км/ч)? Сколько времени будет продолжаться каждое из этих путешествий (не учитывая остановок)?

Задача 3. Возможен ли беспосадочный полет через Тихий океан по экватору из Сингапура до западных берегов Южной Америки при максимальной дальности перелета самолета 9 200 км?

Задача 4. Как определить масштаб глобуса, если он не известен?

Таблица 18

Теоретическое поле МДИ «Кругосветное путешествие»

№	Указания	Основные понятия и теоремы	
		География	*Сферическая геометрия*
1	2	3	4
1	Определите широту и долготу точек земной поверхности.	Задача 1. Нью-Йорк: φ = 41° с.ш., λ = 74° з.д., Кейптаун: $\varphi = 34^0$ ю.ш. λ=18° в.д. Задача 2. Осло: φ = 59°55' с.ш., λ = 10°43'в.д.	Широта φ соответствует величине угла между прямой и плоскостью; долгота λ -величине двугранного угла.
2	Сформулируйте вопрос задачи.	Найти кратчайшее расстояние между точками земной поверхности.	Найти сферической расстояние.
3	Дайте определение сферическому расстоянию.		
4	Используя глобус, покажите данные точки земной поверхности и примерный маршрут движения.		
5	Сделайте рисунок.	Задача 1. 	Задача 2. 
6	Назовите фигуруна сфере, с которой необходимо связать решение задачи.	Треугольник, вершинами которого служат точки земной поверхности.	Сферический треугольник.
7	Дайте определение сферическому треугольнику.		
8	Выберите в качестве третьей вершины «удобную» точку и назовите получившиеся треугольники.	Северный полюс. Треугольник *HNK*.	Северный полюс. Треугольник *ABC*.
9	Сформулируйте теорему, на которой основано решение задачи.	Теорема косинусов: $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\angle C.$	
10	Произведите необходимые расчеты и ответьте на вопрос задачи		
11*	Попытайтесь найти другое решение задачи.		

Задача 5. Из Санкт-Петербурга вылетел самолет по необычному маршруту. Вначале он взял курс точно на север, прошел в этом направлении 500 км и затем повернул на восток. Пролетев в эту сторону 500 км, самолет сделал новый поворот на юг и прошел еще 500 км. Затем он повернул на запад и, пролетев 500 км, опустился. Куда прилетел самолет?

Задача 6. В пределах российского сектора Арктики есть остров Рудольфа, расположенный между 81,7° и 81,9° с.ш. и 58° и 59,2° в.д. Форма его почти прямоугольная. Какова площадь этого острова?

II уровень.

Задача 1. В прямоугольном сферическом треугольнике ABC известны катет $b = 51°\ 03'$ и противолежащий ему угол $B = 80°\ 15'$. Определите стороны a, c к углу C треугольника.

Задача 2. Дуга AB большого круга земной поверхности пересекается с меридианом NS в точке A под углом $A = 41°\ 30'$ с экватором EE_1 в точке B, под углом $B = 48°\ 31'$. Вычислить широту ϕ точки A, долготу λ точки B относительно меридиана NS и дуги AB, считая Землю шаром радиуса $R = 6\ 370$ км.

Задача 3. Углы сферического треугольника, расположенного на земной поверхности, оказались равными $A = 42°\ 20'$, $B = 56°\ 28'$, $C = 81°\ 22'$. Вычислить линейные длины сторон треугольника, принимая Землю за шар радиуса $R = 6\ 370$ км.

Задача 4. В сферическом треугольнике ABC даны угол $A = 39°\ 24'$ и две стороны $a = 56°\ 15'$, $b = 68°\ 39'$. Определите углы B, C и сторону c треугольника.

Задача 5. Сферический треугольник ABC, расположенный на земной поверхности, имеет стороны $a = 6°\ 40'$, $b = 36°\ 12'$, $c = 40°\ 12'$. Вычислить площадь его поверхности, принимая Землю за шар, радиуса 6 370 км.

III уровень.

Задача 1. Вычислить расстояние между пунктом A ($\phi_1 = 59° 56'$, $\lambda_1 = 30° 20'$) и пунктом B ($\phi_2 = 39° 55'$, $\lambda_2 = 30° 20'$) по дуге большого круга, принимая Землю за шар радиуса R = 6 370 км.

Задача 2. В пункте N на географической широте $\phi = 50° 00'$ наблюдалась звезда при часовом угле $t = 50° 28'$ и при азимуте $A = 89° 07'$. Вычислить зенитное расстояние z* и склонение δ звезды.

Задача 3. В пункте N, на широте $\phi = 57° 38'$, при прохождении центра Солнца через первый вертикал небесной сферы на западе, измерено его зенитное расстояние, оказавшееся равным $z = 80° 15'$. Найти склонение δ Солнца и его часовой угол t в этот момент.

Задача 4. Звезда Кастор (α Близнецов), склонение которой $\delta = +32° 00'$, наблюдалась на западе в первом вертикале небесной сферы, при зенитном расстоянии $z = 38° 30'$. Вычислить широту ϕ места наблюдения и часовой угол t звезды в момент наблюдения.

Задача 5. Звезда наблюдалась в первом вертикале небесной сферы в пункте N на широте $\phi = 58° 03'$ при часовом угле $t = 75° 30'$. Вычислить склонение δ звезды и ее зенитное расстояние z в момент наблюдения.

Задачи второго и третьего уровня рассчитаны на знание элементов сферической геометрии.

<u>Визуальные материалы МДИ</u>. Это графическое отображение игры: печатные основы для теоретического поля, указания к работе учащихся, справочные материалы, бланки научной и технической экспертизы.

<u>Научная экспертиза МДИ.</u> Группа участников игры (в нашей МДИ – два ученика, возглавляемые учителем) с достаточно высоким уровнем знаний, функции которых – проверка и оценка учебной деятельности всех остальных участников игры. Перед началом игры они обязаны довести до сведения участников правила игры, т.е. в каком случае команде присуждается победа.

Деятельностно-временная схема МДИ. Схема обычно выполняется в виде таблицы, в которой указаны действия всех групп участников и соответствующие временные интервалы. В схему также включают резервное время, позволяющее не выходить за рамки регламента игры в целом.

Техническая экспертиза. Функции технической экспертизы: наблюдение, оценивание, корректировка деятельности участников игры, психологическое настраивание будущих участников на нестандартные формы работы в классе (обычно эту роль выполняют представители педагогического коллектива).

На заключительном этапе игры командир корабля (самолета) сам (или назначает кого-то) докладывает о прохождении маршрута, отвечает на все вопросы задачи, аргументируя свой отчет вычислениями, проведенными расчетной группой.

103. Приведем удивительные свойства отдельных чисел, среди которых некоторые мы обосновали, другие же предлагаем обосновать читателю. Об этих и других свойствах чисел читатель найдет материал в книге Щепана Еленьского «По следам Пифагора: Занимательная математика». М.: Государственное Издательство детской литературы, 1961. 486 с

1) Если между цифрами числа 49 будем вставлять число 48, то составленные таким образом числа, а именно, 49; 4$\underline{48}$9; 44$\underline{48}$89; 444$\underline{48}$889; … всегда будут полными квадратами

$$49 = 7^2,$$

$$4489 = 67^2,$$

$$444889 = 667^2,$$

$$44448889 = 6667^2,$$

…………………………

2)

$$
\begin{gathered}
1 \cdot 9 + 2 = 11, \\
12 \cdot 9 + 3 = 111, \\
123 \cdot 9 + 4 = 1111, \\
1234 \cdot 9 + 5 = 11111, \\
12345 \cdot 9 + 6 = 111111, \\
123456 \cdot 9 + 7 = 1111111, \\
1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111, \\
12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111.
\end{gathered}
$$

3)

$$
\begin{array}{ll}
11^1 = 11, & 1 + 1 = 2 \\
11^2 = 121, & 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2 \\
11^3 = 1331, & 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3 \\
11^4 = 14641, & 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4
\end{array}
$$

………………………………

4)

$$
\begin{gathered}
1^2 = 1, \\
11^2 = 121, \\
111^2 = 12321, \\
1111^2 = 1234321, \\
11111^2 = 123454321, \\
111111^2 = 12345654321,
\end{gathered}
$$

……………………………..

5) Возьмем по меньшей мере четырехзначное число, например, 43357. Запишем под ним то же самое число таким образом, чтобы первая цифра записываемого числа, стояла бы под четвертой цифрой верхнего числа. Затем числа сложим

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 43357 \\ 43357 \end{array} \\
\hline
43400357
\end{array}
$$

Станем делить полученную сумму поочередно на 7, 11, 13. Получим исходное число. Почему?

Дадим пояснение этому свойству. Заметим, что $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Мы складывали два числа, которые можно записать так:

$$43357 \cdot 1000 + 43357 = 43357\,(1000 + 1) = 43357 \cdot 1001,$$

а так как $1001 : 7 = 143$, $143 : 11 = 13$, $13 : 13 = 1$, то значит после трех делений опять получено исходное число 43357.

6) Рассмотрим арифметическую прогрессию с первый членом $a_1 = 3$ и разностью $d = 3$: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, …

Если умножим каждый член прогрессии на 37, то получим: 111, 222, 333, 444, 555, …, 999. Еще можно заметит, что $1 + 1 + 1 = 3$, $2 + 2 + 2 = 6$, $3 + 3 + 3 = 9$, $4 + 4 +4 = 12$ и т.д.

7) Возьмем число 142857 (это дробная часть числа, полученного от деления 1 на 7). Если будем умножать поочередно это число на 2, 3, 4, 5, 6, то получим произведения, которые будут состоять из тех же цифр, но расставленных в ином порядке:

а) $1 \cdot 142857 = 142857$,

б) $2 \cdot 142857 = 285714$,

в) $3 \cdot 142857 = 428571$,

г) $4 \cdot 142857 = 571428$,

д) $5 \cdot 142857 = 714285$,

е) $6 \cdot 142857 = 857142$.

Сложим теперь числа, полученные в пунктах а) и е), б) и д), в) и г):

$$\begin{array}{r} 142857 \\ +\;857142 \\ \hline 999999 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 285714 \\ +\;714285 \\ \hline 999999 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 428571 \\ +\;571428 \\ \hline 999999 \end{array}$$

8) Запишем число из всех цифр, кроме 8 и 0:

12345679.

Если его поочередно умножать на 9 и на кратные числа 9 до 100 (18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81), то получим

$$9 \cdot 12345679 = 111111111,$$

$$18 \cdot 12345679 = 222222222,$$

$$27 \cdot 12345679 = 333333333,$$

…………………………………..

$$81 \cdot 12345679 = 999999999.$$

9) Умножим число 12345679 на 8 (недостающая цифра в исходном числе) получим 98765432 (цифры идут в обратном порядке, но без цифры 1).

Дадим пояснение: $12345679 \cdot 8 = (12345678 + 1) \cdot 8 = 98765432$.

Заметим еще одно свойство:

$$\begin{aligned}
&12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432,\\
&1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543,\\
&123456 \cdot 8 + 6 = 987654,\\
&12345 \cdot 8 + 5 = 98765,\\
&1234 \cdot 8 + 4 = 9876,\\
&123 \cdot 8 + 3 = 987,\\
&12 \cdot 8 + 2 = 98,\\
&1 \cdot 8 + 1 = 9.
\end{aligned}$$

10) Рассмотрим дробь $\frac{8712}{2178}$ (в ней знаменатель записан из тех же цифр, что и числитель, но взятых в обратном порядке). Эта дробь равна 4. Если записывать числитель, а затем соответствующим образом знаменатель, взяв в записи сколько угодно раз число 8712 (для знаменателя 2178), то получим дроби, значения которых также будут равны 4: $\frac{87128712}{21782178} = 4$; $\frac{871287128712}{217821782178} = 4$; …

Заметим еще одно интересное свойство дроби $\frac{8712}{2178}$. Если между числами 87 и 12 (для знаменателя соответственно между 21 и 78) вставить одну и несколько 9, то получим дроби, значения которых также равны 4: $\frac{8712}{2178} = \frac{87912}{21978} = \frac{879912}{219978} = \ldots = 4$.

11)

$$4^2 = 16,$$
$$34^2 = 1156,$$
$$334^2 = 111556,$$
$$3334^2 = 11115556,$$
$$33334^2 = 1111155556,$$

…………………………….

12)

$$9 \cdot 9 + 7 = 88,$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888,$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8888,$$
$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888,$$
$$98765 \cdot 9 + 3 = 888888,$$
$$987654 \cdot 9 + 2 = 8888888,$$
$$9876543 \cdot 9 + 1 = 88888888,$$
$$98765432 \cdot 9 + 0 = 888888888,$$
$$987654321 \cdot 9 - 1 = 8888888888.$$

13)

$49 \cdot 9 = 441$, где $4 + 4 + 1 = 9$;

$50 \cdot 9 = 450$, где $4 + 5 + 0 = 9$;

$51 \cdot 9 = 459$, где $4 + 5 + 9 = 18$, $1 + 8 = 9$;

$52 \cdot 9 = 468$, где $4 + 6 + 8 = 18$, $1 + 8 = 9$;

$53 \cdot 9 = 477$, где $4 + 7 + 7 = 18$, $1 + 8 = 9$;

$54 \cdot 9 = 486$, где $4 + 8 + 6 = 18$, $1 + 8 = 9$;

$55 \cdot 9 = 495$, где $4 + 9 + 5 = 18$, $1 + 8 = 9$;

…………………………………………………….

15)

$$9 \cdot 7 = 63$$

$$99 \cdot 77 = 7623$$

$$999 \cdot 777 = 776223$$

$$9999 \cdot 7777 = 77762223$$

$$99999 \cdot 77777 = 7777622223$$

…………………………………..

16)

$$5^2 = 25,$$

$$25^2 = 625,$$

$$625^2 = 390625,$$

$$90625^2 = 8212890625,$$

$$890625^2 = 793212890625,$$

$$2890625^2 = 8355712890625,$$

$$12890625^2 = 166168212890625,$$

$$212890625^2 = 45322418212890625,$$

$$8212890625^2 = 67451572418212890625,$$

…………………………………………………………

Предлагаем читателю самому построить подобные примеры.

17) Рассмотрим способ возведения в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся 5.

$45^2 = 2025$, где $20 = 4 \cdot 5$

$75^2 = 5625$, где $56 = 7 \cdot 8$

Видим, что число десятков умножается на следующее за ним большее число, а к произведению приписывается 25. Приведем еще два примера:

$85^2 = 7225$, где $72 = 8 \cdot 9$,

$95^2 = 9025$, где $90 = 9 \cdot 10$.

Дадим пояснения. Двузначное число, оканчивающееся на 5, можно представить в виде $10a + 5$, где a – число десятков:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 2\cdot 5\cdot 10a + 25 = 100a^2 + 100a + 25 =$$
$$= 100a(a+1) + 25 = a\cdot(a+1)\cdot 100 + 25.$$

Рассмотрим то же действие с трехзначными числами:

105^2 = 11025, где 110 = 10 · 11,

135^2 = 18225, где 182 = 13 · 14,

155^2 = 24025, где 240 = 15 · 16.

Дайте пояснения.

18) Рассмотрим возведение в квадрат чисел от 51 до 59. Для этого надо к числу 25 прибавить число единиц данного числа и к результату прибавить квадрат этого числа (цифра обозначающая число единиц). Например, 57^2 = 3249, 55^2 = 3025.

Объясняет это действие, такая цепочка равенств:

$$(50+m)^2 = (25+m)\cdot 100 + m^2.$$

19) Сформулируйте правило возведения в квадрат чисел от 41 до 49. Приведем для облегчения формулу, а читателю предоставляется возможность прокомментировать ее, сформулировав тем самым нужный способ:

$$(40+m)^2 = (15+m)\cdot 100 + (10-m)^2.$$

Заметим, что в нужных случаях следует писать в итоге так 1^2 = 01, 2^2 = 04, 3^2 = 09.

104. Пифагор нашел формулы для выражения чисел *a*, *b*, *c* таких, что $a^2 + b^2 = c^2$. Эти формулы таковы:

$$a = 2n+1,$$
$$b = 2n(n+1),$$
$$c = 2n^2 + 2n + 1,$$

где n – произвольное натуральное число.

105. Если сумма квадратов трех чисел равна квадрату четвертого числа, то это – пифагорейская четверка, то есть $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Четыре числа дают пифагорейскую четверку, если они вычисляются по формулам:

$$a = m,$$

$$b = \frac{m^2 - 1}{2},$$

$$c = \frac{m^4 + 2m^2 - 3}{8},$$

$$d = \frac{m^4 + 2m^2 + 5}{8}.$$

Приведенные формулы для получения пифагорейских троек и четверок чисел помогут читателю при составлении различного рода задач.

106. Как можно узнать дату, месяц и год Вашего рождения? Для этого поступим так.

Число, означающее день Вашего рождения, умножьте на 20 и к результату прибавьте 77. Сумму умножьте на 5 и прибавьте число, означающее месяц, в котором Вы родились. Умножьте эту сумму на 20 и опять прибавьте 77. Результат умножьте на 5, прибавьте число состоящее из двух последних цифр года Вашего рождения.

Из полученного числа вычтите 38885: первые две цифры разности – день рождения; другие две – месяц, последние две год рождения.

Рассмотрим пример. Автор родился 14 января 1950 года. Проделаем указанные действия, в результате чего мы и получим нужные числа.

1) 14 · 20 = 280,

2) 280 + 77 = 375,

3) 375 · 5 = 1785,

4) 1785 + 1 = 1786,

5) 1786 · 20 = 35720,

6) 35720 + 77 = 35797,

7) 35797 · 5 = 178985,

8) 178985 + 50 = 179035,

9) 179035 – 38885 = 140150.

Установите, за счет чего подобное возможно.

Заметим, что вместо числа 77 можно взять любое число m, но тогда вместо $38885 = 505 \cdot 77$, вычесть нужно число $505 \cdot m$.

107. Предложите кому-нибудь задумать число (l), месяц (m) и год (n) какого-нибудь события, происшедшего в XX веке (для года взять две последние цифры) и проделать над l, m, n операции, указанные в левой части равенства

$$((20l + 222)\cdot 5 + m)\cdot 100 + n + 111 = 10000l + 100m + n + 11111 = N$$

Для определения задуманной даты надо из N вычесть 111111 и полученную разность разбить на грани, отделив – справа налево – по две цифры.

Например, если N = 201656, то задумано 9|05|45, то есть 9 мая 1945 года. Придумайте сами подобные «фокусы».

Георг Кантор отмечал: «В арифметике искусство ставить вопросы важнее умения их разрешать».

Приведем исследовательские задачи по арифметике, хотя предлагались они в работе и раньше.

108. Докажите, что существует множество арифметических прогрессий, составленных из трех различных квадратов натуральных чисел. Для этого воспользуйтесь тождеством

$$(n^2 - 2n - 1)^2 + (n^2 + 2n - 1)^2 = 2(n^2 + 1)^2.$$

109. Определение. Натуральные числа m и n ($m \neq n$) называются дружественными, если сумма натуральных делителей каждого из них составляет $m + n$.

Примеры дружественных чисел: m = 220, n = 284 Делители числа 220, исключая само число, следующие: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110. Делители числа 284, исключая само число: 1, 2, 4, 71, 142.

Имеем: 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220; 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + + 55 + 110 = 284.

$m = 12285 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, $n = 14595 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139$ (заметим, что оба числа нечетные). Возникает вопрос: «Существует ли хотя бы одна пара дружественных чисел, из которых одно четное, а другое – нечетное?»

110. Подбором найдите решения предложенных ниже уравнений, которые были бы натуральными числами:

$$x^2 + y^2 = z^2;$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3.$$

111. Докажем, что число $2^{2^5} + 1$ делится на 641.

Доказательство

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 15 \cdot 2^{28} + 2^{28} + 1 = 15 \cdot 2^{28} + \left(3 + 5^3\right) \cdot 2^{21} + 1 =$$
$$= 15 \cdot 2^{28} + 3 \cdot 2^{21} + 5^3 \cdot 2^{21} + 1 = 3 \cdot 2^{21}\left(5 \cdot 2^7 + 1\right) + \left(5 \cdot 2^7\right)^3 + 1^3 =$$
$$= 3 \cdot 2^{21}\left(5 \cdot 2^7 + 1\right) + \left(5 \cdot 2^7 + 1\right)\left(5^2 \cdot 2^{14} - 5 \cdot 2^7 + 1\right) =$$
$$= \left(5 \cdot 2^7 + 1\right)\left(3 \cdot 2^{21} + 5^2 \cdot 2^{14} - 5 \cdot 2^7 + 1\right).$$

Заметим, что число $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$.

Так как число $2^{2^5} + 1$ мы представили в виде произведения двух множителей, одно из которых есть $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$, то это значит, что число $2^{2^5} + 1$ делится на 641.

Приведенное доказательство принадлежит Цейлонскому математику Канагасабапатхи.

Число $2^{2^5} + 1$ связано с такой историей. П. Ферма считал, что это число при любых натуральных *n* является простым числом. Такой вывод он сделал, проверив этот факт для *n* =1, 2, 3, 4 (использован метод неполной индукции).

Л. Эйлер в 1732 г. доказал, что предположение П. Ферма ошибочно, так как число $2^{2^5} + 1$ = 4294697297 не простое, а составное, ибо делится на 641.

112. Докажите, что по десятичное нумерации число $2^{2^{10}} + 1$ имеет 19729 цифр.

113. Докажите, что последней цифрой числа $2^{2^{10}} + 1$ есть 7.

114. Известна теорема Вильсона «Если p – простое число, то число $(p-1)!+1$ делится на p». Докажите справедливость обратной теоремы: «Если число $(n-1)!+1$ делится на n ($n \geq 2$), то n – простое число».

115. Определение: «Натуральное число n, сумма натуральных делителей которого, исключая само число, равно числу n, называется совершенным». Например, совершенными числами будут 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328. Действительно, натуральными делителями числа 6 являются 1, 2, 3, 6; сумма всех делителей, исключая само число 6, равна 6 ($1+2+3=6$).

Натуральными делителями числа 28 являются 1, 2, 4, 7, 14, 28; сумма всех делителей, исключая само число 28, равна 28 ($1+2+4+$ $+7+14=28$).

Докажите, что числа вида $2^{n-1}\left(2^n-1\right)$, где 2^n-1 - простое число, являются совершенными числами.

Заметим, что этот факт был известен уже Евклиду (III век до н.э.).

116. Докажите, что сумма всех натуральных делителей каждого числа, являющегося степенью числа 2 с натуральным показателем, равна $2n-1$.

117. Найдите наибольшее натуральное число k, при котором $\dfrac{101\cdot102\cdot103\cdot\ldots\cdot999\cdot1000}{7^k}$ будет целым числом.

118. Некоторые числа можно представить в иной форме, не привлекая новых цифр; например: $660=6!-60$; $1395=15\cdot93$; $145=1!+$ $+4!+5!$; $144=(1+4)!+4!=\left(1+\sqrt{4}\right)!\cdot4!$; $387420489=3^{87+420-489}$.

Попробуйте найти аналогичные равенства.

119. Использовав по одному разу каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и каждую из операций: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, получите возможно большее число.

120. В выражении 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 расставьте скобки так, чтобы после вычислений получилось наибольшее (или наименьшее) из всех возможных чисел.

121. В примерах: 41096 · 83 = 3410968 и 8 · 86 = 688 умножение на двузначное число «упрощено»: вторая цифра второго сомножителя ставится перед первым сомножителем, а первая – после него. Поищите аналогичные примеры.

122. Существуют дроби, величина которых не меняется при вычеркивании одинаковых цифр и даже группы цифр в числителе и знаменателе. Например: $\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$; $\frac{3544}{7541}=\frac{344}{741}$; $\frac{2666}{6665}=\frac{266}{665}=\frac{26}{65}=\frac{2}{65}$; $\frac{143185}{17018560}=\frac{1435}{170560}$; $\frac{4251935345}{91819355185}=\frac{425345}{91825185}$ и т.д. Приведите примеры еще нескольких дробей, обладающих этим свойством. Можно попытаться ответить на вопрос об отыскании всех дробей, допускающих такое «сокращение», оговорив, из скольких цифр составлены числитель и знаменатель и на каких местах должны стоять «сокращаемые» цифры.

Например, из $\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}$ $(a \neq c)$ легко получить $c=\frac{10ab}{9a+b}$; в пределах до десяти целочисленные значения b и c получаются лишь при a = 1, 2, 4, что дает дроби $\frac{16}{64}$; $\frac{19}{95}$; $\frac{26}{64}$; $\frac{49}{98}$.

123. Если в трехзначном числе $\overline{abc}$ (здесь a, b, c – цифры числа) $a > c$, то:

1) в разности $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{\alpha\beta\gamma}$, всегда $\beta=9=\alpha+\gamma$;

2) $\overline{\alpha\beta\gamma}+\overline{\gamma\beta\alpha}=1089$.

Таким образом, зная лишь одну из крайних цифр числа $\overline{\alpha\beta\gamma}$, можно сразу назвать разность между задуманным числом $\overline{abc}$ и числом «обращенным», и, ничего не зная об $\overline{\alpha\beta\gamma}$, при любом задуманном числе можно «угадать» результат сложения: $\overline{\alpha\beta\gamma}+\overline{\gamma\beta\alpha}$. Проверьте отмеченные факты и докажите их.

124. Если к любому трехзначному числу N приписать справа такое же число и разделить полученное шестизначное число (оно будет равно $1001 \cdot N = N \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$) на 7, затем полученное частное на N и, наконец, второе частное – на 11, то в результате всегда получится 13.

Большинству читателей кажется удивительным то, что все деления происходят без остатка при случайном выборе N. Обоснуйте описанный факт чисто математическими рассуждениями.

125. Докажите, что для каждого натурального k общее число цифр в последовательности чисел: 1, 2, 3, …, $10^k - 1$, 10^k равно числу нулей в последовательности чисел: 1, 2, 3, …, $10^{k+1} - 1$, 10^{k+1}.

Дадим некоторые рекомендации. Каждое S-значное число n заключено в границах: $10^{S-1} \le n < 10^S$. Всех S-значных чисел - $9 \cdot 10^{S-1}$, а общее число цифр в них - $9S \cdot 10^{S-1}$.

126. В числе 3728954106 зачеркните три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке составили наименьшее семизначное число.

127. Пишут одну за другой четыре последовательных цифры, затем первые две меняют местами. Полученное таким образом четырехзначное число является квадратом натурального числа. Найдите это число.

128. Верно ли утверждение: если число p простое и p больше 100, но меньше 200, то число $210 - p$ тоже является простым числом.

129. В каждой из девяти клеток, составляющих квадрат, записано по одному числу. Когда находили суммы чисел каждой из трех строчек, то получили соответственно следующие суммы: -6,1; 2,5; -3,4. При подсчете сумм чисел каждого из трех столбцов получим соответственно 2,3; -5,8; -3,7. Докажите, что в вычислениях допущена ошибка. Исправьте ошибку, о которой идет речь в задаче.

Покажем суть самой ошибки. Сумма девяти чисел, записанных в таблице, равна (-6,1 + 2,5 – 3,4 = -7). С другой стороны, эта же сумма должна быть равной (2,3 – 5,8 – 3,7 = -7,2). Полученное противоречие показывает, что в вычислениях допущена ошибка.

130. Записано несколько чисел. Каждое из этих чисел, начиная с третьего, равно сумме двух, предшествующих ему. Известно, что девятое число и десятое число равно 1. Найдите первое и второе число.

131. Найдите множество целых значений буквы a, при которых произведение $(5 + a)(3 - a)$ положительно.

132. Из чисел a, b, c одно положительно, одно отрицательно и одно равно нулю. Кроме того, известно, что $|a| = b^2(b - c)$. Какое из чисел положительно, какое отрицательно и какое равно нулю?

Решение

Если $b = 0$, то и $a = 0$, что противоречит условию. Если $a = 0$, то либо $b = a = 0$, либо $b = c$, что в том и другом случае противоречит условию. Остается единственный случай: $c = 0$. Тогда заданное равенство принимает вид: $|a| = b^3$. Поскольку $|a| > 0$, то b должно быть положительным числом. Итак, $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$.

Найдите другие методы (способы) решения этой задачи.

133. Представьте в виде произведения степеней простых чисел произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 15$.

134. Какими цифрами оканчиваются десятичные записи следующих цифр:

а) $135^x + 31^y + 56^{x+y}$, если $x \in N, y \in N$;

б) $142 + 142^2 + 142^3 + \ldots + 142^{20}$;

в) $34^x + 34^{x+1} + 34^{2x}$, если $x \in N$.

135. Известно, что число $n^4 + n^3 + n^2 + n$ не делится на 10. Какими цифрами может оканчиваться десятичная запись числа n?

136. Сколькими нулями могут оканчиваться числа вида $9^n + 1$, если $n \in N$?

137. Найдите все четырехзначные числа, которые, будучи приписаны к числу 400 справа, дадут семизначное число, являющееся квадратом натурального числа.

Укажем, что этими числами являются: 4001 и 8004.

138. Вычислить:

а) $(-1)\cdot(-1)^2\cdot(-1)^3\cdot(-1)^4\cdot K\cdot(-1)^{1000}\cdot(-1)^{1001}$;

б) $(100-1^2)\cdot(100-2^2)\cdot K\cdot(100-25^2)$.

139. Докажите, что из ста одного числа можно выбрать два, разность которых делится на 100.

Решение.

При делении на 100 может получиться в остатке одно из следующих чисел: 0, 1, 2, 3, …, 99. Поэтому среди ста одного числа найдутся два, которые при делении на 100 дают равные остатки. Следовательно, разность их делится на 100.

140. Немецкий математики М. Штифель (1487-1567) утверждал, что числа вида $2^{2n+1} - 1$, где $n \in N$ являются простыми. Прав ли он?

Ответ: Нет . При n = 4 получаем $2^9 - 1$ = 511 = 7 · 73.

141. Числовая последовательность состоит только из единиц и нулей. Если вычеркнуть все члены, стоящие на нечетных местах, то оставшиеся числа образуют точно такую же числовую последовательность.

а) Приведите примеры таких последовательностей.

б) Приведите примеры последовательностей, обладающих тем же свойством, но если удаляются члены, стоящие на четных местах.

Ответа: а) 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, …;

1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, …;

б) 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, …;

1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, ….

142. Какие цифры обозначены буквами *x, y, z*, если произведение числа $\overline{xy}$ на число x равно $\overline{zzz}$?

Указание. Показать, что число $\overline{xy}$ кратно 37.

143. Среди чисел от 1 до 1000 сколько таких, которые делятся на 4, но не имеют цифры 4 в своей записи?

Указание. Подсчитайте, сколько чисел делится на 4 и имеют в своей записи цифру 4. Результат вычесть из 250 – количество чисел от 0 до 999 (от 1 до 1000), делящихся на 4.

144. Среди первых десяти тысяч чисел сколько таких, которые оканчиваются на 1 и могут быть представлены в следующем виде: $8^m + 5^n$? ($m \in N, n \in N$).

Указание. Показать, что $m = 4$.

145. Верны ли неравенства:

а) $96 \cdot 98 \cdot 189 = 81 \cdot 343 \cdot 2^6$;

б) $12^{18} = 27^6 \cdot 16^9$;

в) $25^{28} \cdot 0{,}008^{19} = 0{,}25$?

146. Доказать, что:

а) $100002^4 > 9997^5$;

б) $31^{11} < 17^{14}$;

в) $76^8 > 10^{15}$.

147. Какое трехзначное число имеет наибольшее число делителей?

Ответ: 840. Это число имеет 32 делителя.

148. Можно ли записать миллиард (1 000 000 000) в виде произведения двух чисел в записи которых не было бы ни одного нуля?

Ответ: Можно: $5^9 \cdot 2^9$.

149. При каких значениях натурального числа n сумма $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$ кратна десяти?

Указание. Показать, что последней цифрой десятичной записи числа n могут быть только 1 или 6.

150. Докажите равенство, не производя непосредственных вычислений:

$$55554 \cdot 55559 \cdot 55552 - 55556 \cdot 55551 \cdot 55558 =$$
$$= 66665 \cdot 66670 \cdot 66663 - 66667 \cdot 66662 \cdot 66669.$$

Указание. Введите подстановку: a = 55555, b = 66666.

151. Вычислите наиболее рациональным способом:

$$3\frac{1}{117} \cdot 4\frac{1}{119} - 1\frac{116}{117} \cdot 5\frac{118}{119} - \frac{5}{119}$$

Указание. Введите подстановку: $a = \frac{1}{117}$, $b = \frac{1}{119}$.

152. Что больше: $\frac{23^{1973}+1}{23^{1974}+1}$ или $\frac{23^{1974}+1}{23^{1975}+1}$?

152. Число 30 легко выразить тремя пятерками: 5 · 5 + 5. Труднее это сделать тремя другими одинаковыми цифрами. Попробуйте это сделать несколькими способами.

Ответ: 6 · 6 – 6 = 30; 33 – 3 = 30; $3^3 + 3 = 30$.

153. Очень легко число 24 выразить тремя восьмерками: 8 + 8 + + 8 =24. Предложите способы выражения числа 24 другими тремя одинаковыми цифрами.

Ответ: 22 + 2 = 24; $3^3 - 3 = 24$.

154. Используя знаки арифметических действий, и цифру 8, выразите число 1000 восьмью цифрами 8.

Ответ: 888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.

155. Рассмотрим такой случай умножения двух чисел: 49 · 159 = = 7632. Он замечателен тем, что в нем участвуют по одному разу все девять значащих цифр (без 0).

Подберите еще несколько таких примеров. Сколько их, если они вообще существуют?

Ответ: 12 · 483 = 5796;

$42 \cdot 138 = 5796;$

$18 \cdot 297 = 5346;$

$27 \cdot 198 = 5346;$

$39 \cdot 186 = 7254;$

$48 \cdot 159 = 7632;$

$28 \cdot 157 = 4396;$

$4 \cdot 1738 = 6952;$

$4 \cdot 1963 = 7852.$

156. Снова предлагается работа с дробями:

1) Вычислите значения выражений. Подумайте, как это можно сделать проще:

а) $\dfrac{254 \cdot 399 - 145}{254 + 399 \cdot 253}$;

б) $\dfrac{5932 \cdot 6001 - 69}{5932 + 6001 \cdot 5931}$.

2) Сравните дроби:

а) $\dfrac{47}{99}$ и $\dfrac{4747}{9999}$;

б) $\dfrac{113}{225}$ и $\dfrac{113112}{225225}$;

в) $\dfrac{368972}{764797}$ и $\dfrac{368975}{764800}$.

3) Дана дробь, числитель и знаменатель которой – двузначные числа. К числителю приписали число, равное числителю; к знаменателю также приписали число, равное ему. Сравните данную и полученную дроби.

4) Найдите дробь с однозначным знаменателем, которая была бы больше $\dfrac{7}{9}$, но меньше $\dfrac{8}{9}$.

5) Найдите несократимую дробь, которая при прибавлении знаменателя к числителю увеличивается в 4 раза.

6) Сократите дроби:

а) $\frac{2121}{2828}$; б) $\frac{639639639}{861861861}$.

157. Пусть кто-нибудь задумает несколько однозначных чисел и отметит их у себя номерами: I, II, III, IV и т.д.

Положим, что он задумал числа 8, 6, 4, 2.

Пусть он выполнит следующие действия:

1) умножит первое число на 2: $8 \cdot 2 = 16$;

2) к произведению прибавит 5: $16+ 5 = 21$;

3) сумму умножит на 5: $21 \cdot 5 = 105$;

4) к произведению прибавит 10: $105 + 10 = 115$;

5) к сумме прибавит второе задуманное число: $115 + 6 = 121$;

6) сумму умножит на 10: $121 \cdot 10 = 1210$;

7) к произведению прибавит третье задуманное число: $1210 + 4 =$ $= 1214$;

8) сумму умножит на 10: $1214 \cdot 10 = 12140$;

9) к произведению прибавит четвертое задуманное число: $12140 + 2 = 12142$;

Угадывающий отнимает от полученной суммы 3500: $12142 – 3500 = 8642$.

Цифры последнего числа дают задуманные числа.

Если было задумано три числа, то вычисления надо окончить на 7 действии и из результата вычесть 350: $1214 – 350 = 864$.

Если задумано два числа, то вычисления следует закончить на 5 действии и вычесть из результата 35: $121 – 35 = 86$.

Дадим пояснения столь интересному факту на буквенных данных.

Пусть задуманы числа a, b, c, d. Выполним указанные действия:

1) $a \cdot 2 = 2a$;

2) $2a + 5$;

3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$;

4) $10a + 25 + 10 = 10a + 35$;

5) $10a + 35 + b = 10a + b + 35$;

6) $(10a + 35 + b) \cdot 10 = 100a + 10b + 350$;

7) $100a + 10b + 350 + c = 100a + 10b + c + 350$;

8) $(100a + 10b + 350 + c) \cdot 10 = 1000a + 100b + 10c + 3500$;

9) $1000a + 100b + 10c + d + 3500$.

Вычитание 3500 дает четырехзначное число, цифры которого слева направо дают задуманные числа.

Если будут задуманы не однозначные числа, то действия усложняются о чем читатель может узнать из книги: И.Я. Депман «Рассказы о математике», в которую он включил параграф о математических забавах М.Ю. Лермонтова.

158. В русле рассматриваемых примеров интерес представляет задача («забава»), включенная Л.Ф. Магницким (автор первого в России учебника «Арифметика») в последнюю главу четвертой книги «Арифметика» под названием «О утешных некиих действиях через арифметику употребляемых».

Задача. Один из участников в игре берет кольцо и надевает его на один из пальцев на определенный сустав. Требуется угадать, у кого, на каком пальце и на каком суставе находится кольцо.

Пусть кольцо находится у четвертого человека на втором суставе пятого пальца (следует условиться, что суставы и пальцы нумеруются всеми одинаково).

Угадывающий просит кого-нибудь из компании выполнить следующие действия, не называя получающихся чисел:

1) номер лица, имеющего кольцо, умножить на 2: $4 \cdot 2 = 8$;

2) к полученному произведению прибавить 5: $8 + 5 = 13$;

3) полученную сумму умножить на 5: $13 \cdot 5 = 65$;

4) к произведению прибавить номер пальца, на котором находится кольцо: $65 + 5 = 70$;

5) сумму умножить на 10: $70 \cdot 10 = 700$;

6) к произведению прибавить номер сустава, на котором находится кольцо: $700 + 2 = 702$.

От полученного числа последний отнимает 250 и получает: $702 - 250 = 452$.

Первая цифра (слева направо) дает номер человека, вторая цифра – номер пальца, третья цифра – номер сустава.

Итак, кольцо в данном случае находится у четвертого человека на пятом пальце на втором суставе.

Поясним столь интересный факт в общем виде, допустив, что кольцо было у человека N a, на пальце N b, на суставе N c.

Выполним указанные выше действия над числами a, b, c:

1) $a \cdot 2 = 2a$;

2) $2a + 5$;

3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$;

4) $10a + 25 + b = 10a + b + 25$;

5) $(10a + 25 + b) \cdot 10 = 100a + 10b + 250$;

6) $100a + 10b + 250 + c = 100a + 10b + c + 250$;

7) $100a + 10b + c + 250 - 250 = 100a + 10b + c$.

Получили число, в котором номер числа есть цифра сотен, номер пальца – цифра десятков, номер сустава – цифра единиц.

Заметим, что правила игры применимы при любом числе участников.

159. Приведем краткий экскурс в историю рассматриваемого вопроса.

Пифагорейцы указали, что числа a, $\frac{a^2-1}{2}$ и $\frac{a^2+1}{2}$, для которых $a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$, дают пифагорейскую тройку чисел, если a

нечетное число (заметим, что при a четном, второе и третье число не будут целыми).

На принадлежность данного вывода Пифагору указывал Прокл (греческий философ V в.н.э.). Он же указывал, что Платон дал формулу $2n^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$.

В школе Платона было найдено, что если a число четное, то тройка чисел a, $\left(\frac{a}{2}\right)^2-1$ и $\left(\frac{a}{2}\right)^2+1$ дает пифагорейскую тройку, так как все три числа целые и $a^2+\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2-1\right)^2=\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right)^2$.

Таким образом вопрос о пифагорейских тройках чисел получил у греков решение:

a; $\frac{a^2-1}{2}$; $\frac{a^2+1}{2}$ при a четном,

a; $\left(\frac{a}{2}\right)^2-1$; $\left(\frac{a}{2}\right)^2+1$ при a нечетном.

Примеры:

5; $\frac{5^2-1}{2}=12$; $\frac{5^2+1}{2}=13$;

8; $\left(\frac{8}{2}\right)^2-1=15$; $\left(\frac{8}{2}\right)^2+1=17$.

Однако эти формулы не дают возможности найти все пифагорейские тройки чисел, имеющие выбранное исходное число. Формулы Пифагора и Платона и их различные модификации дают только частные решения.

