Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Российский государственный политехнический университет
(НПИ) имени М.И. Платова

Е.Д. Стрельцова

МЕТОДОЛОГИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ

Учебное пособие

Новочеркасск
ЮРГПУ (НПИ)
2016

УДК 519.6: 519.615(075.8)
ББК 32.973
С84

Рецензенты:
доктор экономических наук, профессор кафедры
«Информационные системы и прикладная информатика» РГЭУ (РИНХ)
С.М. Щербаков
доктор экономических наук,
профессор кафедры «Информационная экономика» ЮФУ
О.А. Чернова

Стрельцова Е.Д.

С84 **Методология научных исследований. Математическое моделирование как метод научного познания** : учеб. пособие / Е.Д. Стрельцова; Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова. – Новочеркасск : ЮРГПУ (НПИ), 2016. − 92 с.

ISBN 978-5-9997-0610-2

Изложены основы методологии научных исследований, рассмотрены различные уровни научного познания. Отражены аспекты методологического аппарата научных исследований. Уделено внимание системному подходу, как одному из основных направлений методологии научных исследований. Описаны процессы системного анализа, как прикладного аспекта системного подхода. Приведены примеры математического моделирования в процессе исследования систем. Рассмотрены методы и критерии принятия решений. В пособии излагаются основные разделы дисциплин «Методология научных исследований» и «Математическое моделирование».

Учебное пособие предназначено для подготовки магистрантов, обучающихся по направлениям 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.04.04 «Программная инженерия». Это учебное пособие может быть использовано и при изучении курсов экономико-математического моделирования, а также при проведении научных исследований магистрантами направления 09.03.03. «Прикладная информатика» профиля «Прикладная информатика в экономике», а также направления 09.04.03. «Прикладная информатика» профиля «Корпоративные информационные системы». Соответствует содержанию дисциплин «Методология научных исследований» и «Математическое моделирование».

УДК519.6: 519.615(075.8)
ББК 32.973

ISBN 978-5-9997-0610-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современном быстроизменяющемся мире человек может жить и эффективно действовать, лишь обладая определенной психологической гибкостью, готовностью получать и усваивать новую информацию, адаптироваться к экономическим, социальным и психологическим переменам как в обществе и государстве, так и в ближайшем социальном окружении и в своей собственной судьбе. И на этой основе необходимо постоянно перестраивать свою деятельность, осваивать новые виды деятельности и т.д. В связи с этим, для того, чтобы человек в новой общественной исторической эпохе мог осознанно строить свою деятельность, в образовании необходимо предусматривать освоение студентами умений построения и организации своей деятельности: умений целеполагания, проектирования и конструирования, оптимального выбора индивидуального стиля собственной сначала учебной, впоследствии трудовой, профессиональной деятельности, рефлексии ее процесса и результатов и т.д. То есть, человек должен владеть теми компонентами, которые являются основами методологии *как учения об организации деятельности*.

Методология – это учение об организации деятельности человека.

В настоящее время, как никогда, существует потребность в высококвалифицированных специалистах, имеющих хорошую общенаучную и профессиональную подготовку, которые способны к самостоятельной научно-исследовательской, творческой работе. Любая научно-исследовательская деятельность всегда направлена на получение объективно нового результата. Поэтому продуктивная деятельности требует организации. Высококвалифицированные специалисты должны не только хорошо ориентироваться в новых методах научных разработок и исследований, но также уметь внедрять их результаты в производственный процесс.

Настоящее учебное пособие включает в себя: философские аспекты, методологические основы научного познания, методы теоретического исследования, а также вопросы моделирования в научных исследованиях и помогает правильно выбрать направление научного исследования.

1. СУЩНОСТЬ НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ. ПОНЯТИЕ МЕТОДА НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Наука как вид познавательной деятельности

Наука – это такая же область профессиональной человеческой деятельности, как и любая другая – педагогическая, индустриальная и т.п. Единственное специфическое качество науки заключается в том, что если в других отраслях человеческой деятельности используются знания, получаемые наукой, то наука – эта та область деятельности, где основной целью является получение самого научного знания. Наука и определяется как сфера человеческой деятельности, функцией которой является выработка и теоретическая систематизация объективных знаний о действительности.

Наука как феномен – явление чрезвычайно многоаспектное. В любом случае, говоря о науке, необходимо иметь в виду, как минимум, три ее основных аспекта, в каждом конкретном случае четко различая, о чем идет речь:

- наука как социальный институт (сообщество ученых, совокупность научных учреждений и структур научного обслуживания);
- наука как результат (научные знания);
- наука как процесс (научная деятельность).

Единство всей науки,– писал Карл Пирсон в своей «Грамматике науки», – заключается лишь в ее методе, а не в ее материале. Вообще говоря, научный метод представляет собой непрерывный процесс проверки, изменения и развития идей и теорий в соответствии с имеющимися фактическими данными. В известной степени научный метод – это просто развитие обычного рационального подхода, основанного на здравом смысле.

Направление научных исследований, безусловно, в большой мере зависит от круга интересов отдельных ученых и их любознательности, но не менее важное значение имеют разнообразные общественные факторы. Наличие денег и научной аппаратуры, атмосфера, способствующая проведению научных исследований, потребности общества – все это в значительной мере определяет, какими проблемами нужно заниматься и какими – нет. Все эти вопросы выходят за рамки обсуждения научного метода как такового.

Научный метод – главное и наиболее мощное средство рационального познания. Однако он служит лишь средством для достижения цели. А цели выбираются не на рациональной основе.

Рассматривая детально применение научного метода в любой ситуации, можно выделить ряд четко различимых и взаимосвязанных этапов. Первый этап – это этап наблюдений, который можно назвать «естественноисторическим». На этом этапе происходит просто накопление огромной массы разнородного материала, характер которого преимущественно зависит от случайных интересов одного или нескольких исследователей; часть его основана на точных измерениях, а другая часть представляет собой лишь отрывочные описательные данные. Затем предпринимается попытка систематизировать имеющиеся факты и, возможно, получить некоторое систематическое описание всей совокупности данных.

Люди привыкли отождествлять понятия «знание» и «наука», так что не мыслят себе иного знания, кроме научного. В чем его сущность и особенности? Сущность научного метода можно объяснить довольно просто: этот метод позволяет добыть такие знания о явлениях, которые можно проверить, сохранить и передать другому. Отсюда следует, что *наука изучает не вообще всякие явления, а только те из них, которые повторяются. Ее главная задача – отыскать законы, согласно которым эти явления протекают.*

В разное время наука достигала этой цели по-разному. Древние греки внимательно наблюдали явления и затем с помощью умозрения пытались проникнуть в гармонию природы силой интеллекта, опираясь только на данные чувств, накопленные в памяти. В период Возрождения стало очевидно, что поставленная цель не может быть достигнута только с помощью пяти чувств – необходимо изобрести приборы, которые есть не что иное, как продолжение и углубление наших органов чувств. При этом сразу же возникло два вопроса: насколько можно доверять показаниям приборов и как сохранить информацию, полученную с их помощью. Вторая задача была вскоре решена изобретением книгопечатания и последовательным применением математики в естественных науках. Значительно труднее, оказалось, разрешить первый вопрос – о достоверности знаний, полученных с помощью приборов. По существу, он не решен окончательно до сих пор, и вся история научного метода − это история постоянного углубления и видоизменения этого вопроса. Довольно скоро ученные поняли, что показаниям приборов, как правило, можно доверять, то есть они отражают что-то реальное в природе, существующее независимо от приборов. С течением времени знания совершенствуются и позволяют ученым правильно предсказывать более тонкие явления природы.

Факты и понятия науки могут показаться случайными хотя бы потому, что установлены в случайное время случайными людьми и часто при случайных обстоятельствах. Но, взятые вместе, они образуют единую закономерную систему, в которой число связей настолько велико, что в ней нельзя заменить ни одного звена, не затронув при этом всех остальных. Под давлением новых фактов система эта непрерывно изменяется и уточняется, но никогда не теряет цельности и своеобразной законченности. Взятая в целом, система научных понятий − продукт длительной эволюции: в течение многих лет старые звенья в ней заменялись новыми, более совершенными, а совсем новые понятия всегда возникали с учетом и на основе прежних.

Наука (в нынешнем понимании этого слова) существует не более 300–400 лет. За такой ничтожный срок она полностью изменила образ жизни цивилизованных народов, их отношение к миру, способ мышления и даже моральные категории. Современная наука развивается очень быстрыми темпами, в настоящее время объем научных знаний удваивается каждые 10–15 лет. Около 90 % всех ученых, когда-либо живших на Земле, являются нашими современниками. Весь окружающий нас мир показывает, какого прогресса достигло человечество. Именно наука явилась главной причиной столь бурно протекающей НТР, перехода к постиндустриальному обществу, повсеместному внедрению информационных технологий, появления «новой экономики», для которой не действуют законы классической экономической теории, начала переноса знаний человечества в электронную форму, столь удобную для хранения, систематизации, поиска и обработки, и мн. др. Все это убедительно доказывает, что основная форма человеческого познания – наука, в наши дни становиться все более и более значимой и существенной частью реальности. Однако наука не была бы столь продуктивной, если бы не имела столь присущую ей развитую систему методов, принципов и императивов познания. Именно правильно выбранный метод наряду с талантом ученого помогает ему познавать глубинную связь явлений, вскрывать их сущность, открывать законы и закономерности. Количество методов, которые разрабатывает наука для познания действительности, постоянно увеличивается. Точное их количество, пожалуй, трудно определить. Ведь в мире существует около 15000 наук и каждая из них имеет свои специфические методы и предмет исследования. Вместе с тем все эти методы находятся в диалектической связи с общенаучными методами, которые они, как правило, содержат в различных сочетаниях и со всеобщим, диалектическим методом. Это обстоятельство является одной из причин, которые определяют важность наличия философских знаний у любого ученого. Ведь именно философия как наука «о наиболее общих закономерностях бытия и развития мира» занимается изучением тенденций и путей развития научного познания, его структуры и методов исследования, рассматривая их через призму своих категорий, законов и принципов. Вдобавок ко всему философия наделяет ученого тем всеобщим методом, без которого невозможно обойтись в любой области научного познания.

Основными особенностями научного познания являются:

1. Основная задача научного знания – обнаружение объективных законов действительности – природных, социальных (общественных), законов самого познания, мышления и др. «Сущность научного познания заключается в достоверном обобщении фактов, в том, что за случайным оно находит необходимое, закономерное, за единичным – общее и на этой основе осуществляет предвидение различных явлений и событий». Научное познание стремиться вскрыть необходимые, объективные связи, которые фиксируются в качестве объективных законов. Если этого нет, то нет и науки, ибо само понятие научности предполагает открытие законов, углубление в сущность изучаемых явлений.

2. Непосредственная цель и высшая ценность научного познания – объективная истина, постигаемая преимущественно рациональными средствами и методами, но, разумеется, не без участия живого созерцания. Отсюда характерная черта научного по-

знания – объективность, устранение по возможности субъективистских моментов во многих случаях для реализации «чистоты» рассмотрения своего предмета. Ещё Эйнштейн писал: «То, что мы называем наукой, имеет своей исключительной задачей твердо установить то, что есть». Её задача – дать истинное отражение процессов, объективную картину того, что есть. Вместе с тем надо иметь в виду, что активность субъекта – важнейшее условие и предпосылка научного познания. Последнее неосуществимо без конструктивно-критического отношения к действительности, исключающего косность, догматизм, апологетику.

3. Наука в большей мере, чем другие формы познания ориентирована на то, чтобы быть воплощенной в практике, быть «руководством к действию» по изменению окружающей действительности и управлению реальными процессами. Жизненный смысл научного изыскания может быть выражен формулой: «Знать, чтобы предвидеть, предвидеть, чтобы практически действовать»- не только в настоящем, но и в будущем. Весь прогресс научного знания связан с возрастанием силы и диапазона научного предвидения. Именно предвидение дает возможность контролировать процессы и управлять ими. Научное знание открывает возможность не только предвидения будущего, но и сознательного его формирования. «Ориентация науки на изучение объектов, которые могут быть включены в деятельность (либо актуально, либо потенциально, как возможные объекты ее будущего освоения), и их исследование как подчиняющихся объективным законам функционирования и развития составляет одну из важнейших особенностей научного познания. Эта особенность отличает его от других форм познавательной деятельности человека». Существенной особенностью современной науки является то, что она стала такой силой, которая предопределяет практику. Многие современные производственные процессы родились в научных лабораториях. Таким образом, современная наука не только обслуживает запросы производства, но и все чаще выступает в качестве предпосылки технической революции. Великие открытия за последние десятилетия в ведущих областях знания привели к научно-технической революции, охватившей все элементы процесса производства: всесторонняя автоматизация и механизация, освоение новых видов энергии, сырья и материалов, проникнове-

ние в микромир и в космос. В итоге сложились предпосылки для гигантского развития производительных сил общества.

4. Научное познание в гносеологическом плане есть сложный противоречивый процесс воспроизводства знаний, образующих целостную развивающуюся систему понятий, теорий, гипотез, законов и других идеальных форм, закрепленных в языке – естественном или – что более характерно – искусственном (математическая символика, химические формулы и т.п.). Научное знание не просто фиксирует свои элементы, но непрерывно воспроизводит их на своей собственной основе, формирует их в соответствии со своими нормами и принципами. В развитии научного познания чередуются революционные периоды, так называемые научные революции, которые приводят к смене теорий и принципов, и эволюционные, спокойные периоды, на протяжении которых знания углубляются и детализируются. Процесс непрерывного самообновления наукой своего концептуального арсенала – важный показатель научности.

5. В процессе научного познания применяются такие специфические материальные средства как приборы, инструменты, другое так называемое «научное оборудование», зачастую очень сложное и дорогостоящее (синхрофазотроны, радиотелескопы, ракетно – космическая техника и т. д.). Кроме того, для науки в большей мере, чем для других форм познания характерно использование для исследования своих объектов и самой себя таких идеальных (духовных) средств и методов, как современная логика, математические методы, диалектика, системный, гипотетико-дедуктивный и другие общенаучные приемы и методы.

Таким образом, наука–это сфера человеческой деятельности, направленная на производство новых знаний о природе, обществе и мышлении. Как специфическая сфера человеческой деятельности, она представляет собой результат общественного разделения труда, обособление умственного труда от физического, преобразование познавательной деятельности в особую область занятий определенной группы людей. Необходимость научного подхода ко всем видам человеческой деятельности заставляет науку развиваться более скорыми темпами, чем любую другую область деятельности.

Понятие «наука» включает в себя как деятельность, направленную на получение нового знания, так и результат этой деятельности – сумму добытых научных знаний, служащих основой научного понимания мира. Науку еще понимают как одну из форм человеческого сознания. Термин «наука» применяется для названия отдельных областей научного знания.

Закономерности функционирования и развития науки, структуры и динамики научного знания и научной деятельности, взаимодействие науки с другими социальными институтами и сферами материальной и духовной жизни общества изучает специальная дисциплина – ***науковедение.***

Одним из основных заданий науковедения есть разработка ***классификации наук,*** которая определяет место каждой науки в общей системе научных знаний, связь всех наук. Наиболее распространенным является распределение всех наук на науки о природе, обществе и мышлении.

Знание **–** проверенный практикой результат познания действительности, адекватный ее отражению в сознании человека. Это – идеальное воспроизведение условной формы обобщенных представлений о закономерных связях объективной реальности.

Процесс движения человеческой мысли от незнания к знанию называют ***познанием,*** в основе которого лежит отражение и воспроизведение в сознании человека объективной действительности.

Научное познание – это исследования, которым характерны свои особые цели и задачи, методы получения и проверки новых знаний. Оно достигает сущности явлений, раскрывает законы их существования и развития, тем самым указывая практические возможности, пути и способы влияния на эти явления и изменения в соответствии с их объективной природой. Научное познание призвано освещать путь практике, предоставлять теоретические основы для решения практических проблем.

Основой и движущей силой познания является ***практика,*** она дает науке фактический материал, который требует теоретического осмысления. Теоретические знания создают надежную основу понимания сущности явлений объективной действительности.

Диалектика процесса познания состоит в противоречии между ограниченностью наших знаний и безграничной сложностью объективной действительности.

Познание – это взаимодействие субъекта и объекта, результатом которого является ***новое*** знание о мире. Процесс познания имеет двухконтурную структуру: эмпирические и теоретические знания, которые существуют в тесном взаимодействии и взаимообусловленности.

Познание сводится к ответам на несколько вопросов, которые схематично можно изобразить таким образом:

Что? Сколько? Чему? Которое? Как? – на эти вопросы может дать ответ ***наука.***

Как* сделать?** – на этот вопрос дает ответ ***методика.

Что сделать? – это сфера ***практики.***

Ответы на вопросы определяют непосредственные ***цели*** науки – **описание, объяснение *и* предвиденье** процессов и явлений объективной действительности, которые составляют предмет ее изучения на основе законов, которые она открывает, то есть в широком значении – теоретическое воспроизведение действительности.

Истинные знания существуют как система ***принципов, закономерностей, законов, основных понятий, научных фактов, теоретических положений и выводов.*** Поэтому истинное научное знание − объективное. Вместе с тем научное знание может быть относительным или абсолютным.

Относительное знание – это знание, которое, будучи адекватным отображением действительности, отличается определенной неполнотой совпадения образа с объектом.

Абсолютное знание – это полное, исчерпывающее воспроизведение обобщенных представлений об объекте, который обеспечивает абсолютное совпадение образа с объектом.

Беспрерывное развитие практики делает невозможным преобразование знания в абсолютное, но дает возможность отличить объективно истинные знания от ошибочных взглядов.

Наука, как специфическая деятельность, направлена на получение новых теоретических и прикладных знаний о закономерностях развития природы, общества и мышления, характеризуется такими основными ***признаками:***

• наличием систематизированного знания (научных идей теорий, концепций, законов, закономерностей, принципов, гипотез, основных понятий, фактов);

• наличием научной проблемы, объекта и предмета исследования;

• практической значимостью как явления (процесса), что изучается, так и знаний о нем.

Рассмотрим основные понятия науки.

Научная идея – интуитивное объяснение явления (процесса) без промежуточной аргументации, без осознания всей совокупности связей, на основе которых делается вывод. Она базируется на имеющихся знаниях, но проявляет раньше не подмеченные закономерности. Наука предусматривает два вида идей: конструктивные и деструктивные, то есть те, что имеют или не имеют значимости для науки и практики. Свою специфическую материализацию идея находит в гипотезе.

Гипотеза – научное предположение, выдвинутое для объяснения любых явлений (процессов) или причин, которые предопределяют данное следствие. Научная теория включает в себя гипотезу как исходный момент поиска истины, которая помогает существенно экономить время и силы, целеустремленно собрать и сгруппировать факты. Различают нулевую, описательную, объяснительную, основную рабочую и концептуальную гипотезы. Если гипотеза согласована с научными фактами, то в науке ее называют теорией или законом.

Гипотезы (как и идеи) имеют вероятностный характер и проходят в своем развитии три стадии:

• накопление фактического материала и выдвижение на его основе предположений;

• формулировка гипотезы и обоснование на основе предположения приемлемой теории;

• проверка полученных результатов на практике и на ее основе уточнение гипотезы;

Если при проверке результат соответствует действительности, то гипотеза превращается в научную теорию. Гипотеза выдвигается с надеждой на то, что она, если не целиком, то хотя бы частично, станет достоверным знанием.

