СТИЛИ В МАТЕМАТИКЕ

СОЦИОКУЛЬТУРНАЯ ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

ИНСТИТУТ ГОСУДАРСТВЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ
И СОЦИАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ МГУ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ
им. С. И. ВАВИЛОВА РАН
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЦЕНТР ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ ОБЕСПЕЧЕНИЮ
ГУМАНИТАРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ПРИ РГГУ

СТИЛИ В МАТЕМАТИКЕ:
социокультурная философия математики

Под редакцией А. Г. Барабашева

Санкт-Петербург

РХГИ

1999

ББК 87В
С 80

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда Проект № 99-03-16016

СТИЛИ В МАТЕМАТИКЕ: социокультурная философия математики / Под ред. А. Г. Барабашева. — СПб.: РХГИ. 1999. – 552 с.

Коллективный труд ставит своей целью максимально широкое представление различных точек зрения на проблему стилей в математике — от полного отрицания возможности математических стилей в сколько-нибудь серьезном смысле до метафизического обоснования их неизбежности и существенности. Книга продолжает серию, начатую работой того же коллектива «Бесконечность в математике». Отличительной особенностью серии является форма организации материала. Каждая статья сопровождается комментариями и ответом автора, в которых подчеркиваются параллели и оппозиции, возникающие между статьями. Это позволяет увидеть освещаемое с разных сторон единое проблемное поле, в котором право выбора собственной позиции предоставляется самому читателю.

В книге представлены философские рефлексии историков и исторические экскурсы философов, квалифицированный взгляд на современное состояние математики и попытки прогнозов и проектов будущего ее развития. Книга представляет интерес для математиков, а также историков, философов и педагогов, специализирующихся в математических областях знания или интересующихся математикой.

The book represents the set of very different points of view to the problem of styles in mathematics. They lay between absolute negation of the possibility of styles in mathematics and insisting on their essentiality and inevitability. The book sequels series that was begun by the previous book of same authors «Infinity in Mathematics». The characteristic feature of the series is the form of texts organization. There are comments and the author's reply to them placed after every article that point to similarity and oppositions in different articles. This makes the view of the whole field of problems possible and the reader is free to choose his own position.

The book contains philosophical reflections of historians, and historical researches of philosophers, mathematicians' competent analysis of the current situation in mathematics, and attempts of planning and prognosis making of the future development of mathematics. This book may be interesting to mathematicians, also for historians, philosophers and pedagogues specializing in mathematics or being interested in mathematics.

ISBN 5—88812—096—0

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ПРЕДИСЛОВИЕ

Отечественная философия математики обладает давними традициями. Среди этих традиций следует отметить тесную связь с новыми течениями математики. Начало такой связи и, одновременно, **первого** подготовительного этапа развития отечественной философии математики было задано работами Н. И. Лобачевского: открытие «воображаемой геометрии» в принципе было не осуществимо без глубокого рассмотрения оснований этой геометрии, осмысления непривычных соотношений, строго доказываемых при принятых исходных допущениях. Только математического гения недоставало для того, чтобы не просто найти (доказать) такие соотношения, но и *защищать* их как допустимые. Здесь требовались дополнительные, философские по сути, размышления, выводящие за пределы принятых в то время представлений о том, чем могут заниматься математики и какие методы они могут использовать. Счастливое сочетание гения математического и гения философского помогло Н. И. Лобачевскому глубоко рассмотреть основания и значение открытой им «воображаемой» геометрии. Тем самым были заложены основы будущей философии математики — основы, воплотившиеся много позднее в первую очередь в течении формализма (хотя сам Лобачевский от такой трактовки математики был далек).

Второй подготовительный этап отечественной философии математики также демонстрирует преобладающее влияние новых направлений математики в разработке философских идей. Этот этап связан с деятельностью Московской философско-математической школы. Московская школа сложилась вследствие принципиальных разногласий «москвичей» с «петербуржцами» (М. В. Остроградским, В. Я. Буняковским, П. Л. Чебышевым). Основоположника Московской школы В. Я. Цингера не устраивали позитивистские умонастроения петербуржцев, их нежелание выходить за пределы эмпиризма как основания математики. Антипозитивизм В. Я. Цингера получил распространение после его избрания на пост президента Московского математического общества (в 1886 г.). В дальнейшем почти все представители Московской философско-математической школы были, в той или иной степени, одновременно и математиками, и философами. Аритмологические идеи Н. В. Бугаева, размышления Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина о значении теории множеств и о функциональном подходе в математике, взгляды о. Павла Флоренского о мировоззренческой значимости математики и математических образах как инструментах (схемах) философствования составили основу этого этапа развития российской философии математики, реализовавшейся по большей степени в латентном состоянии, в качестве «философских вкраплений» в собственно математические труды (за исключением работ о. Павла Флоренского). Философия математики в это время не была отделена от математической проблематики, она развивалась в границах самой математики и наиболее известными математиками и только во вторую очередь — как особое направление российской философии. Серия сборников «Новые идеи в математике», равно как и отдельные статьи и книги по философии математики, выходившие в это время, были посвящены тем же предметам: осмыслению взглядов Канта на природу математики в свете новых открытий в математике и особенно в свете открытия неевклидовых геометрий, а также обсуждению теоретико-множественного и функционального подходов в математике.

Третий этап отечественной философии математики (с конца 20-х — начала 30-х гг. XX в. и до конца 40-х — начала 50-х гг.) характеризовался двумя отличительными чертами. Во-первых, произошла резкая идеологизация философии математики, ее подчинение диалектико-материалистическому мировоззрению и практике политических действий. То, каким образом диалектико-материалистические взгляды на природу и значение математики прививались математическому сообществу, можно увидеть по делу Н. Н. Лузина, по критике взглядов М. Я. Выгодского, по статьям Э. Кольмана и ранним работам С. А. Яновской. Во-вторых, в условиях идеологической опасности независимого «философствования в математике», философия математики начала оформляться как отдельная область, отличающаяся как от математики, так и от «чистой» философии. К философским по содержанию можно отнести многие работы историков математики, логиков, преподавателей математики в средней школе, психологов и др. (хотя традиция «прямой» связи математики и философии окончательно не пресеклась, и такие известные математики, как А. Н. Колмогоров, А. Д. Александров, П. С. Александров продолжали высказываться по философским вопросам, демонстрируя, вполне в духе времени, тяготение к диалектико-материалистической трактовке предмета математики). Если отбросить явный идеологический «крен» оформившейся философской дисциплины, то следует отметить, что из возможных исследовательских ориентаций установилась ориентация философии математики по преимуществу на историю математики. Тем самым, отечественная философия математики с самого начала своего самостоятельного существования (начала третьего этапа) пошла другим в сравнении с западной философией математики путем — путем исторического анализа развития математики, а не путем отождествления философии математики с логическим изучением ее оснований. Семинары по истории математики — на механико-математическом факультете МГУ, а затем и в Институте истории естествознания и техники АН СССР — принимали к рассмотрению не только сугубо исторические сообщения, но и доклады философской ориентации. Это видно и по первым томам ежегодников «Историко-математических исследований», начавшим выходить с 1948 года. Изучение наследия Н. И. Лобачевского, и вообще огромное влияние проблематики истории и оснований неевклидовых геометрий, прослеживается во многих публикациях, помещенных в этих ежегодниках.

Во время **четвертого** этапа (до начала 80-х гг.) идеологическое «давление» на философию математики ослабло. Начали появляться работы, как бы суммирующие достижения предшествующих этапов существования философии математики и намечающие новые направления исследований. К «каноническим» крупным публикациям этого периода можно отнести книги Г. И. Рузавина (в особенности его монографию «О природе математического знания». М., 1968) и совместную монографию Е. А. Беляева, Н. А. Киселевой и В. Я. Перминова («Некоторые особенности развития математического знания». М., 1975), а в области естественнонаучных приложений — монографию И. И. Блехмана, А. Д. Мышкиса и Я. Г. Пановко «Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов» (Киев, 1976) и монографию И. А. Акчурина «Единство естественнонаучного знания» (М., 1974). Большое влияние на отечественную философию математики оказали в это время перевод на русский язык статьи Н. Бурбаки «Архитектура математики», помещенной в качестве приложения в книге этого коллектива авторов «Очерки по истории математики» (М., 1963), и перевод работы И. Лакатоса «Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы» (М., 1967).

Пятый, современный этап философии математики в СССР и в России после распада СССР, можно, как представляется, отсчитывать с начала 80-х гг. О нем более развернуто написано в предисловии к книге «Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты» (М., 1997). В начале этого этапа М. И. Панов осуществил издание серии книг и сборников по философии математики через Центральный Совет философских (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР. В. И. Купцов и позднее М. А. Розов, возглавлявшие секцию по философским вопросам естествознания Философского общества СССР, организовали ряд конференций по философии математики и ее приложений. В результате этих усилий удалось собрать отдельных авторов и создать достаточно сплоченное и дружное сообщество специалистов по философии математики. Высокие образцы работы этого сообщества были заданы публикациями ведущих авторов по философии математики — В. Я. Перминова и М. И. Панова. Наконец, сообщество специалистов по философии математики работало и продолжает работать в тесном контакте с историками математики и со многими математиками.

Отличительной особенностью современного этапа философии математики стало регулярное проведение конференций и создание постоянно действующего (с января 1987 г.) семинара по философии математики в МГУ.

Такая коллективная исследовательская активность привела, в количественном выражении, к увеличению числа публикаций по философии математики, причем в особенности — количества выпускаемых коллективных сборников. В качественном плане стали более ясными границы предметной области философии математики. Единство взглядов сообщества философов математики на содержание предметной области исследований повлекло за собой более четкое конфигурирование этой предметной области и выделение в философии математики конкурирующих направлений, а именно направлений так называемой «фундаменталистской» и «нефундаменталистской» (социокультурной) философии математики, включая перечень входящих в них тем и постановку проблем. Подобное разделение фундаментализма и нефундаментализма, следует отметить, присутствует и в современной англо-саксонской философии математики, однако именно в отечественной философии математики это разделение стало не только центральным пунктом классификации проводимых исследований, но и объектом специального изучения.

Второе качественное изменение отечественной философии математики, также обусловленное развитием коллективных форм исследовательской активности, заключается в возникновении новых способов проведения исследований и организации материалов коллективных монографий. Начали воедино увязываться проведение и тематика конференций и работа всероссийского семинара по философии математики, в публикациях стали практиковаться письменная фиксация дискуссий (вопросов и комментариев) и ответы авторов своим оппонентам. Подробно эта «рефлексивная схема» организации публикаций описана в предисловии к книге «Бесконечность в математике». В настоящем издании данная схема сохранена и дополнена, как указано ниже, введением момента дискуссионности в само предисловие.

Представляемая читателю коллективная монография явилась результатом двух конференций, проведенных в сентябре 1997 г. и в сентябре 1998 г. в Подмосковье (Красновидово). Обе конференции были посвящены теме исследования «стиля в математике»: это выражение, часто употребляемое в работах по истории и философии математики, несет крайне важную в философии и истории математики смысловую нагрузку, обозначающую определяющие особенности индивидуальных проявлений математического творчества, специфику направлений математики, характерные черты различных научных школ, математики тех или иных географических регионов, отличительные моменты исторических периодов развития математики. Однако смысл этого выражения эксплицировать крайне трудно, и вся предлагаемая монография выступает как коллективная попытка определить стиль в математике и его соотношение с методом, строгостью, простотой, основаниями и т.п.

Исходный вариант названия, вынесенный на обсуждение участников конференций, был таков:

СТИЛИ В МАТЕМАТИКЕ

Последующая дискуссия, основные моменты которой показаны далее, привела к изменению и уточнению этого названия. Читателю, полагаю, будет небезынтересно увидеть, как реализуются принципы коллективного принятия исследовательских решений и как ныне в отечественной философии математики происходит обсуждение проблем идентификации направлений на примере проблемы определения того, что такое стиль в математике.

Участники конференции легко смогут узнать, позиции каких групп и авторов далее раскрываются под псевдонимами «фундаменталист» и «нефундаменталист».

Фундаменталист

Я предлагаю изменить заглавие книги. Мои аргументы таковы:

1. В названии книги наряду со словом «стили» должно быть слово «методы». Это прибавление не должно вызывать возражений ни со стороны содержания (по крайней мере в пяти докладах речь идет о сопоставлении методов, об эволюции предмета и метода математики в их структурных характеристиках и т.д.), ни со стороны стилистики, поскольку словосочетание «стили в математике» является куцым и незавершенным.

2. Название не должно быть узким. Лучше «переборщить» в противоположном направлении. Труд И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» не содержит ничего от философии. Книга Х. Патнема «Философия логики» не ставит вопросов, которые можно было бы с полным правом назвать философскими. В значительной мере это относится к «Философии физики» М. Бунге и ко многим другим работам. Если бы Бунге озаглавил свою книгу «Методологические аспекты аксиоматизации физики», то это больше соответствовало бы содержанию книги, но не было бы для нее полезным. Заглавие «Стили в математике» слишком узко, и уже по этой причине оно непригодно.

Нефундаменталист

Название «Стили в математике» плохо соответствует содержанию книги.

1. Помимо стиля в представленных статьях рассматриваются или упоминаются другие «стилеподобные» параметры математики. Это не только методы, но и математические образы, следование правилу, математическая деятельность в целом, дедуктивность, эстетичность, познавательные установки, понимание и проч. Выделять наряду со стилем только метод означало бы сузить реальное содержание книги и потерять значительную часть ее материала. Говорить в названии только о стиле (без метода) еще хуже, так как, во-первых, это еще больше сузило бы границы содержания, и, во-вторых, нет согласия в понимании того, что такое «стиль». Стиль не един в разные времена, в разных направлениях математики, в разных культурах и школах.

2. Если учесть, что предшествующая книга также построена на основании двух конференций, также использует рефлексивную схему построения материала (включение комментариев и ответов авторов на комментарии) и также посвящена детальному рассмотрению одной из характеристик математики — того, что значительная часть математики посвяще-

Кроме того это заглавие слишком близко к названию книги «Бесконечность в математике». Да и фактически система вопросов, которые были затронуты в докладах, является более широкой, и поэтому я считаю, что заглавие «Социокультурная философия математики» лучше подходит по содержанию, а, главное, оно более претенциозно (в хорошем смысле) и является лучшей рамкой для содержания книги.

3. Самое важное, что следует учесть при редакции названия книги, состоит в том, что оно служит не для точного указания на содержание работы (это делается в аннотации и в предисловии), но главным образом для отличия данной книги от других книг. Оно может быть совершенно условным, ибо существенным здесь является не точный смысл, а некоторая интонация или образ, имеющий отношение к содержанию книги. Заглавие «Стили в математике» слишком сухо, оно не вызывает никаких интересных ассоциаций и поэтому, на мой взгляд, не должно стоять в качестве главного на обложке книги даже и в том случае, если бы речь шла в ней исключительно о стилях. Нельзя допустить, чтобы в общем хорошая система идей появилась под серым и скучным названием.

Короче, я предлагаю принять заглавие в следующем виде:

СОЦИОКУЛЬТУРНАЯ ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ
(стили и методы математического мышления)

на изучению бесконечности, — то настоящая книга является сериальным продолжением предыдущей. Но тогда, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, следует использовать типовой заголовок, обозначающий место данной характеристики (в настоящем случае, стиля) в математике.

3. Содержание книги охватывает не только социокультурную философию математики. Конечно, представители именно этого направления доминируют в настоящем сборнике — может быть, потому, что стиль в математике легче анализировать в контексте рассмотрения культуры, — однако в книге встречаются и доклады чисто фундаменталистского направления, а также доклады, не укладывающиеся в пределы нефундаментализма (о модальных онтологиях, о следовании правилу в философии математики Л. Витгенштейна, о понятии точки и его роли в греческой математике и философии и т.д.). Понятие стиля способно стать предметом рассмотрения как в фундаментализме, так и в социокультурной философии математики (нефундаментализме).

Таким образом, книгу следовало бы назвать:

СТИЛИ
И СТИЛЕПОДОБНЫЕ ФЕНОМЕНЫ В МАТЕМАТИКЕ

В результате обсуждений было принято название, включающее в себя в том числе то, что тема исследования стилей по преимуществу относится к направлению нефундаментализма (социокультурной философии математики) и что в таком своем качестве она примыкает к исследованию таких «стилеподобных характеристик», как метод, интуиция, деятельность, дедукция, инновации и т.п. Окончательный вариант названия стал компромиссом в столкновении различных точек зрения, а его компоновка на обложке призвана снять вопрос о линейной подчиненности частей названия, о том, какая из этих частей приоритетна в исследовании проблемы стиля.

В заключение предисловия следует отметить особый статус первого раздела настоящей книги. Этот раздел задумывался как введение в дискуссию и должен был включать в себя две заказные статьи. Намечалось, что в этих статьях, в соответствии с поставленными редколлегией вопросами, по пунктам будет дана развернутая постановка проблемы стиля в математике вкупе с начальными попытками решения этой проблемы. Все остальные доклады, сопровождаемые комментариями и ответами авторов, по замыслу, предполагалось сгруппировать в последующих разделах книги. Однако М. А. Розов вышел за пределы предложенных вопросов и представил текст, далеко превосходящий самые радужные ожидания редколлегии, а другой автор, написав текст, занялся его доработкой, и этот процесс поглотил его настолько, что все попытки редколлегии получить текст для публикации оказались безрезультатными. Воистину, проблема стиля в математике способна поглотить внимание исследователя без остатка и, быть может, именно тот, кто отказывается предъявить для срочной публикации трудно и долго вызревающий плод размышлений в этой сложной области, поступает менее опрометчиво, нежели авторы, представленные в данной книге.

А. Г. Барабашев

Раздел первый

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ «СТИЛЬ»

О СТИЛЕ В НАУКЕ

Розов М. А.

1. Что такое стиль?

Научные понятия и термины возникают различным образом. Чаще всего мы вводим их для того, чтобы обозначить и выделить какие-то новые явления, давая тем самым возможность говорить о них и фиксировать соответствующий опыт. Это, например, будет иметь место, если мы открыли новый минерал, новый биологический вид, новое звездное скопление и т.п. Но бывает и так, что новый термин возникает стихийно, наподобие слов естественного языка, употребляется в тех или иных конкретных ситуациях, где его значение интуитивно ясно, а уже потом вдруг ставится вопрос о его точном значении и о наличии тех специфических явлений, которые могли бы оправдать его право на существование.

Нечто подобное произошло, как нам представляется, и со словом «стиль». Перекочевывая из одной области в другую, оно приобретало все более и более общее, а точнее сказать, неопределенное значение. Мы говорим, например, о стиле литературного произведения, о стиле в работе, о стиле руководства, о стиле мышления... Нужно ли вообще нам это слово? Что оно обозначает? На базе анализа конкретных примеров словоупотребления складывается впечатление, что «стиль» — это такая совокупность признаков, которая отличает деятельность одного человека от деятельности другого безотносительно к технологическим особенностям этой деятельности. Например, отличие портного от столяра является не стилистическим, а технологическим, и они могут придерживаться при этом одного и того же стиля в работе. В такой же степени два столяра, будучи сторонниками одной и той же технологии, могут отличаться по стилю. Стиль, следовательно, это нечто побочное по отношению к основным задачам деятельности, это проявление многоплановости этой деятельности и ее результатов. Допустим, например, что кувшин, созданный гончаром, служит прежде всего для хранения вина, но он может при этом быть достаточно простым или изощренным по форме, с узорами или без них. Все это уже относится к стилю.

Если выражаться метафорически, то стиль — это нечто похожее на почерк. Возможны тексты, отличающиеся по содержанию, но написанные одним и тем же почерком, возможен один и тот же текст, но написанный разными почерками. Впрочем, очевидно, что почерк не столь уж и безразличен для содержания. Достаточно представить себе какую-либо почетную грамоту, написанную некрасивым почерком. Важно при этом подчеркнуть, что невозможен текст, который вообще не имел бы «почерка». Даже если мы пишем в компьютере, мы должны выбрать определенный шрифт. Стиль, следовательно, есть необходимая, неизбежная принадлежность той или иной деятельности и ее результатов. Конечно, осознавая наличие того или иного стиля, мы можем затем сознательно его культивировать, однако, надо иметь в виду, что если текст невозможен без почерка, то и почерк невозможен без текста. Иными словами, ставя задачу воспроизведение стиля, мы должны воспроизводить и определенный «текст». Стиль не существует сам по себе.

Последнее очень важно. Говоря об основных и побочных результатах деятельности, мы всегда сталкиваемся с возможностью рефлексивного переключения, состоящего в том, что основной результат становится побочным и наоборот. Два акта деятельности, которые отличаются друг от друга только осознанием результата, называются рефлексивно симметричными. Столяр, например, не только изготавливает табуретку, но и производит стружки. Однако симметрия такого рода существует лишь на уровне некоторой идеализации и, как правило, нарушается. Либо стружки не считаются продуктом и выбрасываются, либо они производятся специально, например для создания древесно-стружечных плит. Говоря о стиле, мы сталкиваемся с такой ситуацией, когда симметрия не может быть нарушена. Иными словами, нельзя сделать нечто такое, что не отличалось бы определенным стилем, и нельзя воспроизвести стиль, не воспроизводя и того, что этим стилем характеризуется. Конечно, можно создать красивый кувшин, в который нельзя ничего налить, или написать благозвучное стихотворение, абсолютно не имеющее смысла. Но это будет просто плохой кувшин или плохое стихотворение. Иногда, особенно в философии, стиль явно берет верх над содержанием, что приводит к набору красивых и якобы значимых фраз, в которые читатель тщетно пытается вложить доступное ему содержание и поражается поэтому их глубокомыслию. Мы, однако, не будем здесь вдаваться в эти детали. Отметим только, что традиционно это обсуждается в терминах единства формы и содержания.

Что же следует понимать под стилем применительно к науке или к научному мышлению? Да, конечно, мышление одной эпохи отличается от мышления эпох предыдущих и последующих. Первобытный человек мыслил не так, как мыслит современный ученый. У нас другие методы, другой арсенал средств, включая как приборы и экспериментальные установки, так и математику, у нас другие задачи, другие вопросы, другие требования к ответам, мы просто стоим на другом уровне понимания природы... Неужели все это следует называть стилем? Думаю, что нет, ибо все перечисленное характеризует не стиль, а технологию познания и мышления. Различные эпохи в развитии науки отличаются друг от друга прежде всего технологически.

Что же тогда следует отнести к стилю? Не претендуя на достаточно строгие определения, отметим одну существенную деталь. Каждая наука стремится к аккумуляции своих результатов. «Наука в любое время представляет собой общий итог всего того, чего она достигла к этому времени» [1, с. 27]. Процесс аккумуляции осуществляется сознательно и целенаправленно в форме создания обзоров, обобщающих монографий, учебных курсов. При этом каждая наука стремится определить сферу своей компетенции и ответственности, что приводит, в частности, к попыткам точного определения предмета изучения. Можно сказать, что наряду с технологическими программами, которые связаны прежде всего с методами получения знания, в науке существуют и программы отбора и систематизации полученных результатов, коллекторские программы. Так вот одним из признаков стиля является то, что коллекторские программы не предусматривают выявление и аккумуляцию стилистических особенностей предшествующих работ. Это не значит, что указанные особенности никак не передаются от учителя к ученикам или от поколения к поколению. Они, несомненно, передаются на уровне образцов, но наука специально не выявляет и не аккумулирует этот опыт. Конечно, любая монография или учебный курс носит на себе отпечатки определенного стиля, но это не фиксируется в содержании такого рода работ.

Приведем теперь несколько примеров, иллюстрирующих и конкретизирующих сказанное. Мы при этом ни в коем случае не претендуем на полноту. Все в значительной степени определяется достаточно случайными наблюдениями автора.

2. Стиль и выразительные особенности научного текста

«Современная форма научных статей, — писал Г. Бонди,– представляет собой некоторую разновидность смирительной рубашки» [2, с. 8]. Что имеется в виду? Прежде всего жестко занормированный способ подачи материала.

«Читатель научной статьи вряд ли узнает, что именно думал автор и каковы были его цели. Дело в том, что автор чаще всего старается — и я вряд ли ошибусь, если скажу, что больше всего этим грешат представители чистой математики; впрочем физики и химики не многим лучше — представить полученные им результаты так, как будто бы они возникли в результате мгновенного озарения. Автор не дает ни малейшего намека на то, как он подошел к самой постановке задачи. Сформулировав свои результаты, автор приступает к их доказательству посредством логических выводов, строгость которых вынуждает читателя — хочет он того или не хочет — согласиться с автором» [2, с. 7]. Нетрудно видеть, что перед нами характеристика именно стиля научных статей. И речь идет не об индивидуальном стиле, а о стиле современных статей вообще в области математики, физики или химии. Этот стиль никак не связан с технологией получения знаний и сам при этом не является чем-то таким, что математик, физик или химик могли бы отнести к числу своих результатов.

Разумеется, в условиях жесткой занормированности характера изложения мы почти не имеем возможности говорить об индивидуальном стиле. Но индивидуальность сразу же проявляет себя за пределами этой занормированности, например, в лекциях, в научно-популярной литературе, а иногда и в серьезных монографиях. Здесь автор нередко стремится к образности и наглядности, а научный текст приобретает черты художественного произведения.

Вот отрывок из работы И. М. Сеченова «Рефлексы головного мозга»: «Все бесконечное разнообразие внешних проявлений мозговой деятельности сводится окончательно к одному лишь явлению — мышечному движению. Смеется ли ребенок при виде игрушки, улыбается ли Гарибальди, когда его гонят за излишнюю любовь к родине, дрожит ли девушка при первой мысли о любви, создает ли Ньютон мировые законы и пишет их на бумаге — везде окончательным фактом является мышечное движение» [8, с. 71]. Разве не бросается в глаза подбор умышленно ярких и очень конкретных примеров, каждый из которых так и норовит развернуться в целую картину, уже выходящую за пределы «дозволенного»? При этом стилистические особенности отрывка вовсе не безразличны к содержанию, напротив, они помогают осознать всю общность сформулированного тезиса. Но коллекторские программы физиологии аккумулируют только сам тезис, но отнюдь не стиль автора.

А вот другой текст, взятый из популярной работы известного палеоботаника С. В. Мейена «Следы трав индейских»: «Палеоботаник тоже никогда не должен забывать, что тот лист, оттиск которого остался на плитке сланца, когда-то прорезался из почки, рос, был зеленым и трепыхался на ветру. По его жилкам текли соки, он ловил солнечный свет. Потом все кончилось. Лист расстался с веткой, немного пролетел и упал в воду. Его затянуло илом. Миллионы лет он лежал в темноте, пока при ударе молотка не увидел снова солнечный свет. Специалист должен заставлять себя помнить обо всем этом и видеть зелень в обугленном остатке листа, теплое, голубое море в пласте известняка» [6, с. 159]. В этом отрывке уйма конкретных деталей, брошенных кратко и ненавязчиво, но порождающих в сознании читателя яркую картину. Вот сказано: «...и трепыхался на ветру», а ты уже почувствовал этот теплый ветер с моря, и даже слышишь, кажется, шум набегающих волн. Разумеется, все можно изложить и в совсем другом стиле, сказав, что палеоботаник по найденным остаткам должен реконструировать далекое прошлое, включая и условия захоронения. Но Мейен предпочитает с помощью чисто художественных средств создать у читателя конкретный образ одного из вариантов этого прошлого, образ почти осязаемый, динамичный, насыщенный красками и звуками.

Следует, однако, предостеречь от чрезмерных обобщений, ибо далеко не всегда наглядность изложения или отсутствие этой наглядности можно отнести к числу стилистических особенностей. Лагранж в предисловии к своей знаменитой «Аналитической механике» пишет: «В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения» [4, с. 5]. Очевидно, что механика Лагранжа менее наглядна, чем механика, излагаемая геометрическим методом. Но речь идет не о стиле, а о смене методов, о технологии мышления. Не случайно Лагранж подчеркивает, что он расширил область применения математического анализа. И, разумеется, результаты Лагранжа были аккумулированы коллекторскими программами механики.

Впрочем, все не так уж просто, и каждый конкретный случай требует детального анализа. Обратимся, например, к книге Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия». В предисловии Гильберт пишет, что в математике, как и в других научных исследованиях, встречаются две тенденции: тенденция к абстракции и тенденция к наглядности. Именно с первой из них Гильберт связывает успехи геометрии. «Что касается геометрии, — пишет он, — то в ней тенденция к абстракции привела к грандиозным систематическим построениям алгебраической геометрии, римановой геометрии и топологии, в которых находят широкое применение методы абстрактных рассуждений, символики и анализа» [3, с. 6]. Все очень напоминает ситуацию с аналитической механикой Лагранжа, и, разумеется, в плане исторического развития речь идет о смене методов, а не стилей изложения. Но вот авторы пишут популярную работу, собираясь «рассматривать геометрию в ее современном состоянии с наглядной стороны» [3, с. 6]. Можно ли сказать, что и здесь мы имеем дело с другой технологией исследования? Думаю, нет. Результаты, которые авторы собираются излагать, уже получены, получены, выражаясь языком Гильберта, в рамках абстрактных технологий. Теперь же речь идет только об изложении, об изложении уже аккумулированных результатов. И здесь наглядность становится стилистической особенностью текста. Можно, вероятно, даже сформулировать общую закономерность: уже преодоленные в прошлом технологии мышления возрождаются в современной науке в виде стилистических особенностей изложения. Чаще всего такое возрождение имеет место в учебной или научно-популярной литературе.

3. О стиле Н. Н. Лузина

Одной из стилистических особенностей научного текста может быть его рефлексивность. Когда-то, уже очень давно, я купил книгу Н. Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах и их приложениях», купил, открыл, понял из предисловия, о чем в принципе идет речь, и отложил на будущее. Но «будущего» не последовало, книгу я больше не открывал. И вот сравнительно недавно я случайно снял эту книгу с полки, и вдруг уже на первых страницах на меня пахнуло неповторимым духом мощного интеллекта. Я прочитал всего несколько абзацев, прочитал о вещах азбучных и давно знакомых и тем не менее почему-то сразу почувствовал, что имею дело с человеком необыкновенным. Впечатление было таким сильным и неожиданным, что я даже закрыл книгу, чтобы передохнуть и попытаться понять, что же со мной произошло. Так бывает с художественным текстом: прочитал, задохнулся от яркости картины, а потом с удивлением повторно вглядываешься в, казалось бы, обыкновенные слова и фразы, которые почему-то произвели на тебя такое сильное впечатление.

Так что же поразило у Лузина? По каким-то почти неуловимым оттенкам изложения ты сразу чувствуешь, что с тобой говорит не просто специалист, а «хозяин» излагаемой теории, говорит ее творец, свободно и критически оглядывающий это творение, в создании которого он на равных принимал и принимает активное участие. Ощущается некоторая рефлексивная отстраненность автора от того, что он излагает. Автор не слился с этой теорией, не идентифицировался с ней, он стоит в стороне, точно скульптор, вытирая руки и критически оглядывая то, что получилось, с полным сознанием отсутствия окончательных штрихов. Вот хотя бы одно такое место: «По-видимому, при современном состоянии науки является преждевременным нападать на дедекиндову теорию иррациональных чисел, если только желать, чтобы это нападение оказалось плодотворным, а именно дало новые положительные результаты, ускользающие от нас в области этой теории. Таким образом, мы примем ее и будем рассматривать как промежуточный инструмент, считая возможным в дальнейшем указывать на некоторые трудности этой теории» [5, с. 21-22]. Обратите внимание, Лузин принимает теорию Дедекинда, которая в то время уже излагалась как азбука в учебных руководствах по математическому анализу, но он именно принимает ее, осознавая и аргументируя эту акцию, принимает в силу необходимости исторического развития и в рамках критического отношения, «считая возможным в дальнейшем указывать на некоторые трудности этой теории».

Уже здесь возникает ощущение семантической многоплановости текста: есть излагаемая концепция, а есть сомнения и подозрения автора, который, кажется, уже готов двинуться вперед, но сдерживает себя, осознавая историческую преждевременность такого рода попыток. «Но если мы примем однородное определение иррационального числа из теории Дедекинда... мы получаем возможность (хотя, быть может, лишь иллюзорную) рассматривать континуум как множество, образованное из рациональных и иррациональных точек. Таков был взгляд на континуум, принятый a priori Г. Кантором» [5, с. 22]. Чего стоит это замечание в скобках! Оно раскрывает трагедию подлинного мышления, которое постоянно вынуждено работать в условиях не до конца выясненных или не обоснованных предпосылок, работать и двигаться вперед, осознавая эту свою необеспеченность. Создатель теории множеств Г. Кантор принимает a priori «атомистическую» природу континуума. Лузин сомневается в этой исходной гипотезе, формулируя задачу теории множеств следующим образом: «Целью теории множеств является вопрос чрезвычайной важности: можно или нет рассматривать линейную протяженность атомистическим образом как множество точек; вопрос этот, кстати, уже не нов и восходит к эллинам» [5, с. 22].

Хорошо видно, что Лузин не помещается в рамках излагаемой теории, он гораздо шире и богаче, его собственный облик проглядывает в отдельных рефлексивных замечаниях, которые как бы отстраняют его от излагаемой концепции, все время делая эту последнюю объектом анализа и оценки. Именно благодаря этому ты все время чувствуешь, что не просто изучаешь некоторый предмет, но общаешься с тем, кто продолжает его строить прямо на твоих глазах. И конечно же, только сам строитель способен взять на себя ответственность так сформулировать цель всего строительства, как это делает Н. Н. Лузин. Ведь он по сути дела формулирует вовсе не математическую, а скорей методологическую, т.е. философскую проблему. Это и понятно, т.к. Н. Н. Лузин — и это мы уже отмечали — не только работает в рамках математики как таковой, но и постоянно занимает по отношению к последней рефлексивную позицию. «Философские рассмотрения, — пишет он, — служат лишь для того, чтобы отличить истинно плодотворное направление от бесконечного множества других» [5, с. 322]. А Лузин, как известно, как раз и отличался удивительной способностью выбирать плодотворное направление. Не удивительно, что и текст Лузина, хотя это в основном математический текст, постоянно строится под философский, точнее, методологический аккомпанемент. Это одна из особенностей лузинского стиля, глубоко связанная с характером его мышления. И очевидно опять-таки, что она выпадает из поля зрения коллекторских программ математики, не представляя собой, строго говоря, математический результат.

И наконец, в свете всего сказанного хочется обратить внимание на драматизм завершающих книгу фраз. «Только два случая возможны: Или дальнейшие исследования приведут когда-нибудь к точным соотношениям между проективными множествами, а также к полному решению вопросов относительно меры, категории и мощности этих множеств... Или указанные проблемы из теории проективных множеств останутся навсегда нерешенными и к ним добавится множество новых проблем, столь же естественных и столь же недоступных. В этом случае ясно, что пришло время произвести реформу в наших идеях об арифметическом континууме» [5, с. 322]. Сам Лузин не решает этой дилеммы. А если бы и решил, то ей на смену пришла бы другая, ибо творческий ученый просто обречен на дилеммы такого рода. И опять-таки он неизбежно приходит здесь к философии. Невольно вспоминаются слова Б. Рассела: «Учить тому, как жить без уверенности и в то же время не быть парализованным нерешительностью, — это, пожалуй, главное, что может сделать философия в наш век для тех, кто занимается ею» [7, с. 9].

Список литературы

1. *Бернал Дж.* Наука в истории общества. М., 1956.
2. *Бонди Г.* Гипотезы и мифы в физической теории. М., 1972.
3. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.; Л., 1951.
4. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. М-Л., 1938. Т. 1.
5. *Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М., 1953.
6. *Мейен С. В.* Следы трав индейских. М., 1981.
7. *Рассел Б.* История западной философии. М., 1959.
8. *Сеченов И. М.* Избранные философские и психологические произведения. М., 1947.

Раздел второй

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ СТИЛЯ

МАТЕМАТИКА И СТИЛЬ

Родин А. В.

Можно ли принять всерьез вопрос о стиле в математике и в науке вообще? Разумеется, можно говорить об индивидуальном стиле работы ученого (если, конечно, ученый действительно обладает индивидуальным стилем) или о стиле работы научной школы. Наверное, каждому математику приятно вспомнить о стиле работы своих учителей, важно подумать о своем собственном научном стиле. Но не будет ли это только биографической деталью? Разве не является стиль чем-то побочным, сопутствующим и не имеющим существенного отношения к «самой» математике, к математическим результатам. Для студента могут быть важны и манера речи лектора, и его внешность, и одежда, и интерьер аудитории, однако на экзамене речь все же пойдет о другом — о содержании математической *теории*. Можно также заметить, что все обстоятельства научной деятельности, в том числе и такие, которые нельзя отнести к существу дела, а нужно вынести за скобки в качестве стиля, имеют непреходящую *историческую* ценность, особенно если они относятся к работе знаменитых ученых и научных школ, много сделавших в своей науке. Заметим, впрочем, что в истории как знании о фактах прошлого (в том числе и о стилях научной работы в прошлом) собственный стиль выносится за скобки так же. как и в математике. Конечно, для читателя исторического опуса небезразлично, как историк смог изложить факты, насколько интересным получилось это изложение. Но главное для историка все же не в том, чтобы написать интересный рассказ, а в том, чтобы следовать истине и правильно изложить то, что происходило в действительности. Таким образом, даже когда стиль становится *предметом* знания, это не отменяет его подчиненного положения в структуре знания.

Мы обращаем внимание на стиль, когда говорим не о научных результатах, а о научной деятельности. Правда, деятельность не всегда можно отделить от результата, и именно поэтому не всегда можно вынести стиль за скобки «самой» науки. Возьмем математическое доказательство. С одной стороны, это, конечно, результат — найти доказательство какого-нибудь математического утверждения, например, гипотезы Гольдбаха. Но с другой стороны, в самом тривиальном смысле, который, впрочем, никто не отменял, доказательство это только *процедура* верификации утверждения, в нашем примере — гипотезы Гольдбаха. Так что если быть последовательным, нужно сказать, что результатом будет не доказательство гипотезы Гольдбаха, а само соответствующее утверждение, которое после того как найдено доказательство будет уже не гипотезой, а установленной истиной. Если применительно к математическому доказательству, даже опубликованному в качестве результата, можно применить понятие стиля (стиля рассуждения), то по отношению к *утверждению* о том, что любое четное число является суммой двух простых чисел, понятие стиля, очевидно, неприменимо. Что-то, однако, мешает принять всерьез точку зрения на математические доказательства (и вообще все математические *рассуждения*) как на инструмент для верификации истин. Кажется, что найденное математическое доказательство может считаться результатом само по себе, а не только постольку, поскольку оно позволяет получить результат в виде утверждения теоремы[1]. Ведь именно в доказательствах реализуется то, что принято считать особым достоинством математики — ее строгость и точность.

Итак, в математике, как и в науке вообще, мы видим два противоположных момента. К знанию как готовому результату, к научной истине понятие стиля не применимо; можно даже сказать, что в этом случае стиль последовательно «выносится за скобки». С другой стороны, всякая научная деятельность, в том числе и всякое научное рассуждение, помимо логической «правильности» характеризуется еще и особым стилем. Для науки как «искусства открытия» стиль мышления оказывается даже решающим. Было бы непродуктивно пытаться противопоставлять друг другу эти два момента и находить между ними компромисс. Важнее понять, что их определяет. Это, в свою очередь, поможет прояснить понятие стиля.

1. Знание как возможность и утопия

Важной чертой знания мы считаем его всеобщность: содержание знания остается одним и тем же всегда, везде и для всякого человека. В этом Платон видел основное достоинство знания, отличающее знание от переменчивого мнения. Однако такая всеобщность знания в известном смысле «компенсируется» тем обстоятельством, что всеобщее знание всегда остается только возможностью, действительностью для которой выступает предмет знания (то, о чем это знание).

В частности, всякое выводное (дедуктивное) знание оказывается гипотетическим — о первых принципах приходится договариваться. Обратим, однако, внимание на то, что если гипотеза это и договор, то весьма особенный, аналогичный, но вместе с тем определенно отличающийся от любых общественных договоров (политических и экономических). А именно, тогда как всякий общественный договор требует согласования интересов договаривающихся сторон, требует того, чтобы данный договор был в действительности выгоден всем договаривающимся сторонам, договор о научной гипотезе вообще беспроблемен и не требует никаких усилий. Достаточно сказать «предположим, что...» и высказать любое осмысленное утверждение, чтобы оно было «принято» собеседником, то есть «договор» заключен. То же самое касается и определения научных терминов: только в науке мы можем употреблять слова в тех значениях, в которых нам нравится, и то, разумеется, в узких пределах. Невозможно в ответ на предложение: «предположим, что вокруг всякой точки всяким радиусом можно описать круг» или «будем называть треугольником то-то и то-то» заявить: нет, я не хочу этого предполагать и таким образом использовать слово «треугольник». Такого рода возражения сразу делают дискуссию ненаучной. Можно, конечно, сказать, что некоторое предположение неправдоподобно или что оно неэффективно с точки зрения построения теории, в конце концов могут быть действительно аргументы для того, чтобы предпочесть одно предположение другому, — однако любая оценка предположения допустима только после того, как предположение принято. Фигура предположения императивна в том смысле, что делает индивидуальный произвол рассуждающего всеобщим и обязательным для всех потенциальных собеседников. Конечно, в действительности предположение никого ни к чему не принуждает, поскольку от всякого предположения можно отказаться с той же легкостью, с которой с ним приходится соглашаться. В отличие от любого общественного договора предположение в действительности никого ни к чему не обязывает, а остается всегда возможностью: почему бы тогда не «испробовать» любую, пусть самую невероятную возможность? Сам *акт* предположения оказывается исчезающим, как будто никакого акта здесь и нет, а есть только некоторая возможность действия, которая может быть, а может и не быть реализована. Таким образом, всеобщность предположения объясняется его необязательностью, его недействительностью. Вряд ли в такой всеобщности нужно видеть какое-то исключительное достоинство. С другой стороны, для некоторых целей такая всеобщность может быть, конечно, полезной.

Конечно, предположение это еще не знание, однако всякое знание зависит от некоторых предположений и потому само предположительно, всегда только возможно. Отношение знания как возможности со своим предметом как с действительностью определяется структурой времени и может быть двояким. Во-первых, знание может давать возможность действия в будущем, то есть быть знанием того, как можно действовать. Именно к этому аспекту знания в первую очередь применим известный афоризм Фрэнсиса Бэкона о том, что знание это сила (возможность как сила). Сюда относится всякое *теоретическое* знание, соотносимое с практикой. Очевидно, есть разница между знанием того, как действовать, и самим действием. Во-вторых, знание может быть возможной реконструкцией уже случившихся прошлых событий, то есть *историей.* Эти два основных вида знания — теория и история — никогда не существуют отдельно друг от друга. Даже сколь угодно строго «придерживаясь фактов», нельзя избежать «теоретизирования», и наоборот, никакая теория не избегает отсылки к фактам, пусть и «теоретическим». Экспериментальное математическое естествознание комбинирует теоретический и исторический типы знания сознательно и последовательно. Свои выводы оно строит на экспериментально полученных фактах, которые, с одной стороны, являются историческими, поскольку соответствующие экспериментальные события действительно имели место в прошлом, но, с другой стороны, в отличие от событий, например, гражданской истории, экспериментальные события нарочно и целенаправленно производятся исследователем для проверки своих теоретических построений. Действительность научного эксперимента остается половинчатой: экспериментальное событие выступает как действительное по отношению к чисто умозрительным теоретическим спекуляциям, но, с другой стороны, эксперимент претендует на то, чтобы «не вмешиваться» в действительность, а только давать правдивую «картину» действительности и поэтому не подлежать этической оценке. Это позволяет экспериментальному знанию в целом сохранять теоретический характер и допускать практическое «применение». Сочетание теоретического и исторического аспектов не является отличительной чертой только экспериментального естествознания: таково и всякое «практическое» знание, которое, с одной стороны, основывается на прошлом опыте, а с другой стороны, предполагает будущие действия, основанные на этом знании.

Итак, всякая индивидуально предложенная гипотеза, любые предложенные всяким индивидом обозначения или термины автоматически становятся всеобщими. Это значит, что всеобщность знания вовсе не противоположна индивидуальному характеру знания. Действительно, что-либо знать можно только *самому*, самостоятельно. Всякое знание предполагает одновременно две формы выражения: одну безличную и всеобщую «известно, что...» и другую личную (первого лица) и индивидуальную «я утверждаю, что...». Переход от одной формы к другой можно проследить на примере евклидовских теорем: сначала дается безличная формулировка теоремы, например «сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам», а затем вводятся обозначения и утверждение повторяется уже от первого лица: «*я утверждаю, что* (λέγω δή, ὅτι...) сумма углов ABC, BCA и CAB треугольника ABC равна двум прямым»[2]. Всеобщность знания реализуется таким образом, что всякий человек за него отвечает лично. Это аналогично принципам права, когда всякий гражданин несет индивидуальную ответственность за свои поступки по общим, одинаковым для всех законам. (Разница между знанием и правом состоит в том, что сфера действия закона все же остается ограниченной государственными границами, тогда как всеобщность знания *предполагается* неограниченной; поэтому закон мы называем просто общим, а знание всеобщим). Таким образом, всеобщее и индивидуальное в знании предполагают друг друга: знание всеобще в том смысле, что *каждый* индивид в принципе способен его воспроизвести независимо от своего происхождения, убеждений и привычек. Эта структура знания фундаментальна: вряд ли Евклид видел в своем λέγω основание, подобное декартовскому cogito, скорее вслед за Платоном он отдавал приоритет всеобщему, однако сама связка предполагающего «я», с одной стороны, и безличного объективного положения дел, с другой стороны, остается неизменной чертой знания как такового и в античности, и в новое время.

Связь всеобщего и индивидуального в знании осуществляется не только посредством категории лица (я и оно), но также посредством категорий пространства и времени. Всякое знание утверждается не только каждый раз «мной», но каждый раз «мной здесь и теперь» независимо от того, где я нахожусь, что со мной происходило мгновение назад и произойдет в следующее мгновение. В противном случае это уже не знание, а навеянное обстоятельствами мнение. Поскольку такое «здесь и теперь» предполагается возможным во *всякий* момент времени и во *всяком* месте, знание получает статус вечного и вселенского: то, что истинно, истинно везде и всегда, в любом месте и в любое время[3].

Таким образом, знание является одновременно индивидуальным и всеобщим не только по лицу, но также по месту и по времени: оно является одновременно моментальным и вечным и одновременно точечным и вселенским. («Единства противоположностей» в этом не больше, чем в выражении «каждый», которое, с одной стороны, указывает на индивидуальность, а с другой стороны, — на всеобщность.)

Не нужно также забывать, что всеобщность знания во всех трех выделенных нами отношениях — по лицу, времени и месту — только лишь возможная, а не действительная. Эта всеобщность не в том, что все всегда и везде действительно всё знают, а в *предположении*, что *всякий человеческий индивид* ***может*** овладеть любым знанием независимо от времени и места, *если будут выполнены определенные условия обучения*. Поскольку речь идет только о предположении, то его эмпирическое подтверждение или опровержение в практике образования не меняет принципиально его (предположительный) статус. С другой стороны, очевидно, что если бы это предположение не подтверждалось достаточно широко на практике, т. е. если бы распространение знаний через исторические, географические и культурные барьеры не было бы реальностью, это предположение мало кого могло бы заинтересовать.

Такую предположенную независимость знания от времени, места и конкретного лица я называю *утопичностью* знания, имея в виду под топосом не только выделенное место в пространстве, но и интервал времени, и культурно-историческую ситуацию (ср. понятие хронотопа по Бахтину). Связку общего и индивидуального, проявляющую себя по крайней мере трояко — 1) я/все, 2) теперь/всегда, 3) здесь/везде, — я называю *утопической структурой.*

2. Знание и понимание

Хотя верно, что всякое знание является предположительным, мы все же не считаем знанием любое, ничем не обоснованное предположение. Более того, предположительность знания мы склонны рассматривать как некоторое неизбежное зло, с которым нужно по мере сил бороться, стремясь к заведомо недостижимому идеалу непредположительного, безусловно истинного знания. Непредположительное знание невозможно постольку, поскольку, как я показал выше, именно предположение несет структуру утопии, которая делает знание всеобщим (в отношении лица, места и времени). И тем не менее в знании необходимо присутствует что-то кроме предположений. Это — рассуждение. Аксиомы геометрии образуют знание не сами по себе, а только вкупе с доказанными на их основе теоремами. Так же, как и предположение, рассуждение имеет два аспекта: всеобщий и индивидуальный. Обучение геометрии состоит не только в том, что ученик «принимает», т. е. делает своими сделанные учителем предположения, но и в том, что он понимает рассуждения учителя и самостоятельно их воспроизводит (делает их своими рассуждениями). Есть общая схема рассуждения, которая должна быть еще «исполнена» рассуждающим человеком, и есть множество таких индивидуальных «исполнений». Очевидно, именно в качестве многократно воспроизводимой схемы доказательство может быть названо результатом. В этом отношении между предполагаемыми утверждениями (суждениями) и доказательствами (рассуждениями) имеется полная аналогия.