Например, взяв число 65, по формулам Пифагора получим два других числа тройки: $\frac{65^2-1}{2}=2112$ и $\frac{65^2+1}{2}=2113$, и , значит, пифагорову тройку составляют числа 65, 2112, 2113. Однако существует пифагорейская тройка, начинающаяся с того же числа 65: 65, 72, 97.

Приведем еще примеры пифагорейских троек чисел, которые нельзя получить по указанным формулам: 72, 65, 97; 72, 320, 328. (Эти и другие пифагорейские тройки чисел дает вавилонская клинописная табличка, относимая к эпохе 1900-1600 гг. до н.э. Метод вавилонян дает возможность найти все пифагорейские тройки, содержащие выбранные исходные числа).

160. Приведем несколько интересных фактов из теории чисел.

а) Известна формула для определения числа всех делителей составного числа. Если составное число N разлагается на простые множители так, что $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, то число всех его делителей вычисляется по формуле $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1) \cdot \ldots \cdot (a_n+1)$.

Примеры:

$10 = 2 \cdot 5 = 2^1 \cdot 5^1$; число делителей числа 10: $(1 + 1)(1 + 1) = 4$.

Они следующие: 1, 2, 5, 10.

$12 = 2^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1$; число делителей числа 12: $(2 + 1)(1 + 1) = 6$.

Они следующие: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

б) Сумма всех делителей числа N, которое разлагается на простые множители следующим образом: $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, равна

$$\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{a_n+1}-1}{p_n-1}.$$

Формулу эту приводит Дж. Валлис (1616 г. – 1703 г.) в 1658 г.

Примеры:

$12 = 2^2 \cdot 3$; сумма делителей числа 12 равна:

$$\frac{2^{2+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{1+1}-1}{3-1} = 7 \cdot 4 = 28.$$

Действительно, делителями числа 12 являются 1, 2, 3, 4, 6, 12; их сумма равна $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$; сумма делителей этого числа равна:

$$\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\cdot\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\cdot\frac{11^{1+1}-1}{11-1}=7\cdot 6\cdot 12=504.$$

Действительно, делителями числа 220 являются: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220; их сумма равна: 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + + 22 + 44 + 55 + 110 + 220 = 504.

Для числа 496 имеем: $496 = 2^4 \cdot 31$; сумма всех его делителей равна: $\frac{2^5-1}{2-1}\cdot\frac{31^2-1}{31-1}=31\cdot 32=992$.

в) Евклид в IX книге «Начала» доказывает теорему: если сумма $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n$, равная $2^{n+1}-1$, есть число простое, то число $N=\left(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n\right)\cdot 2^n$, равное $2^n\cdot\left(2^{n+1}-1\right)$, есть число совершенное.

г) Диофант (III век), а затем Л. Пизанский (1170 г. – 1228 г.) доказали, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представляется двумя способами суммой двух квадратов.

Пример: $53\cdot 25=\left(7^2+2^2\right)\left(3^2+4^2\right)=13^2+34^2=29^2+22^2$.

В общем виде имеем:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(m^2+p^2\right)=(am+bp)^2+(bm-ap)^2=(am-bp)^2+(bm+ap)^2.$$

Если $a = b$ или $m = p$, то полученные сумму будут равными:

$$53\cdot 32=\left(7^2+2^2\right)\left(4^2+4^2\right)=36^2+20^2.$$

Л. Пизанский получил это правило следующим образом:

$$\begin{aligned}\left(a^2+b^2\right)\left(m^2+p^2\right)&=a^2m^2+a^2p^2+b^2m^2+b^2p^2=\\&=a^2m^2+a^2p^2+b^2m^2+b^2p^2+2abmp-2abmp=\\&=\left(a^2m^2+2abmp+b^2p^2\right)+\left(b^2m^2-2abmp+a^2p^2\right)=\\&=(am+bp)^2+(bm-ap)^2.\end{aligned}$$

Предлагаем читателю сгруппировать по-другому слагаемые, для того, чтобы получить другое равенство: $\left(a^2+b^2\right)\left(m^2+p^2\right)=(am-bp)^2+(bm+ap)^2$.

д) Л. Эйлер доказал, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма четырех квадратов, также является суммой четырех квадратов:

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(m^2+n^2+p^2+q^2\right)=$$
$$(an+bm+cq+dp)^2+(am-bn+cp-dq)^2+$$
$$+(-ap-bq+cm+dn)^2+(aq-bp-cn+dm)^2 \quad (*)$$

Примеры:

$10\cdot 7=\left(1^2+1^2+2^2+2^2\right)\left(1^2+1^2+1^2+2^2\right)=70=8^2+2^2+1^2+1^2$;

$110\cdot 94=\left(1^2+3^2+8^2+6^2\right)\left(2^2+4^2+5^2+7^2\right)=10340=96^2+24^2+8^2+22^2$.

Читателю предлагается вывести формулу (*).

е) Важнейшая теорема теории чисел «Простое число вида $4k+1$ может быть представлено в виде суммы двух квадратов единственным образом» (П. Ферма, 1651 г.).

Примеры:

$13 = 4\cdot 3 + 1 = 3^2 + 2^2$;

$17 = 4\cdot 4 + 1 = 4^2 + 1^2$.

ж) Л. Эйлер (1742 г.) доказал, что если число может быть представлено двумя способами в виде суммы двух квадратов, то оно не может быть простым.

Эти семь фактов мы привели для тех, кто интересуется и занимается проблемами теории чисел и мог бы воспользоваться ими. Эти факты приведены еще и потому, что читателю предложены некоторые задания исследовательского характера, связанные с этими фактами.

161. Известны свойства некоторых групп натуральных чисел, объединенных в таблицы, которые носят название «Треугольники Тартальи».

а)

1 + 2 = 3

4 + 5 + 6 = 7 + 8

9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15

16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24

……………………………………………

б)

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$

$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$

Каждое равенство единственно в своем роде, то есть ни одно их этих равенств нельзя начинать ни с какого другого натурального числа, отличного от первого числа соответственного табличного равенства.

Дадим доказательство для равенства сумм квадратов, ограничиваясь тремя слагаемыми в левой части равенства.

1) Пусть тройка чисел начинается с n. Тогда

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2;$$

$$n^2 - 8n - 20 = 0;$$

$$n^2 - 8n - 20 = n^2 - 10n + 2n - 20 = n(n-10) + 2(n-10) = (n-10)(n+2).$$

Трехчлен $n^2 - 8n - 20$ равный $(n-10)(n+2)$, обращается в 0 только при одном натуральном значении n, а именно: $n = 10$.

Значит, существует только одна тройка натуральных чисел, удовлетворяющая требованию.

Читателю предлагается доказать равенство сумм квадратов, в случае четырех слагаемых в левой части равенства.

Более подробные разъяснения можно найти в книге: И.Я. Депман «Рассказы о решении задач». – Л., 1957.

162. Существует еще такой «Числовой треугольник»:

$1^3 = 1$

$2^3 = 3 + 5$

$3^3 = 7 + 9 + 11$

$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$

$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$

……………………………….

Докажите, что для всякого натурального n имеет место указанное в таблице свойство, то есть, что

$$n^3 = \left(n^2 - n + 1\right) + \left(\left(n^2 - n + 1\right) + 2\right) + \left(\left(n^2 - n + 1\right) + 4\right) + \ldots + \left(\left(n^2 - n + 1\right) + 2(n-1)\right).$$

163. Очевидно существование таких равенств:

$1^2 = 1$

$3^2 = (2 \cdot 2 - 1)^2 = 2 + 3 + 4$

$5^2 = (2 \cdot 3 - 1)^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$7^2 = (2 \cdot 4 - 1)^2 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$9^2 = (2 \cdot 5 - 1)^2 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$

…………………………………………………………….

Докажем, что указанное свойство имеет место для всех нечетных натуральных чисел, то есть, что для всех натуральных значений n имеет место равенство $(2n-1)^2 = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (3n-2)$.

Равенство докажем преобразованием выражения, стоящего в правой части равенства:

$$n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (3n-2) = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n + (2n-2)) =$$
$$= n((2n-2)+1) + 1 + 2 + 3 + \ldots + (2n-2) = n(2n-1) + \frac{(2n-2)(2n-2+1)}{2} =$$
$$= n(2n-1) + \frac{2(n-1)(2n-1)}{2} = n(2n-1) + (n-1)(2n-1) = (2n-1)(n+n-1) =$$
$$= (2n-1)(2n-1) = (2n-1)^2.$$

164. Докажем, что всякий куб натурального числа (n^3) равен разности квадратов двух других целых чисел.

Воспользуемся известным равенством: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

$$n^3=\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3\right)-\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\right)=$$
$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2.$$

Числа $n(n+1)$ и $(n-1)n$ четные, так как они представляют произведение двух последовательных натуральных чисел, поэтому числа $\frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{(n-1)n}{2}$ оба целые.

Примеры:

$1=1^3=1^2-0^2$,

$8=2^3=\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2=3^2-1^2$,

$27=3^3=\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2=6^2-3^2$,

$64=4^3=\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2=10^2-6^2$.

Утверждение о том, что куб всякого натурального числа есть разность квадратов целых чисел, можно доказать способом, примененным П. Ферма.

Предположим, что $n^3=x^2-y^2$. Это равенство можно переписать в виде $n\cdot n^2=(x+y)(x-y)$. Последнему равенству удовлетворяют числа, которые дают верные равенства: $x+y=n^2$, $x-y=n$. Откуда $x=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$, $y=\frac{n^2-n}{2}=\frac{(n-1)n}{2}$.

165. П. Ферма (1601 г. – 1665 г.) юрист по образованию, в свободное от занятий время, занимался математикой. Особый интерес он проявлял к теории чисел.

а) Докажем следующую теорему, сформулированную П. Ферма: «Простое число n, большее 2, может всегда быть представлено в виде разности квадратов двух целых чисел и притом единственным образом».

Доказательство

Положим, что $n = x^2 - y^2$, то есть $n = (x+y)(x-y)$. Так как n простое число, то его можно представить в виде произведения только как $n \cdot 1$. Итак, $n \cdot 1 = (x+y)(x-y)$.

Этому равенству в целых числах можно удовлетворить только при условии, что $x + y = n$, $x - y = 1$.

Складывая и вычитая эти равенства почленно, получим: $x = \frac{n+1}{2}$, $y = \frac{n-1}{2}$.

Так как n, как простое число, большее 2, есть число нечетное, то x и y числа целые.

Пример: $n = 19$, $x = \frac{19+1}{2} = 10$, $y = \frac{19-1}{2} = 9$; $n = 10^2 - 9^2 = 100 - 81 = 19$.

б) П. Ферма сформулировал такую теорему: «Если n нечетное составное число, то оно может быть представлено в виде разности квадратов целых чисел более чем одним способом».

Рассмотрим пример: $n = 15 = 15 \cdot 1$. Принимая $x + y = 15$, $x - y = 1$, получим: $x = 8$, $y = 7$, $x^2 - y^2 = 8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$.

Читателю предлагается найти еще один способ представления числа 15 в виде разности квадратов целых чисел.

в) Покажите, что если число n четное, то представление его в виде разности квадратов чисел невозможно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущими формулами: $x = \frac{n+1}{2}$, $y = \frac{n-1}{2}$.

166. Средством активизации поисково-исследовательской деятельности учащихся является работа по отысканию различных методов и способов решения задач. Приведем примеры.

1) Пусть $a \in N$ и $b \in N$. Доказать, что если $a - b$ делится на три, то $a^3 - b^3$ делится на 9.

Рассмотрим различные способы доказательства сформулированного утверждения.

Первый способ

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)((a-b)^2 + 3ab).$$

Так как $a - b$ делится на 3, то на 3 делится также $(a - b)^2$ и, очевидно,
$(a - b)^2 + 3ab$, а поэтому $a^3 - b^3$ делится на 9.

Второй способ

Пусть $a - b = 3k$, причем $k \in N$. Тогда, $a = 3k + b$ и поэтому

$$a^3 - b^3 = (3k+b)^3 - b^3 = (3k+b-b)((3k+b)^2 + (3k+b)b + b^2) =$$
$$= 3k(9k^2 + 6kb + b^2 + 3kb + b^2 + b^2) = 3k(9k^2 + 9kb + 3b^2) = 9k(3k^2 + 3kb + b^2).$$

Следовательно, заданная разность кубов делится на 9.

Третий способ

Так как $a^3 - b^3 = (a-b)^3 - 3ab(a-b)$, причем, очевидно, $(a - b)^3$ делится на 9, $3ab(a - b)$ тоже делится на 9, то и заданное число делится на 9.

Четвертый способ

Так как $a - b$ кратно 3, то каждое из чисел a и b при делении на 3 дает один и тот же остаток r. Пусть $a = 3c + r$, $b = 3d + r$. Выполнив соответствующую подстановку, нетрудно показать, что $a^3 - b^3$ делится на 9.

Пятый способ

Пусть $a - b = 3k$, причем $k \in N$. Тогда $(a - b)^3 = 27k^3$, $a^3 - b^3 = 27k^3 - 3ab(a-b)$, $a^3 - b^3 = 27k^3 - 9abk$, следовательно, $a^3 - b^3$ делится на 9.

2) Обычно много способов решения допускают задачи, в которых требуется разложить многочлен на множители. Рассмотрим один из таких примеров.

А) Разложить на множители многочлен $x^5 + x^4 + 1$.

Первый способ

$$x^5 + x^4 + 1 = \left(x^5 - x^2\right) + \left(x^4 - x\right) + \left(x^2 + x + 1\right) =$$
$$= x^2(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) + x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right) =$$
$$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x + 1\right).$$

Применение указанного ниже приема несколько упрощает преобразования:

$$x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 -$$
$$- x^3 - x^2 - x +$$
$$+ x^2 + x + 1 =$$
$$= x^3\left(x^2 + x + 1\right) - x\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x + 1\right)$$

Второй способ

$$x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 -$$
$$- x^3 + 1 =$$
$$= x^3\left(x^2 + x + 1\right) - (x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x + 1\right)$$

Третий способ

$$x^5 + x^4 + 1 = \left(x^5 - x^2\right) + \left(x^4 + x^2 + 1\right) =$$
$$= \left(x^3 - x^2\right)\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x + 1\right).$$

Четвертый способ

$$x^5+x^4+1=\left(x^5-x^3+x^2\right)+\left(x^4-x^2+x\right)+\left(x^3-x+1\right)=$$
$$=x^2\left(x^3-x+1\right)+x\left(x^3-x+1\right)+\left(x^3-x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right).$$

Все эти способы трудны тем, что ученик должен догадаться, что за скобки надо вынести либо многочлен x^2+x+1, либо x^3-x+1. Но как догадаться? Приведенный ниже пятый способ, прольет свет на пути поиска ответа на этот вопрос.

Пятый способ

Если многочлен пятой степени нужно разложить на множители, то этими двумя множителями могут быть либо многочлены первой и четвертой степени, либо многочлены второй и третьей степени. При этом старший член произведения должен быть равен произведению старших членов сомножителей, а свободный член произведения – произведению свободных членов сомножителей. Значит, в первом случае возможны, видимо, двучлены x +1 или x – 1. Во втором случае возможны четыре варианта трехчленов для проб: x^2+x+1, x^2+x-1, x^2-x+1, x^2-x-1. Теперь остается выполнить не более шести испытаний, применив, например, указанный во втором способе прием или, если учащимся известно, правило деления многочлена на многочлен.

Видим, что из всех описанных способов, пятый богаче остальных содержанием.

Б) Разложить несколькими способами многочлены на множители:

	Ответы:
а) a^4+2a^3+1;	$(a+1)\left(a^3+a^2-a+1\right)$;
б) m^3+2m-3;	$(m-1)\left(m^2+m+3\right)$;
в) $2a^4-a^2-1$;	$(a+1)(a-1)\left(2a^2-1\right)$;
г) a^7+a^5+1;	$\left(a^2+a+1\right)\left(a^5-a^4+a^3-a+1\right)$;
д) $a^5+ab^4+b^5$;	$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^3-a^2b+b^3\right)$;

е) a^7-1; $(a-1)(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)$;

ж) $2a^3-ab^2-b^3$; $(a-b)(2a^2+2ab+b^2)$;

з) $a^2-2b^2-2c^2+3ab+ac$; $(a+b-c)(a+2b+2c)$;

и) $a^2-2b^2-2c^2-ab+5bc-ac$; $(a-2b+c)(a+b-2c)$.

В случаях з) и и) каждое выражение можно рассматривать как квадратный трехчлен, например, относительно a и найти его корни.

3) Решить в целых числах уравнение $x + y = xy$.

Первый способ

Заметив, что $y \neq 1$, получим: $x=\frac{y}{y-1}=\frac{(y-1)+1}{y-1}=1+\frac{1}{y-1}$. Но дробь $\frac{1}{y-1}$ может принимать целые значения только тогда, когда $y - 1 = 1$ или $y - 1 = -1$. В первом случае $y = 2$, $x = 2$. Во втором случае $x = 0$, $y = 0$.

Второй способ

Из заданного уравнения следует, что $xy - x - y + 1 = 1$ или после группировки в левой части уравнения $(x - 1)(y - 1) = 1$.

Произведение целых чисел $x - 1$ и $y - 1$ может быть равным 1, если каждое из этих чисел равно 1 или –1. Этот вывод позволяет найти значения неизвестных.

4) Доказать неравенство $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$, где $a > 0$, $b > 0$.

Первый способ

Составим разность между левой частью неравенства и правой его частью: $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Преобразовав эту разность, будем иметь:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-b\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}}=\frac{(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}}.\ (*)$$

Узнать знак полученной дроби можно различными способами:

а) Рассмотрим три возможных случая:

- $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow (a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) > 0$, откуда следует, что дробь (*) положительна;
- $a = b = 0$, откуда следует, что дробь (*) равна нулю;
- $0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} < 0 \Rightarrow (a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) > 0$, откуда следует, что дробь (*) положительна.

Три рассмотренных случая доказывают, что дробь неотрицательна, а значит левая часть исходного неравенства больше либо равна его правой части.

б) Преобразуем полученную дробь (*):

$$\frac{(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}}=\frac{\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}$$

Учитывая, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$, $\sqrt{ab}>0$, делаем вывод о том, что дробь неотрицательна.

Второй способ

Так как $\sqrt{a}>0$, $\sqrt{b}>0$ (по свойству арифметического квадратного корня и по условию задачи), то умножим обе части неравенства на $\sqrt{ab}$, оставив без изменения прежний знак. Будем иметь

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b} \ge \sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Учитывая, что $a\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^3$, а $b\sqrt{b}=\left(\sqrt{b}\right)^3$, мы можем записать последнее неравенство в таком виде:

$$\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3 \ge \sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right);$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)\geq\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Так как $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, то, разделив обе части неравенства на выражение $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, будем иметь:

$$a-\sqrt{ab}+b\geq\sqrt{ab};$$
$$a-\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+b\geq 0;$$
$$a-2\sqrt{ab}+b\geq 0;$$
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0.$$

Истинность последнего неравенства доказывает истинность и исходного неравенства.

Третий способ

Введем подстановки: $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$. Тогда исходное неравенство примет вид $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y$.

Доказать последнее неравенство предлагаем читателю.

167. Существуют ли такие целые числа x и y, для которых одновременно имеют место равенства: $xy = 4747$ и $x - y = -54$?

Решение

Произведение xy целых чисел x и y может быть равным 4747 только в четырех случаях: $1 \cdot 4747$, $47 \cdot 101$; $(-1) \cdot (-4747)$, $(-47) \cdot (-101)$. Из второго условия следует, что x меньше, чем y. Проверкой убеждаемся, что оба условия выполняются только в тех случаях, когда $x = 47$ и $y = 101$ или $x = -101$, $y = -47$.

168. Найдется ли такое натуральное число n, что число 2^n+15 будет составным?

Ответ: При $n = 7$ получаем $2^7 + 15 = 143 = 11 \cdot 13$.

169. На какую наибольшую степень числа 7 делится произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000?$$

Решение

Чисел, делящихся на 7, в первой тысяче натуральных чисел будет 142, делящихся на $49 = 7^2$ будет 20, а делящихся на $343 = 7^3$ будет 2. Если показатель степени семерки будет больше трех, то соответствующая степень больше 1000. Поэтому ни один из сомножителей произведения не может делиться на семь в степени, большей трех. Нетрудно показать, что заданное произведение содержит семерку в степени $142 + 20 + 2 = 164$.

170. Пятизначное число, являющееся точным квадратом, записывается при помощи цифр 0, 1, 2, 2, 2. найти это число.

Решение

Квадрат натурального числа не может оканчиваться цифрой 2 или одним нулем. Следовательно, пятизначное число может оканчиваться только цифрой 1. Испытанию подлежат числа: 22201, 22021, 20221. Из них только одно удовлетворяет условиям задачи – $22201 = 149^2$.

171. Число 29 можно записать в виде суммы различных степеней числа два: $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$. Запишите в виде суммы различных степеней числа два число 507. (Напомним, что $2^0 = 1$).

172. Найти все четырехзначные числа, которые, будучи приписаны к числу 400 справа, дадут семизначное число, являющееся квадратом натурального числа.

Ответ: 4001 и 8004.

173. Дано пятизначное число. Если приписать семерку впереди числа, то полученное шестизначное число будет в 5 раз больше шестизначного числа, у которого семерка приписана в конце. Найти это пятизначное число.

Решение

Пусть x – пятизначное число. Если приписать семерку впереди него, то получим число $7 \cdot 10^5 + x$. Усли приписать семерку в конце его, то получим число $10x + 7$. По условию $7 \cdot 10^5 + x = 5(10x + 7)$. Решив это уравнение, получим $x = 14285$.

174. Доказать, что разность между трехзначным числом и суммой его цифр всегда делится на 9.

Доказательство.

Рассмотрим трехзначное число $\overline{abc}$. Его можно записать следующим образом: $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.

Запишем разность этого числа и суммой его цифр

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b).$$

Раз один из сомножителей (9) делится на 9, то и все произведение делится на 9.

175. Докажите следующие утверждения:

а) $\overline{abba}$ делится на 11;

б) $\overline{ababab}$ делится на 7;

в) $\overline{aaabbb}$ делится на 37;

г) $\overline{abab} - \overline{baba}$ делится на 9 и на 101;

Докажем последнее утверждение.

$$\overline{abab} - \overline{baba} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + a \cdot 10 + b - b \cdot 1000 - a \cdot 100 - b \cdot 10 - a =$$
$$= (1000a + 10a - 100a - a) + (100b + b - 1000b - 10b) = 909a - 909b =$$
$$= 909(a - b) = 9 \cdot 101(a - b).$$

Очевидно, что последнее число в цепочке равенств делится на 9 и 101.

176. Вычислить:

а) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ при $x^2 - x = 3$;

б) $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$;

в) $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$ при $x^2 + y^2 = 1$.

Решение

а)

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+2=x^2\left(x^2-x\right)-x\left(x^2-x\right)+2\left(x^2-x\right)+2=$$
$$=3x^2-3x+2\cdot 3+2=3\left(x^2-x\right)+8=3\cdot 3+8=17.$$

б)

$$2x^4+3x^2y^2+y^4+y^2=2x^4+2x^2y^2+x^2y^2+y^4+y^2=$$
$$=2x^2\left(x^2+y^2\right)+y^2\left(x^2+y^2\right)+y^2=2x^2\cdot 1+y^2\cdot 1+y^2=2\left(x^2+y^2\right)=2\cdot 1=2.$$

в) Вычислим значение выражения двумя способами.

Первый способ

$$x^6+3x^2y^2+y^6=\left(x^2+y^2\right)\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)+3x^2y^2=$$
$$=1\cdot\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)+3x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2=1.$$

Второй способ

Так как $y^2 = 1 - x^2$, то, выполнив подстановку, получим

$$x^6+3x^2y^2+y^6=x^6+3x^2\left(1-x^2\right)+\left(1-x^2\right)^3=$$
$$=x^6+3x^2-3x^4+1-3x^2+3x^4-x^6=1.$$

177. Доказать, что не существует целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству: $x^2 + 2006 = y^2$.

Доказательство

Очевидно, что числа x и y или оба четные, или оба нечетные. Так как $2006 = (x + y)(x - y)$, то левая часть этого равенства не делится на 4, а правая часть делится на 4 в том и другом случаях. Мы получили противоречие, что и доказывает сформулированное утверждение.

178. Является ли простым число $1+2^{3^{2005}}$?

Решение

Число 3^{2005} кратно трем, поэтому можно воспользоваться подстановкой $3^{2005}=3m$ $(m\in N)$. Тогда данное число можно записать в виде:

$$2^{3m}+1=\left(2^m\right)^3+1=\left(2^m+1\right)\left(2^{2m}-2^m+1\right).$$

Следовательно, данное число является составным.

179. Показать, что если $x^3+x-1=0$, то имеет место равенство:

$$\frac{x^4-2x^3+x^2-3x+5}{x^5-x^2-x+2}=3.$$

Указание. Числитель дроби равен: $\left(x^4+x^2-x\right)-\left(2x^3+2x-2\right)+3=3$. Знаменатель дроби равен $\left(x^5+x^3-x^2\right)-\left(x^3+x-1\right)+1=1$.

180. Ученик «незаконно» сократил показатели степеней, но получил правильный ответ: $\frac{43^3+17^3}{43^3+26^3}=\frac{43+17}{43+26}=\frac{20}{23}$.

Объясните причину этой «случайности».

Указание. Если $b = c$ и $a + c \neq 0$, то равенство $\frac{a^3+b^3}{a^3+c^3}=\frac{a+b}{a+c}$ имеет место; если $b \neq c$ и $a + c \neq 0$, то из казанного выше равенства следует, что $a = b + c$.

Чтобы доказать, что подобное действие приводит к неверным результатам, достаточно привести хотя бы один пример (контрпример), подтверждающий ошибочность такой операции. Например, дробь $\frac{2^3+3^3}{2^3+4^3}$, которая равна $\frac{35}{72}$, после «сокращения» показателя 3, дает дробь $\frac{5}{6}$, неравную исходной.

Вообще заметим следующее. Чтобы доказать, что весь список объектов обладает некоторым свойством A, нужно показать, что каждый объект обладает этим свойством. Чтобы опровергнуть это утверждение, достаточно указать один из рассматриваемых объектов, не обладающий этим свойством.

Поиск контрпримера (опровергающего) ценен часто не только тем, что он требует от учащихся не формального, а вдумчивого подхода к делу, но и тем, что заставляет учащихся проводить своеобразный эксперимент, стимулирует накопление поисково-исследовательского опыта школьников.

181. Найти все целые a, при которых дробь $\frac{a^3+1}{a-1}$ принимала бы целые значения.

Указание. Выделите целую часть из дроби.

182. Доказать, что точки числовой оси, соответствующие числам вида $\frac{n^4+n^2+2}{n^4+n^2+1}$ $(n \in N)$ расположены на отрезке, длина которого не превышает $\frac{1}{3}$.

Указание. Выделите целую часть из дроби и покажите, что числа заданного вида больше 1 и меньше $1\frac{1}{3}$.

183. Известно, что $2b = 1 + ab$ и $a \neq 1$, $b \neq 1$. Докажите, что при этих условиях имеет место следующее равенство: $\frac{a+1}{a-1} - \frac{b+1}{b-1} = 2$.

Решение

Из исходного равенства имеем:

$$(a+1)(b-1)-(b+1)(a-1)=2(a-1)(b-1),$$
$$ab+b-a-1-ab-a+b+1=2ab-2a-2b+2,$$
$$2b=2+ab.$$

Так как из последнего равенства следует справедливость всех предшествующих, то верно и данное равенство при заданных условиях.

184. Известно, что в прямоугольном треугольнике $c^2 = a^2 + b^2$, где a и b – длины катетов; c – длина гипотенузы. Найти острые углы треугольника, если $\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 = 0{,}5$.

Решение

Из заданного равенства следует, что $2c^2 = (a + b)^2$, следовательно,

$$2\left(a^2+b^2\right)=a^2+2ab+b^2;$$

$$(a-b)^2=0,$$

$$a=b,$$

а поэтому заданный прямоугольный треугольник является равнобедренным, каждый его острый угол равен 45°.

185. Сократите дроби:

а) $\dfrac{\left(x^2-x-5\right)\left(x^2-x-2\right)+2}{\left(x^2-x-5\right)\left(x^2-x-1\right)+4}$

Решение

Воспользуемся подстановкой $y=x^2-x-5$, тогда $x^2-x-2=y+3$, $x^2-x-1=y+4$.

Заданная дробь примет вид $\dfrac{y(y+3)+2}{y(y+4)+4}=\dfrac{y^2+3y+2}{y^2+4y+4}=\dfrac{(y+1)(y+2)}{(y+2)^2}$. После сокращения последней дроби на $y + 2$, будем иметь

$$\frac{y+1}{y+2}=\frac{x^2-x-5+1}{x^2-x-5+2}=\frac{x^2-x-4}{x^2-x-3}.$$

б) $\dfrac{x+5-5\sqrt{x-1}}{x-1-3\sqrt{x-1}}$

Указание. Воспользуйтесь подстановкой $\sqrt{x-1}=y$.

187. Интересны примеры выражения чисел через цифры, входящие в выражения каким-либо примечательным образом:

$100=99\frac{9}{9}$;

$100=99+\frac{99}{99}$;

$100 = 111 - 11$;

$100 = 3 \cdot 33 + \frac{3}{3}$;

100 = 5 · 5 · 5 – 5 · 5;

100 = (5 + 5 + 5 + 5)· 5.

Приведите свои аналогичные примеры.

188. Найти наименьшее и наибольшее отрицательные числа из тех, которые можно было бы записать при помощи трех единиц.

Ответ: $-\frac{1}{11}$; –111.

189. Приведем одно интересное числовое равенство:

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555.$$

Поищите среди чисел такие, которые дадут интересные числовые равенства.

190. Интерес представляют собой игры по отгадыванию результата действий над неизвестными числами. Поисково-исследовательская деятельность учащихся может состоять в том, чтобы раскрыть алгоритм производимых действий в общем виде. Приведем примеры.

1) Возьмите любое простое число, большее трех. Возведите его в квадрат, добавьте 17, разделите сумму на 12, в остатке получите 6.

Приведем пример:

а) 7,

б) $7^2 = 49$,

в) 49 + 17 = 66,

г) 66 : 12 = 5 (в остатке 6).

Поясним эту закономерность в общем виде.

Простое число, большее трех, представим в виде $6n \pm 1$, значит, его квадрат будет всегда $36n^2 \pm 12n + 1$. Это число при делении на 12 дает остаток 1. Так как предварительно к нему добавили 17 = 12 + 5, то остатком будет 6. Если прибавлено произвольное число, например, 87 или вообще $12p + q$, то остатком будет 4, или соответственно $q + 1$.

2) Задумайте число, умножьте его на 15 (вообще на a), добавьте к результату 63 (вообще b) и разделите сумму на 3 (вообще на $\frac{a}{c}$) и вычтите это произведение из ранее полученного числа. В итоге будете имеет 21 (вообще $\frac{b}{c}$).

Действительно, $\frac{na+b}{c} - \frac{na}{c} = \frac{b}{c}$.

Чтобы избежать действий с дробями, выбирать a, b и c надо так, чтобы a и b делились бы на c.

3) Задумайте число, умножьте его на два, добавьте к этому числу 4 и разделите то, что получилось, на 2; теперь прибавьте 7, помножьте результат на 8 и вычтите из произведения 12; затем разделите на 4 и вычтите потом 11. Получаете исходное число.

Доказательство

Было образовано число

$$\left(\left(\frac{2n+4}{2}+7\right)\cdot 8-12\right):4-11=\left((n+9)\cdot 8-12\right):4-11=(n+9)\cdot 2-3-11,$$

что равно $2n + 4$.

Предлагаем читателю раскрыть секреты следующих игр.

4) Задумайте трехзначное число, в котором первая и последняя цифры не одинаковы и отличаются больше чем на 1. Возьмите число с теми же цифрами, но в обратном порядке, и найдите разность этих двух чисел. К этой разности добавьте то число, которое получается из нее при обратном порядке цифр. Тогда получите 1089.

5) Задумайте число: умножьте его на 37; добавьте к произведению 17 (вообще a); умножьте сумму на 27; теперь прибавьте 7 (вообще b); разделите получившееся число на 999. Тогда в остатке получи-

те при делении на 466 (вообще $27a + b$, причем a и b надо выбрать так, чтобы $27a + b$ оказалось меньше, чем 999).

6) Задумайте число, затем добавьте к нему 2 и перемножьте эти два числа, к произведению прибавьте 5. Из полученного числа вычтите 4, затем из полученного числа извлеките квадратный корень, вычтите 1, получите задуманное число.

Предлагаем читателю самостоятельно разработать аналогичные игры.

191. Приведем интересные примеры, связанные с извлечением корней:

а) $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$; $\sqrt{12\frac{12}{143}} = 12\sqrt{\frac{12}{143}}$; $\sqrt{20\frac{20}{399}} = 20\sqrt{\frac{20}{399}}$;

б) $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$; $\sqrt[3]{3\frac{3}{26}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$;

в) $\sqrt[4]{4\frac{4}{255}} = 4\sqrt[4]{\frac{4}{255}}$;

г) $\sqrt[5]{2\frac{2}{31}} = 2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$.

Настойчивая, целенаправленная работа читателя должна привести его к нужному равенству: $\sqrt[n]{a + \frac{a}{a^n - 1}} = \sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n - 1}} = a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n - 1}}$.

Читатель, исходя из этого равенства, легко добавит, к уже приведенным примерам, свои.

192. Верно ли равенство $3^{100} + 7^{100} = 8^{100}$?

Решение

Заметим, что $3^{100} = \left(3^4\right)^{25} = (81)^{25}$ и $7^{100} = \left(7^4\right)^{25} = (2401)^{25}$. Значит каждое слагаемое в левой части равенства оканчивается единицей, а сама сумма двойкой. $8^{100} = \left(8^4\right)^{25} = (4096)^{25}$: эта степень оканчивается шестеркой. Отсюда следует, что равенство не верно.

Заметим, что в основе решения подобных задач лежит следующее свойство чисел: лишь числа, оканчивающиеся цифрами 0, 1, 5, 6, при умножении на самое себя сколько угодно раз, дают число, оканчивающееся той же цифрой (в случае 0 – нулем, в случае 1 – единицей, в случае 5 – пятеркой, в случае 6 – шестеркой).

193. Докажите, что сумма 1 + 2 +3 + … + 1993 делится на 1993.

Решение

Заданную сумма преобразуем:

$$S = 1 + 2 + \ldots + 1993 = (1 + 2 + \ldots + 1992) + 1993 =$$
$$= (1 + 1992) + (2 + 1991) + \ldots + (886 + 887) + 1993 = 1993 + 1993 + \ldots + 1993.$$

Отсюда следует, что S кратно 1993.

194. Докажите, что если выражение $3a + 4b + 5c$ при некоторых целых значениях a, b и c делится на 11, то и выражение $9a + b + 4c$ при этих значениях a, b и c делится на 11.

Доказательство

Преобразуем выражение $9a + b + 4c$:

$$9a + b + 4c = 3(3a + 4b + 5c) - 11(b + c).$$

По условию задачи выражение $3a + 4b + 5c$ делится на 11. Итак, имеем: каждое из выражений $3(3a + 4b + 5c)$ и $11(b + c)$ делится на 11, а значит выражение $9a + b + 4c$ делится на 11.

195. Вера и Нина посещают математический кружок, в котором больше 91% мальчиков. Найдите наименьшее возможное количество участников кружка.

Решение

По условию две девочки составляют не более 9% от числа участников кружка, так что 1% составляет не менее $\frac{2}{9}$ человек, а 100% – $\frac{200}{9}$, то есть не менее 23 человек.

196. Большую помощь при решении уравнений может оказать теорема: Если x = 1 является корнем уравнения *f(x)* = 0, то сумма коэффициентов многочлена *f(x)* равна нулю.

Доказательство

Действительно, при x = 1 уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

обращается в верное равенство $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$, которое означает, что сумма коэффициентов многочлена равна нулю.

Справедлива и обратная теорема: Если сумма коэффициентов многочлена *f(x)* равна нулю, то x = 1 является корнем уравнения *f(x)* = 0.

Приведем пример. Решим уравнение $x^3 + 79x - 80 = 0$. Сумма коэффициентов многочлена $x^3 + 79x - 80$ равна нулю, поэтому корнем этого уравнения является число 1. Других действительных корней нет. Действительно, перепишем уравнение в виде $x^3 = -79x + 80$; в левой его части – возрастающая функция $y = x^3$, а в правой – убывающая функция $y = -79x + 80$, а поэтому их графики пересекаются только в одной точке, абсциссу которой мы уже нашли x = 1.

197. Докажите следующее утверждение: Если ненулевые числа x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то им обратные числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ являются корнями уравнения $cx^2 + bx + a = 0$.

198. В работе над многочленами и при решении уравнений окажут существенную помощь следствия из теоремы Безу. Приведем их:

1) Разность одинаковых степеней двух чисел делится без остатка на разность этих же чисел, то есть $x^m - a^m$ делится на $x - a$.

2) Разность одинаковых четных степеней двух чисел делится без остатка как на разность этих чисел, так и на их сумму, то есть если m – четное число, то двучлен $x^m - a^m$ делится как на $x - a$, так и на $x + a$.

3) Разность одинаковых нечетных степеней двух чисел не делится на сумму этих чисел.

4) Сумма одинаковых степеней двух чисел не делится на разность этих чисел.

5) Сумма одинаковых нечетных степеней двух чисел делится без остатка на сумму этих чисел.

6) Сумма одинаковых четных степеней двух чисел не делится как на разность этих чисел, так и на их сумму.

Читателю предлагается доказать эти утверждения.

199. Вообразим себе плоскость, разграфленную на клетки так, как бывает разграфленной бумага в ученической тетради, Следовательно, плоскость разбивается на равные квадраты. За единицу длины возьмем длину стороны наименьшего квадрата. Вершины всех наименьших квадратов мы назовем точками решетки.

Уже в течение двух веков точки решетки являются предметом исследований различных знаменитых математиков с К. Гауссом во главе. Об этих точках решетки поставлены многочисленные и интересные, а парой, даже очень сложные вопросы. Приведем вопросы, на которые предлагаем читателю дать ответы:

1) Покажите, что не для каждого натурального числа n существует круг с центром в точке решетки, заключающий внутри себя точно n точек решетки.

2) Покажите, что если за центр круга взять точки P плоскости с координатами $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{3}\right)$, то для каждого натурального числа n будет существовать такой радиус r_n, что внутри круга с центром в P и радиусом r_n будет лежать точно n точек решетки.

3) Установите, имеется ли такая точка P плоскости с двумя рациональными координатами, что для каждого натурального числа n существует круг с центром P, внутри которого лежит ровно n точек решетки.

4) Для каждого ли натурального числа n существует на плоскости квадрат, заключающий внутри n точек решетки?

5) Докажите, что квадрат является единственным правильным многогранником, который можно так расположить на плоскости, что всеми его вершинами будут точки решетки.

6) Докажите что каждый параллелограмм, вершинами которого являются точки решетки и который, кроме них не содержит ни внутри, ни на периметре ни одной точки решетки, имеет площадь равную 1.

7) Докажите, что каждый параллелограмм с площадь большей 4, центром симметрии, которого является точка решетки, заключается внутри по меньшей мере еще одну точку решетки.

8) Докажите, что если на прямой лежит более одной точки решетки, то на ней лежит бесконечное число точек решетки, при этом они расположены на равных расстояниях друг от друга.

9) Существуют ли на плоскости круги с центром в точке решетки, на окружности которого нет ни одной рациональной точки (это точка, координаты которой есть рациональные числа)?

10) Существуют ли на плоскости круги, на окружности которых лежит только одна рациональная точка? Покажите, что таким будет круг, заданный неравенством $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2 \le 4$.

11) Существуют ли на плоскости круги, на которых лежат две и только две рациональные точки? Покажите, что таким кругом является круг, заданный неравенством $x^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 3$.

Заметим, что на окружности круга может лежать только одна или две рациональные точки или лежит бесконечное число таких точек.

12) Из точки с координатами (0; 0) проведем последовательно n прямых через точки с абсциссой 1 и с натуральными ординатами меньшими или равными n, то есть через точки (1; 1), (1; 2), (1; 3), …, (1; n),

Пусть $\{S\}$ означает множество этих прямых и пусть $\{Z\}$ будет множеством всех точек решетки, лежащих на прямых множества $\{S\}$. Докажите, что каждого натурального числа k ($k \le n$) абсциссы всех точек множества $\{Z\}$ с ординатою k дают все натуральные делители числа k.