Закон – внутренняя существенная связь явлений, которая предопределяет их закономерное развитие. Закон, изобретенный через догадку, необходимо потом логически доказать, лишь в таком случае он признается наукой. Для доведения закона наука использует суждение.

Суждение – мысль, в которой с помощью связи понятий утверждается или отрицается что-нибудь. Суждение о предмете или явлении можно получить или через непосредственное наблюдение любого факта, или опосредствованно − с помощью умозаключения.

Умозаключение – умственная операция, с помощью которой из определенного количества заданных суждений выводится другое суждение, которое определенным образом связано с исходным.

Наука – это совокупность теорий.

Теория – учение, система идей, взглядов, положений, утверждений, направленных на толкование того ли иного явления. Это не непосредственное, а идеализированное отображение действительности. Теорию рассматривают как совокупность обобщающих положений, которые образовывают науку или ее раздел. Она выступает как форма синтетического знания, в границах которого отдельные понятия, гипотезы и законы теряют автономность и превращаются в элементы целостной системы.

К новой теории выдвигаются такие требования:

• адекватность научной теории описываемому объекту;

• возможность заменять экспериментальные исследования теоретическими;

• полнота описания определенного явления действительности;

• возможность объяснения взаимосвязей между разными компонентами в границах данной теории;

• внутренняя непротиворечивость теории и соответствие его исследовательским данным.

Теория представляет собой систему научных концепций, принципов, положений, фактов.

Научная концепция – система взглядов, теоретических положений, основных мыслей относительно объекта исследования, которые объединены определенной главной идеей.

Концептуальность – это определения содержания, сути, смысла того, о чем идет речь.

Под принципом в научной теории понимают наиболее абстрактное определение идеи. Принцип – это правило, которое возникло в результате объективно осмысленного опыта.

Понятие – это мысль, отраженная в обобщенной форме. Оно отражает существенные и необходимые признаки предметов и явлений, а также взаимосвязи. Если понятие вошло в научный оборот, его обозначают одним словом или используют совокупность слов − **терминов.** Раскрытие содержания понятия называют его определением. Последнее может отвечать двум важнейшим требованиям:

• указывать на ближайшее родовое понятие;

• указывать на то, чем данное понятие отличается от других понятий.

Понятие, как правило, завершает процесс научного исследования, закрепляет результаты, полученные ученым лично в своем исследовании. Совокупность основных понятий называют ***понятийным аппаратом*** той или иной науки.

Научный факт – событие или явление, которое служит основой для вывода или подтверждения. Он является элементом, который в совокупности с другими составляет основу научного знания, отражает объективные свойства явлений и процессов. На основе научных фактов определяются закономерности явлений, строятся теории и выводятся законы.

Движение мысли от незнания к знанию руководствуется методологией.

Методология научного познания − учение о принципах, форме и способах научно-исследовательской деятельности.

Исследовательский прием – это способ применения старого знания для получения нового знания. Он является средством получения научных фактов.

Научная деятельность – интеллектуальная творческая деятельность, направленная на получение и использование новых знаний. Она существует в разных видах:

1) научно-исследовательская деятельность;
2) научно-организационная деятельность;
3) научно-информационная деятельность;
4) научно-педагогическая деятельность;
5) научно-вспомогательная деятельность и др.

Каждый из указанных видов научной деятельности имеет свои специфические функции, задачи, результаты работы. В пределах научно-исследовательской деятельности осуществляются научные исследования.

Научное исследование – целенаправленное познание, результаты которого выступают как система понятий, законов и теорий.

Различают две формы научных исследований: фундаментальные и прикладные.

Фундаментальные научные исследования – научная теоретическая и (или) экспериментальная деятельность, направленная на получение новых знаний о закономерностях развития и взаимосвязи природы, общества, человека.

Прикладные научные исследования – научная и научно-техническая деятельность, направленная на получение и использование знаний для практических целей.

Научные исследования осуществляются с целью получения научного результата.

Научный результат – новое знание, добытое в процессе фундаментальных или прикладных научных исследований и зафиксированное на носителях научной информации в форме научного отчета, научной работы, научного доклада, научного сообщения о научно-исследовательской работе, монографического исследования, научного открытия и т.п.

Научно-прикладной результат – новое конструктивное или технологическое решение, экспериментальный образец, законченное испытание, которое введено или может быть введено в общественную практику. Научно-прикладной результат может иметь форму отчета, эскизного проекта, конструкторской или технологической документации на научно-техническую продукцию, натурного образца и т.п.

Субъектами научной деятельности являются: ученые, научные работники, научно-педагогические работники, а также научные учреждения, научные организации, высшие учебные заведения, общественные организации в сфере научной и научно-технической деятельности.

Научно-исследовательской деятельностью занимается значительный круг людей. Тех, кто делает это постоянно, называют исследователями, научными работниками (научными работниками), учеными.

Исследователем называют человека, который осуществляет научные исследования.

Научный работник – это тот, кто имеет отношение к науке, вырабатывает новые знания, является специалистом в определенной области науки.

Ученый – физическое лицо, которое проводит фундаментальные и (или) прикладные научные исследования с целью получения научных и (или) научно-технических результатов.

Научный работник – ученый, который по основному месту работы и соответственно трудовому договору (контракту) профессионально занимается научной, научно-технической или научно-педагогической деятельностью и имеет соответствующую квалификацию, подтвержденную результатами аттестации. Люди науки имеют соответствующую специальность и квалификацию, работают как своими силами, так и объединяясь в научные коллективы (постоянные или временные), создают научные школы.

1.2. Понятие методологии научного исследования

Рассмотрев в самых общих чертах научное познание окружающего мира и получив некоторые представления о науке, впору подробнее присмотреться к ее внутреннему строению. Им занимается особая дисциплина, получившая название «методология». В ней условно можно выделить два крупных раздела:

а) гносеологический, формирующий нормы и императивы научного познания, так сказать, технологию приращения нового знания;

б) онтологический, в котором описывается структура и иерархия научного знания, причем не только знания вообще, а конкретно в каждой естественно-научной и социальной дисциплине.

Методологическое знание выступает в форме как предписаний и норм, в которых фиксируются содержание и последовательность определенных видов деятельности (нормативная методология), так и описаний фактически выполненной деятельности (дескриптивная методология). В обоих случаях основной функцией этого знания является внутренняя организация и регулирование процесса познания или практического преобразования какого-то объекта. В современной литературе под методологией обычно понимают прежде всего методологию научного познания, т.е. учение о принципах построения, формах и способах научно-познавательной деятельности.

Методология – система знаний о способах достижения нового знания. В широком смысле методология данной науки включает теорию, общенаучные и специальные методы исследования ее предмета, в узком смысле – это система методов получения информации, ее анализа, интерпретации и объяснения.

Существует несколько определений этой сферы знания: теоретическое учение о научных методах; наука о методе, система наиболее общих принципов, положений и методов, составляющих основу данной науки; система знаний о способах достижения нового знания; правила, согласно которым происходит принятие либо отбрасывание теорий и исследовательских программ.

Методология отвечает на вопросы, как надо проводить научное исследование, строить непротиворечивую теорию или правильно интерпретировать полученные результаты. *Методолога не интересует структура объекта или предмета исследования, как консультанта по управлению не интересует финансовое положение данной компании или ее иерархическая структура*. Тот и другой разрабатывают общие принципы, приложимые к конкретным ситуациям. Методолог указывает исследователю на неисправности и отклонения в его работе, выявляет конкретные ошибки и ставит конкретные задачи, подгоняя их под известный тип ошибок и задач. Точно также и консультант указывает менеджеру на ошибки в его поведении, например проявление авторитарного метода руководства, зная в общих чертах, что такое авторитарный и демократический методы в принципе. Вместо вопроса «что следует изучать?» методолог формулирует другой вопрос: «как следует изучать?»

Таким образом, проблемы методологии важны для любой науки. Прежде чем более конкретно говорить о методологических проблемах, необходимо уточнить, что же мы считаем методологией. Методологический словарь науки складывался путем объединения двух словарей. В современной науке термином методология (от греч. methodos – «путь познания») обозначают три разных уровня научного знания.

1. Общая методология – это совокупность общих принципов, способов построения научного знания. В качестве общей методологии выступают различные философские системы, преломленные затем через специфику каждой науки.

2. Частная методология – система частных принципов, постулатов, посылок и т. п., применяемых в конкретной области знания. Примером является принцип деятельности.

3. Методологические приемы (методология) это – множество методик исследования, терапии и т. п.

Методологические приёмы могут подразделяться на метод (стратегию исследования) и методику (способы фиксации эмпирических данных, или техники.

Методы нельзя рассматривать изолированно от общей и специальной методологии. Такая зависимость не абсолютна. Одни и те же методы и методики могут применяться в рамках различных методологий.

К научному исследованию с позиций современной методологии предъявляются следующие требования:

1) наличие конкретного объекта исследования;

2) выявление фактов, выяснение причин, разработка методов, формулирование гипотез;

3) четкое разделение между установленными фактами и гипотезами;

4) объяснение и прогнозирование фактов и явлений.

Отличительными чертами научного исследования являются тщательно собранные данные, объединение их в принципы, проверка и использование этих принципов в дальнейшей работе.

1.3. Понятие метода

Как было определено ранее, понятие «методология» в литературе употребляется в двух значениях:

1) совокупность методов, применяемых в какой-либо сфере деятельности (науке, политике и т.д.);

2) учение о научном методе познания.

Метод – это совокупность приемов или операций практической или теоретической деятельности. Метод можно также охарактеризовать как форму теоретического и практического освоения действительности, исходящего из закономерностей поведения изучаемого объекта.

Методы научного познания включают так называемые всеобщие методы, т.е. общечеловеческие приемы мышления, общенаучные методы и методы конкретных наук. Методы могут быть классифицированы и по соотношению эмпирического знания (т.е. знания, полученного в результате опыта, опытного знания) и знания теоретического, суть которого − познание сущности явлений, их внутренних связей. Классификация методов научного познания представлена на рис. 1.1.

Рис.1.1. Классификация методов научного познания

Каждая отрасль применяет свои конкретно-научные, специальные методы, обусловленные сущностью объекта исследования. Однако зачастую методы, характерные для какой-либо конкретной науки, применяются и в других науках. Это происходит потому, что объекты исследования этих наук подчиняются также и законам данной науки. Например, физические и химические методы исследования применяются в биологии на том основании, что объекты биологического исследования включают в себя в том или ином виде физические и химические формы движения материи и, следовательно, подчиняются физическим и химическим законам.

Всеобщих методов в истории познания – два: диалектический и метафизический. Это общефилософские методы.

Диалектический метод – это метод познания действительности в ее противоречивости, целостности и развитии.

Метафизический метод – метод, противоположный диалектическому, рассматривающий явления вне их взаимной связи и развития.

С середины XIX века метафизический метод все больше и больше вытеснялся из естествознания диалектическим методом.

1.4. Методы научного познания. Общенаучные методы

Соотношение общенаучных методов также можно представить в виде схемы (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Классификация общенаучных методов

Дадим краткую характеристику данных методов.

Анализ – мысленное или реальное разложение объекта на составляющие его части.

Синтез – объединение познанных в результате анализа элементов в единое целое.

Обобщение – процесс мысленного перехода от единичного к общему, от менее общего, к более общему, например: переход от суждения «этот металл проводит электричество» к суждению «все металлы проводят электричество», от суждения: «механическая форма энергии превращается в тепловую» к суждению «всякая форма энергии превращается в тепловую».

Абстрагирование (идеализация) – мысленное внесение определенных изменений в изучаемый объект в соответствии с целями исследования. В результате идеализации из рассмотрения могут быть исключены некоторые свойства, признаки объектов, которые не являются существенными для данного исследования. Пример такой идеализации в механике – материальная точка, т.е. точка, обладающая массой, но лишенная всяких размеров. Таким же абстрактным (идеальным) объектом является абсолютно твердое тело.

Индукция – процесс выведения общего положения из наблюдения ряда частных единичных фактов, т.е. познание от частного к общему. На практике чаще всего применяется неполная индукция, которая предполагает вывод о всех объектах множества на основании познания лишь части объектов. Неполная индукция, основанная на экспериментальных исследованиях и включающая теоретическое обоснование, называется научной индукцией. Выводы такой индукции часто носят вероятностный характер. Это рискованный, но творческий метод. При строгой постановке эксперимента, логической последовательности и строгости выводов она способна давать достоверное заключение. По словам известного французского физика Луи де Бройля, научная индукция является истинным источником действительно научного прогресса.

Дедукция – процесс аналитического рассуждения от общего к частному или менее общему. Она тесно связана с обобщением. Если исходные общие положения являются установленной научной истиной, то метом дедукции всегда будет получен истинный вывод. Особенно большое значение дедуктивный метод имеет в математике. Математики оперируют математическими абстракциями и строят свои рассуждения на общих положениях. Эти общие положения применяются к решению частных, конкретных задач.

Моделирование – воспроизведение свойств объекта познания на специально устроенном его аналоге – модели. Модели могут быть реальными (материальными), например, модели самолетов, макеты зданий, фотографии, протезы, куклы и т.п. и идеальными (абстрактными), создаваемые средствами языка (как естественного человеческого языка, так и специальных языков, например, языком математики); в этом случае мы имеем математическую модель. Обычно это система уравнений, описывающая взаимосвязи в изучаемой системе.

Исторический метод подразумевает воспроизведение истории изучаемого объекта во всей своей многогранности, с учетом всех деталей и случайностей.

Логический метод – это, по сути, логическое воспроизведение истории изучаемого объекта. При этом история эта освобождается от всего случайного, несущественного, т.е. это как бы тот же исторический метод, но освобожденный от его исторической формы.

Классификация – распределение тех или иных объектов по классам (отделам, разрядам) в зависимости от их общих признаков, фиксирующее закономерные связи между классами объектов в единой системе конкретной отрасли знания. Становление каждой науки связано с созданием классификаций изучаемых объектов, явлений.

1.5. Методы эмпирического и теоретического познания

Методы эмпирического и теоретического познания схематично представлены на рис. 1.3. Рассмотрим эти методы.

Рис. 1.3. Классификация методов эмпирического и теоретического познания

Наблюдение есть чувственное отражение предметов и явлений внешнего мира. Это – исходный метод эмпирического познания, позволяющий получить некоторую первичную информацию об объектах окружающей действительности.

Научное наблюдение характеризуется рядом особенностей:

• целенаправленностью (наблюдение должно вестись для решения поставленной задачи исследования);

• планомерностью (наблюдение должно проводиться строго по плану, составленному исходя из задачи исследования);

• активностью (исследователь должен активно искать, выделять нужные ему моменты в наблюдаемом явлении).

Научные наблюдения всегда сопровождаются описанием объекта познания. Последнее необходимо для фиксирования технических свойств, сторон изучаемого объекта, которые составляют предмет исследования. Описания результатов наблюдений образуют эмпирический базис науки, опираясь на который исследователи создают эмпирические обобщения, сравнивают изучаемые объекты по тем или иным параметрам, проводят классификацию их по каким-то свойствам, характеристикам, выясняют последовательность этапов их становления и развития.

По способу проведения наблюдения могут быть непосредственными и опосредованными.

При непосредственном наблюдении те или иные свойства, стороны объекта отражаются, воспринимаются органами чувств человека. В настоящее время непосредственное визуальное наблюдение широко используется в космических исследованиях как важный метод научного познания. Визуальные наблюдения с борта пилотируемой орбитальной станции – наиболее простой и весьма эффективный метод исследования параметров атмосферы, поверхности суши и океана из космоса в видимом диапазоне. С орбиты искусственного спутника Земли глаз человека может уверенно определить границы облачного покрова, типы облаков, границы выноса мутных речных вод в море т.п.

Однако чаще всего наблюдение бывает опосредованным, то есть проводится с использованием тех или иных технических средств. Если, например, до начала XVII века астрономы наблюдали за небесными телами невооруженным глазом, то изобретение Галилеем в 1608 году оптического телескопа подняло астрономические наблюдения на новую, гораздо более высокую ступень.

Наблюдения могут нередко играть важную эвристическую роль в научном познании. В процессе наблюдений могут быть открыты совершенно новые явления, позволяющие обосновать ту или иную научную гипотезу. Из всего вышесказанного следует, что наблюдения являются весьма важным методом эмпирического познания, обеспечивающим сбор обширной информации об окружающем мире.

Описание – это фиксация средствами естественного и искусственного языка сведений об объектах, полученных в результате наблюдения. Описание можно рассматривать как завершающий этап наблюдения. С помощью описания чувственная информация переводится на язык понятий, знаков, схем, рисунков, графиков, цифр, принимая тем самым форму, удобную для дальнейшей рациональной обработки (систематизации, классификации, обобщения).

Эксперимент – более сложный метод эмпирического познания по сравнению с наблюдением. Он предполагает активное, целенаправленное и строго контролируемое воздействие исследователя на изучаемый объект для выявления и изучения тех или иных его сторон, свойств, связей. Обладает рядом присущих только ему особенностей:

- эксперимент позволяет изучать объект в «очищенном» виде, то есть устранять всякого рода побочные факторы, наслоения, затрудняющие процесс исследования;
- в ходе эксперимента объект может быть поставлен в некоторые искусственные, в частности, экстремальные условия (при сверхнизких температурах, при высоких давлениях, при огромных напряжениях электромагнитного поля и др.);
- изучая какой-либо процесс, экспериментатор может вмешиваться в него, активно влиять на его протекание;
- проводимые эксперименты могут быть повторены столько раз, сколько это необходимо для получения достоверных результатов.

Подготовка и проведение эксперимента требуют соблюдения ряда условий. Так, научный эксперимент:

1) никогда не ставится наобум, он предполагает наличие четко сформулированной цели исследования;
2) не делается «вслепую», он всегда базируется на каких-то исходных теоретических положениях;
3) не проводится беспланово, предварительно исследователь намечает пути его проведения;
4) требует определенного уровня развития технических средств познания, необходимого для его реализации;

5)должен проводиться людьми, имеющими достаточно высокую квалификацию.

В зависимости от характера проблем, решаемых в ходе экспериментов, последние обычно подразделяются на исследовательские и проверочные.

Исследовательские дают возможность обнаружить у объекта новые, неизвестные свойства. Результатом такого эксперимента могут быть выводы, не вытекающие из имевшихся знаний об объекте исследования. Проверочные служат для проверки, подтверждения тех или иных теоретических построений.

Измерение – это процесс, заключающийся в определении количественных значений тех или иных свойств, сторон изучаемого объекта, явления с помощью специальных технических устройств.

Важной стороной процесса измерения является методика его проведения. Она представляет собой совокупность приемов, использующих определенные принципы и средства измерений. Под принципами измерений в данном случае имеются в виду какие-то явления, которые положены в основу измерений (например, измерение температуры с использованием термоэлектрического эффекта).

По способу получения результатов различают измерения прямые и косвенные. *В прямых измерениях* искомое значение измеряемой величины получается путем непосредственного сравнения ее с эталоном или выдается измерительным прибором. *При косвенном измерении* искомую величину определяют на основании известной математической зависимости между этой величиной и другими величинами, получаемыми путем прямых измерений (например, нахождение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения).