Однако воспроизведение рассуждения позволяет заметить момент, который в гораздо меньшей степени проявляется в случае воспроизведения предположения, и поэтому, говоря о предположении, я не обратил на него внимания. Воспроизводить рассуждение можно по-разному. Можно зазубрить и механически повторить доказательство из учебника, а можно, ознакомившись с доказательством из учебника и *поняв его смысл*, доказать затем теорему «самостоятельно». Только во втором случае воспроизведение валидно, т. е. является *действительным* математическим доказательством независимым от своего источника (учебника). То же можно сказать о предположении — не нужно соглашаться с предполагаемым утверждением, но нужно понимать его смысл. Нельзя, например, предполагать существование круглого квадрата. В случае предположения требование понимания смысла оказывается более слабым, чем в случае рассуждения, потому что в случае предположения оно эквивалентно требованию *возможности* предполагаемого, а во втором случае — более жесткому требованию *необходимости* вывода. (Все необходимое возможно, но не наоборот.) С другой стороны, различие этих двух ситуаций релятивизируется, если представить себе, что нужно понять предположения и основанные на них рассуждения собеседника, говорящего на малознакомом тебе языке. Чтобы понять смысл предположений, достаточно знать язык на уровне, позволяющем понимать отдельные фразы. Чтобы понять смысл рассуждения, необходимо понимать целиком достаточно большие блоки речи. (Это говорит в пользу относительности таких категорий модальности, как возможное и необходимое.)

Итак, понимание — это коррелят индивидуального предположения и рассуждения, знак того, что предположение и рассуждение действительно воспроизводятся, а не просто механически повторяются. Когда доказательство «известно», всякий может его воспроизвести. Однако это, вообще говоря, не означает, что всякий может это доказательство понять. В отношении понимания у нас на самом деле нет никаких гарантий. Нет никаких гарантий того, что ученики в школе поймут доказательство геометрической теоремы, которое им рассказывает учитель; кроме того нет никакого окончательного критерия, позволяющего учителю наверняка различить, когда ученик действительно понял материал и когда только механически выучил. В качестве простейшего критерия учителя часто используют способность ученика проводить доказательства с помощью самостоятельно введенных обозначений. Совсем несложно написать компьютерную программу, которая повторяла бы одно и то же доказательство с разными, случайным образом выбираемыми, обозначениями, проводя всякий раз соответствующую подстановку. Казалось бы, таким же образом следовало бы объяснить и поведение ученика, «самостоятельно» доказывающего теорему. Удивительно, что обычному, не обладающему аномальными комбинаторными способностями человеку действовать таким образом оказывается намного сложнее, чем «понять смысл» доказательства и провести его *действительно* рассуждая, а не вспоминая, что написано в учебнике.

Реальна ли предложенная альтернатива? Может быть, термином «понимание» мы обозначаем именно способность *бессознательно* производить указанные подстановки? Очевидно, нет, поскольку требование производить доказательство по заданной схеме с новыми обозначениями является необходимым, но не достаточным для понимания. Точнее говоря, это требование, как и требование простого механического повтора в случае предположения, определяет некую минимальную ступень понимания. «Более глубокое» понимание предположения означает умение переформулировать его «своими словами», сохраняя неизменным смысл, давать ответы на вопросы по поводу этого предположения, разъясняющие его смысл. Лучшее понимание рассуждения означает способность обосновывать и комментировать каждый его шаг. Кроме того, понимание отдельного рассуждения (например, евклидова доказательства пифагоровой теоремы) не является ни окончательной учебной, ни, тем более, собственно научной задачей. Научить ученика геометрии значит научить его решать задачи самостоятельно, а не только понимать и воспроизводить с некоторыми вариациями предъявляемые рассуждения. От ученого требуется еще большее — построение целой теории. Впрочем, не следует считать, что воспроизведение ранее известной теоремы или теории является задачей низшего уровня по сравнению с доказательством ранее неизвестной теоремы или построением новой теории. Задачей-максимум для любого математика является воспроизведение *всей системы математики*, начиная с оснований. Такое *воспроизведение математики* (например, у Евклида и Бурбаки) говорит уже о понимании математики как таковой. Конечно, в этом случае также можно говорить о новых теоремах и теориях. Однако эта новизна, очевидно, отличается от новизны решения какой-нибудь мудреной и не имеющей никакого общего значения головоломки. С другой стороны, воспроизведение системы математики в целом или хотя бы ее значительного раздела (например, воспроизведение геометрии алгебраическими средствами Декартом) отличается не только от механического повтора рассуждения из учебника, но и от воспроизведения готового доказательства с новыми обозначениями. Вообще грань между «тем же самым» и «новым» математическим рассуждением всегда является условной. Останется ли евклидова геометрия «той же самой», если перевести ее на язык аналитической геометрии, или это будет новая теория? А если дифференциальную геометрию перевести с аналитического языка на язык абстрактной топологии?

Одну и ту же или разные теории излагают Евклид и Гильберт? Решение вопроса в ту или иную сторону в каждом конкретном случае имеет сугубо конъюнктурное значение и может пригодиться только при присуждении диплома, научной степени или же определении авторских прав. Для математического мышления важна не альтернатива «того же самого» и «нового», а фигура «того же самого заново», которая, как мы видели, указывает на понимание, а следовательно, и на *действительность* знания во всех случаях — от школьного воспроизведения доказательства из учебника до фундаментальных проектов воспроизведения целиком всей системы математики.

3. Понимание и стиль

Понимание в отличие от предположения и рассуждения имеет не всеобщий логический, а локальный эмпирический характер. Одно и то же рассуждение может быть понятным для одной аудитории и непонятно для другой. Одно и то же рассуждение может быть изложено понятно или непонятно для одной и той же аудитории. Более того, судить о том, было ли рассуждение понятно или непонятно, и искать причины понимания или непонимания можно только post factum, а заранее можно оценивать свои возможности быть понятым данной аудиторией только предположительно. То, что понимание не всеобще, очевидно. Но можно ли сказать, что понимание индивидуально? Конечно, только понимая о чем говоришь, можно рассуждать самостоятельно и нести индивидуальную ответственность за сказанное, т. е. уметь защитить свои аргументы. Но это относится уже и к предположению: только понимая смысл предполагаемого, можно высказать собственное предположение. В противном случае можно подумать, что ты просто повторяешь чужие слова. Тем не менее эти примеры говорят скорее о том, что понимание является *условием* индивидуального рассуждения и предположения, а не об индивидуальном характере самого понимания. Таким же образом пониманию можно было бы приписать и всеобщий характер, сославшись на всеобщность рассуждения и предположения.

Понимание можно было бы считать индивидуальным только в качестве возможности предполагать и рассуждать самостоятельно: если ты видишь, что я предполагаю и рассуждаю самостоятельно, ты полагаешь, что я понимаю, о чем говорю. Однако чтобы вынести такое суждение, тебе нужно в свою очередь понять мои рассуждения и предположения. Тогда твое понимание будет условием моего понимания. Чтобы избежать регресса ad infinitum, следует говорить о понимании как о нашем *взаимопонимании* и считать (как мы это и делали выше) предположение и рассуждение формами возможности понимания, а непонимание — условием возможности предположения и рассуждения. Конечно, верно, что без понимания предположение и рассуж-

2 Зак. 3711

дение не будут действительными. Но они и не действительны в качестве всеобщих — ведь неправда, что всякий (человек?) всегда и везде понимает всякое осмысленное рассуждение и предположение. Они таковы только в возможности. Это значит, что для распространения знания не существует каких-то заранее определенных этнических, географических и исторических границ. Всеобщность знания — это открытость знания для понимания. Это другой аспект того, что выше я назвал утопичностью.

Давайте уточним понятие осмысленности. Я назову предположение или рассуждение осмысленным, только если я здесь и теперь понимаю его смысл. Это условие необходимое, но, очевидно, не достаточное. Необходимо еще вменить этот смысл одному и многим авторам высказывания и объяснить его другим людям. Коротко говоря, осмысленность предположения и рассуждения означает некоторое действительное взаимопонимание, общение, взаимодействие вокруг этого предположения или рассуждения. Нет другого критерия понимания кроме реального взаимодействия в некотором локальном контексте, в простейшем случае — ответов ученика на вопросы преподавателя в присутствии класса. Обсуждаемое предположение или рассуждение является своего рода *местом* (топикой) разговора наряду с классной комнатой. По-моему, мы сталкиваемся здесь не со случайным этимологическим совпадением (топика как тема обсуждения и топос как физическое место), а с одним и тем же понятием, имеющим разные аспекты.

Итак, понимание как действительность всякого предположения и рассуждения, а значит, и всякого знания, всегда *топично*. Топичность понимания противостоит утопичности знания как всеобщей возможности. Интересно, что понимание, которое является действительным аспектом всякого знания, оказывается таким же топичным, исторически и географически переменчивым, как и мнение. Это заставляет заново переосмыслить платоновское противопоставление знания мнению. Очевидно, что знание нельзя понимать как некоторое всегда, везде и для всех неизменно одинаковое мнение, как «вечную истину» вроде 2×2=4. Наверное, различие между знанием и мнением можно усмотреть в разном характере «того же самого» в двух случаях. Если знание и остается неизменным, то ведь не в том смысле, что одна и та же формулировка бесконечно повторяется слово в слово. Наоборот, как я уже говорил, понимающее знание характеризуется вариацией формулировок, включением их в новые и новые локальные контексты, повторением «того же самого по-другому». Пределы, в которых могут меняться формулировки одного и того же мнения, гораздо уже. Повторение мнения может быть только буквальным или близким к буквальному. Что касается формулировок, то, очевидно, в случае мнения они даже более стабильны, чем в случае знания, поскольку изменение формулировки скорее изменит мнение, чем знание, и только в случае мнения сохранение тождества формулировки оказывается существенным. Неизменным в знании оказывается сама ситуация возобновления понимания. И здесь оказывается существенным понятие стиля.

Высказать «то же самое иначе» означает сменить стиль изложения. Верно, что таким образом стиль оказывается чем-то несущественным по сравнению с содержанием знания. Но так же верно, что содержание не существует вне стилей: всякая попытка «стилистически нейтрального» изложения просто абсолютизирует один из стилей, задает его в качестве нормы. Более того, только многообразие стилей задает то особое тождество знания, которое делает знание самим собой, отличая его от мнения. Исключение стилистического многообразия из знания немедленно превращает его в мнение, как это происходит при школьной зубрежке. Зубрить значит понимать только тождество формулировок, понимать значит рассуждать в локальном стиле. Как и понимание вообще, стиль не может быть собственностью одного индивида. «Иметь свой стиль» значит его создавать, вовлекая окружающих в понимающее общение какого-то нового типа. Авторство в этом случае невозможно без соавторства: стиль должен быть не просто выдвинут в возможности, но и осуществлен в действительном общении. Авторство означает здесь не что иное, как лидерство. Если не будет альтернативных лидеров, не будет реального соревнования за лидерство, абсолютизируется один стиль, и знание станет мнением.

Итак, оказывается, что «несущественность» стиля в науке вообще и в математике в частности только и позволяет конституировать «существенное» в качестве подлинного смысла рассуждения, стоящего за наличными формулировками и всегда чреватого новыми возможностями для мысли. Речь не идет просто о том, что всякое указание на существенное всегда выделяет и несущественное, которое таким образом оказывается также в некотором смысле необходимым. Стиль это не остаток, который остается в математическом рассуждении за вычетом существа дела, а способ действия мысли в локальном контексте.

Возьмем, например, гильбертовский аксиоматический метод. С одной стороны, очевидно, что гильбертовское понимание аксиоматики — это глубоко оригинальная математическая идея. С другой стороны, часто и, на мой взгляд, не случайно говорят об «аксиоматическом стиле изложения» или об «аксиоматическом стиле мышления», имея в виду, что тот же самый предмет можно изложить иначе (в частности, конструктивно). Тогда получается, что рассматриваемый предмет как будто важнее, чем аксиоматический метод, который используется для его рассмотрения. Мы здесь имеем соотношение между общим и частным, в котором точкой отсчета может быть как одно, так и другое: или общее понимается как обобщение частного, или частное понимается как сужение общего, как «частный случай», пример. Аксиоматический метод позволяет проследить оба способа соотношения общего и частного особенно отчетливо. Однако понятие стиля позволяет увидеть один момент этого соотношения, который часто упускается из виду, в частности, тогда, когда говорят об общей аксиоматической теории и частной модели, на которой она реализуется. Стиль рассуждения, как и система аксиом, является всегда общим, это универсалия по отношению к различным частным предметам рассуждения. Однако в отличие от системы аксиом, которая может, вообще говоря, рассматриваться вместе со своими моделями независимо от других аксиоматических теорий, понятие стиля не имеет никакого смысла вне соотношения различных стилей между собой[4]. Какого рода единство предполагается множественностью стилей? Какого рода идентичность имеется в виду, когда говорят об изложении «того же самого» в другом стиле? Это можно было бы назвать идентичностью и единством смысла. Если считать, что именно «понимание смысла» отличает науку, придется признать и то, что всякое познание нового — это создание нового стиля. Возможность науки, которая занята лишь словесными и визуальными экзерсисами, украшательством, ничего не дающей нового «по существу», только подтверждает этот тезис. Неудача в науке это тоже неудача стиля. Но было бы несправедливо вспоминать о стиле в науке только во времена неудач.

Примечания

[1] В этой связи возникает следующий интересный вопрос: все ли математические утверждения останутся *осмысленными,* если в математической теории игнорировать все доказательства? С одной стороны, возможность выделить утверждения из всего корпуса рассуждений, объяснений и вопросов, очевидно, является важной характеристикой математического текста. С другой стороны, такое выделение, по-видимому, осуществимо лишь локально, поскольку даже «Начала» Евклида, не говоря уже о более сложных математических теориях, без доказательства превращаются в набор *несвязных*, а значит, в целом бессмысленных утверждений. Вопрос представляется мне открытым.

[2] Введение обозначений можно тоже интерпретировать как переход от всеобщего к индивидуальному, но не для субъекта знания, а и для его объектов: сначала теорема формулируется для треугольника *вообще* (или «для любого треугольника»), а затем доказывается для некоторого *индивидуального* треугольника ABC. См. об этом *Родин А. В.* Теорема // Вопросы философии. 1998, № 9.

[3] Это касается не только теоретического, но и исторического знания: тот *факт*, что я (Андрей Родин) родился в 1965 году в Москве, не зависит от места и времени, где и когда о нем упоминают. Впрочем, остается неясным, как можно упоминания этого факта отнести ко времени до 1965 года.

[4] На самом деле, конечно, и аксиоматическая теория получает свой настоящий смысл только в связи с возможностью различных аксиоматизаций «одной и той же» предметной области, например, евклидовой геометрии. Только в этом контексте ставятся, например, задачи о взаимной независимости аксиом и полноте их системы.

КОММЕНТАРИИ

С. Н. Бычков

Проблему, вынесенную в название статьи, можно обсуждать как в философском, так и в историко-научном стиле. Не подлежит сомнению, что автор мог написать работу в любом ключе, однако остановил свой выбор на первой из указанных возможностей. Особенностью подобного подхода является «встраивание» рассматриваемой специальной проблемы в более общий контекст философской концепции знания, излагаемой в первых двух разделах статьи.

Для придерживающихся иных философских воззрений и не согласных с приведенной трактовкой знания выводы А .В. Родина относительно характера «функционирования» стилей в математической науке могут вызвать серьезные возражения, что, вероятно, найдет отражение в ряде комментариев. Однако подобные возражения не в состоянии поколебать заявленной позиции, поскольку, по мнению автора, «всякое знание является предположительным», а «непредположительное знание невозможно».

Если бы позиция Андрея Вячеславовича исчерпывалась цитированными положениями, на этом месте можно было бы и поставить точку, констатировав появление оригинальной, хотя и спорной, философской концепции, внутри которой проблема стилей в математическом мышлении получает предложенное в докладе решение. В отсутствие общепризнанных концепций в философии науки оценка такого рода не представляла бы из себя ничего неординарного. И все же подобная констатация была бы не только банальной, но и, на мой взгляд, неверной. Буквально рядом с приведенными цитатами автором говорится, что «предположительность знания мы склонны рассматривать как некоторое неизбежное зло, с которым нужно по мере сил бороться, стремясь к заведомо недостижимому идеалу непредположительного, безусловно истинного знания». Эти слова и дают повод вернуться к вопросу об «оптимальном стиле» исследования обозначенной в названии проблемы.

Автор, безусловно, прав, полагая, что проблема стилей математического мышления не может рассматриваться изолированно от вопроса о природе научного знания. От этой бесспорной посылки до представленного вниманию читателя текста всего один шаг: так как во взглядах на природу научного знания до консенсуса сегодня так же далеко, как и во времена Платона, то честнее всего явно высказать *свои собственные* общие предположения, на основе которых и конструируется ответ, благо «фигура предположения императивна в том смысле, что делает индивидуальный произвол рассуждающего всеобщим и обязательным для всех потенциальных собеседников». Этот ход мысли правомерен, однако, лишь при той представляющейся сама собой разумеющейся и потому до конца не осознаваемой предпосылке, что вопрос о природе знания более общий и потому должен рассматриваться *до* и *независимо* от вопроса о стилях математического мышления. Так ли это на самом деле? Действительно ли вопрос о природе знания может рассматриваться совершенно независимо от выглядящей более частной проблемы «стилевой окраски» математического мышления?

Содержащийся в статье тезис «всякое знание зависит от некоторых предположений и потому само предположительно» в наиболее отчетливой форме выражен в XX веке в работах К. Поппера. Корни гипотетико-дедуктивного метода, возведенного Поппером в ранг всеобщего, лежат в глубокой древности – в античной дедуктивной математике (эволюция представлений, связанных с ролью гипотез в научном познании, обстоятельно проанализирована в работах И. П. Меркулова). «Аксиоматический стиль мышления», упоминаемый автором в конце работы, – этот прообраз современного гипотетико-дедуктивного метода – представляет собой с историко-научной точки зрения специфически европейское «изобретение», генезис которого невозможно объяснить «внутриматематическими» причинами (*Бычков С. Н.* Гипотетико-дедуктивный метод и гуманитарное знание // Вестник РГГУ. М., 1996. Вып. 3. С. 121—126). Поскольку же на становление аксиоматического (и гипотетико-дедуктивного) метода существенное воздействие должны были оказать *внешние* по отношению к науке причины, то и с философской точки зрения корректно оценивать современную математику, в которой господствует дедуктивный метод, как «стилистически окрашенную».

Стилистическая окрашенность присуща не только методам рассуждений современной математики, но и самим ее результатам. Утверждение о том, что любое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел, предполагает наличие понятия о бесконечном множестве абстрактных объектов. Кажущееся самоочевидным для современного математика представление о натуральном ряде чисел опирается на довольно сложные мыслительные конструкции, неведомые древней и средневековой индийской и китайской философии, для объяснения возникновения которых в европейском мышлении неизбежно придется выходить за рамки не только математики, но и науки вообще. Поэтому не только результаты, но и (прежде всего!) *постановки* проблем несут на себе отпечаток исторически возникших категорий *европейского* мышления. Последнее не означает, что все накопленное современной математикой (и наукой вообще) «деформировано» европоцентристским стилем мышления и насквозь релятивно. Подобное утверждение являлось бы впадением в другую крайность. Создание атомной бомбы подтвердило правильность совершенных в начале века открытий в области физики микромира, но отсюда не следует, что «копенгагенская интерпретация» квантовой механики (т.е. рефлексия над открытыми и практикой проверенными фундаментальными законами микромира) не несет на себе следы всего лишь «относительных» европоцентристских представлений, выявление и критический анализ которых дело философии и истории науки уже следующего столетия.

Чисто философский, абстрагирующийся от реалий историко-научного знания подход к вопросу о стилях в математике может быть лишь «гипотетико-дедуктивным». Но в таком случае проблематичный статус последнего в нынешней истории науки автоматически переносится и на любое решение на его основе вопроса о «математических стилях», одним из которых является «аксиоматический стиль». Не возникает ли в таком случае ощущение попадания в логический круг? Если для истории науки всеобщность гипотетико-дедуктивного метода проблематична, если при попытке разрешить вопрос о природе знания возникший на основе «европейской математики» и доминирующий в современном естественно-научном знании метод просто экстраполируется на все познание, то, по-моему, именно такой круг и получается. И если вместе с автором мы будем все же снисходительны к (болезненному?!) стремлению к «непредположительному, безусловно истинному знанию», то нам придется на время покинуть горние выси философских спекуляций, обратившись к земным, историко-научным аспектам и вопроса о стилях в математике, и проблемы природы знания вообще. Можно ли поручиться, что в результате этого шага разделение стилей исследования на «философский» и «историко-научный» не станет безнадежным анахронизмом?

Г. Б. Гутнер

Основное различение, проводимое в этой работе, — различение между возможным и действительным — очень тонко прописано на примере математического рассуждения. Автор показывает, что в модальности возможного мыслится всеобщее знание, которое также характеризуется как *утопическое*, т.е. не имеющее никакого фиксированного *места*, независимое от лица, времени и пространственной локализации. В работе утверждается, что экспликация знания как всеобщего сопровождается автореференцией «Я, здесь, теперь», которая должна быть, однако, понята как «каждый», «везде», «всегда». Всеобщее знание выступает в двух (дополняющих друг друга) формах: предположения и рассуждения. Возможное знание актуализируется в процедуре *понимания*. Последнее обязательно предполагает коммуникацию и является лишь локальным эмпирическим событием. Понимание *случается* при объяснении, обсуждении, чтении текста. Оно строится вокруг всеобщего знания и выступает его эмпирическим коррелятом. Оно всегда локализовано — во всех трех названных смыслах, — т. е. отнесено к конкретным лицам, конкретному промежутку времени, конкретному месту в пространстве.

Отдавая должное точности проведенного различения, я не могу принять один его нюанс, весьма, впрочем, важный для всего построения. Употребление местоимения «я» при установлении всеобщего знания автор связывает с личной ответственностью за установленное. Однако такая ответственность должна быть исключена самой всеобщностью. Всеобщность рассуждения подразумевает, что рассуждать по-другому нельзя. За всеобщее, следовательно, нет смысла отвечать. Можно отвечать только за мое локальное представление всеобщего, т.е. за мое понимание. Ответственность возникает тогда, когда можно сделать по-другому. Всеобщность знания исключает всякое другое — и другое рассуждение, и другое предположение. Верно, что предположение возможно (а не действительно), поскольку его можно и не делать. Но не делать предположения — значит не иметь никакого отношения к знанию. Я могу и не требовать, чтобы через две точки можно было провести единственную прямую, ведь ничто не принуждает меня заниматься геометрией. Но если я ей занимаюсь, то все делаемые мной предположения неизбежны — они не зависят от меня (и именно поэтому утопичны). Говорить «я» есть смысл тогда, когда «я понял» или «я объяснил». Всякая такая автореференция немыслима без актуализации, т.е. без определения лица, времени и места.

А. В. Михайловский

Статья А. В. Родина интересна уже потому, что касается одной из центральных тем современной философии — проблемы отношения знания и понимания. Несомненно, автор хорошо продумал суть вопроса и дал на него свой ответ. В целом, нам предлагается картина науки как мобильного действия, которому, кажется, уже стали достаточно чуждыми слова об «объективной значимости» и «последнем обосновании» научного знания. Неслучайны выбранные обозначения. Знание «утопично» (значит, статично), понимание же, в котором подтверждается когнитивная практика как «действительное взаимопонимание, общение, взаимодействие», наоборот, «топично», т.е. движется и изменяется, постоянно становясь другим. В этом смысле Родин противопоставляет «повторение мнения» (имея при этом в виду то, что обычно понимается под платоновской δόξα) и «понимающее знание», которое «характеризуется вариацией формулировок, включением их в новые и новые локальные контексты, повторением "того же самого по-другому"». Определяющей для всего рассуждения представляется здесь пара «всеобщее» — «индивидуальное». Универсальность знания имеет то свойство, что всегда остается лишь возможной, в то время как понимание есть собственно индивидуальное и, кроме того, в нем возможное превращается в *действительное* (зафиксируем этот момент). «Всеобщность знания — это открытость знания для понимания». Этим подразумевается: идентичный смысл (который тем не менее остается возможным) открыт для понимания, т.е. может быть понят, реализован.

Здесь весьма уместно сослаться на феноменологический анализ Гуссерля, который впервые сделал возможным научное обсуждение данной проблематики. Во втором томе «Логических исследований» в первом исследовании Гуссерль пытается провести различие между выражением и значением (*Husserl E.* Logische Untersuchungen. Bd. 2: Untersuchungen zur Phaenomenologie und Theorie der Erkenntnis. — 1. Teil. Hamburg, 1992). В ходе размышления он приводит такой пример (гл. 1, § 11): выражения «квадратичный остаток» или «три вершины треугольника пересекаются в одной точке» остаются идеальными, объективно значимыми всегда и везде, кто бы и где бы их ни высказывал, потому что они относятся к *значению* (смыслу), которое не совпадает со смыслопридающим переживанием. Последнее есть некое суждение и, стало быть, психическое переживание. Одно и то же высказывание («Три вершины треугольника...») мы повторяем в качестве единственно подходящей формы выражения для идентичного, т.е. значения выражения. Таким образом, «идеальное единство значения» (идентичность интенции) существует во множественности суждений (наполнений интенции). Гуссерль ведет речь и о гипотетических (возможных) частях высказывания: понятийное содержание гипотезы (в отличие от ее формы) всегда есть нечто объективное и идеальное.

Обойти эти рассуждения стороной нельзя. Гуссерль тщательнейшим образом разбирает смысловую структуру сознания и создает тем самым платформу для дальнейшего движения, будь то в области феноменологии, будь то в области герменевтики, будь то где-либо еще. Совершенный выше экскурс понадобился мне для того, чтобы разобрать само противопоставление знания всеобщего и знания индивидуального (разумеется, данное обстоятельство не исключает их взаимодополнительности), которому *сообщается действительность* в понимании. На этот счет мы находим у А. В. Родина немало высказываний, из которых следует, что понимание и есть, собственно, действительность знания. Неизменным в знании оказывается не «вечная истина», которую можно «вызубрить» и воспроизвести, а «сама ситуация возобновления понимания», где как раз «оказывается существенным понятие стиля». Событие понимания, в самом деле, несводимо к знанию. Суть его такова, что оно не может быть гарантировано. Это весьма и весьма напоминает философское понимание. Действительность hic et nunc, не обеспеченная ничем кроме возможности! Понимание может состояться, а может и не состояться. Тогда не состоится и знание, в том смысле, что оно не будет актуализовано. Но тут как раз возникает вопрос. Где гарантия, что реконструкция оснований всей системы точной науки (которая представляет собой предельную задачу для всякого занимающегося наукой по-настоящему) может удаться? Наука необеспечена иначе, чем знание: она требует обоснования своих принципов, которые в ее рамках разумеются сами собой, — и тут освобождается место для философии. После прочтения статьи Родина остается неясно: *Чем гарантирован успех науки* (ἐπιστήμη, scientia), взятой именно в качестве *системы*, если всеобщность знания понимается лишь как гипотетичность, возможность (в противоположность, скажем, Больцано и Гуссерлю, которые следовали платоновской традиции и для которых всеобщность была *общезначимостью* и в этом смысле единственной действительностью, «истинно сущим», обоснованным в самом себе; или в противоположность Динглеру, для которого наука со всеми ее высказываниями и аксиомами была фундирована в воле, «воле к однозначности»)? К тому же является ли эта возможность той *potentia*, о которой в самом начале Нового времени говорил Френсис Бэкон? Едва ли. Во всяком случае очевидно, что наука не всегда мирится с подобным отношением к себе и не хочет оставаться *лишь* «искусством открытия».

В. К. Петросян

Остановлюсь на главном. Если опустить из контекста рассмотрения и комментирования многочисленные тезисы типа «Всеобщность знания реализуется таким образом, что всякий человек за него отвечает лично», которые я затрудняюсь отнести к числу осмысленных (возможно, в силу собственной ментальной и этической ограниченности), то суть проблемы, как я понял, сводится к выяснению семантических связей таких понятий как «истина», «стиль», «всеобщность» («индивидуальность») и «утопия».

Ключевое слово в авторской конструкции, вокруг которого строится все рассуждение, — «утопия». С него и начнем.

К сожалению, нигде в тексте не содержится явного определения термина «утопия» в авторской интерпретации, но в рассматриваемой работе в разных контекстах имеются пояснения, из которых следует, что «утопичность» — это «предположенная независимость знания от времени, места и конкретного лица», а «утопическая структура» — это связка общего и индивидуального, проявляющая себя «по крайней мере трояко — 1) я/все, 2) теперь/всегда, 3) здесь/везде...» и т.д.

Налицо очевидный отход автора от классического понимания термина «утопия». Раньше (до А. В. Родина) «утопию» определяли (на выбор) одним или несколькими из нижеследующих способов: 1) специфический литературный жанр, направленный на критику существующей и проектирование какой-либо возможной социальной реальности (основанной на некотором нравственном идеале), возникший вслед за появлением произведения Т. Мора «Золотая книга, столь же полезная, как забавная о наилучшем устройстве государства и о новом острове Утопия»; 2) (страна), которой нет; 3) благословенная страна. То есть утопическое знание всегда определялось как проективно-деонтическое знание — знание о некоторых устройствах (как правило, социальных), обусловленное какими-либо моральными регулятивами.

Утопическое знание всегда было подчеркнуто историчным (создавалось как критика, как идейно-нравственный противовес конкретной исторической реальности) и в силу этого никогда не претендовало ни на всеобщность, ни на независимость «от времени, места и конкретного лица», как какой-нибудь «концепт-кар» последней модели (даже будучи реально лучшим авто своего времени) не претендует на статус «автомобиля всех времен и народов». Требования к утопическим произведениям в любой предметной области, вытекающие уже из названия книги Т. Мора, суть следующие: быть антагонистичными к существующей реальности, полезными, забавными и содержать наилучшую на день издания (с точки зрения автора и, возможно, группы поклонников его творчества) модель устройства чего-либо в социальной (или какой-нибудь еще) сфере.

А если уж говорить об отношении утопического знания к реальности в контексте времени, то в классическом (аристотелевском) смысле оно вовсе не является знанием, поскольку либо не соответствует реальности вовсе («страна, которой нет»), то есть не является истиной по определению, либо будет соответствовать реальности в отдаленном будущем (а утверждения о будущем, как известно, не имеют истинностного значения).

Другими словами, утопическое знание — это весьма специальный вид знания, вообще не претендующий на истинность и на статус знания в аристотелевском смысле, не говоря уже о всеобщности, вневременности и абсолютной интерсубъективности, которые ему «инкриминирует» А. В. Родин.

Поэтому, если автору угодно было порассуждать о математических стилях в контексте всеобщности, вневременности и внепространственности, используя при этом какой-либо один термин, то следовало экспериментировать с понятием «абсолют» и производными от него прилагательными или чем-то вроде того, а не искажать традиционный смысл термина «утопия», поскольку такого рода эксперименты еще со времен античности имеют дурную репутацию.

В частности, процесс и результаты подобных манипуляций словами древние греки называли «какологией» (от греч. kakos — неправильное, logos — мысль, слово, выражение) — ошибочным сочетанием и семантическим наполнением слов, нарушением обычных правил словоупотребления, нелогичным строением выглядящего грамматически корректным суждения, а **соответствующий стиль изложения — «какологическим».**

Предположим теперь, что термин «утопия» А. В. Родин использовал просто как благозвучное имя (имеющее корень «место») для обозначения какого-то явления без соотнесения с традиционной семантикой этого слова и попытаемся выяснить, что же автор хотел **сказать по существу.** Введем термин «R-утопия» для обозначения вышеэксплицированной утопичности по Родину.

В параграфе «Знание и понимание» автор сравнивает «предположительное» (условно истинное, локальное, топичное) и «непредположительное» (безусловно истинное, всеобщее, нетопичное) знание. Утверждается, что «...всякое знание является предположительным...» и что «непредположительное знание невозможно постольку, поскольку... именно предположение несет структуру утопии, которая делает знание всеобщим (в отношении лица, места и времени)».

Насколько я понял автора, несколько раз прочитав статью, «предположительное знание» — это хорошее знание, локальное знание, топичное знание (автор на его стороне), а «непредположительное знание» — это, наоборот, плохое знание, нетопичное знание, R-утопическое знание, всеобщее знание, невозможное знание (автор не на его стороне).

Но если «именно предположение несет структуру утопии, которая (безусловно злодейским, черномагическим образом. — *В. П.*) делает знание всеобщим (в отношении лица, места и времени)», то получается, что, не имея сил сбросить «структуру утопии» со своих натруженных плеч, «предположение» («предположительное знание») обречено всю оставшуюся жизнь пребывать в статусе «непредположительного знания», поскольку последнее откровенно нелокально и нетопично, а следовательно R-утопично.

Получается, что или любое знание (как это ни печально) — «непредположительное знание», так как его R-утопичность неустранима в обоих случаях, или знания вообще нет (поскольку «непредположительного знания», по мнению автора, не существует), или «предположительное знание» и «топично» и «нетопично» в одно время и в том же отношении (и в том же топосе). Все три варианта, очевидно, на «хеппи энд» для защищаемого автором «предположительного знания» не тянут. Совершенно аналогичные рассуждения, показывающие противоречивость позиции автора (в тех случаях, когда она может быть принята как сколько-нибудь определенная и осмысленная), легко провести и над другими вводимыми А. В. Родиным понятиями (осмысленность, понимание, стиль и т. п.). В частности, последовательно рассуждая над исходными посылками автора, можно без труда заключить о бессмысленности понимания, понимаемости бессмысленности, R-утопичности осмысленности и (даже) осмысленности R-утопичности.

ОТВЕТ АВТОРА

С. Н. Бычкову

Комментарий Сергея Николаевича интересен тем, что исходный тезис комментатора о существовании двух различных подходов к проблеме стилей — философского и историко-научного — в конце комментария ставится под сомнение. Я полностью согласен с Сергеем Николаевичем как в том, что подобное различение подходов имеет смысл, так и в том, что это различение не является абсолютным. То обстоятельство, что мой подход является философским, а не историческим, указывает только на ограниченность задачи, которую я перед собой ставил, и вовсе не означает, что я считаю исторический подход неправомерным или менее важным. Как и Сергей Николаевич, я думаю, что исторический и философский подходы могут плодотворно комбинироваться, однако я думаю также, что четкость в постановке проблемы никогда не вредит, тогда как непродуманное сочетание различных подходов и различных задач может легко привести к путанице.

В терминах концепции знания, намеченной в моей статье, я провел бы указанное различие несколько иначе, противопоставляя историю не философии, а теории: если история говорит о прошлом, то теория, как я пытался показать, говорит о будущем, причем в первую очередь о ближайшем, а не отдаленном будущем (и тем более не о вечном, как часто полагают, ссылаясь на авторитет Платона). Под «разговором о будущем» я имею в виду не предсказания, а попытки реально построить это будущее, указывая на возможности того, что может и должно быть сделано. В своей статье я предлагаю набросок теории знания, в которой понятие стиля играет важную роль. Практическим следствием этой теории является необходимость культивировать стилистические различия математических текстов при безусловном соблюдении принципиального для любого знания требования открытости, т.е. переводимости всякого математического текста стиля А в некоторый осмысленный и непротиворечивый текст любого другого стиля В. (Построение формальной теории такого рода перевода, на мой взгляд, представляет собой интересную и важную задачу.) Насколько моя и другие теории, приводящие к подобным выводам, окажутся успешными, покажет будущее.

Еще раз подчеркну, что теория и история не могут и не должны быть изолированы друг от друга. Мы живем в настоящем, которое представляет собой смесь ближайшего прошлого, т.е. того, что недавно с нами произошло, и ближайшего возможного будущего, т.е. того, что мы вскорости ожидаем и намереваемся сами делать. Оба эти компонента представляются одинаково значимыми: прошлое имеет то преимущество, что оно уже свершилось в действительности, тогда как будущее остается в возможности; зато будущее всегда дает нам новый шанс действовать лучше, чем раньше.

Г. Б. Гутнеру

Структура утопии, присущая знанию, имеет два аспекта: всеобщий и индивидуальный. Всеобщий аспект знания состоит в том, что истинное знание истинно для любого человека, в любом месте и в любое время, то есть для всех, везде и всегда. Индивидуальный аспект знания состоит в том, что истинное знание истинно здесь и теперь, когда я воспроизвожу его содержание в своем уме. Формально единство этих двух аспектов обеспечивается омонимичностью слов «я», «здесь» и «теперь»: разные люди называют себя «я», словом «здесь» указывают на разные места, а словом «теперь» — на разные моменты времени. Кроме того, в указанных случаях омонимичность является *универсальной*: *всякий* человек называет себя «я», *всякое* место может быть в подходящей ситуации указано как «здесь» и *всякий* момент времени — как «теперь». Можно сказать, что «я», «здесь» и «теперь» — это переменные величины, области значений которых, соответственно, все люди, все точки пространства и все моменты времени.

Утопической структуре знания я противопоставил локальную структуру понимания, имея в виду не субъективный аспект понимания (индивидуальное ощущение того, что «я это понимаю»), а его интерсубъективный аспект; интерсубъективно понимание состоит в адекватной реакции на вопросы собеседника и способности самому задавать разумные вопросы. В таком смысле понимание всегда является локальным, потому что оно обусловлено специфическими формами общения, общими для спрашивающего и отвечающего, в частности, естественным языком. Более тонкие и специфические для предмета условия такого рода включают то, что можно назвать научным стилем. Если принять тезис о том, что знание действительно не тогда, когда индивид думает, что что-то знает и/или чувствует, что что-то понимает, а когда это подтверждается в практике дискуссии, то можно сказать, что понимание соотносится со знанием (в обоих аспектах последнего) как некоторая действительность со своей возможностью.

Говоря о личной ответственности за знание, я имел в виду индивидуальный аспект утопии: мысля, например, теорему Пифагора, я мыслю ее сам; полагая эту теорему истинной, я игнорирую любые чужие мнения по этому поводу; то, что теорема истинна, я вижу сам. Однако Г. Б. Гутнер правильно говорит, что это не совсем то, что стоило бы называть ответственностью, особенно если это слово производить от «ответа», который предполагает вопрос. Скорее это можно назвать (индивидуальным) сознанием. Тогда я могу переформулировать свой тезис следующим образом: всеобщность знания реализуется таким образом, что всякий человек конструирует его сам в собственном сознании. Отвечать на вопрос я, конечно, тоже должен сам, но в этом случае я уже не могу просто отбросить чужие мнения. Я должен на них ответить. И если я хочу, чтобы мой ответ был внятным, т. е. понятным для собеседника, я не могу также игнорировать чужую манеру разговора.

А. В. Михайловскому

Я благодарен А. В. Михайловскому за указание на место из Гуссерля, имеющее отношение к проблемам, которые я обсуждаю в своей статье. Однако между моим анализом и анализом Гуссерля есть существенное различие, не замечая которого комментатор неверно интерпретирует мой текст. Дело в том, что в отличие от Гуссерля я рассматриваю понимание не как акт индивидуального сознания, а как интерсубъективное коммуникативное событие. Ситуацию, когда учитель задает ученику вопросы по поводу проведенного доказательства и получает адекватные ответы, равно как и обратную ситуацию, когда ученик задает вопросы учителю по поводу пройденного материала и выслушивает разъяснения, я трактую как собственно ситуацию понимания, а не как ситуацию обнаружения или достижения понимания. Поэтому я не считаю возможным, как предлагает А. В. Михайловский, использовать теорию Гуссерля в качестве «платформы для дальнейшего движения», хотя я и согласен с ним в том, что эту теорию нельзя «обойти стороной». В будущем я постараюсь специально заняться изучением и критикой этой теории.

Таким образом, главное различие, которое я провожу в своей статье, это не различие между всеобщим объективным и индивидуальным субъективным типами знания, а различие между утопическим знанием, структура которого предполагает соотношение между всеобщим и индивидуальным, с одной стороны, и локальным (топическим) пониманием, достигаемым в рамках некоторого сообщества, с другой стороны. Именно последнюю дистинкцию я связываю с модальной дистинкцией возможное/действительное, рассматривая знание как возможность действительного понимания.

По поводу опасений комментатора относительно того, что в моем представлении знание лишается общезначимости и объективности, я могу сказать следующее. Я не считаю (и не говорю этого в статье), что локальное понимание является альтернативой утопическому знанию, и не предлагаю менять одно на другое. Я понимаю, что именно утопичность знания существенным образом связана с такой характеристикой знания, как объективность, и что объективность, в свою очередь, является существенной характеристикой знания как такового. Другое дело, что мой анализ приводит меня к необходимости переосмыслить идею объективности в терминах того, что я назвал открытостью. Локальное понимание само по себе может быть связано с любым родом верования, например, с предрассудком, и не иметь ничего общего с научным знанием. Знание и, в частности, научное знание (как бы ни определять последнее) отличается тем, что соответствующие локальные понимающие сообщества, взаимодействуя между собой, постоянно и быстро изменяются. Это может показаться неожиданным, но именно изменчивость языков, формулировок и стилей в науке дает повод говорить о научных истинах как о чем-то вечном. Чем интенсивнее такая изменчивость, тем более объективно научное знание. Например, именно тот факт, что теорему Пифагора можно понятно изложить не только на разных естественных языках, но и на языках различных математических понятий, в частности, на языке синтетической и на языке аналитической геометрии, дает основания считать утверждение этой теоремы объективной истиной (разумеется, в специальном смысле объективности, применимом к математике). Впрочем, поскольку интенсивность изменчивости является относительной характеристикой, объективность, о которой я говорю, также относительна.

Я сомневаюсь, что понятие абсолютной объективности имеет смысл и прагматическую ценность, даже если оно полагается только в качестве недостижимого идеала. Так же как бегуну, чтобы бежать быстрее, нужен скорее достойный соперник, а не идеальный образ супермена, бегающего со скоростью света, так и научной теории, чтобы стать более объективной, скорее нужна хорошая соперничающая теория, а не идеал абсолютной объективности.

Как спортивное, так и научное соревнование только тогда будет честным, интересным и способствующим достижению хороших результатов, когда ни одному игроку заранее не гарантирована победа. Я согласен с А. В. Михайловским, когда он говорит, что философ действует заодно с ученым, занимаясь принципами, которые ученый принимает как данные. В этом смысле само различие между ученым и философом является условным и относительным. Однако как ученый, так и философ должны преследовать не просто интересы теории, которую они вместе защищают, а интересы истины и объективности: их конечная цель состоит не в том, чтобы защитить некоторую конкретную теорию, а в том, чтобы построить истинную теорию. А эта последняя цель требует кроме прочего защиты честных «правил игры», в частности, правила отсутствия «гарантии на успех», которое дает право оспорить любую существующую теорию, даже если эта теория ранее была признана истинной. Поэтому я не согласен с А. В. Михайловским, что отсутствие «гарантии на успех» превращает науку в «искусство открытия». Я считаю, что напротив, такого рода гарантия заведомо исключила бы из науки истинность и объективность.

В. К. Петросяну

Как правильно замечает комментатор, я не употребляю термин «утопия» ни в одном из трех смыслов, которые автор называет «классическими» и «традиционными». Однако комментатор неверно, на мой взгляд, говорит, что введенное мной понятие утопии является излишним и может быть заменено понятием абсолютного: абсолютное знание не может быть предположительным, а именно фигуру предположения я приводил в качестве простейшего и самого яркого примера утопической конструкции.

Каким образом комментатор извлек из моей статьи оценочные суждения о том, какое знание «хорошее», а какое «плохое», я сказать затрудняюсь. Разумеется, я ничего подобного не имел в виду. Противоречие, которое вменяет мне комментатор, также построено на неверной интерпретации, а именно на ошибочном отождествлении локального и предположительного (условного). Эта ошибка является прямым следствием той ошибки, о которой я уже говорил выше, — отождествления утопии с абсолютом. Если рассуждения, подкрепляющие другие тезисы комментария, являются, как утверждает комментатор, «аналогичными», скорее всего, они также ошибочны. Впрочем, я не могу судить об этом определенно, поскольку комментатор, к сожалению, не представил их в явном виде.

В КАКОЙ МАТЕМАТИКЕ ВОЗМОЖНЫ СТИЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ?

Кричевец А. Н.

В этой работе вовсе не будет подвергнута сомнению осмысленность исследования стилей математического мышления. Было бы нелепо отрицать, что некоторые математики в большей степени склонны к «геометрическому» стилю, а другие — к «алгебраическому» стилю рассуждений (С. С. Демидов). Точно так же несомненно, что имеет смысл различение интуитивного стиля и формального стиля в математике (Л. Б. Султанова). Возможно, что эти две пары оппозиций коррелируют между собой: интуитивный стиль близок к геометрическому, а формальный к алгебраическому, и исследование корреляций также представляет значительный интерес. Надеюсь, в нашем сборнике будет немало фактического материала, касающегося эмпирически фиксируемых стилей математического мышления, как и немало серьезных размышлений над такими фактами.

Однако можно поставить и другую задачу. О чем мы говорим, когда говорим о стилях математического мышления? Какими должны быть математическое мышление и математика как таковая, чтобы можно было осмысленно говорить о стилях?

Приведу сначала один пример из работы известного швейцарского психолога Ж. Пиаже «Генезис числа у ребенка». Надо отметить, что всемирная слава психолога Пиаже свела к минимуму известность Пиаже-эпистемолога, хотя сам единый во многих лицах швейцарец (также и логик, и биолог) считал себя по призванию эпистемологом, т. е. все свои работы координировал в рамках теоретико-познавательных проблем.

Ж. Пиаже проводил следующие опыты. Его испытуемые, дети 5 — 7 лет, наблюдали различные операции с жидкостью, налитой в стаканы: жидкость разливали в два или больше стаканов, переливали из широкого стакана в узкий (тогда повышался уровень жидкости) и т.п. Пиаже описал отчетливый прогресс в осознании сохранения количества жидкости. Дети до 5 лет, перелив жидкость в более широкий стакан, утверждали, что ее стало больше или меньше, в зависимости от того, что обращало на себя их внимание — увеличение ширины или уменьшение высоты столба жидкости. Дети после 7 лет всегда утверждали равенство. Замечательны в этом случае были их аргументы: «брали из одной бутылочки», «только переливали»[1].

Пиаже подчеркивает, что и пятилетний ребенок видел, что «только переливали», но это не приводило к утверждению сохранения. Установление причинной связи между событиями «только переливали» и сохранением количества жидкости опирается на некоторую систему знаний, одним из элементов которой уже является закон сохранения. В рамках этой системы, после того как она «схвачена» ребенком в своей целостности, утверждение появляется как тривиальный акт, и ребенок часто выказывает недоумение по поводу самой постановки нелепого с его точки зрения вопроса, в то время как двумя годами ранее этот же ребенок оценивал переливание жидкостей с обычной для его возраста ошибкой.

В другом эксперименте Пиаже заменял жидкость на мелкие бусинки. Насыпанные в стакан, они занимали некоторый объем, что позволяло действовать с ними, как с жидкостями, но первоначально ребенок вместе с экспериментатором насыпал в стаканы различной формы и объема равные количества бусинок (одновременно опуская по одной в каждый стакан). Один из протоколов мы приведем полностью (сохраняя пунктуацию автора).