13) На оси ординат поместим множество $\{A\}$ для всех точек с ординатами $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …, а на оси абсцисс множество $\{B\}$ всех точек с абсциссами 2, 3, 4, … (являющимися натуральными числами большими 1). Если теперь каждую из точек множества $\{A\}$ соединить прямой с каждой из точек множества $\{B\}$, то абсциссы всех точек пересечения этих прямых с прямой y = -1 дадут множество всех составных чисел. Докажите.

Приведенную конструкцию Хорватского математика Д. Блануша можно считать геометрической интерпретацией известного решета Эратосфена.

14) Докажите, что на окружности круга, заданного неравенством $x^2 + y^2 \le 3$, нет ни одной рациональной точки.

Ответы на поставленные вопросы относительно точек решетки читатель найдет либо полностью, либо лишь с некоторыми пояснениями в книге В. Серпинского Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1961. – 73 с.

Рекомендации по решению исследовательских заданий по арифметике читатель найдет в книгах:

– А.П. Доморяд Математические игры и развлечения. М.: Изд-во физматлитературы, 1961. 257 с.

– Ф.А. Бартенев Нестандартные задачи по алгебре: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. 95 с.

– Литцман В. Веселое и занимательное о числах и фигурах: Занимательная математика всякого рода, о числах, о геометрических формах / Перевод с восьмого немецкого издания и редакция И.Б. Погребинского. М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1963. 264 с.

Приведем задачи исследовательского характера для самостоятельной работы учащихся 3-4, 5-6, 7-8, 9-11 классов, среди которых значительное число логических задач. Эти задачи в 2005 году были предложены на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру». Решив задачу, следует из пяти предложенных ответов выбрать верный.

Задачи для учащихся 3-4 классов

1. Какое из чисел обладает такими свойствами: оно четное, все его цифры различны, а число сотен в два раза больше числа единиц?

(A) 1236 (B) 3478 (C) 4683 (D) 4874 (E) 8462

2. Если одно из чисел увеличить в 20 раз, а другое уменьшить в 10 раз, то произведение этих чисел

(A) увеличится в 2 раза,

(B) уменьшится в 2 раза,

(C) увеличится в 20 раз,

(E) не изменится.

(D) уменьшится в 20 раз

3. На столе лежала коробка с конфетами. Саша взял оттуда половину конфет, потом половину оставшихся конфет взял Коля. Затем

Света взяла из коробки половину того, что там было. После этого осталось 3 конфеты. Сколько конфет было в коробке сначала?

(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24 (E) 36

4. Царь Кащей подобрел и решил потратить 50 золотых монет на подарки детям. В сундуке у него хранится 5 ларцов, в каждом ларце по 3 шкатулки, а в каждой шкатулке по 10 золотых монет. Сундук, ларцы и шкатулки заперты на замки. Какое наименьшее число замков потребуется открыть Кащею, чтобы достать 50 монет?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

5. Во дворе живут два кота и две собаки. Кот Малыш боится обеих собак, а кот Тоша боится Шарика и дружит с Бобиком. Какое из утверждений неверно?

(A) Каждый из котов боится какой-то из собак.

(B) Есть кот, который не боится какой-то из собак.

(C) Есть собака, которую боятся оба кота.

(D) Есть собака, которую не боится ни один из котов.

(E) Каждая из двух собак вызывает страх какого-то из котов.

6. Две девочки и три мальчика вместе съели 16 порций мороженого. Каждый мальчик съел в 2 раза больше порций, чем каждая девочка. Сколько порций съедят 3 девочки и 2 мальчика с такими же аппетитами?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 16 (E) 17

7. У каждого двузначного числа нашли произведение цифр, потом у каждого такого произведения подсчитали сумму цифр. Какая сумма самая большая?

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 18

8. В семье четверо детей, им 5. 8. 13 и 15 лет, а зовут их Таня, Юра, Света и Лена. Одна девочка ходит в детский сад, Таня старше Юры, а сумма лет Тани и Светы делится на три. Сколько лет Лене?

(A) 5 (B) 8 (C) 13 (D) 15 (E) Невозможно определить.

9. На белой доске 5x5 Петя закрасил какие-то клетки синим цветом, а какие-то - красным (каждым цветом закрашена хотя бы одна клетка). Никакие две клетки красного и синего цвета не имеют общей стороны. Какое наибольшее число клеток могло быть закрашено?

(A) 25 (B) 23 (C) 22 (D) 21 (E) 20

Задачи для учащихся 5-6 классов

1. Чему равна цифра единиц двузначного числа, если известно, что она равна $\frac{3}{8}$ от цифры десятков?

(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 7 (E) невозможно определить.

2. На лесной опушке под каждой березой растет по два подберезовика, а на каждом пеньке – по 12 опят. Сколько берез надо обойти, чтобы собрать столько же подберезовиков, сколько опят растет на 6 пеньках?

(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 36 (E) 72

3. Если число 2005 умножить само на себя 2005 раз, то последние две цифры произведения будут равны

(A) 05 (B) 15 (C) 25 (D) 45 (E) 75

4. С полудня до полуночи Кот Ученый спит под дубом, а с полуночи до полудня рассказывает сказки. На дубе он повесил плакат: “Через час я буду делать то же самое, что делал два часа назад”. Сколько часов в сутки эта надпись верна?

(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 3 (E) 21

5. Сумма числителя и знаменателя дроби равна 2005, а после сокращения этой дроби получилось число 400. Тогда сумма цифр числителя первоначальной дроби равна

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8

6. Получив очередную пятерку по математике, Сережа обнаружил, что в дневнике у него стало на 100% больше пятерок, чем двоек.

На сколько процентов количество двоек теперь меньше, чем количество пятерок?

(A) на 0%   (B) на 50% (C) на 100% (D) на 150% (E) на 200%

7. В классе сидят мальчики и девочки. Если в класс войдут еще 10 мальчиков, то всего мальчиков станет вдвое больше, чем девочек. Сколько девочек должны выйти из класса, чтобы среди оставшихся ребят оказалось вдвое больше мальчиков, чем девочек?

(A) 0   (B) 2   (C) 5   (D) 10   (E) 20

8. Для украшения класса к празднику 8 Марта купили воздушные шарики: синие, красные и зеленые. Некоторые из них длинные, а некоторые – круглые. Все зеленые шарики – круглые, а все длинные – красные. Тогда обязательно

(A) все красные шарики – длинные,

(B) некоторые длинные шарики – синие,

(C) все круглые шарики – зеленые,

(D) все синие шарики – круглые,

(E) некоторые синие шарики – длинные.

9. В произведении К х Е х Н х Г х У х Р х У буквами зашифрованы некоторые цифры (одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные - разными). Чему равна цифра единиц этого произведения, если известно, что оно не делится на 4?

(A) 0   (B) 1   (C) 2   (D) 5   (E) невозможно определить.

10. На белой доске 5х5 Петя закрасил какие-то клетки синим цветом, а какие-то красным (каждым цветом закрашена хотя бы одна клетка). Никакие две клетки красного и синего цвета не имеют общей стороны. Какое наименьшее число клеток могло быть не закрашено?

(A) 1   (B) 2   (C) 3   (D) 4   (E) 5

11. Катя и четыре ее подружки разделили между собой несколько конфет. В результате оказалось, что у всех девочек разное число конфет, а общее число конфет у любых трех девочек больше, чем общее

число конфет у остальных двух. Какое самое маленькое число конфет может быть у Кати?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 7

12. Гусеница выползла из своего домика в полдень и ползет по лугу, поворачивая после каждого часа направо или налево на 90°. За первый час она проползла 1 м, а за каждый следующий – на 1 м больше, чем за предыдущий. На каком наименьшем расстоянии от домика она могла оказаться в 7 часов вечера?

(A) 0 м (B) 1 м (C) 2 м (D) 5 м (E) 9 м

13. Яблоко и апельсин вместе весят столько же, сколько груша и персик. Яблоко вместе с грушей весят меньше, чем апельсин с персиком, а груша вместе с апельсином весят меньше, чем яблоко с персиком. Какой из фруктов самый тяжелый?

(A) апельсин (B) персик (C) груша

(D) яблоко (E) невозможно определить

Задачи для учащихся 7-8 классов

1. Если к 2005 прибавить 2005 сотых, то получится

(A) 2025,05 (B) 2005,2005 (C) 2005,02005

(D) 2007,05 (E) 2205,5

2. В треугольнике ABC угол A в три раза больше угла B и равен половине угла C. Тогда угол A равен

(A) 30° (B) 36° (C) 54° (D) 60° (E) 72°.

3. Среди кошек, обитающих в лагере «Ласточка», три – пушистые, а две – полосатые. Какое наименьшее количество неполосатых пушистых кошек может быть в лагере?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

4. Какое из следующих равенств означает, что m составляет 30% от k?

(A) $10m - 7k = 0$ (B) $10m - 3k = 0$ (C) $3m - 10k = 0$

(D) $7m - 10k = 0$ (E) $7m - 3k = 0$

5. Если разделить 50^{50} на 25^{25}, то получится

(A) 2 (B) 25^{25} (C) 2^{25} (D) 100^{25} (E) 50^{25}

6. Сторож работает 4 дня, а на пятый день отдыхает. Он отдыхал в воскресенье и начал работу в понедельник. Сколько дней он проработает до того, как его отдых снова придется на воскресенье?

(A) 4 (B) 24 (C) 28 (D) 32 (E) 35

7. С полуночи до полудня Кот Ученый рассказывает сказки, а с полудня до полуночи спит под дубом. На дубе том висит плакат: «Два часа назад Кот делал то же самое, что он будет делать через час». Сколько часов в сутки эта надпись верна?

(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 3 (E) 21

8. Сумма пяти различных натуральных чисел равна 100. Каким может оказаться наибольшее из этих пяти чисел?

(A) 10 (B) 20 (C) 90 (D) 93 (E) 96

9. Вася придумал такой шифр: он заменил буквы Г, Е, К, Н, Р, У какими-то цифрами, идущими в возрастающем порядке. Потом при помощи этого шифра он зашифровал слово КЕНГУРУ. Какое наибольшее число могло у него получиться?

(A) 9876545 (B) 9876543 (C) 7684969

(D) 6574989 (E) 5463878

10. На окружности с центром в точке О взяли точку А. Какую часть окружности составляют точки, которые ближе к О, чем к А?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{6}$

(E) ответ зависит от расположения точки А.

11. Жан-Кристоф продолжает изучать русский язык. Он собирается выписывать натуральные числа словами до тех пор, пока не напишет первое число, в записи которого участвуют все буквы слова «слово». Чему равна сумма цифр числа, на котором Жан-Кристоф остановится?

(A) 5 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 30

12. Назовем длиной натурального числа n количество сомножителей в разложении n на простые множители. Например, длина числа 90 равна 4, так как $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Сколько нечетных чисел, меньших 100, имеют длину 3?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

13. Сколько существует двузначных чисел, которые при перестановке цифр увеличиваются не менее, чем в три раза?

(A) 5 (B) 6 (C) 10 (D) 15 (E) 33

14. Гусеница выползла из домика в полдень и ползет по лугу, поворачивая каждый час на 90° направо или налево. За первый час она проползла 1 м, за второй час – 2 м, и т. д. На каком наименьшем расстоянии от домика она могла оказать в 9 часов вечера?

(A) 0 м (B) 1 м (C) 2 м (D) 1,5 м (E) 0,5 м

15. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC нашлась такая точка M, что $\angle MCA - \angle MAB = \angle B$. Что можно утверждать об этом треугольнике?

(A) он равносторонний,

(B) один из его углов прямой,

(C) боковая сторона больше основания,

(D) угол при вершине B – тупой,

(E) основание больше боковой стороны.

16. Шерлок Холмс и доктор Ватсон ехали из Лондона в Плимут. Когда они прибыли в Плимут, доктор Ватсон спросил: «Холмс, а сколько времени мы были в пути?». «Не знаю, – ответил Холмс, – но я заметил, что в момент, когда мы отправлялись, и сейчас, когда мы прибыли, угол между часовой и минутной стрелками моих часов был прямым». Расстояние от Лондона до Плимута равно 120 км. Какой может быть скорость поезда?

(A) 120 км/ч (B) 110 км/ч (C) 100 км/ч (D) 60 км/ч

(E) никакой из перечисленных.

17. Сколько существует треугольников со сторонами 5 см и 6 см, один из углов которого равен 20°?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. По определению, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot ... \cdot 20!$, чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

(A) 20! (B) 19! (C) 10! (D) 5! (E) это невозможно.

Задачи для учащихся 9-11 классов

1. В концерте участвовали 4 солиста, 3 дуэта, 2 трио и 1 квартет. Сколько музыкантов участвовали в концерте?

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 24 (E)30

2. Сотрудники фирмы «Бурундук» уходят в отпуск на целый месяц, если этот месяц начинается и кончается одним и тем же днем недели. Сколько месяцев будут отдыхать сотрудники фирмы с 1 января 2005 года по 31 декабря 2015 года?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 11 (E) 132

3. Какое из следующих чисел является кубом натурального числа?

(A) $6,4 \cdot 10^{11}$ (B) $6,4 \cdot 10^{13}$ (C) $6,4 \cdot 10^{14}$

(D) $6,4 \cdot 10^{15}$ (E) $6,4 \cdot 10^{18}$

4. С полуночи до полудня Ученый Кот рассказывает сказки, а с полудня до полуночи – спит под дубом. На дубе том висит плакат: «Два часа назад Кот делал то же самое, что будет делать через час». В какой из указанных моментов времени надпись на плакате верна?

(A) 1 : 30 (B) 23 : 30 (C) 0 : 30 (D) 22 : 30 (E) 13 : 30

5. Если x – квадрат натурального числа, то следующий квадрат натурального числа – это

(A) $x + 1$ (B) $x^2 + 1$ (C) $x^2 + 2x + 1$ (D) $x^2 + x$ (E) $x+2\sqrt{x}+1$

6. Жан-Кристоф продолжает изучать русский язык. Он выписывает подряд натуральные числа словами до тех пор, пока не напишет

первое число, в записи которого участвуют все буквы слова «число». Чему равна сумма цифр числа, на котором Жан-Кристоф остановится?

(A) 5 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) 30

7. Если многоугольник (возможно, невыпуклый) составлен из 8 одинаковых правильных треугольников, то он не может быть

(A) семиугольником (B) шестиугольником (C) трапецией
(D) ромбом (E) треугольником

8. Пусть p – наименьшее простое число, которое равно сумме трех различных простых чисел: $p = p_1 + p_2 + p_3$. Тогда произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ равно

(A) 30 (B) 165 (C) 105 (D) 231 (E) 385

9. Имеется набор гирь, в котором самая тяжелая гиря в 5 раз тяжелее среднего веса всех гирь. Чему не может равняться количество гирь в наборе?

(A) 15 (B) 11 (C) 8 (D) 6 (E) 4

10. Каждая пара вершин куба соединена отрезком. Сколько различных середин у всех этих отрезков?

(A) 8 (B) 12 (C) 18 (D) 19 (E) 28

11. Пусть S – площадь поверхности Земли, а S_0 – площадь той ее части, точки которой ближе к Петербургу, чем к центру Земли. Тогда

(A) $\frac{S_0}{S} > \frac{1}{2}$ (B) $\frac{S_0}{S} = \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3} < \frac{S_0}{S} < \frac{1}{2}$ (D) $\frac{S_0}{S} = \frac{1}{3}$ (E) $\frac{S_0}{S} < \frac{1}{3}$

12. Сколько существует треугольников, у которых одна из сторон равна 3 см, другая – 4 см, а один из углов равен 10°?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

13. Гусеница выползла из домика в полдень и ползет по лугу, поворачивая через каждый час на 90° направо или налево. За первый час она проползла 1 м, за второй – 2 м, и т.д. На каком наименьшем расстоянии от домика она могла оказаться в 10 часов вечера?

(A) 0 м (B) 1 м (C) 2 м (D) $\sqrt{5}$ м (E) $\sqrt{61}$ м

14. По определению, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot ... \cdot 100!$, чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

(A) 13! (B) 42! (C) 47! (D) 50! (E) это невозможно

15. Каждая парабола $y = ax^2 + bx + c$ разбивает плоскость на две части. Если две точки попадают в разные части, то будем говорить, что парабола разделяет эти точки. Какие две точки не могут быть разделены никакой параболой вида $y = ax^2 + x$, $a > 0$?

(A) (-1;1) и (1;-1) (B) (-1;0) и (1;0) (C) (-8; 0)и (-1; 0)

(D) (3; 0) и (5; 0) (E) все пары A - D могут быть разделены

16. На белой клетчатой доске 10x10 Вася закрасил 10 клеток синим цветом, а несколько других клеток – красным цветом. Оказалось, что никакие две клетки красного и синего цвета не имеют общей стороны. Какое наименьшее число клеток могло остаться не закрашенным?

(A) 10 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 3

17. Про набор чисел $a + 2$, $-\frac{2}{a}$, 6, a^2 известно, что два из этих чисел равны, а еще одно ровно вдвое больше их. Тогда

(A) $a+2=-\frac{2}{a}$ (B) $-\frac{2}{a}=6$ (C) $-\frac{2}{a}=a^2$

(D) $a^2 = a + 2$ (E) это невозможно

18. Найдите тупой угол треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно некоторой стороны этого треугольника.

(A) 100° (B) 108° (C) 120° (D) 136° (E) 150°

В заключение параграфа заметим, что воспитательно-развивающую функцию поисково-исследовательской учебной деятельности при обучении математике можно определить, прежде всего, как развитие и воспитание целеустремленности, самоорганизации, волевых и моральных качеств личности учащегося.

§ 2. СОДЕРЖАНИЕ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

В данном параграфе мы приведем примеры заданий, которые помогут организовать поисково-исследовательскую деятельность учащихся.

1) Исследуйте вопрос: «Можно ли правильный тетраэдр разрезать на такие части, из которых в ином расположении получится равновеликий ему прямоугольный параллелепипед?»

Заметим, что ответ на поставленный вопрос отрицательный и найти его читатель сможет в книге В.Ф. Кагана [94].

2) Когда равновеликие трехгранные пирамиды могут быть преобразованы одна в другую методом разложения? (Ответ см. в книге [94]).

3) Разложить трехгранную призму (рис. 90 а) на три равновеликие трехгранные пирамиды, имеющие ту же высоту и то же основание, что и призма.

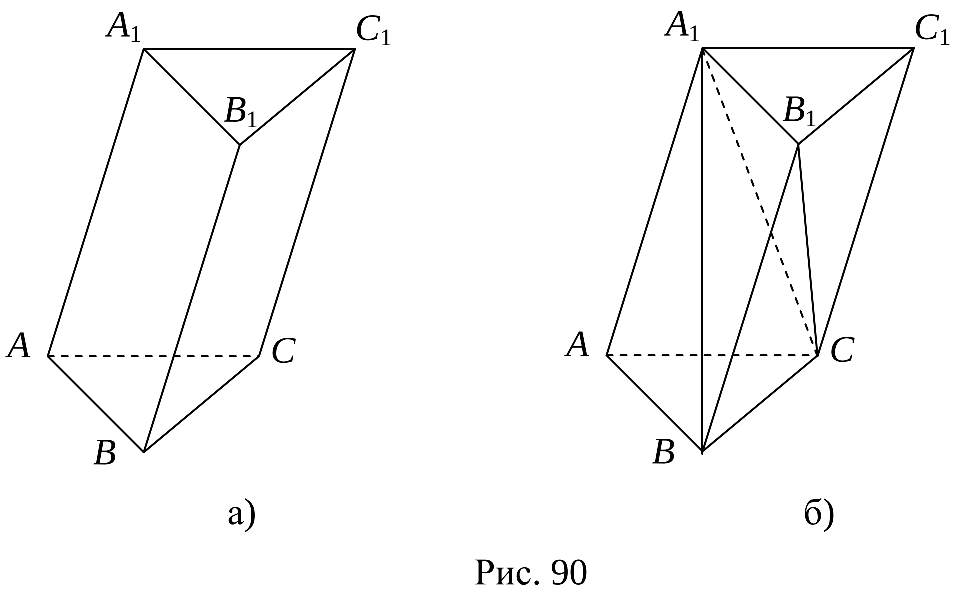


Рис. 90

Ответ к задаче дан на рис. 90 б. Заданная призма разбита на три равновеликие пирамиды: A_1ABC; $A_1CC_1B_1$; A_1CBB_1.

4) Покажите на примере, что два равновеликих многогранника могут быть разбиты на одинаковое число тетраэдров таким образом, чтобы каждому тетраэдру в разложении одного многогранника соответствовал бы равновеликий ему тетраэдр в разложении другого многогранника.

Некоторые рекомендации по решению этой задачи читатель найдет в книгах [73, 34].

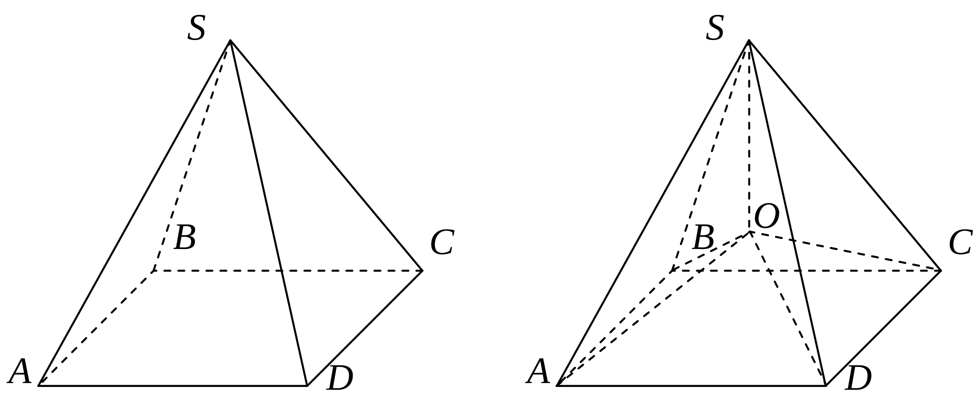
5) Разбейте тетраэдр плоскостью на: два тетраэдра; один тетраэдр и один многогранник, не являющийся тетраэдром; два многогранника, не являющихся тетраэдрами.

6) Разбейте параллелепипед на: шесть равновеликих пирамид; три равновеликие пирамиды.

7) Деревянный брус имеет вид прямой треугольной призмы. Распилите его по двум поперечным и параллельным между собой плоскостям. Предложите способ нахождения площади получившегося между этими распилами тела, который предполагает меньшее количество измерений необходимых величин.

8) Исследуйте вопрос: «Всегда ли две равновеликие треугольные пирамиды можно преобразовать одну в другую методом разложения в случае, если они имеют равные высоты и равновеликие основания?» (Ответ к задаче отрицательный).

9) Разложите четырехугольную пирамиду (рис. 91 а) на четыре треугольные пирамиды и одну четырехугольную. (Решение приведено на рис. 91 б). Четыре треугольные пирамиды: *OABS; OSBC; OSAD; OSCD* и одна четырехугольная – *SABCD*).



а) б)

Рис. 91

10) В тетраэдре *SABC* ребро *SB* – его высота и *AB* = *BC*.

а) заполните таблицу (табица 19);

Таблица 19

№	SB	AB	SA	AC	$\angle ABC$	$\angle ASC$
1	1	1			90°	
2	1	1		1		
3	1	1			120°	
4	1		2	2		
5	1		2			90°
6	1			2		90°

б) выберите сами три из указанных величин, дайте им численное значение и вычислите остальные;

в) установите связь между SA, AB, $\angle ABC$ и $\angle ASC$;

г) установите связь между AC, SB, $\angle ABC$ и $\angle ASC$.

11) В правильной четырехугольной пирамиде $SABC$ с ребром 1 точка Q – центр основания, а точка K – середина SC:

а) вычислите длину перпендикуляра: из K на (ABC); из K на (SBD); из Q на (SCD);

б) вычислите площадь сечения пирамиды, проходящего через точку K параллельно: (ABC); (SBD); (SAD);

в) нарисуйте сечение пирамиды, проходящее через точку K и параллельное прямым: SQ и AB; SD и AC. Как вычислить его площадь?

г) нарисуйте сечение пирамиды, проходящее через: K и параллельное (BD); Q и параллельное (CD);

д) нарисуйте сечение пирамиды, проходящее через: K и перпендикулярное (ABC); SQ и перпендикулярное (SAD); K и перпендикулярное (SBD).

12) Дана прямая треугольная призма $FDCFDC$, $AB = BC = BB_1 = 1$, $\angle ABC = 90°$:

а) нарисуйте ее плоскость симметрии;

б) установите форму ее сечения плоскостью: перпендикулярной AB; параллельной (AA_1C_1); параллельной плоскости симметрии, проходящей через BB_1; проходящей через A_1C_1;

в) вычислите расстояния: B_1K, где K – середина AC; от C до (AA_1B_1); от B_1 до (A_1BC_1); от BB_1 до грани AA_1C_1C;

г) найдите угол φ между: AB и (ABC); AC и (BB_1C_1); B_1C и (A_1BB_1); (AB_1C) и (AB_1C_1); (ABC) и (ABC); (AB_1C_1) и (CB_1A_1);

д) какова площадь сечения, составляющего с основанием угол в $60°$, проходящего через AC?

е) в каких границах лежит площадь сечения, указанных в пункте б) этой задачи?

ж) можно ли описать вокруг этой призмы сферу? Вписать в нее сферу? Если можно, то каковы их радиусы?

13) Как вычислить площадь поверхности тела вращения, полученного вращением:

а) равностороннего треугольника вокруг: высоты; стороны; прямой, проходящей через вершину и параллельной его высоте; прямой, параллельной его стороне;

б) квадрата вокруг: диагонали; прямой, проходящей через вершину квадрата и параллельной диагонали;

в) ромба вокруг диагонали;

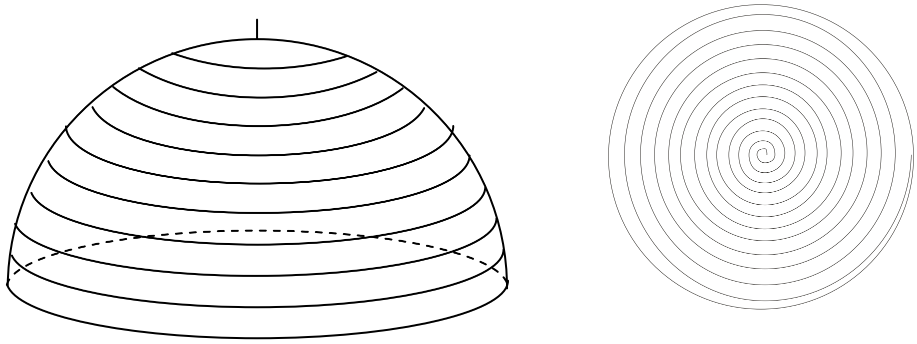
г) прямоугольника вокруг диагонали;

д) прямоугольной трапеции вокруг: наименьшей боковой стороны; основания;

е) равнобедренной трапеции вокруг: оси симметрии; основания; боковой стороны?

14) Для получения формулы площади сферы учащимся можно предложить такие учебные исследования:

а) взять деревянную модель шара, которая рассечена экваториальной плоскостью. В эти модели вбить гвозди так, как показано на рисунках 92 а) и б). Намотать на эти модели вокруг гвоздиков бельевую веревку одинаковой толщины. Длину веревки, использованную в случае рис. 92 а), обозначим буквой l_1, а в случае рис. 92 б – буквой l_2.



а) б)

Рис. 92

При сравнении длин l_1 и l_2 окажется, что $l_1 = 2l_2$, но веревка длины l_2 покрыла собой площадь πr^2 (r – радиус сферы), тогда веревка длины l_1 покроет площадь $2\pi r^2$ (это площадь полусферы). Окончательно можно предположить, что $S_{\text{сф}} = 4\pi r^2$;

б) рассмотрим один из способов получения приближенной развертки сферы.

Очистить апельсин от кожуры можно следующим образом: разрезать ее ножом по дугам больших кругов (это сечение плоскостью, проходящей через его центр) так, как проходят меридианы земного шара, а затем отделить кожуру (рис. 93); при этом мы заметим, что каждый кусок кожуры не плоский, а выпуклый, и попытки сделать их плоскими увенчаются успехом лишь в том случае, если кожура достаточно эластична и нам удастся примять середину, слегка растянув при этом края; в противном случае кожура разорвется.

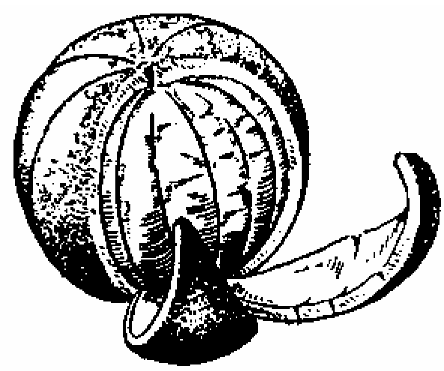


Рис. 93

Подобная развертка сферы позволит учащимся высказать предположение о том, какой будет площадь сферы. Разобьем сферу, например, на 12 равных частей, так, как показано на рис. 94.

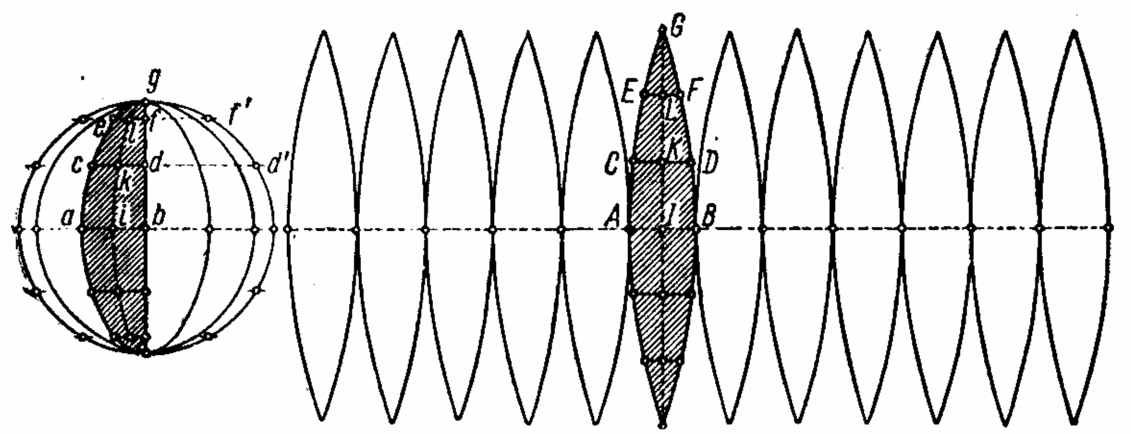


Рис. 94

Очевидно, что чем точнее мы хотим получить площадь сферы, тем на большее число частей следует разбить сферу. Видно, что развертка в таком случае будет заполнять прямоугольник с длиной $2\pi r$ (r – радиус сферы) и шириной $2r$. Итак, можно допустить, что

$$S_{\text{сф}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2.$$

15) Организовать учебное исследование целесообразно и для того, чтобы учащиеся могли бы самостоятельно прийти к соотношению между числом вершин, граней и ребер для любого выпуклого многогранника, которое выражается известной теоремой Эйлера: «Для любого выпуклого многогранника сумма числа его вершин В и числа его граней Г без числа ребер Р равна двум, то есть В + Г – Р = 2».

Для такой работы учащимся предлагаются модели различных выпуклых многогранников, исследуя которые, они затем заполняют таблицу 20.

Не следует предлагать учащимся вычислять значения готового выражения В + Г – Р. Больше пользы будет в том случае, если они сами, выполняя действия над числовыми характеристиками, получат требуемое равенство. Лишь в случае значительных затруднений можно оказать им некоторую помощь.

Таблица 20

№	*Вид многогранника*	*В*	*Г*	*Р*	*Примечание*
1	Тетраэдр				
2	Октаэдр				
3	Икосаэдр				
4	Додекаэдр				
5	Ромбоэдр				
6	Двенадцатиугольная пирамида				
7	Усеченная пятиугольная пирамида				
8	Восьмиугольная призма				
9	Прямоугольная бипирамида				

Теорема Эйлера может быть доказана различными способами, здесь мы приведем один из них, который является наиболее простым [23].

Вырежем одну грань; оставшуюся часть поверхности можно развернуть на плоскость. При этом полученная фигура не распадется на отдельные части. Представим себе, что плоская фигура (рис. 95) изображает собой остров. Остров со всех сторон окружен морем и состоит из отдельных полей – граней, отделенных друг от друга и от воды плотинами – ребрами. Начнем постепенно снимать плотины с целью залить водой все поля. При этом будем соблюдать условие: плотина снимается, если она граничит с водой только с одной стороны. Теорема Эйлера будет нами доказана с помощью очевидного соотношения: число всех плотин равно числу снятых плюс число оставшихся.

1) Число снятых плотин равно Г – 1.

В самом деле, снимая очередную плотину, мы орошаем одно поле, так как, по условию, снимать можно те и только те плотины, у которых с одной стороны вода, а с другой – суша. Число всех полей Г – 1 (одна грань была вырезана сначала). Поскольку мы оросили все поля, число снятых плотин равно Г – 1. План «работ по снятию плотин», точнее, один из возможных вариантов такого плана, показан на рис. 95: снимаемые плотины (показаны тонкими линиями) отмечены штрихами, а стоящие рядом номера показывают, в каком порядке их можно снимать. (В нашем примере Г – 1 = 15).

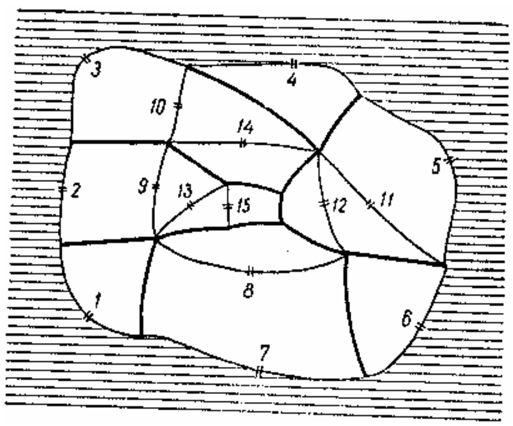


Рис. 95

2) Число оставшихся плотин равно В – 1.

Во-первых, система оставшихся плотин не распадается на отдельные части (связность). В самом деле, исходная система плотин не распадалась; сняли мы конечное число (Г – 1) плотин; следовательно, не распадается и система оставшихся плотин. Иначе при снятии некоторой очередной плотины (одной) связная до этого система распадется. Но это значило бы, что снимаемая плотина имела с двух сторон воду, т.е. мы не должны были ее снимать. На рис. 96 изображена наша система плотин после того, как первые 12 уже сняты. Снимать плотину AB нельзя.

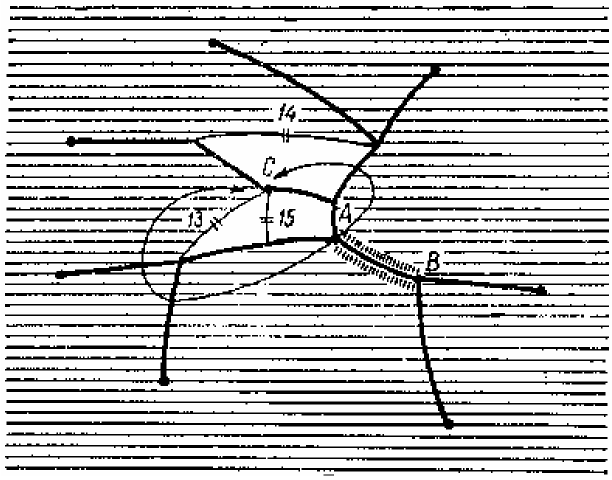


Рис. 96

Во-вторых, никакие две вершины A и C (рис. 96) не могут в системе оставшихся плотин соединяться двумя различными путями, так как в этом случае мы получили бы замкнутый путь (ACA). Внутри такого пути не было бы воды, а это противоречит условию оросить все поля.

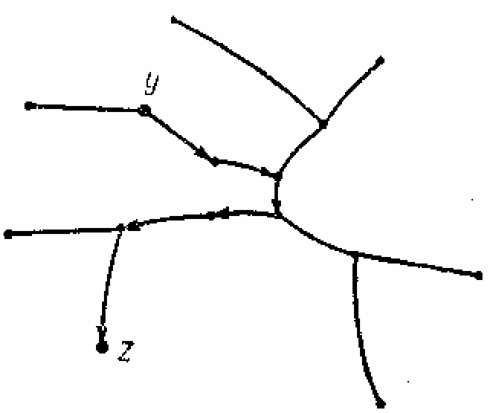


Рис. 97

Из доказанных двух свойств системы оставшихся плотин следует, что в ней имеется *тупик* (по крайней мере, один, т.е. вершина с ведущим в нее единственным ребром Z на рис. 97). Действительно, тронемся в путь по оставленным плотинам из какой-нибудь вершины Y, условившись не проходить никакой плотины дважды. Согласно второму свойству, мы каждый раз будем приходить в новую вершину. Но число всех вершин конечно. Поэтому рано или поздно мы попадем в такую вершину, откуда больше двигаться нельзя, т.е. попадем в тупик.

Отрежем этот тупик (т.е. одно ребро и одну вершину). В оставшейся системе плотин, очевидно, соблюдаются оба доказанных ранее свойства, поэтому и в ней есть тупик. Отрежем его и т.д.

Отрезая тупики, мы придем в конце концов к такой системе, в которой нет плотин и, следовательно, имеется ровно одна вершина (оставшаяся после отрезания последнего тупика).

Итак, число всех плотин, не снятых при орошении, равно В – 1 (на рис. 97 В – 1 = 14).

3) Но вообще число всех плотин Р.

Отсюда Р = (Г – 1) + (В – 1) и В + Г – Р = 2.

16) Дадим определение простого правильного многогранника: «Простой многогранник называется правильным, если все его грани имеют одинаковое число ребер (m) и во всех вершинах сходится одинаковое число ребер (n)». Иначе: все грани – m-угольники, все многогранные углы – n-гранные.

Можно организовать учебное исследование по выявлению количества различных типов правильных многогранников. Это исследование покажет, что их может быть только пять. Затем полезно доказать выдвинутое предположение. Доказательство может быть таким.

Запишем формулу Эйлера: В + Г = Р + 2. Подсчитаем Р.

1) В каждой грани – m ребер; число граней – Г; общее число ребер – mГ. Но каждое ребро мы при этом засчитали дважды. Следовательно, 2Р = mГ.

2) В каждой вершине сходится n ребер. Аналогично находим, что 2Р = nВ.

3) $\Gamma = \frac{2P}{m}$, $B = \frac{2P}{n}$. Формула Эйлера: $\frac{2P}{m} + \frac{2P}{n} = P + 2$, откуда $2P\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) = 2$.

Следовательно, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$. Но известно, что $m \geq 3$ и $n \geq 3$ (нет грани «меньше» треугольной и угла «меньше», чем трехгранный). Решаем неравенство:

$m = 3$; для n – возможности: $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

$m = 4$; $n = 3$;

$m = 5$; $n = 3$.

$m = 6$ уже невозможно.

Итак, получаем следующие схемы (m, n) : (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3).

То, что многогранников есть действительно пять, в особом доказательстве не нуждается: их можно просто изобразить или описать построение, не заботясь о форме.

Замечание. Пара чисел (m, n) полностью определяет правильный многогранник. Р, В и Г находим из соотношений:

$$P\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)=1,\ B=\frac{2P}{n},\ \Gamma=\frac{2P}{m}.$$

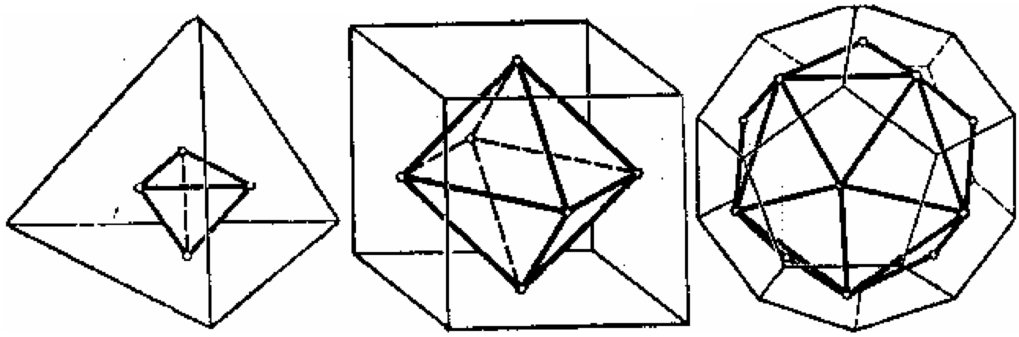
Составим таблицу (таблица 21).