Идеализация представляет собой мысленное внесение определенных изменений в изучаемый объект в соответствии с целями исследований. В результате таких изменений могут быть, например, исключены из рассмотрения какие-то свойства, стороны, признаки объектов. Так, широко распространенная в механике идеализация, именуемая материальной точкой, подразумевает тело, лишенное всяких размеров. Такой абстрактный объект, размерами которого пренебрегают, удобен при описании движения. Причем подобная абстракция позволяет заменить в исследовании самые различные реальные объекты: от молекул или атомов при решении многих задач статистической механики и до планет Солнечной системы при изучении, например, их движения вокруг Солнца.

Целесообразность использования идеализации определяется следующими обстоятельствами:

– во-первых, идеализация целесообразна тогда, когда подлежащие исследованию реальные объекты достаточно сложены для имеющихся средств теоретического, в частности, математического анализа.

– во-вторых, идеализацию целесообразно использовать в тех случаях, когда необходимо исключить некоторые свойства, связи исследуемого объекта, без которых он существовать не может, но которые затемняют существо протекающих в нем процессов.

– в-третьих, применение идеализации целесообразно тогда, когда исключаемые из рассмотрения свойства, стороны, связи изучаемого объекта не влияют в рамках данного исследования на его сущность.

Основное положительное значение идеализации как методе научного познания заключается в том, что получаемые на его основе теоретические построения позволяют затем эффективно исследовать реальные объекты и явления.

Сравнение – это способ познания посредством установления сходства и/или различия объектов. Сходство – это то, что у сравниваемых объектов совпадает, а различие – это то, чем один сравниваемый объект отличается от другого.

Формализация. Под формализацией понимается особый подход в научном познании, который заключается в использовании специальной символики, позволяющей отвлечься от изучения реальных объектов, от содержания описывающих их теоретических положений и оперировать вместо этого некоторым множеством символов (знаков).

Для построения любой формализованной системы необходимо:

а) задание алфавита, то есть определенного набора знаков;

б) задание правил, по которым из исходных знаков этого алфавита могут быть получены «слова» и «формулы»;

в) задание правил, по которым от одних слов, формул данной системы можно переходить к другим словам и формулам.

Важным достоинством данной системы является возможность проведения в ее рамках исследования какого-либо объекта чисто формальным путем без непосредственного обращения к этому объекту.

Другое достоинство формализации состоит в обеспечении краткости и четкости записи научной информации, что открывает большие возможности для оперирования ею.

Аксиоматический метод (**аксиоматизация науки**, **аксиоматическое построение научного знания**) – способ построения отдельных научных теорий, разделов науки и науки в целом, при котором какие-то положения избираются в качестве исходных и не требующих доказательства (истинных), а все остальные положения выводятся из исходных – доказываются логическим путём. Исходные положения, которые принимаются без доказательств, называются **аксиомами**, а выводимые из аксиом утверждения – теоремами.

Аксиоматическое построение научной теории предполагает стабильность, определенную устойчивость соответствующей части науки, иначе говоря, общепринятость соответствующих представлений. На этой стадии теории можно придать законченность, уточнив ее терминологический аппарат и основные выводы.

Логический вывод позволяет переносить истинность аксиом на выводимые из них следствия. Фиксация определённых правил вывода позволяет упорядочить процесс рассуждения при развёртывании аксиоматической системы, сделать это рассуждение более строгим и корректным. Тем самым аксиоматический метод облегчает организацию и систематизацию научного знания и служит средством построения развитой научной теории. Наиболее широко аксиоматический метод используется в математике. Он применяется и в эмпирических науках, но с учетом ряда особенностей, связанных с опытной проверкой теории.

Одной из первых и успешных попыток применения аксиоматического метода в науке была геометрия Евклида. Опираясь на пять исходных аксиом (постулатов), Евклид развернул систему доказательства целого ряда теорем, сводя более сложные положения геометрии к интуитивно ясным и простым представлениям, истинность которых не вызывала сомнения. Геометрия Евклида длительное время оставалась образцом теоретического знания и рассматривалась как идеал построения теоретических систем. В соответствии с этим идеалом создавались теории в других областях научного знания.

Гипотетико-дедуктивный метод – метод научного познания и рассуждения, основанный на выведении (дедукции) заключений из гипотез и других посылок, истинное значение которых неизвестно. Поскольку в дедуктивном рассуждении значение истинности переносится на заключение, а посылками служат гипотезы, то и заключение гипотетико-дедуктивного рассуждения имеет лишь вероятностный характер. Соответственно типу посылок гипотетико-дедуктивные рассуждения разделяются на две основные группы:

1) рассуждения, посылками которых являются гипотезы и эмпирические обобщения, истинность которых ещё нужно установить;

2) выводы из таких посылок, которые заведомо ложны или ложность которых может быть установлена.

Таким путем в ходе дискуссии можно убедить оппонента в ложности его предположений. Примером является метод приведения к абсурду.

В научном познании гипотетико-дедуктивный метод получил широкое распространение и развитие в XVII–XVIII вв., когда были достигнуты значительные успехи в области изучения механического движения земных и небесных тел. Первые попытки применения Гипотетико-дедуктивного метода были сделаны в механике, в частности в исследованиях Г. Галилея. Теория механики, изложенная в «Математических началах натуральной философии» И. Ньютона, представляет собой гипотетико-дедуктивную систему, посылками которой служат основные законы движения. Успех Гипотетико-дедуктивного метода в области механики и влияние идей Ньютона обусловили широкое распространение этого метода в области точного естествознания.

С логической точки зрения, гипотетико-дедуктивная система представляет собой иерархию гипотез, степень абстрактности и общности которых увеличивается по мере удаления от эмпирического базиса. На вершине располагаются гипотезы, имеющие наиболее общий характер и поэтому обладающие наибольшей логической силой. Из них как из посылок выводятся гипотезы более низкого уровня. На самом низшем уровне системы находятся гипотезы, которые можно сопоставить с эмпирическими данными. В современной науке многие теории строятся в виде гипотетико-дедуктивной системы.

Такое построение научных теорий имеет большое методологическое значение, поскольку позволяет осуществлять эмпирическую проверку и подтверждение научных гипотез и теорий. Гипотезы самого низкого уровня проверяются путем сопоставления их с эмпирическими данными. Если они подтверждаются этими данными, то это служит косвенным подтверждением и гипотез более высокого уровня, из которых логически выведены первые гипотезы. Наиболее общие принципы научных теорий нельзя непосредственно сопоставить с действительностью с тем, чтобы удостовериться в их истинности, ибо они, как правило, говорят об абстрактных или идеальных объектах. Для того чтобы соотнести общие принципы с действительностью, нужно с помощью длинной цепи логических выводов получить из них следствия, говорящие уже не об идеальных, а о реальных объектах. Эти следствия можно проверить непосредственно. Поэтому ученые и стремятся придавать своим теориям структуру гипотетико-дедуктивной системы.

Разновидностью гипотетико-дедуктивного метода считают метод математической гипотезы, который используется как важнейшее эвристическое средство для открытия закономерностей в естествознании. В процессе научного исследования наиболее трудная – подлинно творческая – задача состоит в том, чтобы открыть и сформулировать те принципы и гипотезы, которые могут послужить основой всех последующих выводов. Гипотетико-дедуктивный метод играет в этом процессе вспомогательную роль, поскольку с его помощью не выдвигаются новые гипотезы, а только выводятся и проверяются вытекающие из них следствия.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать главную задачу науки.
2. Перечислить особенности научного познания.
3. Что такое знание?
4. Дать определение понятия «научная идея».
5. Что понимается под гипотезой?
6. Что такое закон?
7. Дать определение понятий «суждение», «умозаключение», «теория».
8. Что понимается под концептуальностью?
9. Что такое принцип?
10. Что понимается под научным фактом?
11. Что такое методология?
12. Что понимается под научной деятельностью?
13. Дать определение понятия «научное исследование».
14. Что понимается под научным результатом?
15. Что является субъектом научной деятельности?
16. Что такое метод?
17. Привести классификацию методов научного познания.
18. Какие существуют всеобщие методы научного познания?
19. Что понимается под диалектическим методом?
20. Что понимается под метафизическим методом?
21. Привести классификацию общенаучных методов научного познания.
22. Дать краткую характеристику общенаучных методов познания.
23. Привести классификацию методов эмпирического и теоретического познания.
24. Дать краткую характеристику этих методов.

2. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АППАРАТ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Системный подход как направление методологии научных исследований. Сущность системного подхода

Системный подход – направление методологии научного познания, в основе которого лежит рассмотрение объекта как системы:

– целостного комплекса взаимосвязанных элементов (И.В. Блауберг, В.Н. Садовский, Э.Г. Юдин);

– совокупности взаимодействующих объектов (Л. Фон Берталанфи);

– совокупности сущностей и отношений (А.Д. Холл, Р.И. Фейджин).

Говоря о системном подходе, можно говорить о некотором способе организации наших действий, таком, который охватывает любой род деятельности, выявляя закономерности и взаимосвязи с целью их более эффективного использования. При этом системный подход является не столько методом решения задач, сколько методом постановки задач.

Основные понятия системного подхода: «система», «элемент», «состав», «структура», «функции», «функционирование» и «цель». Раскроем их для полного понимания системного подхода.

Система – объект, функционирование которого, необходимое и достаточное для достижения стоящей перед ним цели, обеспечивается (в определенных условиях среды) совокупностью составляющих его элементов, находящихся в целесообразных отношениях друг с другом.

Элемент – внутренняя исходная единица, функциональная часть системы, собственное строение которой не рассматривается, а учитываются лишь ее свойства, необходимые для построения и функционирования системы. «Элементарность» элемента состоит в том, что он есть предел членения данной системы, поскольку его внутреннее строение в данной системе игнорируется, и он выступает в ней в качестве такого явления, которое в философии характеризуют как *простое.* Хотя в иерархических системах элемент тоже может быть рассмотрен как система. А от части элемент отличает то, что слово «часть» указывает лишь на внутреннюю принадлежность чего-либо объекту, а «элемент» всегда обозначает функциональную единицу. *Всякий элемент – часть, но не всякая часть – элемент.*

Состав – полная (необходимая и достаточная) совокупность элементов системы, взятая вне ее структуры, то есть набор элементов.

Структура – отношения между элементами в системе, необходимые и достаточные для того, чтобы система достигла цели.

Функции – способы достижения цели, основанные на целесообразных свойствах системы.

Функционирование – процесс реализации целесообразных свойств системы, обеспечивающий ей достижение цели.

Цель – это то, чего система должна достигнуть на основе своего функционирования. Целью может быть определенное состояние системы или иной продукт ее функционирования. Значение цели как системообразующего фактора уже отмечалось. Подчеркнем его еще раз: *объект выступает как система лишь относительно своей цели.* Цель, требуя для своего достижения определенных функций, обусловливает через них состав и структуру системы.

В центре внимания при системном подходе находится изучение не элементов как таковых, а прежде всего структуры объекта и места элементов в ней. Существует несколько разновидностей системного подхода: комплексный, структурный, целостный.

Комплексный подход предлагает наличие совокупности компонентов объекта или применяемых методов исследования. При этом не принимаются во внимание ни отношения между объектами, ни полнота их состава, ни отношения компонентов в целом. Решаются главным образом задачи статики: количественного соотношения компонентов и подобные.

Структурный подход предлагает изучение состава (подсистем) и структур объекта. При таком подходе еще нет соотнесения подсистем (частей) и системы (целого). Декомпозиция систем на подсистемы производится не единым образом. Динамика структур, как правило, не рассматривается.

При *целостном подходе* изучаются отношения не только между частями объекта, но и между частями и целым. Декомпозиция целого на части единственна. Так, например, принято говорить, что «целое – это то, от чего ничего нельзя отнять и к чему ничего нельзя добавить». Целостный подход предлагает изучение состава (подсистем) и структур объекта не только в статике, но и в динамике, т. е. он предлагает изучение поведения и эволюции систем. Целостный подход применим не ко всем системам (объектам), а только к таким, которым свойственна высокая степень функциональной независимости.

2.2. Принципы системного подхода

Как любая методология, системный подход подразумевает наличие определенных принципов и способов организации деятельности, в данном случае деятельности, связанной с анализом и синтезом систем.

В основе системного подхода лежат принципы: цели, двойственности, целостности, сложности, множественности и историзма. Рассмотрим подробнее содержание перечисленных принципов.

Принцип цели ориентирует на то, что при исследовании объекта необходимо ***прежде всего*** выявить цель его функционирования.

Нас в первую очередь должно интересовать не как построена система, а для чего она существует, какая цель стоит перед ней, чем она вызвана, каковы средства достижения цели?

Принцип цели конструктивен при соблюдении двух условий:

– цель должна быть сформулирована таким образом, чтобы степень ее достижения можно было оценить (задать) количественно;

– в системе должен быть механизм, позволяющий оценить степень достижения заданной цели.

Принцип двойственности вытекает из принципа цели и означает, что система должна рассматриваться как часть системы более высокого уровня и в то же время как самостоятельная часть, выступающая как единое целое во взаимодействии со средой. В свою очередь каждый элемент системы обладает собственной структурой и также может рассматриваться как система.

Взаимосвязь с принципом цели состоит в том, что цель функционирования объекта должна быть подчинена решению задач функционирования системы более высокого уровня. Цель – категория внешняя по отношению к системе. Она ставится ей системой более высокого уровня, куда данная система входит как элемент.

Принцип сложности указывает на необходимость исследования объекта, как сложного образования и, если сложность очень высока, нужно последовательно упрощать представление объекта, но так чтобы сохранить все его существенные свойства.

Принцип множественности требует от исследователя представлять описание объекта на множестве уровней: морфологическом, функциональном, информационном.

Морфологический уровень дает представление о строении системы. Морфологическое описание не может быть исчерпывающим. Глубина описания, уровень детализации, то есть выбор элементов, внутрь которых описание не проникает, определяется назначением системы. Морфологическое описание иерархично.

Конкретизация морфологии дается на стольких уровнях, сколько их требуется для создания представления об основных свойствах системы.

Функциональное описание связано с преобразованием энергии и информации. Всякий объект интересен прежде всего результатом своего существования, местом, которое он занимает среди других объектов в окружающем мире.

Информационное описание дает представление об организации системы, т.е. об информационных взаимосвязях между элементами системы. Он дополняет функциональное и морфологическое описания.

На каждом уровне описания действуют свои, специфические закономерности. Все уровни тесно взаимосвязаны. Внося изменения на одном из уровней, необходимо проводить анализ возможных изменений на других уровнях.

Принцип историзма обязывает исследователя вскрывать прошлое системы и выявлять тенденции и закономерности ее развития в будущем.

Прогнозирование поведения системы в будущем является необходимым условием того, что принятые решения по совершенствованию существующей системы или создание новой обеспечивает эффективное функционирование системы в течение заданного времени.

Принцип эмерджентности.

Важным принципом систем является то, что по мере объединения компонентов или подмножеств в более крупные функциональные единицы у этих новых единиц возникают новые свойства, отсутствующие на предыдущем уровне. Такие качественно новые, эмерджентные, свойства нельзя предсказать, исходя из свойств компонентов. (Свойства целого не сводятся к сумме свойств его частей.)

Системный подход является теоретической и методологической основой *системного анализа*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под системным подходом?
2. Что такое система?
3. Привести формулировку понятия «элемент».
4. Что такое состав системы?
5. Что понимается под структурой системы?
6. Дать определение понятий «функции системы», «функционирование системы».
7. Что понимается под целью системы?
8. Чем комплексный подход отличается от системного?
9. Что предполагает структурный подход? Целостный подход?
10. Перечислить принципы системного подхода.

3. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ КАК ПРИКЛАДНОЙ АСПЕКТ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА

3.1. Основные понятия

Системный анализ – научный метод познания, представляющий собой последовательность действий по установлению структурных связей между переменными или элементами исследуемой системы. Опирается на комплекс общенаучных, экспериментальных, естественно научных, статистических, математических методов.

Системный анализ возник в момент возникновения разумной жизни. Успех его применения при решении сложных задач во многом определяется современными возможностями информационных технологий. Н.Н. Моисеев[1] приводит, по его выражению, довольно узкое определение системного анализа: «Системный анализ – это совокупность методов, основанных на использовании ЭВМ и ориентированных на исследование сложных систем – технических, экономических, экологических и т.д. Результатом системных исследований является, как правило, выбор вполне определенной альтернативы: плана развития региона, параметров конструкции и т.д. Поэтому истоки системного анализа, его методические концепции лежат в тех дисциплинах, которые занимаются проблемами принятия решений: исследование операций и общая теория управления».

Ценность системного подхода состоит в том, что рассмотрение категорий системного анализа создает основу для логического и последовательного подхода к проблеме принятия решений. Эффективность решения проблем с помощью системного анализа определяется структурой решаемых проблем.

---

[1] **Ники́та Никола́евич Моисе́ев** (10 (23) августа 1917, Москва – 29 февраля 2000) – советский и российский учёный в области общей механики и прикладной математики, академик Академии наук СССР (впоследствии РАН) (1984) и ВАСХНИЛ, почётный член Российской академии естественных наук (РАЕН), член Международной академии астронавтики (Париж), президент Российского отделения «Зелёного креста», президент Российского национального комитета содействия по Программе ОН по охране окружающей среды, президент Международного независимого эколого-политологического университета (1993–2000), главный редактор журнала «Экология и жизнь». Основные направления исследовательской деятельности**:** теория системного анализа и оптимальных систем; прикладная математика и её приложения для решения сложных задач физики и техники; теория и методы расчёта систем управления и траекторий космических объектов и др.

Классификация научных проблем

Согласно классификации, все научные проблемы подразделяются на три класса:

• хорошо структурированные (*well-structured*), или количественно сформулированные проблемы, в которых существенные зависимости выяснены очень хорошо;

• слабо структурированные (*ill-structured*), или смешанные проблемы, которые содержат как качественные элементы, так и малоизвестные, неопределенные стороны, которые имеют тенденцию доминировать;

• неструктурированные (*unstructured*), или качественно выраженные проблемы, содержащие лишь описание важнейших ресурсов, признаков и характеристик, количественные зависимости между которыми совершенно неизвестны.

Методы решения

Для решения хорошо структурированных количественно выражаемых проблем используется известная методология исследования операций, которая состоит в построении адекватной математической модели (например, задачи линейного, нелинейного, динамического программирования, задачи теории массового обслуживания, теории игр и др.) и применении методов для отыскания оптимальной стратегии управления целенаправленными действиями.

Процедура принятия решений

Для решения слабо структурированных проблем используется методология системного анализа, системы поддержки принятия решений (СППР). Рассмотрим технологию применения системного анализа к решению сложных задач.

Процедура принятия решений включает следующие основные этапы:

1) формулировка проблемной ситуации;
2) определение объекта анализа, вычленение его из внешней среды с учётом влияний внешней среды.
3) определение целей;
4) определение критериев достижения целей;
5) построение моделей для обоснования решений;
6) поиск оптимального (допустимого) варианта решения;
7) согласование решения;
8) подготовка решения к реализации;

9) утверждение решения;
10) управление ходом реализации решения;
11) проверка эффективности решения.