Ребенок по имени Баб (4 года 6 месяцев):

«Баб кладет на стол бусинку всякий раз, когда то же делает экспериментатор. «Одинаково? — Да». Затем он кладет по бусинке в стакан L, а экспериментатор одновременно — в P. В этом случае Баб непроизвольно говорит при каждой новой бусинке: «Одинаково». Но когда он доходит до десятка с обеих сторон и L наполняется наполовину, он кричит: «У меня много! — А у меня? — Но смотри. У тебя совсем мало. — Почему? — Смотри (показывает уровни).

Затем Баб кладет по бусинке в E, а экспериментатор кладет одновременно по бусинке в P. «Смотри хорошенько, будет ли одинаково у тебя и у меня. (Баб всякий раз называет число каждой совокупности.) — У меня одна и у тебя одна; у меня две и у тебя две; у меня три и у тебя три... (и т.д. до шести; стакан E заполняется тогда до краев). — Одинаково? — ... (Конфликт между видимостью и установленным соответствием.) — Если бы сделали бусы из твоих бусинок, а другие бусы из моих, то они были бы одинаковы? — Нет, у меня длиннее. — Но если бы взяли все твои бусинки и все мои? — Нет, твои не такие длинные; нужно заполнить такой стакан, чтобы получить такие же длинные бусы. — Считай. (Считает: один... шесть в E и один... шесть в P.) —

Ну и что? — У тебя маленькие бусы. — Но почему у тебя много? — Смотри, у тебя ниже, а у меня много, у меня полный»[2].

Этот пример наглядно иллюстрирует тезис Пиаже о том, что «единичная операция не является операцией... сущность операций состоит в том, чтобы образовывать системы»[3]. Пересчет бусинок, который демонстрирует Баб, на самом деле не является пересчетом, потому что не измеряет пересчитываемое множество, так как числовая мера в его случае не является заведомо стабильной. Таким образом, пересчет как таковой возможен только в рамках системы операций, включающей кроме того, как показывает Пиаже, принцип сохранения для дискретных множеств и операции над классами (отношения «больше—меньше» и взаимно-однозначное соответствие).

Пиаже считает, что системы операций, подобные системе натурального числа, отражают не реальность саму по себе, а структуру возможной деятельности человека в реальном мире. И тем не менее, эта структура не является произвольным изобретением, но возникает у любого субъекта всегда в одном и том же виде (в данном случае в виде понятия натурального числа). Приближение к такому состоянию определяется исследовательской активностью субъекта, которая задает энергетические характеристики движения (например, его скорость). Но та форма, которую примет система операций в развитом состоянии, задана заранее, поэтому ее следует рассматривать как финальную причину развития системы. Такая окончательная форма описывается знаковой структурой, в случае натурального числа — арифметической числовой системой.

Если мы будем понимать математику так, то стилям математического мышления уже не остается места. Действительно, пока отдельные мыслительные схемы не пришли во взаимозависимое состояние в рамках системы (Пиаже называет его равновесием), речь может идти только еще о недомышлении, а не о стиле мышления.

Когда же система сформировалась, интеллектуальные операции становятся формальным дедуцированием или вычислением с помощью знаковых средств. На этой стадии выделение стилей также весьма проблематично, хотя и по другой причине: вследствие жесткости формальных систем[4].

Обнаруживается странная ситуация: пока система не возникла, о стилях мышления говорить рано, поскольку мышление только нащупывает форму и может описываться только с позиций понимания этой будущей формы, которая от субъекта мышления до поры до времени скрыта; когда же мышление субъекта оформилось, его действия превратились в автоматические операции, определенные знаковой формой, поэтому о стилях говорить уже поздно.

Можно возразить, что в примере Пиаже речь идет о ребенке, а мы обсуждаем, конечно, «взрослое» мышление. Однако если говорить только о возрасте, то взрослые представители культур, стоящих на низших ступенях развития, часто совершают ошибки (ошибки с нашей, а не с их точки зрения), аналогичные детским ошибкам в нашей культуре. Например, и те, и другие не чувствительны к противоречию в собственном рассуждении[5]. Похожим образом материал статей А. А. Крушинского о китайском математическом стиле и Е. А. Зайцева о средневековой европейской геометрии также свидетельствует о том, что вопрос о маргинальных математических стилях не слишком прост (ведь не так легко отнести эти феномены к стилям «полноценной» в современном понимании математики).

Попытаемся показать теперь, что вопросы развития математического мышления в фило- и онтогенезе следует рассматривать параллельно и что затруднения, которые испытывают дети, усваивая новый (только для них) математический материал, родственны тем затруднениям, которые испытывали великие творцы этих математических достижений[6].

Заметим, что Ж. Пиаже не уходит далеко от наиболее распространенного понимания математики и, вероятно, большинство математиков-профессионалов в общих чертах с ним согласится. А именно, профессиональные математики работают со знаковыми системами, имеющими какие-то интерпретации в реальном мире. Идеальное содержание этих интерпретаций представляет собой нечто в высшей степени устойчивое, более устойчивое, чем сам изменчивый мир эмпирических явлений. Преобладающими средствами работы математиков-профессионалов являются дедукция и вычисление в рамках этих знаковых систем.

Задача математика-ученика с этой точки зрения — усвоение формальной системы (возможно, вместе с интерпретациями). Если ученик испытывает затруднения, то это лишь более или менее серьезные препятствия на заранее известном его учителям пути. Если ученик не понимает дифференциальное исчисление, то не понимает он его точно так же, как Баб в эксперименте Пиаже не понимает сохранение количеств.

Два примера, которые мы рассмотрим ниже, призваны поколебать это представление. В первом из них ученик, испытывавший затруднения, впоследствии стал крупным математиком, а его навязчивые попытки понимать дифференциальное исчисление иначе, чем предлагалось учителями, были доведены до успешного финала через несколько десятилетий и получили место в респектабельной науке.

Другой пример касается переломного момента в истории науки. Высказывания ученых в такие периоды производят временами странное впечатление, в чем-то похожее на впечатление, производимое малолетними участниками экспериментов Пиаже. Они, например, могут утверждать, что разумный человек не в состоянии поверить в действие силы на расстоянии через пустое пространство (это говорил не кто-нибудь, а сам И. Ньютон). В нашем примере математики-творцы будут демонстрировать, на первый взгляд, те же признаки отсутствия системности в их схемах, которое мы видим у детей в психологических экспериментах.

К счастью, в обоих примерах затруднения математиков легко интерпретируются на реально зафиксированных в истории математики научных альтернативах.

Итак, первый из наших примеров.

В письме М. Я. Выгодскому, опубликовавшему в то время учебник по математическому анализу, где бесконечно малые рассматривались как актуально существующие, а строгое обоснование с помощью теории пределов не давалось, Н. Н. Лузин пишет, что по общему мнению ознакомившихся с учебником математиков такой способ изложения возможен как педагогический прием, но все же не является допустимым с точки зрения строгой математической науки. Сам же Лузин придерживается иных взглядов на проблему актуально бесконечно малых величин. Он описывает в письме историю, происшедшую с ним во время обучения на втором курсе университета.

Начинает он свое изложение с очень интересного замечания: «Обычно такого рода страдания всегда тщательно скрываются и очень неохотно говорят другому о них, и то лишь в виде намеков. Не знаю, почему это так, но приходится делать над собой усилие»[7].

Далее Лузин описывает свои трудности понимания бесконечно малых, обосновываемых с помощью теории пределов. Он описывает ужас, в который повергала его кривая Вейерштрасса[8] и фиаско, которое он потерпел в беседе с профессором Б. К. Млодзеевским, пытаясь объяснить ему свою версию примера Вейерштрасса, опирающуюся на неясную интуицию актуально бесконечно малых.

Через некоторое время после драматической беседы с Млодзеевским Лузин оказался на докладе, имени автора которого к моменту написания письма уже не помнил. Докладчик свободно обращался с бесконечно малыми величинами как с обычными числами. Сидевший перед Лузиным Млодзеевский шепотом заметил своему соседу Д. Ф. Егорову, также крупному математику, что, возможно, такое обращение с бесконечно малыми можно узаконить в аксиоматическом стиле Гильберта[9], — словом, что-то в этом есть. Лузин заметил для себя разрыв между тем категорическим отвержением, которое демонстрировал Млодзеевский по отношению к актуально бесконечно малым при общении со студентом, и тем интересом, который он высказал в разговоре с коллегой, что показалось ему в высшей степени обидным.

Лузин заканчивает свое письмо следующими словами: «То, что было сделано Вейерштрассом-Кантором — это все *было* очень хорошо, и так и надо *было* делать; но совсем иной вопрос, отвечает ли это тому, что имеется в глубине нашего сознания. Я не могу не видеть вопиющего противоречия между интуитивно ясными основными формулами Интегрального Исчисления, и между несоответственно искусственной и сложной работой их “обоснования” и их “доказательства”»[10].

Интонация письма передает драматизм ситуации. Талантливый студент не мог просто выучить материал, он мог только «вновь его изобрести», но склонности будущего крупного математика двигали его, скорее, в сторону нестандартного анализа Робинсона. Описание студенческих затруднений Лузина вдвойне ценно, поскольку в момент написания письма он не мог прибавить ничего позитивного к своим студенческим интуициям, до «легитимизации» которых в математической науке (мы не говорим о полном прояснении, но анализ Робинсона дает подобным интуициям существенную опору) оставалось еще довольно много времени. Не беремся утверждать, что нестандартный анализ Робинсона исчерпал все возможности анализа актуально бесконечно малых в стиле Лейбница и может рассматриваться как финальное состояние, замыкающее линию актуально бесконечно малых величин, но, на наш взгляд, пример Лузина все же можно считать демонстрацией вариативности финальных состояний математических систем.

Этот пример показывает также, что по крайней мере в некоторых случаях педагог не столько развивает и оформляет знаковыми системами интуицию ученика, сколько ее переключает, отсекая интуитивные альтернативы, которые могут быть реализованы или уже реализованы в математике. Вероятно, авторитет учителя и представляемого им научного сообщества играет здесь ведущую роль. Именно потому так неохотно описываются обычно «такого рода страдания» (см. замечание Лузина в первых строках письма), что преподаватель обычно явно или неявно указывает ученику, что его трудности связаны с недостатком профессиональных способностей, — так и вел себя с будущим математиком профессор Млодзеевский.

Теперь второй пример — из истории математики. Как известно, в середине XVI века Виет стал обозначать буквами коэффициенты алгебраических уравнений (и ввел сам термин «коэффициент»), сделав крупный шаг к современной алгебре[11]. Однако по известной причине его коэффициенты имели размерность. Так, в квадратном уравнении коэффициент при первой степени переменной имел линейную размерность, а свободный член — размерность площади. Причина этого — инерция греческой традиции (геометрическая алгебра), в которой однородность слагаемых в уравнении была необходимым условием осмысленности выражения. Эту традицию творцы европейской алгебры должны были преодолеть и преодолели в последовавшие несколько десятков лет, в основном, усилиями Ферма и Декарта. Были ли затруднения Виета связаны с его причастностью греческой традиции (тогда, возможно, мы имеем право говорить об их «стилистической» природе), или они были трудностями рождения мысли, т. е., скорее, стадиями развития мышления, чем стилями. Стадиями, родственными стадиям развития математического мышления в онтогенезе, описанным Пиаже?

Представляется, что в данном случае трудности рождения мысли и выбор из стилистических альтернатив происходят в одно и то же время, причем не так важно, был ли Виет первым, кто решал для себя проблему отказа от однородности слагаемых алгебраических выражений, и были ли к тому времени известны греческие варианты алгебры.

Мы можем представить себе современника Евдокса, которому предложили тексты Виета, а затем задали вопрос: не следует ли отказаться от однородности слагаемых в уравнении? Вполне возможно, что ученый ответил бы отрицательно, поскольку при сохранении однородности гарантируется строгость рассуждений более высокая, чем строгость рассуждений в современной теории действительного числа (даже с точки зрения математики XX века), а альтернатива, которая была реализована в Новое время, греку, вероятно, заранее покажется сомнительной.

Но подобным образом, вообще говоря, мог поступить и Виет, и его последователи. Историческая реконструкция проблемной ситуации Виета и Декарта может объяснить, почему был сделан данный выбор, но сама возможность выбора двух различных математик не является предметом исторического исследования, она может быть *понята с помощью* истории, которая только предоставит для анализа развитые системы идей, возможно, неизвестные в момент выбора. Проблема самой по себе возможности различных путей развития математики является проблемой философии математики, а не исторической и не психолого-педагогической проблемой.

Я рискну привести теперь один пример из собственной биографии, который показывает, что проблемная ситуация XVI века на самом деле не умерла вместе с победой нововременной алгебры. Как-то на уроке математики в одном из старших классов я сделал маленькое личное открытие (точнее «закрытие»): я понял, что хотя точек на числовой прямой самих по себе, без участия масштабирующего единичного отрезка достаточно для определения сложения чисел (т. е. «сумма» двух точек зависит только от положения «нуля» на числовой прямой, но не зависит от масштаба), произведение «точек» на числовой прямой не может быть подобным образом определено прямо геометрически. Следствием этого был тот факт, что каждый раз, имея дело с геометрическим построением средних пропорциональных и другими похожими операциями, я испытывал некоторые сомнения в корректности выражений типа «квадрат длины отрезка», не видя при этом рядом единичного отрезка. Со временем мои сомнения разрешились и, разумеется, фактически средствами геометрической алгебры, но числовая прямая перестала быть для меня ясным геометрическим представлением поля действительных чисел[12]. Таким образом, нововременное изобретение, числовая прямая, сама по себе навела меня на мысль, свойственную, скорее, греческой математике. Поскольку же в те времена я не имел никакого представления об истории математической науки, то можно сделать вывод, что разнонаправленные мыслительные ходы (осуществленные когда-либо в истории, но также и никогда не осуществленные и ждущие своего часа) потенциально доступны математическому субъекту любого исторического периода, что проблема, которую решал Виет, стоит, если можно так выразиться, перед трансцендентальным математическим субъектом.

Сравнение теперь затруднений математиков разного уровня и разных эпох позволяет сделать следующие выводы:

1) положение «точки ветвления Виета» является межпарадигмальным: в нем возможно движение от геометрической алгебры к аналитической геометрии и алгебре, но также и в противоположном направлении;

2) чтобы вполне понять альтернативные ходы мысли, надо узнать некоторые финальные состояния науки, преемственные по отношению к ним;

3) эти ходы мысли могут быть воспроизведены и поняты в каком-то не вполне ясном виде даже и в отсутствие такого финального прояснения.

Представляется, что рассматривая именно такие периоды развития математики, когда происходит изобретение новых математических структур, мы можем говорить о стилях математического мышления. Остается выяснить, как часто такие периоды наблюдаются. Предполагаемый вывод таков: других периодов просто не бывает, вся остальная деятельность, если можно так выразиться, — вершки, основные же плоды деятельности математиков суть подземные и труднообнаруживаемые корнеплоды, которые вызревают в темноте недопонимания.

В самом деле, разве Виет в упомянутый период занимался не вычислениями и дедукциями? Разве его результаты в корне отличаются от продукции, которую порождают современные нам профессионалы? Разве сумма корней уравнения не осталась таковой, а решение уравнения в радикалах (как бы трудно ни было записать и уравнение, и решение в неуклюжей знаковой форме того времени) не осталось решением до наших дней? Разумеется, можно найти массу различий в стилях профессиональной жизни математиков разных исторических периодов, но дело не в этом. Существенно, что профессионалы лишь в малой степени осознают, чем в действительности они занимаются. Виет не смог бы оценить свои достижения как шаги на пути к созданию теории действительного числа, он просто не знал такого понятия.

Однако тот стиль употребления алгебраических знаков, к поддержанию и развитию которого Виет приложил свою руку, неминуемо вел именно к такому понятию. Виет работал со своими знаками, вычислял и дедуцировал с их помощью новые результаты, но реальным результатом его деятельности было продвижение в знаковой системе, которое и было подхвачено последователями.

Было бы в высшей степени странно, если бы в XVI веке математика жила по одним законам, а в XX — по другим. Совершенно естественно, что вычисляя и дедуцируя, современные математики делают и нечто совершенно пока непонятное, поскольку те системы, в свете которых мы могли бы понять их главную, и что весьма существенно, коллективную, а не индивидуальную работу, так же неизвестны нам и им, как действительное число Виету.

Надо признать, что получается довольно странное и даже, быть может, противоречивое описание. В самом деле, с одной стороны, Виета можно понять лишь «с высоты» современного действительного числа и связанной с ним алгебраической символики. С другой стороны, само это понятие и сама эта символика вовлечена в деятельность, чей предмет станет вполне понятен когда-то потом, когда прояснится некая структура, которая вызревает в коллективной деятельности математиков. Но тогда и понятие действительного числа может измениться. В предельном случае оно может быть даже отвергнуто, например, вследствие каких-то новых проблем с теорией множеств. Но тогда должно измениться и наше понимание работ Виета.

В таком случае, деятельность философов и историков математики выглядит, может быть, еще более странно, чем деятельность самих математиков. В самом деле, не придется ли переписывать историю математики всякий раз, когда в современной историку и философу математике происходят серьезные подвижки, — примерно так, как переписывало историю министерство Правды в известном романе Оруэлла?

Возможно, именно так дело и обстоит[13]. Теорема Виета о соотношении корней и коэффициентов уравнения представляет собой идеальный предмет, доступный всякому, кто прошел некоторый путь математического образования. Но смысл деятельности Виета, когда эта теорема была им доказана, не является столь же легко фиксируемой идеальностью, как само утверждение его теоремы. Как мы стремились показать, предметом деятельности Виета было создание контекста, в котором мы сейчас, благодаря достижениям Виета, Декарта и Ферма, понимаем его теорему, — контекста современной алгебры. Но, вопреки мнению Пиаже, этот контекст (т.е. система, в рамках которой понимаются вовлеченные в доказательство теоремы алгебраические операции) сам находится в развитии и не может быть схвачен ни в какой конечный момент времени. Поэтому и попытки, подобные предпринятой Э. Гуссерлем попытке описать «изначальнейший смысл, в каком геометрия некогда возникла и с тех пор существует в своей тысячелетней традиции»[14], не могут быть успешны ни для геометрии, ни для иных дисциплин.

Неуловимый смысл текущей деятельности математиков затвердевает и осаждается в будущей математике в виде утверждений и, что еще важнее, формулировок и формализаций, приводящих к концептуальным сдвигам, но затвердевает и осаждается он всегда лишь частично, оставляя в тени этих хорошо заметных математических «предметов» смыслы, которым предстоит проявиться в будущем. Отвечая на вопрос, поставленный в заголовок статьи, мы можем сказать теперь:

Стили математического мышления возможны в математике концептуальных формулировок и целеполагания (сознательного, но в особенности неосознаваемого), а не в математике утверждений. Различные цели и смыслы, пока они не достигнуты и не реализованы, будут выглядеть для нас как некоторые неконцептуализируемые в рамках современной им математики особенности деятельности, которые мы с полным основанием можем назвать стилями.

При этом не будем забывать, что математика исторически может быть выведена лишь из не-математики, причем безразлично, рассматривать ли историю идей как фактическую или как трансцендентальную (в духе Э. Гуссерля), описывающую сущностные сцепления и последовательности мысли. Тогда мы обязаны каким-то позитивным образом описать и понять затруднения пятилетних испытуемых Ж. Пиаже и индейцев-информантов Л. Леви-Брюля, понять их как бы изнутри, как мы можем понимать идеи греческих математиков. По отношению к детям и первобытным «математикам» это выглядит тем в большей степени проблематично, чем в более ранний возраст или исторический период нам надлежит «перенестись».

Соображения единообразного описания заставляют сделать еще одно замечание. Вполне возможно, что с позиции какой-то исторически гораздо более зрелой математики наши стили математического мышления (например, геометрический и алгебраический) все же окажутся близки по сути к предпочтениям ширины или высоты стакана при оценке объема сосуда, как в том случае, который описывал Ж. Пиаже. Принципиальную возможность такого поворота истории нельзя отвергнуть.

Примечания

[1] *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М., 1969. С. 267.

[2] Там же, с. 277.

[3] Там же, с. 93.

[4] Заметим, что для Пиаже интеллектуальные операции не исчерпывают содержание деятельности интеллекта. Операции в рамках системы выполняются, можно ска-

зать, автоматически. Но возникают системы операций, как пишет Пиаже, только в процессе функционирования интеллекта. Эту способность интеллекта «изобретать» системы Пиаже считает врожденной и остающейся неизменной на протяжении жизни индивида.

[5] *Леви-Брюль Л.* Первобытное мышление. М., 1930.

[6] По отношению к буквенной алгебре этот тезис сформулировал Мордухай-Болтовской (*Мордухай-Болтовской Д. Д.* Первые шаги буквенной алгебры // Труды СКГУ. Т. 28. С. 68).

[7] Два письма Н. Н. Лузина М. Я. Выгодскому / Публикация *В. А. Волкова* и *С. С. Демидова* // Историко-математические исследования. М., 1997. Вып. 2 (37). С. 134.

[8] Это известный пример функции всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой. Пример действительно вступает в конфликт с исходной интуицией функции.

[9] Именно это и сделал впоследствии Робинсон в нестандартном анализе.

[10] Два письма Н. Н. Лузина М. Я. Выгодскому. С. 148.

[11] *Юшкевич А. П.* (ред.). История математики от древнейших времен до начала Нового времени. М., 1970. С. 305.

[12] Проблема, как она выглядит «задним числом», состоит в том, что либо «квадрат длины» должен пониматься как «плоское число» в стиле греков (и тогда геометрические теоремы о перемножаемых длинах вполне корректны), либо как линейное действительное число, являющееся квадратом другого действительного числа (но тогда следовало явно доказывать независимость соотношений теоремы от выбранного масштаба). Такого доказательства не было дано. Надо заметить, что это доказательство утяжеляет рассуждения настолько, что с эстетической точки зрения греческая числовая система в этом контексте кажется мне более предпочтительной.

[13] Подробнее о невозможности точной фиксации финальных уровней развития мы писали в нашей книге (*Кричевец А. Н.* Априорность и адаптивность. М., 1998).

[14] *Гуссерль Э.* Начало геометрии. М., 1996. С. 211.

КОММЕНТАРИИ

С. Н. Бычков

Обобщающее заключение «стили математического мышления возможны в математике концептуальных формулировок и целеполагания... а не в математике утверждений» показывает, что «вторая математика» рассматривается автором как относительно самостоятельное образование. Она не зависит от особенностей философских и методологических воззрений ученых, *результаты* деятельности которых и составляют ее содержание, но сама эта деятельность протекает в «первой математике» и подвержена мощному воздействию бурного потока жизни. В качестве примера при этом рассматривается теорема Виета, чисто математическое содержание которой инвариантно по отношению к концептуальным формулировкам и сознательному или неосознаваемому целеполаганию любого образованного читателя. Так ли уж очевидно, однако, последнее утверждение?

Соотношения

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$$

для корней приведенного квадратного уравнения, изучаемые в средней школе, вовсе не так просты для понимания, как это может на первый взгляд показаться. Легче всего в этом убедиться, попросив сильного ученика восьмого класса объяснить теорему Виета любознательному «подшефному» третьекласснику. Довольно быстро старший обнаружит, что хотя смысл соотношений его младшему товарищу уяснить вполне по силам, *вывод* их доступным для того образом он изложить совершенно не в состоянии. Восьмиклассник просто *привык* оперировать соответствующими соотношениями, но подлинного их понимания у него, конечно, нет, как нет его и у подавляющего большинства выпускников средней, да и высшей школы. На самом деле видимость понимания теоремы держится на том обстоятельстве, что для уравнений типа $x^2 - 6x + 8 = 0$ с целыми положительными корнями теорема действительно выглядит очевидной, а на уравнения с произвольными вещественными корнями она переносится по аналогии. Иными словами, очевидность теоремы Виета держится не на строгости понятий, а на наглядности представлений.

Строгое ее доказательство в общем случае предполагало бы доказательство свойств арифметических операций над произвольными вещественными числами, а также, в конечном счете, и над исходными натуральными числами. Пуанкаре показал, с какими сложностями связано последнее. Трудности, выявившиеся в ходе развития метаматематики, позволяют констатировать, что абсолютно строгого *чисто словесного* доказательства теоремы Виета не существует и поныне. В отсутствие подобного доказательства неизбежно придется обращаться к какому-то внешнему критерию наподобие «интуиции» или «опыта», что автоматически приведет к размыванию границы между математикой теорем и математикой деятельности по получению новых и «транслированию» классических результатов.

Противопоставление конечных результатов процессу их получения возможно лишь в предположении об особом, «идеальном» статусе математических объектов, «спокойное существование» которых не зависит от превратностей быстротекущей человеческой жизни. Сами математики, подобно Г. Вейлю, могут быть подвержены влиянию философской и методологической моды, однако на «массового» потребителя результатов математического творчества это не может оказать какого-либо существенного влияния. Инерция коллективно созидаемого «математического механизма» столь велика, что последний обладает своими собственными законами функционирования, на который даже «метаматематические» усилия ученых ранга Пуанкаре, Гильберта и Брауэра не способны оказать решающего воздействия. В этом бесспорном факте истории математики XX столетия и кроется, видимо, основа развиваемой А. Н. Кричевцом концепции. Если же обратиться к более глубоким пластам истории, то мы увидим, что идеальный статус математических объектов присущ только европейской математике. Тщетно было бы искать каких-то особых математических объектов, противостоящих чувственно воспринимаемой действительности, в математике средневековых Индии и Китая. По этой причине задачи, решаемые древними и средневековыми восточными математиками, и деятельность по их решению находились в одном и том же пространстве, принадлежали одной и той же математике.

В XX веке не существует отдельных национальных математик с точки зрения характера изучаемых ими математических объектов: «европейская математика» даже на уровне школьного образования вытеснила национальные традиции преподавания там, где они существовали многие и многие века, и невозможно себе представить, что когда-либо будет осуществлен возврат в прошлое. Математика, как и наука вообще, стала единым мировым целым, и изменения в ней в будущем возможны опять-таки только на глобальном, а не локальном уровне. Но это не означает, что рефлексия современной теоретической математики освободилась полностью от предшествующих исторических наслоений и что философия математики не в состоянии их выявить и «ввергнуть» математическое сообщество «в состояние рефлексивного поведения». Какими последствиями это чревато для математики, проанализировано в заключительных главах монографии А. Г. Барабашева «Будущее математики».

Осмысление причин противоположности статуса математических объектов в греческой и восточной математиках может в результате дать аргументы как в пользу анализируемой концепции, так и в пользу вышеизложенной альтернативы. В случае, если история науки «выскажется» в пользу обусловленности изолированного существования абстрактных математических объектов сугубо социокультурными факторами, вполне может оказаться, что в примере с Виетом мы имеем дело не с исчерпывающей все возможности логической дилеммой, подлежащей ведению «аисторичной» философии математики, а лишь с ограниченными современным историческим горизонтом возможностями, к которым может быть в будущем добавлено и какое-то принципиально иное понимание теоремы великого французского математика.

Резюмируя: не является ли развиваемая в статье концепция отражением европейского стиля математического мышления?

Г. Б. Гутнер

Работа А. Н. Кричевца разворачивает весьма захватывающую историческую перспективу развития математики, вызывающую смутную реминисценцию с гегелевской «Феноменологией духа». Всякая мыслительная активность оказывается интересна не сама по себе. Истина есть целое. Каждая решенная задача есть лишь шаг в становлении теории, и смысл решения проясняется не его творцом, но отдаленными потомками, могущими разглядеть усилия своего предшественника в контексте развитого (точнее — более развитого) знания. Именно в нем все предшествующие ходы мысли обретают подобающее им место.

В таком подходе важно выделить две позиции. Математик, решающий задачи (создающий теории), явно должен быть различен с наблюдателем, оценивающим место его (математика) усилий. Математик живет действующей мыслью. Наблюдатель схватывает теорию в «ставшем» состоянии. Оценка требует момента остановки. Действие подразумевает погруженность в дление. Сказанное не значит, конечно, что действующий математик и оценивающий наблюдатель — это непременно два разных человека. Это две разные когнитивные роли, исполнение которых предписывает различное отношение к знанию.

Следует заметить, что позиция наблюдателя не абсолютна. Он расставляет все по своим местам лишь в меру открытого ему знания. Дело даже не в том, что через некоторое (после сделанной кем-либо оценки) время математика уйдет далеко вперед и всем прежним математическим результатам будет придан иной смысл и иной статус. Дело еще в том, что наблюдатель — это все же не гегелевский абсолютный дух, которому в каждый момент его развертывания доступна все полнота достигнутого (им же самим) знания. Перспектива наблюдения ограниченна, оценивающий взгляд неполон, и представленная картина ставшей математической теории есть лишь фрагмент, частичный образ возможного целого. В другой момент и в другом месте этот образ может быть иным.

Но такой же точно (по степени общности) фрагмент может наблюдать и современник — многовековая дистанция не обязательное условие оценки. Всякий наблюдатель занят именно тем, что собирает в единую картину доступные ему математические результаты и устанавливает смысл и место каждого из них. Конечно, я (знакомый с теорией действительных чисел) соберу эту картину иначе, чем современник Виета (или, кстати, сам Виет). Но мое образование очень неполно, и в чем-то образованный современник Виет поймет его гораздо лучше, чем я. Важно, что мы оба займем одну и ту же позицию по отношению к математическому знанию: мы будем рассматривать его в остановленном состоянии. Все это не имеет никакого отношения к эпохе.

Мне кажется, что возможность стиля определена именно такой позицией, а не временной дистанцией. Стиль невозможен для наблюдателя, имеющего дело с завершенной картиной. Стиль есть удел действующего математика, для которого теория находится в становлении.

А. В. Родин

Между ростом ребенка и ростом знания, в том числе математического, есть различие, которое существенно ограничивает аналогию между ними. Ребенок растет, пока не станет взрослым (взрослого можно определить как индивида, способного вырастить ребенка). Таким образом, рост ребенка предполагает не только последовательность стадий роста, но и фиксированную цель роста. В экспериментах с детьми, о которых говорит А. Н. Кричевец, взрослый присутствует в качестве экспериментатора. С другой стороны, знание (по крайней мере в том смысле этого слова, в котором математику в целом называют знанием) завершить, очевидно, нельзя. Даже если представить себе печальную ситуацию, когда никто не способен сформулировать ни одной нетривиальной математической проблемы (что, вероятно, имело место в периоды упадка математики), все равно не будет никаких оснований утверждать, что постановка нетривиальной проблемы невозможна в будущем. Поэтому хотя и можно говорить о более ранних и более поздних стадиях развития знания подобно тому, как говорят и о более ранних и более поздних стадиях роста ребенка, уподобление различных периодов развития науки юности, зрелости и т.д. не имеет смысла. Если настаивать на указанной аналогии и сказать, что знание является, образно выражаясь, вечным ребенком, который растет, но никогда не вырастает, это будет точнее, но также не вполне точно, поскольку даже если ребенок не дорастает до взрослого состояния, его рост все равно предполагает такое состояние. Рост науки может прекратиться, и, разумеется, наука вообще может исчезнуть, но пока наука существует, она может расти, причем непредсказуемо. Последнее утверждение, кстати, никак не зависит от того, является ли рост науки детерминированным или же наука допускает различные возможные варианты развития.

Я согласен с автором в том, что стили в математике — это своего рода непроясненные и неформализованные понятия. И, разумеется, может случиться, как предполагает А. Н. Кричевец, что что-то из того, что мы сегодня называем математическими стилями, в будущем можно будет интерпретировать как частные предварительные подступы к новой теории. Это произошло, например, с ньютоновским и лейбницевским стилями математического анализа после появления работ Коши и Вейерштрасса. Однако чтобы составить правильную картину того, как развивается математика, необходимо посмотреть еще на один шаг вперед. Вполне возможно, что на следующей стадии развития ранее «снятое» различие возникает вновь. Это действительно произошло, когда в 60-е годы нашего века идеи Лейбница о бесконечно малых величинах возродились в нестандартном анализе Робинсона, а в 70-е годы идеи Ньютона о флюентах возродились в теории топосов Гротендика-Лоувера. В этом нет ничего удивительного, если иметь в виду, что всякое обобщение и прояснение теоретических интуиций обобщает и проясняет их некоторым определенным образом, всегда оставляя место для других обобщений и прояснений. Отсюда опять-таки не следует, что история математики могла идти по-другому: во всяком случае трудно представить себе, как нестандартный анализ и теория топосов могли бы возникнуть в XIX веке. Я говорю только о том, что последующее развитие математики может вновь актуализировать старую проблематику, которая раньше казалась закрытой.

Более того, мне кажется, что часто происходит обратное тому, о чем говорит А. Н. Кричевец: не стили превращаются в понятия, а понятия превращаются в стили. Так, например, теоретические построения Гильберта дали жизнь тому, что теперь называют аксиоматическим стилем в математике. Работая в аксиоматическом стиле, математик может не думать о глобальном гильбертовском проекте аксиоматизации всей математики и не отвечать за фундаментальные трудности этого проекта, а применять аксиоматический метод локально как возможную технику математических рассуждений. Это можно расценить как регресс, однако если бы математики не допускали такого регресса и работали по принципу «все или ничего», то гильбертовский проект уже давно был бы достоянием историков и у работающих математиков не было бы шанса к нему вернуться.

ОТВЕТ АВТОРА

С. Н. Бычков разглядел и поставил под вопрос самое ядро излагаемой в статье концепции. Действительно, цель статьи показать возможность вариантов развития, но именно обозримых (по количеству) дистинктных вариантов, а не бесформенного облака неструктурированных возможных мыслительных ходов. Претендую ли я здесь на «аисторичность»? Вовсе нет. Я утверждаю только, что за «системами», «гештальтами» и прочее маячит вопрос, от которого невозможно уйти в социокультурную философию. Подобные понятия отражают реалию деятельности математиков — некоторое «ага» изобретателя. (Я думаю, что наилучшим примером такого «системного гештальта» может служить специальная теория относительности, которая пришла в голову одному человеку в довольно сжатые сроки. В большинстве же случаев такие процессы растягиваются в поколениях исследователей.)

Однако я вовсе не утверждал, что такие системы суть неизменные математические объекты, познанием которых занимается математика. Здесь я предлагаю читателю обратиться вновь к комментарию Г. Б. Гутнера, с которым я полностью согласен. Описываемые Пиаже системы, с моей точки зрения, суть некоторые точки сгущения в пространстве возможных состояний математического знания. Можно было бы сказать, что знаковая форма их только именует, если бы она не несла в себе значительное содержание. Содержание это заключено в возможности синтаксических преобразований, которые всегда отражают какую-то часть любого понимания данной области любым математиком, ей овладевшим, но никогда не исчерпывают его. Возможно, другие системы со временем примут в себя и другие «части» возможного понимания.

Можно ли понять прямо сейчас такие, пока «неопредмеченные» математические идеи? По крайней мере, можно быть ими захваченным, но этот «захват» осуществляется в совместной деятельности математиков, а не определяется текстами и даже знаковыми системами в целом. Поэтому математика всегда, пользуясь формулой С. Н. Бычкова, «вторая математика» (и для нас, и для древних индусов), а первая может служить только опорой: для современника, чтобы позволить себя «захватить», а для историка, чтобы используя внешние для математики данной эпохи сведения, в том числе и более позднюю математику, попытаться сказать нечто об этих идеях.

Что касается вопроса А. В. Родина о правомерности сопоставления науки в целом и отдельного ребенка, то надо заметить, что речь в статье идет вовсе не о ребенке, которому предстоит стать взрослым, подобным его воспитателям. Можно было бы сказать, что речь идет об «абсолютном» ребенке, которому непременно предстоит превзойти своего воспитателя (если считать прогрессом процесс, который ведет от древнеегипетской математики к современной). Говорить о «цели роста» (А. В. Родин) такого ребенка, разумеется, невозможно.

Говоря о вариативности развития, я не утверждаю, что история могла идти по-другому (А. В. Родин). Если в некой области имеется сеть водных путей, то описываемая географом вариативность перемещения лодки в этой области означает лишь ограниченность ее возможностей. Если лодка переместилась из пункта А в пункт Б, то вопрос об исторических альтернативах такого события географом не ставится. Моя концепция даже «мягче», чем география, поэтому я не принимаю упреков С. Н. Бычкова в том, что совершаю ошибку абсолютизации идеального математического объекта.

Последнее замечание А. В. Родина указывает на открытый вопрос, который я возвращаю его автору. Если аксиоматический метод Гильберта применяют, ничего не достигая в результате, то, с моей точки зрения, этот предмет, называй его стилем или как-то иначе, не имеет большого значения. Если же результаты достигнуты, то они скажут об аксиоматическом «стиле» больше, чем, возможно, подозревал сам Гильберт.

3 Зак. 3711

РОЛЬ ИНТУИЦИИ И НЕЯВНОГО ЗНАНИЯ В ФОРМИРОВАНИИ СТИЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Султанова Л. Б.

Результатом работы математика вне зависимости от стиля мышления являются доказательные рассуждения. Но доказательство как процесс — опять же вне зависимости от стиля мышления — не обходится без участия и некоторых нерациональных моментов. У А. Пуанкаре мы встречаем выражение «математическое творчество»[1]. Он и Ж. Адамар в своих философско-математических исследованиях много внимания уделяли именно творческой стороне математического мышления. Исследуя процесс математического открытия, Ж. Адамар выделил ряд его основных этапов[2]. Первый этап – это «подготовка», когда происходит осознанное исследование проблемы; второй этап — «инкубация», когда проблема как бы вытесняется в подсознание и исследователь может вообще забыть о ней; третий и центральный этап — «озарение», когда решение проблемы вдруг неожиданно «прорывается» в сознание (иногда этот этап сопровождается психологическим предчувствием); и последний, заключительный этап проверки и теоретического оформления результатов.

Движущей силой творческого процесса в математике является интуиция — особая способность мышления к неосознанным, как бы свернутым умозаключениям, которые затем логически, дискурсивно необходимо как бы развернуть. Разумеется, развернуть мы можем только само умозаключение, а не деятельность интуиции как таковую. Мы не можем алгоритмизировать ее прежде всего потому, что она полностью скрыта в подсознании, и мы осознаем только ее результаты.

В настоящее время выяснено, что на этапе инкубации, предшествующем озарению, неосознаваемые образы могут трансформироваться в так называемое *неявное знание*[3]. В результате озарения это неявное знание может быть вербализовано и затем преобразовано посредством дискурсивных рассуждений в явное математическое теоретическое знание, выраженное непосредственно в символах и терминах математики.

Роль интуиции в математическом творчестве очевидна. Без ее участия невозможно ни одно хоть сколько-нибудь крупное математическое открытие. Вообще решение любой задачи, выходящей за рамки тавтологии, непременно содержит в себе интуитивный элемент. Его присутствие всегда психологически ощутимо, поскольку утверждение предшествует собственно доказательству. Математик сначала формулирует на основе результатов работы интуиции некоторый вывод, а затем уже обосновывает его на языке математической теории.

Можно предположить, что вследствие такого статуса интуиции в математическом исследовании, а также ее личностного характера[4], особенности деятельности интуиции и будут определять в основном стиль мышления того или иного математика. В этом смысле мы можем говорить о более или менее интуитивном стиле математического мышления, то есть о математиках-интуитивистах и о математиках-рационалистах, или, следуя А. Пуанкаре, математиках-аналитиках. По-другому он их называет соответственно геометрами и логиками[5]. К первым А. Пуанкаре причисляет Ли и Римана, ко вторым — Эрмита и Вейерштрасса. Очень высоко редкостную математическую интуицию Римана оценивает и Ф. Клейн[6], при этом он отмечает ведущую роль интуиции в математическом исследовании.

Дадим здесь краткую характеристику аналитического и интуитивного математического мышления. Говорят, что математик обладает интуитивным стилем мышления, когда, работая долго над проблемой, он неожиданно получает решение, которое он еще формально не обосновал. Интуитивисту также присуща способность быстро делать очень удачные предположения о том, какой из подходов к решению задачи окажется наиболее эффективным. В противоположность аналитическому интуитивное мышление характеризуется тем, что в нем отсутствуют четко определенные этапы. Оно основано на свернутом восприятии всей проблемы сразу. Человек получает ответ, который может быть правильным или неправильным, мало осознавая при этом процесс, посредством которого он получил этот ответ. Обычно интуитивное мышление осуществляется в виде скачков, быстрых переходов, с пропусками отдельных звеньев в процессе решения. Эти особенности требуют проверки выводов аналитическими средствами.

Аналитическое мышление позволяет отчетливо выразить отдельные этапы в процессе решения задачи и кому-либо рассказать о них. Оно может принимать форму отточенного дедуктивного рассуждения, в котором используется логика и которое имеет четкий план. Интуитивное и аналитическое мышление дополняют друг друга.

Разница в стилях мышления интуитивистов и аналитиков очевидна, хотя и те, и другие выдающиеся ученые-математики. Тем не менее, А. Пуанкаре совершенно определенно утверждает, что не только интуитивистами, но и логиками управляет интуиция — некоторая особая чисто математическая интуиция чистого числа. Она помогает увидеть скрытые аналогии, что в математике играет зачастую решающую роль, и затем уже продуктивно воспользоваться аксиомой математической индукции. Поэтому, как считает

А. Пуанкаре, аналитики — искусные мастера силлогизма. Интуиция чистого числа, им свойственная, не является чувственной, и поэтому аналитики почти не ошибаются. Но именно такой стиль математического мышления по-настоящему уникален. Аналитики-творцы очень редки. Так оценивает роль интуиции в формировании стиля математического мышления А. Пуанкаре[7].

Здесь возникает законный вопрос: насколько далеки друг от друга эти два вида интуиции? И правомерно ли вообще аналитикам приписывать какую-либо интуицию? Ясно одно: в действиях аналитиков мы видим не одну только логику. Ведь прежде чем мы сможем применить аксиому математической индукции, необходимо «увидеть» некоторую скрытую аналогию. А при этом выход за рамки тавтологии и дискурсии неизбежен.

А. Пуанкаре оставляет открытым этот вопрос, настаивая лишь на незаменимости термина «интуиция». Другой исследователь научного творчества М. Полани считает, что в любом случае, в том числе и для аналитиков, необходимо преодоление логического разрыва, а значит, необходимо присутствие интуитивных элементов[8]. Этот свой вывод М. Полани обосновывает построением аналогии между так называемой геделевской процедурой и правилами открытия, выработанными А. Пуанкаре. Геделевская процедура заключается в прибавлении формально неразрешимого в какой-либо богатой системе высказывания в качестве независимой аксиомы. Напомним, что истинность геделевского высказывания не может быть проверена в рамках существующей аксиоматической системы. Эта система может, по Геделю, все время таким образом пополняться. При этом не может быть создана универсальная система аксиом, не нуждающаяся в дополнении. Это вытекает из теорем Геделя по следствию, называемому теоремой Геделя о неполноте[9]. Открытие, по А. Пуанкаре, совершается по принципу аналогии и далее опирается на аксиому математической индукции. При этом каждая последующая теорема есть следствие предыдущей. В заключение остается повторить все эти действия в обратном порядке. Теперь, если учесть, что в геделевской процедуре включение новой аксиомы обосновывается личностными суждениями, поскольку новая аксиома независима по отношению к уже имеющимся, можно сделать вывод о правомерности построенной аналогии[10].

Другим фактором, существенно влияющим на формирование стиля математического мышления конкретного математика, можно назвать *неявное знание*. Это то знание, которым мы пользуемся неосознанно. Можно принять, что оно представляет собой результат неосознанного умозаключения. Вследствие неосознаваемости этого знания математик, вне зависимости от стиля мышления, не может включить его в доказательство, хотя оно незримо там присутствует в качестве скрытых лемм. Например, доказательство того, что всякое замыкание делит плоскость в точности на два множества точек, и что переход из одного множества в другое обязательно связан с пересечением границы между ними, даже в самом упрощенном виде не предусмотрен в аксиомах Евклида, хотя эта операция там встречается буквально сплошь и рядом. Чтобы убедиться в этом, достаточно открыть любой учебник по геометрии. Знакомство с теорией множеств, где означенное утверждение доказывается, в школьной программе не предусмотрено[11].

Далее, в доказательстве методом от противного неявно используется закон исключенного третьего и закон противоречия. Это вообще относится ко всем законам логики. До известных пределов это не так уж важно, однако в конце концов были обнаружены парадоксы математики, которые впоследствии пытался преодолеть интуиционизм, предлагая свою логику, в которой, в частности, нет места закону исключенного третьего. Заметим, что такова особенность неявного знания вообще: до известного момента его не замечают, а как только оно становится знанием явным, оказывается, что его обоснование проблематично.

Вообще все неявное знание, присущее отдельной личности, многослойно и неоднородно. В целом оно опирается на так называемый комплекс неосознанных ощущений, определяющийся психологией личного восприятия. Поэтому неявное знание личностно, то есть целиком связанно с индивидуально-психологическими особенностями личности.

Априорное знание также представляет собой часть неявного знания. Как это показал еще И. Кант, математика как наука построена на прочном фундаменте этого априорного знания, которое носит доопытный характер. Вначале формируется слой неявных онтологических предпосылок, относящихся к пониманию мира в целом. В частности, это представление о трехмерности пространства, о единстве мира. Неявные онтологические предпосылки представляют собой фундамент для формирования знания конкретной личности вообще, в том числе и математического. Затем начинается формирование слоя неявного априорного знания, имеющего особое значение именно для занятий математикой. Это неявное знание имеет вид неформализуемых в математике понятий, таких, как количество, множество, непрерывность, дискретность. Строго говоря, понятия эти, опять-таки, не только математические, но и онтологические, так как необходимы для нормальной ориентации человека во внешнем мире. В дальнейшем, по-видимому, происходит формирование образов чисел от нуля до девяти включительно, а так же простейших образов геометрических фигур, в том числе и пространственных. Также на этом уровне закладывается представление об основной математической операции сложения. Мы видим, насколько велика роль априорной составляющей неявного знания именно в математике. Да это и не удивительно — ведь математика наиболее тесно связана с умственной деятельностью и особенностями мышления. Важно то, что априорное знание, несмотря на всю свою личностность, интерсубъективно. Это объясняется очевидностью общности анатомических и физиологических особенностей субъектов познания, а также сходностью протекания психологических реакций.

Итак, весь этот комплекс неявного знания необходим для выполнения простейших математических действий. А все умения и навыки, присущие личности, базируются наряду с осознанным, алгоритмизированным знанием на знании неявном, представляющем собой личностный опыт освоения математики и передающимся во время обучения. Если индивидуально-психологические особенности личности не способствуют успешному освоению чужого опыта, а значит, и формированию своего — как неявного — личностного знания, то и обучение в целом вряд ли будет успешным. Это следует из теории неявного знания М. Полани[12].

Неявное знание как априорное и как опыт математического мышления в основном и составляет предпосылки, необходимые для формирования определенного стиля математического мышления. Можно сказать, что неявное знание и представляет собой тот инструмент, при помощи которого или, точнее, которым и осуществляется в дальнейшем само математическое исследование. Это именно та основа, на которой и формируются предпосылки, составляющие костяк метода, позволяющего получить теоретические утверждения, которыми, по выражению М. Полани, наполнены учебники[13]. Необходимость неявного знания объединяет и интуитивистов и аналитиков.

Неявное знание с трудом поддается не только алгоритмизации, но и простейшей вербализации. Наряду с априорным знанием оно включает в себя также нерационализированные результаты работы математической интуиции, в своем роде издержки математического мышления. Это объясняется тем, что не все неявное знание может «проявиться». Некоторая его часть так и не может «пробиться» из области подсознания. Там это остаточное неявное знание может вступить во взаимодействие с неявным знанием, уже накопленным личностью. Это чаще всего происходит в так называемых пограничных состояниях — во время засыпания или вообще во сне. Мыслительный процесс практически никогда не прекращается. Все неявное знание как таковое можно рассматривать как материал для мыслительной деятельности математика, как источник гипотез. Ведь неявное знание через комплекс неосознанных ощущений напрямую связано с областью бессознательного и поэтому обладает значительной эвристической мощностью. Понятно, что чем более мощным слоем неявного знания обладает математик, тем больше оригинальных идей он может высказать. В итоге сложнейшей интеграции встраивания остаточного неявного знания в неявное знание, уже существующее, неожиданно, как бы сами собой могут решаться давно забытые задачи. Накапливаясь, нерационализированные издержки работы интуиции могут породить путаный, непоследовательный стиль математического мышления. Даже у сильных математиков часть продуктов деятельности математической интуиции остается нерационализированной и как бы «застревает» в подсознании, иногда становясь помехой мыслительному процессу и осложняя его. В отдельных случаях может возникнуть иллюзия доказательства. Видимо, это и происходит в основном в случаях получения все новых «доказательств» теоремы Ферма.