Таблица 21

Название	*m*	*n*	*B*	*Г*	*P*
Тетраэдр	3	3	4	4	6
Гексаэдр	4	3	8	6	12
Октаэдр	3	4	6	8	12
Додекаэдр	5	3	20	12	30
Икосаэдр	3	5	12	20	30

Здесь особо прозрачно выступает взаимность между многогранниками: если многогранник 1 взаимен с многогранником 2, то $m_1 = n_2$, $n_1 = m_2$, $B_1 = \Gamma_2$, $B_2 = \Gamma_1$, $P_1 = P_2$. Вершины (точки) и грани (плоскости) меняются ролями. Заметим, что два правильных многогранника называются взаимными, если центры граней одного служат вершинами другого, или наоборот.

На рисунках 98 а, б, в изображены три пары взаимных многогранника: тетраэдр – тетраэдр, куб – октаэдр, икосаэдр – додекаэдр.



а) б) в)

Рис. 98

Приведем еще одно возможное доказательство того, что правильных многогранников существует не более пяти. Это доказательство основано на свойстве выпуклого многогранного угла.

а) Пусть грани многогранника – правильные треугольники. В одной вершине их может сходиться 3, 4 и 5, так как

$$60° \cdot 3 < 360°;$$

$$60° \cdot 4 < 360°;$$

$$60° \cdot 5 < 360°,$$

но

$$60° \cdot 6 = 360°.$$

Следовательно, правильные многогранники – ***тетраэдр, октаэдр, икосаэдр*** (рис. 99).

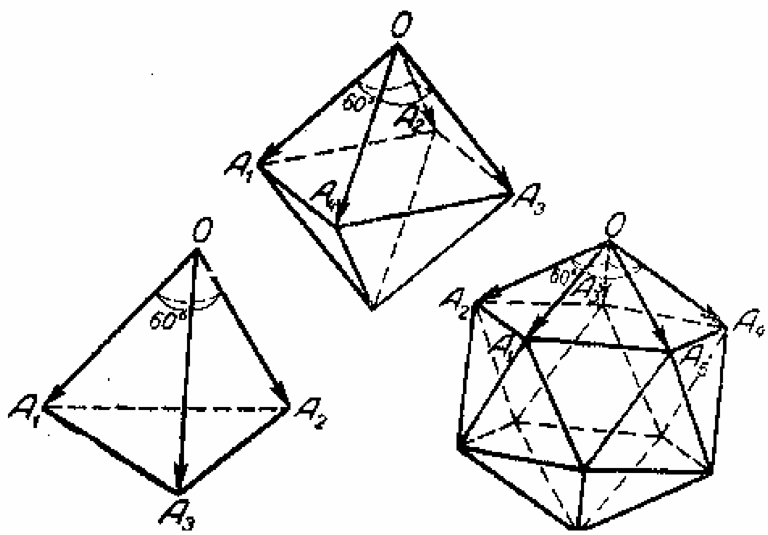


Рис. 99

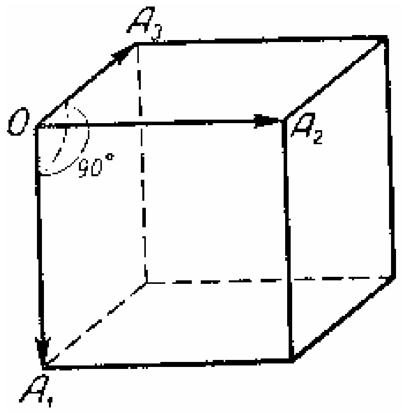


Рис. 100

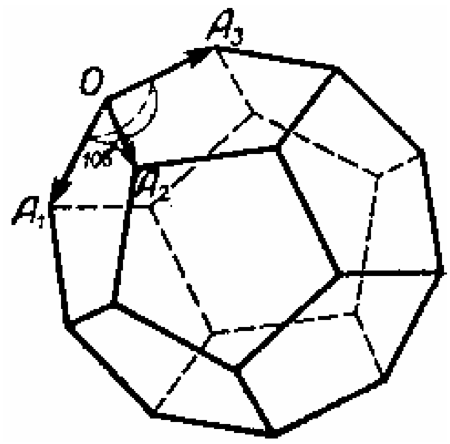


Рис. 101

б) Грани – квадраты. В одной вершине их может сходиться три:

$$90° \cdot 3 < 360°,$$

но

$$90° \cdot 4 = 360°.$$

Соответствующий правильный многогранник – хорошо известный всем ***куб*** (или ***гексаэдр***) (рис. 100).

в) Грани – правильные пятиугольники. В одной вершине их может сходиться три:

$$108° \cdot 3 < 360°,$$

но

$$108° \cdot 4 > 360°.$$

Соответствующий правильный многогранник – ***додекаэдр*** (рис. 101).

Шести-, семи- и более- угольными грани не могут быть, так как даже 120° · 3 = 360°.

Для того чтобы доказать, что перечисленные пять видов правильных многогранников действительно существуют, их надо построить, что мы и предлагаем сделать читателю.

Заметим, что греческие геометры, в частности Евклид, считали правильные многогранники «венцом» геометрии. Есть некоторые основания думать, что величайшее произведение Евклида «Начала» создано для того, чтобы изложить в последней, 13-й книге, теорию правильных многогранников («идеальных» или «платоновых» тел).

17) Наш опыт показал, что целесообразно организовать учебное исследование по установлению такого факта: «Параллельное проектирование сохраняет отношение площадей фигур: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1'}{S_2'} = k$ (рис. 102)».

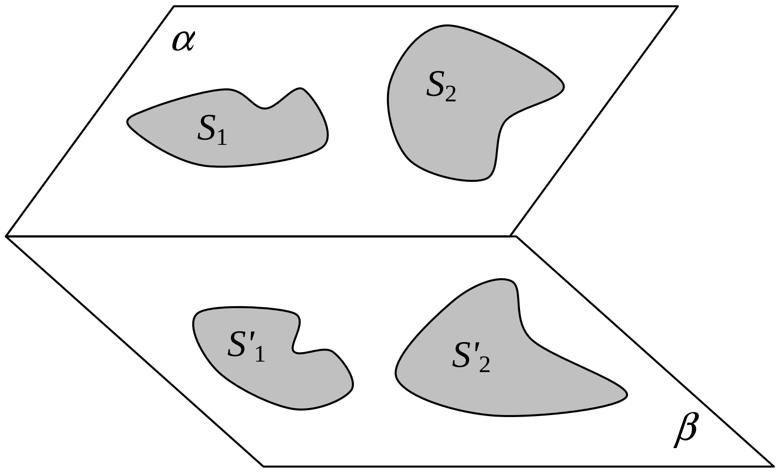


Рис. 102

Для этого можно поступить так. Возьмем прозрачную пленку (плоскость α), на которую наклеим фигуры S_1 и S_2, но заблаговременно, с помощью палетки, измерим их площади. Затем эту пленку крепим под углом к другой пленке (плоскость β). Осветив плоскость α, фигуры S_1 и S_2 спроектируются на плоскость β: их проекциями, соответственно, будут фигуры S'_1 и S'_2. С помощью палетки измеряются площади теней и устанавливается необходимое равенство. Обобщая результаты, полученные учащимися в классе, выдвигается необходимая гипотеза.

18) Опытным путем учащихся можно подвести к двум теоремам Паппа-Гульдина.

Теорема 1. Площадь поверхности, полученной от вращения дуги данной плоской кривой вокруг какой-либо оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равна произведению длины вращающейся дуги на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести дуги.

Теорема 2. Объем тела, образованного вращением данной плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры, но не пересекающей ее, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести фигуры.

Покажем, как это может быть сделано в случае вычисления площади поверхности.

Возьмем модель окружности $x^2 + y^2 = 4$, изготовленную из однородной проволоки. Наклеим половину этой окружности на тонкую прочную пленку. Будем манипулировать гвоздем под этой пленкой так, чтобы конструкция уравновесилась бы (рис. 103).

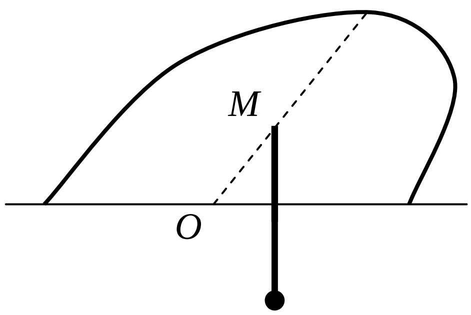


Рис. 103

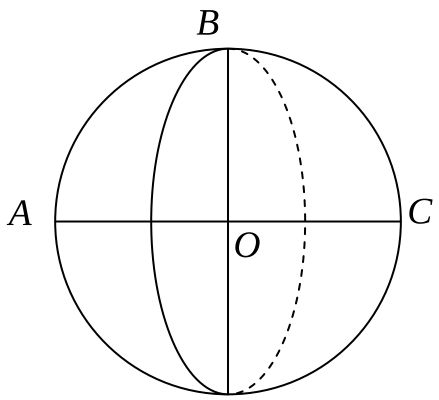


Рис. 104

Очевидно, что точка *M* (центр тяжести кривой) будет лежать на оси симметрии полуокружности (то есть абсцисса этой точки будет равна нулю). Измерим длину отрезка *OM*, она будет равна ≈ 1,27 *см* (радиус окружности равен 2 *см*).

Известно, что сфера получается вращением полуокружности вокруг своего диаметра (рис. 104).

Умножим длину полуокружности, которая равна $\pi r = 2\pi \approx$ $\approx 6{,}2831852$ (*см*), на длину окружности, описываемой центром тяжести заданной полуокружности, вокруг диаметра *AC* (длина этой полуокружности будет равна $2\pi r \approx 2\pi \cdot 1{,}27 \approx 7{,}9796452$ (*см*)). Окончательно имеем ($\approx 50{,}9796452$ *см*^{2}). Вычисления производятся с помощью калькулятора.

Вычислим по формуле $S_{\text{сф.}} = 4\pi r^2$ площадь сферы, полученной вращением полуокружности радиуса 2 *см* вокруг диаметра; эта площадь будет равна (≈ 50,265481 $см^2$).

Сравнивая два полученных результата, учащиеся приходят к предположению, суть которого и выражает первую теорему Паппа-Гульдена о площади поверхности тела вращения.

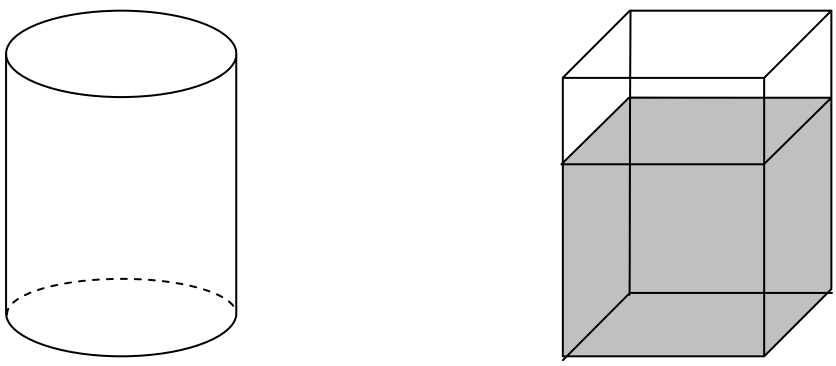
Аналогично следует поступить и для выдвижения гипотезы относительно нахождения объема тела вращения.

19) Для получения формул, позволяющих вычислить объемы тел вращения, можно использовать тела Архимеда: шар радиуса R; цилиндр с радиусом основания R и высотой $2R$; конус с радиусом основания R и высотой $2R$. Эти тела полые и могут быть изготовлены из оргстекла или из жести.

Опытным путем устанавливается, что цилиндр вмещает втрое больше воды, чем конус, и что пространство, остающееся в цилиндре свободным после помещения в нем шара, равновелико конусу. Отсюда следуют выводы: объем шара равен удвоенному объему конуса или $\frac{2}{3}$ объема цилиндра; $V_{шара} = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot 2R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

20) Для вычисления объема цилиндра в случае, если уже известна формула объема призмы, можно организовать такое учебное исследование.

Цилиндр заполняется водой, а затем эту воду переливают в параллелепипед (рис. 105).



а) б)

Рис. 105

Найдя площадь основания параллелепипеда и измерив его высоту, подсчитываем объем воды. Затем ученикам предлагается найти произведение площади основания цилиндра на его высоту, для чего первоначально производятся необходимые измерения и полученный результат сравнивается с предыдущим. На основании этого выдвигается предположение о том, что $V_{цил} = S_{осн} \cdot H$, а затем оно доказывается.

21) Для того, чтобы учащиеся сами установили, из какого треугольника можно свернуть треугольную пирамиду, а из какого нет, им предлагаются различные модели треугольников (остроугольные, тупоугольные и прямоугольные). Из предложенных моделей они пытаются опытным путем сконструировать треугольную пирамиду и тем самым убеждаются, что это возможно сделать лишь в случае остроугольного треугольника. Затем это гипотетическое предположение доказывается.

22) Известен факт, что любая пирамида имеет четное число ребер. К этому выводу можно подвести учащихся, организовав такое учебное исследование.

Учащимся класса раздаются такие наборы спиц, что среди них есть четное и нечетное число. Путем эксперимента, который заключается в том, что учащиеся пытаются смоделировать из этого набора пирамиду, они приходят к соответствующей гипотезе, которую они затем доказывают.

23) В известной книге *Штейнгауза Г.* Математический калейдоскоп (М., Наука, 1981 / Библиотечка «Квант», вып. 8) предложен следующий способ образования синусоиды: если свечу несколько раз обернуть листом бумаги, а затем перерезать ее наклонно острым ножом или бритвой и разнять обе половинки свечи и, наконец, развернуть бумагу, то в результате получится кривая, которая называется синусоидой.

Возникает вопрос:

– Почему получившаяся по краю бумаги кривая действительно является синусоидой?

Этот вопрос – прекрасная проблема для учебного исследования, для проведения которого понадобятся как сведения из курса алгебры, так и из курса геометрии.

Приведем решение этой проблемной задачи.

Прежде всего «переведем» эту практическую ситуацию на математический язык, т.е. построим математическую модель. Для этого возьмем лист бумаги, имеющий форму прямоугольника, и нарисуем на нем оси координат параллельно соответствующим сторонам (рис. 106).

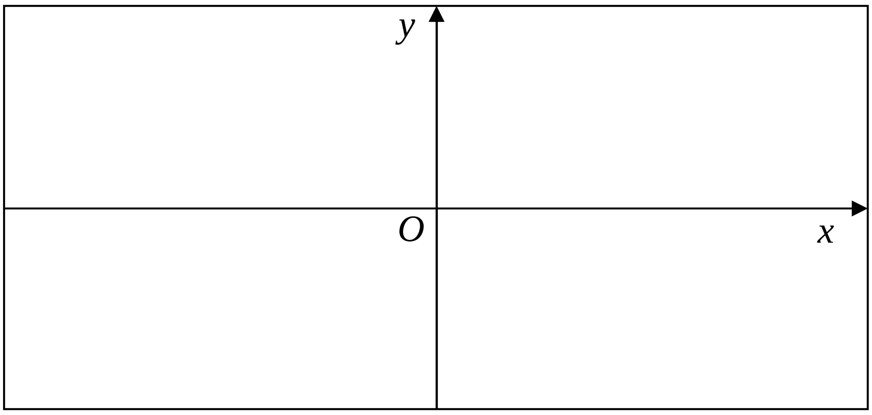


Рис. 106

Затем свернем этот прямоугольник в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox при этом свернется в окружность единичного радиуса, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 107).

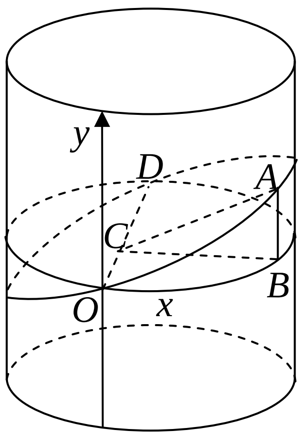


Рис. 107

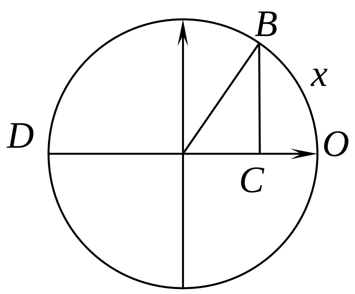


Рис. 108

Через диаметр полученной окружности OD проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол 45°. В этом случае в сечении получаем эллипс.

Возьмем на эллипсе какую-нибудь точку, например, точку A, и опустим из нее перпендикуляры на плоскость окружности и диаметр окружности OD. Получим соответственно точки B и C. Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = 45°$. Следовательно, $AB = BC$.

Заметим, что $BC = \sin x$, где x – длина дуги OB. Для этого достаточно обратиться к рис. 108 и вспомнить определение синуса. Таким образом, $AB = \sin x$. Теперь выполним обратную операцию – развернем цилиндр в прямоугольник. При этом получим кривую, для которой $AB = \sin x$, где $x = OB$, т.е. эта кривая является частью синусоиды (рис. 109).

Замечание. Учащимся, заинтересовавшимся этой задачей, можно предложить следующий вопрос:

– Выясните, какие кривые получатся, если сечение проводить не под углом $\alpha = 45°$, а под другими углами α?

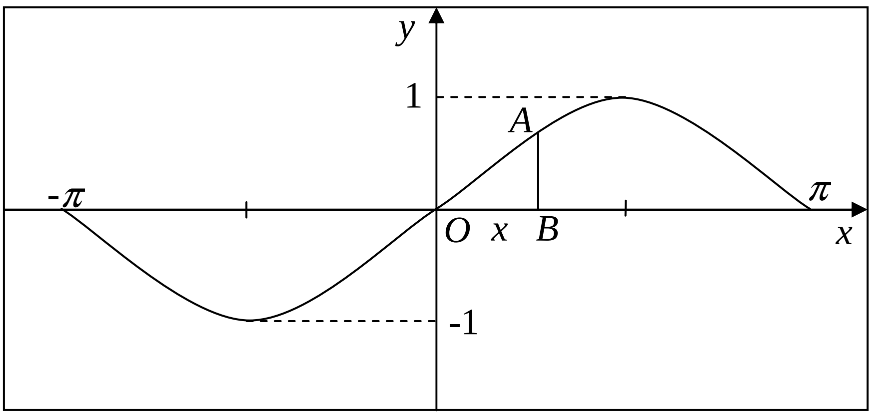


Рис. 109

Ответ. При этом будут получаться кривые, для которых $AB = k \cdot \mathrm{tg}\, x$, где $k = \mathrm{tg}\, \alpha$. Это следует из прямоугольного треугольника ABC (рис. 109), в котором теперь $\angle ABC = \alpha$ и $AB = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot BC$, причем если $0° < \alpha < 45°$, то $0 < \mathrm{tg}\, \alpha < 1$ и имеет место сжатие графика функции sin *x* по оси *Oy*. Например, если $\alpha = 30°$, то $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $AB = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x \approx 0{,}58\sin x$. Если 45° < α < 90°, то tg α > 1 и имеет место растяжение графика sin *x* по оси *Oy*. Например, при α = 60° имеем $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $AB = \sqrt{3}\sin x \approx 1{,}7\sin x$.

Если теперь исходный прямоугольник (рис. 106) свернуть в прямой круговой цилиндр не единичного, а некоторого другого радиуса *a* и произвести с этим цилиндром аналогичные операции, то в результате также получим синусоиду, но задаваемую формулой $y = a\sin\frac{x}{a}$. График этой кривой подобен графику *y* = sin *x* и получается из него сжатием или растяжением в *a* раз в направлении осей *Ox* и *Oy*.

24) По одну сторону круга (на его оси) помещен точечный источник света, а по другую сторону – плоский экран. Какой вид имеет очертание тени круга в зависимости от наклона экрана? (Ответ: окружность, эллипс, парабола, ветвь гиперболы).

25) Исследуйте и докажите следующие оптические свойства конических сечений:

а) лучи, исходящие из одного фокуса эллипса, зеркально отражаясь от эллипса, сходятся в его другом фокусе;

б) лучи, исходящие из одного фокуса гиперболы, зеркально отражаясь от гиперболы, расходятся по направлениям лучей, исходящих из другого фокуса;

в) лучи, исходящие из фокуса параболы, зеркально отражаясь от параболы, распространяются параллельно ее оси;

г) ответьте на вопрос: «Существуют ли другие кривые, обладающие такими же оптическими свойствами, какими обладают конические сечения (эллипс, парабола, гипербола)?»

Заметим, что ответ на последний вопрос – отрицательный и он содержится в такой теореме: «Отражение пучка лучей также в виде пучка лучей имеет место для конических и только для конических сечений, когда источник света помещен в одном из фокусов. При этом зеркально отраженные лучи образуют сходящийся, расходящийся или параллельный пучок, смотря по тому, является ли зеркало эллиптическим, гиперболическим или параболическим».

С оптикой конических сечений читатель может познакомиться, например, в книге А.Г. Дорфмана «Оптика конических сечений» [75].

26) Поставим перед учениками вопрос: «Один тетраэдр лежит внутри другого. Как вы думаете, может ли сумма его ребер оказаться больше, чем сумма ребер обрамляющего тетраэдра?»

Опыт подсказывает, что описанной ситуации не может быть, так как «в меньшем не может быть чего-нибудь большего». Но наш опыт обманывает нас.

Предложим учащимся для проведения учебного исследования такую задачу: «Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем $\frac{4}{3}$ суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$».

Заметим, что число $\frac{4}{3}$ в формулировке нашей задачи не может быть уменьшено. Для того чтобы понять это, достаточно рассмотреть правильную треугольную пирамиду $ABCD$ с очень большим в сравнении с ребром основания ABC боковым ребром и взять точки K и L где-нибудь на основании, а две другие точки M и N – где-то у вершины D.

Приведем решение этой проблемной задачи.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть KLM – грань тетраэдра $KLMN$, имеющая наибольший периметр среди всех граней этого тетраэдра. Спроектируем тетраэдр $ABCD$ на плоскость грани KLM. Проекции вершин тетраэдра обозначим соответственно A_1, B_1, C_1, D_1. Проекция всего тетраэдра $ABCD$ – это либо треугольник (и тогда одна из точек A_1, B_1, C_1 и D_1 лежит внутри треугольника, образованного остальными точками), либо выпуклый четырехугольник, ограниченный ломаной $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 110). Ломаную, ограничивающую проекцию тетраэдра $ABCD$, обозначим через Г (на рис. 110 она прорисована более жирными линиями). Ясно, что ΔKLM лежит внутри Г. Для любых четырех точек пространства E, F, G, H (они могут оказаться в одной плоскости, некоторые из них могут совпадать и т.п.) через P_{EFGH} обозначим величину $EF + FG + EG + EH + FH + GH$ и назовем ее *периметром* $EFGH$. Периметр треугольника KLM и длину ломаной Г обозначим P_{KLM} и P_{Γ} соответственно.

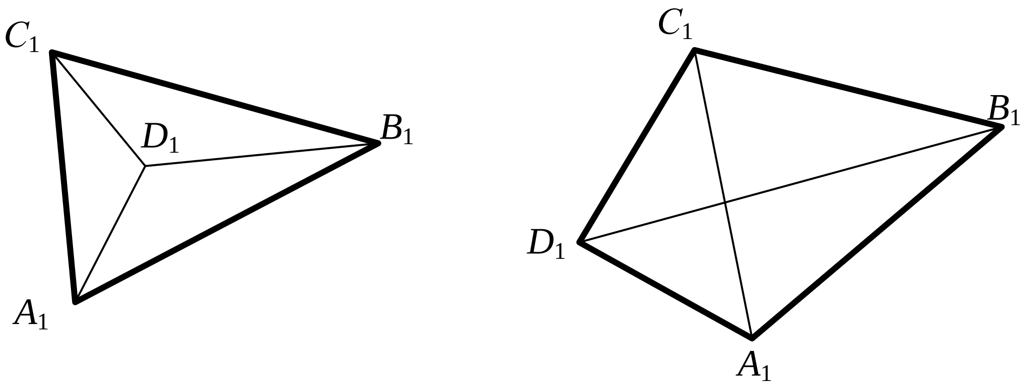


Рис. 110

Дальнейшее решение основано на четырех вспомогательных утверждениях, которые представляют интерес и сами по себе. Мы их сейчас здесь сформулируем, а задача читателя постараться их доказать.

1. Если грань KLM имеет периметр не меньший, чем периметр каждой из остальных трех граней тетраэдра $KLMN$, то

$$P_{KLMN} \le 2P_{KLM}. \tag{1}$$

2. Если треугольник $KLMN$ лежит внутри выпуклой ломаной Г, то

$$P_{KLM} \le P_{\Gamma}. \tag{2}$$

3. Если ломаная Г ограничивает проекцию на плоскость тетраэдра $ABCD$ и при этом A_1, B_1, C_1, D_1 – проекции вершин тетраэдра, то

$$P_{\Gamma} \le \frac{2}{3} P_{A_1B_1C_1D_1}. \tag{3}$$

4. Если $A_1B_1C_1D_1$ – проекции вершин тетраэдр $ABCD$ на некоторую плоскость, то

$$P_{A_1B_1C_1D_1} \le P_{ABCD}. \tag{4}$$

Из соотношений (1) – (4) решение основной задачи следует немедленно:

$$P_{KLMN} \overset{(1)}{\leq} 2P_{KLM} \overset{(2)}{\leq} 2P_{\Gamma} \overset{(3)}{\leq} 2\cdot\frac{2}{3}P_{A_1B_1C_1D_1} \overset{(4)}{\leq} \frac{4}{3}P_{ABCD},$$

что и требовалось доказать.

27) Учебное исследование целесообразно организовывать так, чтобы решение нескольких задач было бы затем основой решения более общей задачи. Проиллюстрируем сказанное на примерах:

а) перед тем, как решать задачу: «В пространстве задано n шаров, каждые четыре из которых пересекаются. Доказать, что все эти шары пересекаются, то есть существует точка, принадлежащая всем шарам», учащимся следует предложить для решения две такие задачи: «На прямой задано n отрезков, каждые два из которых пересекаются. Доказать, что все отрезки пересекаются, то есть, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам» и «На плоскости задано n кругов, каждые три из которых пересекаются. Доказать, что существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем этим кругам»;

Все эти три задачи решаются методом индукции. Решение первой мы приведем здесь.

1°. Для $n = 4$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любых n шаров, и пусть дано $(n+1)$ шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$. Обозначим через Φ пересечение n шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ (существующие в силу индуктивного предположения). Тогда можно показать, что если шар Φ_{n+1} не пересекается с Φ, то существует разделяющая их плоскость π. Фигуры, по которым каждый из шаров $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ пересекает плоскость π, являются кругами, любые три из которых пересекаются; следовательно, на плоскости π существует точка, принадлежащая всем этим кругам и, значит, принадлежащая Φ, что противоречит определению плоскости π.

б) ученикам для учебного исследования можно предложить решить последовательно такие три задачи:

Задача 1. Вся прямая покрыта каким-то конечным числом лучей. Доказать, что из них можно вырезать два луча, уже покрывающих всю прямую.

Задача 2. Вся плоскость покрыта каким-то конечным числом n полуплоскостей. Доказать, что из них можно выбрать две или три полуплоскости, уже покрывающие всю плоскость.

Задача 3. Пусть задано какое-то конечное число полупространств (это есть часть пространства, лежащая по одну сторону от некоторой плоскости), заполняющих все пространство. Доказать, что из них можно выбрать четыре (или меньше) полупространства, уже заполняющих все пространство.

Большое число подобных заданий читатель найдет в книге Л.И. Головиной, И.М. Яглома [56].

28) Учебное исследование может быть посвящено и поиску ошибки, специально включенной в доказательство или в решение задачи. Такое учебное исследование можно назвать «учебным расследованием». Приведем четыре примера такой работы.

а) «Докажем», что тело имеет такой же объем, как и его часть.

Равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 1$ вращается вокруг оси Ox. При этом получается двуполый гиперболоид вращения, вершины которого лежат на оси Ox по обе стороны от начала координат на расстоянии 1 от него (рис. 111).

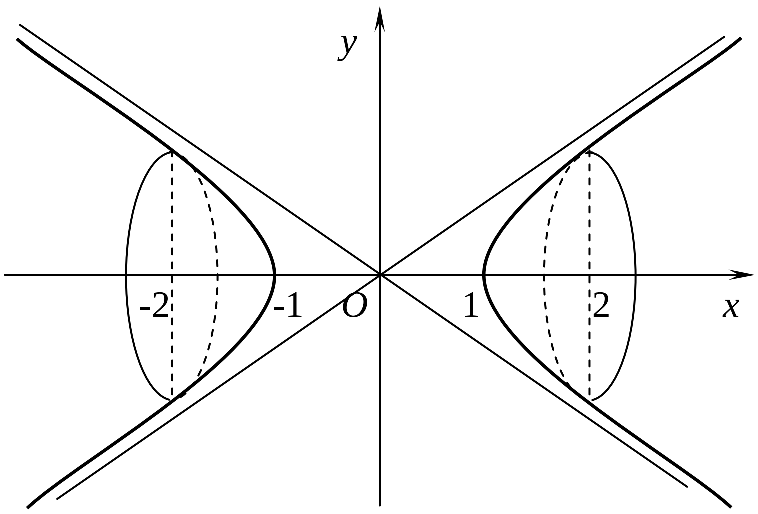


Рис. 111

Плоскости $x = \pm 2$ отсекают от обеих плоскостей гиперболоида некоторые тела. Вычислим их объемы. В силу соображений симметрии обе полученные части гиперболоида равновелики.

Вычислим сначала объем тела, отсекаемого плоскостью от одной полости гиперболоида. Для этого вычислим интеграл от $x = 1$ до $x = 2$.

$$V_1 = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Bigg|_1^2 = \frac{4}{3}\pi .$$

Вычислим теперь объем обеих частей гиперболоида, полученных при пересечении его плоскостями $x = \pm 2$. Для этого вычислим интеграл от $x = -2$ до $x = +2$:

$$V_2 = \pi \int_{-2}^{2} y^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^2 - 1\right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Bigg|_{-2}^{2} = \frac{4}{3}\pi .$$

Получаем, что обе части гиперболоида имеют тот же объем, что и одна его часть.

Проведенное «расследование» должно выявить допущенную ошибку. Она состоит в следующем: при интегрировании следует учитывать, что квадрат функции может иметь действительную величину, в то время как функция принимает мнимые значения;

б) Спросим учащихся: «Может ли фигура с бесконечной площадью дать при вращении тело с конечным объемом?» Поверьте, они ответят, что такое невозможно. Попытаемся разубедить их на таком примере.

Рассмотрим фигуру, ограниченную гиперболой $y = \dfrac{1}{x}$, осью Ox и прямой $x = 1$, $x \geq 1$, которая вращается вокруг оси Ox (рис. 112).

Площадь заштрихованной фигуры мы вычислим с помощью интеграла $S=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{1}^{x}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\Big|_1^x=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-\ln 1)=+\infty$. Итак, площадь этой фигуры бесконечна.

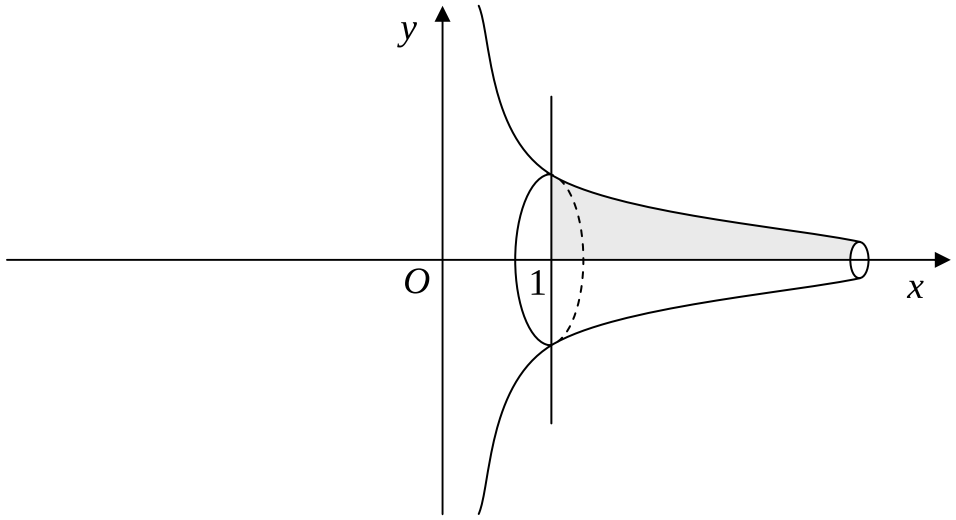


Рис. 112

Вычислим объем тела, полученного вращением этой фигуры с бесконечной площадью вокруг оси Ox.

$$V=\int\limits_{1}^{+\infty}\pi y^2dx=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\pi dx}{x^2}=\pi\lim_{x\to+\infty}\int\limits_{1}^{x}\frac{\pi dx}{x^2}=\pi\lim_{x\to+\infty}\int\limits_{1}^{x}x^{-2}dx=$$

$$=\pi\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^x\right)=\pi\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+1\right)=\pi(0+1)=\pi.$$

Итак, объем этого тела конечен. Более того, мы получили, что осевое сечение тела конечного объема имеет бесконечную площадь.

«Расследование» должно показать учащимся, что «наглядность», «жизненный стереотип» иногда приводят к ошибке, а выручить может лишь «здравый смысл».

Небезынтересным будет заметить, что фигуры бесконечной протяженности могут иметь конечную площадь (в отличие от рассмотренного выше случая).

Приложим к квадрату со стороной, равной 1, прямоугольник с основанием 1 и высотой $\frac{1}{2}$ (рис. 113). Затем приложим прямоугольник с основанием 1 и высотой $\frac{1}{4}$ и т.д., как это показано на рисунке.

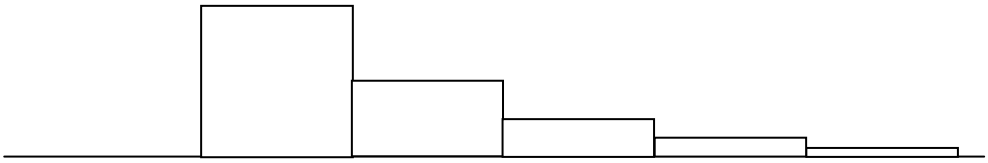


Рис. 113

Эта ступенчатая фигура имеет площадь $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ Но, как мы видим, это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и со знаменателем $\frac{1}{2}$. По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ имеем $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$;

в) Для проведения учебного исследования, которое также приведет учащихся к выводу о том, что наглядность порой не самый лучший помощник, можно использовать такую задачу: «Дан конус (рис. 114), в котором проведем осевое сечение *SAB*. Размеры конуса таковы: образующая *AS* = 8 *см*, диаметр *AB* = 4 *см*».

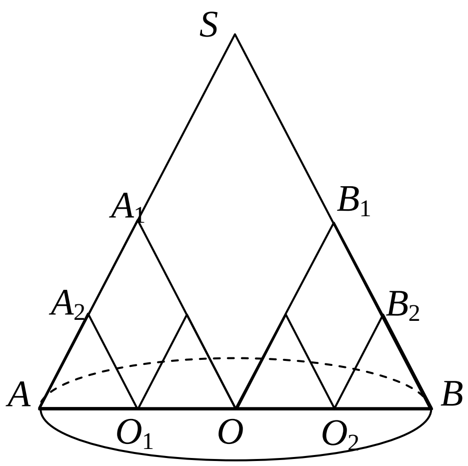


Рис. 114

В ΔASB берут середины сторон и соединяют их отрезками. В образовавшихся двух треугольниках также берут середины сторон и соединяют их отрезками, и так продолжают до бесконечности. Спрашивается: «К чему стремится длина получаемой ломаной (ASB; AA_1OB_1B; $AA_2O_1C_1OD_1O_2B_2B$ и т.д.)?»

Наглядность настойчиво «толкает» нас к ответу: длина ломаной стремится к длине диаметра AB, то есть к 4 *см*. Здравый смысл, который основан на знании геометрических закономерностей, должен привести нас к такому ответу: длина ломаной остается постоянной, и она остается равна 16 *см*.

Действительно, A_1O и OB_1 – это средние линии ΔASB, а значит, $A_1O = OB_1 = 4$ *см*, следовательно, длина ломаной AA_1OB_1B равна 16 *см*. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенному;

г) Задача: «Вписать в шар радиуса r конус с наибольшей поверхностью S».

Экваториальное плоскостное сечение этой конфигурации будет таким (рис. 115).

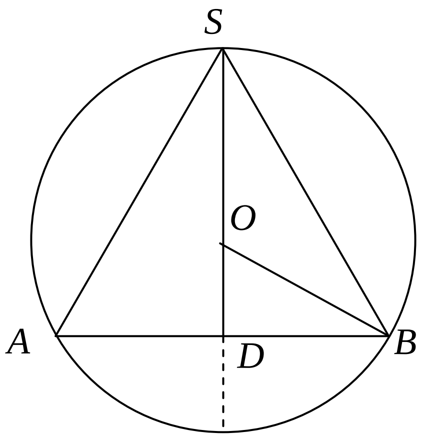


Рис. 115

Имеем $OS = r$, $SD = h$, $SB = l$, $DB = k$.

Полная поверхность конуса будет равна $S = \pi k^2 + \pi kl$. Из ΔDOB имеем $DB^2 = k^2 = r^2 - (h - r)^2 = h(2r - h)$, $k = \sqrt{h(2r - h)}$.

Из ΔSDB имеем $SB^2 = l^2 = h^2 + \left(2rh - h^2\right) = 2rh$, $l = \sqrt{2rh}$.

Тогда $S = \pi h(2r - h) + \pi\sqrt{h(2r - h)} \cdot \sqrt{2rh} = \pi h(2r - h) + \pi\sqrt{2rh^2(2r - h)}$.

Выбирая высоту h за неизвестную переменную величину x, имеем:

$$f(x) = \frac{S}{\pi} = x(2r - x) + \sqrt{2rx^2(2r - x)},$$

причем заметим, что $0 < x < 2r$.

Найдем критические точки полученной функции, для чего найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = 2r - 2x + \frac{4r^2x - 3rx^2}{\sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3}}.$$

Приравнивая производную к нулю, получаем:

$$(2r - 2x)\sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3} = 3rx^2 - 4r^2x.$$

Так как $x = 0$ не удовлетворяет условию задачи, то разделим обе части последнего равенства на x. Имеем после возведения в квадрат обеих частей равенства:

$$4(x - r)^2(4r^2 - 2rx) = (4r^2 - 3rx)^2.$$

Упрощая это уравнение, получим:

$$8x^2 - 23rx + 16r^2 = 0.$$

Следовательно, $x_{1,2} = \dfrac{23 \pm \sqrt{17}}{16}r$; или $x_1 \approx 1{,}7r$; $x_2 \approx 1{,}2r$.

Обратим внимание на то, что оба полученных корня принадлежат промежутку $(0;\ 2r)$, а значит, оба они являются для функции $y = f(x)$ критическими.

При переходе через каждую из этих точек первая производная функции $y = f(x)$ меняет свой знак с «+» на «–», а значит, в этих точках функция $y = f(x)$ имеет максимум.

Таким образом, мы получили, что на вопрос задачи есть два различных ответа, но это не так.

Из графика функции $y = f(x)$ легко установить, что только точка $x = \dfrac{23 - \sqrt{17}}{16}r \approx 1{,}2r$ является точкой максимума.

Точка $x = \frac{23+\sqrt{17}}{16} r \approx 1{,}7r$ является посторонним корнем, который получился при возведении в квадрат уравнения, полученного путем приравнивания к нулю первой производной. Итак, если при определении точки экстремума получается иррациональное уравнение, то надо быть особенно внимательным.

29) Подобное учебное «расследование» по обнаружению умышленно допущенной ошибки можно провести и по случаю «неаккуратного» обращения с единицами измерений. Рассмотрим три примера:

а) $\frac{1}{4}\ \text{руб} = 25\ \text{коп};$

$\sqrt{\frac{1}{4}\ \text{руб}} = \sqrt{25\ \text{коп}};$

$\frac{1}{2}\ \text{руб} = 5\ \text{коп};$

$50\ \text{коп} = 5\ \text{коп};$

б) $2500\ \text{коп} = 25\ \text{руб};$

$50\ \text{коп} \cdot 50\ \text{коп} = 25\ \text{руб};$

$\sqrt{50\ \text{коп} \cdot 50\ \text{коп}} = \sqrt{25\ \text{руб}};$

$50\ \text{коп} = 5\ \text{руб};$

в) $2\ \text{руб} = 200\ \text{коп};$

$0{,}25\ \text{руб} = 25\ \text{коп};$

Перемножив равенства почленно, получим:

$0{,}5\ \text{руб} = 5000\ \text{коп};$

$50\ \text{коп} = 5000\ \text{коп};$

г) $125000000\ \text{см}^3 = 125\ \text{м}^3;$

$500\ \text{см}^3 \cdot 500\ \text{см}^3 \cdot 500\ \text{см}^3 = 125\ \text{м}^3;$

$\frac{500}{1000}\ \text{м}^3 \cdot \frac{500}{1000}\ \text{м}^3 \cdot \frac{500}{1000}\ \text{м}^3 = 125\ \text{м}^3;$

$\frac{1}{20}\ \text{м}^3 \cdot \frac{1}{20}\ \text{м}^3 \cdot \frac{1}{20}\ \text{м}^3 = 125\ \text{м}^3;$

$$\sqrt{\frac{1}{20}\ м^3 \cdot \frac{1}{20}\ м^3 \cdot \frac{1}{20}\ м^3} = \sqrt{125\ м^3};$$

$$\frac{1}{20}\ м^3 = 5\ м^3;$$

Вывод во всех трех случаях один и тот же: над именованными числами нельзя выполнять те же операции, которые мы выполняем над обычными числами.