3.2. Методы системного анализа

Методологические средства, применяемые при решении проблем с помощью системного анализа, определяются в зависимости от того, преследуется ли единственная цель или некоторая совокупность целей, принимает ли решение одно лицо или несколько и т. д. Когда имеется одна достаточно четко выраженная цель, степень достижения которой можно оценить на основе одного критерия, используются *методы математического программирования*. Если степень достижения цели должна оцениваться на основе нескольких критериев, применяют *аппарат теории полезности*, с помощью которого проводится упорядочение критериев и определение важности каждого из них. Когда развитие событий определяется взаимодействием нескольких лиц или систем, из которых каждая преследует свои цели и принимает свои решения, используются *методы теории игр*.

Всю совокупность методов исследования можно разбить на *три большие группы*:

– методы, основанные на использовании знаний и интуиции специалистов;

– методы формализованного представления систем управления (методы формального моделирования исследуемых процессов) комплексированные методы.

3.3. Математическое моделирование как метод изучения систем

Несмотря, казалось бы, на огромное разнообразие систем существуют некие общие подходы к их изучению. Главным методом изучения систем является **моделирование**, разработка **моделей**. Вообще моделирование – это единственный рациональный (основанный на разуме) метод познания действительности.

Моделирование − это построение и изучение структурных, логических, математических и других абстрактных моделей систем и процессов в них. Есть ещё и физическое моделирование, но оно используется в частных науках и в технике (уменьшенные копии, модели самолётов, кораблей, зданий, мостов для экспериментов), но не в системных исследованиях.

Модель – это отображение существенных свойств объекта (системы) при его изучении.

Основным методом изучения систем является **математическое моделирование**. А основным инструментом исследования **математических моделей** сложных систем является компьютер. Только для некоторых очень простых математических моделей систем могут быть получены аналитические (в виде формул) решения. Математические модели представляют собой системы уравнений (чаще всего – дифференциальных уравнений) и ограничений (в виде равенств и неравенств). Эти системы разрабатываются исходя из базовых «законов природы» и конкретных теорий в данной предметной области. В общем, для построения хороших математических моделей надо знать предметную область, нужные разделы математики и применять системный подход. Такие модели называют **системными** или моделями **«прозрачного ящика»**. Они – основные в технике. Например: модель процесса выведения спутника на орбиту, или модель работы прокатного стана. Применяются они и в экономике предприятия (модели «индустриальной динамики»), и в мировой экономике (модели «глобальной динамики» Римского клуба), и в экологии (модель «ядерной зимы»), и во многих других областях. Эти модели очень трудоёмки и для них критически важна проблема надёжных исходных данных. Но это – главное направление моделирования в эпоху компьютеров.

Для многих сложных систем по разным причинам трудно (или не нужно) построить хорошую физичную модель. Пример: экологические, экономические, социальные системы. В этом случае известны входы и выходы системы и имеется много данных о её «работе». Это – так называемая модель **«чёрного ящика»**, или **кибернетическая** модель. Если здесь можно применить методы математической статистики и теории вероятностей, то это – **статистический метод** моделирования, **прикладной статистический анализ**. А модели называются **статистическими**. Например, модели **систем массового обслуживания** (они моделируют процессы получения и обработки заявок, поступающих случайным образом на входы системы).

Частным видом математических моделей всех видов являются **оптимизационные модели.** Соединение физических моделей сложных систем со статистическими методами формирования наборов исходных данных и обработки результатов называется **имитационным моделированием**, а сами модели – **имитационными**. Исследование поведения систем при помощи имитационных математических моделей и компьютеров называется **вычислительным экспериментом**.

В системном анализе ключевую роль играют **системно-структурные** или просто **структурные** модели, представляющие проблему в виде системы с определенной структурой. При построении их используется теория графов. Структурные модели могут при необходимости дополняться любыми другими.

На математическом моделировании базируется процесс принятия решений. В процессе принятия решений ЛПР выбирает наилучшее, оптимальное решение по некоторым критериям принятия решений.

Наиболее часто принимаются следующие критерии принятия решений: критерий Лапласа, Вальда, Севиджа, Гурвица, Бейеса др.

3.3.1. Критерий Лапласа

Этот критерий опирается на принцип **недостаточного обоснования**, по которому считается, что наступление всех состояний природы равновероятно, то есть $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$, а оптимальной считается стратегия A_i, обеспечивающая $\max\limits_i \left(\frac{1}{n} \sum\limits_j a_{ij} \right)$.

3.3.2. Критерий Вальда (минимаксный или максиминный критерий)

Этот критерий является наиболее осторожным, поскольку основан на выборе наилучшей из наихудших возможностей:

$\max\limits_i (\min\limits_j a_{ij})$ – в случае нахождения выигрыша;

$\min\limits_j (\max\limits_i a_{ij})$ – в случае нахождения потерь.

Это пессимистические критерии.

3.3.3. Критерий Сэвиджа (минимаксного риска)

Критерий Вальда настолько пессимистичен, что может привести к нелогичным выводам. Рассмотрим следующую матрицу потерь, которая обычно приводится в качестве классического примера для обоснования «менее пессимистичного» критерия Сэвиджа (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Матрица потерь

	B1	B2
A_1	11000	90
A_2	10000	10000

Применение минимаксного критерия приводит к выбору стратегии A_2, хотя интуитивно можно выбрать A_1, так как при этом выборе можно надеяться на то, что возможно проиграть 90, тогда как выбор A_2 всегда приводит к потерям в 10000 единиц при любом состоянии погоды.

Критерий Сэвиджа «исправляет» положение введением новой матрицы потерь, в которой a_{ij} заменяются на r_{ij}, определяемые следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_{k}\{a_{kj}\} - a_{ij}, \text{ если } a_{ij} - \text{доход}, \\ a_{ij} - \max\{a_{kj}\}, \text{ если } a_{ij} - \text{потери}. \end{cases}$$

Это означает, что r_{ij} есть разность между наилучшим значением в столбце j и значением a_{ij}.По существу, r_{ij} выражает сожаление лица, принимающего решение, по поводу того, что он не выбрал наилучшего действия относительно состояния j. Матрица $R = r_{ij}$ называется матрицей сожаления или матрицей риска.

Найдем оптимальную стратегию предыдущей задачи по этому критерию:

$$R = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 9910 \end{pmatrix}.$$

Применим к матрице «сожаления» R минимаксный критерий. Получим, что оптимальной стратегией будет – A_1.

Отметим, что независимо от того, a_{ij} – доход или потери, r_{ij} – всегда потери. Поэтому к матрице «сожаления» всегда применяется минимаксный критерий.

3.3.4. Критерий Гурвица (пессимизма-оптимизма)

Этот критерий охватывает ряд различных подходов к принятию решений: от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного.

При оптимистичном подходе выбирают стратегию, дающую:

$\max\limits_{i}(\max\limits_{j} a_{ij})$, если a_{ij} – выигрыш,

и $\min\limits_{i}(\min\limits_{j} a_{ij})$, если a_{ij} – потери.

Аналогично при наиболее пессимистичных предположениях выбираемое решение соответствует: $\max\limits_{i}(\min\limits_{j} a_{ij})$, если a_{ij} – выигрыш, и $\min\limits_{i}(\max\limits_{j} a_{ij})$, если a_{ij} – потери.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего оптимизма и пессимизма взвешиванием обоих способов поведения с соответствующими весами.

Если a_{ij} *– прибыль, то выбирается стратегия по правилу:*

$$\max_{i}\{a(\max_{j} a_{ij}) + (1 - a\min a_{ij}\}.$$

Если a_{ij} *– затраты, критерий выбирает стратегию, дающую*

$$\min_{i}\{a(\min_{j} a_{ij}) + (1 - a\max a_{ij}\}.$$

Параметр a *интерпретируется как* ***показатель оптимизма;*** *при* $a = 1$ *критерий слишком оптимистичный, при* $a = 0$ *он слишком пессимистичный. Значение* a *между 0 и 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или оптимизму;* $a = 0{,}5$ *представляется наиболее разумным. Анализ практических ситуаций обычно проводится на основе нескольких критериев, что позволяет глубже исследовать суть явления.*

Пример 3.1

Одно из предприятий должно определить уровень предложения услуг так, чтобы удовлетворить потребности клиентов. Точное число клиентов неизвестно, но ожидается, что оно может принимать одно из следующих значений: 200, 250, 300, 350. Для каждого из этих возможных значений существует наилучший уровень предложения (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса.

Потери в зависимости от ситуации приведены в табл. 3.2

Таблица 3.2

Потери

Предложения	**Клиенты**				
	1	**2**	**3**	**4**	**max**
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	8	23	23
a_3	21	18	12	21	21
a_4	30	22	19	15	30

Критерий Вальда

Так как a_i *– потери, применяем минимаксный критерий.*

$\min\limits_i(\max\limits_j a_{ij}) = \min(25, 23, 21, 30) = 21$. *Оптимальной стратегией будет* A_3.

Критерий Лапласа

Пусть стратегии 2-го игрока равновероятны. Следовательно $p_1 = p_2 = p_4 = \dfrac{1}{4}$.

Тогда

$$E(a_1) = 5\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{1}{4} + 18\cdot\frac{1}{4} + 25\cdot\frac{1}{4} = 14,5$$

$$E(a_3) = \frac{1}{4}(21 + 18 + 12 + 21) = 18$$

$$E(a_4) = \frac{1}{4}(30 + 22 + 19 + 25) = 21,5$$

Таким образом, наилучшим уровнем предложения в соответствии с критерием Лапласа будет стратегия a_2.

Критерий Сэвиджа

Построим матрицу риска:

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 16 & 11 & 4 & 6 \\ 25 & 15 & 11 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 10 \\ 8 \\ 16 \\ 25 \end{matrix}$$

Лучшая стратегия a_2.

Критерий Гурвица

Пусть $a=\frac{1}{2}$.

	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	$a\min\limits_j a_{ij}+(1-a)\max\limits_j a_{ij}$
a_1	5	25	5/2+25/2=15
a_2	7	23	7/2+23/2=15
a_3	12	21	12/2+21/2=16,5
a_4	15	30	15/2+30/2=22,5

Лучшие стратегии a_1 *и* a_2.

В соответствии с 3-мя критериями рекомендуется выбрать стратегию a_2.

Критерий Байеса

Если вероятности состояний природы – p_j *известны, то можно пользоваться критерием Байеса, согласно которому оптимальной считается чистая стратегия, соответствующая максимальному среднему выигрышу:* $\max\limits_i a_i=\max\sum\limits_j a_j p_j$, *если – выигрыш и минимальным средним потерям:* $\min\limits_i a_i=\min\sum\limits_j a_j p_j$, *если* a_i *– потери.*

Если в предыдущем примере известны вероятности спроса $\overline{p}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$, *то для нахождения оптимальной стратегии необходимо найти средние потери для каждой чистой страте-*

гии предприятия и выбрать ту, которая обеспечивает минимум средних потерь: $\min\left(\frac{83}{8},\frac{77}{8},\frac{153}{8},\frac{198}{8}\right)=77/8$. *стратегия* a_2.

Можно показать, что та стратегия, которая обращает в максимум средний выигрыш, обращает в минимум и средний риск.

Все рассмотренные критерии были сформулированы для чистых стратегий, но каждый из них может быть распространен и на смешанные стратегии, подобно тому, как это делается в теории игр. В теории статистических решений смешанные стратегии имеют смысл при многократном повторении игры.

Но многократно повторяя игру, можно определить частоты повторений той или иной ситуации и в дальнейшем применять стохастический подход к задаче принятия решений.

Если использовать смешанные стратегии, то ***критерий Вальда*** *формулируется следующим образом: оптимальной будет смешанная стратегия, обеспечивающая, т. е. максимизирующая средний выигрыш (если* a_i *– выигрыш.*

3.4. Принятие решений при многих критериях

Обычно считается, что выбранным (а потому – приемлемым, выгодным, лучшим) является такое допустимое решение, которое наиболее полно удовлетворяет желаниям, интересам или целям данного лица, принимающего решения (ЛПР). Стремление ЛПР достичь определенной цели нередко в математических терминах удается выразить в виде максимизации (или минимизации) некоторой числовой функции, заданной на множестве X . Однако в более сложных ситуациях приходится иметь дело не с одной, а сразу несколькими подобного рода функциями. Так будет, когда исследуемое явление, объект или процесс рассматриваются с различных точек зрения и для формализации каждой точки зрения используется соответствующая функция. Если явление изучается в динамике, поэтапно и для оценки каждого этапа приходится вводить отдельную функцию, − в этом случае также приходится учитывать несколько функциональных показателей.

Принятие решения при многих критериях считается, что задан набор числовых функций $f_1, f_2,..., f_m$, $m \geq 2$, определенных на множестве возможных решений X. В зависимости от содержания задачи выбора эти функции именуют критериями оптимальности, критериями эффективности или целевыми функциями.

Пример 3.2 (задача выбора наилучшего проектного решения).

В этой задаче множество X состоит из нескольких конкурсных проектов (например, строительства нового предприятия), а критериями оптимальности могут служить стоимость осуществления проекта f_1 и величина прибыли f_2, которую обеспечит данное проектное решение (т.е. построенное предприятие).

Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием оптимальности, практическая значимость решения такой задачи будет незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его воплощение может привести к получению недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия оптимальности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум перечисленным следует добавить еще один – третий критерий, учитывающий экологический ущерб от строительства предприятия. Что касается ЛПР, то в данной задаче таковым является глава администрации района, на территории которого будет построено предприятие, при условии, что это предприятие является государственным. Если же предприятие – частное, то в качестве ЛПР выступает глава соответствующей фирмы.

Указанные выше числовые функции $f_1, f_2, ..., f_m$ образуют векторный критерий $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ который принимает значения в пространстве m-мерных векторов R^m. Это пространство называют критериальным пространством или пространством оценок, а всякое значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in R^m$ векторного критерия f при определенном $x \in X$ именуют векторной оценкой возможного решения X.

Все возможные векторные оценки образуют множество возможных оценок (возможных или допустимых векторов)

$$Y = f(X) = \{y = R^m \ / \ y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\}$$

3.5. Начальные понятия многокритериального выбора

Наряду с множеством выбираемых решений удобно ввести в рассмотрение множество выбираемых векторов (выбираемых оценок) $C(Y) = f(C(X)) = \{y = R^m \ / \ y = f(x) \text{ при некотором } x \in C(X)\}$, представляющее собой некоторое подмножество множества Y.

Как правило, между множествами возможных решений X и соответствующим множеством векторов Y можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому возможному решению поставить в соответствие определенный возможный вектор, и обратно – каждому возможному вектору сопоставить определенное возможное решение. В таких случаях выбор во множестве решений с математической точки зрения равносилен выбору во множестве векторов и все определения и результаты можно формулировать как в терминах решений, так и в терминах векторов, причем при желании всегда можно без труда осуществить переход от одной формы изложения к другой.

3.6. Многокритериальная задача

Задачу выбора, которая включает множество допустимых решений X и векторный критерий f, обычно называют многокритериальной задачей или задачей многокритериальной оптимизации.

Необходимо отметить, что формирование математической модели принятия решений (т.е. построение множества X и векторного критерия f) нередко представляет собой сложный процесс, в котором тесно взаимодействуют специалисты двух сторон. А именно, представители конкретной области знаний, к которой относится исследуемая проблема, и специалисты по принятию решений (математики). С одной стороны, следует учесть все важнейшие черты и детали реальной задачи, а с другой, – построенная модель не должна оказаться чрезмерно сложной с тем, чтобы для ее исследования и решения можно было успешно применить разработанный к настоящему времени соответствующий математический аппарат. Именно поэтому этап построения математической модели в значительной степени зависит от опыта, интуиции и искусства исследователей обеих сторон.

Его невозможно отождествить с простым формальным применением уже известных, хорошо описанных алгоритмов. Здесь следует еще добавить, что любая задача выбора (в том числе и многокритериальная) тесно связана с конкретным ЛПР. Уже на стадии формирования математической модели при построении множества возможных решений и векторного критерия дело не обходится без советов, рекомендаций и указаний ЛПР, тем более что векторный критерий как раз и служит для принятия решения при многих критериях для выражения целей ЛПР.

При этом ясно, что построить модель, в точности соответствующую всем реальным обстоятельствам, невозможно. Модель всегда является упрощением действительности. Важно добиться, чтобы она содержала те черты и детали, которые в наибольшей степени влияют на окончательный выбор наилучшего решения.

Предположим, что указанные две компоненты задачи выбора сформированы, четко описаны и зафиксированы. Опыт показывает, что в терминах критерия f чаще всего не удается выразить всю гамму «пристрастий», «вкусов» и предпочтений данного ЛПР. С помощью векторного критерия лишь намечаются определенные локальные цели, которые нередко оказываются взаимно противоречивыми. Эти цели одновременно, как правило, достигнуты быть не могут, и поэтому требуется дополнительная информация для осуществления компромисса. По этой причине помимо векторного критерия следует располагать какими-то дополнительными сведениями о предпочтениях ЛПР. С этой целью необходимо включить в многокритериальную задачу еще один элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения.

3.7. Отношение предпочтения

Рассмотрим два допустимых решения: x' и x''. Предположим, что после предъявления ЛПР этой пары решений, оно выбирает (отдает предпочтение) первое из них. В этом случае пишут $x' \succ_X x''$.

Знак $\succ_X$ служит для обозначений предпочтений данного ЛПР, выражаемых отношением строгого предпочтения, или короче – отношением предпочтения. Следует отметить, что не всякие два возможных решения x' обязательно связаны соотношением $x' \succ_X x''$, либо соотношением $x'' \succ_X x'$.

Иначе говоря, не из любой пары решений ЛПР может сделать окончательный выбор. Вполне могут существовать такие пары, что ЛПР не в состоянии отдать предпочтение какому-то одному решению данной пары, даже если это пара различных решений. Описанная ситуация вполне соответствует реальному положению вещей. Более того, если бы от ЛПР требовалась способность в произвольной паре возможных решений уметь определять решение, более предпочтительное по сравнению с другим, то в таком случае теория, построенная на указанном «жестком» требовании к ЛПР, не имела бы практического интереса.

Отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений, естественным образом, а именно $f(x') \succ_Y f(x'') \Leftrightarrow x' \succ x''$ для всех $x', x'' \in X$ индуцирует (порождает) отношение предпочтения $\succ_Y$ на множестве возможных векторов Y.Тем самым, вектор $Y'' = f(x'')$ является предпочтительнее вектора $Y' = f(x')$ тогда и только тогда, когда решение x' предпочтительнее решения x'' (т.е. $x' \succ_X x''$).

3.8. Модель многокритериального выбора

Теперь можно сформулировать все основные компоненты задачи многокритериального выбора. Постановка всякой задачи многокритериального выбора включает:

1) множество возможных решений X;

2) векторный критерий f вида $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$;

3) отношение предпочтения $\succ_X$.