Такое неявное знание в математике представляет собой скрытые леммы или определения, имеющие вид аксиом, как, например, постулат параллельных до открытия неевклидовой геометрии.

Понимание того, что неявное знание в математике действительно существует и играет важнейшую роль, пришло в математику только в нашем столетии, при попытках перестройки математики на единой аксиоматической основе. Выяснилось, что многие доказательства некорректны из-за наличия явно не сформулированных, недоказанных или ложных посылок. Для повышения уровня математической строгости необходимо указанные посылки выявить и обосновать. Без решения этой проблемы формализация доказательств невозможна, в том числе и с помощью компьютера[14]. Математическая логика как относительно новая область математики также занимается обоснованием важных методов доказательства математики, считавшихся ранее эвристическими и входивших в неявное знание. В качестве примера здесь может быть рассмотрен такой интересный и распространенный метод математического доказательства, как метод интерпретаций, имеющий весьма богатую историю[15]. Практически все серьезные математические методы прошли извилистый и долгий путь от неявной эвристики до строгих теоретических утверждений. В этом смысле вся история математики может рассматриваться как история рационализации ее неявных методов и предпосылок, ранее составлявших личностную компоненту математического знания и в результате исторического обоснования преобразовавшихся в строгие математические утверждения.

Важность неявного знания в математике обусловлена также высоким уровнем абстрагирования, присущим математике вообще и математике современной в особенности как преимущественно науке об абстрактных структурах. Здесь речь идет о необходимости постоянного осуществления математической символизации, которая заключается в отождествлении определенного феномена реальности с некоторым математическим символом. Известно, что «исходные» математические символы «держатся» на априорном знании, о чем более подробно говорилось выше. Поэтому кажущаяся очевидность и легкость этой символизации не должна никого вводить в заблуждение. А когда речь идет о математических абстракциях более высокого уровня, значительно удаленных от первоначальных математических объектов, ситуация еще более осложняется. Это связано с возникновением так называемого неявного *коэффициента математической символизации,* который через неявное знание и далее через область бессознательного должен связывать абстракцию математики с реальностью. Разумеется, это объяснение несколько схематично. Причина здесь в том, что эти связи глубоко личностны и составляют часть неявного знания, которое неспецифицируемо[16], вследствие чего алгоритмизировать их не представляется возможным. Более подробное исследование возможно лишь в конкретных случаях, когда хорошо известна история формирования какого-либо математического понятия. Простейшим примером в этом смысле является понятие бесконечно малой в математике, где можно проследить ее историю от лейбницевской монады до термина математического анализа. Определенно можно сказать лишь то, что подобные связи формируются на уровне личностного практического освоения математики. Понятно, что при этом возможно неосознанное чисто механическое использование абстракций, когда в них видят нечто вроде счетных палочек. Чем выше уровень абстракций, тем солиднее неявный коэффициент математической символизации и более вероятна такая возможность. В подобных случаях, разумеется, возможность рационализации значительно снижается.

Думается, можно не сомневаться в том, что интуиция и неявное знание практически формируют стиль математического мышления. По крайней мере можно утверждать, что именно эти факторы формируют математика прежде всего как интуитивиста, в идеале — как генератора новых идей. Однако нельзя не отметить, что иногда стиль мышления математиков-интуитивистов настолько необычен, что иногда ни они сами, ни исследователи их творчества не могут дать этим идеям достаточного теоретического обоснования. Например, индийский математик С. Рамануджан обладал уникальной способностью суммировать сложнейшие ряды, пользуясь исключительно неявными эвристиками, которые не мог рационализировать даже он сам. Понятно, что их автор обладал солидным запасом неявного знания, и это целиком определяло стиль его математического мышления[17]. Вопрос о возможности обоснования методов Дж. Буля, которыми он пользовался при создании булевой алгебры, также до сих пор остается открытым [12]. Здесь также можно говорить об особом значении интуиции и неявного знания в стиле мышления Дж. Буля.

В общем-то подобные примеры нетипичны, но, разумеется, тот факт, что интуиция и неявное знание в основном определяют стиль математического мышления и имеют при этом личностный характер, не может не осложнять понимание между математиками и затрудняет освоение математическим сообществом новых оригинальных идей. Дело в том, что, согласно теории неявного знания, такие идеи невозможно чисто механически «пересадить» из одной головы в другую. Эта операция является просто механической вербализацией и ничего общего с подлинным пониманием не имеет. В свете теории неявного знания очевидно, что подлинное наше понимание невозможно без наведения связей с нашим личностным знанием, быть может, через какие-то ключевые термины, имеющие значение в рамках нашего личностного знания. Т. е. все чужие идеи или чужое знание должны укорениться в почве нашего личностного знания, стать частью нашего познавательного опыта. Относительно математики это значит, что новое математическое знание должно стать частью нашего личного опыта математического мышления.

Однако поскольку математика отличается строгой общезначимостью символов и терминов, а также предельным дедуктивизмом, по крайней мере в плане теоретического обоснования, понимание в области математики предполагает сведение личностного фактора к минимуму и не допускает интерпретативных отклонений от общезначимой теории. Следствием недопустимости личностной интерпретативности математической теории является необходимость серьезных личностных затрат на практическое освоение теории в целях решения задач. Наверное, каждый человек, имеющий хотя бы школьный опыт практического освоения математики, согласится, что математика — особый предмет, требующий углубленного изучения и дающийся далеко не всем. А ведь еще необходимо участие личностного фактора при осуществлении математической символизации — этого нельзя избежать при исследовании на самом высоком метатеоретическом уровне (об этом говорилось ранее).

Итак, неявное знание личностно и, значит, строго индивидуально. Именно эта его особенность и обуславливает уникальность, ценность и незаменимость каждой творческой личности, независимо от рода деятельности. Разумеется, это не означает, что неявное знание в математике никак не связано с определенным социокультурным контекстом конкретной исторической эпохи. Понятно, что социокультурная среда необходима для формирования самых простейших навыков и умений, свойственных человеку. Но поскольку неявное знание в целом неоднородно, что мы и показали здесь ранее, постольку роль социокультурной среды в формировании различных его типов также различна.

При формировании первоначального слоя неявного знания, включающего онтологические предпосылки и образующего фундаментальный слой всего неявного знания личности в целом, важен не столько конкретный социокультурный контекст, сколько контекст собственно человеческий, само человеческое общение. Без неявного знания этого типа не может сформироваться и неявное знание другого типа, образующееся при обучении математике и решении задач. И вот для формирования неявного знания этого типа, которое затем станет плацдармом для серьезных самостоятельных занятий математикой и математических открытий, социокультурный контекст является решающим. Это значит, что важным является то, в какой социокультурной среде растет будущий математик, насколько эта среда связана с математическим сообществом, какие в нем господствуют идеалы математического познания. Чем более глубоки эти связи, тем более разнообразные математические впечатления испытывает будущий математик, тем более мощным будет слой его неявного знания и тем больше будет возможностей у личности для успешной математической деятельности (при условии равной одаренности).

Интересно, что разрыв во времени в формировании этих двух типов неявного знания может быть достаточно длительным. Например, Якоб Штейнер, швейцарский пастух, который в девятнадцать лет научился у Песталоцци читать и писать, благодаря своей геометрической интуиции достиг положения профессора Берлинского университета[18]. Он высказывал идеи, выходящие за рамки математики прошлого века, хотя они и были лишены доказательности. Этот не единственный, но редкий случай тем не менее достаточно показателен.

Можно предположить, что, поскольку социокультурный слой неявного знания у Якоба Штейнера был сравнительно слаб вследствие сравнительно позднего обучения его грамоте, это и обусловило главную особенность его стиля математического мышления — способность выдвигать новые перспективные идеи в области математики и полную неспособность их хоть как-то обосновать, по крайней мере, на языке современной ему математики.

Напротив, априорный слой неявного знания, «отвечающий» за фундаментальные связи с бытием и личностное восприятие, был у Якоба Штейнера настолько мощным, что это позволило проявиться его математическим идеям несмотря на указанную слабость социокультурной составляющей его неявного знания. Этот же пример наводит на мысль, что, по-видимому, априорная часть неявного знания играет ведущую роль в познавательной деятельности по сравнению с его социокультурной частью.

В этой связи значительный интерес представляет интерпретация неявного знания, предложенная М. А. Розовым, который рассматривает неявное знание как социальную эстафету от поколения к поколению[19]. Это значит, что неявное знание в этом случае рассматривается исключительно как социокультурное образование. Однако в свете вышеизложенного мы видим, что таковым может считаться лишь неявное знание второго рода, поскольку лишь оно социокультурно детерминировано, притом оно необходимо опирается на фундамент неявного знания первого рода, которое имеет априорный характер. Напомним, что к априорному знанию первого рода мы отнесли онтологические предпосылки, формирующие основы личного восприятия. Эти предпосылки формируются в самом раннем возрасте — в основном, видимо, до четырех-пяти лет, когда формирующийся человек ещё практически асоциален и общество не может быть определяющим фактором его развития и поведения. Только самые ближайшие родственники могут как-то повлиять на интенсивность формирования этих неявных априорных структур. Поэтому неявное знание первого рода в принципе не может быть социокультурно детерминировано.

Разумеется, для того чтобы сформировался тот фундамент неявного личностного знания, который необходим для наращивания того социокультурного слоя, который позволит данной личности активно осваивать все достижения культуры, ребёнку в самом раннем детстве необходимо именно человеческое окружение. Можно сказать, что ребёнку в возрасте до четырёх-пяти лет нужна мать, и прежде всего на биологическом уровне, а общество как таковое для него не имеет особого значения.

Однако если ребёнок по каким-то причинам растёт не среди людей — а такие случаи известны, — то это отнюдь не означает, что он вообще никогда и никак не сможет научиться воспринимать окружающий мир и контактировать с ним, в частности, ориентироваться в пространстве и во времени. Что-то из структур неявного знания первого рода всё же сформируется. По крайней мере, в этом смысле неявное знание не может не быть априорным. И если такой «Маугли» попадет в человеческое общество даже во взрослом состоянии, то он сможет научиться понимать людей и сносно говорить, но не более того. Конечно же, освоить достижения науки и культуры такой «Маугли» уже не сможет.

Основываясь на вышеизложенном, можно предположить, что неявное знание второго рода (или социокультурно детерминированное неявное знание) всё же должно опираться на неявное знание первого рода, имеющее априорное происхождение. Представляется, что социокультурный опыт невозможен без опыта личностного восприятия, опирающегося на априорный слой неявного знания, и эти связи имеют важнейшее значение на протяжении всей человеческой жизни в любом обществе и в любой исторический период. Эту же точку зрения выразил и О. Шпенглер, утверждая, что познание природы предшествует познанию культуры[20].

Важно отметить, что необходимость участия личностного фактора — а именно неявного знания и интуиции — в процессе формирования и распространения нового знания в математике не может исключить конечной интерсубъективности содержания этого знания, которая достигается в результате теоретического обоснования этого нового знания. А такое теоретическое обоснование возможно вследствие общности анатомии и физиологии субъектов познания, общности их социального опыта и языковых навыков. Благодаря этому возможна исследовательская деятельность вообще, а не только в области математики.

Примечания

[1] См.: *Пуанкаре А.* Наука и метод // О науке. М., 1990.

[2] См.: *Адамар Ж.* Исследование психологии изобретения в области математики. М., 1970.

[3] См.: *Полани М.* Личностное знание. М., 1985.

[4] См.: *Султанова Л. Б.* Взаимосвязь неявного знания и эвристической интуиции // Вестник МГУ. Серия философия. 1995.

[5] См.: *Пуанкаре А.* Ценность науки // О науке. М., 1990.

[6] См.: *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М., 1989.

[7] См.: *Пуанкаре А.* Ценность науки // О науке. М., 1990.

[8] См.: *Полани М.* Личностное знание. М., 1985.

[9] См.: *Успенский В. А.* Теорема Геделя о неполноте. М., 1982.

[10] См.: *Полани М.* Личностное знание. М., 1985.

[11] *Мичи Д., Джонстон Р.* Компьютер-творец. М., 1987.

[12] См.: *Полани М.* Личностное знание. М., 1985.

[13] См.: Там же.

[14] См.: *Серебряников О. Ф.* Эвристические принципы и логическое мышление. М., 1979.

[15] См.: *Султанова Л. Б.* Рациональная реконструкция эволюции математического метода интерпретаций // Материалы научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых /XXXXV/. Уфа, 1994.

[16] См.: *Полани М.* Личностное знание. М., 1985.

[17] См.: *Левин В. И.* Рамануджан — математический гений Индии. М., 1968.

[18] См.: *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М., 1989.

[19] См.: *Степин В. С., Горохов В. Г., Розов М. А.* Философия науки и техники. М., 1996.

[20] См.: *Шпенглер О.* Закат Европы. Ростов-на-Дону, 1996.

КОММЕНТАРИЙ

В. Я. Перминов

Вопрос о неявном знании и интуиции очень важен для нашей общей темы, так как нет никаких сомнений в том, что та сторона творчества ученого или научной школы, которую мы называем стилем научного мышления, формируется преимущественно стихийно, а не на основе заранее продуманной и хорошо осознанной схемы. Приятная особенность стиля автора данного доклада состоит в том, что он строит свое рассуждение на интересных фактах, побуждающих к размышлению.

Основное положение автора, насколько я понимаю, состоит в том, что неявное знание и интуиция определяют стиль математического мышления. То, что эти компоненты присутствуют в фактическом формировании стиля, не вызывает сомнений. Вопрос, однако, состоит в том, достаточны ли они для понимания стиля и различий в стиле между отдельными математиками и математическими школами. Представляется, что под стилем научного мышления мы имеем в виду чаще всего нечто более сложное, определяемое скорее общими чертами эпохи, чем личностными характеристиками ученого. Мы можем, конечно, говорить об индивидуальных особенностях отдельного ученого, называя их его индивидуальным стилем, но, как науковедческое понятие, понятие стиля включает, на мой взгляд, цивилизационный компонент, который позволяет говорить о стиле античной, средневековой или современной математики. Здесь, как впрочем и во многих других докладах, чувствуется неопределенность в самом понятии стиля. Нужно прежде всего договорится, к чему мы его относим: к отдельному ученому, к научной школе или к эпохе.

Л. Б. Султанова обращает особое внимание на нерационализируемость неявного знания. В общем это, конечно, верно. Каждый ученый, как и каждый человек вообще, носит в себе представления, которые он никогда не доводит до полного вербального выражения и которые никогда не будут интерсубъективными представлениями. Но трудно согласится с идеей, что такого рода неявное знание оказывает постоянное и решающее воздействие на процесс математического мышления. Геометр может иметь индивидуальные представления об евклидовом пространстве, он может чувствовать его как-то по особому, но вряд ли это обстоятельство может оказать влияние на характер доказываемых теорем. Как говорил Э. Гуссерль, ангелы несомненно обладали бы другими методами вычисления, но вряд ли бы они пришли к другим теоремам. Это значит, что влияние субъективной сферы на математическое мышление не нужно преувеличивать. По крайней мере, здесь нужно отделить зрелые математические теории от теорий только формирующихся и процесс поиска от его результатов.

Возможность интерсубъективного теоретического обоснования автор выводит из общности анатомии и физиологии субъектов познания и из общности их социальных и языковых навыков. Такого рода возвращение к старому антропоморфизму никак не может быть оправдано. Ни пихология, ни физиология не могут объяснить логики.

Л. Б. Султанова совершенно справедливо говорит о том, что неявное знание включает в себя как индивидуальные, чисто психологические компоненты, так и интрсубъективные представления, которые можно считать априорными. В этом разделении, я думаю, содержится разрешение многих проблем, в том числе и проблемы интерсубъективности обоснования. Мы должны возвратиться к априористской теории познания, и это позволит нам, не упуская из виду глубокую индивидуальность и субъективность творческого процесса, понять возможность интерсубъективных оснований науки, независимых как от индивидуума, так и от эпохи.

ОТВЕТ АВТОРА

Разделяя общий пафос моей статьи и признавая, что интуиция и неявное знание влияют на формирование стиля математического мышления как его необходимые подсознательные компоненты, В. Я. Перминов, тем не менее, считает, что это влияние мною преувеличено и что недостаточно учтена роль социокультурных факторов. Действительно, мне представляется, что интуиция и неявное знание в основном определяют стиль математического мышления конкретного ученого, и обоснование этого утверждения является основной задачей моей статьи. Но это, разумеется, не означает категорического отрицания в этом плане социокультурных факторов. Дело в том, что неявное знание имеет сложнейшую структуру, и его, образно выражаясь, «верхний этаж», или неявное знание второго рода (согласно терминологии самой статьи) образуется как раз под воздействием социокультурных особенностей конкретной эпохи. Судя по исследованиям Ж. Пиаже, образование неявного знания второго рода происходит на уровне подсознания в возрасте примерно 7—12 лет. А затем уже, во время окончательного становления будущего математика к этим неосознаваемым факторам присоединяются и факторы рациональные того же социокультурного характера, формирующиеся под влиянием неявного знания второго рода.

Отметим, что процесс формирования математического мышления предполагает сложнейшее переплетение рациональных и интуитивных факторов, поэтому выявить какие-то закономерности в нем достаточно сложно. Однако именно мощность математической интуиции математика определяет, какой в принципе стиль мышления — интуитивный или аналитический — будет у него формироваться. И лишь затем на эту основу как бы накладываются социокультурные факторы и происходит окончательное формирование стиля мышления у данного конкретного математика. Это выражается, в частности, в выборе определенных методов и тем математического исследования из характерных для математики данной эпохи. Можно предположить, что на ранних этапах развития математики, когда выбор средств исследования был весьма ограничен, формировался стиль мышления в большей степени интуитивный, а в нашем веке, скорее всего, преобладает стиль мышления в большей степени аналитический.

Важно знать, оказывает ли неявное знание постоянное влияние на деятельность математика или это влияние ограничивается только временем формирования стиля его математического мышления. Представляется, что это влияние не может быть ограничено указанным периодом, так как неявное знание образуется в результате работы интуиции в качестве обязательных нерационализируемых издержек, «застревающих» в подсознании. Дело в том, что серьезные математические исследования всегда содержат творческий элемент, поэтому предполагают непременное участие интуиции. Иначе ничего, кроме тавтологии, не получится. Другое дело, что математик всегда стремится к строгости и обоснованности, к тому, чтобы сделать свою новую идею частью уже существующей на принципах дедукции математической теории, и это ему удается, пока он не «натыкается» на нерационализируемое неявное знание. Это, видимо, и происходило при попытках полного обоснования математики. Безусловно, зрелые математические теории, которыми, по выражению Полани, наполнены учебники, содержат личностную компоненту в ничтожно малой степени, но и ее достаточно, чтобы подорвать все логицистские или формалистские программы обоснования математики.

Что же касается ангелов Гуссерля, которые пришли бы к тем же самым теоремам независимо от особенностей их неявного знания, как это утверждает уважаемый В. Я. Перминов, то, на мой взгляд, они были бы способны к абсолютному умозрению и не нуждались бы в доказательстве чего бы то ни было, а следовательно, и в самой математике.

Вместе с тем необходимо признать справедливость упреков в антропоморфизме и психологизме. В самом деле, фундаментом неявного знания является так называемый «комплекс неосознанных ощущений», который не может быть предметом только философского исследования, а предполагает вмешательство со стороны психологии. Но, согласно Полани, вряд ли можно вообще говорить о какой-либо универсальной объективности позитивистского толка, независимой от человечества. Но если иметь в виду объективность как независимость от личностного знания автора некой математической теории, при условии ее признания сообществом математиков, то для достижения такой объективности, в конечном счете, вполне достаточно интерсубъективности оснований, которая согласуется с концепцией неявного знания.

Априорное знание — часть неявного знания, поэтому то, что в настоящее время понятие априорного знания подвергается философской ревизии, создает сложности для обоснования концепции неявного знания. Однако, согласно Канту, — а он, как известно, ввел понятие априорного знания в философию — априорно либо некоторое знание, либо наша способность суждения вообще. В последнем случае представляется неизбежным и формирование некоторых априорных оснований, или, по крайней мере, ограниченность вариаций в изменении этих оснований под влиянием каких-либо факторов. Представляется, что эти различные априорные основания вряд ли могли бы быть абсолютно независимы. В частности, связь евклидовой и неевклидовых геометрий угадывается уже из самих названий и легко может быть установлена с помощью параметра кривизны. А объекты топологии, требующие особой топологической интуиции, посредством операции топологического перемножения могут быть сведены к объектам евклидовой геометрии. Поэтому существование неких геометрических неявных инвариантов представляется вполне логичным. Следует учесть, однако, что поиск таковых и поиск априорного знания вообще осложнен его неспецифицируемостью, на что справедливо указывал еще Полани. Словом, вопрос о природе априорного знания требует самого серьезного и скрупулезного исследования ввиду его исключительной важности для философии математики и теории познания.

АПРИОРНОСТЬ И РЕАЛЬНАЯ ЗНАЧИМОСТЬ ИСХОДНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ МАТЕМАТИКИ

Перминов В. Я.

Математический априоризм диктуется самой практикой математического мышления. Мы все осознаем самоочевидность утверждений элементарной математики типа: $2 + 2 = 4$, а также интерсубъективность и историческую устойчивость признанных доказательств. Практика математического мышления постоянно демонстрирует нам первичность интуитивной основы математического рассуждения перед его лингвистическим оформлением и внеисторический характер этой основы. Это значит, что математический априоризм не может быть отвергнут, он может быть лишь более или менее правильно объяснен с общефилософских позиций.

Традиционный философский априоризм, который мы связываем с именами Лейбница, Канта и Гуссерля, сегодня не может удовлетворить нас полностью. В данной статье будет изложена праксеологическая концепция математического априоризма, которая исходит из понимания математических очевидностей как универсальных структур мышления, порожденных его практической ориентацией. Праксеологический априоризм дает нам возможность строго обосновать надежность аподиктической очевидности и абсолютность математического мышления.

1. Априорность категорий и логики

Прежде чем перейти к проблемам философии математики, мы должны остановится на некоторых общих понятиях теории познания. Таким общефилософским и принципиально важным для нас понятием является понятие практики. Это понятие, как фундаментальное для теории познания, было выдвинуто в XIX веке К. Марксом и Ч. С. Пирсом. Я буду исходить здесь из марксистского понимания практики как предметной преобразовательной деятельности общества в целом.

В марксисткой теории познания подчеркивается, что практика является стимулом познания, основой познания (в смысле наличного материала и средств), а также высшим критерием истинности теорий и идей. К этим несомненно верным положениям можно добавить еще одно, состоящее в том, что практика является нормативной основой познания, т.е. истинным источником универсальных норм, которым подчинено всякое мышление. Это последнее положение важно в том отношении, что оно дает возможность понять истоки априорного знания без какой-либо мистики, исходя только из естественных задач мышления.

Если некоторая развивающаяся и функционирующая система является частью другой более широкой системы, то в своих функциях она неизбежно подчинена целям этой последней системы, и общие регулятивы ее развития могут быть поняты только при рассмотрении этого функционального соподчинения. Этот абстрактный системный принцип указывает нам путь к пониманию природы высших норм, определяющих человеческое мышление. Так как познавательная деятельность человека является лишь частью его практической деятельности, то она необходимо подчинена требованиям, проистекающим из практической эффективности знания. Это значит, что высшие нормы, регулирующие познавательную деятельность, имеют практическую природу и должны быть выведены из практической функции знания.

Праксеологические нормы мышления зафиксированы прежде всего в категориальных принципах. Всякое знание мы строим как относящееся к объектам, которые находятся в пространстве и времени, обладают определенной структурой, подчинены требованию причинной связи и т.п. Нетрудно понять, что мы имеем здесь дело с общими требованиями к структуре представлений, проистекающими из их практической значимости. Если бы некто построил теорию, которая не основывалась бы на различениях объектов по их бытию и небытию, по пространственным и временным характеристикам, не подчинялась бы общим свойствам причинно-следственных связей, не отделяла бы материального от идеального, случайного от необходимого и т.п., то такая теория не могла бы быть принята как знание, ибо она не могла бы быть использована в качестве основы действия применительно к какой-либо реальности. Знание развивается в интенции на практичекое использование, оно должно быть соединено с практикой и, вследствие этого, оно принимается в качестве знания только в том случае, если оно выражено в категориях практики. Универсальные (онтологические) категории и принципы должны быть поняты в этом плане как ограничения на структуру представлений, проистекающие из их практической значимости или из практической ориентации мышления вообще.

Другой нормативной структурой сознания, проистекающей непосредственно из практики, является система логических норм, которой абсолютно подчинено всякое понятийное мышление. Если категории ограничивают содержание представлений, являются системой очевидностей, лежащих в основе определения предмета мышления вообще, то логические нормы — это ограничения на структуру понятий (значений) и возможные их связи. Между категориальной и логической нормативностью существует параллелизм, состоящий в том, что система логических норм определена системой категориального видения мира и задана ею однозначно. Констатация этого параллелизма лежит в основе кантовского учения о категориях рассудка.

Категориальные и логические представления не являются эмпирическими в собственносм смысле слова. Они отличаются от эмпирических представлений прежде всего по объекту отражения, ибо в них фиксируются не какие-либо частные или общие свойства объектов, но сама структура деятельности, ее необходимые онтологические основания. Деятельность всегда связана с объектом, который противостоит субъекту, и этот универсальный момент деятельности мы выражаем в категории объективной реальности или материи. Мы можем действовать только опираясь на такую связь явлений, при которой появление одних из них с необходимостью влечет появление других и это однозначно задает нам понимание мира явлений как причинно обусловленного. Деятельность навязывает нам объектную, причинную и временную структуру знания, поскольку знание, не определенное в этих категориях, безразлично для практики и, таким образом, не является знанием вообще.

Категориальные представления *внеэмпиричны*, ибо они обусловлены только универсальными целями знания и, по этой причине, безразличны к содержанию какого-либо конкретного опыта. Кант безусловно прав в том, что в категориях не содержится ничего эмпирического: система представлений, определяющая синтез понятий *вообще*, не может зависеть от подразделений, продиктованных содержанием какого-либо конкретного опыта или конкретной теории.

Категориальные представления *эквифинальны* в том смысле, что любой индивидуальный опыт приводит нас, в конечном итоге, к одной и той же, неизменной и единой для всего человечества, системе категориальных представлений. Глубинные представления о пространстве, времени, причинности одинаковы у всех людей и у всех народов независимо от эпохи и географического положения. Характеризуя принципы разума, Лейбниц сравнивает их с прожилками в глыбе мрамора: при любых внешних ударах эта глыба распадается по одним и тем же линиям, обнажая предначертанную в ней фигуру Геракла[1]. Эта аналогия Лейбница идеальным образом описывает отношение универсальных категорий к опыту. Существенно различаясь по составу опыта, все люди едины в категориальных очевидностях, навязанных деятельностью.

Категориальные представления *самоочевидны*. Мы имеем здесь дело не с эмпирической очевидностью, ограниченной рамками частного опыта, а с аподиктической очевидностью, которая обусловлена универсальным и нормативным характером этих принципов. Аподиктическая очевидность категориальных и логических представлений проистекает не из содержания опыта, а только из универсальной практической ориентации мышления.

Система категориальных представлений *внеисторична* и *некорректируема* в том смысле, что она не изменяется с расширением опыта и не может быть поставлена под сомнение на основе опыта. Современный человек склонен думать, что любое представление может быть подвержено критике и скорректировано на основе опыта. Это убеждение, однако, не совсем верно. Человек не подвергает сомнению свое собственное существование, факт мышления или факт существование внешнего мира, бесконечность пространства, времени и т.п. Внимательное рассмотрение структуры знания приводит нас к выводу, что, в действительности, человек мыслит в рамках некоторого рода фундаментальных очевидностей, которые являются необходимой предпосылкой мышления и которые не изменяются на основе результатов самого мышления. Критический анализ таких суждений как «Я существую», «Время необратимо», «Всякое явление имеет причину» и т.п. важен для понимания их природы, но этот анализ не может скорректировать или опровергнуть эти утверждения, ибо они — не индуктивные обобщения опыта и не выводы теоретической науки, а глубинные представления о реальности, однозначно навязанные практической ориентацией мышления. Они обладают высшей достоверностью для сознания и являются его последней и наиболее твердой основой.

Рассмотрение знания как подчиненного практике, таким образом, необходимо приводит нас к признанию универсально нормативных структур мышления, независисмых от содержания мышления, обусловленных исключительно самим его назначением. Мы должны признать наличие в структуре знания двух принципиально отличных друг от друга систем представлений — эмпирических и категориальных. Разница здесь не количественная: категории не просто более общие или более абстрактные понятия, чем эмпирические, они не просто более универсальны и не просто более очевидны. Система представлений, связанная с категориями и с логикой, лежит принципиально в другом измерении и качественно отличается от системы эмпирических представлений как по генезису, так и по функции. В этом плане кантовская идея априорного знания как безусловного нормативного и неизменного основания знания получает полное оправдание

2. Слабость традиционного априоризма

Приведенные рассуждения намечают новую интерпретацию априоризма, основанную на понятии практики. Априорные представления с этой точки — это универсально нормативные представления, проистекающие из необходимой деятельностной (практической) ориентации мышления.

С деятельностной точки зрения кантовская теория априорного знания нуждается в существенной корректировке. Главный ее недостаток состоит в том, что априорное знание вводится в ней без теоретического обоснования, исключительно на основе примеров. Априорное знание существует для Канта, поскольку существуют математика и логика как области знания, обладающие особыми свойствами, такими как самоочевидность, интерсубъективность и стабильность.

Кантовское априорное знание существенно антропологично: структура априорных очевидностей сознания выводится Кантом скорее из природы человека как представителя определенного вида, чем из из сущности познавательной деятельности вообще. Кант, в принципе, допускает возможность существ, обладающих другими формами мышления, другой системой априорных принципов[2]. Праксеологическое обоснование априорного, очевидно, исключает такого рода гипотезы. Если категориальная структура задается только целевой (практической) установкой мышления, то по своей природе она не зависит ни от объекта, ни от субъекта мышления и принадлежит как нечто абсолютно тождественное всякому мышлению, обусловленному деятельностью.

Априорное знание у Канта не определено должным образом также и в смысле своего объема. Общие признаки априорных представлений (такими признаками являются у Канта необходимость и всеобщность) оказываются на практике совершенно недостаточными. Основываясь на этих признаках Кант включает в сферу априорного знания всю систему аналитических суждений, а также и ньютоновские принципы механики, в которых он усматривает априорные основы теоретического естествознания[3]. Кант не провел ясной границы между априорным и апостериорным, которую мы могли бы принять сегодня в качестве хорошо обоснованной.

С праксеологической точки зрения априорное знание понимается как знание чисто нормативное, не затрагивающее содержания опытного знания даже в самых общих его аспектах. Идея чистого естествознания с этой точки зрения не имеет никакого смысла. Элементами эмпирической науки, независимыми от опыта, являются поэтому только нормы логики, посредством которых мы оформляем наши знания в виде теоретических систем. Мы должны, таким образом, существенно ограничить сферу априорного знания, очерченную Кантом.

Отсутствие объективной детерминации категорий в системе Канта ставит ее перед проблемой универсальной значимости априорных принципов. Если априорная структура знания является чисто имманентной и независимой от опыта, то естественно возникает вопрос, каким образом она может сохранять значимость для бесконечного многообразия опыта? Решение этой важнейшей проблемы у Канта является предельно субъективистским. Оно заключается в том предположении, что сам мир явлений уже опосредован предписаниями, заключенными в категориях и, по этой причине, не может войти с ними в противоречие. В этом пункте в наибольшей степени обнаруживается искусственность кантовской системы, ее расхождение с представлениями об объективности человеческого познания, о первичности данных опыта перед интеллектуальными конструкциями сознания.

Деятельностное истолкование априорного знания снимает эту проблему. Мы понимаем здесь категориальные принципы не как имманентные интуиции, произвольным образом заложенные в наше сознание, а как выражение необходимых практических установок в отношении реального мира. Всякое знание, чтобы быть знанием в соответствии со своей практиченской сущностью, должно быть выражено в категориях. В процессе познания мы не можем выйти за рамки универсальных категориальных требований по той простой причине, что тем самым мы вышли бы за пределы понятийных конструкций, значимых для деятельности, т.е. за пределы значимого знания вообще. Категориальная сетка сознания очерчивает абсолютную внешнюю границу знания в том смысле, что знание, не выраженное в категориях, не обладает функцией знания и, следовательно, не является знанием вообще. Именно вследствие своей деятельностной природы категориальная сетка абсолютна для нашего мышления и в этом смысле верно, что сознание в определенном смысле предписывает законы миру, задавая единую структуру всякого возможного знания.

Мы должны отказаться также и от того положения Канта, что категориальные принципы являются лишь регулятивами мышления и ничего не говорят о мире самом по себе. Само существование человека в мире свидетельствует о том, что фактический мир в достаточной степени удовлетворяет идеализированным требованиям к нему, которые постулируются в универсальной онтологии.

Недостатки кантовского априоризма сохраняются в основном и в системе априоризма, развитого Э. Гуссерлем. Движение вперед, которое намечено

Гуссерлем в понимании априорного знания состоит в отказе от кантовского антропологизма. Гуссерль ясно осознал тот факт, что если априорные представления существуют, то они не зависят ни от объекта, ни от субъекта мышления и являются совершенно одинаковыми для любого познающего существа, будь это люди, чудовища или боги[4]. Это понимание априорного, несомненно является более адекватным, чем понимание Канта. Однако, Гуссерль скорее почувствовал истину, чем обосновал ее. Представляется, что обоснование этой истины невозможно вне рамок деятельностной метафизики, которая исключается феноменологическим подходом.

Гуссерль соединяет априоризм с радикальным эмпиризмом в том смысле, что он ставит перед собой задачу выявить сферу априорного знания исключительно на основе его непосредственного усмотрентия в данных опыта. Он полагает, что априорные структуры сознания обязаны свом появлением вариативной способности сознания, которая в данных опыта способна усмотреть неподвижные и объединяющие его универсалии. Вариативный метод, однако, нельзя признать в качестве адекватного уже по той причине, что его нельзя отделить от метода индуктивного обобщения. Достаточно очевидно, что теория априорного знания не может быть построена без привлечения гипотез о внешних целях мыслящего субъекта, т.е. без метафизического и телеологического рассмотрения процесса познания. Но именно эти внешние детерминирующие факторы выносятся Гуссерлем за рамки анализа.

В настоящее время теория априорного знания все еще пребывает в начальном состоянии, которое характеризуется множеством концепций, ни одна из которых не является в достаточной степени признанной. И тем не менеее, нет никаких сомнений в том, что будущая теория познания будет априористкой в том смысле, что она будет исходить из наличия в структуре знания неэмпирических элементов, определяющих становление всех представлений, связанных с опытом. Великая заслуга кантовскоой теории познания состоит в разделении формы и содержания мышления, в уяснении того обстоятельства, что знание, относящееся к форме мышления, не является эмпирическим и корректируемым на основе опыта. Теория познания, не учитывающая этого разделения, не может претендовать на адекватеное понимание мышления. Философия математики, несомненно, является той сферой философского анализа, которая более всего нуждается в реабилитации априоризма.

3. Априорность исходных представлений математики

В отношении математических понятий наше общее решение не будет существенно отличаться от кантовского и будет состоять в том, что исходные идеализации математики относятся не к содержанию, а к форме мышления и являются, таким образом, частью априорной структуры мышления. Это утверждение, однако, нуждается в обосновании. Одним из недостатков кантовского и гуссерлевского априоризма является то, что они просто постулируют априорность математики: они исходят из математических утверждений как из примеров, подтверждающих наличие самоочевидного и некорректируемого знания. В действительности, априорность математики нуждается в особом теоретическом обосновании. Здравый человеческий рассудок может примирится с априорностью категорий и логики, но арифметические и геометрические утверждения кажутся ему значительно более конкретными, связанными с операциями опыта и, вследствие этого, мало согласующимися с идеей априорности.

Укажем сначала на некоторые косвенные аргументы за априорность математических понятий. Одним из таких аргументов является органическая взаимосвязь между арифметическими и логическими понятиями. Хотя сторонникам логицизма не удалось полностью свести арифметику к логике, является важным тот факт, что значительный и, в определенном смысле, центральный фрагмент арифметики оказался определимым в логике, сводимым к ее общезначимым утверждениям. Этот факт заслуживает внимания, ибо он указывает на глубинное и, по-видимому, еще не вполне осмысленное родство этих двух понятийных структур. Это родство находит также подтверждение в рамках современных психологических исследований. Один из результатов исследований в области когнитивной психологии, проведенных Ж. Пиаже и его сотрудниками, состоит в открытии того факта, что арифметические и логические структуры формируются в сознании ребенка одновременно и в тесной взаимосвязи друг с другом. С другой стороны, оба этих класса понятий оказываются тесно связанными с развитием представлений о пространстве и времени[5]. Хотя психологические факты сами по себе не являются достаточными для обоснования эпистемологических истин, тем не менее, мы не можем не считаться с этими фактами. Они определенно указывают на то, что первичные истины арифметики и геометрии принадлежат к сфере представлений, образующих общую нормативную основу мышления.

Другое косвенное соображение в пользу положения об априорности истин элементарной математики проистекает из самоочевидности этих истин. Как уже сказано, априорные истины даны сознанию с особой степенью очевидности, которая абсолютно преобладает над очевидностями, относящимися к содержанию знания. Но в таком случае, сама аподиктическая очевидность может быть использована в качестве критерия априорного знания. Исходные представления арифметики и геометрии в полной мере удовлетворяют требованию аподиктической очевидности. Утверждение пифагорейца Филолая о том, что ложь не может быть присоединена к утверждениям о числах, понятно современному математику точно также, как оно было понятно математикам (да и всем людям) во все времена. Элементарные арифметические и геометрические истины даны человеческому сознанию с абсолютной непреложностью, и этот факт заставляет нас признать их в качестве элементов априорного знания.

Общее теоретическое обоснование априорности исходных математических идеализаций может быть получено на основе рассмотрения структуры универсальной онтологии. То, что мы называем универсальной или категориальной онтологией, состоит из двух частей, которые можно назвать, соответственно, причинной и предметной онтологией. Чтобы действовать, мы нуждаемся в наличии причинных связей. Причинность является, таким образом, универсальным онтологическим основанием деятельности. Система онтологических категорий, включающая категории материи, пространства, времени, причинности, случайности, необходимости, бытия, небытия и т.п., является целостной в том смысле, что все эти категории описывают аспекты реальности, определяющие деятельность, а точнее, акт деятельности в его необходимых онтологических предпосылках. Эта часть онтологии может быть названа каузальной, т.к. в центре ее находится представление о причинной связи, определяющее практическое отношение человека к миру.

Причинная онтология, однако, не исчерпывает всей сферы универсальных онтологических представлений. Для того, чтобы действовать, мы нуждаемся не только в идеальных представлениях о причинных связях, но и в идеальных представлениях о предметах, с которыми мы действуем. Передвигая и вращая предметы, мы рассматриваем их как те же самые. В процессе действия мы неизбежно опираемся на допущение тождества предметов и их внутренних связей, т.е. на некоторые идеальные представления о предметах, как удовлетворяющих общим условиям деятельности. Точно также как деятельность вырабатывает у нас идеальные представления об универсальности причинной связи, она вырабатывает и представления о мире как совокупности предметов, которые конечны в пространстве и времени, стабильны в своем бытии и в своих формах, отделены друг от друга в пространстве и т.д. Наряду с каузальной онтологией, которая выражает собой идеальные условия акта действия, мы имеем систему праксеологических идеализаций, которая может быть названа предметной онтологией и которая представляет собой систему идеализированных представлений о предметах, проистекающую из общих условий деятельности.

Адекватное понимание математики как априорной науки достигается при осознании того факта, что в основе исходных математических идеализаций лежат универсальные представления предметной онтологиии, выработанные деятельностью. Аналогично тому, как логика выражает формальный аспект категориальной онтологии, исходные математические теории, а именно, арифметика и евклидова геометрия, исходят из общезначимых представлений предметной онтологии, выражая собой формализуемый аспект этой онтологии. Представления, лежащие в основе математических понятий, — не абстракции опыта, не теоретические идеализации и не соглашения, а интуиции, проистекающие из деятельностной ориентации познающего субъекта. Математика с этой точки зрения есть формальная онтология мира, схватывающая праксеологически значимые качества его предметной структуры, и она, безусловно, априорна в том смысле, что ее исходные интуиции предшествуют всякому эмпирическому анализу.

Исходные суждения математики являются, несомненно, синтетическими, ибо они не соглашения и не простые смысловые тавтологии, а отражение предметной онтологии как идеальной объективности. Слово «отражение» здесь, однако, не нужно понимать в смысле приближенного эмпирического отражения. Априорные представления как последние координаты мышления сами лежат в основе любого эмпирического отражения, и они не могут быть подвергнуты корректировке на основе опыта. Исходные представления арифметики и геометрии скорее коррелятивны предметной онтологии, и, в действительности, они сами являются ее наиболее адекватным выражением.

Противники априористского истолкования математики обычно указывают на факт ее содержательности, ее приложимости к описанию счета и измерения в мире реальных предметов и свойств. Действительно, эффективность математики побуждает нас думать, что ее исходные истины есть продукт опыта, что наша вера в истинность утверждений типа $2 + 2 = 4$ проистекает из опыта, из операций с реальными, чувственно воспринимаемыми предметами. Мы убеждены, что ребенок может усвоить такого рода истины только в процессе манипулирования с реальными предметами.

Это, однако, ложное направление мысли. Внимательный анализ процедур счета и измерения показывает, что они существенно определены представлениями идеальной предметности и имеют смысл только в рамках предписываемых им ограничений. Мы не пытаемся определить точное число волн на поверхности воды или число переживаний в нашей душе за определенное время суток, ибо эти «предметы» не удовлетворяют требованиям идеальной предметности. Наша деятельность счета строго ограничена ситуациями, соответствующим требованиям идеальной предметности, и наша арифметика представляет в своей сущности не что иное, как точное описание этих идеальных требований. Короче говоря, мы считаем лишь то, что удовлетворяет априорным структурам предметности. Но это означает, что принципы арифметики порождены не процедурами счета, а априорной предметной онтологией, и убедительность арифметических равенств для нашего сознания проистекает не из индукции, не из повторения операций счета, а из самоочевидности универсальной онтологии. В действительности, в процедуре счета мы лишь подводим эмпирические ситуации под универсальную предметную онтологию, имеющую деятельностное происхождение. Ошибка философов эмпирического направления состоит в том, что они пытаются вывести понятие числа из самой процедуры счета, ошибочно истолковывая сферу приложения арифметики в качестве ее опытной основы.

То же самое, очевидно, относится и к процедуре измерения. Эта процедура была бы невозможной без представления о количестве и величине, которые априорны и имеют свои истоки в структуре практики, т.е. в деятельностной установке человеческого мышления вообще. Мы должны отбросить идею, согласно которой необходимость измерения участков земли в хозяйственной практике людей была истинным истоком геометрической науки. Разливы Нила, конечно, не играли столь важной роли в появлении геометрии, которую им приписывают эмпирически настроенные историки математики. В действительности, историческое становление первичных математических структур было прежде всего результатом развития самосознания, оформления в понятиях фундаментальных праксеологических интуиций, которые в очень малой степени зависели от возможностей их приложения.

Онтологические структуры мышления сами по себе не задают нам полной системы исходных понятий математики, и окончательное установление математических теорий связано с некоторыми субъективными установками, которые не имеют онтологического оправдания. Представление об абстрактной арифметической единице и о совокупности единиц как некоторой мысленной целостности несомненно диктуется представлением об идеальном предмете и совокупностях таких устойчивых и независимых друг от друга предметов. Но при определении системы операций, задающих математическую теорию, мы можем иметь несколько вариантов, не противоречащих общему представлению идеализированной предметности. Если мы делаем главным для себя момент пересчета, связанного с перебором реальных или мысленных совокупностей предметов, отождествляя количество предметов с количеством необходимых операций, то мы получим понятие арифметического сложения и все остальные операции арифметики. Если же мы делаем значимым для себя разделение предметов на тождественные и нетождественные по некоторым их качествам, то мы приходим к операции теоретико-множественного объединения, при которой прибавление предметов, тождественных уже содержащимся во множестве, не изменяет этого множества. Мы можем сказать, что арифметика и теория множеств возникли на одной и той же онтологической основе, но при различных интенциональных установках, и мы должны признать, что выбор между этими установками не предопределен однозначно предметной онтологией. Понимание становления первичных математических структур, таким образом, требует учета двух полюсов, которые выражаются в понятиях онтологии и интенциональности.

Предметная онтология, конечно, не может рассматриваться в качестве предмета математики. Хотя она предшествует математической теории как некоторая данность, существующая вне математики и независимо от нее, она не выполняет функций предмета теории в обычном понимании этого слова. Математика как формальная дисциплина развивается не через анализ предмета, не в сторону углубления знаний о предмете, но только в сторону формального развертывания исходных интуиций. Геометр не исследует пространство как физическую реальность, а направляет свои усилия исключительно на создание замкнутой логической системы, соответствующей первичной онтологической интуиции пространства. Будет правильным поэтому считать, что абстрактная онтология является *интуитивной основой* элементарной математики, но не ее предметом. Элементарная математика жестко детерминирована предметной онтологией и в этом смысле имеет внешнее основание для своих понятий, но она не имеет предмета, автономное исследование которого могло бы дать контрпримеры для ее утверждений.

Математическое знание, как мы можем понять его в настоящее время, содержит две части: знание априорное, онтологически детерминированное в своих исходных интуициях и знание формальное, оправдываемое только внутренней логикой и приложениями. Мы не можем в отличие от классиков априоризма говорить об априорности математики вообще, мы можем лишь настаивать на том, что математика содержит в себе априорный центр, являющийся основой ее метода и обоснования.

Математическая теория, в принципе, может появиться на любой содержательной основе, выступая в качестве формальной структуры для некоторой сферы опыта. Здесь появляется соблазн истолковать всяую математическую теорию как результат структурирования опыта или аспекта реальности, выявляемого в опыте[6]. В философском плане такой подход явно недостаточен, ибо он не вскрывает специфики первичной (априорной) математики. Мы не поймем сущности математики как науки и особенностей ее метода, если не уясним того обстоятельства, что исходные математические структуры имеют онтологический, а не эмпирический характер, что их интуитивную основу составляют не чувственные образы и не теоретические модели, а универсальные представления о реальности, порожденные деятельностью.

4. О современных воззрениях на природу математики

Праксеологическая интерпретация математики, несомненно, оправдывает кантовский априоризм в том его положении, что элементарные математические структуры — не продукт обобщения опыта, а система представлений, относящаяся к форме знания, которая абсолютно предшествует опыту и имеет принципиально иной источник своего происхождения. Однако эта интерпретация, будучи последовательно проведенной, заставляет нас отказаться от некоторых моментов кантовской трактовки математики. Если мы относим исходные арифметические идеализации к идеальной предметности, то мы должны отказаться от истолкования арифметики на основе представления времени. Арифметика при праксеологической трактовке очевидным образом связана с представлением об идеальных операциях и должна быть понята скорее как отражение структуры предметной онтологии, чем как отражение времени, которое фиксирует в себе момент изменения.

Представления о пространстве и времени, из которых исходит Кант. недостаточны для понимания интуитивной основы математики. В философии математики Канта отсутствует предметная очевидность, вследствие чего он принужден вести рассуждение, опираясь только на арифметические и геометрические примеры. Переходя к алгебре, он фактически признает наличие в математике наглядности, отличной от арифметической и геометрической интуиции[7].