В связи с приведенным примером, как и для ряда других, уместно привести слова Д. Пойа: «Обучение – ремесло, использующее бесчисленное количество маленьких трюков».

30) Как было замечено выше, учебное исследование может быть направлено на построение учащимися контрпримеров. Наибольший эффект контрпримеров достигается в том случае, когда формулируются два утверждения, в которых условие и заключение переставлены местами, причем больший эффект достигается в том случае, если истинность утверждения неизвестна учащемуся.

Исследование психологических основ деятельности учащихся при построении контрпримеров показывает, что их деятельность проходит пять фаз творческого решения: фаза выдвижения гипотезы; фаза сбора материала, накопления знаний; фаза инкубации, созревания; фаза озарения, инсайта; фаза доказательства справедливости построенного контрпримера.

Рассмотрим задачи, приводящие к неизвестным ранее контрпримерам из стереометрии:

а) основанием пирамиды является правильный треугольник, а боковые грани – равнобедренные треугольники. Является ли пирамида правильной?

б) основанием пирамиды является квадрат. Боковые грани пирамиды – равнобедренные треугольники. Является ли пирамида правильной?

в) основанием пирамиды является правильный треугольник. Углы при вершине пирамиды равны. Является ли пирамида правильной?

31) В V классе, там, где изучается прямоугольный параллелепипед, целесообразно организовать учебное исследование по решению такой задачи: «Вместимость открытого прямоугольного ящика с квадратным основанием равна 1 000 $см^3$. Каковы ребра того ящика, у которого площадь внутренней поверхности наименьшая?» Заметим, что толщиной стенок ящика можно пренебречь, или вести разговор о внутренних размерах ящика.

Таблица 22

Длина стороны основания	*Длина высоты*	*Площадь всей поверхности*	*Длина стороны основания*	*Длина высоты*	*Площадь всей поверхности*
1	1000	4001	11	$8\frac{32}{121}$	$484\frac{7}{11}$
2	250	2004	12	$6\frac{17}{18}$	$477\frac{1}{3}$
3	$111\frac{1}{9}$	$1342\frac{1}{3}$	13	$5\frac{155}{169}$	$476\frac{9}{13}$
4	$62\frac{1}{2}$	1016	14	$5\frac{5}{49}$	$481\frac{5}{7}$
5	40	825	15	$4\frac{4}{9}$	$491\frac{2}{3}$
6	$27\frac{7}{9}$	$702\frac{2}{3}$	16	$3\frac{29}{32}$	506
7	$20\frac{20}{49}$	$620\frac{3}{7}$	17	$3\frac{133}{289}$	$524\frac{5}{17}$
8	$15\frac{5}{8}$	564	18	$3\frac{7}{81}$	$546\frac{2}{9}$
9	$12\frac{28}{81}$	$525\frac{4}{9}$	19	$2\frac{278}{361}$	$571\frac{10}{19}$
10	10	500	20	$2\frac{1}{2}$	600

Необходимые для решения вычисления целесообразно организовать так, чтобы каждому ученику класса (или группам учащихся) предложить различные размеры сторон основания, а они, проводя вычисления, должны заполнить таблицу (таблица 22).

В результате анализа полученных данных учащиеся должны прийти к выводу, что существует несколько таких открытых прямоугольных ящиков, у которых площадь поверхности меньше 500 *см*^{2}. Из таблицы 22 видно, что площадь поверхности с возрастанием стороны основания сначала убывает, а потом возрастает. Из рассмотренных в таблице ящиков наименьшую площадь поверхности имеет ящик, у которого сторона основания 13 *см*.

Может быть, существует открытый прямоугольный ящик с квадратным основание и вместимостью 1000 *см*^{3}, имеющий еще меньшую площадь поверхности?

Если такой ящик существует, то, по-видимому, сторона его основания либо больше 12 *см* и меньше 13 *см*, либо больше 13 *см* и меньше 14 *см*.

Вычисления показывают, что при стороне основания в 125 *мм* площадь поверхности 47 625 *мм*^{2}, а при стороне в 13 *см* площадь поверхности $476\frac{9}{13}$ *см*^{2}, или $47\,699\frac{3}{13}$ *мм*^{2}. Значит, при стороне основания в 125 *мм* площадь поверхности оказалась еще меньше.

Вычисляем площадь поверхности при сторонах основания в 124 *мм* и в 126 *мм*. При стороне основания в 124 *мм* площадь поверхности больше, чем при 125 *мм*, а при 126 *мм* – меньше, чем при 125 *мм*. При стороне основания в 127 *мм* площадь поверхности снова больше, чем при 126 *мм* (см. таблицу 23).

Таблица 23

Длина стороны основания (мм)	*Длина высоты (мм)*	*Площадь всей поверхности (кв. мм)*
125	64	47 625
124	$65\frac{35}{961}$	$47\,634\frac{2}{31}$
126	$62\frac{3\,922}{3\,639}$	$47\,622\frac{2}{33}$
127	$62\frac{2}{16\,129}$	$47\,625\frac{8}{127}$

Таким образом, из рассмотренных ящиков наименьшую площадь поверхности имеет ящик, у которого сторона основания 126 *мм*. Высота этого ящика почти 63 *мм*, т.е. почти вдвое меньше стороны основания.

Итак, вычисления подсказывают, что из всех открытых прямоугольных ящиков с квадратным основанием и с вместимостью в 1 000 $см^3$ наименьшую площадь поверхности имеет тот, у которого высота вдвое меньше стороны основания. Учащимся при этом сообщается, что доказательство найденных опытным путем утверждений они сумеют дать в старших классах, приобретя необходимые знания из школьного курса математики.

В IX классе, там, где изучается степень с рациональным показателем, к описанной выше проблеме можно вернуться, но уже на более высоком уровне. Покажем, как это может быть сделано.

Итак, опытным путем было найдено, что из всех открытых прямоугольных ящиков с квадратным основанием и с вместимостью в 1 000 $см^3$ наименьшую площадь всей поверхности имеет тот, у которого внутренняя высота вдвое меньше внутренней стороны основания. Найдем внутренние ребра такого ящика и проверим, действительно ли он имеет наименьшую площадь поверхности.

Обозначим длину стороны основания такого ящика буквой x. В этом случае площадь основания равна x^2, длина высоты $\frac{x}{2}$, вместимость $x^2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^3}{2}$. Так как вместимость ящика равна 1, то число x должно быть таким, чтобы $\frac{x^3}{2} = 1$, или $x^3 = 2$.

Получаем, что уравнение $x^3 = 2$ имеет действительный корень, равный $\sqrt[3]{2}$.

У рассматриваемого ящика длина внутренней стороны основания равна $\sqrt[3]{2}$, а длина внутренней высоты $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. Площадь внутренней поверхности этого ящика $S = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \cdot 4 = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$.

Проверим, действительно ли этот ящик имеет наименьшую площадь внутренней поверхности.

Для этого надо сравнить $3\sqrt[3]{4}$ с площадью внутренней поверхности любого открытого прямоугольного ящика с квадратным основанием и вместимостью 1 000 $см^3$, у которого длина основания больше или меньше $\sqrt[3]{2}$.

Если длина внутреннего основания одного из таких ящиков равна $\sqrt[3]{2} + k$, где $k > 0$, то площадь всей его внутренней поверхности равна $\frac{\left(\sqrt[3]{2} + k\right)^3 + 4}{\sqrt[3]{2} + k}$.

Если длина внутреннего основания одного из таких ящиков равна $\sqrt[3]{2} - k$, где $0 < k < \sqrt[3]{2}$, то площадь всей его внутренней поверхности равна $\frac{\left(\sqrt[3]{2} - k\right)^3 + 4}{\sqrt[3]{2} - k}$.

Обозначенные числа надо сравнить с числом $3\sqrt[3]{4}$.

Два сравниваемые числа могут находиться в одном из трех возможных соотношений: либо первое число равно второму, либо первое число больше второго, либо первое число меньше второго.

Обозначим неизвестное нам пока соотношение между сравниваемыми числами знаком $\wedge$.

$\frac{\left(\sqrt[3]{2} + k\right)^3 + 4}{\sqrt[3]{2} + k} \wedge 3\sqrt[3]{4}$	$\frac{\left(\sqrt[3]{2} - k\right)^3 + 4}{\sqrt[3]{2} - k} \wedge 3\sqrt[3]{4}$

Каково бы ни было соотношение между сравниваемыми числами, такое же соотношение останется и между произведениями, которые получатся, если сравниваемые числа умножить на знаменатель первого из них.

$$\left(\sqrt[3]{2}+k\right)^3+4 \wedge 3\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{2}+k\right) \quad\Bigg|\quad \left(\sqrt[3]{2}-k\right)^3+4 \wedge 3\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{2}-k\right)$$

Соотношения между полученными произведениями не изменятся, если их заменить соответственно равными им числами, выполнив тождественные преобразования.

$$\begin{array}{c|c} 2+3k\sqrt[3]{4}+3k^2\sqrt[3]{2}+k^3+4 \wedge 6+3k\sqrt[3]{4}, & 2-3k\sqrt[3]{4}+3k^2\sqrt[3]{2}-k^3+4 \wedge 6-3k\sqrt[3]{4}, \\ \left(6+3k\sqrt[3]{4}\right)+k^2\left(3\sqrt[3]{2}+k\right) \wedge 6+3k\sqrt[3]{4}; & \left(6-3k\sqrt[3]{4}\right)+k^2\left(3\sqrt[3]{2}-k\right) \wedge 6-3k\sqrt[3]{4}. \end{array}$$

В полученных соотношениях левые числа больше правых чисел при любых допустимых значениях числа k. Знак $\wedge$, как знак неизвестного соотношения, надо заменить знаком «больше» (>).

$$\left(6+3k\sqrt[3]{4}\right)+k^2\left(3\sqrt[3]{2}+k\right) > 6+3k\sqrt[3]{4}; \quad\Big|\quad \left(6-3k\sqrt[3]{4}\right)+k^2\left(3\sqrt[3]{2}-k\right) > 6-3k\sqrt[3]{4}.$$

Переходя от полученного неравенства последовательно к предыдущим соотношениям, можно установить, что при любых допустимых значениях числа k

$$\frac{\left(\sqrt[3]{2}+k\right)^3+4}{\sqrt[3]{2}+k} > 3\sqrt[3]{4}; \quad\Bigg|\quad \frac{\left(\sqrt[3]{2}-k\right)^3+4}{\sqrt[3]{2}-k} > 3\sqrt[3]{4}.$$

Таким образом, по идее доказана теорема: Из множества всех открытых прямоугольных ящиков с квадратным основанием и с вместимостью 1 000 $см^3$ наименьшую площадь внутренней поверхности имеет ящик, у которого внутренняя высота вдвое меньше внутренней стороны основания.

К исследованию поставленной выше проблемы можно подойти и с позиций решения неравенств. Покажем это.

Площадь поверхности каждого из возможных ящиков в зависимости от длины стороны основания x выражается формулой:

$$S = \frac{x^3 + 4}{x}.$$

Требуется найти такое значение x, при котором численное значение функции $S = \frac{x^3 + 4}{x}$ было бы наименьшим. Обозначим искомое значение x буквой a. Наименьшее значение указанной функции будет $S_1 = \frac{a^3 + 4}{a}$. Если вместо a взять какое-нибудь значение x, большее или меньшее a на любое сколь угодно малое число k, то получим соответствующие значения указанной функции:

$$S_2 = \frac{(a+k)^3 + 4}{a+k} \text{ и } S_3 = \frac{(a-k)^3 + 4}{a-k},$$

где $a > k > 0$.

Задача теперь сводится к тому, чтобы найти такое число a, чтобы каждое из чисел S_2 и S_3 было бы больше S_1 при любом сколь угодно малом числе k.

Для этого надо решить два неравенства:

$$\frac{(a+k)^3 + 4}{a+k} > \frac{a^3 + 4}{a}, \quad (1)$$

$$\left((a+k)^3 + 4\right) \cdot a > \left(a^3 + 4\right) \cdot (a+k),$$

$$a^4 + 3a^3k + 3a^2r^2 + ak^3 + 4a > a^4 +$$

$$+ a^3k + 4a + 4k,$$

$$2a^3k + 3a^2k^2 + ak^3 > 4k,$$

$$2a^3 + 3a^2k + ak^2 > 4,$$

$$2a^3 + ak(3a+k) > 4. \quad (3)$$

Для того, чтобы неравенство (3) было справедливо при любых сколь угодно малых значениях k,

$$\frac{(a-k)^3 + 4}{a-k} > \frac{a^3 + 4}{a}, \quad (2)$$

$$\left((a-k)^3 + 4\right) \cdot a > \left(a^3 + 4\right) \cdot (a-k),$$

$$a^4 - 3a^3k + 3a^2r^2 - ak^3 + 4a > a^4 -$$

$$- a^3k + 4a - 4k,$$

$$-2a^3k + 3a^2k^2 - ak^3 > -4k,$$

$$2a^3 - 3a^2k + ak^2 < 4,$$

$$2a^3 - ak(3a-k) < 4. \quad (4)$$

Для того, чтобы неравенство (4) было справедливо при любых сколь угодно малых значениях k,

первое слагаемое $2a^3$ должно быть больше или равно 4. $$2a^3 \geq 4$$ $$a^3 \geq 2$$ $$a \geq \sqrt[3]{2}.$$ То значение *a*, которое удовлетворяет неравенству (1) при любых сколь угодно малых значениях *k*, должно быть больше или равно $\sqrt[3]{2}$.	уменьшаемое $2a^3$ должно быть меньше или равно 4. $$2a^3 \leq 4$$ $$a^3 \leq 2$$ $$a \leq \sqrt[3]{2}.$$ То значение *a*, которое удовлетворяет неравенству (2) при любых сколь угодно малых значениях *k*, должно быть меньше или равно $\sqrt[3]{2}$.

То значение *a*, которое удовлетворяет одновременно обоим неравенствам (1) и (2) при любых сколь угодно малых значениях *k*, должно равняться $\sqrt[3]{2}$; $a = \sqrt[3]{2}$.

Длина внутренней высоты *h* каждого из указанных ящиков находится из уравнения $x^2 h = 1$. $h = \dfrac{1}{x^2}$.

Если $x = \sqrt[3]{2}$, то $h = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$. Следовательно, $h = \dfrac{a}{2}$.

В старших классах, там, где изучается производная функции, к исследуемой проблеме можно опять вернуться, для чего надо найти для функции $S = x^2 + \dfrac{4}{x}$ минимум, который будет являться и ее наименьшим значением.

32) Докажите теорему: Для того чтобы можно было вписать шар в выпуклый четырехгранный угол, необходимо и достаточно, чтобы сумма двух противоположных плоских углов при вершине четырехгранного угла была бы равна сумме двух других плоских углов при его вершине.

I. Доказательство необходимости. Пусть в выпуклый четырехгранный угол *SABCD* (рис. 116) вписан шар с центром в точке *O*. *OM* и *ON* – радиусы, проведенные в точки касания шара с гранями *SAD* и

SDC. Тогда плоскость *MONP* $\perp$ *SD*. Треугольники *MSP* и *PSN* равны, поэтому $\angle MSP = \angle PSN$. Аналогично доказывается равенство остальных пар углов между касательными к шару, проведенными из вершины четырехгранного угла, и его ребрами, откуда получаем:

$$\angle ASD + \angle BSC = \angle ASB + \angle DSC,$$

что и требовалось доказать.

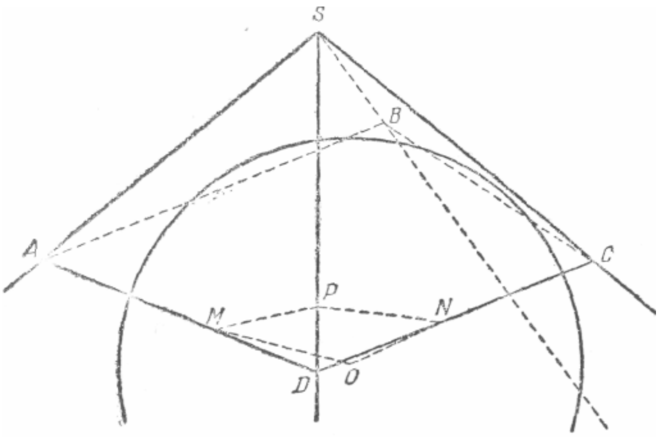


Рис. 116

II. Доказательство достаточности. Пусть в четырехгранном угле *SABCD* (рис. 117) имеет место соотношение:

$$\angle ASB + \angle DSC = \angle ASD + \angle BSC.$$

При этом могут представиться два случая, от которых остальные отличаются лишь обозначениями:

а) Угол *ASD* равен углу *DSC*; тогда, в силу условия, угол *ASB* должен быть равен углу *BSC*.

б) Угол *ASD* больше угла *DSC*.

Рассмотрим первый случай. Отложим от вершины четырехгранного угла *S* на его ребрах равные отрезки *SQ*, *SM*, *SN* и построим плоскость *QMNP*, пересекающую ребро *SD* в точке *P*. Очевидно, что $\Delta QSP = \Delta PSN$ и $\Delta QSM = \Delta MSN$, поэтому четырехугольник – ромбоид (или ромб, если угол *ASB* равен углу *DSC*). Биссекторные плоскости двугранных углов *SB* и *SD* совпадают с плоскостью *MSP*, а биссекторные плоскости двугранных углов *SA* и *SC* пересекаются по прямой, лежащей в плоскости *MSP*, т.е. все четыре биссекторные плоскости двугранных углов четырехгранного угла пересекаются по одной прямой. Этим самым теорема в первом случае доказана.

Рассмотрим второй случай. Если угол *ASD* больше утла *DSC* (рис. 117), то можно построить в грани *ASD* угол *KSD*, равный углу *DSC*. В силу условия теоремы угол *ASB* должен быть больше угла *BSC*, поэтому можно в плоскости грани *ASB* построить угол *LSB*, равный углу *BSC*, и тогда углы *ASL* и *ASK* должны быть равны.

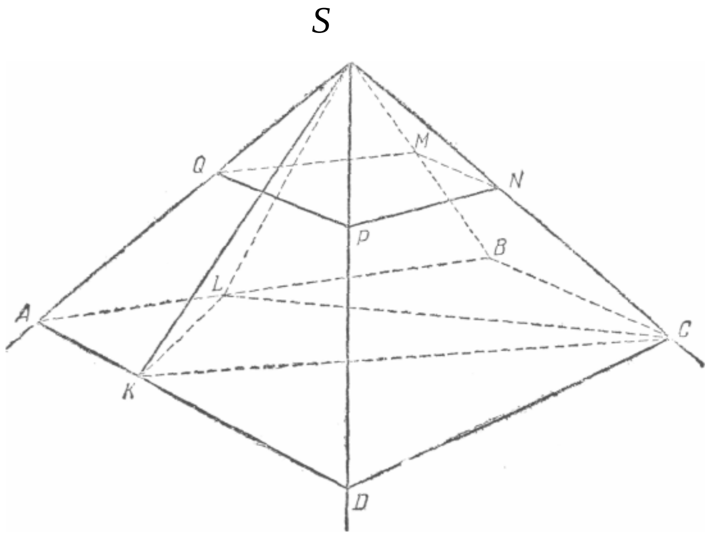


Рис. 117

Известно, что если в трехгранном угле два плоских угла равны, то биссекторная плоскость двугранного угла, составленного равными плоскими углами, пересекает плоскость третьего плоского угла по его биссектрисе и перпендикулярна к плоскости этого угла. Будем считать, что отрезки *SC*, *SZ* и *SK* равны (они могут быть построены с соблюдением этого условия).

Тогда по отношению к треугольнику *KLC* биссекторные плоскости двугранных углов *SA*, *SB* и *SD* оказываются плоскостями симметрии сторон треугольника.

Но три плоскости симметрии сторон треугольника пересекаются по одной прямой (эта прямая является геометрическим местом точек, равноудаленных от всех вершин треугольника). Таким образом, три биссекторные плоскости двугранных углов четырехгранного угла пересекаются по одной прямой, значит, и четвертая биссекторная плоскость пройдет через эту прямую, служащую геометрическим местом точек, равноудаленных от всех четырех граней. Этим самым теорема доказана.

33) Решим следующую задачу.

Задание 1. Найти расстояние от точки D_1 до плоскости AMC (рис. 118).

Решение

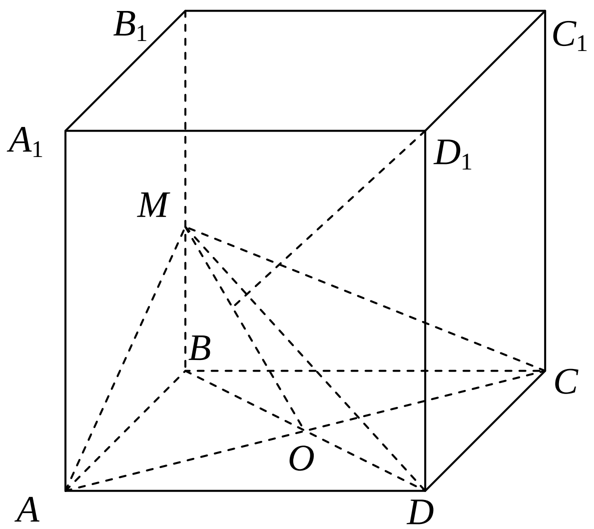


Рис. 118

Построим вспомогательное сечение BB_1D_1D и вынесем его на отдельный рисунок (рис. 119).

Плоскость AMC и BB_1D_1 перпендикулярны, так как плоскость AMC содержит прямую AC, перпендикулярную плоскости BB_1D_1. Искомое расстояние есть расстояние от D_1 до прямой OM.

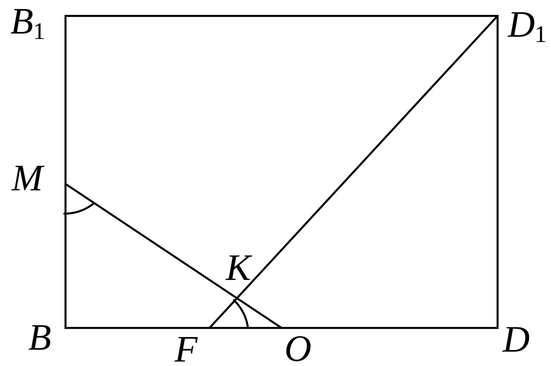


Рис. 119

Угол M равен углу F (углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и ΔMBO подобен ΔFD_1D (по двум углам). Тогда $\dfrac{BO}{MB} = \dfrac{DD_1}{DF}$, откуда следует $\frac{a\sqrt{2}\cdot a}{2\cdot a}=\frac{a}{DF}$, $DF=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, то есть точки K и F совпадают с точкой O.

Тогда $DF_1=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Эта задача может быть заменена заданиями исследовательского характера:

Задание 1А. Как будет изменяться расстояние от точки D_1 до плоскости AMC, если точка M движется по ребру BB_1?

Задание 1Б. Найти угол наклона диагонали AD_1 к плоскости AMC. Исследуйте зависимость величины угла от положения точки M на ребре BB_1.

Задание 1В. Через диагональ АС куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точку M ребра BB_1 проведено сечение. Найти минимальную проекцию диагонали AD_1 на плоскость AMC.

Для организации поисково-исследовательской работы учащихся можно использовать и следующие задания по различным темам курса стереометрии.

Аксиомы стереометрии.

1. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью проходящей через вершины A, C и точку M, которая движется по ребру BB_1. Оцените, например, периметр и площадь полученного сечения.

Расстояния в пространстве, отношение длин отрезков.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка P движется по ребру B_1C_1. Через точки A, C, и P проведено сечение. Найдите точку пересечения плоскости ACP и диагонали DB_1. Оцените отношение, в котором точка пересечения делит диагональ DB_1.

3. В тетраэдре $DABC$ основанием является правильный треугольник ABC со стороной a. Точка E – середина ребра DB, точка M движется по отрезку BE. Точка P – середина ребра AD. Прямая PM пере-

секает плоскость основания ABC в точке O. Оцените длину отрезка AO в зависимости положения точки M.

Взаимное расположение двух прямых.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра имеют длину l. В кубе проходит ломаная из четырех звеньев. Первое звено ломаной – отрезок KL, K – середина AB, $KL \perp AC$. Второе звено ломаной – отрезок LM, $LM \parallel AK$. Третье звено ломаной соединяет точку M с вершиной B_1. Четвертое звено ломаной лежит на прямой, пересекающей прямые B_1C и AK. Все вершины ломаной лежат на поверхности куба.

а) Построить все такие ломаные.

б) Найти наибольшую длину такой ломаной.

Расстояния, длины отрезков.

5. Ребро куба равно a. Плоскости ACB_1 и A_1C_1B пересекаются по некоторой прямой. Определить длину отрезка, расположенного внутри куба. В каких границах изменяется длина общего отрезка сечений куба плоскостями ACB_1 и A_1C_1B, если точка B движется по ребру B_1C_1.

Перпендикулярность прямой и плоскости.

6. На прямой, содержащей ребро BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (длина BB_1 равна 1), движется в одном направлении отрезок PK длины 1. Может ли при некотором положении расстояние между B и P равняться расстоянию между точками B_1 и K.

7. $MABC$ – прямоугольный тетраэдр с вершиной M (прямые углы при вершине M). По ребру BC от точки B к точке C движется точка K. При каком условии $AK = MA$? В каких границах находится периметр треугольника AKM, если $MA = MB = MC = 1$?

8. $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида. Через ребро SC проводятся всевозможные сечения. При каком положении секущей плоскости расстояние от вершины A до секущей плоскости будет наименьшим?

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через точку B_1 параллельно AC проведено сечение. Определите вид сечения, если оно проходит через точку

K, которая движется по ребру AA_1. Оцените площадь сечения, в зависимости от положения точки K, если ребро куба равно a.

Теорема о трех перпендикулярах.

10. В основании четырехугольной пирамиды $MABCD$ лежит ромб, MK – высота пирамиды. Точка P движется по ребру MC. При каком положении точки P диагональ основания BD перпендикулярна OP (O – точка пересечения диагоналей основания).

Двугранный угол.

11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ по ребру AA_1 и BB_1 движутся точки M и K соответственно (от точки A к A_1 и от B_1 до B). Как меняется угол между плоскостями ACK и BCM?

В заключение этого параграфа заметим, что от учителя, для организации со школьниками эвристического поиска решения учебной проблемы или математической задачи, требуются такие профессиональные качества:

1) умение дать мотивировку необходимости изучения данной темы, решения предложенной задачи;

2) умение своевременно актуализировать знания учащихся;

3) использование приемов проблемного обучения;

4) формирование у школьников умения выдвинуть гипотезу;

5) формирование у школьников умения доказывать или опровергать выдвинутую гипотезу;

6) организация изучения школьниками возможностей расширения условий и обобщения решений задач и исходных проблем;

7) формирование у школьников умения подводить итоги проделанной работы и выявлять главное.

Если в этот перечень включить аспекты общей методической подготовки, то он еще пополнится следующими пунктами:

8) соблюдение основных дидактических принципов при обучении математике;

9) умение произвести отбор содержания учебного материала, удовлетворяющего целям и задачам исследования;

10) умение составить систему заданий или упражнений обучающего характера;

11) умение стимулировать активность познавательной деятельности учащихся;

12) осуществление непрерывного контроля за степенью усвоения учащимися нового материала и решением ими задач;

13) разнообразие использования средств обучения математике.

§ 3. СОДЕРЖАНИЕ ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

В данном параграфе мы приведем примеры поисково-исследовательских задач по курсам «Алгебра» и «Алгебра и начала анализа», а также обозначим основные этапы их решения.

Поисково-исследовательская задача №1

1. Задача

Доказать неравенство

$$(a + b)^4 \le 8(a^4 + b^4).$$

Составить и доказать более общее неравенство.

2. Постановка проблемы

При каких значениях параметра m неравенство

$$(a + b)^{2n} \le m(a^{2n} + b^{2n})$$

справедливо, если a и b – действительные числа?

3. Сбор фактического материала (решение частных задач)

1. Доказать неравенство $(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$

Доказательство

$$(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2),$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \ge 0,$$

$(a - b)^2 \ge 0$ – очевидное неравенство при любых a и b.

2. Доказать неравенство $(a + b)^4 \le 8(a^4 + b^4)$

Доказательство

$$(a + b)^4 \le 8(a^4 + b^4),$$

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \le 8a^4 + 8b^4,$$

$$7a^4 + 7b^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 \ge 0,$$

$$(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) + 6a^4 + 6b^4 - 12a^2b^2 \ge 0,$$

$$(a - b)^4 + 6(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) \ge 0,$$

$(a - b)^4 + 6(a^2 - b^2)^2 \ge 0$ – очевидное неравенство при любых действительных числах a и b.

4. Систематизация и анализ полученных результатов

Нетрудно заметить зависимость значений параметра m при изменении показателей (таблица 24).

Таблица 24

Показатели	*2*	*4*	*6*	…	*2n*
1. m	2^1	2^3	2^5	…	2^{2n-1}
2. m	2	2+6	8+6	…	3^n-4

5. Выдвижение гипотез

Гипотеза 1. Неравенство $(a + b)^{2n} \le m(a^{2n} + b^{2n})$ справедливо, если

$$m \ge 2^{2n-1},\ n \in N.$$

Гипотеза 2. Неравенство $(a + b)^{2n} \le m(a^{2n} + b^{2n})$ справедливо, если

$$m \ge 3n - 4,\ n \in N.$$

6. Проверка гипотез

Проверим гипотезу 1. Докажем, что неравенство

$$(a + b)^8 \le m(a^8 + b^8)$$

справедливо при $m \ge 128$. Если $m = 128$, то докажем, что неравенство справедливо $(a + b)^8 \le 128(a^8 + b^8)$.

Доказательство

$$(a + b)^8 \le 128(a^8 + b^8)$$

$$a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8 \le 128a^8 + 128b^6,$$

$$127a^8 - 8a^7b - 28a^6b^2 - 56a^5b^3 - 70a^4b^4 - 56a^3b^5 - 28a^2b^6 - 8ab^7 + 127b^8 \ge 0,$$

$$(a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8) + 126a^8 +$$

$$126b^8 - 56a^6b^2 - 140a^4b^4 - 56a^2b^6 \ge 0,$$

$$(a-b)^8+(70a^8-140a^4b^4+70b^8)+(56a^8-56a^6b^2)+(56b^8-56a^2b^6)\ge 0,$$
$$(a-b)^8+70(a^8-2a^4b^4+b^8)+56a^6(a^2-b^2)+56b^6(b^2-a^2)\ge 0,$$
$$(a-b)^8+70(a^4-b^4)^2+56a^6(a^2-b^2)-56b^6(a^2-b^2)\ge 0,$$
$$(a-b)^8+70(a^4-b^4)^2+56(a^2-b^2)(a^6-b^6)\ge 0,$$

$(a-b)^8+70(a^4-b^4)^2+56(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4)\ge 0$ – очевидное неравенство при любых действительных числах a *и* b, следовательно, неравенство $(a+b)^8\le 128(a^8+b^8)$ справедливо, а значит, неравенство $(a+b)^8\le m(a^8+b^8)$ справедливо при $m\ge 128$.

Проверка гипотезы 2.

Контрпример. Если $a=1, b=1$, то получим $(1+1)^6 \vee 14(1^6+1^6)$; $2^6\vee 7\cdot 2^2$; $2^4\le 7$ – неверное числовое неравенство.

Заключение по проверке:

гипотеза 1 *получила подтверждение;*

гипотеза 2 *не получила подтверждение.*

7. Доказательство истинности гипотезы 1.

Неравенство $(a+b)^{2n}\le m(a^{2n}+b^{2n})$ справедливо, если $m\ge 2^{2n-1}$, a и b – действительные числа, $n\in N$.

Достаточно доказать, что неравенство

$$(a+b)^{2n}\le 2^{2n}-1\,(a^{2n}+b^{2n}) \qquad (1)$$

справедливо.

Используем метод полной математической индукции:

Проверим справедливость неравенства $(a+b)^{2n}\le 2^{2n-1}(a^{2n}+b^{2n})$ при $n=1$.

$$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2),$$
$$a^2+2ab+b^2\le 2a^2+2b^2,$$
$$a^2-2ab+b^2\ge 0,$$

$(a-b)^2\ge 0$ – очевидное неравенство при любых действительных числах a и b.

Допустим, что при $n=k$ неравенство $(a+b)^{2k}\le 2^{2k-1}(a^{2k}+b^{2k})$ справедливо.

2. Докажем, что при $n=k+1$, $k\in N$ неравенство

$$(a+b)^{2k+2}\le 2^{2k+1}(a^{2k+2}+b^{2k+2})$$

справедливо.

Доказательство:

$$(a+b)^{2k+2} \le 2^{2k+1}(a^{2k+2}+b^{2k+2}),$$

$$(a+b)^2(a+b)^{2k} \le 2^{2k+1}(a^{2k+2}+b^{2k+2}),$$

учитывая, что

$$(a+b)^{2k} \le 2^{2k-1}(a^{2k}+b^{2k})$$

$$(a+b)^2 2^{2k-1}(a^{2k}+b^{2k}) \le 2^{2k+1}(a^{2k+2}+b^{2k+2}),$$

делим на 2^{2k-1} $(2^{2k-1}>0)$

$$(a+b)^2(a^{2k}+b^{2k}) \le 4(a^{2k+2}+b^{2k+2}),$$

$$4a^{2k+2}+4b^{2k+2}-a^{2k+2}-2a^{2k+1}b-a^{2k}b^2-a^2b^{2k}-2ab^{2k+1}-b^{2k+2} \ge 0,$$

$$(a^{2k+2}-2a^{2k+1}b-a^{2k}b^2)+(b^{2k+2}-2ab^{2k+1}-a^2b^{2k})+2a^{2k+2}+2b^{2k+2} \ge 0,$$

$$a^{2k}(a^2-2\mathrm{ab}+b^2-2b^2)+b^{2k}(b^2-2ab+a^2-2a^2)+2a^{2k+2}+2b^{2k+2} \ge 0,$$

$$a^{2k}(a-b)^2-2a^{2k}b^2+b^{2k}(b-a)^2-2a^2b^{2k}+2a^{2k+2}+2b^{2k+2} \ge 0,$$

$$(a-b)^2(a^{2k}+b^{2k})+(2a^{2k+2}-2a^{2k}b^2)+(2b^{2k+2}-2a^2b^{2k}) \ge 0,$$

$(a-b)^2(a^{2k}+b^{2k})+2a^{2k}(a^2-b^2)+2b^{2k}(b^2-a^2) \ge 0$ – очевидное неравенство, следовательно, неравенство (1) истинно.

$(a-b)^2(a^{2k}+b^{2k})+2(a^2-b^2)(a^{2k}-b^{2k}) \ge 0$ – очевидное неравенство при любых действительных числах a и b.

8. Вывод

Неравенство $(a+b)^{2n} \le m(a^{2n}+b^{2n})$ истинно, если $m \ge 2^{2n-1}$, a и b – действительные числа, $n \in N$.

Наметить пути дальнейшего исследования.

Мы нашли значения m для двух слагаемых. Интерес представляет нахождение m для любого количества слагаемых.

Можно продолжить исследования и определить, при каких значениях параметра m неравенства:

а) $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2 \le m(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)$;

б) $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p)^{2n} \le m(a_1^{2n}+a_2^{2n}+a_3^{2n}+\ldots+a_p^{2n})$

истинны, если $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$ – действительные числа, $n \in N, p \in N$.

Поисково-исследовательская задача №2

1. Задача

Решите уравнения:

а) $\dfrac{\left(\frac{1}{6}x-3-\{x\}\right)}{([x]-5)([x]-6)}=0$***; б)*** $\dfrac{\left(\frac{1}{4}x-7-\{x\}\right)}{([x]-3)([x]-4)}=0$***; в)*** $\dfrac{\left(\frac{1}{3}x-13-\{x\}\right)}{([x]-2)([x]-3)}=0$**.**

Найдите решение более общего уравнения.

2. Постановка проблемы

Найти корни уравнения $\dfrac{\left(\frac{1}{k+1}x-a-\{x\}\right)}{([x]-k)([x]-k-1)}=0$ $(a,k\in N)$.

3. Сбор фактического материала (решение частных задач)

Найдем корни уравнения $\dfrac{\left(\frac{1}{6}x-3-\{x\}\right)}{([x]-5)([x]-6)}=0$ (1)

Решение. ***Рассмотрим функцию*** $f(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{6}x-3-\{x\}\right)}{([x]-5)([x]-6)}$

$\mathrm{D}(f)=(-\infty;5)\cup[7;+\infty)$, $f(x)=0$, если $\begin{cases}\frac{1}{6}x-3-\{x\}=0,\\ x<5;\quad x\ge 7;\end{cases}$

Найдем корни уравнения $\frac{1}{6}x-1-\{x\}=0$; уравнение $\frac{1}{6}x-3-\{x\}=0$ равносильно уравнению $\frac{1}{6}x-3=\{x\}$. Графики функций $g(x)=\frac{1}{6}x-3,$ $y=\{x\}$ пересекаются в пяти точках, так как $0\le y<1$ $\Rightarrow$ $0\le\frac{1}{6}x-3<1\Rightarrow 18\le x<24$. $x_1=18$; пусть $x_2\approx 19{,}1;$ $x_3\approx 20{,}3;$ $x_4\approx 21{,}4;$ $x_5\approx 22{,}6$. Так как $\{x\}=x-[x]$, то уравнение $\frac{1}{6}x-3-\{x\}=0$ равносильно уравнению $-3-\frac{5}{6}x+[x]=0$. Если $x=18$, то получим уравнение $-3-\frac{5}{6}x+[18]=0$ $\Rightarrow$ $-3-\frac{5}{6}x+18=0$ $\Rightarrow$ $-\frac{5}{6}x=-15\Rightarrow x=18$.

Проверка: если $x=18$ $\frac{1}{6}(18)-3-\{18\}=0 \Rightarrow 3-3-0=0 \Rightarrow 0=0$ верно, следовательно, $x_1=18$ корень уравнения. Если $x\approx 19{,}1$, то получим уравнение $-3-\frac{5}{6}x+[19{,}1]=0 \Rightarrow -3-\frac{5}{6}x+19=0 \Rightarrow -\frac{5}{6}x=-16 \Rightarrow x_2=19{,}2$.

Проверка: если $x=19{,}2$ $\frac{1}{6}(19{,}2)-3-\{19{,}2\}=0 \Rightarrow 3{,}2-3-0{,}2=0 \Rightarrow$ $0=0$ верно. Если $x\approx 20{,}3$, то получим уравнение $-3-\frac{5}{6}x+[20{,}3]=0 \Rightarrow$ $-3-\frac{5}{6}x+20=0 \Rightarrow -\frac{5}{6}x=-17 \Rightarrow x=20{,}4$. Проверка показывает, что $x_3=20{,}4$ корень уравнения.

Нетрудно заметить закономерность: корни уравнения (1) составляют арифметическую прогрессию, следовательно, $x_4=21{,}6$; $x_5=22{,}8$. Проверка показывает, что $x_4=21{,}6$; $x_5=22{,}8$ корни уравнения (1).

Ответ: $x_1=18$; $x_2=19{,}2$; $x_3=20{,}4$; $x_4=21{,}6$; $x_5=22{,}8$.

Аналогично находим корни уравнений

б) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}x-7-\{x\}\right)}{([x]-3)([x]-4)}=0.$ $x_1=28$; $x_2=\frac{88}{3}$; $\frac{92}{3}$;

в) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}x-13-\{x\}\right)}{([x]-2)([x]-3)}=0$. $x_1=39$; $x_2=40{,}5$.

4. Систематизация и анализ полученного материала

1) Количество корней уравнения зависит от коэффициента при x (количество корней на единицу меньше знаменателя коэффициента при x). Следовательно, уравнение (2) имеет k корней.

2) Учитывая, что $x_1=6\cdot 3;$ $x_1=3\cdot 13;$ $x_1=4\cdot 7$, следовательно, первый корень уравнения (2) равен произведению $a(k+1)$ при $a\geq 2$.