Само ЛПР в постановку задачи многокритериального выбора не включено. В этом нет необходимости. Подразумевается, что все его устремления, вкусы, пристрастия и предпочтения, оказывающие влияние на процесс выбора, «материализованы» в терминах векторного критерия и отношения предпочтения. Задача многокритериального выбора состоит в отыскании множества выбираемых решений $C(X)$, $C(X) \in X$, с учетом его отношения предпочтения $\succ_X$ на основе заданного векторного критерия f, отражающего набор целей ЛПР. Приведенная задача многокритериального выбора выписана в терминах решений. Нередко данную задачу формулируют в терминах векторов. В таком случае она содержит два объекта:

1) множество возможных векторов Y, $Y \in R^m$;

2) отношение предпочтения $\succ_Y$,

и заключается в отыскании множества выбираемых векторов $C(Y)$, $C(Y) \in Y$, с учетом отношения предпочтения ЛПР $\succ_Y$.

Как указано выше, две приведенные задачи (в терминах решений и в терминах векторов) в указанном выше смысле эквивалентны, поэтому, руководствуясь соображениями удобства, имеет смысл изучать любую из них, а затем в случае необходимости полученные результаты всегда можно переформулировать в терминах другой задачи.

3.9. Принятие решений при многих критериях. Бинарные отношения

Для описания и изучения упомянутого в предыдущем разделе отношения предпочтения существует специальное математическое понятие – бинарное отношение. Однако прежде чем его формулировать, напомним определение декартова произведения двух множеств. Для этого сначала целесообразно вспомнить понятие упорядоченного множества. Как известно, для множеств изменение порядка следования элементов, а также добавление и удаление одинаковых элементов не изменяет данного множества. Но существуют такие множества, для которых порядок имеет существенное значение. Такие множества называются упорядоченными. Если для обозначения неупорядоченных множеств, рассматриваемых нами ранее применялись фигурные скобки «{...}», то для обозначения упорядоченных множеств используются круглые «(…)» или угловые скобки «<...>». Упорядоченные множества ещё называют кортежами. Примером упорядоченного множества могут служить координаты точки в $n-$мерном пространстве $A=(a_1,a_2,...,a_n)$. Как известно, перемена мест элементов такого множества, а также удаление или приписывание одинаковых элементов существенно меняет его смысл.

Количество элементов в упорядоченном множестве называют его длиной. Так, $X=(x_1,x_2,x_3)$ является упорядоченным множеством или кортежем длиной 3, $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ – упорядоченным множеством длиной n.

Кортеж длиной 2 называется упорядоченной двойкой или упорядоченной парой, длиной 3— упорядоченной тройкой. Таким образом могут быть рассмотрены упорядоченные четвёрки, пятёрки, и т.д., упорядоченные $n-$ки.

Кортежи $<a_1,a_2,...,a_n>$ и $<b_1,b_2,...,b_k>$ называются равными, если они имеют одинаковую длину и их элементы с одинаковыми номерами совпадают, т.е. $<a_1,a_2,...,a_n>=<b_1,b_2,...,b_k>$, если $n=k$ и для $\forall i\ a_i=b_i$.

Пример 3.3.

Кортежи $<\frac{1}{2^1},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4}>$ и $<\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}>$ равны, т.к. оба кортежа имеют одинаковую длину, равную 4, и равны элементы с одинаковыми номерами $\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{2^3}=\frac{1}{8},\ \frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

Из двух данных кортежей $<a_1,a_2,...,a_n>$ и $<b_1,b_2,...,b_k>$ длины n и k, где $a_i\in A\ ,i=\overline{1,n},\ b_j\in B,\ j=\overline{1,k}$, можно составить новый кортеж длины $n+k$, элементы которого $<a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_k>$ принадлежат множеству $A\bigcup B$. Эта операция называется соединением кортежей.

Рассмотрим два произвольных множества X и Y. Прямым или декартовым произведением двух множеств X и Y называется такое множество, которое состоит из тех и только тех упорядоченных пар, первый элемент которых является элементом множества X, а второй – элементом множества Y. Высказывательная форма декартова произведения имеет следующий вид: $X\times Y\leftrightarrow\{(a,b)/\,a\in X, b\in Y\}$. Является очевидным, что

$X \times Y \neq Y \times X$. Прямое произведение может быть распространено на большее количество декартовых сомножителей:

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) / a_1 \in X_1, a_2 \in X_2, ..., a_n \in X_n\}.$$

Как видно из высказывательной формы, элементами декартового произведения при количестве сомножителей, равном n являются упорядоченные $n-$ки.

Пример 3.4.

Рассмотрим множества X и Y: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Тогда декартово произведение $X \times Y$ составляет множество:

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3), \\ (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\}.$$

Пример 3.5

Рассмотрим множества X, Y и Z: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Составим декартово произведение трёх множеств X, Y и Z:

$$X \times Y \times Z = \{(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_2), (x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_1), (x_1, y_2, z_2), \\ (x_1, y_2, z_3), (x_1, y_3, z_1), (x_1, y_3, z_2), (x_1, y_3, z_3), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_1, z_2), \\ (x_2, y_1, z_3), (x_2, y_2, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_2, y_2, z_3), (x_2, y_3, z_1), (x_2, y_3, z_2), \\ (x_2, y_3, z_3), (x_3, y_1, z_1), (x_3, y_1, z_2), (x_3, y_1, z_3), (x_3, y_2, z_1), (x_3, y_2, z_2), \\ (x_3, y_2, z_3), (x_3, y_3, z_1), (x_3, y_2, z_2), (x_3, y_2, z_3), (x_3, y_3, z_1), (x_3, y_3, z_2), \\ (x_3, y_3, z_3)\}.$$

Если число элементов множества A обозначить как $|A|$, то можно записать: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Степень множества

Рассмотрим декартово произведение $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, в котором декартовы сомножители совпадают: $X_1 = X_2 = ... = X_n$. Обозначим каждое из этих множеств через X. Тогда декартово произведение $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ представляет собой декартову $n-ю$степень множества X: $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = X^n$. Декартова степень множества X с показателем степени n представляет собой множество упорядоченных $n-ок$. Высказывательная форма множества X^n имеет вид:

$$X^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}.$$

Пример 3.6

Рассмотрим множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Найдём для него вторую декартову степень:

$$X^2 = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2,), (x_3, x_3)\}.$$

Аналогично можно задать множество, представляющее собой третью декартову степень множества X:

$$X^3 = \{(x_1, x_1, x_1), (x_1, x_1, x_2), (x_1, x_1, x_3), (x_2, x_1, x_1), (x_2, x_1, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_3, x_1, x_1), (x_3, x_1, x_2,), (x_3, x_1, x_3), (x_1, x_2, x_1), (x_1, x_2, x_2), (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_1), (x_1, x_3, x_2), (x_1, x_3, x_3)\}.$$

Если число элементов множества X обозначить как $|X|$, то $\left|X^n\right| = |X|^n$.

Сечение и проекция

Сначала разберём понятие *проекции*. Рассмотрим некоторое множество $C = A \times B$ и $t \in C$. В соответствии с определением элемент t представляет собой упорядоченную пару $t = (a, b)$, первый элемент которой принадлежит множеству A, а второй – множеству B: $a \in A$, $b \in B$. Элемент a является проекцией множества t на множество A и обозначается $a = пр_A C$, а $b-$ проекцией множества t на множество B и обозначается $b = пр_B C$.

Рассмотрим множество Е , которое представляет собой подмножество множества C: $E \subseteq C$.

Можно говорить о проекции подмножества Е на множества A и B.

Проекцией множества E на множество A называется множество тех элементов, которые являются проекциями всех элементов множества E на множество A. Высказывательная форма проекций множества E на множества A и B записывается в виде:

$$пр_A E = \{a \in A / (a, b) \in E\},\ пр_B E = \{b \in B / (a, b) \in E\}.$$

Пример 3.7

Рассмотрим множества $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Множество $C = A\times B$ зададим табл. 3.3.

Таблица 3.3

Декартово произведение $C = A\times B$

$A \backslash B$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1					
a_2	•		•		
a_3		•		•	
a_4		•			

Зададим множество $E\subseteq A\times B$ методом перечисления его элементов:

$$E=\{(a_2,b_1),(a_2,b_3),(a_3,b_2),(a_3,b_4),(a_4,b_2)\}.$$

Тогда если $t=(a_3,b_2)$, то $np_A t=a_3$, $np_B t=b_2$, $np_A E=\{a_2,a_3,a_4\}$, $np_B E=\{b_1,b_3\}$.

Пример 3.8.

Декартово произведение $\Omega = A\times B$. Если A и B представляют собой множества действительных чисел, то геометрической интерпретацией множества Ω является множество точек плоскости AOB (рис. 3.1).

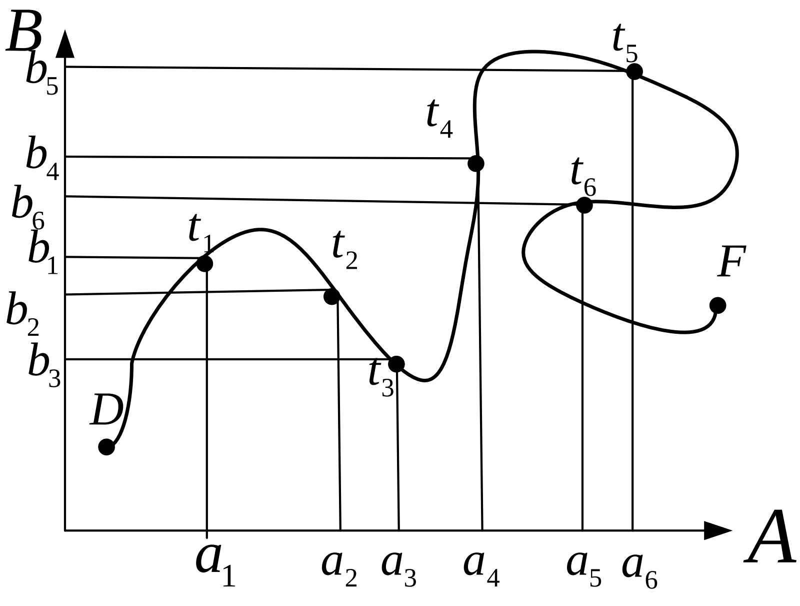

Рис. 3.1. Множество $\Omega = A\times B$ для примера 3.8

Рассмотрим подмножество $\Omega_1 \subseteq \Omega$, представляющее собой некоторую кривую $\Omega_1 = DF$, и множество Θ, в свою очередь являющееся подмножеством $\Theta \subseteq \Omega_1$, $\Theta = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$. Проекциями множества Θ на множества A и B являются следующие множества:

$$np_{\text{A}}\Theta = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\},\ np_{\text{B}}\Theta = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}.$$

Множество C может представлять собой декартово произведение множеств, число которых больше двух:

$$C = \{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_{i+k} \times X_{i+k+1} \times \ldots \times X_n\}.$$

Если рассмотреть некоторое подмножество этого множества $\text{E} \subseteq \text{C}$, то можно говорить о проекции этого множества на множество $X_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_{i+k}$:

$$np_{X_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_{i+k}} E = \{(x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+k+1}, x_{i+k+2}, \ldots, x_n) / x_1 \in X_1, \ldots, x_{i-1} \in X_{i-1},$$
$$x_{i+k+1} \in X_{i+k+1}, x_{i+k+2} \in X_{i+k+2}, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

Разберём понятие «*сечение*». Рассмотрим некоторый элемент x из множества A. Тогда сечение множества E элементом a называется множество элементов из B, которые составляют упорядоченную пару из множества E: $сеч_x E = \{y \in B / (x, y) \in E\}$. Аналогично можно рассматривать сечение множества E элементом y: $сеч_Y E = \{x \in A / (x, y) \in E\}$.

Пример 3.9

Рассмотрим множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ и множество $C = A \times B$, заданное табл.3.3. Тогда сечением множества $E \subseteq A \times B$ элементом a_3 является множество $Сеч_{a_3} \text{E} = \{\text{b}_2, b_4\}$, а сечением множества $E \subseteq A \times B$ элементом b_2 является множество $Сеч_{b_2} \text{E} = \{a_3, a_4\}$.

Рассмотрим понятие сечения, когда множество E является подмножеством множества

$$C = \{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_{i+k} \times X_{i+k+1} \times \ldots \times X_n\}.$$

Тогда сечение множества E элементом $x_i \in X_i$ представляет собой множество, задаваемое высказывательной формой

$$Сеч_{\tilde{x}_i} E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) / (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E\}.$$

Можно говорить о сечении множества E более сложным элементом, представляющим собой упорядоченное множество $(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, ..., \tilde{x}_{i+k})$:

$$Сеч_{(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, ..., \tilde{x}_{i+k})} E =$$

$$= \{(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+k+1}, ..., x_n) / (x_1, ..., x_{i-1}, \tilde{x}_i, ..., \tilde{x}_{i+k}, x_{i+k+1} ..., x_n) \in E\}$$

Соответствия

Рассмотрим два произвольных множества X и Y. Допустим, что некоторым элементам множества X, по какому то закону Q ставятся в соответствие некоторые элементы Y. Таким образом, некоторые элементы множества X сопоставляются по закону Q с некоторыми элементами множества Y. Если способ сопоставления Q определен, то говорят на множествах X и Y задано ***соответствие*** (рис. 3.2).

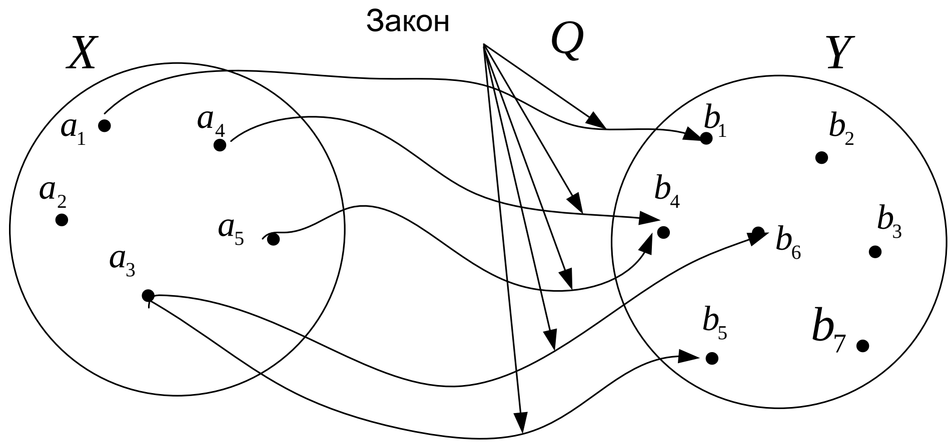

Рис. 3.2. Геометрическая интерпретация соответствия

Элементами множеств X и Y могут быть как числа, так и любые объекты, например, списки сотрудников и их зарплаты, списки студентов и их оценки по предметам и т.д. Соответствие представляет собой математический объект, который формально описывается кортежем длиной 3 (упорядоченной тройкой): $q = < X, Y, Q >$, где $X -$область отправления соответствия. Это множество X, некоторые элементы которого сопоставляются по закону Q с элементами множества Y. В соответствии $q = < X, Y, Q >$ не все элементы множества X участвуют в сопоставлении. Во множестве X остаются свободные элементы. $Y -$ область прибытия соответствия. Это множество, с элементами которого сопоставляются по закону Q элементы множества X.

В соответствии $q =< X,Y,Q >$ не все элементы множества Y участвуют в сопоставлении. Во множестве Y могут существовать свободные элементы:

$Q-$это закон, который некоторым элементам множества X ставит в соответствие один или несколько элементов множества Y. Закон Q называется графиком соответствия и представляет собой подмножество декартового произведения областей прибытия X и отправления Y: $Q \subseteq X \times Y$. Согласно рисунку 3.2. график соответствия Q представляет собой множество упорядоченных пар: $Q = \{(a_1,b_1),(a_4,b_4),(a_5,b_4),(a_3,b_6),(a_3,b_5)\}$.

Подмножество элементов из множества X, которые участвуют в сопоставлении, называется областью определения соответствия.

Область определения соответствия представляет собой не что иное, как проекцию графика соответствия Q на множество X:

$$np_X\mathrm{Q} = \{a \in X \,/\, (a,b) \in Q\}.$$

Подмножество элементов множества Y, которые участвуют в сопоставлении, называются **областью значений** соответствия. Область значений соответствия представляет собой проекцию графика соответствия Q на множество Y:

$$np_Y\mathrm{Q} = \{b \in Y \,/\, (a,b) \in Q\}.$$

Возьмем любой произвольный элемент из области определения соответствия $\forall \varepsilon \in np_{\mathrm{X}}Q$. Дадим определение образа элемента. Образом элемента ε называется множество таких элементов из $np_{\mathrm{Y}}Q$, которые составляют упорядоченную пару с элементом ε в рамках графика соответствия Q. Образ элемента обозначается $Q(\varepsilon)$ или Q_ε и формально описывается высказывательной формой:

$$Q(\varepsilon) = \{y \in Y \,/\, (\varepsilon, y) \in Q\}.$$

Пример 3.10

Найдём образ элемента a_3 из области определения соответствия $Q = \{(a_1,b_1),(a_4,b_4),(a_5,b_4),(a_3,b_6),(a_3,b_5)\}$, геометрическая интерпретация которого приведена на рис.3.2.: $Q(a_3) = \{b_5,b_6\}$.

Возьмем любой произвольный элемент из области значений соответствия $\forall\mu \in np_{Y}Q$. Дадим определение прообраза элемента. Прообразом элемента μ называется множество таких элементов из $np_{X}Q$, которые составляют упорядоченную пару с элементом μ в рамках графика соответствия Q. Прообраз элемента обозначается $Q^{-1}(\mu)$ или Q_{μ}^{-1} и формально описывается высказывательной формой: $Q^{-1}(\mu) = \{x \in X \,/\, (x,\mu) \in Q\}$.

Пример 3.11

Найдём прообраз элемента b_4 из области значений соответствия $Q = \{(a_1,b_1),(a_4,b_4),(a_5,b_4),(a_3,b_6),(a_3,b_5)\}$, геометрическая интерпретация которого приведена на рис. 3.2.: $Q^{-1}(b_4) = \{a_4,a_5\}$.

Существует понятие обратного соответствия. Соответствием, обратным данному $q =< X,Y,Q >$, называется соответствие $q^{-1} =< Y,X,Q^{-1} >$. Геометрическая интерпретация обратного соответствия получается посредством изменения направления стрелок на обратные. Область отправления исходного соответствия становится областью прибытия обратного соответствия, и наоборот.

Композиция соответствий.

Рассмотрим два соответствия: $q = (X,Y,Q)$, $Q \subseteq X \times Y$ и $\gamma = (Y,Z,\Gamma)$, $\Gamma \subseteq X \times Y$, для которых справедливо равенство $np_{Y}Q = np_{X}\Gamma$. Такие соответствия могут составить композицию (или произведение), график которой обозначается как $Q \bullet \Gamma$. Композицию соответствий $Q \bullet \Gamma$называют ещё произведением или суперпозицией соответствий. Высказывательная форма графика композиции соответствий имеет вид:

$$Q \bullet \Gamma = \{(x,y), x \in X, y \in Y, \exists c \in np_{Y}\mathrm{Q} \,/\, (x,c) \in Q \wedge (c,y) \in \Gamma\}.$$

При композиции соответствий $Q \bullet \Gamma$ каждому элементу $a_i \in np_{X}Q$ ставится в соответствие элемент $d_i \in np_{Z}\Gamma$, такой, что $Q(a_i) = b_i$, $b \in np_{Y}Q$, $\Gamma(b_i) = d_i$ (рис. 3.3.)