Кантовская трактовка математики произвольно ограничивает сферу математического знания, сводя его к интуитивно ясным структурам, а именно, к арифметике и евклидовой геометрии. Кант далек от понимания логической сущности математических теорий, того обстоятельства, что не будучи интуитивно ясными, они могут существовать как чисто логические образования, полезные для решения внутренних задач математики и для ее приложений. Признание неевклидовых геометрий в качестве законной части математики было прямым опровержением кантовского определения допустимой сферы математических объектов. С праксеологической точки зрения мы должны признать наличие в структуре математики двух частей: априорной математики, построенной на аподиктически очевидных принципах и формальной математики, имеющей лишь логическое оправдание.

Существенно иной подход к истолкованию априорности математики мы видим в гуссерлевской феноменологии. У Гуссерля намечена попытка понять генезис исходных математических представлений, от которой абстрагируется кантовская теория познания. Принципиальным достижением Гуссерля в философии математики является то, что он обратил внимание на важность интенциональных установок сознания в формировании математических структур. Изложенное выше уже показывает, что без учета этого момента становление математических идеализаций не может быть адекватно понято. В основе гуссерлевской концепции лежит понятие идеальной предметности, которое, в принципе, дает нам ключ к пониманию истинной природы математики. Гуссерль, однако, ослабляет установки кантовского априоризма в том смысле, что он связывает становление первичных математических истин с опытом. Он пытается обосновать априоризм на основе радикального эмпиризма. Он убежден в том, что именно операция счета привела нас к абстрактной идее числа, а искусство измерения было необходимой предпосылкой чистой геометрии[8]. Это недопустимое с праксеологической точки зрения смешение априорного и эмпирического проистекает у Гуссерля из общих установок его теории познания. Пытаясь найти основу математических представлений, он идет не к онтологии, а к опыту. «Жизненный мир», из которого он хотел бы вывести первичные интуиции математики, — это лишь глубинные слои чувственного опыта, но не представления универсальной онтологии.

Как радикальный эмпирик Гуссерль стоит перед трудноразрешимой проблемой объяснения интерсубъективности и стабильности математических истин. Рассматривая логику формирования геометрических понятий он пытается ответить на вопрос: каким образом мысленные конструкции первых изобретателей геометрии, которые имели только субъективное значение, превратились в представления общезначимые, объективные и не подвергаемые сомнению. Он убежден, что ответ на этот вопрос можно получить исходя из анализа языка как средства коммуникации и унификации представлений[9]. Ссылка на язык, однако, недостаточна уже по той причине, что она в одинаковой мере относится ко всем понятиям и не объясняет особого статуса математических идеализаций. Историческое закрепление первичных математических представлений в жестких формах языка само по себе не может объяснить их интерсубъективности и исторической стабильности.

При объяснении природы исходных математических представлений мы не можем обойтись без метафизики, без выявления их связи с категориальным видением мира. С праксеологической точки зрения исходные математические представления формируются вместе с формированием нормативных структур сознания, и вопрос о логике становления геометрии как объективного знания сводится к вопросу о становлении идеальной предметности как компонента универсальной онтологии. Схема образования математических понятий у Гуссерля, которую можно записать как «Опыт + Интенциональность» должна быть заменена схемой «Онтология + Интенциональность». Природа математики может быть понята только тогда, когда мы увидим непосредственную связь между математической очевидностью и очевидностью фундаментальных структур мышления, т.е. тогда, когда мы в полной мере осознаем ее онтологические и, в конечном итоге, праксеологические истоки.

Определенной альтернативой традиционному априоризму и конвенционнализму в философии математики выступает в настоящее время эволюционная эпистемология, которая ставит своей задачей объяснить особенности математических понятий, оставаясь в рамках натуралистического понимания сознания. В отличие от феноменологии, эволюционная эпистемология подчеркивает связь математики с материальным миром и с приспособительной деятельностью людей по отношению к этому миру. Сторонники эволюционной эпистемологии считают, что априорное в человеческом познании — это наиболее устойчивые элементы знания, которые закреплены в сознании человека в процессе его эволюции и которые соответствуют инвариантным характеристикам самого мира, в котором пребывает и действует человечество. При таком понимании априорного знания кантовская проблема связи априорного и эмпирического, очевидно, снимается, ибо априорное знание представляет собой только наиболее устойчивый аспект опытного знания. «Формы созерцания и категории, предшествующие любому индивидуальному опыту, — пишет К. Лоренц, — приспособлены к внешнему миру по тем же причинам, по которым копыто лошади еще до ее рождения приспособлено к степной почве, а плавники рыбы приспособлены к воде еще до того, как они вылупятся из икринки»[10]. Априорное, с этой точки зрения, не абсолютно, оно, в принципе, может корректироваться, но оно превалирует над индивидуальным опытом человека, также как любое коллективное и объективированное знание превалирует над знанием индивидуальным и субъективным.

Такое истолкование априорного знания, хотя оно представляется достаточно убедительным для здравого смысла, конечно, не является адекватным. Здесь утрачивается главная идея традиционного априоризма, а именно, идея трансцендентальности форм мышления. Традиционное различение между априорным и апостериорным знанием — это не различение между уровнями знания по их стабильности, но различение между формой и содержанием знания. Мы полностью теряем идею априорного знания, если не сохраняем это последнее различение. Лоренц убежден, что эволюционному объяснению априорных форм мышления может противостоять только объяснение их через допущение сверхъестественных факторов. Эта, однако, ложная дилемма, возникающая исключительно из-за невнимания к целевым установкам сознания и к статусу универсальной онтологии.

Универсальные формы человеческого мышления отражают универсальные формы бытия, но это не универсальные характеристики природного мира, полученные на основе опыта, а общие характеристики бытия, выделенные практикой и продиктованные непосредственно актами деятельности. Вывести структуры априорного знания из структуры мира также невозможно, как невозможно их вывести и из чистой интеллектуальной фантазии. И феноменология, и эволюционная эпистемология упускают анализ важнейшей стороны человеческого бытия, а именно, практической деятельности, которая связывая объективное и субъективное, является истинным источником универсальных и априорных форм мышления.

Деятельностной подход к обоснованию исходных математических идеализаций, который здесь защищается, в определенном смысле намечен в работах Д. Р. Лукаса. Геометрия, считает Лукас, необходима нам прежде всего как созерцателям и как деятелям. «Мы не могли бы быть деятельными, — пишет он, — если бы плавали среди аморфных облаков; в действительности, если мы хотим воспринимать стабильный мир, в котором мы можем совершать более или менее постоянные изменения, то мы должны желать, чтобы он сохранял евклидовы инварианты»[11]. Лукас, несомненно, прав в том, что преобразования, лежащие в основе евклидовой геометрии, фиксируют в себе необходимые инварианты деятельности.

Позиция Лукаса, однако, не является последовательной. Это проявляется, в частности, при решении вопроса о связи между геометрией и механикой. Опирается ли геометрия на представления о твердом теле, выработанные механикой, или все ее представления имеют самостоятельный и первичный по отношению к механике характер? Лукас соглашается с тем, что геометрия как строгая наука не может быть построена на понятиях механики, но с другой стороны, он должен признать тот факт, что представления геометрии несомненно связаны с представлением твердого тела, отражают это представление в своих понятиях. Чтобы избежать прямолинейного эмпиризма, заключающегося в выведении геометрии из представлений механики, он формулирует тезис об отношении геометрии к понятию твердого тела в следующей, несколько метафорической форме: «...Что касается твердости и размера, евклидова геометрия обеспечивает единственную экологическую среду, в которой эти понятия являются жизненными»[12]. Смысл этого положения состоит в том, что хотя геометрия не эмпирическая наука и не выводится из понятия о твердом теле, ее определения сформулированы таким образом, чтобы дать этому понятию наиболее адекватное выражение. Это, однако, ложный ход, который ставит механику впереди геометрии и сводит исходную праксеологическую установку к тривиальному эмпирическому конвенционализму.

Истинное отношение геометрии к опыту, в частности, отношение ее к понятию твердого тела, выявляется только на основе представления об идеальной предметности. Геометрии как концептуальная система, несомненно, с самого начала основана на представлении о твердом теле, но это не представление, взятое из опыта и не идеализированное представление механики, а представление универсальной онтологии, на основе которого сформировались как идеализации геометрии, так и первичные идеализации механики.

5. О реальности математических объектов

Праксеологическое понимание интуитивной основы математического мышления позволяет нам также по новому посмотреть на старый спор о реальности математических абстракций: являются ли эти понятия фикциями, изобретением человеческого ума, либо они содержат в себе некоторое реальное содержание, продиктованное структурой мира, в котором мы существуем? Изложенные соображения дают нам возможность в определенной мере защитить математический реализм и прояснить его действительные основания.

Конечно, нельзя думать, что математическому треугольнику соответствует реальный треугольник, существующий в некотором внечувственном мире. Идея субстанциального существования для математики неприемлема. Но, с другой стороны, ясно, что система исходных представлений математики не вымысел, не конвенция и не плод свободного воображения. Если система первичных математических идеализаций однозначно определена структурой предметной онтологии, то она имеет несомненную объективную значимость и прямое отношение к структуре нашего мира. Не настаивая на субстанциальном существовании математических объектов, мы можем говорить об их реальной значимости, об их обусловленности сущностными отношениями нашего мира.

В своем отношении к миру человек строит два уровня общих представлений: теоретические представления о мире, систематизирующие опыт, и онтологические представления, продиктованные деятельностной установкой мышления. Оба этих уровня представлений обладают объективностью и реальностью, ибо оба они определены практическим отношением человека к миру. Если некоторая математическая теория предопределена в своих исходных интуициях универсальной онтологией, то ей не может быть отказано в статусе реально значимой теории.

Анализ показывает, что существуют три основных смысла, в которых мы можем понимать утверждение о реальности (реальной значимости) математического объекта. Мы можем говорить о реальности первичных математических объектов, во-первых, в том смысле, что они являются элементами онтологически детерминированных понятийных систем. Арифметика и элементарная геометрия реальны, поскольку они порождены представлениями идеальной предметности в качестве их формального коррелята. Евклидова геометрия, несомненно, реальна, ибо она имеет онтологический статус, которого не имеет никакая другая геометрия. Неевклидовы геометрии имеют эмпирическое значение, состоящее в возможности их приложения к предметам опыта, но ни одна из них не имеет онтологической значимости, которая состоит в непосредственной связи ее принципов с универсальной онтологией.

Во-вторых, мы можем говорить о реальности математического объекта в смысле его прямого соответствия некоторым аспектам универсальной онтологии. При определении реальной значимости математических объектов в первом смысле мы исходили из факта онтологической детерминации теории в целом. Праксеологическая точка зрения, однако, не запрещает установление в отдельных случаях и прямой корреляции математических объектов с определенными аспектами универсальной онтологии. Рассматривая понятие материальной точки в механике мы можем указать на элементы физического опыта, определяющие законность введения этой абстракции, такие как независимость силы тяжести от объема тела и т.п. Аналогичным образом, в некоторых случаях, мы можем идти по пути прояснения онтологического смысла отдельных математических понятий. Будет недалеко от истины, если мы скажем, к примеру, что в понятии числа отражается свойство пространственной разделенности предметов, значимое для деятельности. Понятие числа становится реально значимым в том смысле, что оно ставится в соответствие с некоторыми аспектами универсальной онтологии или с условиями возможности действия. Хотя возможности такого подхода невелики, они, несомненно, существуют и соответствуют пониманию математических структур как обусловленных структурой универсальной онтологии.

Наконец, математическим объектам может быть приписана реальная значимость также в том смысле, что они, будучи умозрительными объектами, тем не менее обладают гарантированной эмпирической интерпретацией. Как уже было сказано выше, человеческое познание и сама человеческая деятельность были бы невозможными, если бы эмпирическая реальность радикально расходилась с представлениями, выраженными в онтологии. Мы не можем утверждать в строгом эмпирическом смысле, что все явления имеют причину, но само наше существование говорит о том, что достаточное количество явлений подчиняется этому закону. Но это значит, что онтологические принципы всегда имеют гарантированную (хотя и не обезательно идеально точную) интерпретацию в мире опыта. Это относится и к исходным понятиям математики. Не все реальные совокупности объектов могут быть подведены под понятие числа или под понятие множества, но само наше существование и наличие эффективной деятельности говорит о существовании объектов в эмпирическом мире, которые с достаточной точностью воспроизводят свойства этих идеальных понятий. Отсюда следует, что математические объекты реальны также и в том смысле, что в отличие от теоретических фикций они обладают гарантированной и общезначимой интерпетацией в сфере опыта.

Праксеологический априоризм, таким образом, является одновременно и реализмом, так как он оправдывает тезис о реальной значимости математических объектов, утверждая коррелятивность исходных математических структур структуре универсальной онтологии. В этом смысле праксеологический априоризм оправдывает традиционную веру математиков в реальную значимость математических объектов и теорий. Ясно, что реальная значимость в этом смысле, как и априорность, относится только к исходным объектам математики, данным в аподиктической очевидности.

4 Зак. 3711

В этом плане, как я думаю, могут быть оправданы реалистические высказывания К. Геделя, которые на первый взгляд кажутся слишком прямолинейными, К. Гедель, как известно, настаивал на том, что математика имеет дело со специфическими объектами, существующими во внечувственном мире, до и независимо от математических теорий. «Мне кажется, — писал Гедель, — что допущение таких объектов столь же законно, как и допущение физических тел, и имеется не меньше оснований верить в их существование»[13]. Он допускал также, что наряду со способностью к чувственному восприятию человек обладает способностью внечувственного восприятия, обеспечивающего ему доступ в мир математических объектов[14].

Первая идея, если ее понять в смысле утверждения о субстанциальном существовании, конечно, не может быть принята. Однако она вполне приемлема как указание на предметную онтологию, существующую независимо от математики и определяющую структуру исходных математических идеализаций. Онтологические идеализации сами по себе не имеют субстанциального бытия, рядоположенного с миром физических объектов, но эти идеализации ничуть не менее объективны, чем свойства и отношения, фиксируемые в опыте. Физическая картина мира, отражающая многообразие предметов в пространстве и времени, и система онтологических представлений, отражающая абстрактные свойства реальности, значимые для деятельности, одинаково реальны. Исходные математические идеализации отличаются от физических абстракций лишь тем, что они относятся не к миру опыта, а к миру отношений, выявляемых деятельностью. Они отражают категориальные подразделения и имеют ничуть не меньшее отношение к реальности, чем законы физики.

В этом плане получает определенный смысл и идея Геделя об аналоге восприятия, раскрывающего мир математических объектов. Гедель безусловно прав в том, что исходные интуиции математики не порождены опытом и, следовательно, должны быть отнесены к некоторому другому механизму сознания. С праксеологической точки зрения является очевидным, что наряду с чувственным восприятием, зависимым от опыта, познание неизбежно опирается на внечувственные интуиции, порождаемые деятельностью. Хотя интуиции сознания, нацеленные на формы мышления, не открывают субстанциального существования, они могут быть поняты как родственные ощущению в том смысле, что они вскрывает объективные подразделения реальности, существенные для деятельности.

С праксеологической точки зрения мы должны исключить истолкование реальной значимости математических объектов в натуралистическом плане, через понимание их как производных от чувственно воспринимаемых предметов и их совокупностей[15]. Понятие числа не может быть оправдано механизмами чувственного восприятия и опыта, ибо образование идеи совокупности предметов в опыте уже обусловлено категориальной онтологией, предполагающей идею числа. Натуралистический реализм типа того, который выдвигается в работах Мэдди, может быть лишь отчасти оправдан соображением, приведенным выше, а именно тем положением, что онтологически значимые структуры математики по самому смыслу априорного знания обладают гарантированной эмпирической интерпретацией.

Основная проблема современной философии математики состоит в том, чтобы прояснить отношение математических понятий к аспектам реальности, составляющим первичное основание математического мышления. Мало кто сомневается, что существует некоторое устойчивое видение реальности, определяющее структуру исходных математических представлений. Речь идет лишь об уяснении его природы. Праксеологическая теория онтологии указывает на природу представлений, лежащих в основе математики, и дает возможность обосновать как априорность, так и реальную значимость исходных математических структур. Уяснение деятельностной природы очевидностей, лежащих в основе математического мышления, обосновывает его абсолютность, ибо показывает, что непогрешимая очевидность не вымысел, не мистификация абстракций, а необходимая структура сознания, которая является одновременно и универсальным механизмом эмпирического синтеза и интуитивной основой первичных математических идеализаций. Деятельностная теория аподиктической очевидности открывает истинную основу математики и указывает путь к ее реальному обоснованию.

Примечания

[1] См.: *Лейбниц Г. В.* Новые опыты о человеческом разуме // *Лейбниц Г. В.* Соч.: В 4-х т. М., 1983. Т. 2. С. 52—53.

[2] См.: *Кант И.* Критика чистого разума. Соч.: В 6-ти т. М., 1964. Т. 3. С. 152—153.

[3] Относительно закона действия и противодействия Кант говорит: «Ньютон не решался доказать его a priori, а потому ссылался на опыт». См.: *Кант И.* Соч.: В 6-ти т. М., 1966. Т. 6. С. 157.

[4] См. *Гуссерль Э.* Логические исследования. Пролегомены к чистой логике. СПб., 1909. Т. 1. С. 101.

[5] *Пиаже Ж.* Понятие числа у ребенка // *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М., !969. С. 78—80.

[6] Этот взгляд на природу математики широко распространен среди ученых, применяющих математику на практике. Детальная его разработка была недавно представлена Флейшхакером, который рассматривает всякую математическую теорию как результат структурирования некоторого опыта. (См.: *Fleischhacker L. E.* Beyond structure: the power and limitations of mathematical thought in common sense, science and philosophy. Berlin; Bern; New York; Paris; Wien; Lang, 1995). Однако такое

понимание математики, будучи внешне убедительным, является существенным огрублением ситуации, поскольку здесь упускается из виду онтологический характер первичных структур математики, которые относятся непосредственно к форме мышления и не могут быть представлены как производные от опыта в каком-либо смысле.

[7] См.: *Кант И.* Критика чистого разума... Соч. Т. 3. С. 447. Очевидно, что такие понятия, как «интуиция на основе знаков» и «предметная очевидность», посредством которых Кант характеризует алгебраические преобразования, — это не созерцание, лежащее в основе арифметики и геометрии.

[8] Гуссерль убежден, что «искусство измерения явилось основой для универсальной геометрии и со всем ее миром чистых форм». См.: *Husserl E.* The Crisis of European Sciences and Transcendental Philosophy. Evanston, 1970. P. 28. Основная идея, лежащая в основе понимания априорного знания у Гуссерля состоит в том, что оно появляется *на основе опыта*, хотя и *не из опыта*, т.е. посредством некоторого механизма, связанного с опытом, но отличного от обычной абстракции.

[9] *Husserl E.* The Origin of Geometry // *Husserl E.* The Crisis of European Sciences and Transcendental Philosophy. Evanston, 1970. P. 356—358.

[10] *Lorenz K.* Kant's doctrine of the apriori in the light of contemporary biology // *Plotkin H. C.* (Ed). Learning, Development and Culture: Essays in Evolutionary Epistemology. New York: John Wiley. 1982. P. 125.

[11] *Lucas J. R.* Euclides ab omni naevo vindicatus // The British Journal for the Philosophy of Science. 1969. № 1. P. 7.

[12] Ibid., p. 8.

[13] *Godel K.* Russells mathematical logic // *Pears D. F.* (Ed). Bertrand Russell. Collection of critical essays. New York, 1972. P. 207.

[14] *Godel K.* What is Cantor's continuum problem? // Philosophy of mathematics. Selected readings. New York, 1964. P. 484.

[15] *Maddy P.* The roots of contemporary platonism // The Journal of Symbolic Logic. 1989.Vol. 54. № 4. P. 1140.

КОММЕНТАРИИ

С. Н. Бычков

Невозможно не согласиться с утверждением В. Я. Перминова о том, что «для всякой философии математики, претендующей на адекватность», недопустимы как эмпиризм, так и конвенционализм, но следует ли отсюда, что этим двум условиям отрицательного характера лучше всего может удовлетворять некоторым образом усовершенствованная версия кантовского априоризма?

С позиций априоризма естественным выглядит утверждение автора о том, что «глубинные представления о пространстве... одинаковы у всех народов независимо от эпохи и географического положения». Но так ли это в действительности? Соответствует ли это реальной истории развития геометрических представлений?

Одним из наиболее фундаментальных представлений евклидовой геометрии является бесконечная делимость величин (непрерывность пространства). Данный факт легко доказывается при помощи первого постулата, разрешающего соединять две произвольные точки отрезком прямой, и третьего постулата, гарантирующего возможность проведения из любой точки окружности произвольного радиуса. Э. Кассирер, как известно, подчеркивал невозможность вывода о непрерывности пространства на основе чувственных представлений. Но не ясно и то, каким образом непрерывность пространства может быть обоснована при помощи обращения к практике.

Ничто не указывает на наличие представления о неограниченной делимости величин в математике восточных цивилизаций. Но и в Древней Греции выработка соответствующих представлений заняла довольно много времени. Аристотелю пришлось вести борьбу против концепции неделимых сразу на два фронта. С одной стороны он отстаивал свое учение о континууме в противовес атомизму Демокрита, с другой – возражая своему учителю. Анализируя выдвинутую Платоном в «Тимее» концепцию, согласно которой тела «слагаются из плоскостей и разлагаются на плоскости» (О небе, 298 b 34 — 299 a 1), Аристотель отмечает: «ясно с первого взгляда, сколько противоречий с математикой из нее вытекает, а между тем справедливо либо не ниспровергать математику, либо ниспровергать ее на основании принципов более достоверных, чем ее аксиомы» (Там же, 299 а 4-6).

На мой взгляд, априористский подход в философии математики, общие контуры которого развернуты в комментируемой работе, много бы выиграл в убедительности, если бы удалось объяснить, почему у Аристотеля и стоиков праксеологические идеализации были одними, а у платоников и Эпикура – прямо противоположными. Можно ли это обстоятельство истолковать как следствие различий в условиях деятельности?

Ньютоновское естествознание, послужившее предпосылкой разработки Кантом его философского учения, само в значительной степени опирается на идеализации евклидовой геометрии. Может быть, плодотворнее было бы говорить об объяснении особенностей априоризма Канта, исходя из природы античной геометрии, нежели, наоборот, выводить специфические геометрические представления древних греков, существенно отличающиеся от представлений о пространстве в восточных цивилизациях, из тем или иным образом усовершенствованной концепции Канта? Корректно ли *древнегреческому стилю* математического мышления, даже если он на сегодняшний день доминирует в математике всего мира, придавать статус фундамента философской концепции, по самому своему замыслу призванной отыскивать *инвариантные* характеристики бытия и познания? Для этого во всяком случае необходимо показать, что аксиоматическое изложение геометрии у Евклида представляет собой действительно единственно возможную форму изложения данной научной дисциплины, а не принимать этот исторический факт в качестве бесспорной предпосылки глобальной философской концепции.

А. Н. Кричевец

В. Я. Перминов поставил перед собой чрезвычайно трудную задачу — выделить в человеческом знании априорную часть и дать ее обоснование. Среди прочего такая независящая от опыта часть должна быть выделена в математике. Речь идет не о том, что в математике есть абсолютно устойчивая и неизменяемая система утверждений, а о том, что может быть выделена совокупность оснований человеческой деятельности вообще, среди которых, наряду с категориями и логическими законами, находятся также и некоторые базовые математические системы. Таким образом, говоря о том, что «высшие нормы, регулирующие познавательную деятельность, имеют практическую природу и должны быть выведены из практической функции знания», В. Я. Перминов, по-видимому, имеет в виду нечто близкое кантовским условиям возможности: без системы представлений, описываемой автором, невозможна человеческая деятельность. В эту систему включена «предметная онтология», «которая представляет собой систему идеализированных представлений о предметах, проистекающую из общих условий деятельности». Неизменность и некорректируемость арифметики, входящей как часть в предметную онтологию, есть поэтому не просто эмпирический факт, а следствие того, что она является основанием деятельности, принадлежит форме деятельности и обусловливает содержание деятельности.

Должно ли в общем случае условие возможности какой-либо функции субъекта быть его актуальным знанием? Для кантовских категорий ответ был бы отрицательный — будучи регулятивами опыта, категории не обязаны осознаваться субъектом опыта. Более того, рассмотрение категорий в том же контексте, что и предметное знание, приводит, по Канту, к антиномиям. Точно так же и математика как условие возможности деятельности не обязана быть известной субъекту этой деятельности. Общественная практика, разумеется, не может быть организована так, как если бы дважды два равнялось бы пяти, но это не значит, что агент практики должен знать, что дважды два — четыре. Общественная практика вполне может ограничиться эксплицитным числовым рядом, в котором после 15 идет число «много», с соответствующей усеченной арифметикой. Я понимаю здесь практику совершенно натуралистически, но ведь и В. Я. Перминов не дает каких-либо иных определений деятельности и практике. Таким образом, арифметика как часть предметной онтологии может рассматриваться только как некоторый максимум арифметик, возможных для предметно действующих субъектов.

В таком случае не ясен статус самой арифметики как целого (например, в том ее виде, как она описана Пеано). Хотелось бы, чтобы автор прояснил здесь отношения между знанием и формальными условиями деятельности.

Отметим, что автор не совсем точно передает позицию эволюционной эпистемологии. В статье «Философские проблемы математики в свете эволюционной эпистемологии», раскрывая эту позицию, Йехуда Рав пишет: «логико-операционный комопнент основывается на генетически передающихся когнитивных механизмах и посему постоянен. (Это не означает, что логико-операционный уровень готов к применению с момента рождения каждого индивидуума; он является субъектом онтогенетического развития. Генетическая программа является *открытой программой* (Майр), которая материализуется в фенотипе под влиянием внутренних и внешних факторов и реализуется поступенчато в развитии индивидуума)». Таким образом, генетически закрепляется лишь способность порождать математические знания, которые обладают адаптивной ценностью будучи связаны с поведением (деятельностью). Аналогом кантовских условий возможности является здесь способность порождать знание, а не само знание. К. Лоренц пишет, что такие «открытые программы» представляют собой знание, и даже знание более высокого порядка, чем конкретное знание (отметим здесь согласие с утверждением В. Я. Перминова о том, что категории дают некоторое знание о мире), но он не стал бы утверждать, что это знание точно так же дано индивиду, как иные его знания.

Мне кажется, что приемлемый ответ на вопрос о статусе пеановской арифметики В. Я. Перминов дает в следующих словах: «Элементарная математика жестко детерминирована предметной онтологией и в этом смысле имеет внешнее основание для своих понятий», т.е. пеановская арифметика дает нам некоторый ориентир в понимании этой детерминанты, но не является знанием, сопряженным с общественной практикой. Но, во-первых, остается вопрос о границе, между необходимо связанными с практикой арифметическими знаниями и знаниями, не обладающими такой связью, а во-вторых, некоторые из утверждений автора плохо согласуются с позицией, здесь реконструированной.

В. В. Тарасенко

Текст, на мой взгляд, исходит из различения уровней эмпирического и практического познания. В частности, автор вводит отражение предметов в эмпирическом смысле и отражение предметов в практическом смысле. При этом практическая сторона связывается с идеальными предметностями, а эмпирическая – с содержанием. При сохранении автором субъект-объектной онтологии, а также установки, связанной с ведущей ролью категорий в познании, возникает, во-первых, проблема некоммуникабельности эмпирического и практического знания и, во-вторых, само понятие практики становится противоречивым: получается, что практика — это внеисторическая деятельность без времени и изменений (так как она выражена в категориях), т. е. по сути она есть деятельность без деятельности. Если практическое первично, не зависит от содержания, а зависит от категорий и деятельностных установок, то непонятно как возникает само практическое познание – откуда берутся эти самые неизменные установки и категории, в случае, когда содержание опытного знания на них не влияет. Из онтологических структур мышления? Из интуиций? Но откуда они берутся, каковы механизмы их формирования, если категории как феномены этих структур внеисторичны, эквифинальны и носят внешний по отношению к содержанию предметов характер. При постулировании этих условий время, изменение невозможны, а поэтому невозможно представление практики как деятельности.

В. А. Шапошников

Мне хотелось бы высказать несколько соображений о трудностях априоризма вообще и «праксеологического» априоризма в частности.

В. Я. Перминов видит существенный недостаток кантовского априоризма в том, что априорное знание вводится в нем «без теоретического обоснования, исключительно на основе примеров». Да, это действительно так, но мог ли Кант поступить иначе? Ведь всякое теоретическое обоснование уже предполагает априорные знания, следовательно, мы получили бы в этом случае либо порочный круг, либо уходящую в бесконечность иерархию уровней «априорного». Введение абсолютно априорного делает невозможным теоретизирование над ним. Здесь нам остается лишь «незаконнорожденный» способ рассуждения, как выразился Платон по известному поводу. Удается ли автору статьи избежать этого недостатка априоризма, который имеется в версии Канта? На мой взгляд, нет. В статье мы не найдем какого-либо теоретического обоснования для последней и абсолютной инстанции, к которой апеллирует автор, для «практики».

Еще один аспект кантовского априоризма вызывает критическое отношение автора – это «антропологичность». На вопрос: «Чьи это априорные формы?» Кант отвечает: «Человека». Если быть точным, следовало бы ответить: «Трансцендентального субъекта». Но это, по существу, означало бы уход от ответа, да по-другому и нельзя, если хочешь быть до конца корректным. Априорные формы можно лишь постулировать, как и вещи в себе, говорить же что-либо определенное о них означает нарушать их исходный смысл. Ведь, начав в положительном ключе обсуждение вопроса о том, чьи это формы, мы, вслед за ответом — «человека», не можем не задать вопроса: «А у разных людей они разные или нет?». Отсюда уже недалеко до «людей, чудовищ и богов», а там и до вопроса: «Откуда взялись эти формы?». По этой дороге пошли Лоренц и эволюционная эпистемология. Здесь мы покидаем почву трансцендентальной философии и «теряем идею априорного знания». Хотя В. Я. Перминов не одобряет ход мысли Лоренца, на мой взгляд, он также делает нечто подобное. Он связывает априорное знание с «универсальными структурами мышления, *порожденными* его практической ориентацией» (курсив мой. — *В. Ш.*), или пишет, что априорные представления – это универсальные нормативные представления, *проистекающие* из необходимой деятельностной ориентации мышления. Вообще — рискует говорить о «формировании» и «становлении» априорных элементов.

Наконец, кантовскому априоризму ставится в упрек, что он «не провел ясной границы между априорным и апостериорным». Но возможно ли *ясно* провести такую границу? Сначала создается впечатление, что автор относит к области априорного арифметику и евклидову геометрию. Далее уточняется: лишь «исходные представления» арифметики и евклидовой геометрии. Еще дальше выясняется, что и это не совсем так, но все же некий «априорный центр» в математике есть. Мне представляется, что автор поступил совершенно правильно, отказавшись от явного предъявления заведомо априорного знания: такое предъявление невозможно. Какое положение математики ни предъявить, эмпирик всегда сможет вполне законно указать на тот опыт, которому это понятие соответствует. Итак, праксеологический априоризм также не способен провести ясной границы между априрным и апостериорным.

В заключение хотелось бы отметить, что хотя В. Я. Перминов полагает, что праксеологический априоризм предоставляет обоснование априоризма, без апелляции к «мистике» и «сверхъестественному», однако понятия «деятельностная онтология» и «практика», как их употребляет автор, по своей мистичности и сверхъестественности вряд ли сильно уступят понятию «Бог». Едва ли можно согласиться с автором, что указание на деятельность и практику есть *окончательное раскрытие истины* о природе математики. Эти понятия сами требуют соответствующего разъяснения и раскрытия, а это — нетривиальная задача.

Видимо, следует явно оговорить: я не сторонник эмпиризма. При попытке последовательного проведения эмпиризма мы также сталкивается с многочисленными сложностями. Я лишь хотел обратить внимание на то, что предложенная версия «праксеологического априоризма» также не разрешает некоторые из тех проблем, с которыми столкнулся уже кантовский априоризм.

В. А. Янков

Мне, честно говоря, не очень ясно, какая геометрия подразумевается в докладе В. Я. Перминова. Наши представления о трёхмерной геометрии как о полной аксиоматической системе восходят к Давиду Гильберту и, следовательно, имеют довольно позднее происхождение. Исторически, особенно на ранних этапах развития, представление о геометрии менялось. Я перечислю умозрительно восстанавливаемые стадии развития. Но хочу сказать, что даже если реальное развитие шло по-другому, то все подлежащие перечислению «понимания» **могли** иметь место, а поэтому непонятно, какое из этих пониманий является априорным, тем более, что некоторые из них противоречат друг другу.

Геометрия Фалеса, скорее всего, была наукой о реальных точках и линиях, которые геометр вычерчивает на ограниченном куске плоскости.

Геометрия Мамерка (это **возможная** спекулятивная реконструкция) осознала безграничность пространства, но её объекты оставались фалесовскими. В ней нет безграничных линий, но предусмотрена возможность неограниченного продолжения отрезков.

Замысел геометрии Пифагора заключался в создании дискретной геометрии «монад» и конструкций из них («чисел»).

Геометрия позднего пифагорейства приходит к бесконечной делимости величин и становится «геометрией величин». Последние являются её подлинными объектами и вовсе не мыслятся состоящими из точек. Таково и основное понимание геометрии в Греции («Начала»).

Вероятно, у Анаксагора в основании геометрического мира лежат актуально бесконечно-малые «семена», а из них состоят одномерные, двумерные и трёхмерные объекты.

У Демокрита в основе лежат неделимые части атомов (будущие «амеры» Диодора Крона).

Кант, провозглашая априорность геометрии, тоже не имел ещё о ней того понятия, которое появилось вместе с «Основаниями геометрии Гильберта». Это связано с тем, что не была ещё осознана полнота вещественной прямой, по причине чего и пространство нельзя было мыслить как непополнимое новыми точками.

Да и современная геометрия имеет несколько слоёв: топологический, проективный, афинный, метрический. Тезис априорности геометрии поэтому требует выбора среди нескольких возможностей, а затем обоснования, почему именно эта возможность претендует на априорность.

ОТВЕТ АВТОРА

Высказанные возражения не затрагивают, как мне кажется, оснований моей позиции, но показывают, вместе с тем, необходимость некоторых уточнений.

А. Н. Кричевец поднимает вопрос об онтологической основе априорного знания. Может ли условие возможного опыта быть знанием субъекта в смысле его объективной значимости? Для Канта, очевидно, это не так, ибо условия возможного опыта — лишь регулятивы мышления, но не знание о положении дел в мире. Я пытался обосновать другую позицию. Суть ее состоит в том, что регулятивы знания есть регулятивы деятельности, а если это так, то сама фактическая возможность деятельности доказывает, что эти регулятивы имеют объективное, хотя, может быть, и не абсолютное значение. Принцип причинности, безусловно, есть только регулятив, проистекающий из потребностей практики, но не констатация дел в мире. Высказывание «Каждое явление имеет причину» означает не то, что некто обладает знанием о всех явлениях, а лишь то, что мы желаем иметь дело с причинно обусловленными явлениями, ибо все другие, находятся за пределами нашего контроля. Это, таким образом не знание о мире, а лишь праксеологический идеал, постулирование реальности, благоприятной для действия. Но наша фактическая способность к действию, опирающаяся на причинные связи, говорит о том, что реальный мир в достаточной степени удовлетворяет этому идеалу. Таким образом, я думаю, что мы можем утверждать как априорный характер универсальной онтологии, так и ее объективную значимость.

А. Н. Кричевец склонен думать, что реальная практика ограничивается некоторыми простыми и приближенными установками и не нуждается в каких-либо вечных принципах. Доля истины здесь есть. Человек, мыслящий логически, в большинстве случаев не имеет представления о правилах логики, человек, который считает, может не иметь ясных представлений о правилах счета и т.п. Не противоречат ли эти факты идее априорных форм мышления и, в частности, положению об априорности исходных представлений математики? Здесь я, в общем, согласен с подходом Э. Гуссерля, который считал необходимым строго различать практику мышления и идеальные нормы мышления, проистекающие из его сущности. Практика мышления зависит от психологии и опирается на приближенные и корректируемые принципы, в то время как априорные нормы объективны и некоректируемы. Тот факт, что люди сплошь и рядом мыслят противоречиво, не колеблет, по Гуссерлю, истинности закона непротиворечия как априорного и обязательного для всякого мышления. Априорные нормы, даже не будучи выраженными, всегда присутствуют в сознании как его интерсубъективная основа, обеспечивающая его объективность.

Что касается разделения априорной и не априорной части математики, то я пытался обосновать здесь то положение, что этот вопрос не может быть решен на основе каких-либо формальных признаков. С праксеологической точки зрения общий признак априорности утверждения состоит в его аподиктической очевидности. Это значит, что мы не можем говорить об априорности арифметической или геометрической теории в целом, а можем говорить лишь об априорности простых положений в этих теориях, обладающих самоочевидностью. Граница между априорным и не априорным содержанием математики, с этой точки зрения, не может быть определена рационально, но тем не менее она не субъективна и достаточна для выделения определенной части математики как несомненно априорной.

С. Н. Бычков ставит под сомнение мой тезис, что представления о пространстве и времени одинаковы у всех народов, независимо от эпохи и географического положения. Почему, спрашивает он, у Аристотеля и стоиков праксеологические идеализации были одними, а у Платона и Эпикура — прямо противоположными. Я думаю, что такая постановка вопроса смешивает праксеологические идеализации как элемент сознания и их экспликацию в философских системах. Мы имеем основание предполагать, что праксеологические идеализации были совершенно одинаковыми у всех этих мыслителей, а различия относятся только к процессу концептуализации, т.е. к процессу создания понятийной системы, соответствующей этим идеализациям. Априорность системы представлений сама по себе не предопределяет полной согласованности ее возможных концептуальных выражений, а различие концепций не говорит о различии праксеологических идеализаций, лежащих в их основе. Отсутствие явно выраженной идеи непрерывности у древних геометров не означает, что некоторые из них представляли прямую в качестве прерывной. Древние геометры отличались друг от друга и, я думаю, и от современных геометров не составом первичных геометрических интуиций, а лишь степенью их выражения в понятиях.

Я не могу также принять упрек С. Н. Бычкова, состоящий в том, что я абсолютизировал изложение геометрии у Евклида, превратив его в основание глобальной философской концепции. Тезис об априорности геометрии относится не к какой-либо исторической форме геометрической теории, а исключительно к статусу исходных геометрических представлений. Он означает лишь то, что геометрическая теория возникает не на основе опыта или соглашений, а на основе особого рода идеализаций, необходимых для сознания. Я утверждаю, что и Евклид, и Гильберт, несмотря на все различия в понимании способов изложения геометрической теории, формулируя свои аксиомы, стремились описать *одну и ту же* независимую от них идеальную реальность, лежащую в основе геометрии. Мои усилия направлены на понимание природы этой реальности. Праксеологическая концепция геометрии исходит не из какой-либо исторической формы изложения геометрического знания, а из непреложной данности исходных геометрических идеализаций, которая присутствует при любом его изложении.

Априористская философия математики, конечно, не совсем безразлична к различным формам изложения геометрии, и здесь есть момент, который в определенной степени оправдывает замечание С. Н. Бычкова. Изложение геометрии у Евклида и греческий стиль математического мышления являются более соответствующими априористской концепции в том отношении, что здесь математическая структура еще не скрывает своей прямой связи с независимой от нее идеальной реальностью. Аксиомы и постулаты Евклида — это не основания для дедукции, а скорее описание интуитивной основы геометрической науки, определенная ссылка на реальность, которая была вытеснена за рамки геометрии при более поздних ее изложениях. Праксеологическая философия математики, ставя своей задачей понять связь геометрии с ее исходной интуитивной основой, осуществляет определенное возвращение к евклидовскому видению геометрии как предметной науки. В этом смысле я могу согласится с тем, что априоризм в геометрии в большей степени апеллирует к ее евклидовскому изложению, чем к какому-либо другому. Но эта апелляция, я думаю, не абсолютизирует аксиоматическую форму евклидовой геометрии, а лишь указывает на то, что в этой форме содержатся моменты, важные для понимания природы математики в целом.

Вопрос, поставленный В. А. Янковым, несомненно, правомерен. Если кто-то высказывает убеждение в априорности геометрии, то он должен ответить на вопрос о том, какая из существующих геометрических теорий в наибольшей степени соответствует этому понятию. Здесь, на мой взгляд, нужно четко разделять два отрезка в истории геометрии: до появления геометрии Лобачевского и после ее появления. Геометрии Фалеса, Пифагора, Анаксагора и т.д., будучи концептуально различными, строятся на едином интуитивном основании, и они, на мой взгляд, не могут различаться в смысле априорности. Проблема возникает лишь с появлением неевклидовых геометрий, которые впервые вывели основания геометрии за пределы аподиктически очевидного. С признанием этих геометрий философия математики должна была либо отказаться от идеи априорности вообще, либо продолжать защищать эту идею при некотором изменении смысла априорности, как это делали некоторые неокантианцы, либо, наконец, отнести понятие априорности только к элементарной математике, объявив все новые геометрии формальными структурами, не имеющими статуса априорности. Я защищаю эту последнюю позицию как наиболее адекватную. С праксеологической точки зрения единственным критерием априорного знания является критерий аподиктической очевидности и ясно, что евклидова геометрия занимает здесь особое место. Она априорна в том смысле, что в отличие от всех других геометрий ее внутренняя структура однозначно задана аксиомами, имеющими характер самоочевидных истин.

В. А. Шапошников отвергает предложенную схему обоснования априорного знания на том основании, что всякое обосновывающее знание уже опирается на априорные принципы. Против того факта, что обоснование априорного знания неизбежно само опирается на априорное знание, возражать нельзя. Но ведь это общий принцип обосновательного мышления! Мы обосновываем грамматику с помощью законов грамматики, обосновываем логику, опираясь на правила логики и т.д. Если Шапошников хочет вообще избежать такого рода саморефлексивного мышления, то он должен был бы выбросить из сферы знания всю философию и еще многое, кроме нее. Праксеологическая теория аподиктической очевидности исключает всякую иерархию априорного. Обосновывая логику, мы пользуемся, конечно, теми же правилами логики, которые обосновываем. Но избежать саморефлексии мы не можем. Был бы сделан большой шаг вперед в теории познания, если бы мы сумели теоретически обосновать законность саморефлексии. Но, насколько я понимаю, в настоящее время мы не имеем даже и намеков на такое обоснование.

Между праксеологией и эволюционной эпистемологией имеется существенное различие и оно связано, прежде всего, с отношением к классической теории априорного знания. Принципы навязанные субъекту инвариантами среды обитания — именно так понимает эволюционная эпистемология природу априорного знания, — это часть объектного знания, которая отличается от остального знания только своей стабильностью и внедренностью в психологию мышления. Здесь нет формы мышления, независимой от его содержания. Праксеологическое априорное, порождаемое деятельностной ориентацией субъекта, — это форма мышления, значимая для всякого знания и независимая от его содержания. Только в этом плане, я думаю, мы можем понять и реабилитировать кантовское разделение формы и содержания мышления, составляющее сущность классической теории априорного знания.

Я не могу принять тезис, что для всякого примера априорного знания можно указать опыт, которому это знание обязано своим возникновением. В принципе, конечно, такого рода фиктивные эмпирические объяснения всегда могут быть выдвинуты. Но ведь адекватная теория априорного знания способна обосновать и несостоятельность таких объяснений. С праксеологической точки зрения мы обосновываем не только априорность исходных арифметических истин, но и некорректность их выведения из процедуры счета. Здесь нет оснований для скептицизма. История науки показывает, что псевдобъяснения, в конечном итоге, всегда уступают место истинным объяснениям.

В. В. Тарасенко усматривает некорректность моего изложения в том, что понятие практики понимается слишком широко, как внеисторическая деятельность без времени и изменений. Да, я полагаю, что для обоснования интуиций, лежащих в основе категорий, логики и математики, мы должны рассматривать практику именно в своем предельно абстрактном понимании как преобразовательную деятельность вообще, подобно тому как в гносеологии мы рассматриваем понятие материи вообще, без разбиения ее на типы и формы. Мы выводим категории не из каких-то частных подразделений практики, а из практической ориентации мышления вообще. Категории неизменны именно в силу неизменности (инвариантности) общей структуры практики.

АНАЛИТИКА ЭГОИСТИЧЕСКОГО ДИСКУРСА

Гутнер Г. Б.

Философия науки последних десятилетий охотно обращается к социальным темам. Представление о науке (в том числе и о математике) как об общественном феномене имеет различные аспекты и, с другой стороны, позволяет находить весьма интересные постановки «классических» философских проблем, связанных, например, с гносеологией или онтологией. Особенностью большинства такого рода исследований является отношение к социуму как к исходному пункту рассуждения. Сама наука оказывается конституирована благодаря некоторому сообществу, а потому понимание научного мышления необходимо оказывается производным от изучения жизни этого сообщества. Подобный ход, при всей его плодотворности, может растворить философию науки в чисто историческом или социологическом исследовании и потерять саму специфику философского рассуждения. В предлагаемой работе мне хотелось бы осуществить обратный ход: дедуцировать понятие социума из анализа научного (в данном случае — математического) мышления. Как «данность» и исходный пункт исследования я предполагаю взять не сообщество, а мысль, поскольку каждый оказывается в состоянии воспроизвести ее и рассмотреть основные способы ее отношения к своему предмету. Таким образом, наш анализ будет оставаться в пределах субъектного (или трансцендентального) горизонта и нашей задачей будет увидеть, не оказывается ли само понятие социума необходимым для осуществления мысли в этом горизонте.