3) Корни уравнения образуют арифметическую прогрессию. Разность прогрессии равна ($1/(1-\frac{1}{6}\Big)$; $1/(1-\frac{1}{4}\Big)$; $1/(1-\frac{1}{3}\Big)$) $1/(1-\frac{1}{k+1}\Big)$.

5. Выдвижение гипотезы

Уравнение $\frac{\left(\frac{1}{k+1}x-a-\{x\}\right)}{([x]-k)([x]-k-1)}=0$ $(a,k\in N)$ имеет корни $x_1=a(k+1)$; $x_2=a(k+1)+\frac{k+1}{k}$; $x_3=a(k+1)+\frac{2(k+1)}{k}$; ….; $x_k=a(k+1)+\frac{(k+1)(k-1)}{k}$.

6. Проверка гипотезы

Уравнение $\frac{\left(\frac{1}{5}x-70-\{x\}\right)}{([x]-4)([x]-5)}=0$ имеет корни $x_1=350$; $x_2=\frac{1405}{4}$; $x_3=\frac{705}{2}$. Если $x_1=350$, то получим $\frac{\left(\frac{1}{5}\cdot 350-70-\{350\}\right)}{([350]-4)([350]-5)}=0$; 0 = 0 – верное числовое равенство; если $x_2=\frac{1445}{4}$, то получим $\frac{\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1405}{4}-70-\left\{\frac{1405}{4}\right\}\right)}{\left(\left[\frac{1405}{4}\right]-4\right)\left(\left[\frac{1405}{4}\right]-5\right)}=0$; $70+\frac{1}{4}-70-\frac{1}{4}=0$; 0 = 0 – верное числовое равенство; если $x_3=\frac{705}{2}$, то получим $\frac{\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{705}{2}-70-\left\{\frac{705}{2}\right\}\right)}{\left(\left[\frac{705}{2}\right]-4\right)\left(\left[\frac{705}{2}\right]-5\right)}=0$;

$70+\frac{1}{2}-70-\frac{1}{2}=0$; $0=0$ – верное числовое равенство.

Гипотеза получила подтверждение.

7. Доказательство истинности гипотезы

Проверка показывает, что $a(k+1)+\frac{k^2-1}{k}$ корень уравнения (2).

Проверка: учитывая, что $\frac{\left(\frac{1}{k+1}x-a-\{x\}\right)}{([x]-k)([x]-k-1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{k+1}x-a-\{x\}=0,\\ x<k, \quad x\geq k+2.\end{cases}$

Если $x=a(k+1)+\frac{k^2-1}{k}$, то при $a\geq 2$ неравенство $x>k+2$ справедливо при всех $k\in N$, а уравнение $\frac{x}{k+1}-a-\{x\}=0$ обращается в верное числовое равенство $\dfrac{a(k+1)+\dfrac{k^2-1}{k}}{k+1}-a-\left\{a(k+1)+\dfrac{k^2-1}{k}\right\}=0$,

$a+\dfrac{k-1}{k}-a-\left\{\dfrac{-1}{k}\right\}=0$, $0=0$ (учитывая, что $\left\{\dfrac{-1}{k}\right\}=\dfrac{k-1}{k}$).

Используя метод полной математической индукции, нетрудно доказать, что $x_k=a(k+1)+\dfrac{k^2-1}{k}$ решение уравнения (2) для любого $k\in N$.

8. Вывод

Уравнение $\dfrac{\left(\dfrac{1}{k+1}x-a-\{x\}\right)}{([x]-k)([x]-k-1)}=0$ $(a,k\in N)$ имеет корни $x_1=a(k+1)$; $x_2=a(k+1)+\dfrac{k+1}{k}$; $x_3=a(k+1)+\dfrac{2(k+1)}{k}$; .... ; $x_k=a(k+1)+\dfrac{(k+1)(k-1)}{k}$, при $a\neq 1$, $a\in N, k\in N$.

Поисково-исследовательская задача № 3

1. Задача

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения

а) $|2x-8|+|3y-9|=6$; б) $|3x+6|+|5y-2|=7$; в) $|5x+6|+|7y-2|=9$.

Найдите общее решение.

2. Постановка проблемы.

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения

$|ax-m|+|by-n|=d$, если $a>0, b>0, d>0.$

3. Сбор фактического материала (решение частных задач)

Найдем площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения

$|2x-8|+|3y-9|=6$

Решение

1. Если $2x-8\geq 0$, $x\geq 4$; $3y-9\geq 0$, $y\geq 3$, тогда получим уравнение $2x-8+3y-9=6$, $2x+3y=23$.

x	4	7
y	5	3

Графиком уравнения $2x+3y=23$ является отрезок BC, где B(4; 5); C(7; 3), учитывая, что $4 \le x \le 7$; $3 \le y \le 5$.

2. Если $2x-8 \ge 0$, $x \ge 4$; $3y-9 \le 0$, $y \le 3$, тогда получим уравнение $2x-8-3y+9=6$, $2x-3y=5$.

x	4	7
y	1	3

Графиком уравнения $2x-3y=5$ является отрезок CD, где D(4; 1); C(7; 3), учитывая, что $4 \le x \le 7$; $1 \le y \le 3$.

3. Если $2x-8 \le 0$, $x \le 4$;

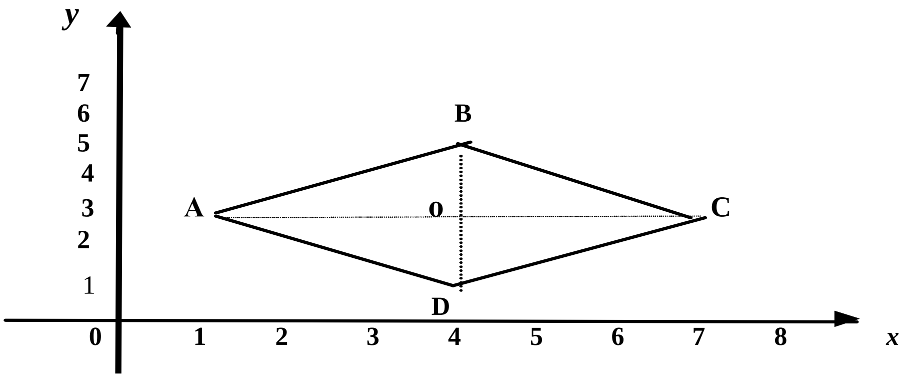


Рис. 120

$3y-9 \le 0$, $y \le 3$, тогда поучим уравнение $-2x+8-3y+9=6$, $2x+3y=11$.

x	4	1
y	1	3

Графиком уравнения $2x-3y=5$ является отрезок AD, где D(4; 1); A(1; 3), учитывая, что $4 \le x \le 7$; $1 \le y \le 3$.

4. Если $2x-8 \le 0$, $x \le 4$; $3y-9 \ge 0$, $y \ge 3$, тогда получим уравнение $-2x+8+3y-9=6$, $-2x+3y=7$.

x	4	1
y	5	3

Графиком уравнения $-2x+3y=7$ является отрезок AB, где A(1; 3); B(4; 5), учитывая, что $1 \le x \le 4$; $3 \le y \le 5$.

Построим график уравнения $|2x-8|+|3y-9|=6$ (рис. 120). Графиком уравнения $|2x-8|+|3y-9|=6$ является четырехугольник ABCD. Четырехугольник ABCD – ромб, так как AC⊥BD; AO = CO; BO = DO. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4$; $S_{ABCD} = 12$ кв. ед.

Аналогично находим площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения $|3x+6|+|5y-2|=7$, площадь которой равна $\frac{98}{15}$ кв. ед.

Площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения $|5x+6|+|7y-2|=9$, равна $\frac{162}{35}$ кв. ед.

4. Систематизация и анализ полученных результатов

Нетрудно заметить зависимость площади фигуры (таблица 25) от значений параметров $a;b;d$ а) $12=\frac{2\cdot 6^2}{2\cdot 3}$; б) $\frac{98}{15}=\frac{2\cdot 7^2}{3\cdot 5}$; в) $\frac{162}{35}=\frac{2\cdot 9^2}{5\cdot 7}$.

Таблица 25

Уравнение	$\|2x-8\|+\|3y-9\|=6$	$\|3x+6\|+\|5y-2\|=7$	$\|5x+6\|+\|7y-2\|=9$
Площадь	$12=\frac{2\cdot 6^2}{2\cdot 3}$	$\frac{98}{15}=\frac{2\cdot 7^2}{3\cdot 5}$	$\frac{162}{35}=\frac{2\cdot 9^2}{5\cdot 7}$

5. Выдвижение гипотезы

Гипотеза. Площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения $|ax-m|+|bx-n|=d$, равна $S=\frac{2d^2}{ab}$, если $a>0, b>0, d>0$.

6. Проверка гипотезы

Проверка показывает, что площадь фигуры, ограниченной уравнением $|5x+6|+|11y-2|=3$, равна $\frac{18}{55}$ кв. ед., заметим, что $\left(\frac{18}{55}=\frac{2\cdot 3^2}{5\cdot 11}\right)$.

7. Доказательство истинности гипотезы

$|ax-m|+|bx-n|=d$.

1. Если $ax-m\ge 0$, $x\ge\frac{m}{a}$; $by-n\ge 0$, $y\ge\frac{n}{b}$, тогда получим уравнение $ax+by=m+n+d$.

x	$\frac{m}{a}$	$\frac{m+d}{a}$
y	$\frac{n+d}{b}$	$\frac{n}{b}$

Графиком уравнения $ax+by=m+n+d$ является отрезок BC, где $B\left(\frac{m}{a};\frac{n+d}{b}\right)$; $C\left(\frac{m+d}{a};\frac{n}{b}\right)$, учитывая, что $\frac{m}{a}\le x\le\frac{m+d}{a}$; $\frac{n}{b}\le y\le\frac{n+d}{b}$.

2. Если $ax-m\ge 0$, $x\ge\frac{m}{a}$; $by-n\le 0$, $y\le\frac{n}{b}$, тогда получим уравнение $ax-by=m-n+d$.

x	$\frac{m}{a}$	$\frac{m+d}{a}$
y	$\frac{n-d}{b}$	$\frac{n}{b}$

Графиком уравнения $ax-by=m-n+d$ является отрезок CD, где $D\left(\frac{m}{a};\frac{n-d}{b}\right)$; $C\left(\frac{m+d}{a};\frac{n}{b}\right)$, учитывая, что $\frac{m}{a}\le x\le\frac{m+d}{a}$; $\frac{n-d}{b}\le y\le\frac{n}{b}$.

3. Если $ax-m\le 0$, $x\le\frac{m}{a}$; $by-n\le 0$, $y\le\frac{n}{b}$, тогда получим уравнение $-ax-by=-m-n+d$.

x	$\frac{m}{a}$	$\frac{m-d}{a}$
y	$\frac{n-d}{b}$	$\frac{n}{b}$

Графиком уравнения $-ax-by=-m-n+d$ является отрезок AD, где $D\left(\frac{m}{a};\frac{n-d}{b}\right)$; $A\left(\frac{m-d}{a};\frac{n}{b}\right)$, учитывая, что $\frac{m-d}{a}\le x\le\frac{m}{a}$; $\frac{n-d}{b}\le y\le\frac{n}{b}$.

4. Если $ax-m\le 0$, $x\le\frac{m}{a}$; $by-n\ge 0$, $y\ge\frac{n}{b}$, тогда получим уравнение $-ax+by=d-m+n$.

x	$\frac{m}{a}$	$\frac{m-d}{a}$
y	$\frac{n+d}{b}$	$\frac{n}{b}$

Графиком уравнения $-ax+by=d-m+n$ является отрезок AB, где $A\left(\frac{m-d}{a};\frac{n}{b}\right)$; $B\left(\frac{m}{a};\frac{n+d}{b}\right)$, учитывая, что $\frac{m-d}{a}\le x\le\frac{m}{a}$; $\frac{n}{b}\le y\le\frac{n+d}{b}$.

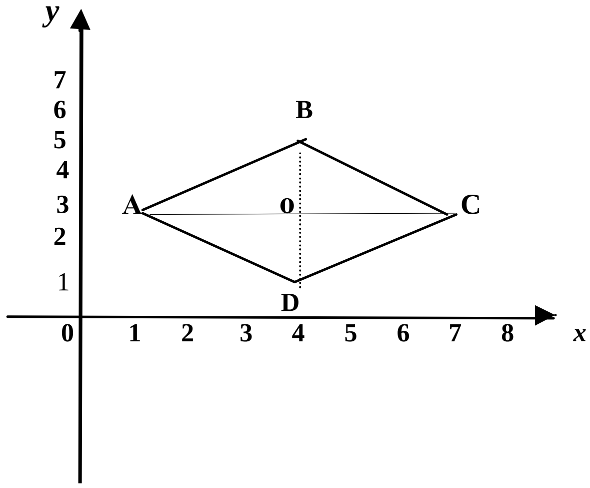


Рис. 121

Построим график уравнения $|ax-m|+|bx-n|=d$ (рис. 121). Графиком уравнения $|ax-m|+|bx-n|=d$ является четырехугольник ABCD. Четырехугольник ABCD – ромб, так как AC$\perp$BD; $x_o=\dfrac{x_C+x_A}{2}$,

$x_o=\dfrac{\frac{m+d}{a}+\frac{m-d}{a}}{2}=\dfrac{m}{a}$; $y_o=\dfrac{y_C+y_A}{2}$, $y_o=\dfrac{\frac{n}{b}+\frac{n}{b}}{2}=\dfrac{n}{b}$; $x_o=\dfrac{x_B+x_D}{2}$,

$x_o=\dfrac{\frac{m}{a}+\frac{m}{a}}{2}=\dfrac{m}{a}$; $y_o=\dfrac{y_B+y_D}{2}$, $y_o=\dfrac{\frac{n+d}{b}+\frac{n-d}{b}}{2}=\dfrac{n}{b}$; AO = CO; BO = DO.

AC $=|x_C-x_B|$; AC = $\left|\dfrac{m+d}{a}-\dfrac{m-d}{a}\right|=\dfrac{2d}{a}$, AC = $\dfrac{2d}{a}$. BD = $|y_B-y_D|$;

BD = $\left|\dfrac{n+d}{b}-\dfrac{n-d}{b}\right|=\dfrac{2d}{b}$, BD = $\dfrac{2d}{b}$. $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD$, $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2d}{a}\cdot\dfrac{2d}{b}\right)$,

$S_{ABCD}=\dfrac{2d^2}{ab}$ кв. ед.

8. Вывод

Площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения $|ax-m|+|by-n|=d$, равна $\dfrac{2d^2}{ab}$ кв. ед., при $a>0, b>0, d>0$, $m\in R$, $n\in R$.

Заметим, что уравнение $|-ax+m|+|-by+n|=d$ равносильно уравнению $|-1|\cdot|ax-m|+|-1|\cdot|by-n|=d \Leftrightarrow |ax-m|+|by-n|=d$, тогда площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения $|ax-m|+|by-n|=d$, равна $\dfrac{2d^2}{|ab|}$ кв. ед., при $a\neq 0, b\neq 0, d>0$, $m\in R$, $n\in R$.

Поисково-исследовательская задача № 4

1. Задача

Найти сумму чисел

а) $1\cdot 2\cdot +2\cdot 3\cdot +3\cdot 4+...+n(n+1)$;

б) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n(n+1)(n+2)$.

2. Постановка проблемы

Найти сумму чисел

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot m+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot ...\cdot m(m+1)+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot ...\cdot m(m+1)(m+2)+...+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)\cdot ...\cdot (m+n).$$

3. Сбор фактического материала (решение частных задач)

Найти сумму S_n

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+n(n+1) = S_n.$$

Гипотеза 1

$S_n = an^3+bn^2+cn+d$

Если $n=1$, тогда получим уравнение $a+b+c+d=2$,

если $n=2$, получим уравнение $8a+4b+2c+d=8$,

если $n=3$, получим уравнение $27a+9b+3c+d=20$,

если $n=4$, получим уравнение $64a+16b+4c+d=40$.

Таким образом, мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} a+b+c+d=2, \\ 8a+4b+2c+d=8, \\ 27a+9b+3c+d=20, \\ 64a+16b+4c+d=40; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a+3b+c=6, \\ 19a+5b+c=12, \\ 37a+7b+c=20; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 12a+2b=6, \\ 18a+2b=8; \end{cases} \Rightarrow\ a=\frac{1}{3};\ \ b=1;$$

$$\frac{7}{3}+3+c=6\ \Rightarrow\ c=\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}+1+\frac{2}{3}+d=2,\ \ d=0.$$

$$S_n=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n;\ S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Проверка гипотезы 1

Если $n=5$, $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6=70$;

$n=5$, $S_5=\frac{1}{3}5(5+1)(5+2)=5\cdot 2\cdot 7=70$.

Доказательство истинности гипотезы 1

Докажем методом полной математической индукции, что

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad (1)$$

1) Проверим при $n=1$:

$$1\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3;\ 2 = 2,\ \text{верно.}$$

Предположим, что при $n=k$ верно равенство:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

2) Докажем, что при $n=k+1$ верно равенство:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

Доказательство

Заметим, что левую часть доказываемого равенства можно записать в виде:

$$(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+k(k+1))+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Но по предположению выражение:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+k(k+1)$$

равно $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ и поэтому в левой части получим

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+k(k+1))+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$

$$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Левая часть равна правой части. В силу метода полной математической индукции следует справедливость формулы (1) при всех натуральных значениях n.

Гипотеза 1 *получила подтверждение*.

Аналогично находим сумму $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n(n+1)(n+2)$ и получим, что:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

4. Систематизация и анализ полученных результатов (таблица 26)

Таблица 26

	Сумма слагаемых	S_n
1	$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+n(n+1)$	$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
2	$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6+...+n(n+1)(n+2)$	$\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$
3	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+...+n(n+1)(n+2)(n+3)$	$\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$
	….	
	$1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot m+2\cdot 3\cdot 4\cdot...\cdot m(m+1)+...+$ $+n(n+1)(n+2)...(n+m-1)$	$\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)*$ $*(n+3)(n+4)...(n+m)$

5. Выдвижение гипотезы

Гипотеза 2

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot m+2\cdot 3\cdot 4\cdot...\cdot m(m+1)+...+n(n+1)(n+2)...(n+m-1)=$$
$$=\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)...(n+m) \qquad m\ge 2, m\in N, n\in N.$$

6. Доказательство истинности гипотезы 2

Докажем методом полной математической индукции, что

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot m+2\cdot 3\cdot 4\cdot...\cdot m(m+1)+...+n(n+1)(n+2)...(n+m-1)=$$
$$=\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)...(n+m), \qquad (2)$$

$m\ge 2, m\in N, n\in N.$

I. Если $m-const.$

1) Проверим при $n=1$:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot m=\frac{1}{m+1}\cdot 1\cdot(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)\cdot...\cdot m(1+m)$$

$1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot m=1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot m$ верно.

Предположим, что при $n=k$ верно равенство:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot m+2\cdot 3\cdot 4\cdot...\cdot m(m+1)+...+k(k+1)(k+2)...(k+m-1)=$$

$$=\frac{1}{m+1}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)...(k+m).$$

2) Докажем, что при $n=k+1$ верно равенство:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m+2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot m(m+1)+...+k(k+1)(k+2)...(k+m-1)+$$
$$+k(k+1)(k+2)...(k+m)=$$
$$=\frac{1}{m+1}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)...(k+m)(k+m+1).$$

Доказательство

Заметим, что левую часть доказываемого равенства можно записать в виде $(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m+2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot m(m+1)+...+k(k+1)(k+2)...(k+m-1))$

$$+k(k+1)(k+2)...(k+m)=\frac{1}{m+1}k(k+1)(k+2)(k+3)...(k+m)(k+m+1)$$

Но по предположению выражение:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m+2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot m(m+1)+...+k(k+1)(k+2)...(k+m-1)$$

равно $\frac{1}{m+1}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)...(k+m)$ и поэтому в левой части получим:

$$\frac{1}{m+1}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)...(k+m)+k(k+1)(k+2)...(k+m)=$$
$$=k(k+1)(k+2)...(k+m)\left(\frac{k}{m+1}+1\right)=$$
$$=\frac{1}{m+1}k(k+1)(k+2)(k+3)...(k+m)(k+m+1).$$

Левая часть равна правой части. В силу метода полной математической индукции следует справедливость формулы (2) при всех натуральных значениях n, $m\geq 2, m\in N$.

II. Если $n-const$.

Проверим при $m=2$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

(истинность данного равенства была доказана ранее).

Предположим, что при $m=k$ верно равенство:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k+2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot k(k+1)+...+n(n+1)(n+2)...(n+k-1)=$$
$$=\frac{1}{k+1}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)...(n+k).$$

2. Докажем, что при $m = k+1$ верно равенство:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot k(k+1) + \ldots + n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1) +$$
$$+ (n+1)\ldots(n+k-1)(n+k) =$$
$$= \frac{1}{k+1} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+k)(n+k+1).$$

Доказательство

По предположению выражение:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot k(k+1) + \ldots + n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)$$

равно $\frac{1}{k+1} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+k)$ и поэтому в левой части получим:

$$\frac{1}{k+1} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+k) + (n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)(n+k) =$$
$$= (n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)(n+k)\left(\frac{n}{k+1}+1\right) =$$
$$= \frac{1}{k+1} n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)(n+k).$$

Левая часть равна правой части. В силу метода полной математической индукции следует справедливость формулы (2) при всех натуральных значениях n, $m \geq 2, m \in N$.

Гипотеза 2 получила подтверждение.

7. Вывод

Таким образом, мы нашли формулу суммы S для более общего вида суммы слагаемых:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot m(m+1) + \ldots + n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1) = S$$

$$S = \frac{1}{m+1} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+m), \; m \geq 2, m \in N, n \in N.$$

Поисково-исследовательская задача № 5

1. Задача

а) Доказать неравенство $\frac{4k^2}{9}$

$$\left(1 - \frac{9(xy+xz+yz)}{k^2}\right) \geq \left(x - \frac{k}{3}\right)^2,$$

если $x+y+z=k$, $k\in N$;

б) Доказать неравенство

$$\frac{9k^2}{16}\left(1-\frac{16(xy+xz+xt+yz+yt+zt)}{6k^2}\right)\geq\left(x-\frac{k}{4}\right)^2,$$

если $x+y+z+t=k$, $k\in N$.

Доказать неравенство более общего вида.

2. Постановка проблемы

Найти зависимость между параметрами c, b и d, при которой неравенство $c\left(1-\frac{x_1x_2+x_1x_3+...+x_2x_3+x_2x_4+...x_{n-1}x_n}{b}\right)\geq(x_1-d)^2$ справедливо, если $x_1+x_2+x_3+...+x_n=k$, $k\in N$.

3. Сбор фактического материала (решение частных задач)

1. Доказать неравенство

$$\frac{4k^2}{9}\left(1-\frac{3(xy+xz+yz)}{k^2}\right)\geq\left(x-\frac{k}{3}\right)^2, \qquad (1)$$

если $x+y+z=k$.

Доказательство

$$x+y+z=k \;\Rightarrow:\; x=k-y-z,$$

$$\frac{4k^2}{9}-\frac{4(xy+xz+yz)}{3}\geq\left(k-y-z-\frac{k}{3}\right)^2,$$

$$\frac{4k^2}{9}-\frac{4(k-y-z)(y+z)+4yz}{3}\geq\left(\frac{2k}{3}-y-z\right)^2,$$

$$\frac{4k^2}{9}-\frac{4ky}{3}-\frac{4kz}{3}+\frac{4y^2}{3}+\frac{8yz}{3}+\frac{4z^2}{3}-\frac{4yz}{3}-\frac{4k^2}{9}-y^2-z^2+\frac{4ky}{3}+\frac{4kz}{3}-2yz\geq 0,$$

$\frac{y^2}{3}-\frac{2yz}{3}+\frac{z^2}{3}\geq 0$, $y^2-2yz+z^2\geq 0$, $(y-z)^2\geq 0$ – очевидное неравенство, следовательно, неравенство (1) истинно.

Доказательство неравенства

$$\frac{9k^2}{16}\left(1-\frac{16(xy+xz+xt+yz+yt+zt)}{6k^2}\right)\geq\left(x-\frac{k}{4}\right)^2, \qquad (2),$$

если $x+y+z+t=k$.

$$\left(\frac{3k}{4}\right)^2(1-\frac{xy+xz+xt+yz+yt+zt}{6\left(\frac{k}{4}\right)^2} \ge (x-\frac{k}{4}\right)^2,$$

если $x+y+z+t=k$.

Доказательство

$x+y+z+t=k \Rightarrow x=k-y-z-t$ подставим вместо x.

$$\frac{9k^2}{16}-\frac{3}{2}((k-y-z-t)y+(k-y-z-t)z+(k-y-z-t)t+yz+yt+zt) \ge \left(\frac{3}{4}k-y-z-t\right)^2,$$

$$\frac{9k^2}{16}-\frac{3}{2}(ky-y^2-yz-yt+kz-yz-z^2-zt+kt-yt-zt-t^2+yz+yt+zt) \ge \frac{9k^2}{16}+y^2+z^2+$$
$$+t^2+2yz+2yt+2zt-\frac{3}{2}ky-\frac{3}{2}kz-\frac{3}{2}kt,$$

$$\frac{9k^2}{16}-\frac{3}{2}ky-\frac{3}{2}kz-\frac{3}{2}kt+\frac{3}{2}yz+\frac{3}{2}yt+\frac{3}{2}zt+\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}z^2+\frac{3}{2}t^2 \ge \frac{9k^2}{16}+y^2+z^2+t^2+2yz+2yt+$$
$$+2zt-\frac{3}{2}ky-\frac{3}{2}kz-\frac{3}{2}kt,$$

$$2y^2+2z^2+2t^2-2yz-2yt-2zt \ge 0,\ \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}yz-\frac{1}{2}yt-\frac{1}{2}zt \ge 0,$$

$$(y^2-2yz+z^2)+(y^2-2yt+t^2)+(z^2-2zt+t^2) \ge 0,$$

$(y-z)^2+(y-t)^2+(z-t)^2 \ge 0$ – очевидное неравенство, следовательно, неравенство (2) истинно.

Доказать неравенство (дополнительная частная задача)

$$16\left(1-\frac{xy+xz+xt+xv+yz+yt+yv+zt+zv+tv}{10}\right) \ge (x-1)^2, \qquad (3)$$

если $x+y+z+t+v=5$.

Доказательство

$x+y+z+t+v=5 \Rightarrow x=5-y-z-t-v$ вместо x подставим в левую и правую части выражение $5-y-z-t-v$.

$$16(1-\frac{(5-y-z-t-v)y+(5-y-z-t-v)z+(5-y-z-t-v)t+(5-y-z-t-v)v+}{10}$$
$$\frac{+yz+yt+yv+zt+zv+tv}{10} \ge (4-y-z-t-v)^2$$

$$16-8\frac{(5y-y^2-yz-yt-yv+5z-yz-z^2-zt-zv+5t-yt-zt-tv-t^2+5v-yv-zv-}{5}$$
$$\frac{-tv-v^2+yz+yt+yv+zt+zv+tv}{5} \ge 16-8y-8z-8t-8v+2yz+2yt+2yv+2zt+2zv+$$
$$+2tv+y^2+z^2+t^2+v^2.$$

Умножим левую и правую части неравенства на 5.

$$80-40y-40z-40t-40v+8y^2+8z^2+8t^2+8v^2+8yz+8yt+8yv+8zt+8zv+8tv \ge$$

$$\ge 80-40y-40z-40t-40v+10yz+10yt+10yv+10zt+10zv+10tv+5y^2+5z^2+5t^2+5v^2.$$

Выполнив ряд равносильных преобразований, получим:

$3y^2+3z^2+3t^2+3v^2-2yz-2yt-2yv-2zt-2zv-2tv \ge 0$,

$y^2-2yz+z^2+y^2-2yt+t^2+y^2-2yv+v^2+z^2-2zt+t^2+z^2-2zv+v^2+t^2-2vt+v^2 \ge 0$.

Получим сумму полных квадратов:

$(y-z)^2+(y-t)^2+(y-v)^2+(z-t)^2+(z-v)^2+(t-v)^2 \ge 0$ – очевидное неравенство, следовательно, неравенство (3) истинно.

4. Систематизация и анализ полученных результатов (таблица 27)

Таблица 27

Количество слагаемых	*Значение суммы*	*Количество попарных произведений*	*Параметр c*	*Параметр d*	*Параметр b*
3	k	3	$\frac{(2k)^2}{3^2}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{3k^2}{3^2}$
4	k	6	$\frac{(3k)^2}{4^2}$	$\frac{k}{4}$	$6\left(\frac{k}{4}\right)^2$
5	5	10	$(5-1)^2$	$\frac{5}{5}$	$10\cdot 1^2$
	.	.	.	.	.
n	k	$\frac{n^2-n}{2}$	$\left(k-\frac{k}{n}\right)^2$	$\frac{k}{n}$	$\frac{n^2-n}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

5. Выдвижение гипотезы

Гипотеза

Неравенство $c\left(1-\frac{x_1x_2+x_1x_3+...+x_2x_3+x_2x_4+...x_{n-1}x_n}{b}\right) \ge (x_1-d)^2$ справедливо, если $c=\left(k-\frac{k}{n}\right)$, $b=\frac{n^2-n}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2$, $d=\frac{k}{n}$, $x_1+x_2+x_3+...+x_n=k$

$n \ge 3, \quad n \in N, \quad k \in N$.

7. Доказать истинности гипотезы

Докажем неравенство

$$\left(k-\frac{k}{n}\right)^2\left(1-\frac{x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+_{n-1}x_n}{\left(\frac{n^2-n}{2}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)\geq\left(x_1-\frac{k}{n}\right)^2, \quad (4)$$

если $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=k$.

Доказательство: Сначала выполним несколько равносильных преобразований.

$$k^2\left(\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{x_1(x_2+x_3+x_4+\ldots+x_n)+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_{n-1}x_n}{\left(\frac{n^2-n}{2}\right)\frac{k^2}{n^2}}\right)\geq$$

$$\geq\left(k-(x_2+x_3+\ldots+x_n)-\frac{k}{n}\right)^2.$$

Пусть $x_2+x_3+x_4+\ldots+x_n=y.$

$$k^2\frac{(n-1)^2}{n^2}-\left(k^2\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\left(\frac{2n^2}{n(n-1)k^2}\right)\left(\frac{(k-y)y+x_2x_3+\ldots+x_nx_{n-1}}{1}\right)\geq$$

$$\geq\frac{k^2(n-1)^2}{n^2}-2\frac{k(n-1)}{n}y+y^2.$$

$$-\frac{2(n-1)(ky-y^2)+(2n-1)(x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_{n-1}x_n)}{n}+2\frac{k(n-1)}{n}y-y^2\geq 0,$$

$$-2(n-1)ky+2(n-1)y^2-2(n-1)(x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_nx_{n-1})+2k(n-1)y-y^2n\geq 0,$$

$$y^2(2n-2-n)-2(n-1)(x_2x_3+x_2x_4+\ldots x_{n-1}x_n)\geq 0,$$

$$y^2(n-2)-2(n-1)(x_2x_3+x_2x_4+\ldots x_{n-1}x_n)\geq 0.$$

Докажем методом полной математической индукции:

Проверим при $n=3$.

$$(x_2+x_3+x_4)^2-4(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\geq 0,$$

$$x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4-4x_2x_3-4x_2x_4-4x_3x_4\geq 0,$$

$(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_2-x_4)^2\geq 0$ – очевидное неравенство.

Допустим, что при $n=m$, неравенство $(m-2)(x_2+x_3+x_4+\ldots+x_m)^2\geq 2(m-2)(x_2x_3+x_2x_4+\ldots\ldots+x_mx_{m+1})$ справедливо.

Докажем, что при $n=m+1$ неравенство

$$(m-1)(x_2+x_3+x_4+......+x_m+x_{m+1})^2 \ge 2m(x_2x_3+x_2x_4+.......+x_mx_{m+1})$$

справедливо.

Доказательство

$$(m-1)(x_2+x_3+x_4+...+x_m+x_{m+1})^2 \ge 2(m-1)(x_2x_3+x_2x_4+...+x_mx_{m+1})+2x_2x_3+2x_2x_4+...+$$
$$+2x_mx_{m+1},$$

$$(m-1)(x_2+x_3+x_4+...+x_m+x_{m+1})^2 \ge 2(m-2)(x_2+x_3+x_4+...+x_m)^2+2(m-1)(x_2x_3+x_2x_4+...$$
$$+x_mx_{m+1})+2x_2x_3+2x_2x_4+.....+2x_mx_{m+1},$$

$$(m-2)(x_2+x_3+x_4+...+x_{m+1})^2+(x_2+x_3+x_4+...+x_{m+1})^2-(m-2)(x_2+x_3+x_4+...+x_m)^2 \ge$$
$$\ge (m-2)(x_2+x_3+x_4+...+x_{m+1})^2.$$

Пусть $x_2+x_3+x_4+...+x_m=z$,тогда, выполнив несколько равносильных преобразований, получим:

$$(2m-4-2m+2)zx_{m+1}+(m-2)x_{m+1}{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+...+x_{m+1}{}^2 \ge 0,$$

$$-2zx_{m+1}+(m-2)x_{m+1}{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+...+x_{m+1}{}^2 \ge 0,$$

$$(m-1)\begin{cases}(x_{m+1}-x_2)^2, \\ (x_{m+1}-x_3)^2, \\ (x_{m+1}-x_4)^2, \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ (x_{m+1}-x_m)^2\end{cases}$$

$(x_{m+1}-x_2)^2+(x_{m+1}-x_3)^2+(x_{m+1}-x_4)^2+...+(x_{m+1}-x_m)^2 \ge 0$ – очевидное неравенство, следовательно, неравенство (4) истинно.

8. Вывод

Неравенство $c\left(1-\dfrac{x_1x_2+x_1x_3+...+x_2x_3+x_2x_4+...x_{n-1}x_n}{b}\right) \ge (x_1-d)^2$ истинно, если $c=\left(k-\dfrac{k}{n}\right)$, $b=\dfrac{n^2-n}{2}\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$, $d=\dfrac{k}{n}$,

$x_1+x_2+x_3+...+x_n=k$ $n\ge 3$, $n\in N$, $k\in N$.

Нетрудно увидеть зависимость между параметрами c, b и d:

$$c = k - d\,,\ b = \frac{n^2 - n}{2}(d)^2\,,\ b = \frac{n^2 - n}{2}(k - c)^2\,.$$

Поисково-исследовательская задача № 6

1. Задача

Найти неопределенный интеграл несколькими способами:

$$\int (2x - 1)\sqrt{3x + 2}dx\,.$$

Найти неопределенный интеграл более общего вида.

2. Постановка проблемы

1) Найти неопределенный интеграл вида $\int (ax + b)\sqrt[n]{kx + l}dx$ наиболее рациональным способом.

2) Найти неопределенный интеграл вида $\int (ax^2 + bx + c)\sqrt[n]{kx + l}dx$ наиболее рациональным способом.

3. Сбор фактического материала (решение частных задач несколькими способами).

Найдем неопределенный интеграл:

$$\int (2x - 1)\sqrt{3x + 2}dx\,.$$

(I способ «искусственный прием»)

Выполним некоторые тождественные преобразования.

$$\int (2x - 1)\sqrt{3x + 2}dx = \frac{2}{3}\int \left(3x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{3x + 2}dx = \frac{2}{3}\int \left(3x + 2 - \frac{7}{2}\right)\sqrt{3x + 2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int (3x + 2)\sqrt{3x + 2}dx - \frac{7}{3}\int \sqrt{3x + 2}dx = \frac{2}{3}\int (3x + 2)^{\frac{3}{2}}dx - \frac{7}{3}\int (3x + 2)^{\frac{1}{2}}dx\,.$$

При интегрировании используем формулу:

$$\int (kx + b)^n\,dx = \frac{(kx + b)^{n+1}}{k(n + 1)} + C\,.$$

$$\frac{2}{3}\int (3x + 2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2(3x + 2)^{\frac{5}{2}}}{3 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2}} + C_1 = \frac{4}{45}(3x + 2)^2\sqrt{3x + 2} + C_1;$$

$$-\frac{7}{3}\int (3x + 2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{-7(3x + 2)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}} + C_2 = \frac{-14(3x + 2)\sqrt{3x + 2}}{27} + C_2\,,$$

из этого следует, что

$$\int (2x-1)\sqrt{3x+2}dx = \frac{4}{45}(3x+2)^2\sqrt{3x+2} - \frac{14}{27}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C =$$

$$= (3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{4}{45}(3x+2) - \frac{14}{27}\right) + C = (3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{4}{15}x - \frac{46}{135}\right) + C .$$

(II способ «метод подстановки»)

Найдем неопределенный интеграл:

$$\int (2x-1)\sqrt{3x+2}dx .$$

Положим, что $\sqrt{3x+2} = t, \quad (t \geq 0) \quad 3x+2 = t^2; \quad x = \frac{t^2-2}{3}; \quad dx = \frac{2tdt}{3}$.

Выполнив соответствующую подстановку, получим:

$$\int \left(\frac{2t^2-4}{3} - 1\right)\frac{2t^2dt}{3} = \frac{2}{9}\int (2t^4 - 7t^2)dt . \tag{1}$$

Найдем интеграл (1), используя табличный интеграл:

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C .$$

$$\frac{2}{9}\int (2t^4 - 7t^2)dt = \frac{2}{9}\cdot\frac{2t^5}{5} - \frac{2}{9}\cdot\frac{7t^3}{3} + C = t^3\left(\frac{4t^2}{45} - \frac{14}{27}\right) + C .$$

Учитывая, что $\sqrt{3x+2} = t, \quad (t \geq 0)$, тогда получим:

$$\int (2x-1)\sqrt{3x+2}dx = (3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{4(3x+2)}{45} - \frac{14}{27}\right) =$$

$$= (3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{4}{15}x - \frac{46}{135}\right) + C .$$

$$\int (2x-1)\sqrt{3x+2}dx = (3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{4}{15}x - \frac{46}{135}\right) + C .$$

(III способ «метод интегрирования по частям»)

При интегрировании используем формулу $\int udv = u\cdot v - \int vdu$.

$$\int \underbrace{(2x-1)}_{u}\underbrace{\sqrt{3x+2}dx}_{dv} = \frac{(3x+2)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot\frac{3}{2}}(2x-1) - \frac{1}{9}\int (3x+2)^{\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}(2x-1) - \frac{4}{9}\cdot\frac{(3x+2)^{\frac{5}{2}}}{3\cdot\frac{5}{2}} + C =$$

$$=\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}(2x-1)-\frac{8}{135}\cdot(3x+2)^2\sqrt{3x+2}+C=$$

$$=(3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{2}{9}\cdot(2x-1)-\frac{8}{135}\cdot(3x+2)\right)+C=$$

$$=(3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{4x}{9}-\frac{2}{9}-\frac{8x}{45}-\frac{16}{135}\right)+C=(3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{4x}{15}-\frac{46}{135}\right)+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int(2x-1)\sqrt{3x+2}dx=(3x+2)\sqrt{3x+2}\left(\frac{4x}{15}-\frac{46}{135}\right)+C.$$

4. Систематизация и анализ полученных результатов

1. Если проанализировать решение каждым способом, то можно отметить, что наибольшее количество операций было выполнено при решении I способом (искусственный прием), наименьшее количество операций было выполнено при решении II способом (метод подстановки).

2. Нетрудно увидеть некоторую закономерность и сделать небольшое обобщение: $\int(ax+b)\sqrt{kx+l}dx=(kx+l)\sqrt{kx+l}(px+q)+C$.

5. Выдвижение гипотез

Гипотеза 1.

Если подынтегральная функция имеет вид $(ax+b)\sqrt[n]{kx+l}$, то

$$\int(ax+b)\sqrt[n]{kx+l}dx=v(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}(p(kx+l)+q)+C,$$

где $a,b,v,k,l,p,q\in R$, $a\neq0,k\neq0,p\neq0,v\neq0,\ n\geq2,\ n\in N$.

Гипотеза 2.

Если подынтегральная функция имеет вид $(ax^2+bx+c)\sqrt[n]{kx+i}$, то

$$\int(ax^2+bx+c)\sqrt[n]{kx+l}dx=D(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}(P(kx+l)^2+F(kx+l)+Q)+C,$$

где $a,b,c,k,l,D,P,F,Q\in R$, $D\neq0,P\neq0,\ a\neq0,k\neq0,\ n\geq2,\ n\in N$.

6. Доказательство истинности гипотез

Найдем неопределенный интеграл $\int(ax+b)\sqrt[n]{kx+l}dx$, для чего используем II способ «метод подстановки» (как более рациональный).