При композиции соответствий $Q \bullet \Gamma$ каждому элементу $a_i \in np_{X}Q$ ставится в соответствие элемент $d_i \in np_{Z}\Gamma$, такой, что $Q(a_i) = b_i$, $b \in np_{Y}Q$, $\Gamma(b_i) = d_i$. Образ элемента a_i можно представить как .$d_i = Q \bullet \Gamma(a_i) = \Gamma(Q(a_i))$. Таким образом, отображение через точку b_i отображает точку a_i в точку d_i: $Q \bullet \Gamma(a_i) = \Gamma(b_i) = \Gamma(Q(a_i))$.

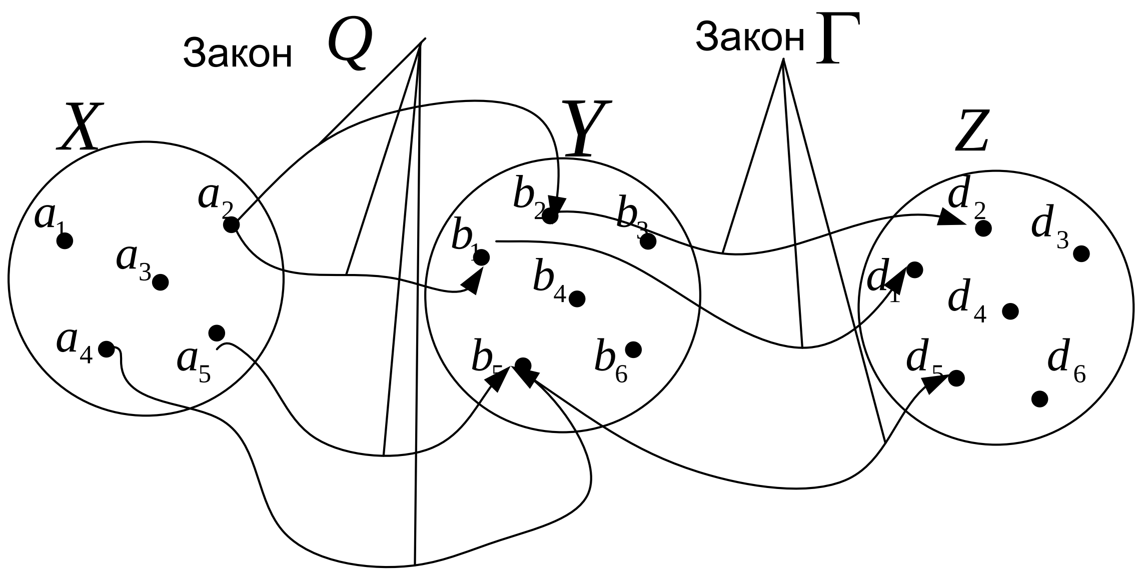

Рис. 3.3. Геометрическая интерпретация композиции соответствий

Это можно отобразить в виде схемы, представленной на рис. 3.4.

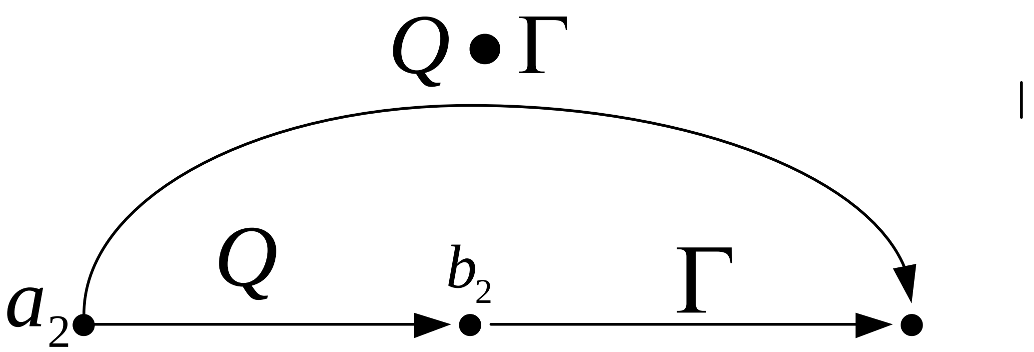

Рис. 3.4. Схема суперпозиций соответствий Q и Γ

Отображения

Рассмотрим некоторое соответствие $g = < A, B, G >$, $G \subseteq A \times B$.

Допустим, что это соответствие обладает следующим свойством $пр_A G = A$, т.е. область определения соответствия совпадает с областью отправления. Это соответствие всюду определено на всем множестве A, т.е. все элементы множества A участвуют в сопоставлении. Относительно области прибытия, т.е. множества B, ничего не говорится.

Такое всюду определенное соответствие называется отображением и формально записывается следующим образом: $G: A \to B$ или $A \xrightarrow{G} B$.

Таким образом, любое отображение является соответствием, но не наоборот. В связи с этим для отображений сохраняются понятия обратного отображения, композиции отображений, образа элемента, прообраза элемента.

Отношения.

Математическое понятие «отношение», так же как понятие множества, является очень широким и общим. Рассмотрим отображение $\Gamma: A \to B$, $\Gamma \subseteq A \times B$. Допустим, что множество A совпадает с множеством $B: A = B$. Тогда имеем отображение, заданное на одном множестве $\Gamma: A \to A$, $\Gamma \subseteq A \times A$, $\Gamma \subseteq A^2$. В этом случае говорят, что на множестве A задано отношение $\Gamma \subseteq A^2$. Отношение ─ всюду определённое соответствие между равными множествами. Отношения, заданные на некоторых числовых множествах, могут выражаться терминами «быть равным», «быть больше», «быть меньше», «быть делителем» и т.д. Отношение во множестве линий на плоскости могут выражаться терминами «быть параллельными», «пересекаться», «касаться» и т.д. Ранее нами рассматривалось отношение композиции отображений, соответствий, заданное на множествах. Отношение является частным случаем отображения, когда область определения и множество значений совпадают, поэтому всё сказанное ранее для отображений справедливо и для отношений.

В отображении $\Gamma: A \to B$ множество A может представлять собой декартову степень $A = X^{n-1}$. В этом случае имеем отношение $\Gamma^{(n)} \subseteq X^n$. Показатель декартовой степени n называется арностью отношения. Если в отношении $\Gamma^{(n)} \subseteq X^n$ показатель декартовой степени n равен единице $((n=1)$, то имеем унарное отношение $\Gamma \subseteq X$. Таким образом, унарное отношение, заданное на множестве, представляет собой некоторое подмножество этого множества. Унарное отношение называют ещё свойством. Элементами унарного отношения являются элементы множества, на котором задано это отношение. Если показатель степени n равен двум $(n=2)$, то отображение называется бинарным $\Gamma^{(2)} \subseteq X^2$.

Элементами бинарного отношения являются упорядоченные пары. Высказывательная форма бинарного отношения имеет вид

$$\Gamma = \{(a,b) / a \in X, b \in X\}.$$

Если показатель степени n равен трём $((n = 3)$, то отображение $\Gamma^{(3)} \subseteq X^3$ называется тенарным. Элементами тенарного отношения являются упорядоченные тройки

$$\Gamma = \{(a,b,c) / a \in X, b \in X, c \in X\}.$$

Примером тенарного отношения может быть отношение «образовать сумму», которое имеет смысл для троек чисел (x, y, z) и выполняется в том случае, когда $x + y = z$. Так можно задать четырёх-арное, пяти-арное, $\ldots$, $n-$арное отношение.

Примером четырёх-арного отношения может быть отношение «пропорциональность», элементами которого являются упорядоченные четвёрки (x, y, z, u), для которых $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{u}$.

Элементами $n-$арного отношения $\Gamma^{(n)} \subseteq X^n$ являются упорядоченные $n-ки$:

$$\Gamma^{(n)} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / x_1 \in X, x_2 \in X, ..., x_n \in X\}.$$

Отображение $R: X^n \to X$, являющееся функциональным, называется $n-$местной операцией. Очевидно, любая что $n-$местная операция является $(n+1)-$арным отношением $\Gamma \subseteq X^{(n+1)}$, но не наоборот, не всякое $(n+1)-$арное отношение является $n-$местной операцией.

$N-$арные отношения рассматриваются в информационных технологиях, а именно, в базах данных. Приведём пример $n-$арных отношений.

Бинарные отношения.

Бинарным отношением, заданным на множестве X, называется подмножество его декартового квадрата $R \subseteq X^2$. Формально бинарное отношение представляется кортежем $< X, R >$, первая компонента которого X называется носителем бинарного отношения, а вторая $R \subseteq X^2$ – сигнатурой. Совокупность множества X с заданным на нём бинарным отношением R называется графом. Формально граф, также как и бинарное отношение, описывается кортежем $< X, R >$. Высказывательная форма бинарного отношения имеет вид: $R = \{(a,b) / a \in \mathrm{X}, \mathrm{b} \in \mathrm{X}\}$. Таким образом, элементами бинарного отношения являются упорядоченные пары. Если элементы $\xi \in X$ и $\vartheta \in X$ находятся в отношении R, то используется запись $(\xi, \vartheta) \in R$ или соотношение $\varepsilon R \vartheta$. Рассмотрим способы задания бинарных отношений.

Матричный способ задания отношений.

При матричном способе задания бинарных отношений используют матрицу смежности $\|a_{ij}\|$ и матрицу инциденций $\|r_{ij}\|$. Матрица смежности $\|a_{ij}\|$ строится следующим образом. Перенумеруем элементы множества X целыми числами от 1 до n: $x_1, x_2, ..., x_n$. Построим квадратную матрицу $\|a_{ij}\|$ размером $n \times n$. Её $i-я$ строка соответствует $i-му$ элементу множества X, а j-й столбец соответствует j-му элементу множества X. На пересечении i-й строки и $j-го$ столбца ставится единица, если в $(x_i, x_j) \in R$, или в другой форме $(x_i R x_j)$. Общее правило задания матрицы смежности бинарного отношения R можно формально записать:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (x_i, x_j) \in R; \\ 0, & \textit{если} \quad (x_i, x_j) \notin R. \end{cases}$$

Матрица смежности $\|a_{ij}\|$ содержит всю информацию о том, для каких пар элементов из X выполнено отношение R. Произвол состоит в выборе нумерации на множестве X. Является очевидным, что можно выбрать $n!$ различных нумераций и, соответственно, $n!$ матриц, описывающих данное отношение. Если задана матрица размером $n \times n$ из нулей и единиц и выбрана нумерация на множестве X, то тем самым на этом множестве задаётся некоторое отношение R. Матрица смежности $\|a_{ij}\|$, для которой все $a_{ij} = 0$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ задаёт пустое отношение $R = \varnothing$, которое не выполняется ни для одной пары. Матрица смежности $\|a_{ij}\|$, для которой все $a_{ij} = 1$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ задаёт полное отношение $R = \varnothing$, которое выполняется ни для всех пар. Особую роль играют матрицы $\|\delta_{ij}\|$, элементы которой принимают следующие значения:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В этом случае символ δ_{ij} называется символом Кронекера по имени математика, впервые его употребившего. Этой матрице соответствует диагональное отношение E, или отношение равенства. Соотношение xEy выполняется, если x и y — один и тот же элемент. Матрица $\|\delta_{ij}\|$ имеет вид:

$$\|\delta_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

Существует также антидиагональное отношение, элементы a_{ij} которого принимают значения $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$. Для пустого, полного, диагонального и антидиагонального отношений имеет место следующее свойство: их матрицы смежности не зависят от выбора нумерации элементов множества. Иначе говоря, если отношение $R \subseteq M^2$ таково, что при любом выборе нумерации элементов множества M их матрицы смежности совпадают, то R является либо пустым, либо полным, либо диагональным, либо антидиагональным.

Задание отношений в виде графа.

Существует ещё и другой важный способ задания бинарных отношений, заданных на конечных множествах. Изобразим элементы конечного множества X точками на плоскости. Если выполнено соотношение $x_i R x_j$ (или $(x_i, x_j) \in R$), то проведём стрелку от x_i к x_j. Если выполняется $x_i R x_i$ (или $(x_i, x_i) \in R$), то нарисуем петлю, выходящую из x_i и входящую в эту же точку. Такая фигура называется ориентированным графом, а сами точки – вершинами графа (рис. 3.5).

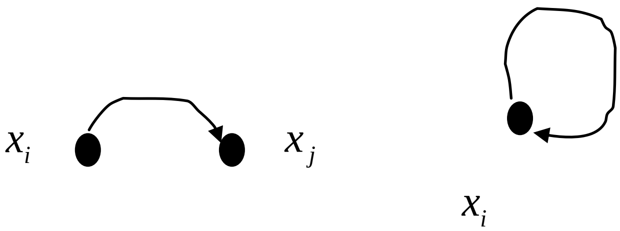

Рис. 3.5. Представление бинарных отношений в виде ориентированного графа

При графическом способе задания бинарных отношений пустому отношению соответствует граф без стрелок и петель. Диагональное отношение изображается графом, в котором присутствуют только петли. Полное отношение изображается полным графом, где каждая его вершина соединена со всеми другими вершинами, в том числе и сама с собой. Граф есть геометрическое изображение бинарного отношения аналогично тому, как график есть геометрическое изображение функции. Геометрический язык полезен лишь тогда, когда граф достаточно прост. Изучать же сложные графы с большим числом вершин удобнее в терминах отношений.

Задание отношений с помощью фактор множества.

Прежде, чем изложить способ задания бинарных отношений с помощью фактор множества, введём понятие окрестности единичного радиуса. Рассмотрим множество X с заданным на нём бинарным отношением $R \subseteq X^2$.

Определение

Окрестностью единичного радиуса элемента $m \in X$ *называется множество* $R(m)$, *задаваемое следующей высказывательной формой:*

$$R(m) = \{y \in X \ / \ (m, y) \in R\}.$$

Является бесспорным, что окрестность единичного радиуса представляет собой не что иное, как образ элемента носителя бинарного отношений.

Определение

Множество окрестностей единичного радиуса, взятых для всех элементов носителя X *бинарного отношения* $R \subseteq X^2$, *называется фактор-множеством множества* X *по отношению* R *и обозначается* X / R.

Таким образом, фактор-множество X / R можно представить как объединение окрестностей единичного радиуса, взятых для всех элементов множества X: $X / R = \bigcup\limits_{\forall x \in X} R(x)$. Фактор-множество X / R полностью определяет отношение R.

Свойства бинарных отношений

Рассмотрим свойства, которыми могут обладать бинарные отношения. Допустим, что на некотором множестве X, как на носителе задано бинарное отношение $< X, R >$, $R \subseteq X^2$. Произвольное бинарное отношение может обладать следующими свойствами.

1. Свойство рефлексивности $\forall x \in X \to (x, x) \in R$, т.е. любой элемент из множества X находится сам с собой в отношении R. Свойство рефлексивности можно записать в форме соотношений:
в инфиксной форме $\forall x \in X \to (xRx)$,
в префиксной форме $\forall x \in X \to R(x, x)$,
в постфиксной форме $\forall x \in X \to (x, x)R$.

2. Свойство антирефлексивности $\forall x \in X \to (x, x) \notin R$ т.е. любой элемент из множества X не может находиться сам с собой в отношении R. Или в форме соотношений:
в инфиксной форме $\forall x \in X \to (xRx) -$ ложь,
в префиксной форме $\forall x \in X \to R(x, x) -$ ложь,
в постфиксной форме $\forall x \in X \to (x, x)R -$ ложь.

3. Свойство симметричности

$$\forall x \in X, \forall y \in X, (x, y) \in R \to (y, x) \in R,$$

т.е. если элемент носителя x находится в отношении R с элементом носителя y, то и элемент y находится в отношении R с элементом x. В форме соотношений это свойство можно записать:
в инфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, (xRy) \to (yRx)$;
в префиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, (R(x, y) \to R(y, x)$;
в постфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, ((x, y)R \to (y, x)R$.

4. Свойство антисимметричности

$$\forall x \in X, \forall y \in X, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \to x = y,$$

т.е. если элемент x находится в отношении R с элементом y и одновременно элемент y находится в отношении R с элементом

x, то эти элементы совпадают. В форме соотношений это свойство выглядит следующим образом:
в инфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, xRy \wedge yRx \to x = y$;
в префиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, R(x, y) \wedge R(y, x) \to x = y$;
в постфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, (x, y)R \wedge (y, x)R \to x = y$.

5. Свойство несимметричности

$$\forall x \in X, \forall y \in X, (x, y) \in R \to (y, x) \notin R,$$

т.е. если элемент x находится в отношении R с элементом y, то элемент y не находится в отношении R с элементом x. В форме соотношений это свойство можно записать:
в инфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, xRy -$ истина $\to yRx -$ ложь,
в префиксной форме
$\forall x \in X, \forall y \in X, R(x, y) -$ истина $\to R(y, x) -$ ложь,
в постфиксной форме
$\forall x \in X, \forall y \in X, (x, y)R -$ истина $\to (y, x)R -$ ложь.

6. Свойство транзитивности

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \to (x, z) \in R,$$

т.е. для любых элементов x, y и z из множества X если элемент x находится в отношении R с элементом y, а элемент y находится в отношении R с элементом z, то элемент x находится в отношении R с элементом z. В форме соотношений это свойство выглядит следующим образом:
в инфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, xRy \wedge yRx \to xRz$,
в префиксной форме
$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, R(x, y) \wedge R(y, x) \to R(x, z)$,
в постфиксной форме
$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, (x, y)R \wedge (y, x)R \to (x, z)R$.

7. Свойство антитранзитивности

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \to (x, z) \notin R,$$

или в форме соотношений:
в инфиксной форме
$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, xRy -$ истина $\wedge\, y\mathrm{R}x -$ истина $\to xRz -$ ложь;
в префиксной форме
$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, R(x, y) -$ истина $\wedge R(y, x) -$ истина $\to$
$\to R(x, z) -$ ложь.

Перечисление свойств бинарных отношений совсем не означает, что все бинарные отношения ими обладают. В зависимости от присущих бинарным отношениям свойств они подразделяются на виды, которые будут рассмотрены далее.

Отношение эквивалентности

Некоторые элементы множества могут быть рассмотрены как эквивалентные. К эквивалентным элементам отнесём такое подмножество элементов, в котором один элемент может быть заменён другим элементом. В этом случае говорят, что эти элементы находятся друг с другом в отношении эквивалентности.

Пример 3.12.

Рассмотрим множество $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$.

Если $a_1=2$; $a_2=2$, $a_3=2$, $a_4=3$, $a_5=3$, то между элементами a_1,a_2,a_3 существует отношение эквивалентности: содержать одинаковое число единиц. Такое же отношение существует и между элементами a_4,a_5.

Если на множестве A задать отношение эквивалентности «иметь одинаковый знаменатель» и при этом $a_1=\frac{1}{6}$, $a_2=\frac{2}{9}$, $a_3=\frac{5}{6}$, $a_4=\frac{7}{6}$, $a_5=\frac{4}{9}$, то в заданном отношении находятся элементы a_1,a_3,a_4, а также элементы a_2,a_5.