Начнем с того, что попробуем рассмотреть вполне естественную для математика ситуацию — решение задачи. В самом общем виде всякая процедура решения подразумевает сформулированное заранее условие и определенную цель: например, нахождение неизвестной величины или доказательство утверждения. Что представляет собой условие? Это набор фактов и объектов (утверждений или графических конструкций), которые не имеют друг с другом никакой очевидной связи. Непосредственно представленный в условии набор может быть и не велик, однако он необходимо дополняется фактами иного рода: решая задачу, мы подходим к ней с позиции некоторого математического знания, присовокупляя к условию еще и множество иных утверждений, ранее известных нам математических результатов (аксиом, определений, теорем и проч.) Заметим, что границы этой совокупности фактов весьма нечетки — ведь нам далеко не всегда известно заранее, какие знания потребуются для решения задачи. Чтобы решить задачу, нам нужно выстроить всю эту совокупность фактов в нечто целое, в связную конструкцию. Решение, следовательно, есть конструирование, осуществляемое по определенным правилам и приводящее к определенному результату. Последнее означает, что «ответ» задачи должен непременно оказаться элементом сооружаемой конструкции. Так, при решении уравнения этой конструкцией является цепочка преобразований исходного равенства, содержащая в качестве необходимого элемента утверждение типа « $x = a$ », завершающего всю процедуру конструирования. При доказательстве теоремы конструкция будет представлять собой последовательность логических выводов (возможно, геометрических построений или алгебраических преобразований), заканчивающаяся доказанным утверждением. К какому бы роду задач мы ни обращались, всякий раз ее решение будет представлять собой единичный пространственный объект, нечто построенное нами в ходе завершенной процедуры и доступное восприятию. В нашем конструировании явно различимы два момента. Во-первых, мы строим, сообразуясь с правилами, а во-вторых, каждое правило имеет доступный восприятию пространственный коррелят. Так, каждый факт, используемый нами при решении, есть общее правило, сообразно которому мы совершаем очередное конструктивное действие. Но это действие состоит в достраивании уже имеющейся конструкции еще одним конструктивным элементом, конфигурируемым в пространстве объектом. Если воспроизвести используемый факт изолированно (например, как ранее доказанную теорему), то в нем будут также ясно различимы понятийный и объектный компоненты. Однако для полного описания процедуры решения недостаточно категорий правила и конструкции (общего понятия и единичного объекта). В определенной ситуации, так или иначе возникающей в ходе решения, проявляется нечто третье, как бы опосредующее эти два термина. Этот «средний термин» необходим, прежде всего, для установления момента целесообразности в наших действиях. Совершая очередной конструктивный шаг, сообразованный с каким-либо общим правилом, мы должны уже как-то представлять всю конструкцию в целом. Нам нужно видеть место этого шага во всей процедуре решения, т.е. осознавать для чего он предпринимается. Такого рода осознание может и не сопровождать нас на протяжении всего хода конструирования, но возникать лишь в отдельный момент. Наиболее ярок этот момент тогда, когда после тяжелых попыток решить трудную задачу нас вдруг осеняет удачная мысль, нам становится ясен нужный шаг, заведомо ведущий к цели. Именно после такой догадки все последующие действия становятся целесообразными. Что открывается нам, когда у нас возникает догадка? Конструкцию, которую нам нужно представить целиком, мы видеть не можем, поскольку ее еще нет. Причем нет ее не только на бумаге, но и в воображении — последнее ясно хотя бы из того, что всякая сложная конструкция даже в воображении должна быть также построена в результате последовательности мысленно производимых шагов. Неверно также было бы говорить, что нам открывается правило конструирования. Вся конструкция описывается не одним правилом, а последовательностью правил, и эта последовательность также не присутствует вся целиком до тех пор, пока конструирование не завершено. Кроме того, всякое правило непременно формулируется вербально, а догадка не предполагает такого формулирования. То, что открывается, уместно, на мой взгляд, назвать структурой создаваемой конструкции. Она и есть то промежуточное звено между конструкцией и правилом, отчасти сходное с каждым из двух, но не сводимое ни к одному. Структура, как и правило, лишь возможна. то, и другое становится действительным только благодаря конструкции и не существует помимо конструирования[1]. Но, в отличие от правила, структура не является общей. Она относится именно к тому акту (или процессу) конструирования, который производится сейчас. На это нужно сразу обратить внимание. Угадав структуру создаваемой при решении задачи конструкции, мы не в состоянии отождествить эту структуру с какой-либо другой. У нас нет инструмента для отождествления структур. В каком-то смысле всякая структура единична. Во всяком случае, решая каждый раз задачу, мы должны угадывать структуру решения заново. В противном случае это будет не решение, а бездумное воспроизведение. Но можем ли мы сказать, что, возвращаясь к решенной ранее задаче, мы вновь обращаемся к той же структуре, которую угадали прежде? Проблема состоит в том, что обратиться к угаданной прежде структуре нельзя потому, что совершенно неясно, где эта структура пребывает. Правило можно записать и прочитать. Конструкцию можно построить и разглядывать. Но структуру нельзя ни видеть, ни пересказывать. Все наши слова о том, что мы «угадали», «схватили», «усмотрели» структуру, не более чем метафоры. Строго говоря, совершенно непонятно, что мы делаем со структурой. У нас, следовательно, нет никакой возможности сказать про структуру «вот эта» или «та же самая». Она всякий раз возникает заново. Момент угадывания (открытия) структуры есть тот уникальный момент решения, когда весь конструируемый объект (или дискурс) предстает как целое. Он предстает не как целое созерцание, а только как смысловое целое, которое лишь будет развернуто в виде созерцаемой конструкции. Заметим, что само созерцание эквивалентно конструированию, а потому не дает целостного представления об объекте[2]. Впрочем, связь между конструированием и созерцанием нуждается в более подробном рассмотрении, которое мы предпримем немного позже. Сейчас же следует указать, что совершаемое при решении задачи конструирование есть последовательность шагов, каждый из которых коррелятивен определенному правилу. Делая очередной шаг, мы актуализируем лишь частный элемент построения, а потому в каждый момент (здесь и теперь) для нас существует лишь «вот эта» часть конструкции (дискурса). Конструирование не может представить целого предмета. Поэтому столь важен момент схватывания структуры — только в нем нами и обнаруживается завершенный объект. В этот момент с нами происходит событие, которое может быть названо открытием. Всякое открытие всегда происходит впервые. Открыв нечто однажды, мы потом вправе говорить о знании — мы знаем как решить эту задачу, поскольку уже раскрыли структуру требуемого дискурса. Но в чем, собственно, состоит это наше знание? Прежде всего в готовности разворачивать вновь соответствующую дискурсивную конструкцию. Готовность эта основывается, как будто, на каком-то обладании структурой. Выражая свое знание, мы вспоминаем об открытии, уже происшедшем в нашей жизни. Мы снова схватываем структуру дискурса, который будем разворачивать, и мы уверены, что сделаем это. В момент выражения готовности повторить решение с нами происходит событие узнавания. Но так ли уж обоснованна эта наша уверенность? Ведь мы не обладаем критерием для отождествления структур. Чем может быть узнавание, как не обнаружением той самой структуры, которую мы открыли раньше? Но где же мы в таком случае держали ее все прошедшее с момента открытия время? Наша уверенность в знании (т.е. в способности легко построить нужную конструкцию) оказывается, следовательно, под угрозой. Ясно, что нам нужно, на самом деле, снова совершать открытие. Если структуры невозможно отождествлять, то знающий, как будто, ничем не отличается от незнающего. Ведь структура не может наличествовать — она может только открываться и создавать возможность конструктивного действия.

Возникший вопрос есть, собственно говоря, вопрос о природе знания. Ясно, по крайней мере, что эта природа предполагает способность к повторному раскрытию (угадыванию) структуры, т.е. к открытию. Это событие должно произойти вновь, но уже в других условиях. Чтобы точнее представить себе названное различие условий, посмотрим внимательно еще раз на то, как происходит открытие. Оно состоит в схватывании структуры, связывающей многообразие наблюдаемых объектов или установленных фактов[3]. Но как представлены нам эти объекты и факты? Они суть созданные прежде конструкции. Следовательно, их создание (конструирование) также предполагало некоторую структуру (схему), которая имеет прямое отношение к той (более общей), которую нам предстоит раскрыть. Но нам они предстают в не структурированном виде, поскольку в момент их предъявления мы не располагаем вовсе никакой структурой (так как структурой вообще нельзя располагать). Значит, несмотря на предъявленность готовых конструкций, мы должны сконструировать их заново и прежде открытия общей структуры, дающей решение, раскрыть ряд частных структур. Пока же эти частные структуры не раскрыты (т.е. пока мы не совершили некоторого акта синтеза), нам предстоит не факт и не объект, а след какой-то предшествующей деятельности. Я бы сказал даже, что это есть «мертвый» след, который нам нужно одухотворить собственным структурирующим усилием. Отмеченная несколько ранее связь между созерцанием и конструированием оказывается, следовательно, почти тривиальной. Созерцание и есть конструирование. Хотя это конструирование совершается без вождения карандашом по бумаге (или других инструментальных действий с материалом), оно рождает новую конструкцию, превращая в конструкцию след. Немаловажно, впрочем, что само оно не оставляет следов.

Итак, всякое открытие сопровождается созерцанием, т.е. не оставляющим следа конструктивным действием. Но открытие приводит и к конструированию решения, т.е. к созданию нового следа. Это обстоятельство отчасти раскрывает природу знания. Решив однажды задачу и оставив след решения на бумаге, мы обращаемся к нему снова, «одухотворяя» этот след, превращая его в конструкцию. След можно назвать фиксированным знанием, дающим возможность вновь раскрыть структуру. Акт знания, следовательно, есть акт созерцания. В самой простой постановке — я знаю то, что записал. Различие между открытием и узнаванием оказывается, следовательно, чисто количественным. Оно определено подробностью следа. В любом случае задача решается заново.

Наличие следа, запись, играет существенную роль в любой когнитивной деятельности. Оба выявленных нами мыслительных акта (открытие и узнавание) имеют общую природу — они являются раскрытием структуры в представленном следе с последующим созданием новой конструкции. Можно сказать, конечно, что не всякое знание предполагает запись. Говоря, например, что я знаю теорему Пифагора, я не обращаюсь ни к какой записи, но готов произвести соответствующую конструкцию «по памяти». Последнее, однако, не означает отсутствие следа, подлежащего структуризации. Этим следом как раз и является память. Заметим, что уподобление памяти и письма — довольно естественный ход, впервые сделанный Платоном («Федр»). В нашем рассмотрении их можно рассматривать как вещи в известном смысле тождественные, причем важна здесь не психологическая проблематика, а, скорее, трансцендентальное определение памяти. Чтобы понять, в чем состоит такое определение, попробуем сначала сделать некоторые дополнительные наблюдения за феноменом письма. Говоря о нем, как о следе предшествующей деятельности, мы должны подразумевать под ним чистую потенциальность. Оно выступает как материя, подлежащая структурированию и обращаемая в конструкцию. Момент схватывания структуры при созерцании следа есть момент актуализации. Вне этого момента след как бы и не существует. Но с другой стороны, он выступает как «хранилище» структур, из которого извлекается нечто наиболее существенное для последующего конструирования. А именно такое хранилище и уместно назвать памятью. Событие (открытия или узнавания) состоит, следовательно, в актуализации содержания памяти. С точки зрения схватывания структуры и последующего конструирования нет разницы между записанным и запомненным. И то, и другое — след предшествующей деятельности, становящийся действительным в событии[4].

Итак, мы выделили два вида событий — открытие и узнавание — и установили, что различие между ними можно охарактеризовать как «количественное». Говоря о событии, мы неизменно подразумеваем, что оно произошло, и эту фразу — «событие произошло» — готовы наделить вполне определенным смыслом. Событие произошло тогда, когда что-то получилось. Когда бессвязное многообразие следа превратилось (точнее — вот-вот превратится) в завершенную конструкцию, когда, благодаря открывшейся структуре, нам предстает некое гармоническое целое. Иными словами, важным аспектом события является *успех*. Событие происходит тогда, когда наши действия успешны. Отчасти поэтому различие между открытием и узнаванием определяется степенью уверенности в успехе в тот момент, когда событие еще не произошло. Но именно степенью, а не наличием или отсутствием. Поэтому уместно говорить не о двух видах событий, а о двух модусах одного события. Всякое событие происходит как в модусе узнавания, так и в модусе открытия. Чистое открытие (без узнавания) невозможно в принципе. Чистое узнавание можно лишь предполагать как вырожденный случай.

Заметим теперь, что успех, явившийся благодаря событию, может быть понят только как мой успех. Структуры не просто так схватываются или открываются. Они открываются мне и схватываются мной. Поэтому всякое событие есть вспышка самосознания, сопровождающаяся ответственным суждением «Я знаю». В этот момент происходит проявление Я для самого себя как предельной точки порождения дискурса. Событие произошло со мной, и от меня будет далее исходить всякое конструктивное действие, удостоверяющее мое знание или мое открытие. Здесь, несомненно, присутствует момент синтеза многообразия в едином сознании, которое Кант назвал первоначальным синтетическим единством апперцепции (оно же априорное и трансцендентальное). Вот эта априорность, или первоначальность, должна быть хорошо понята. Состоит она прежде всего в том, что проявление Я в момент события есть начальная точка конструирования. Ему (событию и проявлению Я) предшествует след, но это не нарушает априорности апперцепции, поскольку этот след все равно строится вновь уже после того, как событие произошло. До того он не является ни конструкцией, ни объектом, т.е., строго говоря, не существует. Утверждать это можно потому, что у меня (о чем шла речь ранее) нет критерия для отождествления структур. Следовательно, в момент события я веду себя так, как если бы до него ничего не было. Всякая структурность (всякая осмысленность действия и возможность конструирования) появляется только здесь и сейчас. А потому мое самосознание оказывается действительно априорным. Важно поэтому иметь в виду, что предельной точкой развертывания дискурса выступает не просто сознающее себя Я, но Я здесь и сейчас мыслящее. Суть трансцендентальной апперцепции не просто в осознании единства себя в своих представлениях, но в происходящем в настоящий момент событии «Я мыслю». Априорное единство апперцепции, иными словами, должно быть понято не как самотождественность субъекта, а как самотождественность события.

Таким образом мы приходим к идее эгоцентрического дискурса, т.е. такого дискурса, который полностью укоренен в событии «Я мыслю». В момент, связанный с этим событием, не только схватывается решение задачи. Все тот же тезис о несопоставимости структур заставляет делать более серьезные выводы. Решение задачи (даже довольно простой) всегда требует предварительных знаний (аксиом, постулатов, формул, утверждений). Все они должны быть включены в решение, как в единую дискурсивную конструкцию (в виде явных, а чаще неявных ссылок). Следовательно, предшествующая этой конструкции структура охватывает весьма разнородное многообразие, присутствующее в виде следа. Весь массив наличного знания (т.е. все, что ранее было понято, узнано, открыто) актуализируется и радикально перестраивается. Точнее, строится заново. В событие «Я мыслю», в конечном счете, как в воронку стягиваются все мыслимые контексты всякой когнитивной деятельности. В нем словно совершается создание целого мира. Задача, которую я решил, не составляет изолированной конструкции. Ее решение оказывается лишь пристройкой к корпусу моего знания, но все это знание актуализируется в событии, т.е. производится заново, схватывается полностью в единой структуре. Именно подобную согласованность всего корпуса знания, кстати, и следует называть успехом. Новое решение не должно противоречить ничему прежнему. Но это прежнее, чтобы мы могли убедиться в его консистентности с новым решением, должно стать одновременным с этим решением, т.е. быть построенным снова. Впрочем выражение «снова», указывающее на некий повтор, неточно отражает суть дела. Предшествующее знание не сопоставляется с настоящим путем воспроизведения. Строится новая конструкция, имеющая к прежней весьма странное (и плохо определяемое) отношение. Естественнее было бы сказать даже, что она не относится к ней никак, ровно потому, что мы не можем сопоставлять структуры. Событие «Я мыслю» как будто исключает всякое прошлое и обозначает создание всего здесь и теперь. Важно заметить, что в этом событии исключается также и прошлое Я. Я, творящий субъект, актуален сейчас, в момент творения. Я творю свой мир и себя вместе с ним.

Впрочем, некое «до» по отношению к событию «Я мыслю» все же улавливается. Мое творение, будучи конструированием сообразно схваченной структуре, не может быть творением из ничего. Оно требует кое-какого материала. Всякое конструирование начинается со структурирования следа. Отношение к следу есть сильное ограничение творящего дискурс субъекта. Прежде мы говорили о следе как результате моей прежней деятельности. Но поскольку для мыслящего Я само Я актуально лишь в событии «Я мыслю» и ограничено автореференцией «Я, здесь, теперь», то след, обращающий меня за пределы этой автореференции, свидетельствует о не-Я. Предшествующая деятельность может быть столь же моей, сколь и не моей. Созерцание как структурирование следа и обращение его в конструкцию оказывается поэтому также и пониманием. Последнее есть третий модус события, указывающий на другого творца, деятельность которого, однако, должна быть включена в мой горизонт, т.е. структурирована мной. Решая задачу, я обращаюсь к текстам, к следам, в которых пытаюсь найти конструкции (теоремы, формулы, доказательства и т.д.), т.е. пытаюсь их понять. В этом моем действии может быть не так уж важно, кто именно оставил представленные мне следы: я сам или кто-то другой.

Ситуация оказывается в известном смысле двойственной. Эгоистический дискурс стремится представить Я как бесконечное — в том смысле, что ему ничего не противопоставлено. Это действительно так, поскольку все, представленное как не-Я, понимается лишь в горизонте события «Я мыслю» и существует лишь потому, что вписано в дискурсивную конструкцию, развернутую сообразно схваченной в этом событии структуре. Все, что будет произведено в ходе конструирования. интерпретируется мной как моя деятельность и мой успех. Но, с другой стороны, это же событие «Я мыслю», будучи событием понимания, есть своего рода расшифровка следа, оставленного другим. Поэтому мое структурирующее усилие может быть рассмотрено как повторение чужого действия, как воспроизведение чужого успеха.

Двойственность события превращает всякое конструирование в совместную деятельность. Многообразие следов, обращаемых мной в конструкции, порождает идею сообщества, конструировавшего весь корпус знания. Моя попытка структуризации следа может быть успешной потому, что этот след был конструкцией. Моя деятельность поэтому воспринимается мной как добавление (может быть, весьма незначительное) к впечатляющему зданию, созданному сообществом. Как я достраиваю нечто к этому зданию (причем, «достраивание», скорее всего, подразумевает открытие), так и, возможно, неизвестные мне другие «строители» пристроили к нему каждый что-то свое. Успех строительства должен, следовательно, рассматриваться как общий успех. Я действую как член сообщества и могу понимать себя именно так, поскольку мое конструирование ведется в контексте общего строительства.

Член сообщества — это автор конструкции. Он не обязательно выступает как личность. Тем не менее в совместном конструировании явно обнаруживаются «атомы» общего конструирования. Я не могу принять все многообразие созерцаемых следов как общий массив подлежащего пониманию материала, в котором не различены отдельные дискурсы. Событие «Я мыслю» включает как структуризацию следа, так и приращение конструкции. Приступая к структурирующему действию, я исхожу из гипотезы структурируемости следа: именно эта гипотеза позволяет мне надеяться на успех. Желание понять означает уверенность в том, что структура уже была и мне представлен не мертвый след, а конструкция. Следовательно, мой дискурс должен подразумевать действовавшего до меня подобного мне творца иного дискурса. Но подобного мне — значит актуализировавшего себя в событии. Раз мне предстоит конструкция, возникшая благодаря схваченной кем-то структуре, то, следовательно, в прошлом имело место другое событие[6]. Это событие, происшедшее с другим членом сообщества, ставшего автором конструкции, есть атом развернутого предметного (например, математического) дискурса. Этот дискурс не подразумевает личностей. Он подразумевает лишь называемых авторами субъектов, с которыми случаются события. Этим математика отличается от истории математики. Адресуясь, например, к теореме Вейерштрасса, я не интересуюсь личностью Карла Вейерштрасса, а лишь подразумеваю происшедшее прежде (моего собственного действия) событие.

Итак, математическое сообщество атомизировано. Можно предполагать, что каждый его член разворачивает свой собственный дискурс. Математическое сообщество функционирует в событиях и оказывается консолидировано благодаря следу, который каждое из этих событий оставляет. В консолидированной форме сообщество выступает по отношению к каждому из своих членов, поскольку оно является каждому в виде единого следа.

Поэтому сообщество атомизировано и консолидировано одновременно. Легко указать ситуацию, когда его консолидированность проявляется в максимальной мере. Это происходит при работе с книгой (гипертрофированный случай — при работе с учебником). Она предстает как единый след, порожденный как бы единым событием. Созерцание этого следа и его структуризация — единственный атом развертываемого в такой деятельности дискурса. Заметим, что при максимальной консолидированности сообщества заметнее всего эгоистичность дискурса. Созерцаемый мной след выступает почти как мое индивидуальное достояние, как имеющийся у меня под рукой материал, готовый обратиться в мои собственные конструкции.

Двойственность дискурса лучше всего видна в таком жанре, как научная переписка. След, представленный как послание, есть очевидный след события, причем явно подразумевающий автора. Письмо, содержащее дискурсивную конструкцию, без натяжек и двусмысленностей указывает на случившееся прежде «Я мыслю» и словно обнажает атом сообщества, разрушая консолидированность последнего. Но все же, попав ко мне, оно так же, как и книга, обращается в материал для моего собственного конструирования. Оно встраивается в мой эгоистический дискурс, а его автор теряет индивидуальность, приобщаясь к единому корпусу знания (которое я актуализирую в момент понимания письма).

Подобным же образом можно рассмотреть и работу научного семинара (вообще — любую беседу) с той лишь разницей, что след, обращаемый в материал для конструирования, может оказаться устным высказыванием, фиксируемым памятью. Но в той мере, в какой собеседники захвачены обсуждаемой проблемой, они деперсонифицированы. Каждый из обсуждающих смотрит не на другого, а на производимую им конструкцию: для него она есть созерцаемый след, и, чтобы ответить, он должен сам обнаружить ее структуру (понять). Иными словами, каждый из участников обсуждения конструирует свой эгоистический дискурс и лишь успех конструирования свидетельствует о взаимопонимании. Заметим, что этот успех, хотя и принимается как совместный успех действующего сообщества, может быть только моим, индивидуальным успехом (происшедшим со мной событием). Даже при устной беседе играет роль только весь корпус знания, представляемый в речи собеседника. Последний есть творец конструкций, т.е. своего рода медиатор, транслирующий для меня деятельность всего сообщества — консолидированного автора всех включенных в рассмотрение конструкций.

Поэтому естественное положение математика — пребывание один на один с консолидированным сообществом. Последнее обретает актуальность в индивидуальном структурирующем усилии, в событии, хотя являться может в виде разнообразных по форме следов: книги, письма, высказывания собеседника. Сообщество, следовательно, существует (актуально) только в индивиде. Но и индивид не пребывает, а лишь случается, причем случается таким образом, что порождает всегда новую дискурсивную конструкцию, плод совместной деятельности (его и сообщества). Обращение к личности собеседника (автора письма или книги) видоизменяет направленность дискурса. Такое обращение означает, что я делаю сообщество предметом изучения (объектом дискурса). Последнее возможно лишь в том случае, когда прекращается совместная деятельность и я не пытаюсь вместе с сообществом решать какую-либо (например, математическую) задачу. Желая понять не производимую в каком-то событии конструкцию (представленную в виде следа), а того, кто ее произвел, я должен сам создавать конструкции, принципиально отличные от тех, которые мне представлены. Такое конструирование будет уместно назвать историческим исследованием. Обращаясь отчасти к тем же, а отчасти к другим следам, я должен тогда пытаться раскрыть совершенно иные структуры, чем те, которые раскрывались мне при решении задачи. Это значит, прежде всего, что я сам перестаю быть членом сообщества. Консолидированность последнего для меня утрачивается, поскольку моей задачей становится отличие одного автора от другого. Я начинаю конструировать само сообщество и образы его членов (как его конструктивных элементов). Здесь не будет предпринята попытка подробного рассмотрения такого конструирования. Представляется, впрочем, вполне возможным, что оно способно обнаружить ограниченность эгоистического дискурса, поскольку приведет к необходимости отказаться от центрирующего этот дискурс события «Я мыслю». Ведь историческое исследование должно учитывать диахроническую составляющую мысли и рассматривать, по крайней мере, цепь последовательных событий. Разглядеть в мыслительной деятельности личность можно, наверное, только таким способом[6].

Примечания

[1] Сделанное утверждение естественным образом согласуется с кантовским анализом функций понятий рассудка. Эти понятия пусты, если им не соответствует никакое созерцание (т.е. конструкция). Следует также указать на близость рассматриваемой здесь концепции структуры кантовскому понятию трансцендентальной схемы, хотя это не одно и то же. Схема скорее указывает на временное развертывание априорного синтеза, т.е. определяет систему временных отношений. Структура — так, как я пытаюсь рассмотреть ее здесь — вообще не зависит от времени. Впрочем, эти различия весьма трудноуловимы. Кантовское определение трансцендентальной схемы плохо поддается интерпретации и, будучи одним из самых плодотворных понятий трансцендентальной философии, оказывается, вместе с тем, одним из самых темных.

[2] Выражения «объект», «дискурс» и «конструкция» очень близки по смыслу. Объектом в проводимом рассмотрении называется результат конструирования, т.е.

то, что на кантовском языке можно было бы назвать результатом синтеза способности воображения. Слово «объект» вообще используется в данной работе практически в том же смысле, что и в «Критике чистого разума». Дискурс также представляет собой объект, поскольку является знаковой конструкцией, созданной воображением по определенным правилам. Но дискурс — это такой объект, который в качестве конструктивного элемента содержит иные объекты. Так, например, доказательство теоремы о внутренних углах треугольника есть дискурс, содержащий чертеж треугольника (последний, будучи объектом, не является дискурсом).

[3] Факт есть элемент дискурса, представленный в виде суждения. Он, впрочем, может включать и графическую конфигурацию, являющуюся некоторым объектом. В любом случае факт также представляет собой конструкцию и сам также может быть объектом. Последнее становится очевидным, например, благодаря метаматематике.

[4] По своему определению память, таким образом, тождественна следу. Единственное отличие между следом-памятью и следом-записью составляет материальный носитель, что, конечно, немаловажно. Но в данном случае я предпочел бы остановиться на единой функциональной роли, которая состоит в потенциальном представлении знания, подлежащего актуализации. Важно уточнить, что, говоря «память», я имею в виду не психофизиологический феномен, а лишь момент организации дискурса, определяемый самим же дискурсом (точно так же, как и запись).

[5] Экстраполяция собственных способностей за пределы собственного действия является, по-видимому, единственным средством обнаружения другого субъекта при трансцендентальном рассмотрении. Гуссерль, тщательно изучивший такого рода экстраполяции при описании понятия интерсубъективности, называл их «аппрезентацией» или «аналогической апперцепцией» (*Гуссерль Э.* Картезианские размышления. СПб., 1998. С. 213—219).

[6] Личность подразумевает историю, как цепь происходящих (с ней) событий. Проблема в том, как вообще можно выстроить события в цепь при условии несопоставимости структур.

КОММЕНТАРИИ

Г. А. Нуждин

Подход автора можно обобщить так: в ходе математической деятельности некоторая единая цель структурируется в систему подзадач, обусловленных локальными целями, которые, в свою очередь, также подлежат структурированию. При всей его замечательности этот подход, на мой взгляд, необходимо уточнить.

Мы оспариваем три утверждения:

а) окончательная цель задачи всегда определена;

б) решение всецело определяется «удачной догадкой», «заведомо ведущей к цели»;

в) структура есть промежуточное звено между правилом и конструкцией.

Казалось бы, здесь следует различать чисто учебную и собственно научную деятельность. Школьная задача, как известно, должна кончаться строчкой « $x = a$ », где a — число. А в ходе научной деятельности мы практически никогда не знаем, до какой степени нам удастся конкретизировать (уточнить) интересующий нас «объект». Что может считаться тогда ответом задачи?

На самом деле эти две ситуации принципиально схожи. Дело в том, что автор делает в работе не замеченное им допущение: *исходно сформулированное утверждение (некое математическое значение) и завершающий элемент конструкции — одно и то же.* Однако это верно только в том случае, когда математические значения существуют как идеальные неизменные объекты, — позиция, которая автору, видимо, далека. Если же математическое утверждение определено лишь как *элемент системы асемантичных значений*, тогда исходная цель — во многом фикция, поскольку определена существующими на момент до решения ожиданиями, а конечный элемент конструкции определен новыми, возникшими лишь в процессе конструирования связями.

Определенность цели, о которой пишет автор, не есть определенность конечного элемента конструкции (ведь ее еще нет), а целиком и полностью зависит от наших предположений: мы считаем, что решение будет получено в знакомом нам виде, что оно будет связано с известными нам фактами и т.д.

Второе замечание оказывается тесно связанным с первым. Если нет окончательно определенной цели, то не существует и догадки, заведомо к ней ведущей. Догадка, ведущая к образованию определенной (одной!) структурной связи, приводит лишь к частному, хотя и важному для нас, прояснению. Конечно, такая догадка должна вызывать радость понимания того, что нащупано «ключевое звено». На практике, однако, таких звеньев бывает много, и мы никогда не имеем гарантии окончательного ответа (см. мою статью в этом сборнике).

Третье уточнение относится к соотнесению понятий «структура» и «конструкция». Замечательно, что автор статьи увидел различие между воспроизводимым («общим» или «правилом») и невоспроизводимым («структурой»). Однако мне хотелось бы по-иному расставить акценты. Мы вправе считать, что правило является общим именно в силу своей стабильности, а не потому, что оно «где-то есть как неизменный объект». Поэтому правило нельзя «прочитать» — его можно только последовательно исполнить. Любая попытка понять, как оно работает, должна привести к пересмотру, тотальной перестройке правила (ср. притчу о сороконожке).

То, что правило всегда исполняется пошагово и нет необходимости даже в проверке успешности тех или иных шагов (см. фильм «Ирония судьбы...»), заставляет нас поставить под сомнение существование конструкции. Разве по ходу доказательства теоремы мы держим в голове все мыслительные ходы?

Разве, возвращаясь домой «на автомате», мы помним все, что видели по дороге? Разве, исполняя музыкальное произведение, мы держим в голове последовательность созвучий, сыгранных до настоящего момента?

Если это автоматическое исполнение, то мы можем вообще не задумываться о том, что играем, и даже не слышать себя. Если исполнение — настоящее, то в ходе исполнения создается то, что автор называет структурой, — последовательное открытие неожиданных граней произведения. Надобность в конструкции в обоих случаях отпадает.

Если мы отказываемся от конструкции, то встает вопрос о том, *что* структурирует структура. Мне кажется, что введенный автором термин «след», который мне представляется сходным с гуссерлевской ретенцией, вполне подходит в качестве элемента структурирования. В ходе деятельности следы прошлых структур перестраиваются, объединяются друг с другом, возникают новые элементы (неожиданности) и т.д.

Поэтому сами структуры, конечно же, несравнимы, можно сравнивать лишь оставленные ими следы. Нестабильность структуры в том, что каждое ее звено доступно нам только в момент его исполнения. Поэтому структура действительно «трудноуловима», ее нельзя записать и обработать без того, чтобы новизна неожиданности не пропала.

А. В. Родин

То, что Г. Б. Гутнер назвал структурой эгоистического дискурса, мне представляется очень близким по смыслу к тому, что я назвал структурой утопии: говоря его словами, это связка здесь и теперь мыслящего Я с «консолидированным сообществом». Исходя из этого и в согласии с тем, что я написал в своей статье, я должен сказать: я **не** согласен с тезисом о том, что математика строится как эгоистический дискурс. Недостаточность эгоистического дискурса для истории (в частности, истории математики), о которой говорит Г. Б. Гутнер в конце статьи, на мой взгляд, также относится и к самой математике. Утопичность (эгоистичность) знания, на мой взгляд, представляет собой, как я говорил, знание в аспекте (утопической) возможности. В частности, «консолидированное сообщество», о котором говорит автор, консолидировано только в возможности (всякий математик может понять другого), тогда как в действительности никому не под силу прочитать все написанные математические книги и тем более заставить всех прошлых, современных и будущих математиков прочитать свои собственные. Утопическая возможность консолидации сообщества — это идеал, который имплицирует следующее практическое правило: если тебе попалась книга по математике, не говори что это чушь, даже если ты сразу ее не понял, если книга старая, если автор иностранец и/или его/ее политические взгляды не совпадают с твоими и т.д.

Несмотря на то, что утопическая структура является базисным элементом не только математики, но и всякой рациональности вообще, ее совершенно недостаточно, чтобы существовала математика. Мало того, чтобы все математики хотели и считали себя в состоянии понять друг друга, нужно еще, чтобы хотя бы некоторые из них друг друга действительно понимали.

В. А. Шапошников

Первая замечательная особенность этой работы – стремление выдержать трансцендентальную установку в ее чистоте. Вторая – попытка решить сложнейшую задачу: не выходя за рамки трансцендентального рассмотрения, осуществить переход от «Я» к «другому».

Корректно осуществить этот переход, насколько мне известно, не удавалось еще никому. Такой переход всегда осуществлялся лишь ценой разрушения самой трансцендентальной установки, не важно, осознавалось ли это тем или иным автором или нет. Первый пример, который мне хотелось бы привести, — это попытка Декарта, исходя из достоверности существования Я, как res cogitans, доказать существование Бога. Явная фальшивость и неубедительность этого места «Размышлений о первой философии», по сравнению с самой процедурой радикального сомнения, бросается в глаза. Второй — обсуждение Шопенгауэром («Мир как воля и представление», т. 1, § 19) позиции «теоретического эгоизма», которая состоит в том, чтобы признавать «второй план», а именно волю, лишь за одним из представлений — за «непосредственным объектом», за нашим собственным телом. Необходимо отдать должное Шопенгауэру: он честно признается в невозможности теоретически опровергнуть эту позицию. Я намеренно обхожу вниманием Канта и Гуссерля, поскольку именно они в первую очередь являются неявными собеседниками автора статьи и их опыт мысли был учтен при ее написании.

Приходится констатировать, что и в настоящем случае попытка «дедуцировать понятие социума» не удалась. Но сама эта попытка примечательна своей честностью и последовательностью. «Социум», который получает автор в итоге, – очень странный социум. Он предстает в рамках трансцендентальной установки исключительно как *многообразный след*, причем здесь не только «не так уж важно, кто именно оставил представленные мне следы», но и нет никакого способа отличить собственный след от следа, оставленного «другим». На мой взгляд, главный итог этой работы не в дедуцировании социума, а в показе со всей ясностью и отчетливостью *невозможности* такой дедукции и необходимости принятия, коль скоро мы действительно хотим получить «другого», некоторых фундаментальных допущений, которые неизбежно будут означать отказ от трансцендентальной установки в ее чистоте.

Л. О. Шашкин

Анализируя математическое мышление, автор рассмотрел в качестве примера процедуру решения задачи (решение уравнения, доказательство утверждения). Однако решение задач, условия которых заранее сформулированы, является лишь одной из сторон деятельности математика. Не менее интересен вопрос, как возникают сами задачи. Постановку задач и их решение можно рассматривать как две составляющие «непрерывного» процесса. Для того чтобы грамотно поставить задачу, нужно иметь некоторые знания об исследуемом объекте и возможных методах решения. С другой стороны, анализируя условие задачи, математик пытается представить будущее решение как последовательность относительно простых действий, т.е. разбить задачу на подзадачи, поставить новые цели. Каждая из этих подзадач может оказаться частным случаем общей проблемы. Таким образом, математическая деятельность заключается в решении все новых задач и, одновременно, в постановке все новых проблем.

Рассматривая действия математика с такой позиции, и в самом процессе решения задачи можно выделить два этапа. Сначала строится план решения, черновик, содержащий основные идеи. Затем он переписывается в виде строгого (формального) рассуждения. Изучая запись решения, мы видим результат второго этапа. Готовое решение, имеющее вид последовательности правил, фактов, дает возможность убедиться в отсутствии ошибок, правильности каждого шага. Однако смысл отдельных шагов может оставаться неясным до последнего момента, когда «вдруг» окажется, что все элементы решения необходимы для достижения цели. Для того чтобы понять доказательство, выяснить связь отдельных шагов, увидеть конструкцию в целом, надо вернуться к первому этапу, реконструировать ход мыслей автора или заново построить систему промежуточных целей. Именно эту последовательность целей, систему подзадач, из которых «собрано» решение, и можно назвать структурой конструкции.

При создании чернового решения математик постоянно учитывает конечную цель, поэтому с самого начала должен видеть решение «в общих чертах», иметь представление о его структуре, пусть даже не зная всех деталей конструкции. Следовательно, нельзя утверждать, как это делает Г. Б. Гутнер, что готовая структура возникает мгновенно — она проявляется постепенно. В какой-то момент знания о структуре создаваемой конструкции достигают того уровня, когда математик думает, что решение задачи ему известно (в действительности известен подробный план решения, его структура). Это и есть момент завершения первого этапа: автор решения думает, что дальнейшее уточнение деталей не представляет трудностей, т.е. новую задачу удалось свести к набору решенных ранее либо удалось выделить задачи, которые можно решать независимо.

Это не означает, что верное решение (пусть в нестрогом виде) уже найдено. «Интуитивно очевидное» решение может содержать ошибки, и наоборот, продвигаясь к некоторой цели, математик может внезапно «узнать» в своей незавершенной конструкции готовое решение.

Вообще, решение задачи можно сравнить с путешествием, прохождением лабиринта. Решая задачу, доказывая теорему, мы пытаемся связать известные факты, применить некоторое множество правил. Для отыскания оптимального маршрута надо составить (вообразить) план местности и рассмотреть имеющиеся пути. По мере приближения к цели наши знания о предмете исследования становятся более точными и подробными, что позволяет корректировать промежуточные цели и способы их достижения. И на каждом шаге решения возникает вопрос, какое из известных правил следует применить в данный момент, по какому пути пойти. Выбор определяется в том числе степенью изученности этих путей. Если задача является действительно новой, приходится пользоваться догадками, интуицией либо перебирать все допустимые (известные нам) варианты, пока, с учетом дальнейших шагов, не удастся построить цепочку промежуточных целей, завершающуюся ответом на вопрос задачи. После этого остается «пройти намеченный маршрут», выстроить конструкцию в соответствии с намеченным планом, «структурой», т.е. записать решение.

Однако при решении нескольких сходных задач появляются повторяющиеся цепочки действий, возникает «метаправило», задающее порядок применения более простых правил. В зависимости от степени формализации новое правило можно называть методом или алгоритмом решения. В этом случае мы выходим на новый уровень, подбирая уже не отдельные правила, а методы решения, сводя задачу к известным. При этом приходится сравнивать именно структуры, выясняя, к какому типу относится решаемая задача.

Объясняя кому-либо решение задачи, мы рассматриваем метод решения, т.е. последовательность подзадач, на которые была разделена исходная. Но поскольку в обычной записи решения метод не отображается, конструкция «рассыпается» на отдельные правила и то, что названо структурой, исчезает. Исключение составляет, пожалуй, учебник, где разбирается метод решения конкретной задачи, т.е. фиксируются локальные цели (подзадачи), объединяющие отдельные действия в группы, и поясняется их роль в достижении основной цели. В других же работах принято считать, что читатель в состоянии восстановить структуру решения, которая необходима для понимания, но не слишком важна с точки зрения оценки правильности результата. Изучение завершенной конструкции не позволяет однозначно восстановить структуру, поскольку трудно добиться точного воспроизведения неформального первого этапа решения. В этом случае действительно может показаться, что «таинственная» структура возникает ниоткуда, чтобы затем исчезнуть. В действительности структура конструкции может быть зафиксирована и передана как метод решения (доказательства) с пояснением предварительных шагов, указанием причин выбора каждого правила и т.п., но это потребует дополнительных усилий (и гораздо более подробных записей, чем принято в математике).

Таким образом, хотя структура в явном виде на бумагу обычно не переносится и слова «открытие», «догадка», сказанные о решении, следует относить в первую очередь к его структуре, ее (целиком или частично) можно зафиксировать и исследовать, вопреки мнению автора статьи. Именно представление структуры в виде метода завершает творческую работу и превращает решение задачи в рутину, такую, как решение квадратного уравнения или системы линейных.

ОТВЕТ АВТОРА

В комментарии Л. О. Шашкина приведено два возражения. Первое из них состоит в том, что структура не рождается мгновенно, но складывается постепенно, поскольку решение задачи — это последовательность шагов, причем не всегда в ясно указанном направлении. Я ничего не имею против сказанного (равно как и против образа лабиринта, весьма удачно иллюстрирующего деятельность математика), но меня интересует другой вопрос: как возможно понимание решения целиком. Каждый шаг проясняет лишь незначительную часть решения, но даже если после ряда шагов получен ответ, об успешности решения можно судить лишь тогда, когда оно схвачено полностью, как завершенная конструкция. Я утверждаю, что такое схватывание должно быть мгновенным, оно не может быть «размазано» по времени. Можно делать сколь угодно много шагов, и в каждый момент будет ясен лишь этот, делаемый сейчас шаг. Однако должен наступить момент полного схватывания — совершенно неважно когда, возможно, даже после получения ответа. Шаги, которые я делаю, должны быть гармонизированы, согласованы друг с другом, и сознание этой согласованности не возникает постепенно. Постепенное возникновение структуры означает последовательное ее наращивание. Но для этого необходимо фиксировать структуру, что невозможно. Ее негде фиксировать в отличие от конструкции. Постепенно наращивается только последняя. Но именно на возможности зафиксировать структуру настаивает мой оппонент. Его второе возражение как раз и состоит в том, что структура может быть зафиксирована и сообщена «как метод решения». Я хотел бы обратить внимание на то, что метод решения — это не структура. Можно сказать так: если метод является структурой, то человеческая деятельность не отличается от компьютерной. Действие сообразно методу (фиксированной последовательности подзадач) — это лишь следование алгоритму, при котором в правильной последовательности выполняются нужные шаги, но отсутствует *понимание* решения. Я для того и ввел термин *структура,* чтобы указать на объект (или решение) как целое, а не на рассыпающееся на отдельные шаги (подзадачи). Замечу, что метафора лабиринта не спасает от аналогии с компьютером: он тоже может блуждать, постепенно отбрасывая тупиковые пути, имитируя таким образом эвристические способности.

Указание на необходимость схватывания целого является также ответом на первые два возражения Г. А. Нуждина. Именно это, а не гарантия ответа, важно для моего рассуждения. Решение состоялось тогда, когда построена завершенная конструкция. Совершенно не важно, будет ли она иметь нечто общее с моими ожиданиями, возникающими до и во время размышления над задачей. Исходная *цель* действительно может быть фикцией. Однако в рассуждении должна быть *целесообразность* (так, как она понята в «Критике способности суждения»). Что касается третьего возражения, то я должен согласиться, что конструкция оказывается как бы избыточным термином, вполне заменяемым словами «структура» и «след». Все же мне хотелось бы подчеркнуть конструктивный характер знания (если угодно, исполнения). С другой стороны, та же самая целостность схватывания есть как раз нарушение автоматизма. Структура не возникает в сознании тогда, когда нет остановок, а есть лишь исполнение правила. В такой ситуации понятие конструкции излишне. Но рассматривая след, я хочу увидеть в нем конструкцию (т.е. схватить его структуру). Конструкция лишь особое слово, которым я называю след, поскольку имею в виду его структурированность. Если говорить о решении задачи, то конструкция есть ожидаемый результат (который, как я предполагаю, все же будет — пусть неизвестно, какой именно).

Отвечая А. В. Родину, я хотел бы сказать, что консолидированное сообщество не только возможно, но и действительно. Говоря о консолидированности, я имею в виду совсем не то, что Андрей Вячеславович называет утопичностью. Речь идет лишь о том, что я мыслю другого субъекта, который, подобно мне, развивает некий дискурс. Даже если этот дискурс содержит гигантский корпус знания, я должен отнестись к нему как к деятельности единого субъекта, произведшего эту сложную конструкцию и вложившего в нее некую структуру. Здесь, по-видимому, уместен оборот «как если бы». Я понимаю некий дискурс, как если бы его произвел один подобный мне субъект. Мне (когда я решаю задачу и пользуюсь ранее не мной установленными результатами) безразличны все коммуникации, происходившие в реальном сообществе. Поэтому я мыслю его как консолидированное. Однако знание, к которому я обращаюсь, вполне локально. В нем могут быть пробелы и несовершенства (т.е. оно не всеобще). Оно может быть не понято (даже в воз-

5 Зак. 3711

можности). За нерасшифрованными письменами критской культуры также мыслиться консолидированное сообщество (произведший их квазисубъект), однако все эти конструкции явно локализованы в пространстве и времени.

Комментарий В. А. Шапошникова замечателен тем, что очень точно зафиксировал трудность рассматриваемой в работе проблемы. На него почти нечего ответить, поскольку мне действительно страшно претендовать на то, что я нашел ответ на вопрос, не разрешенный ни Декартом, ни Гуссерлем. Все же полагаю, что трансцендентальная установка наталкивает на необходимость социума и дает возможность объяснить коммуникацию в нем.

МОДАЛЬНЫЕ ОНТОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ

Кудряшев А. Ф.

Онтология как учение о бытии занимает, пожалуй, центральное место в систематической философии, поскольку координирует отношение других ее частей друг к другу и лежит в основе единства всей философии. В онтологии выделяют различные виды бытия и обсуждают их специфические черты. Часто встречающиеся разделения бытия, например, на бытие материальное и идеальное, как правило, не являются строгими классификациями и могут считаться лишь неким приближением к таковым. Критерии классификации выбираются самые разные в зависимости от принятой трактовки бытия и его интерпретации на конкретном материале, что связано в немалой степени с личными привязанностями авторов, а также с давлением господствующей традиции и актуальной проблематики.

В известной традиции, рассматривающей язык в качестве дома бытия, бытие увязано со смыслом высказываний, и рассуждения в рамках онтологии ведутся относительно текстов с различными смысловыми наполнениями. Понимание бытия в языковом ракурсе, к примеру, как атрибута, делающего высказывание осмысленным, побуждает преодолеть упрощенный схематизм распространенных дихотомических или трихотомических классификаций бытия. Они не только не улавливают различные эмоциональные состояния, которые владели автором текста и оставили следы на бумаге, но и недостаточно адекватно отображают объективные модальности возможности, необходимости и т.п., передаваемые в речи посредством разнообразных языковых конструкций.

В лингвистике же модальность исследуется специально и берется «как комплекс актуализационных категорий, характеризующих с точки зрения говорящего отношение пропозитивной основы содержания высказывания к действительности по доминирующим признакам реальности/ирреальности»[1]. Лингвисты подразделяют модальность в самом общем плане на субъективную и объективную и конкретизируют ее исследования, анализируя модальное поле и типовые модальные ситуации, выражаемые в предложении, или, применительно к тексту в целом, строят его модальную сетку наподобие темпоральной[2].

В формальной логике модальности изучаются и классифицируются в течение более длительного промежутка времени, чем в языкознании. Сложившееся деление суждений по модальности на классы дает основание для различных логик — алетической, деонтической, эпистемической, временной и т.п. Считается, что алетические модальности, в свою очередь, состоят из ассерторических, аподиктических и проблематических. Ассерторические модальности соотносят с действительностью, посредством аподиктических выражают необходимость, а с помощью проблематических модальностей выделяют возможности. Разработанные в логике классификации модальностей были заимствованы лингвистами. Однако со временем «в практике лингвистических исследований границы употребления термина «модальность» утратили свою определенность. Трактовка модальности в современной лингвистике необычайно широка, к тому же трудно найти двух авторов, которые понимали бы модальность одинаково»[3]. Такое состояние современной лингвистической теории модальности соответствует сложности языка и изучаемой проблемы. Вместе с тем, оно является результатом широкой, доходящей до универсальной, и притом содержательной трактовки модальности, когда общее, родовое понятие стремятся превратить в систему модальностей, такую же сложную, как сам язык.

Выделение модальностей различных типов можно провести и в математике, при всей ее специфичности, такой, что из-за строгости рассуждений вне собственно математических текстов остаются эмоции или оценочные суждения. Тем не менее субъективные переживания автора часто оказываются важными, подразумеваются, и их следы в тексте могут ощущаться особо чувствительными натурами. Пожалуй, еще более существенна объективная модальность математических текстов.

Суждения, принадлежащие к области математики, обычно причисляют к суждениям логической модальности (в отличие от модальности физической), выведенным на основе правил логики, а потому к аподиктическим суждениям. «Логически необходимыми считаются правила и законы логики и других дедуктивных наук: математики, чистой механики и т.п.»[4]. Так, суждение «гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 и 4 см, должна быть равна 5 см»[5] принадлежит к классу суждений логической модальности; более общее суждение (теорема Пифагора) «сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы» рассматривается как аподиктическое суждение[6].

Но стоит ли все то, что говорится в математике, «причесывать» под одну модальную гребенку? Очевидно, что не всякое математическое суждение следует классифицировать как аподиктическое. Реальная картина математики гораздо сложнее. Можно выделить, по крайней мере, три онтологически разных типа математических высказываний. Во-первых, высказывания «как должно быть» (необходимость); во-вторых, типа «как может быть» (возможность); в-третьих, высказывания «как могло бы быть» (реальность — ирреальность). Выделенным типам высказываний можно противопоставить высказывания «как (оно) есть на самом деле». Высказывания каждого типа в отдельности характеризуют определенный мир смыслов и отношений.

Мир «Как (оно) есть» содержит высказывания о действительности. В этом мире бывает, что $10<12$, что солнце всходит и заходит. В нем выполняется закон всемирного тяготения. К сожалению, здесь существует варварство, совершаются убийства. В действительности есть исключения из правил, встречаются факты, не укладывающиеся в имеющееся описание.

О том, как (оно) есть в природе на самом деле, говорит физика в содружестве с математикой. Их единство не вполне равноправно, и при описании природы приходится больше верить физике. Предметное различие между этими науками влечет за собой различия в стиле мышления физика и математика.

Анри Пуанкаре, выдающийся математик и одновременно выдающийся физик, полагал, что физическая непрерывность имеет предел. Для физика при определенной погрешности измерений 10 г = 11 г, а 11 г = 12 г. Но при тех же условиях физик находит, что 10 г < 12 г. Физическую непрерывность Пуанкаре выражал формулой $A = B$, $B = C$, $A < C$, в которой он видел нарушения закона противоречия[7]. В отличие от физика математик, если он хочет оставаться математиком, вынужден исповедывать другую идеологию, тщательно соблюдая требование непротиворечивости.

Мир «Как (оно) есть на самом деле» весьма запутанный. Ориентироваться в нем помогает знание других модальных миров и умение их различать. Рассмотрим онтологические особенности миров математики, соответствующих выделенным выше типам математических высказываний. Мир «Как должно быть» предстает миром, где числа — идеальные объекты и вычисления производятся с нулевой погрешностью, где $10 < 11 < 12$, реализована идея математической непрерывности и т.п. Это — трансцендентальный мир идеалов, в котором все необходимо и предрешено, нет свободы выбора и проникновение в который выглядит как умозрение очевидностей и дедуктивный вывод.