Положим, что $\sqrt[n]{kx+l}=t$, (t ≥ 0, если *n*–число четное):

$$kx+l=t^n,\ x=\frac{t^n-l}{k},\ dx=\frac{nt^{n-1}}{k}dt;$$

$$\int\left(\frac{at^n-al}{k}+b\right)\frac{nt^n}{k}dt=\int\left(\frac{ant^{2n}}{k^2}-\frac{anlt^n}{k^2}+\frac{bnt^n}{k}\right)dt=$$

$$=\frac{ant^{2n+1}}{k^2(2n+1)}-\frac{anlt^{n+1}}{k^2(n+1)}+\frac{bnt^{n+1}}{k(n+1)}+C=$$

$$=\frac{nt^{n+1}}{k^2}\left(\frac{at^n}{2n+1}+\frac{bk-al}{n+1}\right)+C\ .$$

Учитывая, что $kx+l=t^n$, получим:

$$\int(ax+b)\sqrt[n]{kx+l}\,dx=\frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^2}\left(\frac{a(kx+l)}{2n+1}+\frac{bk-al}{n+1}\right)+C \qquad (1)$$

Проверка:

$$\left(\ \frac{n(kx+l)^{\frac{n+1}{n}}}{k^2}\left(\frac{akx+al}{2n+1}+\frac{bk-al}{n+1}\right)+C\ \right)^{/}=$$

$$=\left(\ \frac{n(kx+l)^{\frac{n+1}{n}}}{k^2}\ \right)^{/}\left(\frac{akx+al}{2n+1}+\frac{bk-al}{n+1}\right)+\left(\ \frac{n\ (kx+l)^{\frac{n+1}{n}}}{k^2}\ \right)\left(\frac{akx+al}{2n+1}+\frac{bk-al}{n+1}\right)^{/}=$$

$$=\left(\ \frac{(n+1)\ (kx+l)^{\frac{1}{n}}}{k}\ \right)\left(\frac{akx+al}{2n+1}+\frac{bk-al}{n+1}\right)+\left(\ \frac{n\ (kx+l)^{\frac{n+1}{n}}}{k}\ \right)\left(\frac{a}{2n+1}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{kx+l}\left(\frac{(n+1)a(kx+l)}{k(2n+1)}+\frac{bk-al}{k}+\frac{an(kx+l)}{k(2n+1)}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{kx+l}\left(\frac{aknx+anl+akx+al+2nbk+bk-2anl-al+ankx+anl}{k(2n+1)}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{kx+l}\left(\frac{2aknx+akx+2nbk+bk}{k(2n+1)}\right)=\sqrt[n]{kx+l}\left(\frac{akx(2n+1)+bk(2n+1)}{k(2n+1)}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{kx+l}\left(\frac{k(2n+1)(ax+b)}{k(2n+1)}\right)\ =\ (ax+b)\sqrt[n]{kx+b}\ .$$

Гипотеза 1 получила подтверждение.

Докажем истинность гипотезы 2

Найдем неопределенный интеграл $\int(ax^2+bx+c)\sqrt[n]{kx+l}\,dx$ методом подстановки (как более рациональным способом).

Учитывая, что:

$$\int(ax^2+bx+c)\sqrt[n]{kx+l}\,dx=\int ax^2\sqrt[n]{kx+l}\,dx+\int(bx+c)\sqrt[n]{kx+l}\,dx$$

и используя формулу (1), получим

$$\int(bx+c)\sqrt[n]{kx+l}\ =\ \frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^2}\left(\frac{b(kx+l)}{2n+1}+\frac{ck-bl}{n+1}\right)+C.$$

Найдем неопределенный интеграл $\int ax^2\sqrt[n]{kx+l}\,dx$.

Положим, что $\sqrt[n]{kx+l}=t$ ($t\geq 0$, если n–число четное):

$$kx+l=t^n,\ x=\frac{t^n-l}{k},\ dx=\frac{nt^{n-1}}{k}dt;$$

$$\int\left(\frac{at^{2n}-2at^nl+al^2}{k^2}\right)\frac{nt^n}{k}dt = \int\left(\frac{ant^{3n}-2anlt^{2n}+anl^2t^n}{k^3}\right)dt=$$

$$=\frac{ant^{3n+1}}{k^3(3n+1)}-\frac{2anlt^{2n+1}}{k^3(2n+1)}+\frac{anl^2t^{n+1}}{k^3(n+1)}+C=$$

$$=\frac{ant^{n+1}}{k^3}\left(\frac{t^{2n}}{3n+1}-\frac{2lt^n}{2n+1}+\frac{l^2}{n+1}\right)+C.$$

Так как $\sqrt[n]{kx+l}=t$, получим:

$$\int ax^2\sqrt[n]{kx+l}dx=\frac{an(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^3}\left(\frac{(kx+l)^2}{3n+1}-\frac{2l(kx+l)}{2n+1}+\frac{l^2}{n+1}\right)+C,$$

следовательно,

$$\int(ax^2+bx+c)\sqrt[n]{kx+l}dx=\frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^3}\left(\frac{a(kx+l)^2}{3n+1}-\frac{2la(kx+l)}{2n+1}+\frac{al^2}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^2}\left(\frac{bkx+bl}{2n+1}+\frac{ck-bl}{n+1}\right)+C=$$

$$=\frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^3}\left(\frac{a(kx+l)^2}{3n+1}+\frac{(bk-2al)(kx+l)}{2n+1}+\frac{al^2+ck^2-blk}{n+1}\right)+C.$$

7. Вывод

$$\int(ax+b)\sqrt[n]{kx+l}dx=\frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^2}\left(\frac{a(kx+l)}{2n+1}+\frac{bk-al}{n+1}\right)+C,$$

где $a,b,k,l\in R$, $a\neq 0, k\neq 0$, $n\in N$, $n\geq 2$.

$$\int(ax^2+bx+c)\sqrt[n]{kx+l}dx=$$

$$=\frac{n(kx+l)\sqrt[n]{kx+l}}{k^3}\left(\frac{a(kx+l)^2}{3n+1}+\frac{(bk-2al)(kx+l)}{2n+1}+\frac{al^2+ck^2-blk}{n+1}\right)+C,$$

где $a,b,c,k,l\in R$, $a\neq 0, k\neq 0$, $n\in N$, $n\geq 2$.

Поисково-исследовательская задача № 7

1. Задача

Составить уравнение общей касательной к графикам функций $y=3x^2+4x+1$ и $y=3x^2+2x+1$ несколькими способами (при решении нельзя использовать дифференцирование функции). Составить уравнение общей касательной к графикам функций более общего вида, используя рациональный способ.

2. Постановка проблемы

Проблема 1

Составить уравнение общей касательной к графикам функций:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ и } y = ax^2 + dx + c.$$

Проблема 2

Составить уравнение общей касательной к графикам функций:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ и } y = ax^2 + dx + p.$$

3. Сбор фактического материала (решение вспомогательных и частных задач)

1. Составим уравнение касательной к графику функции $y = ax^2 + bx + c$, если абсцисса точки касания $x_0 = m$.

Решение. Найдем ординату точки касания $y_0 = am^2 + bm + c$. Пусть уравнение касательной имеет вид $y = kx + l$; A$(m; am^2 + bm + c)$ – точка касания. Если A$(m; am^2 + bm + c)$ – точка касания, то получим: $am^2 + bm + c = km + l$, откуда $l = am^2 + bm + c - km$.

Учитывая, что графики квадратичной и линейной функций имеют одну общую точку, то уравнение $ax^2 + bx + c = kx + l$ имеет один корень. Квадратное уравнение $ax^2 + (b-k)x + c - l = 0$ имеет один корень, если дискриминант равен нулю, тогда получим: $(b-k)^2 - 4a(c-l) = 0$. Так как $am^2 + bm + c - km = l$, то получим уравнение относительно k:

$$k^2 - 2bk + b^2 - 4a(-am^2 - bm + km) = 0,$$

$$k^2 - 2bk + b^2 + 4a^2m^2 + 4abm - 4akm = 0,$$

$$k^2 - 2(b + 2am)k + b^2 + 4a^2m^2 + 4abm = 0,$$

$$(k - (b + 2am))^2 = 0,$$

откуда $k = b + 2am$. Если $k = b + 2am$, то получим: $l = am^2 + bm + c - (b + 2am)m$, $l = -am^2 + c$, следовательно, уравнение касательной к графику функции $y = ax^2 + bx + c$, имеет вид:

$$y = (b + 2am)x - am^2 + c \tag{1}$$

Заметим, если $a=0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ будет линейной, значит $a\neq 0$.

Ответ: $y=(b+2am)x-am^2+c$, $a<0; a>0$, $b\in R$, $m\in R$.

2. Составить уравнение общей касательной к графикам функций $y=3x^2+4x+1$ **и** $y=3x^2+2x+1$.

(I способ решения).

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания касательной к графику функции $y=3x^2+4x+1$. Тогда, учитывая результаты решения пункта 3.1 (уравнение касательной (1)), получим:

$$y=(4+6x_0)x-3x_0{}^2+1. \qquad (2)$$

Аналогично, если x_1 – абсцисса точки касания касательной к графику функции $y=3x^2+2x+1$, тогда:

$$y=(2+6x_1)x-3x_1{}^2+1. \qquad (3)$$

уравнение касательной к графику данной функции.

Так как графиком уравнений (2) и (3) является одна и та же прямая, то получим систему уравнений $\begin{cases}4+6x_0=2+6x_1,\\ -3x_0^2+1=-3x_1^2+1;\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0=x_1,\\ 4=2 \quad \textit{не верно};\end{cases}\\ \begin{cases}x_0=-x_1,\\ 4+6x_0=2-6x_0;\end{cases} \quad \begin{cases}x_0=-x_1,\\ 12x_0=-2;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow x_0=-\frac{1}{6};\ x_1=\frac{1}{6}.$$

Если $x_0=-\frac{1}{6}$, то получим уравнение общей касательной

$$y=(4-1)x-3\left(-\frac{1}{6}\right)^2+1 \quad \Rightarrow y=3x-\frac{1}{12}+1 \Rightarrow y=3x+\frac{11}{12}. \qquad (4)$$

Если $x_1=\frac{1}{6}$, то получим уравнение общей касательной

$$y=(2+1)x-3\left(\frac{1}{6}\right)^2+1 \quad \Rightarrow y=3x+\frac{11}{12} \qquad (4)$$

Ответ: $y=3x+\frac{11}{12}$.

Составить уравнение общей касательной к графикам функций

$$y = 3x^2 + 4x + 1 \text{ и } y = 3x^2 + 2x + 1.$$

(II способ решения).

Решение.

Пусть уравнение общей касательной имеет вид $y = kx + l,$ тогда уравнение $3x^2 + 4x + 1 = kx + l$ имеет один корень и уравнение $3x^2 + 2x + 1 = kx + l$ имеет один корень.

Уравнение $3x^2 + (4-k)x + 1 - l = 0$ имеет один корень, если $(4-k)^2 - 12(1-l) = 0 \Rightarrow (4-k)^2 = 12(1-l)$ (5)

Уравнение $3x^2 + (2-k)x + 1 - l = 0$ имеет один корень, если $(2-k)^2 - 12(1-l) = 0 \Rightarrow (2-k)^2 = 12(1-l)$ (5)

Из (3) и (4) равенств следует, что $(4-k)^2 = (2-k)^2 \Rightarrow 4 + 2 = 2k$, $k = \frac{4+2}{2}$, $k = 3$, тогда $(4-3)^2 = 12(1-l) \Rightarrow \frac{(4-3)^2}{12} = 1 - l \Rightarrow l = -\frac{(4-3)^2}{12} + 1$,

$l = \frac{11}{12}$, следовательно, $y = 3x + \frac{11}{12}$ уравнение общей касательной к графикам функций $y = 3x^2 + 4x + 1$ и $y = 3x^2 + 2x + 1$.

Аналогично, решая II способом, находим уравнение общей касательной для графиков функций $y = 4x^2 + 5x + 2$ и $y = 4x^2 - 3x + 2$. Получим, что $y = x + 1 -$ уравнение общей касательной для графиков функций $y = 4x^2 + 5x + 2$ и $y = 4x^2 - 3x + 2$.

4. Систематизация и анализ полученных результатов

1. Если проанализировать решение каждым способом, то можно отметить, что наибольшее количество операций было выполнено при решении I способом, а наименьшее количество операций было выполнено при решении II способом

2. Нетрудно увидеть некоторую закономерность и сделать небольшое обобщение (таблица 28).

Таблица 28

Для функций	*Нахождение уравнения общей касательной*	*Уравнение общей касательной*
$y=3x^2+4x+1$ и $y=3x^2+2x+1$	$y=\left(\frac{4+2}{2}\right)x-\frac{(4-2)^2}{16\cdot 3}+1$	$y=3x+\frac{11}{12}$
$y=4x^2+5x+2$ и $y=4x^2-3x+2$.	$y=\left(\frac{5-3}{2}\right)x-\frac{(5-(-3))^2}{16\cdot 4}+2$	$y=x+1$
…	…	
$y=ax^2+bx+c$ и $y=ax^2+dx+c$	Предположение	$y=\left(\frac{b+d}{2}\right)x-\frac{(d-b)^2}{16a}+c$
$y=ax^2+bx+c$ и $y=ax^2+dx+p$	Предположение	$y=\left(\frac{d+b}{2}+A\right)x-\frac{(b-d)^2}{16a}+B$

5. Выдвижение гипотез

Гипотеза 1

Если даны две различные квадратичные функции $y=ax^2+bx+c$ и $y=ax^2+dx+c$, то уравнение их общей касательной имеет вид: $y=\left(\frac{b+d}{2}\right)x-\frac{(d-b)^2}{16a}+c$, $a,b,c,d\in R,\ a\neq 0, b\neq d$.

Гипотеза 2

Если даны две различные квадратичные функции $y=ax^2+bx+c$ и $y=ax^2+dx+p$, то уравнение их общей касательной имеет вид: $y=\left(\frac{d+b}{2}+A\right)x-\frac{(b-d)^2}{16a}+B$, $a,b,c,d,A,B\in R,\ a\neq 0, b\neq d$.

6. Доказательство истинности гипотезы 1

1. Составим уравнение общей касательной к графикам функций

$$y=ax^2+bx+c \text{ и } y=ax^2+dx+c.$$

Решаем II способом как более рациональным.

Решение. Пусть уравнение общей касательной имеет вид $y=kx+l$, тогда уравнение $ax^2+bx+c=kx+l$ имеет один корень и уравнение $ax^2+dx+c=kx+l$ имеет один корень.

Уравнение $ax^2+(b-k)x+c-l=0$ имеет один корень, если

$$(b-k)^2-4a(c-l)=0 \Rightarrow (b-k)^2=4a(c-l). \qquad (6)$$

Уравнение $ax^2+(d-k)x+c-l=0$ имеет один корень, если

$$(d-k)^2-4a(c-l)=0 \Rightarrow (d-k)^2=4a(c-l). \qquad (7)$$

Из (6) и (7) равенств следует, что $(b-k)^2=(d-k)^2$ $\Rightarrow b+d=2k, k=\dfrac{b+d}{2}$, $(b \neq d)$, тогда $(b-d)^2=4a(c-l) \Rightarrow l=-\dfrac{(b-d)^2}{4a}+c$, следовательно, $y=\left(\dfrac{b+d}{2}\right)x-\dfrac{(d-b)^2}{16a}+c$ – уравнение общей касательной к графикам функций $y=ax^2+bx+c$ и $y=ax^2+dx+c$.

Проверка: (проверку выполним I способом)

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания касательной к графику функции $y=ax^2+bx+c$. Тогда, учитывая результаты решения пункта 2 (уравнение касательной (1)), получим:

$$y=(b+2ax_0)x-ax_0{}^2+c\ , \qquad (8)$$

уравнение касательной к графику функции $y=ax^2+bx+c$, при условии $a<0; a>0,\ b \in R,\ x_0 \in R$.

Аналогично, если x_1 – абсцисса точки касания касательной к графику функции $y=ax^2+dx+c$, тогда

$$y=(d+2ax_1)x-ax_1{}^2+c \qquad (9)$$

уравнение касательной к графику данной функции, при условии $a<0; a>0,\ d \in R,\ x_1 \in R$.

Так как графиком уравнений (8) и (9) является одна и та же прямая, то получим систему уравнений $\begin{cases} b+2ax_0=d+2ax_{1,} \\ -ax_0^2+c=-ax_1^2+c; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0=x_1, \\ b=d \quad \textit{не} \quad \textit{удовлетворяет}; \end{cases} \\ \begin{cases} x_0=-x_1, \\ b+2ax_0=d-2ax_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0=-x_1, \\ 4ax_0=d-b; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow\ x_0=\frac{d-b}{4a};\ x_1=\frac{b-d}{4a}\ \ (a \neq 0).$$

Если $x_0=\dfrac{d-b}{4a}$, то получим уравнение общей касательной

$$y=(b+2a\frac{d-b}{4a})x-a\left(\frac{d-b}{4a}\right)^2+c \quad \Rightarrow\ y=\left(\frac{b+d}{2}\right)x-\frac{(d-b)^2}{16a}+c. \qquad (10)$$

Если $x_1 = \dfrac{b-d}{4a}$, то получим уравнение общей касательной

$$y = (d + 2a\frac{b-d}{4a})x - a\left(\frac{b-d}{4a}\right)^2 + c \quad \Rightarrow \; y = \left(\frac{b+d}{2}\right)x - \frac{(d-b)^2}{16a} + c\,. \qquad (10)$$

Ответ: $y = \left(\dfrac{b+d}{2}\right)x - \dfrac{(d-b)^2}{16a} + c$ при условии $a \in R, a \neq 0,\quad d \in R$, $b \in R$, $d \neq b$, $c \in R$.

Гипотеза I получила подтверждение.

7. **Доказательство истинности гипотезы 2**

Составим уравнение общей касательной к графикам функций:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ и } y = ax^2 + dx + p\,.$$

(Решаем II способом как более рациональным).

Решение. Пусть уравнение общей касательной имеет вид $y = kx + l,$ тогда уравнение $ax^2 + bx + c = kx + l$ имеет один корень и уравнение $ax^2 + dx + c = kx + l$ имеет один корень.

Уравнение $ax^2 + (b-k)x + c - l = 0$ имеет один корень, если $(b-k)^2 - 4a(c-l) = 0 \Rightarrow (-(b-k)^2 + 4ac)/4a = l)$. (11)

Уравнение $ax^2 + (d-k)x + p - l = 0$ имеет один корень, если $(d-k)^2 - 4a(p-l) = 0 \Rightarrow (-(d-k)^2 + 4ap)/4a = l)$. (12)

Из (11) и (12) равенств следует, что $(b-k)^2 - 4ac = (d-k)^2 - 4ap \;\Rightarrow$ $\Rightarrow k = \dfrac{b+d}{2} + \dfrac{2a(p-c)}{b-d}$, ($b \neq d$), тогда $\Rightarrow\; l = (-\left(b - \dfrac{b+d}{2} - \dfrac{2a(p-c)}{b-d}\right)^2 + 4ac)/4a$,

$$l = \frac{c+p}{2} - \frac{(b-d)^2}{16a} - \frac{a(p-c)^2}{(b-d)^2}\,.$$

Следовательно, $y = \left(\dfrac{d+b}{2} + \dfrac{2a(p-c)}{b-d}\right)x - \dfrac{(b-d)^2}{16a} + \dfrac{p+c}{2} - \dfrac{a(p-c)^2}{(b-d)^2}$ – уравнение общей касательной к графикам функций $y = ax^2 + bx + c$ и $y = ax^2 + dx + p$.

Проверка: (проверку выполним I способом).

Составим уравнение общей касательной к графикам функций:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ и } y = ax^2 + dx + p\,.$$

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания касательной к графику функции $y = ax^2 + bx + c$. Тогда, учитывая результаты решения пункта 2 (уравнение касательной (1)), получим:

$$y = (b + 2ax_0)x - a{x_0}^2 + c \qquad (13)$$

уравнение касательной к графику функции $y = ax^2 + bx + c$, при условии $a < 0; a > 0,\ b \in R,\ x_0 \in R$.

Аналогично, если x_1 – абсцисса точки касания касательной к графику функции $y = ax^2 + dx + p$, тогда:

$$y = (d + 2ax_1)x - a{x_1}^2 + p \qquad (14)$$

уравнение касательной к графику данной функции, при условии, что $a < 0; a > 0,\ d \in R,\ x_1 \in R$.

Так как графиком уравнений (13) и (14) является одна и та же прямая, то получим систему уравнений $\begin{cases} b + 2ax_0 = d + 2ax_1, \\ -ax_0^2 + c = -ax_1^2 + p; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = \dfrac{d + 2ax_1 - b}{2a}$, откуда $-a\left(\dfrac{d + 2ax_1 - b}{2a}\right)^2 + c = -a{x_1}^2 + p$.

Далее, осуществляя равносильные переходы, имеем:

$$-\left(d + 2ax_1 - b\right)^2 + 4ac = -4a^2x_1^2 + 4ap\ ,$$

$$d^2 + 4a^2x_1^2 + b^2 + 4adx_1 - 2bd - 4abx_1 - 4ac - 4a^2x_1^2 + 4ap = 0,$$

$-4a(b - d)x_1 = -(b - d)^2 - 4ap + 4ac$, откуда $x_1 = \dfrac{b - d}{4a} + \dfrac{p - c}{b - d}$.

Если $x_0 = \dfrac{d - b}{4a} + \dfrac{p - c}{b - d}$, то получим уравнение общей касательной

$$y = (b + 2a\left(\frac{d - b}{4a} + \frac{p - c}{b - d}\right))x - a\left(\frac{d - b}{4a} + \frac{p - c}{b - d}\right)^2 + c,$$

$$y = \left(\frac{d + b}{2} + \frac{2ap - 2ac}{b - d}\right)x - a\left(\frac{d - b}{4a} + \frac{p - c}{b - d}\right)^2 + c,$$

$$y = \left(\frac{d + b}{2} + \frac{2ap - 2ac}{b - d}\right)x - \frac{(b - d)^2}{16a} + \frac{p + c}{2} - \frac{a(p - c)^2}{(b - d)^2}.$$

Если $x_1 = \dfrac{b - d}{4a} + \dfrac{p - c}{b - d}$, то получим уравнение общей касательной

$$y = \left(\frac{d + b}{2} + \frac{2a(p - c)}{b - d}\right)x - \frac{(b - d)^2}{16a} + \frac{p + c}{2} - \frac{a(p - c)^2}{(b - d)^2}.$$

Ответ: $y=\left(\frac{d+b}{2}+\frac{2a(p-c)}{b-d}\right)x-\frac{(b-d)^2}{16a}+\frac{p+c}{2}-\frac{a(p-c)^2}{(b-d)^2}$, при условии $a\in R, a\neq 0$, $d\in R$, $b\in R$, $d\neq b$, $c\in R$.

8. Вывод

1. Уравнение касательной к графику функции $y=ax^2+bx+c$ имеет вид $y=(b+2am)x-am^2+c$, $a<0; a>0$, $b\in R$, $m\in R$.

2. Квадратичные функции $y=ax^2+bx+c$, $y=ax^2+dx+c$ имеют общую касательную, уравнение которой имеет вид $y=\left(\frac{b+d}{2}\right)x-\frac{(d-b)^2}{16a}+c$, $a,b,c,d\in R$, $a\neq 0, b\neq d$.

3. Квадратичные функции $y=ax^2+bx+c$, $y=ax^2+dx+p$ имеют общую касательную, уравнение которой имеет вид $y=\left(\frac{d+b}{2}+\frac{2a(p-c)}{b-d}\right)x-\frac{(b-d)^2}{16a}+\frac{p+c}{2}-\frac{a(p-c)^2}{(b-d)^2}$, при условии $a\in R, a\neq 0$, $d\in R$, $b\in R$, $d\neq b$, $c\in R$.

Поисково-исследовательская задача № 8

1. Задача

Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x-2$, $x+1$ и на $x-3$ равны соответственно 1, -2, 4. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^3-4x^2+x+6.

Найдите решение более общей задачи.

2. Постановка проблемы

Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x^{2n}-a$, $x^{2n}-b$ и на $x^{2n}-c$ равны соответственно $x-a$, $x-b$, $x-c$. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x^{2n}-a)(x^{2n}-b)(x^{2n}-c)$.

3. Сбор фактического материала (решение частных задач)

Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x-2$, $x+1$ и на $x-3$ равны соответственно 1, -2, 4. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^3-4x^2+x+6.

(I способ решения)

Решение.

Заметим, что $(x-2)(x+1)(x-3) = x^3-4x^2+x+6$ по теореме о делении многочленов с остатком получим, что $P(x) = N(x)(x-2)(x+1)(x-3)+ax^2+bx+c$. $P(2)=1$, $P(-1)=-2$, $P(3)=4 \Rightarrow$

$\begin{cases} 4a+2b+c=1, \\ a-b+c=-2, \\ 9a+3b+c=4; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3a+3b=3, \\ 8a+4b=6; \end{matrix} \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=-2$, тогда остаток от деления многочленов $P(x)$ и x^3-4x^2+x+6 равен $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2$.

(II способ решения)

Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x-2$, $x+1$ и на $x-3$ равны соответственно $1,\ -2,\ 4$. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^3-4x^2+x+6.

Учитывая условие задачи, запишем:

$P(x)=(x-2)N(x)+1$ (1),

$P(x)=(x+1)F(x)-2$ (2),

$P(x)=(x-3)L(x)+4$ (3),

при условии, что $N(x)$, $F(x)$, $L(x)$ не являются нулевыми многочленами.

Левую и правую части равенств (1), (2), (3) умножаем соответственно на многочлены x^2-2x-3, x^2-5x+6, x^2-x-2 и получим:

$$x^2P(x)-2xP(x)-3P(x)=(x^3-4x^2+x+6)N(x)+x^2-2x-3 \quad (4),$$

$$x^2P(x)-5xP(x)+6P(x)=(x^3-4x^2+x+6)F(x)-2x^2+10x-12 \quad (5),$$

$$x^2P(x)-xP(x)-2P(x)=(x^3-4x^2+x+6)L(x)+4x^2-4x-8 \quad (6).$$

Из равенства (4) вычитаем равенство (5). Из равенства (4) вычитаем равенство (6) и получим:

$$3xP(x)-9P(x)=(x^3-4x^2+x+6)(N(x)-F(x))+3x^2-12x+9 \quad (7),$$

$$-xP(x)-P(x)=(x^3-4x^2+x+6)(N(x)-L(x))-3x^2+2x+5 \quad (8).$$

Левую и правую части равенства (8) умножаем на 3 и складываем с равенством 7, тогда получаем:

$-12P(x)=(x^3-4x^2+x+6)(4N(x)-F(x)-L(x))-6x^2-6x+24 \Rightarrow$

$P(x)=-\frac{1}{12}(x^3-4x^2+x+6)(4N(x)-F(x)-L(x))+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2$, следовательно, остаток от деления многочленов $P(x)$ и x^3-4x^2+x+6 равен $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2$.

Дополнительная частная задача № 1

Остатки от деления многочлена $P(x)$ на x^2-a, x^2-b и на x^2-c равны соответственно $x-a$, $x-b$, $x-c$. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x^2-a)(x^2-b)(x^2-c)$.

Учитывая условие задачи, запишем:

$$P(x)=(x^2-a)N(x)+x-a \quad (9),$$

$$P(x)=(x^2-b)F(x)+x-b \quad (10),$$

$$P(x)=(x^2-c)L(x)+x-c \quad (11),$$

при условии, что $N(x)$, $F(x)$, $L(x)$ не являются нулевыми многочленами.

Левую и правую части равенств (9), (10), (11) умножаем соответственно на многочлены $x^4-(b+c)x^2+bc$, $x^4-(a+c)x^2+ac$, $x^4-(a+b)x^2+ab$ и получим:

$$x^4P(x)-(b+c)x^2P(x)+bcP(x)=(x^6-(\grave{a}+b+c)x^4+$$
$$+(ab+bc+ac)x^2-abc)N(x)+x^5-ax^4-(b+c)x^3+(ab+ac)x^2+bcx-abc. \quad (12)$$

$$x^4P(x)-(a+c)x^2P(x)+acP(x)=(x^6-(\grave{a}+b+c)x^4+$$
$$+(ab+bc+ac)x^2-abc)F(x)+x^5-bx^4-(a+c)x^3+(ab+bc)x^2+acx-abc. \quad (13)$$

$$x^4P(x)-(a+b)x^2P(x)+abP(x)=(x^6-(a+b+c)x^4+(ab+bc+ac)x^2-abc)$$
$$L(x)+x^5-cx^4-(a+b)x^3+(ac+bc)x^2+abx-abc. \quad (14)$$

Пусть многочлен $(x^6-(a+b+c)x^4+(ab+bc+ac)x^2-abc)$ равен $R(x)$.

Из равенства (12) вычитаем равенство (13).

Из равенства (12) вычитаем равенство (14) и получаем:

$$(a-b)x^2P(x)+(bc-ac)P(x)=R(x)(N(x)-F(x))+$$
$$+(b-a)x^4+(a-b)x^3+(ac-bc)x^2+(bc-ac)x \quad (15);$$

$(a-c)x^2\,\mathrm{P}(x)+(bc-ab)\,\mathrm{P}(x)=R(x)\,(N(x)-L(x))+$

$+(c-a)x^4+(a-c)x^3+(ab-bc)x^2+(bc-ab)x$ (16).

Левую и правую части равенства (15) делим на $a-b$, $a-b\neq 0$.

Левую и правую части равенства (16) делим на $a-c$, $a-c\neq 0$, получим:

$$x^2\mathrm{P}(x)-c\mathrm{P}(x)=\frac{1}{a-b}(R(x)(N(x)-F(x))-x^4+x^3+cx^2-cx, \quad (17)$$

$$x^2\mathrm{P}(x)-b\mathrm{P}(x)=\frac{1}{a-c}(R(x)(N(x)-L(x))-x^4+x^3+bx^2-bx. \quad (18)$$

Из (17) равенства вычитаем (18), тогда получим равенство

$$(b-c)\mathrm{P}(x)=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}(R(x)(N(x)-F(x)+L(x))+(c-b)x^2+(b-c)x. \quad (19)$$

Левую и правую части равенства (19) делим на $b-c$, $b-c\neq 0$.

$$\mathrm{P}(x)=\frac{1}{(a-b)(a-c)}(R(x)(N(x)-F(x)+L(x))-x^2+x,$$

следовательно, остаток от деления многочленов $\mathrm{P}(x)$ и $x^6-(a+b+c)x^4+(ab+bc+ac)\,x^2-abc$ равен $-x^2+x$.

Аналогично, решив дополнительную задачу № 2 (остатки от деления многочлена $\mathrm{P}(x)$ на x^4-a, x^4-b и на x^4-c равны соответственно $x-a$, $x-b$, $x-c$. Найти остаток от деления многочлена $\mathrm{P}(x)$ на $(x^4-a)(x^4-b)(x^4-c)$), получим остаток $-x^4+x$.

4. Систематизация и анализ полученных результатов

1. Если проанализировать решение каждым способом, то можно отметить, что наибольшее количество операций было выполнено при решении II способом, а наименьшее количество операций было выполнено при решении I способом, но решить более сложные задачи I способом проблематично.

2. Нетрудно увидеть некоторую закономерность и сделать небольшое обобщение (таблица 29).

Таблица 29

Делимое	*Делитель*	*Остаток*
$P(x)$	$(x^2-a)(x^2-b)(x^2-c)$	$-x^2+x.$
$P(x)$	$(x^4-a)(x^4-b)(x^4-c)$	$-x^4+x.$
…	…	…
$P(x)$	$(x^{2n}-a)(x^{2n}-b)(x^{2n}-c)$	$-x^{2n}+x.$

5. Выдвижение гипотезы

Гипотеза

Если остатки от деления многочлена $P(x)$ на многочлены $x^{2n}-a$, $x^{2n}-b, x^{2n}-c$ равны соответственно $x-a$, $x-b$, $x-c$, то остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x^{2n}-a)(x^{2n}-b)(x^{2n}-c)$ равен $-x^{2n}+x$.

6. Доказательство истинности гипотезы

Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x^{2n}-a$, $x^{2n}-b$ и на $x^{2n}-c$ равны соответственно $x-a$, $x-b$, $x-c$. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x^{2n}-a)(x^{2n}-b)(x^{2n}-c)$.

Учитывая условие задачи, запишем:

$$P(x)=(x^{2n}-a)N(x)+x-a, \qquad (20),$$

$$P(x)=(x^{2n}-b)F(x)+x-b, \qquad (21),$$

$$P(x)=(x^{2n}-c)L(x)+x-c, \qquad (22)$$

при условии, что $N(x)$, $F(x)$, $L(x)$ не являются нулевыми многочленами.

Левую и правую части равенств (20), (21), (22) умножаем соответственно на многочлены $x^{4n}-(b+c)x^{2n}+bc$, $x^{4n}-(a+c)x^{2n}+ac$, $x^{4n}-(a+b)x^{2n}+ab$ и получаем:

$$x^{4n}P(x)-(b+c)x^{2n}P(x)+bcP(x)=(x^{6n}-(a+b+c)x^{4n}+(ab+bc+ac)\,x^{2n}-$$
$$-abc)N(x)+x^{4n+1}-ax^{4n}-(b+c)x^{2n+1}+(ab+ac)x^{2n}+bcx-abc, \qquad (23)$$

$$x^{4n}P(x)-(a+c)x^{2n}P(x)+acP(x)=(x^{6n}-(a+b+c)x^{4n}+(ab+bc+ac)\times$$
$$\times x^{2n}-abc)\,F(x)+x^{4n+1}-bx^{4n}-(a+c)x^{2n+1}+(ab+bc)x^{2n}+acx-abc, \qquad (24)$$

$$x^{4n}P(x)-(a+b)x^{2n}P(x)+abP(x)=(x^{6n}-(a+b+c)x^{4n}+(ab+bc+ac)\times$$
$$\times x^{2n}-abc)L(x)+x^{4n+1}-cx^{4n}-(a+b)x^{2n+1}+(ac+bc)x^{2n}+abx-abc, \qquad (25)$$

Пусть многочлен ($x^{6n} - (a+b+c)x^{4n} + (ab+bc+ac)\, x^{2n} - abc$) равен $R(x)$.

Из равенства (23) вычитаем равенство (24).

Из равенства (23) вычитаем равенство (25) и получаем:

$$(a-b)x^{2n}\mathrm{P}(x) + (bc-ac)\mathrm{P}(x) = R(x)(N(x) - F(x)) +$$
$$+ (b-a)x^{4n} + (a-b)x^{2n+1} + (ac-bc)x^{2n} + (bc-ac)x, \qquad (26),$$
$$(a-c)x^{2n}\mathrm{P}(x) + (bc-ab)\mathrm{P}(x) = R(x)(N(x) - L(x)) +$$
$$+ (c-a)x^{4n} + (a-c)x^{2n+1} + (ab-bc)x^{2n} + (bc-ab)x. \qquad (27)$$

Левую и правую части равенства (26) делим на $a-b$, $a-b \neq 0$.

Левую и правую части равенства (27) делим на $a-c$, $a-c \neq 0$, и получим:

$$x^{2n}\mathrm{P}(x) - c\mathrm{P}(x) = \frac{1}{a-b}(R(x)(N(x) - F(x)) - x^{4n} + x^{2n+1} + cx^{2n} - cx, \qquad (28)$$

$$x^{2n}\mathrm{P}(x) - b\mathrm{P}(x) = \frac{1}{a-c}(R(x)(N(x) - L(x)) - x^{4n} + x^{2n+1} + bx^{2n} - bx. \qquad (29)$$

Вычтем равенство (28) из (29), тогда получим равенство

$$(b-c)\mathrm{P}(x) = \frac{b-c}{(a-b)(a-c)}(R(x)(N(x) - F(x) + L(x)) + (c-b)x^{2n} + (b-c)x \qquad (30)$$

Левую и правую части равенства (11) делим на $b-c$, $b-c \neq 0$ и получаем $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}(R(x)(N(x) - F(x) + L(x)) - x^{2n} + x$, следовательно, остаток от деления многочленов $\mathrm{P}(x)$ и $x^{6n} - (a+b+c)x^{4n} + (ab+bc+ac)\, x^{2n} - abc$ равен $-x^{2n} + x$.

7. Вывод

Если остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x^{2n} - a$, $x^{2n} - b$ и на $x^{2n} - c$ равны соответственно $x-a$, $x-b$, $x-c$, то остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x^{2n} - a)(x^{2n} - b)(x^{2n} - c)$ равен $-x^{2n} + x$.

§ 4. ПОИСКОВО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача № 1

Найдите количество нулей числа $\left(\underbrace{200\ldots005}_{2007}\right)^3$.

Проблема: «Найдите количество нулей числа

а) $\left(\underbrace{a00\ldots00b}_{n}\right)^3$; б) $\left(\underbrace{a00\ldots00b}_{n}\right)^4$; в) $\left(\underbrace{a00\ldots00b}_{n}\right)^5$».

Задача № 2

Найдите, на сколько (max) частей разбивают плоскость 10 графиков функции вида у = $a(x-c)^3+d$ (если никакие три графика не пересекаются в одной точке).

Проблема: «Найдите, на сколько (max) частей разбивают плоскость n графиков функции вида у = $a(x-c)^3+d$ (если никакие три графика не пересекаются в одной точке)».

Задача № 3

Найдите на сколько (max) частей разбивают плоскость 10 графиков уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ (если никакие три графика не пересекаются в одной точке).

Проблема: «Найдите, на сколько (max) частей разбивают плоскость n графиков уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ (если никакие три графика не пересекаются в одной точке)».

Задача № 4

Найдите, на сколько (max) частей разбивают плоскость 10 графиков уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ (если никакие три графика не пересекаются в одной точке).

Проблема: «Найдите, на сколько (max) частей разбивают плоскость n графиков уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ (если никакие три графика не пересекаются в одной точке)».

Задача № 5

Исследовать разрешимость уравнения $a^3x^2+b^3x+c^3=0$ в области действительных чисел, если уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни.

Проблема: «Исследовать разрешимость уравнения $a^nx^2+b^nx+c^n=0$ в области действительных чисел, если уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни».

Задача № 6

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}|x-y|+|x+y|=1{,}231,\\ |x|+|y|=2{,}135;\end{cases}$$

Проблема: **«**При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases}|x-y|+|x+y|=a,\\ |x|+|y|=b;\end{cases}$$ имеет решения»?

Задача № 7

Решите уравнение $f(g(g(x))=2$, если $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x^2-1$.

Проблема: «При каких значениях p, q и a $(p,q,a\in R)$:

а) уравнение $f(g(g...g(x)...)=a$ (n-ое количество g) имеет единственный действительный корень, если $f(x)=x^p+1$, $g(x)=x^q-1$;

б) уравнение $f(g(g...g(x)...)=a$ (n-ое количество g) имеет более двух действительный корней, если $f(x)=x^p+1$, $g(x)=x^q-1$»?

Задача № 8

Доказать неравенство:

а) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}>5\sqrt[5]{xy}$; б) $3\sqrt{x}+8\sqrt[8]{y}>11\sqrt[11]{xy}$.

Доказать неравенство более общего вида.

Проблема: **«**При каких значениях a и b неравенство $b\sqrt{x}+a\sqrt[n]{y}>\sqrt[2n]{xy}$ справедливо при всех $x>0, y>0$»?

Задача № 9

Решить уравнение:

а) $|x-3|+|x-5|+|x-7|+|x-9|=25$;

б) $|x-4|+|x-5|+|x-6|+|x-7|+|x-8|=31$.

Решить уравнение более общего вида.

Проблема: «Найдите корни уравнения

$|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+...+|x-a_n|=b$, если $a_1, a_2, ..., a_3 -$ члены арифметической прогрессии».

Задача № 10

Найдите сумму S_{24}, если S_{24} =

$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{24\cdot 25\cdot 26}.$$

Проблема: «Найдите сумму S_n, если

$S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+...$».

Задача № 11

Найдите сумму S_{10}, если $S_{10} = 1^8+2^8+3^8+...+10^8$.

Проблема: «Найдите сумму S_n, если $S_n = 1^8+2^8+3^8+...+n^8$».

Задача № 12

Найти минимальное значение функции $f(x)$, если

$f(x)=10|x-1|+9|x-2|+5|x-3|+4|x-4|+8|x-5|+3|x-6|+4|x-7|$.

Проблема: «Найти минимальное значение функции $f(x)$, если $f(x)=a_1|x-k_1|+a_2|x-k_2|+...+a_n|x-k_n|$,

$0<a_1<a_2<...<a_n$; $0<k_1<k_2<...<k_n$».

Задача № 13

Найдите площадь фигуры, заданной двойным неравенством

$3{,}25 \le |2x-8|+|3y-9| \le 6{,}48$.