Отношение эквивалентности обладает следующими свойствами:

– каждый элемент эквивалентен самому себе;

– высказывание относительно эквивалентности между двумя элементами не требует уточнения, какой из элементов рассматривается первым, а какой вторым;

– два элемента, эквивалентных третьему элементу, эквивалентны между собой.

Зададим на некотором произвольном множестве X бинарное отношение $<X,\rho>$, $\rho\subseteq X^2$. Это отношение будем называть отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:

– рефлексивности $\forall x \in X \to (x, x) \in \rho$, или
в инфиксной форме $\forall x \in X \to (x\rho x)$,
в префиксной форме $\forall x \in X \to \rho(x, x)$,
в постфиксной форме $\forall x \in X \to (x, x)\rho$.

– симметричности $\forall x \in X, \forall y \in X, (x, y) \in \rho \to (y, x) \in \rho$, или
в инфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, (x\rho y) \to (y\rho x)$,
в префиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, (\rho(x, y) \to \rho(y, x)$,
в постфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, ((x, y)\rho \to (y, x)\rho$;

– транзитивности

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \to (x, z) \in R,$$

в инфиксной форме $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, x\rho y \wedge y\rho x \to x\rho z$;
в префиксной форме
$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, \rho(x, y) \wedge \rho(y, x) \to \rho(x, z)$;
в постфиксной форме
$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, (x, y)\rho \wedge (y, x)\rho \to (x, z)\rho$.

Таким образом, бинарное отношение $\rho : X \to X$ называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отношение эквивалентности является подмножеством декартова произведения $\rho \subseteq X \times X$. Следовательно, элементами отношения эквивалентности являются упорядоченные пары: $\rho = \{(a,b)/a \in X, b \in X\}$.

Пример 3.13

Рассмотрим множество A из предыдущего примера $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, где $a_1 = 2$; $a_2 = 2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3$ и бинарное отношение $< A, \rho >$, $\rho \subseteq A^2$, означающие соответственно «иметь одинаковое число единиц». Тогда ρ представляет собой следующее множество упорядоченных пар:

$$\rho = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_3), (a_1, a_3), (a_4, a_4),$$
$$(a_4, a_5), (a_5, a_5), (a_2, a_1), (a_3, a_2), a_3, a_1), (a_5, a_4)\}.$$

Если принять $a_1 = \dfrac{1}{6}$, $a_2 = \dfrac{2}{9}$, $a_3 = \dfrac{5}{6}$, $a_4 = \dfrac{7}{6}$, $a_5 = \dfrac{4}{9}$ и задать на множестве A бинарное отношение $< A, \mu >$, $\mu \subseteq A^2$, означающее «иметь одинаковый знаменатель», то отношение μ представляет собой следующее множество упорядоченных пар:

$$\mu = \{(a_1, a_1), (a_1, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_3), (a_4, a_4),$$
$$(a_2, a_5), (a_5, a_2), (a_5, a_5)\}.$$

Теорема 3.1

Любое отношение эквивалентности определяет разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества, т.е. на классы.

Доказательство:

Рассмотрим любое произвольное множество A. Перед доказательством теоремы вспомним, что означает разбить множество Aна классы. В соответствии с операцией разбиения это означает найти такие множества $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$, называемые классами, для которых справедливо следующее:

– объединение всех классов Ω_i, $i = \overline{1, n}$ составит множество A:

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i = A$;

– пересечение всех классов пусто $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Если на множестве A задать отношение эквивалентности $\rho \subseteq A^2$, то всевозможные сечения (или окрестности единичного радиуса) образуют классы. Докажем это. Сначала докажем, что объединение всех сечений даст множество A. Запишем высказывательную форму отношения: $\rho = \{(a, b) / a \in A, b \in A\}$. Возьмём любой произвольный элемент a из множества A: $\forall a \in A$. Рассмотрим сечение отношения ρ элементом a:

$$S_a[\rho] = \{b \in A / \text{(a,b)} \in \rho\}.$$

Образуем такие сечения для всех элементов $x \in A$. Так как $(x, x) \in \rho \Rightarrow x \in S_x[\rho]$. Следовательно, каждый элемент множества A будет принадлежать какому-либо сечению. Тогда можно сделать вывод, что $\bigcup\limits_{\forall a \in A} S_a[\rho] = A$. Докажем, что пересечение всех классов является пустым множеством. Доказательство будем проводить методом от противного. Допустим, что сечения отношения эквивалентности ρ по некоторым элементам $a \in A$ и $b \in A$ пересекаются, т.е. $S_a[\rho] \bigcap S_b[\rho] \neq \varnothing$. Тогда в пересечении этих множеств присутствует хотя бы один элемент $c \in A$: $S_a[\rho] \bigcap S_b[\rho] = \{c\}$. Очевидно, что $c \in S_a[\rho] \Rightarrow (a,c) \in \rho \Rightarrow (c,a) \in \rho$; и $c \in S_b[\rho] \Rightarrow (b,c) \in \rho$. В сечении $S_a[\rho]$ рассмотрим некоторый элемент $d \in A$. Тогда можно записать $d \in S_a[\rho] \Rightarrow (a,d) \in \rho$. Рассмотрим следующие элементы множества ρ: $(b,c) \in \rho$, $(c,a) \in \rho$ и $(a,d) \in \rho$. Тогда справедливо соотношение: $(b,c) \in \rho, (c,a) \in \rho, (a,d) \in \rho \Rightarrow (b,d) \in \rho$. Следовательно $(b,d) \in \rho \Rightarrow d \in S_b[\rho]$.

Таким образом, отношение эквивалентности находится во взаимосвязи с разбиением множества.

Подмножество элементов, эквивалентных некоторому элементу $x \in A$, называется классом эквивалентности.

Все элементы одного класса эквивалентны между собой и каждый элемент может находиться только в одном классе. Значит, каждому отношению эквивалентности на множестве A соответствует некоторое разбиение множества на классы. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы некоторое отношение ρ позволяло разбить множество на классы является совокупность свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Отношение порядка

Существуют отношения, которые определяют порядок расположения элементов множества. Так, мы можем вводить понятия «больше», «меньше», «раньше», «позже» и т.д. Задав эти отношения, можно расположить элементы, например, в порядке возрастания, убывания их значений и др. Такое расположение элементов называют введением отношения порядка на некотором множестве E, а множество с заданным на нём отношением порядка называют упорядоченным множеством. Если любые два элемента множества $x \in E$ и $y \in E$ находятся в отношении порядка $(x,y) \in \gamma$ или $(y,x) \in \gamma$, то такое множество называется линейно упорядоченным множеством. Различают отношение нестрогого и строгого порядка. Допустим, что на некотором множестве E задано бинарное отношение γ: $< E, \gamma >$, $\gamma \subseteq E^2$.

Отношение γ будем называть отношением *нестрогого порядка*, если оно обладает следующими свойствами:

– рефлексивности $\forall x \in E \to (x,x) \in \gamma$, или
в инфиксной форме $\forall x \in E \to (x\gamma x)$,
в префиксной форме $\forall x \in E \to \gamma(x,x)$,
в постфиксной форме $\forall x \in E \to (x,x)\gamma$;

– антисимметричности

$\forall x \in E, \forall y \in E, (x,y) \in \gamma \wedge (y,x) \in \gamma \to x = y$,

или в инфиксной форме $\forall x \in E, \forall y \in E, x\gamma y \wedge y\gamma x \to x = y$;
в префиксной форме $\forall x \in E, \forall y \in E, \gamma(x,y) \wedge \gamma(y,x) \to x = y$;
в постфиксной форме $\forall x \in E, \forall y \in E, (x,y)\gamma \wedge (y,x)\gamma \to x = y$;

– транзитивности

$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x,y) \in \gamma \wedge (y,x) \in \gamma \to (x,z) \in \gamma$,

или в инфиксной форме $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, x\gamma y \wedge y\gamma x \to x\gamma z$;
в префиксной форме
$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \gamma(x,y) \wedge \gamma(y,x) \to \gamma(x,z)$;
в постфиксной форме
$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x,y)\gamma \wedge (y,x)\gamma \to (x,z)\gamma$.

Отношение нестрогого порядка называют ещё частичным порядком. Множество с отношением частичного порядка называется частично упорядоченным.

Отношение γ будем называть отношением *строгого* порядка, если оно обладает следующими свойствами:

– антирефлексивности $\forall x \in E \to (x,x) \notin \gamma$
или в инфиксной форме $\forall x \in E \to (x\gamma x) -$ ложь;
в префиксной форме $\forall x \in E \to \gamma(x,x) -$ ложь;
в постфиксной форме $\forall x \in E \to (x,x)\gamma -$ ложь;

– несимметричности $\forall x \in E, \forall y \in E, (x,y) \in \gamma \to (y,x) \notin \gamma$, или
в инфиксной форме $\forall x \in E, \forall y \in E, x\gamma y -$ истина $\to y\gamma x -$ ложь;
в префиксной форме
$\forall x \in E, \forall y \in E, \gamma(x,y) -$ истина $\to \gamma(y,x) -$ ложь;
в постфиксной форме
$\forall x \in E, \forall y \in E, (x,y)\gamma -$ истина $\to (y,x)\gamma -$ ложь.

Элементы $a \in E$ и $b \in E$ называются сравнимыми, если имеет место $(a,b) \in \gamma$ или $(b,a) \in \gamma$ ($a\gamma b$ или $b\gamma a$). Будем говорить, что элемент $x \in E$ предшествует элементу $y \in E$, или элемент

$y \in E$ следует за элементом $x \in E$, если имеет место $x\gamma y$ (или $(x, y) \in \gamma$.

Изоморфизм отношений

Рассмотрим два частично упорядоченных множества A и B отношениями частичного порядка ρ_1 и ρ_2: $< A, \rho_1 >$, $\rho_1 \subseteq A^2$ и $< B, \rho_2 >$, $\rho_2 \subseteq B^2$. Допустим, что задано отображение $\varphi : A \to B$, обладающее следующим свойством:

$$\forall a \in A, \forall b \in A, (a,b) \in \rho_1 \to (\varphi(a), \varphi(b)) \in \rho_2 .$$

Это свойство называется согласованностью отображения с отношениями ρ_1, ρ_2. Такое отображение называется морфизмом. При этом если отображение $\varphi : A \to B$ сюрьективно, то оно называется гомоморфизмом, если инъективно, то мономорфизмом, если биективно, то изоморфизмом. Если отображение $\varphi : A \to B$ является изоморфизмом, то говорят, что множество A изоморфно множеству B, или множество A изоморфно вкладывается в множество B.

Теорема 3.2

Любое частично упорядоченное множество изоморфно вкладывается в множество подмножеств с операцией включения.

Доказательство

Рассмотрим любое произвольное множество A. Зададим на нём отношение частичного порядка $< A, \rho >$, $\rho \subseteq A^2$. Рассмотрим на множестве A множество подмножеств $P(A) : \{A_a, A_b, A_c, ...\}$. Элементы $A_a, A_b, A_c, ...$ образуются следующим образом. Для каждого $a \in A$ рассматривается такое подмножество элементов, x, которые находятся с элементом a в отношении ρ: $A_a = \{x / (a, x) \in \rho$. В подмножестве A_a рассмотрим элемент $b \in A_a$ и образуем подмножество A_b таких элементов y, которые находятся в отношении ρ с элементом b: $A_b = \{y / (b, y) \in \rho$. В подмножестве A_b возьмём элемент $c \in A_b$ и создадим множество A_c таких элементов z, которые находятся в отношении ρ с элементом c: $A_c = \{z / (c, z) \in \rho$, и т.д. На множествах A и $P(A)$ зададим отображение $\varphi : A \to P(A)$, такое, что $A_a = \varphi(a)$, $A_b = \varphi(b)$, $A_c = \varphi(c), \ldots$. Так как $A_b \subseteq A_a \Rightarrow \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. Тогда $(a,b) \in \rho \Rightarrow \varphi(a) \supseteq \varphi(b)$, т.е.

имеется согласование отображения $\varphi: A \to P(A)$ с отношением ρ и отношением включения "$\supseteq$".

3.10. Принцип Эджворта-Парето

Таким образом, математическая формулировка задачи многокритериального выбора включает множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения лица, принимающего решение. Решить эту задачу – означает найти множество тех решений, которые следует выбрать. Для описания отношения предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, используется понятие бинарного отношения, описанное в предыдущем разделе пособия. Бинарные отношения могут быть различного типа. В процессе принятия решений используются отношения предпочтения. Рассмотрим эти отношения.

Пусть x' и x'' − два произвольных возможных решения. Для них имеет место один и только один из следующих трех случаев:

1) справедливо соотношение $x' \succ_X x''$ (ЛПР первое решение предпочитает второму);

2) справедливо соотношение $x'' \succ_X x'$(ЛПР второе решение предпочитает первому);

3) не выполняется ни соотношение $x' \succ_X x''$, ни соотношение $x'' \succ_X x'$(ЛПР не может отдать предпочтение ни одному из указанных двух решений).

Заметим, что четвертый случай, когда оба участвующих здесь соотношения $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'$? выполняются, невозможен благодаря асимметричности отношения предпочтения $\succ_X$. В первом из указанных выше случаев, т.е. при выполнении соотношения $x' \succ_X x''$, говорят, что решение x' доминирует решение x'' (по отношению $\succ_X$). Во втором случае доминирует x'. Если же реализуется третий случай, то говорят, что решения x' и x'' не сравнимы по отношению предпочтения. Обратимся к задаче многокритериального выбора, в которой задано множество допустимых решений X, векторный критерий $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ и отношение предпочтения $\succ_X$.Пусть для некоторого возможного решения x'' найдется такое возможное решение x'', что выполнено соотношение $x' \succ_X x''$.

По определению отношения предпочтения это означает, что из данной пары решений ЛПР выберет первое решение и не выберет второе. В терминах множества выбираемых решений этот факт можно выразить следующей эквивалентностью $x' \succ_X x'' \Leftrightarrow C(x', x'') = \{x'\}$ для $x', x'' \in C$. Если решение x'' не выбирается из пары (x', x'') в силу того, что для него в этой паре есть лучшее решение x' (т.е. $x' \succ_X x''$), то, рассматривая x'' в пределах всего множества возможных решений X, разумно предположить, что решение x'' в таком случае не должно быть выбранным и из всего множества возможных решений, так как для него в X существует, по крайней мере, одно заведомо более предпочтительное решение (т.е. x'). Приведенные рассуждения показывают, что при выборе первого решения из пары естественно считать, что второе решение не может оказаться выбранным и из всего множества возможных решений. Тем самым, в виде аксиомы сформулируем требование, которому должно удовлетворять поведение ЛПР в процессе выбора.

Аксиома 3.1 (аксиома исключения доминируемых решений). Для всякой пары допустимых решений $x', x'' \in X$, для которых имеет место соотношение $x' \succ_X x''$, выполнено $x'' \notin C(X)$.

В аксиоме 1 участвует не только отношение предпочтения $\succ_X$, которым ЛПР руководствуется в процессе принятия решений, но и множество выбираемых решений $C(X)$.

Это означает, что данное требование следует рассматривать как определенное ограничение на множество выбираемых решений.

А именно, любое множество выбираемых решений, каким бы способом оно не было выделено из всего множества возможных решений, не должно содержать ни одного такого решения, для которого может найтись более предпочтительное возможное решение.

Напомним, что запись $f(x') \geq f(x'')$означает выполнение покомпонентных неравенств $f_i(x') \geq f_i(x'')$ для всех $i = \overline{1, m}$, причем $f(x') \neq f(x'')$.

Это означает, что компоненты первого вектора $f(x')$ не меньше соответствующих компонент второго вектора $f(x'')$, причем по крайней мере одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

В частном случае, когда векторный критерий является скалярным, т.е. имеет лишь одну компоненту, аксиома Парето выражает стремление ЛПР максимизировать эту компоненту.

Аксиома Парето (в терминах векторов). Для всех пар допустимых векторов $y', y'' \in Y$, для которых имеет место неравенство $y' \geq y''$, выполняется соотношение $y' \succ_Y y''$.

Множество Парето. Для того чтобы сформулировать принцип Эджворта-Парето, который представляет собой фундаментальный инструмент выбора решений при наличии нескольких критериев, понадобится определение множества Парето. Приведем соответствующее определение.

Решение $x^* \in X$ называется оптимальным по Парето (парето-оптимальным), если не существует такого возможного решения $x \in X$, для которого имеет место неравенство $f(x) \geq f(x^*)$.

Все парето-оптимальные решения образуют множество Парето, обозначаемое $P_f(x)$.В соответствии с приведенным определением

$$P_f(x) = \{x^* \in X \ / \text{ не существует такого } \quad x \in X, \text{ что } f(x) \geq f(x^*)$$

Пусть x^* – некоторое парето-оптимальное решение и $f(x^*)$ – соответствующий ему парето-оптимальный вектор. В соответствии с определением, если для некоторого решения $x \in X$, отличного от x^*, оказывается выполненным неравенство $f_i(x) \geq f_i(x^*)$, то обязательно должен найтись хотя бы один номер j, при котором верно неравенство $f_j(x^*) \geq f_j(x)$.

На основании этого можно сделать следующее заключение: парето-оптимальное решение – это такое допустимое решение, которое не может быть улучшено (увеличено) ни по одному из имеющихся критериев без ухудшения (уменьшения) по какому-то хотя бы одному другому критерию.

Иначе говоря, предпочитая одному парето-оптимальному решению другое парето-оптимальное решение, ЛПР вынуждено идти на определенный компромисс, соглашаясь на некоторую потерю хотя бы по одному критерию (получая, разумеется, определенный выигрыш, по крайней мере, по какому-то другому критерию). По этой причине множество Парето нередко называют множеством компромиссов.

3.11. Метод анализа иерархий для решения многокритериальных задач

3.11.1. Предварительные сведения из линейной алгебры

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, в которой расположен данный элемент, а второй – номер столбца. Например, элемент а 34 находится в третьей строке и четвертом столбце. Если число строк и столбцов матрицы одинаковое и равно *n*, то такую матрицу называют квадратной или матрицей *n*-го порядка. Элементы a_{11}, $a_{22},\ldots$, a_{nn} квадратной матрицы *n*-го порядка составляют главную диагональ этой матрицы. В частном случае матрица может иметь лишь одну строку (один столбец). В таком случае ее называют вектор-строкой (соответственно вектор-столбцом).

Две матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ одинакового размера называют равными и при этом пишут $A=B$, если их элементы, расположенные в одних и тех же строках и столбцах, совпадают, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$ для всех номеров $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Матрицы можно складывать и умножать на любое число. Для сложения двух матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ одинакового размера следует сложить элементы этих матриц, расположенные на одних и тех же местах, т.е.

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Для умножения числа λ на матрицу $A=(a_{ij})_{m\times n}$, необходимо все элементы этой матрицы умножить на данное число, т.е.

$$\lambda A=\lambda(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу $A=(a_{ij})_{m\times n}$ размера $m\times n$ можно умножить на матрицу $B=(b_{ij})_{n\times p}$ размера $n\times p$. Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B=(b_{ij})_{n\times p}$ называется матрица C, обозначаемая $C=AB$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2i}+...+a_{in}b_{ni}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki},$$

где $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$. Для перемножения матриц их размеры должны быть согласованы, т.е. число столбцов первой матрицы А должно совпадать с числом строк второй матрицы B. Поэтому если одну матрицу можно умножить на вторую, то из этого в общем случае не следует возможность перемножения этих матриц в обратном порядке. Что касается квадратных матриц, то их можно перемножать в любом порядке.