Как известно, соотношение должного и сущего составляет предмет этики. Онтологические различия в математике позволяют говорить о своеобразной внутриматематической этике в смысле ориентировки ученого на мир должного.

В свое время в одном крупном вычислительном центре состоялась дискуссия по вопросу, до какого десятичного знака после запятой следует производить вычисления при решении на ЭВМ задач прикладной физики. Предлагалось учесть, что начальные и граничные условия и физические константы задаются с определенной погрешностью, а потому вычислять с максимально возможной для машин точностью не имеет смысла и не экономично. В итоге дискуссии возобладала точка зрения «математиков»: «Мы — математики, поэтому вычислять надо с максимально возможной точностью». Так сработала установка на внутриматематическую норму — стремление приблизиться к тому, что является для математика объективно должным.

Разумеется, «человеческая» этика математика, как и всякого ученого, выходит за рамки его науки и может ставиться им выше математических критериев. Например, для Пуанкаре главным критерием ценности, выше истины, являлась полезность — сложное, комплексное образование, включающее в себя и истинностную, и эстетическую составляющую, прекрасное, и имеющее моральную сторону.

Мир «Как может быть» предстает как мир возможностей, реализующихся при некоторых условиях также из разряда возможных. Это мир, отвечающий решениям систем дифференциальных уравнений, он соответствует гипотезам, условным суждениям «если... то» при разнообразии возможных условий и допустимых решений. Этот мир правдоподобен, в нем есть выбор вариантов, разрешающий выбор возможной логики рассуждений и доказательств.

В мир «Как могло бы быть» включено то, что может и не может быть на самом деле. В этом смысле мир «Как могло бы быть» безусловен. Он содержит как свою часть мир «Как может быть». В мире «Как может быть» в значительной мере реализуется игра воображения, игра, надо полагать, по некоторым варьируемым правилам, которые могут браться из «воображаемых» логик.

Традиционно отрицание исключают из разряда модальностей. Однако, такое решение не является бесспорным и, по существу, скрывает проблему, нуждающуюся в специальном изучении. Поэтому с некоторой долей осторожности допустимо полагать, что в мире «Как могло бы быть» могут отрицаться законы, известные науке и сформулированные на языке математики. Дело в том, что отрицание может быть косвенным, а не только явным, и иметь определенную степень категоричности. Кроме того, мы можем не знать, осуществима или не осуществима в действительности та или иная мысленная конструкция, и, следовательно, так или иначе отрицает ли она то, что может быть на самом деле. Во всяком случае, в мире «Как могло бы быть» присутствуют противоречия.

В аналогичном мире историко-литературных фантазий, т.е. вне математики, например, Дантес и Кандинский не только те, за кого их принято считать и кем они являлись в истории, но и совершенно другие люди: Дантес — это Трубецкой[8], Кандинский — это Ленин[9].

Если в мире «Как (оно) есть на самом деле» социально обусловленная норма уменьшает вероятность отклонения от должного, то в мире «Как могло бы быть» нормой является отклонение от того, как бывает. В принципе, единственным условием, устанавливающим онтологическую (в отличии от гносеологической) невозможность части объектов этого мира, является изменение мира «Как (оно) есть» таким образом, каким оно предстает в описании. Стоит миру «Как (оно) есть» измениться в неожиданном направлении, и мир «Не может быть» может поменять свой статус. В целом, можно заметить, что выделенные миры четко не отграничиваются друг от друга, хотя каждый из них имеет свою специфику.

Мышление математиков развивается так, что испытывает давление со стороны той или иной онтологии. Онтологически различаются изложение и конструирование, или изобретение, если пользоваться термином Пуанкаре. При изложении математического факта изначально утверждается то, что уже имеет доказательство. При изобретении имеют дело с вопросом, включающим сомнение, и следовательно, с возможностями опровергнуть предположение. В этом втором случае в предположении говорится о существовании (проблематическом, но тем не менее все равно существовании) математического объекта, окончательное существование или несуществование которого устанавливается доказательством. Тогда, когда существование объекта уже доказано, это будет существование в результате доказательства.

Доказательство несуществования объекта означает отрицание существования с доказательством, но не отменяет существования как предположения. У Пуанкаре имеются высказывания, которые, как кажется, свидетельствуют о том, что он различал два указанных вида существования. «Можно ли сказать, что предмет не существует, если его назвали W?» — спрашивает Жак Адамар, и Пуанкаре вроде бы с ним соглашается[10]. Пуанкаре полагал, что «математическое умозаключение само в себе заключает род творческой силы и ... отличается от силлогизма»[11]. Творческая сила более всего важна своими онтологическими результатами, в которых суть человеческого творчества проявляется ярче всего. Уже одно только существование науки имеет смысл доказательства, о чем писал великий французский ученый, когда вел речь о необходимом свойстве науки — принципе детерминизма, существование которого, согласно Пуанкаре, как раз и доказывается существованием науки[12]. Однако, доказательство как таковое в математике несет в себе заряд новой — и еще большей — онтологической убедительности.

В любом конкретном случае математического рассуждения всегда подразумевается соотнесенность с определенной системой онтологии. Это есть разновидность скрытых определений (по Пуанкаре).

Может сложиться тот или иной тип предпочтений математика в системе модальных онтологий. Такое предпочтение и является стилем мышления, по крайней мере с точки зрения онтолога. То, что стиль мышления существует, несомненно настолько, насколько предпочтение является реальным фактом мышления математиков. Подход к стилю мышления как к функции научной картины мира оказывается онтологически менее определенным и менее убедительным хотя бы потому, что остается без доказательства существование научной картины мира в виде системы фундаментальных принципов, законов, фактов различных наук. Применительно к математике этот подход в свете сказанного выше обнаруживает функциональную зависимость стиля мышления от так называемой математической картины мира, онтологический статус которой, скорее всего, соответствует миру «Как могло бы быть».

Таким образом, различие математических высказываний по модальности является непреложным фактом, и выделение соответствующих модальных онтологий позволяет философски более квалифицированно подходить к пониманию самой сути математики и математического мышления.

Примечания

[1] Теория функциональной грамматики. Темпоральность. Модальность. Л., 1990. С. 59.

[2] См.: *Ноздрина Л. А.* Теоретический курс // Грамматический аспект интерпретации художественного текста. М., 1993. Ч. 1.

[3] Теория функциональной грамматики. Темпоральность. Модальность. С. 67.

[4] Формальная логика. Л., 1977. С. 65.

[5] Логика. Минск, 1974. С. 109.

[6] См.: Формальная логика. С. 64.

[7] См.: *Пуанкаре А.* О науке. М., 1990. С. 28, 239.

[8] См.: *Сорокин А. С.* Русский бог Трубецкой. М., 1996.

[9] См.: *Гиренок Ф. И.* Метафизика пата (косноязычие усталого человека). М., 1995.

[10] См.: *Пуанкаре А.* О науке. С. 488.

[11] Там же. С. 12.

[12] Там же. С. 666.

КОММЕНТАРИЙ

С. Н. Бычков

Читатель, склонный противопоставлять строгость математических построений кажущемуся произволу философских спекуляций, вправе расценить использование категорий модальности применительно к математике как надуманное и потому не слишком продуктивное занятие. Между тем критическое по отношению к метафизике умонастроение в науке появилось сравнительно недавно, окончательно оформившись в рамках аналитической философии лишь в первой трети XX столетия. В античности обсуждение проблем онтологии и математики шло нередко рука об руку. Так, во второй книге «Физики» Аристотель пишет, что «необходимость в математике и в вещах, возникающих по природе, в некотором отношении очень сходны» (200 a 15—16), проводя непосредственную аналогию между условиями существования дома и пилы, с одной стороны (дома не будет без камней, а пилы – без железа), и начал математики, с другой (последних не будет, если сумма углов треугольника окажется не равной двум прямым углам). В «Метафизике», анализируя проблему статуса математических объектов, Стагирит пишет о геометрах, что они «говорят правильно и рассуждают о том, что на деле существует, и их предмет – существующее...» (1078 a 29—30). А. Ф. Лосев в шестом томе «Истории античной эстетики», ссылаясь на комментарий У. Росса к этому фрагменту, интерпретирует аристотелевское понимание деятельности геометра как актуализацию посредством познавательного акта имеющейся изначально лишь в виде чистой потенции умопостигаемой материи математики.

Любопытно, что если у Аристотеля только математическая деятельность переводит существующие в возможности свойства геометрических фигур в разряд действительных их свойств (1051 a 21—30), то в настоящее время математик склонен рассматривать свои абстракции как движение в обратном направлении, от действительного мира к «возможным мирам». На мой взгляд, было бы интересно выяснить, в чем причины подобного «переворачивания» взаимоотношения между категориями возможности и действительности в античной и современной математике. Не исключено, что в ходе ответа на данный вопрос удастся конкретизировать содержащееся в работе общее положение об онтологической детерминации стилей математического мышления, а также заодно прояснить причины возможной сдержанности в отношении «модальной интерпретации» математики со стороны тех читателей, которые ориентируются в своих философских предпочтениях именно на эту науку.

ОТВЕТ АВТОРА

Даже если не говорить о всей античности, а только о взглядах Аристотеля, как это и делают У. Д. Росс и А. Ф. Лосев, на мой взгляд, дело обстоит достаточно сложно. Росс воспроизводит онтологическую схему аристотелевской философии, подразумевающую переход от возможности к действительности как от незавершенного к завершенному. Нет ничего удивительного, что и математик с его познавательной деятельностью должен быть вовлечен в этот процесс. Поэтому Лосев соглашается с такой характеристикой математика и пишет: «Так называемая "умопостигаемая материя" математики, по Аристотелю, не существует ни как действительная субстанция в чувственных вещах, ни как некая действительная идеальная сущность, а присутствует в ощущаемых вещах как потенция, как некоторая их возможность, которую переводит в действительность сам математик, поскольку делает ее предметом своего действительного познавательного акта (Met. XIII 3, 1078 a 30 — см. комментарий *У. Росса* к этому тексту). Подлинное место умопостигаемой материи — только в надкосмическом Уме» (*Лосев А. Ф.* История античной эстетики. Поздний эллинизм. М., 1980. С. 307). Следовательно, математик в своем действительно осуществляемом познании, направленном на математический предмет, изучает его возможности, а этот предмет есть не что иное, как «умопостигаемая материя», которая, в свою очередь, есть потенция чувственных вещей. Можно, конечно, отсюда вывести, что за этой потенцией, или возможностью, стоит действительность ощущаемых вещей и что, исследуя возможности, математик идет к ним все же от некой действительности. Но от такого вывода сложности, а вернее, запутанности, в рассматриваемом вопросе становится не на много меньше. А. Ф. Лосев как будто видит запутанные места в рассуждеиях Аристотеля: «Изложение им этих вопросов [о материи. — *А. К.*] действительно страдает неясностью» (там же). Однако вопрос о предмете математики к таким местам «Метафизики» он, похоже, не относит.

В самом деле, что такое «умопостигаемая материя»? По Аристотелю, она отлична как от непознаваемой первой материи, так и от движущейся материи, воспринимаемой чувствами. Примеры материи, постижимой умом дают предметы математики (см.: *Аристотель*. Соч.: В 4-х т. М., 1976. Т. 1. С. 207). Последние в арифметике и геометрии (в отличие от оптики, гармонии и астрономии) рассматриваются как неподвижные (там же, с. 181, 285, 471, прим. к с. 181). Они сущие (там же, с. 326) как осуществленность (там же, с. 326) и не составляют каких-либо сущностей (там же, с. 312).

Вот эта-то осуществленность математических предметов означает их действительность, откуда прямо следует, что математик, изучающий арифметику и геометрию, своей действительной познавательной деятельностью исследует и действительность, а не только возможность. Впрочем, другой крупный специалист в области античной философии, В. Ф. Асмус, пишет о сходной познавательной схеме у Аристотеля, хотя имеет в виду предмет знания, соотнесенного с ощущениями, а не с умозрением: «Предмет, рассматриваемый сам по себе, есть только возможный предмет знания. Если бы он остался только возможным, знание не могло бы возникнуть. Но с того момента, как он становится объектом созерцания, и он, и знание его разом становятся действительностью, они уже составляют единство (*Асмус В. Ф.* Метафизика Аристотеля // там же, с. 36—37).

А в эпоху Возрождения, по выражению Лосева, «совершилось нечто сказочное» (*Лосев А. Ф.* Эстетика Возрождения. М., 1978. С. 56). Происходит математическое оформление субъективного человеческого восприятия, приведшее к созданию проективной геометрии, «которая хотя и оформляет собой самую обыкновенную зрительную чувственность, тем не менее обладает точностью, характерной для математических наук вообще» (там же, с. 56—57). Действительность в субъективном образе человеческого восприятия ворвалась в математику и постепенно стала предметом исследования, таким, каким до этого не была. В античности действительность предметов математики (арифметики и геометрии), следуя Аристотелю, понималась так, что соответствовала умозрительному характеру миропознания, тогда как в новое время методологическая установка в науке стала иной: от опытного исследования природы к математическому ее выражению.

Математика всегда была причастна к исследованию действительности как модальности определенного типа. Можно считать, что вместе с сопутствующими историческими изменениями поменялась не направленность модальных переходов, а методология изучения действительности. На вопрос, почему так произошло, наверное, лучше не давать ответа, чем домысливать гипотетические причины этих изменений. Плодотворным же будет такой ответ, который не ограничивается их констатацией, а углубляется в изучение их оснований, но этих последних великое множество и, соответственно, тут никак не избежать длительной конкретной работы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МИФОЛОГИЯ И ПАНГЕОМЕТРИЗМ*

Шапошников В. А.

Открылось мне: в законах точных числ,
В бунтующей, мыслительной стихии —
Не я, не я — благие иерархии
Высокий свой запечатлели смысл.
Звезда... Она — в непеременном блеске...
Но бегает летучий луч звезды
Алмазами по зеркалу воды
И блещущие чертит арабески.

А. Белый. Дух (1914)

Как справедливо отметил еще О. Шпенглер [1], не существует универсального стиля математического мышления (универсальной математики), поскольку не существует универсальной общечеловеческой культуры. В разные эпохи и у разных народов математика отличалась настолько сильно, что перед нами, в некотором смысле, *различные* культурные феномены (например, математика античная и математика нововременная). Другой важный тезис Шпенглера состоит в том, что существует теснейшая взаимосвязь между разнообразными сторонами жизни данного культурного организма: античная математика глубочайшим образом связана с античными мифологией, религией, искусством, архитектурой, организацией общественной жизни и т.д., а нововременная математика — с соответствующими сторонами нововременной культуры. Эти два шпенглеровских тезиса являются основополагающими для всякой социокультурной философии математики.

Желая проследить далее процесс дифференциации стилей, и приглядываясь к математике определенного культурного организма, мы увидим более мелкие разделения. Например, в случае современной европейской культуры стало уже общепринятым противопоставлять математику «работающих математиков» (working mathematicians) и математику математических логиков и специалистов по основаниям. Другой пример: А. Н. Кричевец предлагает различать в рамках современной культуры, по крайней мере, *три* математики — математику профессиональных математиков, математику инженеров, и

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (код проекта: 97–03–04276).

математику физиков [2, с. 387—388]. Можно, очевидно, произвести и другие разделения современной математики. Для дальнейшего нам будет удобно несколько развить различение А. Н. Кричевца: мы можем разделять математику через преимущественное тяготение к определенной смежной области культуры: так у нас будут появляться не только математика физиков или инженеров, но и математика философов, математика художников, математика поэтов и т.д. Особое положение при таком делении займет математика профессиональных математиков. Она не взаимодействует напрямую с другими областями культуры: такое взаимодействие всегда опосредовано одной из «математик», перечисленных нами выше. Преимущественная связь с той или иной областью культуры, равно как и установка, состоящая в избегании такой связи, накладывает определенный отпечаток на стиль математического мышления, характерный для данной «математики». Можно даже смотреть на подобное деление математики как на различение стилей мышления par excellence.

Очевидно, дифференциацию стилей математического мышления можно продолжать и далее, пока не дойдем до уникального стиля данного математика или даже данного математического текста. Однако уже произведенного выше различения будет вполне достаточно для наших целей.

Пока что мы проводили разделительные линии. Мы отделяли математику разных культур и эпох, мы разделяли математику и в рамках единой эпохи и единой культуры, в зависимости от основной области приложений. Теперь необходимо сказать, что, конечно же, в культурном организме математика физиков не обособлена от математики профессиональных математиков или от математики средней школы, а сложным образом взаимодействует с ними. Да и между культурами нет все-таки непроницаемых перегородок: так античная математика и математика нововременная, несмотря на все свои отличия, связаны все же цепью «социальных эстафет» (М. А. Розов). Именно наличие этой, хотя порой весьма хрупкой, связи и позволяет нам все-таки надеяться на возможность понимания, равно как и на оправданность разговора о *едином* феномене математики (хотя более адекватным здесь было бы сравнение не с единой жизнью, а с цепью перевоплощений, связанной единством кармы).

Итак, хотя универсальной математики не существует, это не означает бессмысленности разговора о математике вообще. (Ниже мы будем говорить не только об определенном стиле математического мышления – *математической мифологии*, но и о понимании математики вообще, этим стилем провоцируемом, — *пангеометризме*). Достаточно удобным для разъяснения нашей мысли оказывается противопоставление *понятия-емкости* и *понятия-типа*, производимое Р. Арнхеймом [3, с. 34—39]. «Понятие-емкость — это сумма свойств, по которым можно узнать данный вид сущности. Тип — это структурная основа такого вида сущности» [3, с. 35]. Мы не будем пытаться в дальнейшем привести необходимый и (в совокупности) достаточный перечень черт, определяющих математическое мышление. Да такой перечень и невозможно составить (здесь уместно вспомнить знаменитые рассуждения Витгенштейна о понятии «игра»). Однако это не делает менее интересной попытку угадать некий *образ*, некую *структуру-гештальт*, которая давала бы нам ощущение прозрения в тайну математического.

При этом достаточно понятно, что характер подобного «прозрения» будет зависеть от избранного угла зрения на математику (в нашем случае, взгляда на нее с точки зрения ее связи преимущественно с такими областями культуры как религия, философия, искусство). Выбор иного угла зрения привел бы к иной картине, но избрание одного угла зрения и не предполагает отрицания правомерности других. Поэтому указание на наличие различных подходов не дает решающего аргумента против картины, создаваемой в настоящей работе. Более того: мы не просто избираем здесь определенный ракурс, но стремимся сохранять его, пока остается возможность развивать мысль в избранном направлении. Это сознательный метод данной работы.

1. Что такое математическая мифология?

Платоновский Тимей говорит: «...не удивляйся, Сократ, что мы, рассматривая во многих отношениях много вещей, таких, как боги и рождение Вселенной, не достигнем в наших рассуждениях полной точности и непротиворечивости. Напротив, мы должны радоваться, если наше рассуждение окажется не менее правдоподобным, чем любое другое, и притом помнить, что и я, рассуждающий, и вы, мои судьи, всего лишь люди, а потому нам приходиться довольствоваться в таких вопросах *правдоподобным мифом*, не требуя большего» [4, с. 433; курсив мой. — *В. Ш.*].

Мифология «Тимея» насыщена математическими элементами. Это не просто миф, но *миф математический*. Здесь и рассуждение о шарообразности космоса, и разделение космической смеси в соответствии с определенными арифметическими закономерностями, и все учение о четырех стихиях, включающее знаменитые рассуждения о правильных многогранниках. Согласно Проклу, «Платон многие удивительные учения о богах излагает нам посредством математических форм», и таков же «весь способ Пифагора учить о богах» [5, с. 81].

В чем же смысл математического мифа? В чем притягательность *именно математической* мифологии для античного мыслителя? Ответ на эти вопросы мы находим у того же Платона, и в первую очередь в диалоге «Государство».

Во-первых, здесь мы отчетливо видим, каким образом миф работает в динамике платоновской мысли. В конце VI книги строятся взаимосвязанные иерархии бытия и познавательных способностей, а параллельно им развивается соответствующая мифологическая конструкция, которая находит окончательное завершение уже в VII книге в знаменитом мифе о пещере. По существу Платон параллельно возводит *две* тесно связанные между собою конструкции — *метафизическую* и *мифологическую*. Их взаимосвязь организуется посредством широко применяемого Платоном принципа *пропорции или аналогии* (см. подробнее у А. Ф. Лосева [6, с. 250—275]).

Приведем в качестве примера лишь малый фрагмент этого построения [4, с. 253—319]. Содержащееся в VI книге учение о Благе может быть представлено следующей пропорцией:

$$\frac{\textit{мышление}}{\textit{зрение}} = \frac{\textit{идеи}}{\textit{вещи}} = \frac{\textit{Благо}}{\textit{Солнце}}$$

Числители выписанных дробей относятся к области подлинного бытия, а знаменатели — к области чувственно воспринимаемого (зримого). Метафизическую связь между мышлением, идеями и Благом предлагается понимать по аналогии с тем, как связаны между собой зрение, видимые с его помощью вещи и, только и делающие возможным существование зрения и видимого мира, Солнце и его свет. Наша душа, погрязшая в чувственном мире, и наш язык, приспособленный преимущественно к выражению предметов и отношений *этого* мира, позволяет нам с помощью такой пропорции представить, до некоторой степени, и сверхчувственное отношение сверхчувственных предметов. В этом и состоит, по всей видимости, главный смысл, как приведенного построения, так и всего мифа о пещере, в который это построение разрастается в VII книге.

Во-вторых, в тех же книгах «Государства» мы находим ответ не только на вопрос о функции платоновского мифа вообще, но и о специфической притягательности именно математического мифа. Имеется в виду знаменитое учение о *срединном* положении математики, и вытекающей отсюда исключительной роли последней в процессе восхождения души от мира чувственного к миру подлинному. Как разъясняют нам Платон и Прокл, математические конструкции ближе к миру подлинному, более совершенны и более устойчивы, чем текучие образы чувственного мира, однако не полностью свободны от материальности (hyle phantaston), что и позволяет строить на их основе миф, но миф более правдоподобный, более адекватный реалиям подлинного мира.

Ступень математическая — промежуточная ступень лестницы, за которой следует диалектика. Однако (чего часто не замечают!), переход на ступень диалектики вовсе не означает у Платона отказ от *всего*, что имелось на ступени математики. При этом переходе необходимо должно происходить осознание и осмысление тех предпосылок, которые оставались неосознанными и неосмысленными на предыдущей ступени, но математические дисциплины признаются «помощниками и попутчиками» (Платон) диалектического метода, его «подспорьем и азбукой» (Алкиной).

В качестве весьма выразительного примера можно указать на последний трактат «Эннеад» Плотина. Трактат «О благе или едином», по самой своей тематике, особенно ярко обнаруживает *двойственное* отношение к математике (обусловленное *промежуточностью* ее статуса) характерное для платоников.

С одной стороны, наставляя тех, кто желает философствовать о Едином, Плотин требует не присоединять к своему созерцанию ничего ни от чувственного восприятия, ни от математической образности, поскольку Единое *безвидно*, чуждо всякого образа (aneideos) [7, с. 219]. С другой стороны, читая трактат далее, мы обнаруживаем, что Плотин активно привлекает различные образы, в особенности математические, и именно чтобы говорить (=мыслить) о Едином.

Здесь возникают образы *геометрической точки* и *арифметической единицы*. Единое аналогично им «по простоте и избеганию множества и деления» [7, с. 221]. Далее эта мысль развивается. Развитием (эманацией) образа *точки* оказывается образ *круга*, а затем и *сферы* (сама же точка выступает теперь как *центр*: «центр же — то, от чего происходит круг»). Душе, согласно Плотину, по природе свойственно не *прямолинейное* движение, а *круговое*, вокруг Единого, которое есть «как бы центр души». Естественность кругового движения, и рассмотрение прямолинейного движения, как *отклонения* от кругового, символизирует соответствующее отношение между умным и чувственным («чувственное созерцание может быть сравнено с линией, а умственное — с кругом» [8, с. 61], аналогия восходит к «Тимею» Платона). Плотин говорит также, что мы «соприкасаемся в центре самих себя с как бы центром всего *так же, как центры наибольших кругов соприкасаются с центром объемлющей сферы*» [7, с. 223; курсив мой. — *В. Ш.*], состояние же экстаза описывает как *совмещение центра с центром* [7, с. 225].

Что же получается? Плотин забыл о собственных увещаниях? — Нет. Более того, он неоднократно повторяет их *вперемешку* с приведенными выше рассуждениями, использующими образы единицы, точки, круга, сферы (и ее больших кругов). Кроме того, и в самих этих рассуждениях он постоянно делает оговорки: «не нужно вперять сюда мысль», «как бы центр», «“центр” по аналогии», «не оттого, что душа — круг, как фигура» и многие другие. Всю же ситуацию он в конце трактата разъясняет следующим сравнением: стремящийся к постижению Единого, «совсем как некто, вошедший вовнутрь святилища и оставивший позади изваяния в храме, которые вышедшему из святилища опять предстают первыми после зрелища внутри и общения там не с изваянием и не с образом, а с "самим", и которые, стало быть, оказываются последующими зрелищами. <...> Ну, а эти зрелища — подобия; и потому мудрым из прорицателей они намекают, как тот бог зрится; мудрый же жрец, уразумевший намек, мог бы, оказавшись там, в святилище, сделать созерцание истинным» [7, с. 225].

Все становится на свои места, когда мы начинаем понимать, что для Плотина есть *две* математики (равно как и *два* отношения к чувственно воспринимаемому). Одну из них он отвергает, тогда, как другую приемлет. Это те самые две математики, которые столь настоятельно противопоставляет Платон в «Государстве» [4, с. 304—315] — «торгашеская» математика и *математика философская*, математика сама по себе (или даже ориентированная на технические приложения и получение мирской выгоды) и математика как «подспорье и азбука» диалектики (как *математическая диалектика* или *диалектическая математика*). Другими словами, как Платон, так и Плотин, отвергают математические образы *как таковые* и приветствуют их в качестве элемента *мифа*. Подлинная математика для них — это *математический миф*, это те изваяния в храме, которые окружают святилище.

Еще более отчетливое выражение этих же мыслей находим у Николая Кузанского, полагавшего, что именно математика «лучше всего помогает нам в понимании разнообразных Божественных истин». Рассуждает он следующим образом: «Видимое поистине есть образ невидимого», и Творца «можно увидеть по творению как бы в зеркале и подобии». Если же «разыскание ведется все-таки исходя из подобий, нужно, чтобы в том образе, отталкиваясь от которого мы переносимся к неизвестному, не было по крайней мере ничего двусмысленного; ведь путь к неизвестному может идти только через заранее и несомненно известное. Но все чувственное пребывает в какой-то постоянной шаткости ввиду изобилия в нем материальной возможности. Самыми надежными и самыми для нас несомненными оказываются поэтому сущности более абстрактные, в которых мы отвлекаемся от чувственных вещей, — сущности, которые и не совсем лишены материальных опор, без чего их было бы нельзя вообразить, и не совсем подвержены текучей возможности. Таковы математические предметы». Поэтому, «если приступить к Божественному нам дано только через символы, то всего удобнее воспользоваться математическими знаками из-за их непреходящей достоверности» [9, с. 64—66].

К математической мифологии могут быть отнесены знаменитые рассуждения Николая Кузанского в «De docta ignorantia», использующие динамические возможности геометрических фигур: шар бесконечного радиуса, центр которого везде, а периферия — нигде; многоугольник, вписанный в круг, число углов которого неограниченно увеличивается; совпадение бесконечной прямой и окружности бесконечного радиуса и т.п.

Обратим внимание, что математические конструкции, став частью мифа, *начинают жить особой жизнью*. Здесь могут возникать, да и в действительности возникают, рассуждения, выглядящие совершенно чудовищно для человека непривычного к подобному стилю мышления. Достаточно вспомнить уже упомянутые рассуждения Платона о правильных многогранниках, или многочисленные аргументы в пользу совершенства декады в «Теологуменах арифметики», восходящие к Спевсиппу, а, возможно, и к Филолаю или даже ранним пифагорейцам [10, с. 417—418].

Об особенностях соответствующего взгляда на математику мы поговорим чуть ниже, а сейчас посмотрим на некоторые более близкие и привычные для нас способы обращения с математическими конструкциями, находящиеся, тем не менее, в самом тесном родстве с математической мифологией.

2. Выр ождение математической мифологии: парадигмальные схемы

Начнем с нескольких примеров, заимствованных у Лейбница.

«Простота субстанции не препятствует множественности модификаций, которые должны совместно существовать в той же самой простой субстанции и состоять в разнообразии отношений к внешним вещам. *Точно так же в центре, или точке, как она ни проста, находится бесконечное множество углов, образованных линиями, в ней встречающимися*» [11, с. 404; курсив мой. — *В. Ш.*].

«...Случай совершенного равновесия химеричен: он никогда не встречается, так как универсум нельзя разрезать или разделить на две совершенно равные и схожие части. Универсум, *как эллипс или другой подобный овал* (имеется в виду: *в отличие* от эллипса или другого подобного овала — *В. Ш.*), *нельзя разложить посредством проведенной через центр прямой линии на две совпадающие части*. Универсум не имеет центра, и его части бесконечно разнообразны; следовательно, никогда не будет случая, когда все на обеих сторонах станет одинаковым и будет производить на нас равное влияние...» [11, с. 381; курсив мой. — *В. Ш.*].

«Но когда я все более сосредотачивал мысль, не давая ей блуждать в тумане трудностей, мне пришла в голову *своеобразная аналогия между истинами и пропорциями*, которая, осветив ярким светом, все удивительным образом разъяснила. Подобно тому, как *во всякой пропорции меньшее число включается в большее либо равное в равное*, так и во всякой истине предикат присутствует в субъекте; *как во всякой пропорции, которая существует между однородными (подобными) количествами (числами), может быть* *проведен некий анализ равных или совпадающих и меньшее может быть отнято от большего вычитанием из большего части, равной меньшему, и подобным же образом от вычтенного может быть отнят остаток и так далее, беспрерывно вплоть до бесконечности*; точно так и в анализе истин на место одного термина всегда подставляется равнозначный ему, так что предикат разлагается на те части, которые содержатся в субъекте. Но точно так же, как *в пропорциях анализ когда-то все же исчерпывается и приходит к общей мере, которая своим повторением полностью определяет оба термина пропорции, а анализ иногда может быть продолжен в бесконечность, как бывает при сопоставлении рационального и мнимого числа или стороны и диагонали квадрата*, аналогично этому истины иногда бывают доказуемыми, т.е. необходимыми, а иногда — произвольными либо случайными, которые никаким анализом не могут быть приведены к тождеству, т.е. как бы к общей мере. А это и является основным различием, существующим как для пропорций, так и для истин» [11, с. 316; курсив мой. — *В. Ш.*].

Эти три фрагмента, взятые из различных работ Лейбница, объединяет следующее: в контекст метафизического рассуждения вводятся математические фрагменты (мы выделяли их курсивом). При этом сам автор воспринимает их как «своеобразные аналогии» достаточно случайно связавшиеся в его мысли с метафизическим рассуждением. Например, еще в одном месте, Лейбниц пишет, что он мучительно размышлял «над тем, как можно совместить свободу и случайность с цепью причинной зависимости и провидением». «Но тут вдруг, — говорит он, — блеснул мне некий невиданный и неожиданный свет, *явившийся оттуда, откуда я менее всего ожидал его, — из математических наблюдений над природой бесконечного*. Ведь для человеческого ума существует два наиболее запутанных вопроса (“два лабиринта”). Первый из них касается структуры непрерывного, или континуума, а второй — природы свободы, и возникают они из одного и того же бесконечного источника» [11, с. 312—313; курсив мой. — *В. Ш.*].

Нетрудно увидеть связь между приведенными рассуждениями Лейбница и математическими мифами Платона и Николая Кузанского. Однако нетрудно заметить также и существенные отличия: во-первых, привлечение математики не является теперь осознанным, оправданным и систематически проводимым познавательным приемом; во-вторых, математические конструкции не обретают в этих рассуждениях особой жизни, они в готовом виде заимствуются из развитых независимо математических теорий. Здесь наблюдается как бы *вырождение* математического мифа, забвение им собственных корней. Внешне все как в математическом мифе, но исчезло измерение глубины, осталась лишь поверхность, утратившая свой смысл и неспособная к самостоятельной жизни и развитию.

Теперь перед нами лишь аналогия или модель, единственный смысл которой — *дать наглядное представление* самим по себе мало наглядным метафизическим рассуждениям. Вплетенная в метафизический контекст математическая конструкция служит здесь *образцом (парадигмой)* для наглядного представления метафизических отношений, предлагает для них отчетливый образ. Желая отличить подобное приложение математики от математического мифа, мы будем называть соответствующие математические конструкции — *парадигмальными схемами* [12, с. 67; 13, с. 370].

Легко заметить, что между математическим мифом и использованием математических конструкций в роли парадигмальных схем *невозможно провести отчетливой демаркационной линии*. В каждом конкретном случае может возникать сомнение — что перед нами? Если правильные многогранники в «Тимее» Платона — скорее математический миф, чем парадигмальная схема, а геометрические и арифметические конструкции в текстах Лейбница — vice versa, то чем является «совершенно-круглый шар» в поэме Парменида [12, с. 57—59], сказать уже затруднительно. При этом у одного и того же автора наряду с полноценными математическими мифами могут встречаться и вырожденные варианты — например, уже упомянутое выше пристрастие Платона к использованию конструкций геометрической пропорции и геометрического подобия, в качестве способов организации иерархии.

Ситуация еще более осложняется тем, что недостаточная осознанность и продуманность связи между ходом метафизического рассуждения и привлекаемыми для его иллюстрации математическими аналогиями (как в случае Лейбница, лишь смутно догадывающегося о неслучайности являющихся его мысли метафизико-математических параллелей как следствии единства их «бесконечного источника»), часто приводит к тем большей неосознаваемой зависимости хода метафизического рассуждения от предстоящих мысли математических схем (как и получилось у Лейбница), иногда вплоть до подлинной *математической экспансии* [12, с. 63—64]. Дело в том, что соответствующие математические конструкции вряд ли привносятся в метафизические рассуждения лишь post hoc, когда основной рисунок рассуждения уже сложился. Являясь на ранних стадиях формирования мысли, соответствующие математические конструкции не остаются пассивными. Наглядность этих конструкций, отчетливость математических образов, делает их, можно сказать, «навязчивыми», определяя их активное влияние на те пути, которые избирает находящаяся в стадии становления метафизическая мысль.

Тексты Лейбница были выбраны нами в качестве примера, конечно же, не случайно. Однако не следует думать, что они единственны в своем роде, т.е. в том, как используется в них математика. Использование математических конструкций в роли парадигмальных схем — широко распространенное явление, причем не только среди философствующих математиков, таких как Лейбниц и Г. Вейль [12, с. 63—64], или мыслителей, получивших хорошее математическое образование, таких как П. Флоренский [12; 13] (Флоренский не ограничивался работой с математическими конструкциями как парадигмальными схемами, он один из немногих, кто *осознанно стремился к возрождению математического мифа в его полноте;* вслед за ним в этом направлении шел и А. Ф. Лосев), но и среди весьма далеких от математики авторов — например, у Вл. Соловьева [14, с. 568—570], — хотя в последнем случае набор применяемых математических конструкций по понятным причинам значительно беднее.

Еще более распространено *применение разнообразных схем и диаграмм* — диаграммы Эйлера-Венна, появившиеся в логике задолго до построений, связавших математическую логику и топологию; диаграммы, применяемые школой Г. П. Щедровицкого, и язык картинок, развиваемый А. Г. Барабашевым [15]; диаграммы А. Белого [16] и т.п. Мы указали наиболее яркие примеры. Однако, всякое иллюстрирование рассуждения посредством наглядной схемы, составленной из «кружочков», «прямоугольничков», «стрелочек» и т.п., стоит в легко заметном родстве с математическими конструкциями в роли парадигмальных схем, являясь *еще более выројкденной версией математической мифологии* [12, с. 67—68]. Интересно, что и эти диаграммы и схемы обладают «навязчивостью» математических образов и способны вести за собой мысль (на что особо обращает внимание А. Г. Барабашев).

3. Математическая эстетика и пангеометризм

В предыдущих пунктах был продемонстрирован определенный контекст, в котором могут существовать, и существуют математические конструкции. Попробуем отдать себе отчет в некоторых определяющих особенностях такого их существования.

Во-первых, обратим внимание на *чисто качественный, квалитативный,* подход к математическим конструкциям. Эта особенность достаточно ярко прослеживается в приведенных выше примерах.

Во-вторых, — на *отсутствие однозначной связи* между нематематическим предметом рассмотрения и математической конструкцией [12, с. 66; 13, с. 369]. Приведем соответствующие примеры.

Существует целая традиция использования геометрического образа круга (окружности) для прояснения соотношения Божественных ипостасей (hypostasis), которых три при единстве сущности (oysia). Однако делаться это может по-разному (см. по этому поводу [17, с. 62—66]).

Так Николай Кузанский сравнивает Бога с максимальным кругом, у которого, в силу единственности максимума, центр, диаметр и окружность тождественны. «Ты видишь, — пишет он, — что простой и неделимый максимум целиком залегает внутри всего как бесконечный центр, что он извне всего охватывает все как бесконечная окружность и что он все пронизывает как бесконечный диаметр. Он начало всего как центр, конец всего как окружность, середина всего как диаметр. Он действующая причина как центр, формальная причина как диаметр, целевая причина как окружность. Он дарует бытие как центр, правит как диаметр, хранит как окружность, — и многое в том же роде» [9, с. 83]. По-видимому, *центр*, дающий единство кругу, символизирует здесь Отца как *единство; диаметр*, как характеризующий равенство круга по всем направлениям, — Сына, как *равенство единства*; *окружность*, замыкающая и связующая круг, — Духа, как *связь* Отца и Сына.

Несколько по-другому у Кеплера: «Образ Триединого Бога – это сферическая поверхность; другими словами, Бог-Отец находится в центре, Бог-Сын — на наружной поверхности, а Бог-Дух Святой – в равенстве отношений между точкой и поверхностью» [3, с. 62]. Вместо круга мы имеем здесь дело с шаром, а элементы, с которыми связывались Сын и Дух, поменялись местами.

Поясняя почему Бог троичен (а не четверичен, пятеричен и т.д.), Николай Кузанский использует образ треугольника как простейшего из многоугольников: «четырехугольная фигура не минимальна, что очевидно, поскольку треугольник меньше ее; значит простейшему максимуму, который может совпасть только с минимумом, четырехугольник, всегда составный и потому больший минимума, подходить никак не может» [9, с. 81].

Рассматривая тот же вопрос, П. А. Флоренский привлекает иной образ: он предпочитает представлять себе взаимное расположение точек на окружности. «В трех ипостасях, — пишет он, — каждая — непосредственно рядом с каждой, и отношение двух только *может* быть опосредствовано третьей. Среди них абсолютно немыслимо первенство. Но всякая четвертая ипостась вносит в отношение к себе первых трех тот или иной *порядок* и, значит, *собою* ставит ипостаси в неодинаковую деятельность в отношении к себе, как ипостаси четвертой» [18, с. 50]. (Подробнее см. в [19, с. 149—150]).

Обсуждаемое отсутствие однозначной связи интересно выразилось уже в «Тимее». Желая конструировать правильные многогранники из прямоугольных треугольников, Платон избирает два наиболее «прекрасных» из них — равнобедренный и «тот, который в соединении с подобным ему образует третий треугольник — равносторонний» (т.н. гемитригон). Первый из избранных треугольников «хорош» по понятной причине — у него равные катеты. Но почему из всех неравнобедренных прямоугольных треугольников выбран именно гемитригон? Этого Платон не объясняет: «обосновывать это было бы слишком долго (*впрочем, если бы кто изобличил нас и доказал обратное, мы охотно признали бы его победителем*)» [4, с. 457; курсив мой. — *В. Ш.*]. Обратим внимание на выделенные курсивом слова. Что это значит?

На наш взгляд, Платон подчеркивает, что для него важен эффект, производимый его рассуждением в целом и основные принципы его разворачивания (в данном случае: эстетическое совершенство), а не отдельные его детали, которые могут и не определяться темой диалога однозначным образом, а значит, и могут быть заменены другими, коль скоро такие будут представлены.

Обе названные особенности существования математических конструкций в интересующем нас культурном контексте являются частными проявлениями более общей тенденции — *тяготения к восприятию математики как эстетического феномена*. Эстетического в широком, первоначальном смысле этого слова (от aisthesis — чувственное восприятие, в первую очередь — зрение). Греческая математика преимущественно геометрична, а в платонической традиции именно геометрия оказывалась самой «математической» из всех математических дисциплин, дисциплиной, наиболее полно воплощающей срединное положение математики между чувственным и эйдетическим [20]. Именно эстетическая сторона математики выявляет себя наиболее полно в математической мифологии.

Как мы уже отмечали, всякая специфическая область приложения математики позволяет по-новому взглянуть на математику в целом. Какую же перспективу в понимании математики открывает нам математическая мифология и работа математических конструкций в роли парадигмальных схем?

В данном аспекте ключ к пониманию природы математики наиболее естественным представляется искать в самой наглядной, «зримой», области математики — в *геометрии*.

Уже Прокл отчетливо зафиксировал главную особенность геометрической мысли: она способна дать развернутое знание о своих предметах лишь с помощью *воображения* (phantasia), отразив их в *воображаемой материи* (hyle phantaston) [5]. Предмет математики не умозрителен, но и не воспринимаем чувствами. Он удивительным образом причастен и тому и другому, что Аристотель зафиксировал в парадоксальных, совмещающих главные противоположности платонической онтологии терминах hyle noete («мыслимая материя») и noys pathetikos («страдательный разум») [20]. Геометрическое воображение Прокла оказывается одновременно совмещающим в себе казалось бы несовместимое — чистую активность (noys) и чистую пассивность (hyle). Чистая мысль (noys theoretikos), овеществляясь, обращается в геометрии в noys pathetikos, а материя чувственного восприятия (hyle aisthete), очищаясь, предстает как более «тонкая» геометрическая материя (hyle noete, hyle phantaston).

Следующий важный шаг в осмыслении природы геометрической мысли делает Кант. Если у Прокла оставалось все же не достаточно продуманным различие воображения чувственного (например, создающего кентавра или трагелафа) и воображения геометрического, то Кант восполняет этот недостаток. Прокловскому различению hyle aisthete и hyle phantaston у Канта соответствует противопоставление *эмпирического* и *чистого созерцания* (reine Anschauung). Причем Кант *явно называет* это чистое созерцание — «пространство + время». Здесь «пространство и время» обозначают тот универсальный фундамент, который соответствующий мысленный эксперимент обнаруживает в основе всякого нашего представления [21, т. 3, с. 64, т. 4, с. 38]. Геометрическое мышление есть *пространственно-временное конструирование*, а предмет геометрии — *пространство и его отношения, временная динамика пространственных конструкций* [21, т. 3, с. 67, 76—77, 528—529].

В самом деле, в эстетическом аспекте деятельность геометра предстает как организация и переорганизация пространственных элементов во времени, а цель ее – как изучение существующих здесь возможностей. Решая задачу из элементарной геометрии, мы проводим прямые и окружности, фиксируем их пересечения как точки. Затем исследуем устройство получившейся конфигурации: насколько «жестко» заданные условия фиксируют соответствующую «конструкцию», сколько различных конструкций может быть «собрано» из данных элементов и т.п. Особенно важно отметить, что соединение любых двух элементов в этой деятельности непосредственно дается нам в созерцании, мы непосредственно «видим» как они «стыкуются» между собой. Доказательства же и вычисления в эстетическом аспекте предстают как сравнение и сопоставление различных элементов исследуемой конструкции.

Нарисованная картина порождает, однако, ряд вопросов и требует комментария.

Во-первых, обратим внимание на то, как проявляется в нашем простейшем случае платоническая тема срединного положения геометрического мышления между чистой активностью и чистой пассивностью. С одной стороны, налицо активное, *конструктивное* начало — мы можем порождать те или иные конфигурации по собственному желанию. С другой стороны, мы не можем, например, заставить две прямые «заключать пространство», — та среда, в которой мы разворачиваем свою конструктивную активность, имеет свои закономерности, не позволяющие нашему конструированию быть совершенно произвольным, накладывая на него свои ограничения. Эта среда обладает «косностью», она сопротивляется формующей руке творца, эта среда материальна — актуализировать в ней можно лишь то, что допускается ее собственными потенциями. Более того, деятельность геометра, судя по всему, как раз и направлена именно на выявление этих потенций, а не на наслаждение собственным произволом. Наряду с конструктивным началом в простейшей геометрической деятельности мы явственно ощущаем и присутствие начала *рецептивного*.

Во-вторых, следует особо остановиться на кантовском различении чистого и эмпирического. Насколько математическая мысль действительно свободна от эмпирических образов? Рассуждая, геометр чертит палочкой на песке, мелом на доске или ручкой на бумаге. Те или иные эмпирические «подпорки» постоянно сопровождают геометрическую мысль. В каком смысле можно говорить, что она от них независима? Ведь хорошо известно, что уже в случае достаточно сложной задачи из элементарной геометрии практически невозможно обойтись без помощи эмпирического чертежа.

Подобные недоумения были удачно разрешены еще Аристотелем. Да, геометр рассуждает, глядя на нарисованный им на доске треугольник. Можно даже сказать, что он рассуждает об этом самом нарисованном треугольнике, однако не поскольку он нарисован мелом и на доске, т.е. не поскольку он есть некоторый объект эмпирического мира, а поскольку этот треугольник организован в нашем представлении по определенным закономерностям. Точнее: этот эмпирический чертеж позволяет геометру удерживать внимание на определенной пространственной конфигурации. При этом нам не столь уж важно способны мы представлять треугольник полностью свободным от эмпирических характеристик (например, цвета) или нет. Нам вполне достаточно различать *в самом* эмпирическом предмете пространственно-временные характеристики ото всех остальных. Так разные (с эмпирической точки зрения) чертежи вполне могут представлять одну и ту же геометрическую конфигурацию (единый гештальт).

Однако мы можем задать теперь следующий вопрос: а в самом ли деле мы способны отличать пространственно-временные характеристики ото всех остальных? Кант убежден, что да. Но приводимый им в подтверждение этого и уже упомянутый выше мысленный эксперимент отнюдь не доказывает желаемого. Он вызывает в нашем воображении лишь некие смутные образы (из разновидности «образов абстрактного», которые Р. Арнхейм уподобляет импрессионистской живописи). Интерсубъективность таких образов может вызвать серьезные сомнения. Может быть, более надежно указывают на интересующий нас предмет сами слова «пространство» и «время»? Факт устойчивого существования их в языке предполагает наличие постоянной преемственности в контекстах их употребления, в достаточной степени обеспечивающей взаимопонимание (хотя и не гарантирующей абсолютной неизменности их смысла!). Более конкретным разъяснением вкладываемого в них в настоящем выступлении смысла может служить лишь сам текст этого выступления. Но, что же все-таки способен прояснить для нас мысленный эксперимент Канта? Во всяком случае, достаточную фундаментальность ситуаций употребления слов, выражающих пространственно-временные характеристики. (Может быть, отсутствие четкого различия геометрического и чувственного воображения у Прокла не есть случайность или недодуманность?)

В-третьих, определенного комментария требует и утверждение о данности геометрических фигур в созерцании. Еще Декартом был приведен знаменитый пример с тысячеугольником [22, с. 58], который не может быть нами вообразжен. Хуже того, даже такие простейшие геометрические объекты, как «точка» или «прямая», непредставимы наглядно в точном смысле слова, ведь простейший мысленный эксперимент убеждает нас в непредставимости ни слишком малого, ни слишком большого [23, с. 208; 24, с. 273—274; 25, с. 63—65; 26, с. 44—48, 101—111; 12, с. 37—38]. Действительно, мы не можем представить точку, не имеющую размеров, не можем представить линию, не имеющую толщины, не можем сразу охватить взглядом бесконечную прямую. Однако это не мешает нам представлять прямые и точки все же *достаточно* отчетливо для того, чтобы отличать различные части геометрической конструкции друг от друга и непосредственно «видеть» их взаимное расположение. Прямую мы имеем возможность «видеть» достаточно тонкой для того, чтобы в процессе рассуждения не обращать внимания на ее толщину, а точку — достаточно малой для того, чтобы игнорировать ее размеры. Действительно, мы не можем представить тысячеугольник настолько отчетливо, чтобы отличать его от многоугольника с несколько большим или несколько меньшим числом сторон. Однако мы можем достаточно отчетливо представить его сторону и соединение ее с соседними сторонами, а этого уже вполне достаточно для изучения математических свойств соответствующей конструкции (подробнее это будет разъяснено ниже).