Проблема: «Найдите площадь фигуры, заданной неравенством

$m_1 \le |ax-b|+|cy-d| \le m_2$».

Задача № 14

Решите уравнение $3x-1=\frac{1}{2}[x]$.

Проблема: «Исследовать разрешимость уравнения $kx+b=a[x]$».

Задача № 15

Решите уравнение $2x^2+3x=[x]$.

Проблема: «Исследовать разрешимость уравнения $ax^2+bx=[x]$».

Задача № 16

Решите уравнение $0{,}02x+1=2\{x\}$.

Проблема: «Исследовать разрешимость уравнения $kx+b=c\{x\}$».

Задача № 17

Решите уравнение $-3x^2+x=\{x\}$.

Проблема: «Исследовать разрешимость уравнения $ax^2-ax=m\{x\}$».

Задача № 18

Найдите сумму S_{100}, если $S_{100}=x+5x^2+9x^3+\ldots+397x^{100}$.

Проблема: «Найдите сумму S_n, если $S_n=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ – члены арифметической прогрессии с разностью d)».

Задача № 19

Найдите сумму S_{100}, если

$S_{100}=7+77+777+\ldots+\underbrace{777\ldots7}_{100}$.

Проблема: «Найдите сумму S_n, если

$S_n=\overline{a}+\overline{aa}+\overline{aaa}+\ldots+\underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{n}$ (a – цифра, $a\neq 0$)».

Задача № 20

Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2\sqrt{5\sqrt[3]{2\sqrt{5\sqrt[3]{2\sqrt{5\ldots}}}}}}$.

Проблема: «При каких значениях a, b, c и m, n имеет место равенство $\sqrt[m]{a\sqrt{b\sqrt[n]{c\sqrt[m]{a\sqrt{b\sqrt[n]{c\sqrt[m]{a\sqrt{b\sqrt[n]{c\ldots\ldots}}}}}}}}} = \sqrt[19]{256}$?».

Задача № 21

Решите уравнение $3^{\frac{|x|+3}{|x|+1}}+5^{\frac{|x|+2}{|x|+1}}=\sqrt{\dfrac{y^2-4y+1}{y^2-3y+2}}+\sqrt{\dfrac{y^2-3y+2}{y^2-4y+1}}+50$.

Проблема: «При каких значениях a уравнение $2^{\frac{|x|-3}{|x|+1}}+3^{\frac{|x|-2}{|x|+1}}=\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{4z^2-4z+3}{4z^2-3z+2}}+\sqrt{\dfrac{4z^2-3z+2}{4z^2-4z+3}}+70}$ имеет единственное решение»?

Задача № 22

Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x+3$, если касательная проходит через точку $\mathrm{B}(-2;-4)$.

Проблема: «Составить уравнение касательной к графику функции $y=ax^2+bx+c$, если касательная проходит через точку $\mathrm{B}(n;m)$ $(m\neq an^2+bn+c)$».

Задача № 23

Найдите область значения функции $y=\dfrac{12x}{x^2-x-6}$.

Проблема: «Найдите зависимость значений функции $y=\dfrac{kx}{ax^2+bx+c}$ от параметров *a, b, c* и *k*».

Задача № 24

Найдите область значения функции

$$y=2(||\ldots|x-3|-\ldots-3|-3)^{-1}.$$

Проблема: «Найдите зависимость значений функции $y=b(\underbrace{||\ldots|x-a}_{n}|\ldots|-a)^{-1}$ от параметров *a* и *b*».

Задача № 25

Доказать неравенство $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leq 4$, если $x+y=1$.

Проблема: «При каких значениях *a* неравенство $\dfrac{x^{2n}+y^{2n}}{x^{4n}+y^{4n}}\leq a$ справедливо, если $x+y=k$?»

Задача № 26

Доказать неравенство $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^4-x^2y^2+y^4}\leq\dfrac{4}{3}$, если $x+y=1$.

Проблема: «При каких значениях a неравенство $\dfrac{x^{2n}+x^n y^n+y^{2n}}{x^{4n}-x^{2n}y^{2n}+y^{4n}} \le a$ справедливо, если $x+y=k$?»

Задача № 27

Доказать неравенство $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\ldots\cdot\sqrt[256]{256}\le 9$.

Проблема: «При каких значениях a и k неравенство $\sqrt[k]{k}\cdot\sqrt[k^2]{k^2}\cdot\sqrt[k^3]{k^3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[k^n]{k^n}\le a$ справедливо?»

Задача № 28

Доказать неравенство $(a_1+a_2+a_3+a_4)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}\right)\ge 16$

Проблема: «При каких значениях k неравенство $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}+\ldots+\dfrac{n}{a_n}\right)\ge k$ справедливо, если $a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ \ldots,\ a_n>0$?»

Задача № 29

Найдите количества корней многочлена $P(x)$ в зависимости от параметров *p* и *q*:

а) $P(x)=x^3-px+q$; б) $P(x)=x^4-px+q$.

Проблема: «Найдите количества корней многочлена $P(x)$ в зависимости от параметров *p* и *q*, если $P(x)=x^n+px^k+q\ \ (n>k)$».

Задача № 30

Найдите корни уравнения

$$\left|\log_a x-1\right|+\left|\log_{\sqrt{a}} x-3\right|+\left|\log_{\sqrt[3]{a}} x-5\right|=10.$$

Проблема: «Исследовать разрешимость уравнения

$$\left|\log_a x-m_1\right|+\left|\log_{\sqrt{a}} x-m_2\right|+\left|\log_{\sqrt[3]{a}} x-m_3\right|+\ldots+\left|\log_{\sqrt[n]{a}}-m_n\right|=b».$$

Задача № 31

Найдите производную $y^{(10)}$, если $y=\dfrac{2x}{x+4}$.

Проблема: «Найти производную $y^{(n)}$, если $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$».

Задача № 32

Найдите интеграл $\int \frac{\cos \frac{x+\pi}{2}}{\sin^3 \frac{x-\pi}{2}} dx$.

Проблема: «Найти интеграл $\int \frac{\cos^n \frac{x+\alpha}{2}}{\sin^{n+2} \frac{x-\alpha}{2}} dx$ ».

Задача № 33

Найдите интеграл $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x} dx$.

Проблема: «Найти интеграл $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x} dx$ ».

Задача № 34

В треугольнике ABC AB = 5, BC = 12. При каких значениях AC имеет место равенство $\frac{AB\cos\angle C + BC\cos\angle A + AC\cos\angle B}{AB\sin\angle B + BC\sin\angle C + AC\sin\angle A} = \frac{P}{9R}$.

Проблема: «Найти соотношения между сторонами треугольника, удовлетворяющего равенству $\frac{c\cos\angle C + a\cos\angle A + b\cos\angle B}{a\sin\angle B + b\sin\angle C + c\sin\angle A} = \frac{P}{9R}$, где a, b, c – стороны треугольника, P – периметр треугольника, R – радиус описанной окружности».

Задача № 35

Доказать, что для любой точки O, лежащей внутри треугольника ABC, при AB = 5, BC = 3, AC = 4 справедливо неравенство $\mathrm{OA}\cos\frac{\angle BAC}{2} + \mathrm{OB}\cos\frac{\angle ABC}{2} + \mathrm{OC}\cos\frac{\angle ACB}{2} \geq 12$.

Проблема: «При каких значениях *a*, для любой точки O, лежащей внутри треугольника ABC, справедливо неравенство $\mathrm{OA}\cos\frac{\angle BAC}{2} + \mathrm{OB}\cos\frac{\angle ABC}{2} + \mathrm{OC}\cos\frac{\angle ACB}{2} \geq a$?»

Задача № 36

Найдите площадь фигуры, заданной неравенством:

$$(|x|-3)^2 + (|y|-5)^2 \leq 4 .$$

Проблема 1: «Найти площадь фигуры, заданной неравенство:

$$(|x|-a)^2+(|y|-b)^2 \le d \text{ »}.$$

Проблема 2: «Найти объем фигуры, заданной неравенством

$$(|x|-a)^2+(|y|-b)^2+(|z|-c)^2 \le d \text{ »}.$$

Задача № 37

Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, для которого величина $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1$ наименьшая, если длина одной из сторон равна 1.

Проблема: «Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, для которого величина $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ наименьшая».

Задача № 38

Пусть AA_1, BB_1, CC_1– биссектрисы треугольника ABC. Найдите $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$, если AB = 5, BC = 6, AC = 7.

Проблема: «Пусть AA_1, BB_1 CC_1– биссектрисы треугольника ABC. Найти $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$, если AB = c, BC = a, AC = b».

Задача № 39

Доказать неравенство $5a^2-\frac{1}{3}b^2+c^2 \ge 4S\sqrt{3}$, где a, b, c – стороны треугольника, S – площадь треугольника.

Проблема: «При каких значениях k неравенство $(2k-1)a^2+\left(\frac{2}{k}-1\right)b^2+c^2 \ge 4S\sqrt{3}$ справедливо? (a, b, c – стороны треугольника, S – площадь треугольника)».

Задача № 40

Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3\ldots A_7$.

Доказать, что $\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$.

Проблема: «Для каких правильных многоугольников $A_1A_2A_3\ldots A_n$ справедливы равенства:

а) $\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$; б) $\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}+\frac{1}{A_1A_2}$?»

Задача № 41

Площади оснований усеченной пирамиды равны 4 и 25. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если некоторая плоскость, параллельная основаниям, делит пирамиду на две усеченные пирамиды, в каждую из которых можно вписать сферу.

Проблема 1: «Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если некоторые две плоскости, параллельные основаниям, делят пирамиду на три усеченные пирамиды, в каждую из которых можно вписать сферу».

Проблема 2: «Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если некоторые n плоскостей, параллельные основаниям, делят пирамиду на $n+1$ усеченных пирамид, в каждую из которых можно вписать сферу».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авдеев Ф.С.* Научно-методические основы профессиональной подготовки будущего учителя математики сельской малокомплектной школы: Автореф. дис. … докт. пед. наук. М., 1994. 34 с.
2. *Агалаков С.А.* Пособие для подготовки к тестированию по математике: 2-е изд., испр. и доп. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2000. 124 с.
3. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Сов. радио, 1970. 69 с.
4. *Амелькин В.В., Рабцевич В.И.* Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. М.: Изд-во МнАСАР, 1996. 384 с.
5. *Андреев В.И.* Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности: Метод. пособие. М.: Высш. школа, 1981. 240 с.
6. *Андреев В.И.* Диалектика воспитания и самовоспитания творческой личности. Казань: Изд-во Казанский ун-т, 1988. 84 с.
7. *Анисимова Л.Н.* Теория и практика профессионально-графической подготовки учителя технологии в педагогических вузах: Автореф. дис. … док. пед. наук. М: Изд-во МПУ, 1998. 38 с.
8. *Антоненко Н.И.* Формирование умений учащихся в исследовании стереометрических задач и их решений: Автореф. дис. … канд. пед. наук. Киев, 1979. 17 с.
9. *Арнольд В.Д. и др.* Итоговая аттестация по алгебре и началам анализа в XI классах школ г. Москвы // Математика в школе. 2001. № 9. С. 22–23.
10. *Артемов А.К.* Приемы организации развивающего обучения // Начальная школа. 1995. № 3. С. 35–39.
11. *Артемов А.К.* Учебные задачи в обучении математике // Начальная школа. 1994. № 5. С. 75–77.
12. *Арюткина С.В.* Формирование обобщенных приемов решения уравнений и неравенств с параметрами у учащихся 8-9 классов с

усиленной математической подготовкой: Автореф. дис. … канд. пед. наук. Саранск, 2002. 18 с.

13. *Асмус В.Ф.* Проблемы интуиции в философии и математике. М.: Просвещение, 1965. 67 с.

14. *Бабанский Ю.К., Харьковская В.Ф.* Проблемы оптимизации процесса обучения математике // Изучение возможностей школьников в усвоении математики: Сб. науч. тр. М.: Изд-во НИИ школ, 1977. 328 с.

15. *Бабанский Ю.К.* Методы обучения в современной общеобразовательной школе. М.: Просвещение, 1985. 28 с.

16. *Бабанский Ю.К.* Оптимизация учебно-воспитательного процесса. М.: Просвещение, 1982. 192 с.

17. *Бабурова З.Ф.* Практические работы в IV-VIII классах // Математика в школе. 1982. № 5. С. 17–20.

18. *Байков Ф.Я.* Воспитание у школьников интереса к исследовательской работе // Советская педагогика. 1965. № 7. С. 23–25.

19. *Баранова Е.В.* Методические основы использования учебных исследований при обучении геометрии в основной школе: Автореф. дис. … канд. пед. наук. Саранск, 1999. 17 с.

20. *Баранова Т.И.* Исследовательский метод обучения в теории и практике общеобразовательной школы РСФСР (1917–1931). Дисс. … канд. пед. наук. М., 1974. 186 с.

21. *Белошистая А.В.* Математическое развитие ребенка в системе дошкольного и начального школьного образования: Автореф. дис. на соиск. уч. степени докт. пед. наук. М.: Изд-во МПГУ, 2004. 43 с.

22. *Березовин Н.А., Сманцер А.П.* Воспитание у школьников интереса к учению. Минск: Народная асвета, 1987. 75 с.

23. *Бескин Л.Н.* Стереометрия: Пособие для учителей средней школы. 2-е изд., доп. М.: Просвещение, 1971. 414 с.

24. *Беспалько Б.П.* Слагаемые педагогической технологии. М.: Педагогика, 1989. 190 с.

25. *Блох А.Ш., Трухан Т.Л.* Неравенства. Минск: Народная асвета, 1972. 53 с.
26. *Богоявленская Д.Б.* Об одном из подходов к исследованию интеллектуальности творчества // Вопросы психологии. № 4. 1994. С. 69–79.
27. *Богоявленский Д.Н. Менчинская Н.А.* Психология усвоения знаний в школе. М.: АПН РСФСР, 1959. 348 с.
28. *Бойцов М.И.* Приобщение учащихся к исследовательской работе в обучении (на материале преподавания гуманитарных дисциплин): Автореф. дис. … канд. пед. наук. М., 1975. 17 с.
29. Большая советская энциклопедия. Т. 10. М., 1972. 592 с.
30. Большая советская энциклопедия. Т. 49. М., 1957. 589 с.
31. *Бондаревский В.Б.* Воспитание интереса к знаниям и потребности к самообразованию: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1985. 144 с.
32. *Борисов С.М.* Нахождение области значения функции через введение параметра // Математика в школе. 1995. № 5. С. 32–33.
33. *Брунер Дж.* Психология познания / Пер. с англ. яз., предисловие и общ. ред. А.Р. Лурия. М.: Профессия, 1977. 412 с.
34. *Брушлинский А.В.* Психология мышления и проблемное обучение. М.: Знание, 1983. 95 с.
35. *Буловацкий М.П.* Разнообразить виды задач // Математика в школе. 1988. № 5. С. 37–39.
36. *Бунаков Н.Ф.* Избранные педагогические сочинения. Вводная статья проф. В.З. Смирнова. М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1953. 392 с.
37. *Бурбаки Н.* Архитектура математики // Математическое просвещение. М.: Просвещение. 1960 № 5, 137 с.
38. *Вагин В.В.* Повторение, обобщение и систематизация знаний по математике // Начальная школа. 1976. № 4. С. 29–31.
39. *Важенин Ю.М.* Самоучитель решения задач с параметрами. 2-е изд., исп. и доп. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1997. 56 с.

40. *Викол Б.А.* Формирование элементов исследовательской деятельности при углубленном изучении математики: Дис. … канд.пед.наук. М., 1977. 183 с.
41. *Вилькеев Д.В.* Роль гипотезы в обучении // Советская педагогика. 1967. № 6. С. 31–35.
42. *Внукова И.П.* Разработка исследовательского метода проверки знаний // Советская педагогика. 1981. № 4. С. 98–103.
43. Возрастная и педагогическая психология / Под ред. М.В. Гализо, М.В. Матюхиной, Т.С. Михальчик. М.: Просвещение, 1984. 256 с.
44. *Волкова Н.Д.* Исследовательская деятельность учащихся при изучении геометрии как средство развития их творческого мышления: Автореф. дис. … канд. пед. наук. Киев, 1972. 18 с.
45. *Вольпер Е.Е.* Задачи по математике. Ч. 1: Уравнения и неравенства / ОмИПКРО; Школа-лицей № 66. Омск, 1998. 64 с.
46. *Всесвятский Б.В.* Творческая активность учащихся при изучении биологии: Сборник статей. сост. Б.В. Всесвятский. М.: Просвещение, 1965. 270 с.
47. Вступительные экзамены в ВУЗы // Математика в школе. 1999. № 2. С. 61.
48. Вступительные экзамены в ВУЗы // Математика в школе. 2001. № 2. С. 64.
49. Вступительные экзамены в ВУЗы // Математика в школе. 2002. № 2. С. 27–72.
50. *Выготский Л.С.* Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте / Педагогическая психология. М.: Педагогика, 1991. 290 с.
51. *Гальперин П.Я., Котин Н.Р.* К психологии творческого мышления // Вопросы психологии. 1972. № 3. С. 80–84.
52. *Гальперин П.Я.* Методы обучения и умственного развития ребенка. М.: Изд-во МГУ, 1995. 208 с.
53. *Гельфман Э.Г., Холодная Н.А.* Психологический аспект исследования задач на уроках математики // Роль и место задач в фор-

мировании системы основных знаний. Сб. науч. работ. М.: Изд-во НИИ школ МП РСФСР, 1976. С. 22–34.

54. *Герд А.Я.* Избранные педагогические труды. М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1953. 487 с.

55. *Глейзер Г.Д.* Психолого-математические основы развития пространственных представлений при обучении геометрии // Преподавание геометрии в 9–10 классах / Сост. З.А. Скопец, Р.А. Хабиб. М.: Просвещение, 1980. С. 253–259.

56. *Головина Л.И. Яглом И.М.* Индукция в геометрии. М.: Изд-во «Физматгиз», 1961. 99 с.

57. *Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами. 3-е изд., доп. и перераб. М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. 336 с.

58. *Готман Э.Г.* Вариации задачи о квадрате и вписанном в него треугольнике // Математика в школе. 1991. № 1. С. 26–27.

59. *Готман Э.Г., Скопец З.А.* Задача одна – решения разные. К.: Род. шк., 1988. 173 с. (Сер. «Когда сделаны уроки»).

60. *Григорьева Т.П.* Творческие задания по геометрии для VII класса // Математика в школе. 1990. № 3. С. 17–19.

61. *Груденов Я.И.* Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 224 с.

62. *Губа С.Г.* Развитие у учащихся интереса к поиску и исследованию математических закономерностей // Математика в школе. 1972. № 3. С. 19–21.

63. *Гуревич К.М., Дубровина И.В.* Психологическая коррекция умственного развития учащихся. М.: Изд-во «Олимпик», 1990. 212 с.

64. *Гусев В.А.* Как помочь ученику полюбить математику? Ч.1. М.: Изд-во «Авангард», 1994. 168 с.

65. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003. 432 с.

66. *Давыдов В.В.* О понятии развивающего обучения // Педагогика. 1995. № 1. С. 29–39.
67. *Давыдов В.В.* Проблемы развивающего обучения. М.: Педагогика, 1986. 415 с.
68. *Далингер В.А.* Все для обеспечения успеха на выпускных и вступительных экзаменах по математике. Нестандартные уравнения и неравенства и методы их решения: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1995. 120 с.
69. *Далингер В.А.* Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. 366 с.
70. *Далингер В.А.* Методические рекомендации к проведению обобщающего повторения // Математика в школе. 1993. № 1. С. 10–12.
71. *Далингер В.А.* Обучение учащихся доказательству теорем: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОГПИ – НГПИ, 1990. 127 с.
72. *Далингер В.А.* О тематике учебных исследований // Математика в школе. № 9. 2000. С. 7–10.
73. *Далингер В.А.* Равновеликие и равносоставленные плоские и пространственные фигуры: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1994. 123 с.
74. *Далингер В.А.* Типичные ошибки по математике на выпускных и вступительных экзаменах и как их не допускать. Омск: Изд-во ИУУ, 1991. 129 с.
75. *Далингер В.А.* Формирование визуального мышления у учащихся в процессе обучения математике: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999. 157 с.
76. *Далингер В.А., Толпекина Н.В.* Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004. 264 с.
77. Дидактика средней школы / Под ред. М.А. Данилова и М.Н. Скаткина. М.: Просвещение, 1975. 303 с.

78. *Дистерверг А.* Избранные педагогические сочинения. М.: Учпедгиз, 1956. 367 с.
79. *Домкина Г., Лаптева Т.* В одной задаче почти вся планиметрия // Математика. 1999. № 40. С. 28–30.
80. *Дорофеев Г.В.* О составлении циклов взаимосвязанных задач. // Математика в школе. 1983. № 6. С. 34–36.
81. *Дорфман А.Г.* Оптика конических сечений. М.: Физматгиз, 1959. 60 с.
82. *Епишева О.Б., Крупич В.И.* Учить школьников учиться математике. Формирование приемов учебной деятельности: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 128 с.
83. *Ефремов А.В.* Повышение эффективности педагогического руководства творческой познавательной деятельностью учащихся (на примере преподавания математики в 9–10 классах): Автореф. дис. … канд. пед. наук. М., 1979. 16 с.
84. *Загвязинский В.И.* Методология и методика дидактического исследования: Монография. М.: Педагогика, 1982. 190 с.
85. *Заир-Бек Е.С.* Организационное сопровождение образовательных программ / Модернизация образования на рубеже веков. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена. 2001. с. 69–75.
86. *Зильберберг Н.И.* Урок математики: Подготовка и проведение: Кн. для учителя. М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1995. 178 с.
87. *Иванова Т.А.* Методология научного поиска – основа развивающего обучения // Математика в школе. 1995. № 5. С. 25–28.
88. Из опыта преподавания математики в средней школе: Пособие для учителей / Сост.: А.В. Соколова, В.В. Пикан, В.А. Оганесян. М.: Просвещение, 1979. 192 с.
89. *Икрамов Дж.* Математическая культура школьника: Методические аспекты проблемы развития мышления и языка школьников при обучении математики. Ташкент, 1981. 278 с.
90. *Ивашева О.А., Шереметьева О.В.* Исследовательская деятельность младших школьников в процессе обучения // Актуальные

проблемы математики и методики ее преподавания: Межвузовский сборник научных трудов. Пенза: Изд-во ПГПУ, 2001. 433 с.

91. *Ильясов И.И.* Структура процесса учения. М.: Изд-во МГУ, 1986. 200 с.

92. *Ительсон Л.Б.* Проблемы современной психологии учения. М.: Изд-во "Знание", 1970. 80 с.

93. *Кабанова-Меллер Е.Н.* Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. М.: Просвещение, 1968. 288 с.

94. *Каган В.Ф.* Очерки по геометрии. М: Изд-во МГУ, 1963. 570 с.

95. *Калмыкова З.И.* Психологические принципы развивающего обучения. М.: «Знание», 1979. 48 с.

96. *Калошина И.П.* Психология творческой деятельности: Учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. 431 с.

97. *Калошина И.П.* Структура и механизм творческой деятельности(нормативный подход). М.: Изд-во МГУ, 1979. 168 с.

98. *Каплан Б.С.*, Рузин Н.К., Столяр А.А.. Методы обучения математике: Некоторые вопросы теории и практики Под ред. А.А. Столяра. Минск: Нар. асвета. 1981. 191 с.

99. *Каплан М.З.* Учебное исследование как метод обучения математике в средней школе. Минск: Изд-во БПУ, 1985. 170 с.

100. *Каплан М.З.* Учебное исследование как метод обучения математике в средней школе: Дис. … канд. пед. наук. Минск, 1985. 175 с.

101. *Каптерев П.Ф.* Избранные педагогические сочинения / Под ред. А.М. Арсеньева. М.: Педагогика, 1982. 704 с.

102. *Карелин Л.З.* Задачи на исследование в школьном курсе геометрии: Дис. … канд. пед. наук. Киев, 1968. 167 с.

103. *Клещева И.В.* Учебное исследование в математике // Модернизация школьного математического образования и проблемы подготовки учителя математики: Труды XXI Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педаго-

гических вузов. / Под ред. В.В. Орлова. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2002. С. 137–138.

104. *Клименченко Д.В.* Воспитывать исследовательские навыки // Математика в школе. 1972. № 3. С. 26–27.

105. *Колмогоров А.Н.* О профессии математика. М.: Советская наука, 1954. 32 с.

106. *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. Ч.1. М.: Просвещение, 1977. 109 с.

107. *Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. и др.* Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика. М.: Просвещение, 1977. 480 с.

108. *Коменский Я.А.* Великая дидактика. Изб. пед. соч. – М., 1955. 563 с.

109. *Кормихин А.А.* Об уравнениях с параметрами // Математика в школе. 1994. № 1. С. 16–23.

110. *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник. М.: Изд-во «Наука», 1975. С. 217.

111. *Коротяев В.И.* Учение – процесс творческий. М.: Просвещение, 1989. 159 с.

112. *Кочарова К.С.* Об уравнениях с параметром и модулем // Математика в школе. 1995. № 2. С. 34–35.

113. *Крамор В.С.* Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. М.: Просвещение, 1992. 320 с.

114. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей. М.: Просвещение, 1968. 432 с.

115. *Крыговская А.С.* Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии // Математика в школе. 1966. № 6. С. 19–30.

116. *Кудрявцев Т.В.* Система проблемного обучения: Проблемное и программированное обучение / Под ред. Т.В. Кудрявцева и А.М. Матюшкина. М., 1973. 325 с.

117. *Кулько В.А., Цехмистрова Т.Д.* Формирование у учащихся умений учиться. М.: Просвещение, 1983. 80 с.
118. *Кумоткин Ю.Н., Сухобская Г.С.* Развитие творческого мышления школьников. Л.: Изд-во «Знание», 1967. 39 с.
119. *Кухарчик П.Д., Федосенко В.С., Азаров А.И.* Как успешно сдать экзамены в ВУЗ. Методы решения задач с параметрами. Минск: Изд-во БГУ, 1995. 217 с.
120. *Кушнер И.А.* Воспитание творческой активности на уроках повторения геометрии // Математика в школе. 1991. № 1. С. 12–16.
121. *Кушнер И.А.* Об исследовании неопределенности в геометрических задачах // Математика в школе. 1998. № 1. С. 69–71.
122. *Ларькина Е.В.* Методика формирования элементов исследовательской деятельности учащихся основной школы на уроках геометрии: Автореф. дис. … канд. пед. наук. М., 1996. 17 с.
123. *Лейтес Н.С.* Умственные способности и возраст. М.: Педагогика, 1971. 273 с.
124. *Леонтьев А.Н.* Деятельность. Сознание. Личность: Монография. 2-е изд. М.: Политиздат, 1977. 304 с.
125. *Лернер И.Я.* Дидактические основы методов обучения. М.: Педагогика, 1981. 185 с.
126. *Лернер И.Я.* К вопросу об исследовательском методе в обучении // Советская педагогика. 1963. № 10. С. 53–57.
127. *Лернер И.Я.* Поисковые задачи в обучении как средство развития творческих способностей // Научное творчество. М.: Педагогика, 1969. 79 с.
128. *Лернер И.Я.* Проблемное обучение. М.: Педагогика, 1974. 143 с.
129. *Лернер И.Я., Скаткин М.Н.* О методах обучения // Советская педагогика. 1965. № 3. С. 41–43.
130. Логика научного исследования / Под ред. В.П. Копнина и М.В. Поповича. М.: Наука, 1965. 360 с.
131. *Черкасов О.Ю., Якушев А.Г.* Математика для поступающих в серьезные вузы. М.: Московский лицей, 1998. 400 с.

132. *Матюшкин А.И.* Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Педагогика, 1985. 208 с.
133. *Махмутов М.И.* Организация проблемного обучения в школе. М., 1977. 240 с.
134. *Махмутов М.И.* Проблемное обучение. Основные вопросы теории. М.: Педагика, 1975. 368 с.
135. *Мелхорн Г.А.* Гениями не рождаются. М.: Просвещение, 1983.
136. *Огонесян В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. и др.* Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. институтов / 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1980. 368 с.
137. *Мирский Э.М.* Проблемное обучение и моделирование социальных условий научного творчества // Научное творчество. М., 1969. с. 97–128.
138. *Муравин Г.К.* Исследовательские работы в школьном курсе алгебры // Математика в школе. 1990. № 1. С. 43–46.
139. *Немов Р.С.* Психология: Учеб. для студентов высш. пед. учеб. заведений: В 3 кн. Кн. 3. Психодиагностика. Введение в научное психологическое исследование с элементами математической статистики. 3-е изд. М.: Гумат. изд. центр ВЛАДОС, 1998. 632 с.
140. *Новиков Н.И.* Избранное / Сост. В.А. Мильчиной. М.: Правда, 1983. 511 с.
141. Общая психология / Под ред. проф. А.В. Петровского. М.: Просвещение, 1970. 316 с.
142. Одаренные дети: Пер. с англ. / общ. ред. Г.В. Бурминской и В.М. Слуцкого. М.: Прогресс, 1991. 380 с.
143. *Оконь В.* Основы проблемного обучения. М.: Просвещение, 1968. 208 с.
144. *Окунев А.А.* Уроки одной задачи // Математика в школе. 1981. № 6. С. 22–23.

145. *Окунев А.А.* Спасибо за урок, дети! О развитии творческих способностей учащихся: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1988. 128 с.
146. *Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И.* Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. М.: Изд-во МГУ, 1991. 342 с.
147. *Орлова Л.Э.* Исследование геометрических ситуаций как метод реализации деятельностного подхода в обучении геометрии: Дисс. … канд. пед. наук. М. 1993. 178 с.
148. *Орлова Л.Э.* Маленькие исследования на геометрическом материале // Математика в школе. 1990. № 6. с. 29–31.
149. *Орлова Л.Э., Столяр А.А.* Геометрические ситуации и связанные с ними задачи // Математика в школе. 1987. № 5. С. 33–34.
150. *Григорьева Т.П., Иванова Т.А., Кузнецова Л.И. и др* Основы технологии развивающего обучения математике: Учеб. пособие. Н. Новгород: Изд-во НГПК, 1997. 134 с.
151. *Охтеменко О.В.* Исследовательские задания как средства формирования познавательного интереса и развития математического мышления учащихся на уроках алгебры в основной школе: Автореф. … канд. пед. наук. М., 2003. 18 с.
152. *Петров К.* Активизация работы ученика // Математика в школе. 1980. № 6. С. 14–16.
153. *Петрова Е.С.* Организация познавательной деятельности учащихся старших классов средней школы в условиях углубленного изучения математики: Учеб. пособие. Саратов, 1991. 79 с.
154. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М.: Просвещение, 1969. 659 с.
155. *Пидкасистый П.И.* Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении: Теоретико-экспериментальное исследование. М., 1980. 240 с.
156. Повышение эффективности обучения математике в школе // Из опыта работы / Сост. Г.Д. Глейзер. М.: Просвещение, 1989. 240 с.

157. *Подласый И.П.* Педагогика. Новый курс: Учебник для студ. пед. вузов: В 2 кн. кн.1: Общие основы. Процесс обучения. М.: Гуманит.изд.центр ВЛАДОС, 1999. 576 с.
158. *Пойа Д.* Как решать задачу. Львов: Квантор. 1983. 215 с.
159. Показательные и логарифмические функции: Дидакт. материалы по курсу алгебры и начал анализа для 10–11 кл. ср. шк. / Под ред. М.И. Башмакова. СПб.: Свет, 1997. 79 с.
160. *Половцов В.В.* Избранные педагогические труды. / Ред., вступ. статья и коммент. действ. член АПН РСФСР Б.Е. Райкова. М.: Изд-во Акад. пед. наук, 1957. 374 с.
161. *Пономарев Я.А.* Психология творческого мышления. М.: Педагогика, 1960. 268 с.
162. Программы общеобразовательных учреждений: Математика. М.: Просвещение, 1996.
163. Программы общеобразовательных учреждений: Математика. М.: Просвещение, 1999.
164. Психолого-педагогические основы обучения математике в средней школе. Ч.1. М.: Прометей, 1992. 112 с.
165. *Пуанкаре А.* Математическое творчество. СпБ., 1909. 155 с.
166. *Раджабов М.Б.* Формирование исследовательских умений и навыков учащихся неполной средней школы при изучении курса геометрии: Автореф. дис. … канд. пед. наук. Моск. гос. пед. институт им. В.И. Ленина. М., 1988. 18 с.
167. *Радионов М.А.* Теория и методика формирования учебной деятельности школьников в процессе обучения математике: Автореф. … док. пед. наук. Саранск, 2001. 42 с.
168. *Райков Б.Е., Ульянинский В.Ю., Ягодовский К.П.* Исследовательский метод в педагогической работе. Л.: Госиздат, 1924. 68 с.
169. *Ребер А.* Большой толковый психологический словарь. Т.4. М., 2000.
170. *Рогановский Н.М.* Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие. Минск: Выш. шк., 1990. 267 с.

171. *Рожков М.И., Байбородова Л.В.* Организация воспитательного процесса в школе: Учеб. пособие для вузов. М.: Гуман. изд. центр ВЛАДОС, 2000. 254 с.
172. *Рубинштейн С.Л.* О мышлении и путях его исследования. М., 1959. 148 с.
173. *Рубинштейн С.Л.* Проблемы общей психологии. М.: Педагогика, 1976. 416 с.
174. *Рыбникова М.А.* Избранные труды: К 100-летию со дня рождения. М.: Педагогика, 1985. 248 с.
175. *Саранцев Г.И.* Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-ов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.
176. *Саранцев Г.И.* Из опыта обучения геометрии в 5–8 классах // Из опыта преподавания математики в средней школе: Пособ. для учит. / Сост.: А.В. Соколова, В.В. Пикан, В.А. Оганесян. М.: Просвещение, 1979. 192 с.
177. *Саранцев Г.И.* Упражнения в обучении математике. Т.4. М.: Просвещение, 1995. 240 с.
178. *Скаткин М.Н.* Совершенствование процесса обучения. М., 1971. 129 с.
179. *Скаткин М.Н., Лернер И.Я.* Ознакомление учащихся с методами науки как средство связи обучения с жизнью // Советская педагогика. 1963. № 10. С. 28–30.
180. Словарь русского языка: В 4-х т. / АН ССР, Ин-т рус. яз. // Под ред. А.П. Евгеньевой. 3-е изд. Стереотип. М.: Русский язык, 1985–1988. Т.1. 1985. 686 с.
181. *Совертков П.И.* Диагностика формирования поисково-исследовательской деятельности учащихся // Северный регион: наука, образование, культура. Сургут: Изд-во СурГУ, 2003. Выпуск № 1(7). С. 59–68.

182. *Совертков П.И.* Формирование исследовательской деятельности учащихся // Северный регион: наука, образование, культура. Сургут: Изд-во СурГУ, 2002. Выпуск № 2(6). С. 79–88.
183. *Соколов В.Н.* Педагогическая эвристика: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Аспект-пресс, 1995. 254 с.
184. *Талызина Н.Ф.* Формирование познавательной деятельности младших школьников: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1988. 175 с.
185. *Теплов Б.М.* Ум полководца // Хрестоматия по общей психологии: Психология мышления. М.: Педагогика, 1990. 208 с.
186. Тест умственного развития для абитуриентов и старшеклассников (АСТУР). Психологический институт РАО, Международный образовательный и психологический колледж, М.: 1995. 59 с.
187. *Токмазов Г.В.* Сборник задач по алгебре для формирования исследовательских умений и навыков учащихся старших классов средней школы: Экспериментальные материалы. М.: Изд-во Прометей МПГУ, 1991. 139 с.
188. *Токмазов Г.В.* Формирование исследовательских умений учащихся в процессе решения задач по алгебре в старших классах средней школы: Автореф. … канд. пед. наук. М., 1992. 16 с.
189. *Толингерова Д., Голоушева Д., Канторкова Г.* Психология проектирования умственного развития детей. Москва - Прага, 1994. 48 с.
190. Тригонометрические функции: Дидакт. материалы по курсу алгебры и начал анализа для 10–11 кл. средней школы / Под ред. М.И. Башмакова. СПб.: Свет, 1997. 77 с.
191. *Тряпицина А.П.* Организация учебно-познавательной деятельности школьников. Л.: Образование, 1989. 189 с.
192. Уравнения и неравенства: Дидакт.материалы по курсу алгебры и начал анализа для 10–11 кл. ср. шк. / Под ред. М.И. Башмакова, СПб.: Свет, 1995. 79 с.

193. *Усачева И.В., Ильясов И.И.* Формирование учебной исследовательской деятельности. Обучение чтению научного текста: (Учеб. пособие к спецкурсу «Методика информационно-поисковой деятельности исследователя»). М.: Изд-во МГУ, 1986. 123 с.
194. *Успенский В.В.* Школьные исследовательские задачи и их место в учебном процессе. Дис. … канд. пед. наук. М., 1967. 186 с.
195. *Ушинский К.Д.* Сочинения. М.: Изд-во АПН РСФСР. Т.2. 500 с.
196. Философский энциклопедический словарь / Ред.: С.С. Аверинцев, Э.А. Араб-Оглы, Л.Ф. Ильичев и др. 2-е изд. М.: Сов. энциклопедия, 1989. 815 с.
197. *Фридман Л.М.* Учитесь учиться математике: Кн. для учащихся. М.: Просвещение, 1985. 112 с.
198. *Фридман Л.М.* Психологический справочник учителя. М.: Совершенство, 1998. 288 с.
199. *Хазанкин Р.Г.* Развивать творческие способности школьников // Математика в школе. 1989. № 2. С. 29–31.
200. *Харитонов И.О.* Системный подход к проблеме теоретико-методического анализа задач с параметрами // Проблемы реализации творческого потенциала личности в процессе обучения математике: Сб. научн. трудов/ Екатеринбург: Изд-во УрГПУ, 2000. С. 93–106.
201. *Харитонов И.О.* Функционально-содержательные отношения и эвристические приемы в задачах с параметрами. // Проблемы реализации творческого потенциала личности в процессе обучения математике: Сб. научн. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрГПУ, 2000. С. 106–119.
202. *Харитонов И.О.* Совершенствование математической подготовки абитуриентов в системе внешкольного довузовского образования: Дис. … канд. пед. наук. Екатеринбург, 2000. 216 с.
203. *Цукарь А.Я.* Дополнительная работа над задачей // Математика в школе. 1982. № 1. С. 42–44.

204. *Цукарь А.Я.* Элементы исследовательской деятельности учащихся при обучении математике // Начальная школа. 1991. № 1. С. 35–37.
205. *Шакирова Н.* Способность обобщать и анализировать // Учитель. 2000. № 6. С. 12–14.
206. *Шапоринский С.А.* Обучение и научное познание. М.: Педагогика, 1981. 208 с.
207. *Шаров А.С.* Психология образования и развития человека: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1996. 150 с.
208. *Шарыгин И.Ф.* Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 1994. 252 с.
209. *Шарыгин И.Ф., Голубев В.И.* Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. общеобразоват. учреждений. 2-е изд. М.: Просвещение, 1995. 384 с.
210. *Щеглов Г.Н.* Развитие навыков исследовательской работы в математической игре // Математика в школе. 1967. № 2. С. 60–61.
211. *Шелонцев В.А., Ждан Н.А., Малонушенко Н.Г.* Развитие творческого мышления учащихся при решении качественных химических задач: Учеб. пособие. Омск, 1994. 64 с.
212. *Шестаков С.А., Юрченко Е.В.* Уравнения с параметрами. М.: Просвещение, 1993.
213. *Шубинский В.С.* Педагогика творчества учителя // Новое в жизни, науке и технике. Серия «Педагогика и психология». М.: Знание, 1988. № 8. 96 с.
214. *Эрдниев П.М.* Преподавание математики в школе (Из опыта обучения методом укрупненных упражнений). М.: Просвещение, 1978. 304 с.
215. *Эльконин Д.Б.* Избранные педагогические труды. М.: Педагогика, 1989. 432 с.
216. *Якиманская И.С.* Развивающее обучение. М.: Педагогика, 1979. 144 с.

217. *Ястребинецкий Г.А.* Задачи с параметрами. М.: Просвещение, 1986. 126 с.

218. *Torrnace E.P.* The nature of creativity as maintest in its testing // Jn: R.J. Sternberg (Ed) The nature of creativity. N.-Y.: Cambridge University Press, 1988. P. 43–75.

Виктор Алексеевич Далингер

Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике:
Учебное пособие

Компьютерная верстка А.А.Козлова

В авторской редакции.

Лицензия ЛР №010074 выдана Министерством печати и полиграфии РФ издательству ОмГПУ

Подписано к печати Формат
Бумага писчая Способ печати оперативный
Усл. печ. л. – Заказ
Тираж

Издательство ОмГПУ, 644099, г. Омск, Набережная Тухачевского, 14