Пример 3.13

Пусть имеется квадратная матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и вектор столбец x с компонентами $x_1,x_2,...,x_n$. Тогда

$$Ax=\begin{pmatrix} x_1a_{11} & x_2a_{12} & ... & x_na_{1n} \\ x_1a_{21} & x_2a_{22} & ... & x_na_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1a_{m1} & x_2a_{m2} & ... & x_na_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обозначается A^T и определяется равенством

$$A=(a_{ij})_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу $A=(a_{ij})_{n\times n}$, для которой выполняется равенство $A^T=A$ называют симметричной. У симметричной матрицы совпадают элементы, расположенные симметричным образом относительно главной диагонали, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$ для всех $i,j=\overline{1,n}$.

Частным случаем симметричной является единичная матрица n-го порядка, у которой диагональные элементы равны единице, а все остальные – нулю $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть задана квадратная матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Определитель матрицы A будем обозначать $\det(A)$.Определитель n-го порядка матрицы A это число, которое представляет собой сумму всех $n!$ произведений элементов данной матрицы A, взятых в точности по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. При этом каждое из всех указанных произведений снабжается знаком «+» или «–», выбираемым в соответствии с определенным правилом, которое здесь воспроизводиться не будет. Определителем матрицы первого порядка, т.е. числа, является само это число. Определители второго и третьего порядков определяются следующим образом:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Пусть имеется квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Число λ называют собственным значением матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ а ненулевой вектор-столбец $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – собственным вектором, соответствующим собственному значению λ, если имеет место векторное равенство $Ax = \lambda x$.

Замечание. Умножая обе части векторного равенства $Ax = \lambda x$ на произвольное число α , отличное от нуля, получим равенство $A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$, означающее, что вектор αx так же является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ . Из этого следует, что одному собственному значению отвечает бесконечное число различных собственных векторов. В курсе линейной алгебры доказывается следующий результат.

Теорема3.3.

Число λ является собственным значением квадратной матрицы Aтогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.Уравнение, в левой части которого записан определитель матрицы $A - \lambda E$, представляет собой алгебраическое уравнение n-й степени и его корни при n>4 в общем случае можно найти лишь приближенно.

3.11.2. Описание метода анализа иерархий

Пусть имеется набор из n объектов (элементов), которые обозначим $A_1, A_2, ..., A_n$. Предположим, что каждому объекту A_k поставлено в соответствие определенное положительное число ω_k. Это число будем именовать весом объекта A_k, $k = \overline{1,n}$.Не уменьшая общности последующего рассмотрения, можно считать, что веса всех объектов подчинены условию нормировки $\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n = 1$.

Тем самым, суммарный вес всех объектов равен 100%, а величина $\omega_k \cdot 100\%$ выражает собой вес k -го объекта, выраженный в процентах. Образуем матрицу относительных весов

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} \omega_1/\omega_1 & \omega_1/\omega_2 & \dots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & \omega_2/\omega_2 & \dots & \omega_2/\omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \dots & \omega_n/\omega_n \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы относительных весов A представляет собой отношение веса $i-го$ объекта A_i, к весу $j-го$ объекта A_j , т.е. $a_{ij} = \dfrac{\omega_i}{\omega_j}$ для всех номеров $i, j = \overline{1,n}$. Отметим следующие свойства матрицы A относительных весов.

1. Все элементы матрицы A положительны, причем элементы главной диагонали равны единице, т.е. $a_{ij} = \dfrac{\omega_i}{\omega_j} > 0;$ и $a_{ii} = \dfrac{\omega_i}{\omega_1} = 1.$

2. Матрица A обратно симметрична, т.е. ее элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, являются обратными по отношению друг к другу $a_{ij} = \dfrac{\omega_i}{\omega_j} = \dfrac{1}{\omega_i/\omega_j} = \dfrac{1}{a_{ji}}$ для всех номеров $i, j = \overline{1,n}$.

3. Матрица A обладает свойством совместности в том смысле, что для всех номеров $i, j = \overline{1,n}$ имеют место равенства

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \cdot \frac{\omega_j}{\omega_k} = a_{ik}.$$

Число n является собственным значением матрицы A, а вектор-столбец весов $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)^T$ – соответствующим собственным вектором. Иначе говоря, выполняется равенство $A\omega = n\omega$. Для того чтобы убедиться в справедливости четвертого свойства, т.е. векторного равенства (6.3), рассмотрим k -ю компоненту вектора $A\omega$. Она является результатом умножения k -й строки матрицы A на вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)^T$:

$$
(a_{k1}\ a_{k2}\ a_{kn})\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \ldots\\ \omega_n\end{pmatrix} = a_{k1}\omega_1 + a_{k2}\omega_2 + \ldots + a_{kn}\omega_n =
$$

$$
= \frac{\omega_k}{\omega_1}\omega_1 + \frac{\omega_k}{\omega_2}\omega_2 + \ldots + \frac{\omega_k}{\omega_n}\omega_n = n\omega_k .
$$

Как видим, полученный результат $n\omega_k$ совпадает с k -й компонентой вектора $n\omega$, стоящего в правой части последнего равенства. Благодаря произвольности выбора номера k это равенство можно считать доказанным.

Матрица парных сравнений

Ранее предполагалось, что веса объектов $A_1, A_2, ..., A_n$, т.е. числа $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ заранее заданы. Такое положение соответствует идеальному варианту сравнения объектов. Что касается задач, возникающих на практике, то в них веса как раз неизвестны и подлежат определению. В этих задачах требуется найти положительные числа $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, (обычно удовлетворяющие дополнительному условию нормировки $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = 1$, которые выражают собой определенные «веса» («ценности» или «важности»)объектов $A_1, A_2, ..., A_n$. В качестве примера подобной задачи можно упомянуть задачу определения размера инвестиций в ряд объектов, когда определенную сумму денег(не уменьшая общности, эту сумму всегда можно считать равной единице)требуется распределить между n объектами $A_1, A_2, ..., A_n$ для инвестирования. В этой задаче искомое число ω_k будет выражать долю инвестиций, приходящуюся на объект A_k, $k = \overline{1, n}$.

Итак, пусть имеется набор объектов $A_1, A_2, ..., A_n$ и требуется определить веса каждого из них, т.е. числа $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Существует широкий круг методов, предназначенных для решений этой задачи. Один из наиболее простых заключатся в предварительном попарном сравнении имеющихся объектов с целью построения так называемой матрицы парных сравнений

$$A = (a_{ij})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произвольный элемент a_{ij} этой матрицы выражает собой число, показывающее во сколько раз вес объекта A_i больше веса объекта A_j. Эти числа назначаются экспертами в результате попарного сравнения объектов. Отсюда и происходит наименование этой матрицы. Нетрудно понять, что матрица парных сравнений в идейном отношении имеет много общего с введенной ранее матрицей относительных весов. В идеальном случае (когда эксперты по сути дела знают или точно угадывают «истинные» отношения весов объектов) матрица парных сравнений должна в точности совпадать с некоторой матрицей относительных весов, т.е. для всех $i, j = \overline{1, n}$ должны выполняться равенства при некоторых положительных числах ω_i и ω_j.

В действительности эксперты не знают заранее веса объектов и указывают лишь результаты попарного сравнения весов объектов в виде коэффициентов a_{ij}, поэтому указанные равенства часто нарушаются, и матрица парных сравнений оказывается не совпадающей с матрицей относительных весов. Тем не менее, исходя из указанной связи между матрицами относительных весов и матрицей парных сравнений и стремясь к тому, чтобы различие между ними было как можно меньше, представляется разумным предполагать, что матрица парных сравнений должна обладать всеми перечисленными ранее четырьмя свойствами матрицы относительных весов. В соответствии с этим согласно метода анализа иерархий считается, что:

1) все элементы матрицы парных сравнений А положительны, а ее диагональные элементы равны единице, т.е. $a_{ij} > 0$, $a_{ii} = 1$, для всех номеров $i, j = \overline{1, n}$;

2) матрица парных сравнений обратно симметрична, т.е. $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{ji}}$ для всех номеров $i, j = \overline{1, n}$;

3) матрица парных сравнений совместна, т.е. равенства $a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$ имеют место для всех номеров $i, j = \overline{1, n}$;

4) искомый вектор-столбец весов $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)^T$ является собственным вектором, соответствующим максимальному собственному значению $\lambda_{\max}$ матрицы A.

Метод анализа иерархий предполагает выполнение следующих трех этапов.

I. С привлечением эксперта формируется матрица парных сравнений $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Произвольный элемент a_{ij} этой матрицы представляет собой положительное число, показывающее во сколько раз вес объекта A_i больше веса объекта A_j.

Сразу следует сказать, что при формировании матрицы парных сравнений добиться от эксперта выполнения первых двух свойств 1) – 2) не составляет труда (для этого сразу следует положить все диагональные элементы матрицы равными единице, а все элементы, расположенные ниже главной диагонали, вычислить на основе свойства обратной симметричности, используя элементы, расположенные выше главной диагонали, которые получены от эксперта).

Таким образом, от эксперта необходимо получить только сведения о результатах сравнения объектов, содержащуюся в $\dfrac{n(n-1)}{2}$ элементах матрицы А, расположенных выше главной диагонали. При этом третье свойство (свойство совместности) на практике, как правило, оказывается невыполненным. По этой причине матрица парных сравнений, как правило, отличается от «идеальной» матрицы относительных весов тем, что она не удовлетворяет свойству совместности 3). Кроме того, у матрицы парных сравнений максимальное собственное значение чаще всего не совпадает с n. Как установлено, всегда выполняется неравенство $\lambda_{\max} \geq n$, причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда матрица A обладает свойством совместности 3). Автор метода анализа иерархий, Т. Саати, ввел специальный числовой показатель $C1 = \dfrac{\lambda_{\max} - n)}{n-1}$ называемый индексом совместности, который оценивает «степень невыполнения» свойства совместности. Так, если индекс совместности не превосходит 0.1, т.е. $C1 \le 0{,}1$, то «степень невыполнения» свойства совместности считается приемлемой и построенная матрица парных сравнений используется на следующих этапах для определения весового вектора. В противном случае рекомендуется предложить эксперту произвести уточнение элементов матрицы *A* таким образом, чтобы индекс совместности оказался в допустимых пределах. После того, как матрица парных сравнений *A* с приемлемым индексом совместности сформирована, переходят к следующему (второму) этапу.

II. На этом (втором) и последующем этапах используется последнее, четвертое свойство матрицы парных сравнений. А именно, применяя соответствующие численные методы, следует найти максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы А (для этого нужно вычислить максимальный вещественный корень алгебраического уравнения *n*-й степени $\det(A - \lambda E) = 0$.

Поскольку величина собственного значения непрерывно зависит от коэффициентов матрицы *A*, «небольшое» отклонение коэффициентов этой матрицы от коэффициентов «идеальной» матрицы относительных весов, выражаемое в выполнении неравенства $C1 \le 0{,}1$, должно, по мнению автора метода, привести к малой величине ошибки последующего вычисления весового вектора.

Это обстоятельство служит определенным оправданием применения метода анализа иерархий.

III. Далее, подставив найденное максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ в $A\omega = \lambda_{\max}\omega$ (6.4), полученная таким образом однородная система линейных уравнений (6.4) решается относительно неизвестного вектора $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)^T$ (для этого может быть использован, например, известный из курса линейной алгебры метод последовательного исключения неизвестных Жордана-Гаусса).

Найденное решение этой системы в виде набора n положительных чисел $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ и составит искомый весовой вектор. При необходимости этот вектор всегда можно нормировать, т.е. разделить каждую его компоненту на сумму всех компонент.

Замечание. Анализ приведенных этапов метода анализа иерархий показывает, что уже для сравнительно небольшого числа сравниваемых объектов (например, при $n \ge 5$) реализация этого метода может потребовать преодоления существенных вычислительных трудностей.

Пример 3.14

Предположим, что в результате попарных сравнений экспертом была сформирована матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем при помощи метода анализа иерархий соответствующий вектор весов. Прежде всего, заметим, что данная матрица не является совместной, так как $a_{12} \cdot a_{23} = 6 \neq 2 = a_{13}$.

Составляем характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1/2 & 1-\lambda & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \frac{4}{3} = 0.$$

Находим максимальный (вещественный) корень этого уравнения $\lambda_{\max} \approx 3.14 > 3$. Вычисляем индекс совместности $C1 = \dfrac{3.14-3}{2} = 0.07$.

Как видим, он не превышает порогового уровня 0.1. Составляем однородную систему линейных уравнений (6.4). Она в данном случае будет иметь вид

$$\begin{cases} -2{,}14\omega_1 + 2\omega_2 + 2\omega_3 = 0 \\ \dfrac{1}{2}\omega_1 - 2{,}14\omega_2 + 3\omega_3 = 0 \\ \dfrac{1}{2}\omega_1 + \dfrac{1}{3}\omega_2 - 2{,}14\omega_3 = 0 \end{cases}.$$

Находим одно из ее ненулевых решений (один из собственных векторов, соответствующих найденному собственному значению) $\omega_1 \approx 2.88\ \omega_2 \approx 2.08\ \omega_3 \approx 1$.

После деления каждого из этих чисел на их сумму получаем искомый нормированный весовой вектор $\hat{\omega}_1 \approx 0{,}48\ \hat{\omega}_2 \approx 0{,}35$ $\hat{\omega}_3 \approx 0{,}17$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под системным анализом?
2. Привести классификацию научных проблем.
3. Перечислить этапы системного анализа.
4. Дать определение моделирования, как метода научного познания.
5. Что понимается под математической моделью?
6. Что понимается под «прозрачным ящиком» ?
7. В каких случаях применяется модель «чёрного ящика»?
8. Дать определение имитационного моделирования.
9. Что понимается под вычислительным экспериментом?
10. Охарактеризовать критерий недостаточного обоснования Лапласа.
11. Привести критерий Вальда.
12. В чём заключается критерий Сэвиджа?
13. Привести критерий Гурвица.
14. Привести постановку задачи принятия решений при многих критериях.
15. Дать определение отношения предпочтения.
16. Что понимается под бинарным отношением? Дать определение и привести высказывательную форму.
17. Дать определение степени множества. Привести высказывательную форму.
18. Дать определение соответствия.
19. Что понимается под композицией соответствий?
20. Дать определение отображения и отношения.
21. Перечислить способы задания бинарных отношений.
22. Перечислить свойства, которыми могут обладать бинарные отношения.
23. Что понимается под изоморфизмом отношений?
24. Дать определение множества Парето.
25. Сформулировать принцип Эджворта Парето.
26. Кратко охарактеризовать метод анализа иерархий.
27. Что такое матрица относительных весов?
28. Перечислить свойства матрицы относительных весов.
29. Что понимается под собственным значением матрицы?
30. Что такое матрица парных сравнений?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современной ситуации наиболее важной предпосылкой продуктивного развития методологии науки является ориентация на реальную практику научно-познавательной деятельности во всей её полноте и многообразии, опора на материал истории науки, преодоление предвзятости в выборе моделей и схем научного познания. Наиболее важной задачей методологической мысли в настоящее время является осознание и соответствующая проектно-конструктивная ориентация на проблематику естественно научного, технического и гуманитарного научного знания, переход от характерного для классического подхода чисто объектного рассмотрения научной предметности к такому её рассмотрению, которое включало бы «человеческий фактор», учитывало бы взаимодействие собственно познавательных и ценностных установок в научно-познавательной деятельности. В научном познании особую роль играют методы математического моделирования, позволяющие обрабатывать как количественные, так и качественные характеристики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андрианов А.Н., Бычков С.П., Хорошилов А.И. Программирование на языке СИМУЛА-67. − М.: Наука, 1985.

2. Бабина О.И., Мошкович Л.И. Имитационное моделирование процессов планирования на промышленном предприятии *[Электронный ресурс]* / Бабина О.И., Мошкович Л.И.– Сибирский федеральный университет 2014 г. 152 с.– Режим доступа: http://www.knigafund.ru/books/185257

3. Волкова В.Н. Системный анализ информационных комплексов [Электронный ресурс] : учеб. пособие. – Электрон.дан. – СПб.: Лань, 2016. – 336 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=75506

4. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2006. – Т. 14. – №. 1. – С. 153-157.

5. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний. – М., 1961.

6. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М, 1961.

7. Гаврилова, Т.А. Инженерия знаний. Модели и методы [Электронный ресурс] : учебник / Т.А. Гаврилова, Д.В. Кудрявцев, Д.И. Муромцев. – Электрон. дан. – СПб. : Лань, 2016. – 324 с. – Режим доступа:

8. Емельянов А.А. и др. Имитационное моделирование экономических процессов *[Электронный ресурс]* / Емельянов А.А., Дума Р.В., Власова Е.А.– Финансы и статистика 2009 г. 417 с.– Режим доступа: http://www.knigafund.ru/books/178913

9. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB : учеб. курс/ Ю. Лазарев.– СПб.: Питер BHV.– 2005.– 512 с.

10. Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2. – №. 11. – С. 64–76.

11. Математическое моделирование *[Электронный ресурс]* / Бантикова О., Васянина В., Жемчужникова Ю., Реннер А., Седова Е.– ООО ИПК "Университет" 2014 г. 367 с.– Режим доступа: http://www.knigafund.ru/books/181864

12. Михеева Т.В. Обзор существующих программных средств имитационного моделирования при исследовании механизмов моделирования и управления производственными системами// Известия

Алтайского государственного университета. Серия: Математика и механика; управление, вычислительная техника и информатика; физика.– Барнаул.– 2009.– №1(61).– С. 87–90

13. Мокий М.С. Методика научных исследований: учебник для магистров.– М: Юрайт, 2014 – 256 с.

14. Новиков А.М. Методология научного исследования: учебно-методическое пособие / А.М. Новиков, Д.А. Новиков. – Москва: Либроком, 2013.– 270 с.

15. Основы научных исследований : учебное пособие / Б.И. Герасимов [и др.]. – Москва: Форум, 2013. – 269с.

16. Черников, Ю.Г. Системный анализ и исследование операций [Электронный ресурс] : учеб. пособие. – Электрон. дан. – М. : Горная книга, 2006. – 365 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3512

17. Певзнер, Л.Д. Теория систем управления [Электронный ресурс] : учебное пособие. – Электрон. дан. – М. : Горная книга, 2002. – 469 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3476

Учебное издание

Стрельцова Елена Дмитриевна

МЕТОДОЛОГИЯ
НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
КАК МЕТОД НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ

Учебное пособие

Редактор *Н.А. Юшко*

Подписано в печать 08.11.2016.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 5,35. Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 300. Заказ № 46-1221

Южно-Российский государственный политехнический университет
(НПИ) имени М.И. Платова
Редакционно-издательский отдел ЮРГПУ (НПИ)
346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

Отпечатано в ИД «Политехник»
346428, г. Новочеркасск, ул. Первомайская, 166
idp-npi@mail.ru