В-четвертых, необходимо сказать несколько слов о *времени* в геометрии. Выражение «пространственно-временное конструирование» следует понимать как пространственную организацию и переорганизацию элементов во времени. Время входит в геометрические конструкции лишь как *динамика* их пространственных элементов. Время в геометрии всегда есть лишь *движение пространственных элементов. Время как таковое* не подлежит не только геометрическому, но и математическому изучению вообще, да и *движение как таковое* также. Лишь подменив время движением, а движение его пространственным следом (траекторией) мы можем сделать их предметом математического изучения. По существу мы будем изучать при этом не время и не движение, а особенности пространственной организации самой траектории. Даже изучая в элементарной геометрии, что может быть построено с помощью циркуля и линейки, а что – нет, мы также не делаем предметом нашего рассмотрения *геометрическое становление как таковое*, но скорее — раскрываемые им особенности организации пространства.

Итак, мы сделали некоторые наблюдения над простейшими проявлениями геометрической мысли в эстетическом ее аспекте. Следующим шагом, естественно, должна стать попытка, распространить наши рассуждения и на другие области математики, проверить, не обнаружим ли мы и там то, что привлекло наше внимание в простейших геометрических примерах. Необходимо выяснить, в какой мере то, что было сказано нами о геометрии, можно повторить и о математике вообще; что можно повторить дословно, а что лишь mutatis mutandis.

Кант этот шаг делает: конструктивный характер математическое мышление сохраняет и за пределами геометрии, однако собственно геометрическое, или *остенсивное,* конструирование заменяется в арифметике и алгебре на *символическое* [21, т. 3, с. 530—531, 542].

Нечто принципиально новое, по сравнению с рассмотренным выше собственно геометрическим конструированием, мы обнаруживаем уже на примере позиционной записи натуральных чисел. Введя строго фиксированный конечный набор графических символов и определенные правила их комбинирования, мы получаем возможность, наглядно представлять достаточно большие натуральные числа и производимые над ними действия. В эстетическом аспекте вся арифметика натуральных чисел предстает как система организуемых на плоскости графических символов. Организация символов производится посредством нескольких типов *манипулирования* этими символами: расстановки и перестановки знаков, замены одних знаков другими. Вспомним хотя бы умножение «столбиком» или деление «уголком». Указанные манипуляции могут быть охарактеризованы как *квазигеометрические*, поскольку, представляя собой операции с графическими знаками как целостными образованиями, собственно геометрическими они не являются (геометрическая конфигурация самого знака здесь совершенно неважна, важно лишь удобство его с точки зрения простоты написания, перестановок и замен, а также достаточное отличие от других знаков в рамках той же системы [27, с. 350—351, 365—366; 28, с. 58, 61—62]). Работа с более богатой и разнообразной алгебраической графикой также может быть охарактеризована как *манипулирование графическими символами.*

Мы имеем здесь дело с *манипуляционным обоснованием*, в основе которого всегда лежат простейшие манипуляции, типа «подставить вместо», являющиеся неформальными, *геометрически очевидными* действиями. Понимание того, что они обозначают, всегда негласно предполагается. Н.Малкольм сохранил следующую мысль Витгенштейна: «Доказательство в математике заключается в том, что уравнение записывают на бумаге и смотрят, как одно выражение вытекает из другого. Но если всегда подвергать сомнению выражения, которые появляются на бумаге, то не может существовать ни доказательств, ни самой математики» [29, с. 90]. Вспоминаются также слова Г.Вейля: «Способ, каким математик обращается со своими формулами, построенными из знаков, немногим отличается от того, как столяр в своей мастерской обращается с деревом и рубанком, пилой и клеем» [28, с. 58].

В эстетическом аспекте, как геометрическое, так и *математическое доказательство* вообще, предстает как *демонстрация*, т.е. непосредственный показ того, как соединяются, «стыкуются» элементы соответствующей математической конструкции. Результат же математического доказательства — *математическое утверждение* — есть, в интересующем нас аспекте, утверждение об особенностях соединения элементов математической конструкции, которое мы имели возможность «видеть» в процессе доказательства. Неслучайно математическое утверждение получило название *теорема* (theorēma), т.е. «зрелище», «то, что смотрят».

Как известно, самый веский аргумент для обыденного мышления звучит приблизительно так: «Я сам видел, не веришь — пойди и посмотри». Заслуживает внимания, что наиболее точная из теоретических наук — математика, составляющая как бы диаметральную противоположность обыденному знанию, черпает доказательную силу своих рассуждений в непосредственной наглядности своего предмета, т.е. также в возможности «увидеть самому» и «показать другому». Можно сказать даже, что подлинной убедительностью, подлинной доказательной силой обладает *только* демонстрация (непосредственный показ). Как говорит Шопенгауэр: «Последняя, т.е. исконная очевидность, — созерцаема, что показывает уже само слово» [30, т. 1, с. 200].

Если бы не существовало обсуждавшихся выше естественных ограничений возможностей нашего наглядного представления пространственно-временных отношений (в восприятии слишком большого, слишком малого и т.п.), то, возможно, и математического доказательства, а тем самым и теоретической математики не возникло бы. Математикам не понадобилось бы идти далее лаконичного «смотри» древних индийцев или перегибания чертежа (как, возможно, обосновывал геометрические утверждения еще Фалес). Мы могли бы смело, вслед за Шопенгауэром [30, т. 1, с. 104—108, 196—216, т. 2, с. 212—214], возмутиться хитросплетениями доказательств от противного, производимых Евклидом там, где достаточно всего лишь перегнуть рисунок, и полагать, что самым лучшим обоснованием теоремы Пифагора является удачный чертеж без каких-либо комментариев.

Однако указанные ограничения существуют, и именно *обговаривание* соответствующих чертежей и их особенностей знаменовало рождение математики как таковой. Но математики не смогли бы продвинуться достаточно далеко в своих изысканиях, если бы не научились воплощать словесные рассуждения в квазигеометрические символические построения, т.е. не смогли бы вновь опереться на геометрическую оче-видность, но на качественно новом уровне. Именно *слово* (logos) оказывается тем связующим звеном, которое позволяет шагнуть от геометрического конструирования к квазигеометрическому манипулированию графическими символами. «Посредством понятийного мышления, — говорит Г. Рейхенбах, — мы можем перейти от созерцания к преобразованному созерцанию. Человеческий разум обладает способностью, так сказать, "перехитрить" визуальные образы с помощью абстрактных понятий и после этого продуцировать новые образы» [25, с. 67].

Уже при решении простейших задач геометрии, наряду с собственно геометрическим конструированием систематически применяется и квазигеометрическое конструирование. Возвращаясь к примеру с тысячеугольником, можно заметить, что хотя его наглядное представление и невозможно в той степени, в какой оно осуществимо для трех- или пятиугольника, однако сохранить конструктивный характер соответствующих рассуждений легко удается посредством введения алгебраической символики, позволяющей рассуждать о соотношении углов и отрезков соответствующей конфигурации вне зависимости от числа сторон, а также различать, неразличимые в наглядном представлении многоугольники с тысячью и тысяча двумя сторонами. Там, где геометрическая наглядность нам отказывает, мы можем опереться на наглядность квазигеометрическую. При этом, как мы могли отвлекаться (абстрагироваться) от толщины геометрических линий и размера геометрических точек, так мы абстрагируемся и от конкретного очертания используемых нами алгебраических знаков, сосредотачивая внимание лишь на системе пространственно-временных отношений, с их помощью передаваемой.

То, что математик занимается при этом именно пространственно-временными *отношениями,* хорошо иллюстрируется широким применением в математике аксиоматического метода. Ведь главная его идея состоит в сведении определения объекта к указанию системы отношений, в которых этот объект может находиться с другими объектами той же теории.

Итак, в эстетическом аспекте математическое мышление предстает перед нами как *пространственно-временное конструирование*, которое может выступать либо в форме *собственно геометрического* конструирования, либо как *квазигеометрическое* конструирование, т.е. манипулирование графическими символами.

— Что изучает математика?

— Пространственно-временные конструкции.

— Как она это делает?

— Посредством разворачивания пространственно-временных конструкций другого уровня.

Такой взгляд на природу математики может быть охарактеризован как *пангеометризм* (в противоположность «панарифметизму», представленному, например, работой Фосса [26, с. 17]). Для него ключом к пониманию специфики математического мышления является именно образный аспект математики, понятийно-логический же аспект рассматривается при этом как вторичный.

4. Математика мистиков, философов, поэтов и традиционная история математики: вместо заключения

Разворачивание математических пространственно-временных конструкций способно вызывать особое чувство красоты, которое без сомнения служит важнейшим психологическим стимулом, как к профессиональным, так и к любительским занятиям математикой. Как всякая подлинная красота, математическое действо обладает магическим обаянием. Оно способно создать в нас ощущение прикосновения к тайне, а порой и религиозный восторг.

Это безошибочно угадал, например, особенно чуткий к такого рода вещам Новалис (Фридрих фон Гарденберг, 1772—1801). В его «Фрагментах» (в первую очередь имеются в виду «гимны к математике», как назвал их Вильгельм Дильтей) мы находим отчетливое выражение этих мыслей: «Истинная математика — подлинная стихия мага. Истинный математик есть энтузиаст per se. Без энтузиазма нет математики. Жизнь богов есть математика. Чистая математика — это религия. На Востоке истинная математика у себя на родине. В Европе она выродилась в сплошную технику» [31, с. 153]. Новалис убежден, что поэт понимает природу лучше, чем ученый. Не ученому и созданной благодаря его усилиям технике дано овладеть миром, но поэту, способному расслышать сокровенный ритм мироздания. Не извне, но изнутри обретается мир. «Истинная математика» Новалиса — это та математика, которая позволяет нам уловить этот скрытый ритм. «Всякий метод есть ритм: если кто овладел ритмом мира, это значит, он овладел миром. У всякого человека есть свой индивидуальный ритм. Алгебра — это поэзия. Ритмическое чувство есть гений» [31, с. 152].

Современная математическая культура мало располагает нас к пониманию того, что это за истинная математика (которая в то же время есть истинная поэзия, истинная религия и истинная магия), о которой так вдохновенно говорит Новалис. Может быть поэтому, мы так плохо понимаем и математику пифагорейско-платонической традиции, а также многие другие феномены европейской духовной культуры столь же необычно для нас воспринимающие математику и развивающие ее. И дело здесь не столько в культурной гордыне, сколько в реальных барьерах мешающих пробиться к существу реалий иной культуры. Пример того, что удается увидеть современному математику, обратившемуся к «второстепенным страницам истории» дает книга Дэна Пидоу «Geometry and the Liberal Arts» (1976). Автору остается лишь огорчаться, что мы утратили способность восхищаться природой простых геометрических фигур, и надеяться, что «неопифагорейские учения все же получат распространение в культуре грядущих поколений» [32, с. 207]. Несомненно, более удачными следует признать попытки П. А. Флоренского и А. Ф. Лосева, которые и явились главными вдохновителями моего интереса к данной области, однако внимательное знакомство с их трудами еще раз убеждает насколько серьезные трудности приходится преодолевать на этом пути.

Мартин Дайк, автор монографии, посвященной математическим фрагментам Новалиса, говорит, что с позиции строгого математика, рассуждения его героя «нестроги, произвольны и не вносят никакого вклада в технические аспекты математической науки». На математика-профессионала эти фрагменты производят впечатление чего-то совершенно бессмысленного, ведь «не успевает Новалис проникнуть в великолепное по своей стройности здание математики, как оказывается, что он уже успел незаконным образом расширить его границы, углубившись в джунгли философских идей, в которые ни один математик, оставаясь математиком, не решится за ним последовать, из опасения, что почва там слишком зыбкая и доказательство бессильно укротить диких зверей, населяющих эти темные области». Желая следить за полетом мысли Новалиса, уводящей нас в этом направлении, мы не можем обойтись без постоянной оглядки на официально принятые результаты, постоянного соотнесения с общепринятым содержанием тех математических областей, в которые он вторгается, однако «нам не следует использовать эти официальные стандарты в качестве абсолютных и пригодных для любой ситуации мерок», и тогда «в его на первый взгляд фантастичных идеях о математике можно будет разглядеть глубокие прозрения о природе этой науки» [33, p. 2—3].

То, что говорит М. Дайк о современном математике-профессионале, может быть, к сожалению, слишком часто повторено и о современном историке математики, над которым также в полной мере имеют власть стереотипы профессионального математического образования. В результате, мы попросту весьма плохо знаем «второстепенные» страницы истории математики, а тем более плохо представляем себе их роль в развитии того, что помещается нами на «основных» ее страницах. Книга М. Дайка представляет собой скорее исключение, чем правило. Но можно ли априори утверждать, что роль эта невелика, когда мы едва знаем в лицо тех, чью роль спешим умалить?

Историческое исследование неизбежно предполагает отбор материала. История культуры может быть уподоблена сложнейшей паутине, где каждое культурное событие есть «узелок», связанный необозримым числом тончайших «нитей» с другими «узелками». Поэтому, всякое изучение этой «паутины» состоит в выделении *основных* «узелков» и связей между ними, и игнорировании *второстепенных*. Однако вызывает серьезные сомнения возможность адекватной и однозначной оценки «на глаз» того, какие «узелки» и какие «нити» являются основными. В отношении «зрительного восприятия» такой «паутины», судя по всему, может и должен проявляться хорошо известный эффект переключения зрительного гештальта. При этом переключении выбор основных «узелков» и «нитей» может существенно изменяться. Какую конфигурацию «узлов» и «нитей» мы выделим из необозримого множества всех возможных, зависит от нашей установки. Что мы «увидим» («два профиля» или «вазу») зависит от нас. Наше математическое образование готовит нас к тому, чтобы всегда видеть «два профиля» и никогда «вазу», но это вовсе не означает, что первое представляет собой адекватное выделение основного, тогда как второе — нет. Пафос настоящего доклада как раз и состоит в том, чтобы напомнить о возможности смотреть как на саму математику, так и на ее историю, с точки зрения восприятия математики в ее эстетически-образном аспекте, с точки зрения связи математики преимущественно с философией, религией и искусством, т.е. видеть «вазу» там, где обычно видят лишь «два профиля».

Примерами традиционно «второстепенных» страниц истории математики, которые, с развиваемой нами точки зрения, оказываются в числе *основных*, могут служить творчество Эрхарда Вейгеля (Erhard Weigel, 1625—1699) [34, с. 135; 35], Юзефа Гоэнэ-Вронского (J. M. Hoëne-Wroński, 1776—1853) [36; 37] или Карла Эккартсхаузена (K. von Eckartshausen, 1752—1803).

Убежденность в единственности привычного и общепринятого взгляда на то, что такое «настоящая математика», не дает даже подойти к изучению философско-математических работ Новалиса, Вейгеля, Вронского и многих других. Эти работы написаны с точки зрения другого понимания математики и требуют для своего изучения умения посмотреть на них под тем углом зрения, под которым рассматривали их авторы, умение признать за этим углом зрения хотя бы минимальную, «стартовую», ценность. На мой взгляд, здесь открывается обширное поле для исследований. Мои собственные шаги в этом направлении и представлены в изложенных выше рассуждениях о математической мифологии и пангеометризме.

Список литературы

1. *Шпенглер О.* Закат Европы. М., 1993. Т. 1.

2. *Кричевец А. Н.* Четыре шага интуиции в математике // Школа диалога культур: Идеи. Опыт. Проблемы. Кемерово, 1993. С. 387—405.

3. *Арнхейм Р.* Визуальное мышление. Главы из книги // Зрительные образы: феноменология и эксперимент. Сборник переводов. Душанбе, 1973. Ч. 3. С. 6—79.

4. *Платон.* Собр. соч. в 4-х томах. М., 1994. Т. 3.

5. *Прокл.* Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Введение. М., 1994.

6. *Лосев А. Ф.* История античной эстетики. Ранняя классика. 2-е изд. М., 1994.

7. *Плотин.* О благе или едином (VI 9) // Логос. № 3. М., 1992. С. 213—227.

8. *Плотин.* Сочинения. СПб., 1995.

9. *Николай Кузанский.* Соч. в 2-х томах. М., 1979. Т. 1.

10. *Ямвлих.* Теологумены арифметики // Лосев А. Ф. История античной эстетики. Последние века. М., 1988. Кн. II. С. 395—419.

11. *Лейбниц Г. В.* Соч. в 4-х томах. М., 1982. Т. 1.

12. *Шапошников В. А.* Математические понятия и образы в философском мышлении (на примере философии П. А. Флоренского и философских идей представителей Московской математической школы) / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. философ. наук. М., 1996.

13. *Шапошников В. А.* Тема бесконечности в творчестве П. А. Флоренского // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997. С. 362—386.

14. *Соловьев Вл. С.* Идея человечества у Августа Конта // Соловьев Вл. С. Соч. в 2-х томах. 2-е изд. М., 1990. Т. 2. С. 562—581.

15. *Барабашев А. Г.* Бесконечность и неопределенность // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997. С. 273—282.

16. *Белый Андрей.* О смысле познания. Минск, 1991.

17. *Ахутин А. В.* Понятие «природа» в античности и в Новое время («фюсис» и «натура»). М., 1988.

18. *Флоренский П. А.* Столп и утверждение Истины. М., 1990.

19. *Флоренский П. А., Лузин Н. Н.* Переписка // Историко-математические исследования. М., 1989. Вып. 31. С. 125—191.

20. *Родин А. В.* «Начала» Евклида в свете философии Платона и Аристотеля (на материале I-IV книг) / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. философ. наук. М., 1995.

21. *Кант И.* Собр. соч. в 8-ми томах. М., 1994. Т. 3, 4 и 8.

22. *Декарт Р.* Соч. в 2-х томах. М., 1994. Т. 2.

23. *Пуанкаре А.* О науке. 2-е изд. М., 1990.

24. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Геометрия. М., 1987. Т. 2.

25. *Рейхенбах Г.* Философия пространства и времени. М., 1985.

26. *Фосс А.* О сущности математики. СПб.: Physice, 1911.

27. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л., 1948.

28. *Вейль Г.* Математическое мышление. М., 1989.

29. *Малкольм Н.* Людвиг Витгенштейн: Воспоминания // Людвиг Витгенштейн: человек и мыслитель. М., 1993. С. 31—96.

30. *Шопенгауэр А.* Соч. в 4-х томах. М., 1993. Т. 1—2.

31. *Новалис.* Гейнрих фон Офтердинген. Фрагменты. Ученики в Саисе. СПб., 1995.

32. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. М., 1979.

33. *Dyck M.* Novalis and mathematics. Chapel Hill: The Univ. of North Carolina Press, 1960.

34. *Жучков В. А.* Немецкая философия эпохи раннего просвещения (конец XVII — первая четверть XVIII в.). М., 1989.

35. *Спекторский Е. В.* Эргард Вейгель. Забытый рационалист XVII века. Варшава: Тип. Варшавского учеб. округа, 1909.

36. *Бобынин В. В.* Гоёне Вронский и его учение о философии математики. М.: Тов-во тип. А. И. Мамонтова, 1894.

37. *Dobrzycki J.* Hoëné-Wroński // Dictionary of Scientific Biography / Ed. Ch. C. Gillispie. Vol.XV. Supplement I. NY: Charles Scribner's Sons, 1978. P. 225—226.

КОММЕНТАРИИ

А. Г. Барабашев

Пафос статьи В. А. Шапошникова направлен на реабилитацию тех черт математики, которые выражают ее образное бытие. Известно, что образное бытие математики, связанное с геометрическим мышлением, начиная с конца XIX века оказалось подчиненным формульно-знаковому ее бытию, связанному с арифметико-алгебраическим мышлением. Стремление к анти-наглядности, к формализации доказательств и утверждений, к изгнанию смысла — вот противоположные образным, символьные черты математики, выражающие ее формульное бытие.

В. А. Шапошников называет ориентацию на образное понимание математики и на работу с образами *стилем* математического мышления. Не знаю, насколько удачен и полезен для замысла статьи такой ход мысли. Пожалуй, в отсутствии общепринятого (что показали наши две конференции по данной проблеме) определения стиля в математике, еще можно понимать геометрическое и алгебраическое мышление как стили. Но стоит ли идти гораздо дальше и называть стилем все то, что «выводит» на геометрическое мышление? Так, использование только синтетических доказательств геометрических теорем возможно, с некоторым разъяснением, назвать стилем. Но рассуждения Николая Кузанского об абсолютном максимуме как о бесконечном треугольнике — это уже не стиль, а нечто большее. Это иной подход к математике, а не иной «почерк» в исполнении собственно математического исследования. Навряд ли можно сказать: «мой стиль математической работы — говорить о Боге как о бесконечных геометрических фигурах». Поэто-

6 Зак. 3711

му, первые страницы статьи, на которых осуществляется обусловленное культурой выделение и дифференциация стилей («математика математиков», «математика физиков», «математика инженеров», «математика философов», «математика художников», «математика поэтов» и т.д.) выглядит искусственно соединенным с основным замыслом и пафосом статьи. Как аккуратно, но туманно пишет автор, установка каждой из них «накладывает *определенный отпечаток* (курсив мой. — *А. Б.*) на стиль математического мышления, характерный для данной "математики"».

Второе мое замечание относительно этой в целом прекрасной статьи касается использования понятия *квазигеометрического* [манипулирования графическими символами]. Мне представляется, что, поскольку речь идет о типе манипуляции, связанном с перестановкой символов по определенным правилам в плоскости текста, лучше не менять сложившегося словоупотребления и говорить о *квазиграфическом манипулировании*, или *квазиграфике*: имеются элементарные графические объекты, и заданы правила их (комбинирования). Здесь отсутствуют важнейшие признаки геометрии: непрерывная трансформация одного объекта в другой (отрезок, например, можно непрерывно продлевать, но попробуйте «непрерывно» продлить символ А), введение новых объектов как операция объединения или пересечения имеющихся объектов и т.п.

Наконец, вызывает сомнение классификация уровней «вырождения», характеризующих использование математики (в первую очередь, геометрических конструкций) в философии. На верхнем уровне В. А. Шапошников располагает математический миф — комплекс из двух тесно связанных конструкций, метафизической и математической, вторая из которых поясняет первую. Уже здесь возникает недоумение: отсылки к математике, например у Платона или у Николая Кузанского, не имеют вид целостных математических конструкций. Речь идет об отдельно рассматриваемых точках, диаметрах, окружностях, треугольниках и проч. Их объединение в одной конструкции, т.е. математической теории, не используется при построении математического мифа. Так, разве «дотягивает» до уровня математической теории простейшее рассуждение Кузанского о том, что при бесконечном увеличении размеров треугольник становится прямой, окружностью; рассуждение Платона, что центр окружности — это точка?

На среднем уровне «вырождения» [использования математики] автор помещает парадигмальные схемы. В данном случае, фрагменты математических конструкций вводятся в метафизические рассуждения. Такие фрагменты используются для пояснения отдельных моментов метафизических рассуждений, когда, как пишет автор, «основной рисунок рассуждения уже сложился». Но, если в математическом мифе не используются целостные математические конструкции, а всего лишь производятся отсылки к отдельным математическим объектам, связываемым друг с другом простейшим способом (точка — центр — окружность; треугольник — линия — окружность и т.п.), то между математическим мифом и парадигмальной схемой нет — пусть даже размытой — границы по степени систематичности использования математического материала.

Однако самым неубедительным выглядит утверждение, что крайней ступенью «вырождения» в использовании математики является применение схем и диаграмм при построении философских концепций (кстати, неясно, почему сюда отнесен пример применения диаграмм Эйлера-Венна в математической логике и топологии. По аналогии?). Наоборот, по моему мнению, это — наиболее сильный уровень соединения математики и метафизики, поскольку именно здесь метафизические рассуждения полностью обусловлены и опосредованы последовательно вводимым аппаратом диаграмм. Только в данном случае можно говорить о том, что метафизика органично соединяется с математическими конструкциями, т.е. с *очередностью* появления рамок, стрелок, с продвижением от простейших диаграмм к сложным. В этом продвижении нельзя произвольно пропускать отдельные элементы, нельзя выхватывать некоторые диаграммы без предварительного объяснения всего комплекса предшествующих диаграмм.

А. И. Белоусов

Работа В. А. Шапошникова заслуживает самого серьезного внимания и поддержки, так как она посвящена не слишком популярной (и не слишком легкой) теме *нематематических интерпретаций математики*. Тот, кто начинает заниматься подобного рода исследованиями, рискует навлечь на себя праведный гнев «чистых математиков», а также (может быть, даже и в большей степени) специалистов по так называемой «прикладной» математике. Этим людям, уверенным (не всегда безосновательно), что они являются носителями истины в последней инстанции, ибо вооружены безукоризненно строгими и подлинно научными математическими методами исследования, представляется, что всякие «поэтические» и философские спекуляции по поводу математики суть не более чем паразитирование на здоровом организме «царицы наук».

Когда речь заходит о связи математики и мифа, то многие полагают, что словосочетание «математический миф» имеет не больше прав на существование, чем «круглый квадрат». Между тем, математический миф совершенно реален. Помимо приводимых автором многочисленных примеров из философии, можно сослаться на искусство, на живопись в частности. Математически (точнее, геометрически) мифичны многие полотна Пикассо. Так, на его картине, названной «Менины (по Веласкесу)», вся изумительно живая пластика Веласкеса разрушается, тела «распредмечиваются», выпячивается отовсюду геометрический каркас, но эти элементарные геометрические фигуры — треугольники, квадраты, трапеции, многочисленные хаотически расположенные углы — фигурируют как фантастические живые существа. В этом переходе от абстрактных понятий к живым существам (и именам) и состоит, согласно Лосеву, сущность мифа. Миф — это *жизнь* понятий, *понятия как личности и имена.* Более свежий (и более доступный для обозрения) пример геометрического мифа — художественные работы нашего выдающегося математика А. Т. Фоменко, где оживают, казалось бы, очень абстрактные и совершенно не наглядные конструкции современной алгебраической топологии. Более того, как говорит сам Фоменко, подобный картинный, эйдетический подход к математике имеет огромную продуктивную силу, позволяя затем развернуть наглядный геометрический образ в доказательство «технически невероятно трудных результатов». Было бы очень заманчиво исследовать методами, имеющимися в распоряжении автора статьи, графику А. Т. Фоменко как яркий образчик математического мифа. Очень интересен фрагмент статьи, в котором речь идет о математических фрагментах Новалиса. Можно только пожелать автору успехов в продвижении по пути исследования этой темы.

Но, к сожалению, в работе В. А. Шапошникова есть и слабые места. Я хотел бы остановиться на двух, с моей точки зрения, самых серьезных просчетах автора.

1. Вызывает удивление, что в статье, посвященной синтезу мифа и математики, практически нет ссылок на работы крупнейших исследователей мифа, прежде всего, таких как Лосев и Хюбнер. Между тем, у того же Хюбнера обстоятельно изучается *хронотоп мифа*, что имеет непосредственное отношение к проблематике работы. Если бы автор внимательно проанализировал лосевский подход к мифу, для него не составило бы труда провести отчетливую разграничительную линию, во-первых, между мифом и диалектикой, и, во-вторых, между тем, что автор называет «полноценным математическим мифом» и его «вырожденными» вариантами, тем, что получает название «парадигмальных схем». Как раз отсутствие в этих последних символически выраженной личности, составляющей суть мифа (по Лосеву), и делает их вырожденными конструкциями. К сожалению, из текста статьи так и остается непонятным, что такое миф, что такое математический миф, следует ли отождествить диалектику, теологию и миф или их надо как-то разграничить. Отсутствует даже феноменологический анализ этих терминов (в контексте проблематики статьи, разумеется), не говоря уж о диалектическом. Возможно, автор полагает, что подлинное соотношение между указанными терминами должно быть хорошо известно читателю, но в этой области царит такая терминологическая путаница, что следовало бы хотя бы коротко осветить свою позицию по этому вопросу. Читатель, недостаточно искушенный в чтении богословской и мифологической литературы, боюсь, так не поймет, где же, собственно, содержится миф (и какой миф) в приводимых автором примерах из Платона, Плотина, Кузанца, Лейбница и др.

2. Невозможно принять авторское определение математики как «пространственно-временного конструирования». Во-первых, если математика и есть некое «конструирование», то, как заметил Вейль, она — *не только* конструирование. Во-вторых, что понимается под «пространством» и «временем»? У меня лично, при чтении статьи, сложилось впечатление (возможно, и превратное), что эти категории вполне «наивно» понимаются в духе эпохи не позже кантовской, в духе вполне доэйнштейновской физики. Это приводит к довольно забавным утверждениям:

«*Время как таковое* не подлежит не только геометрическому, но и математическому изучению вообще, да и *движение как таковое* также. Лишь подменив время движением, а движение его пространственным следом (траекторией) мы можем сделать их предметом математического изучения. По существу мы будем изучать при этом не время и не движение, а особенности пространственной организации самой траектории». Что ж тогда такое четырехмерная мировая линия? Пространственным (??) следом чего она является? Неверно, что время как таковое не подлежит математическому изучению. Современная теоретическая физика, использующая при анализе «пространства-времени» головоломный математический аппарат, опровергает этот поспешно высказанный тезис. Можно, конечно, вспомнить тут Шпенглера, писавшего, что время, ставшее предметом науки, превращается в пространство, а Время как таковое (*Время-Судьба*) находится вообще вне компетенции науки, но Шпенглер использует весьма сложные переинтерпретации понятий пространства и времени, что надо отдельно и тщательно анализирсвать.

Но, даже принимая наивную трактовку пространства и времени в духе ньютоновской физики, мы должны констатировать, что «пространственно-временное конструирование» никак не характеризует *специфику математического* мышления. То, что автор называет «пространственно-временным конструированием», возникает всякий раз при попытке наглядно выразить некий смысл. Особенно неудачна, на мой взгляд, идея «квазигеометризма». Под это понятие, как оно фигурирует в тексте статьи, можно подвести построение любой знаковой системы. Автор пишет: «вся арифметика натуральных чисел предстает как система организуемых на плоскости графических символов». Но таким же образом предстают и симфоническая партитура, и машиностроительный чертеж. В работе точно схвачена важность наглядных представлений в математике, эйдетическая сущность этой науки (о чем, впрочем, хорошо писал Вейль), но тогда и нужно исследовать *специфику* именно *математической наглядности*. И начинать тут нужно с попытки уяснить сущность *математического* конструирования, для чего следует развернуть анализ категорий *числа, количества, величины*, а уже потом добраться до категорий *пространства, времени, движения, формы, структуры*, и путь этот весьма тернист. К тому же убедительность математического доказательства (если даже не критиковать ее, эту непреложную убедительность, которую признают далеко не все!) коренится вовсе не в его наглядности (хотя, конечно, математик должен стремиться к простым и «прозрачным» доказательствам), а в чем-то совсем ином. Я думаю, что автор тут совершает «позитивистскую» ошибку, отождествляя знаковое выражение смысла с самим смыслом. Кроме того, автор упускает из виду отмечаемый тем же Вейлем феномен *ложной наглядности*, которая не только не помогает, но сильно мешает уяснить суть математической истины: вполне строго доказываемые факты равномощности множества точек квадрата и множества точек любой из его сторон или — в еще большей степени — нульмерности иррациональной прямой противоречат стереотипной геометрической наглядности.

Несколько мелких замечаний: встречаются малопривлекательные стилистические конструкции: «универсальная общечеловеческая культура», «математика математических логиков и специалистов по основаниям». Что такое «алгебраическая графика»? Термин «hyle noete» все-таки предпочтительнее переводить как «умная материя» (или «интеллигибельная материя»), т.е. материя в сфере чисто смысловой, идеальной. Именно этот термин фигурирует в работах Лосева, а «мыслимой» может быть и самая «настоящая», «грубая» материя. «Теорема» все-таки не просто зрелище, ибо родственный термин «theoria» означает «*умо*зрение». Опять-таки, если это и «зрелище», то смысловое, «умное». Лосев говорит в таком случае о «смысловом лике вещи».

Дабы завершить этот комментарий все-таки мажорной репризой, я должен еще раз подчеркнуть, что работа Владислава Алексеевича заслуживает высокой оценки, так как в ней поставлена очень интересная и важная задача, намечены рамки, двигаясь в которых, следует решать эту задачу, обращено внимание читателя на множество фактов из истории философии и искусства (в том числе, фактов и малоизвестных или забытых). И — last but not least — статья написана хорошим русским языком, *имеет стиль*, что по нынешним временам весьма большое достоинство.

А. А. Григорян

Из множества тем, которые обсуждает в своей статье В. А. Шапошников, хотелось бы остановиться лишь на одной — пангеометризме. Весьма примечательно, что, одним из первых адептов пангеометризма в современной философии математики был Готлиб Фреге. Не найдя приемлемого разрешения проблем, связанных с указанными Расселом антиномиями, Фреге не только отказывается от тезиса о сводимости математике к логике, но и настаивает на том, что «математика проистекает из собственного, внелогического источника — геометрической наглядности, хотя логический источник всегда действует вместе с ней» (см.: *Бирюков В. В., Бирюкова Л. Т., Нуцубидзе Н. Н.* Математика и логика: проблема соотношения двух наук в истории логико-математической мысли // Закономерности развития современной математики.

М., 1987. С. 184). При этом Фреге не принял не только усовершенствованный логицизм Б. Рассела с его теорией типов, но и формализма Д. Гильберта, который, хотя и в меньшей, чем Рассел степени, пытается представить математику как чисто формальную систему, игнорируя ее принципиально содержательный, а именно, как утверждал Фреге, пространственно-геометрический характер. И хотя, пользуясь (достаточно вольно) удачным образом Г. Вейля, «дъявол абстрактной алгебры» время от времени искушает математиков, «ангел геометрии и топологии» как правило побеждает в этом противостоянии за душу математики, ибо невозможно отрицать ту выдающуюся роль которую играет геометрическая (в широком смысле) интуиция как в процессе открытия математических результатов, так и в нахождении идей, обеспечивающих их доказательство.

Формы проявления геометрической интуиции достаточно многообразны. Это многообразие можно зафиксировать на примере творчества «короля математиков» К. Ф. Гаусса. Геометрия была для Гаусса не просто одним из средств математического мышления, но и, как отмечал В. Бюлер, «образом мысли». Геометрическая интуиция двигала Гауссом и в теории модулярных функций, для которых он специально строит геометрическое представление, и в теории биквадратичных и кубичных вычетов. Он одним из первых пользуется геометрическим представлением комплексных чисел. Любопытно, что именно отсутствие удачного геометрического представления не позволило Гауссу реализовать свою программу построения теории эллиптических функций. Речь идет прежде всего о проблемах, связанных с их многозначностью, трудности на пути решения которых были в значительной мере преодолены после введения Б. Риманом многолистных поверхностей, впоследствии названных римановыми — удачного геометрического образа; в создании подобных Риман в свое время не имел себе равных.

М. Ю. Симаков

Некоторые положения работы представляются спорными.

1. «Математический миф». Математические объекты всегда трактовались неоплатониками как прообразы физических вещей, именно, как прообразы при отображении математического (срединного) мира в физический; явно или неявно это отображение характеризовалось как творение демиургом Космоса. Именно так трактовались, например Проклом, математические образы «Тимея». Также и применение математики для описания теологии (Идей-Форм) стандартно толковалось неоплатониками как рассмотрение «смутных образов» (Ямвлих) божественного, дающее некоторое их познание и таким образом приближение к божественному. Характеристика подобных представлений как «математических мифов» снижает точность представления (нео)платонизма.

2. «Пангеометризм». Примеры использования геометрических структур в математике, в том числе, в тех ее частях, которые кажутся «чисто арифметическими», разумеется, многочисленны. Их можно было бы умножить замечанием, что по сути геометрическими являются все утверждения, где встречается слово «*форм*альный». Тезис «пангеометризма», предложенный в работе, представляется некоторым вариантом утверждений платоников о доминировании над математическим миром Идей-Форм. Однако можно спросить: является ли «геометрической» Декада Филолая или Ямвлиха (или, тем более, каббалистов)? Весьма сомнительно, тем более что она поставлена над (супергеометрическими) Идеями-Формами. В математике хорошо известно различие между «геометрами» и «арифметиками». В философии его аналогией является оппозиция между «платониками» (для которых «Бог геометризирует») и «пифагорейцами», у которых математика начинается с арифметики. (Примером такой оппозиции является пара Прокл-Ямвлих.) Поэтому, конечно, каждому тезису о «пангеометричности» можно противопоставить тезис о «панарифметизме».

Наиболее интересной в статье представляется хорошо прослеживаемая (связанная, конечно, и с работой автора над творчеством П. Флоренского) тема изучения разных примеров применения математики (как чисел, так и фигур) для описания божественного. Пока нет достаточно полных исследований или хотя бы сводок по этому интересному вопросу. Между тем, использование математических образов в теологии встречалось часто и коррелировало с любопытными феноменами. Можно начать с шумеров, где боги связывались с числами. В пифагорейской школе имелись многочисленные сопоставления богов с числами и фигурами, более того, математически моделировался и процесс создания Космоса демиургом: во-первых, как преобразование квадратов двух катетов в квадрат гипотенузы и, во-вторых, как построение фигуры, подобной данной (подобной Идее) и равной другой (равной Материи). Видный арианский теолог Аэций «с утра до вечера сидел над занятиями, стараясь составить представление о Боге с помощью чисел и фигур». В результате своих занятий он утверждал, что «знает Бога так же хорошо, как самого себя». Среди ренессансных неоплатоников были популярны разные троичные (в том числе геометрические) модели божественного (например, отношений в Троице). Следует назвать также модели иерархии Псевдо-Дионисия, приведенные Эриугеной, теорию Иоахима Флорского, упомянутые автором работы Кеплера, Кузанского, Лейбница, Флоренского и т.д. Можно посмотреть, какими были взаимоотношения энтузиастов построения «математических моделей божественного» с христианством. Результаты здесь следующие: Эриугена неоднократно осуждался как еретик; ересиархом был признан (кардинал) Н. Кузанский; много ересей (хилиастического типа) породили теории И. Флорского и т.д. Одной из причин этого является то, что «математические модели божественного» коррелировали с неоплатонизмом, который, по мнению, например, Ш. Нуцубидзе («Руставели и Восточный Ренессанс»), был «источником всех ересей». Было бы интересно построить более полную теорию взаимодействия «математических моделей божественного» и христианской теологии, в частности, проследить, как влияло использование математических образов в теологии П. Флоренским на формирование тех его концепций, которые считаются неортодоксальными.

Автор статьи также справедливо обратил внимание на существование представления о математике как о магии, которое, впрочем, было общим местом оккультизма, начиная с периода Ренессанса (Агриппа, Тритемий, Парацельс, Фладд…), и имело причиной изоморфизм оккультной и неоплатонической моделей Космоса; математика и магия в обеих моделях занимали срединное место.

ОТВЕТ АВТОРА

Значительная часть возражений и замечаний в комментариях на мою статью сосредоточилась вокруг вынесенных в ее заглавие терминов. Обсуждением их смысла я и ограничусь.

1. «Математическая мифология». В употреблении таких терминов, как «миф» и «диалектика», я опирался на Платона. Смысл, который я вкладываю в слово «диалектика», соответствует, на мой взгляд, употреблению его в диалоге «Государство». Что же касается новообразования «математический миф», то здесь требуется развернутый комментарий.

Согласно Мирче Элиаде, «миф повествует о какой-либо священной истории, т.е. о каком-то первичном событии, произошедшем в начале Времени». «Миф провозглашает возникновение какой-то новой космической “ситуации”, либо какого-то первичного события. Таким образом, это всегда рассказ о каком-то “сотворении”: о том, каким образом какая-либо вещь состоялась, т.е. начала *существовать*. Вот почему миф сродни онтологии: он повествует лишь о *реальном*, о том, что *реально* произошло, что в полной мере проявилось» (*Элиаде М.* Священное и мирское. М., 1994. С. 63—64). При этом главная функция мифа, по Элиаде, – «онтологическое обоснование», создание «образцовой модели». Элиаде противопоставляет сферу *священного (сакрального)* и сферу *мирского*. Сакральная деятельность – это деятельность в соответствии с «мифической моделью». Более того в сакральной деятельности есть момент *отождествления* себя с творцами мироздания.

Диалог «Тимей» повествует о создании чувственно воспринимаемого космоса. Это повествование вполне подходит под характеристику мифа у Элиаде, да и сам Платон устами Тимея называет свой рассказ «правдоподобным мифом». Таким образом, например, собирание правильных многогранников из «полутреугольников» и «полуквадратов» есть *миф*. Это словоупотребление самого Платона! Здесь мы имеем пример деятельности по порождению некоторой *математической* конструкции и выявлению ее закономерного характера, которая может претендовать на статус *сакральной* деятельности. Согласно одной из точек зрения на возникновение теоретической математики, именно понимание математического конструирования как сакральной деятельности в среде пифагорейцев, т.е. деятельности, в которой человек хотя бы отчасти отождествляет себя с творцом мироздания и приобщается к гармонии космоса, в ходе организации школьного процесса и последующей секуляризации (обмирщения) математики, привело к появлению математического доказательства (см. статьи о пифагореизме: *Шичалин Ю. А.* Статус науки в орфико-пифагорейских кругах // Философско-религиозные истоки науки. М., 1997; *Янков В. А.* Становление доказательства в ранней греческой математике // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 1997. Вып. 2 (37); *Моров В. Г.* Математика в пифагорейском космосе // Гуманитарные науки и новые информационные технологии. М., 1994. Вып. 2.). Такой способ бытийствования математики может, во вполне общепринятом смысле, быть охарактеризован как миф, а следовательно, выражение «математическая мифология» вполне оправданно.

Впрочем, даже у Платона миф уже не просто сама реальность, т.е. нечто, чем живут, не задавая лишних вопросов. Здесь уже имеется рефлексия над мифом: возникает вопрос об истинности – правдоподобности – ложности мифа вообще и математического мифа в частности. Проявляется особая «познавательная семантика» мифа (см.: *Лосев А. Ф.* История античной эстетики. Ранняя классика. М., 1994. Т. II. С. 353). Элиаде справедливо указывает, что «миф сродни онтологии». У Платона мифология осознается в этой своей «онтологической» функции. Можно сказать, что миф есть уникальное средство выражать в слове и делать наглядными фундаментальные онтологические (= метафизические) отношения. «Миф о пещере» — классический пример тому. Кроме того, платоники ставят и известным образом разрешают вопрос о законности такого отношения к мифу.

О «вырождении» же математического мифа в статье говорится не в смысле уменьшения связности математического материала, его богатства или сложности его отношений с нематематическим контекстом, но исключительно в плане забвения математикой своих сакральных корней при сохранении использования математических понятий и образов в качестве «иллюстраций», когда законность такого использования не предполагает даже специального обсуждения, а тем более обоснования. В этом плане примеры из текстов Лейбница или из классической логики (диаграммы Эйлера-Венна) в равной мере могут быть охарактеризованы как вырождение математического мифа и его рудименты. Следует, пожалуй, согласиться, что в список вырожденных вариантов математического мифа не стоит включать язык картинок

А. Г. Барабашева. Его статус более сложен и требует специального обсуждения.

Есть и еще один важный контекст, в силу которого я настаиваю на термине «математическая *мифология*». Это противопоставление «миф – позитивная наука». В этой связи вполне можно было бы вспомнить и работы Курта Хюбнера (см.: *Хюбнер К.* Критика научного разума. М., 1994. С. 320—322; *Хюбнер К.* Истина мифа. М., 1996. С. 386—387). Впрочем, как и в случае с А. Ф. Лосевым, в мои намерения не входил анализ концепции мифа этого автора. И сейчас я хочу сказать *о другом*. Интересующий меня поворот темы восходит отнюдь не к Хюбнеру, а, по крайней мере, к «закону трех стадий» Огюста Конта и пересмотру отношения между мифом, метафизикой и наукой в антипозитивистском направлении философии науки (Кун, Фейерабенд и другие). Здесь для меня важно, что математический миф, помимо прочего, есть и особый способ существования математики, *альтернативный* позитивно-научному ее бытию. И возможный пафос равноправности, а может быть и преимущества *математики как мифа* над *математикой как наукой* должен просматриваться за текстом статьи. Впрочем, не стоит истолковывать это как призыв отказаться от второй во имя первой.

2. Пангеометризм. К сожалению, текст статьи «Математическая мифология и пангеометризм» был для настоящего сборника значительно сокращен за счет обширных примечаний, касавшихся, в первую очередь, разъяснений, связанных со «временем» и «движением» в математике, в том числе и в отношении позиции Шпенглера. Ознакомление с ними, я уверен, сняло бы часть вопросов, но воспроизвести их здесь, к сожалению, не представляется возможным. Замечу все же, что считаю оправданным и целесообразным понимать пространство и время «вполне наивно», в смысле близком к кантовскому, поскольку наивность эта мнимая. Всевозможные теории неевклидовых геометрий и прочие современные конструкции опираются, в конечном счете, *на те же типы наглядности*, что и элементарная арифметика и евклидова геометрия, а именно — на остенсивное и символическое конструирование. Явный ответ на вопрос, в каком смысле пространственно-временное конструирование является специфичным *именно для математики*, также содержался в одном из опущенных примечаний. Будут ли являться симфоническая партитура или машиностроительный чертеж предметом математики или нет, определяется не ими самими, а тем смысловым контекстом, в котором они существуют и который в итоге создается лишь *словом*. Если нас интересуют *сами пространственно-временные отношения*, в соответствии с которыми организован чертеж или партитура, то перед нами предмет математики и наше отношение к ним будет математическим. Если же партитура для нас — это способ записать музыку, а чертеж – способ изобразить будущую машину, то предметом математики они уже не будут являться. Наконец

отмечу, что я не считал возможным противопоставлять платоников и пифагорейцев на основании преимущественного тяготения к геометрии и арифметике соответственно, поскольку полагаю такое противопоставление, во-первых, исторически некорректным, а во-вторых, методологически неоправданным с точки зрения целей и задач обсуждаемой статьи. Ведь одна из основных ее идей – это возможность посмотреть на арифметику как на «квазигеометрию».

ЭСТЕТИКА И ТОПОЛОГИЯ

Белоусов А. И.

1. Непосредственным стимулом для написания этой работы было прочтение трактата А. Ф. Лосева «Музыка как предмет логики» [1]. Переопубликование этого трактата в 90-х гг. вызвало множество философских и музыковедческих комментариев [2, 3]. Но автору неизвестен сколько-нибудь развернутый *математический комментарий* к лосевской концепции музыки, что странно, ибо мысль о тождестве музыки и математики буквально пронизывает все исследование Лосева. Предлагаемую читателю статью следовало бы, наверное, снабдить подзаголовком «Вариации на тему “музыка и математика”». Название «Эстетика и топология» продиктовано как раз одной из важнейших диалектических конструкций Лосева — конструкцией множества, в рамках которой *эстетика и топология* выступают как науки, изучающие частные аспекты одного и того же: эти две, казалось бы, никак не связанные между собой дисциплины *обретают единую теоретико-множественную основу.*

2. Несмотря на то, что статья представляет собой попытку некоторого математического комментария к упомянутому труду Лосева, задачи, которые ставит при этом перед собой автор, являются скорее эстетическими, чем собственно математическими. Человека, воспринимающего произведение искусства, всегда волнует загадка стиля автора: тайна художественного стиля есть в какой-то мере тайна личности творца, и с ней связана и судьба творений, их оценка той или иной эпохой. Почему, например, в свое время возникла мощная бетховеноцентристская волна [4] и мы до сих пор ее слышим, хотя она уже отхлынула? Почему Моцарт, как правило, менее понятен «широкой публике» и менее ею любим, чем Бетховен, Бах, романтики?

С загадкой стиля связаны и известные в истории искусства метафоры-афоризмы, принадлежащие великим художникам или исполнителям, в которых краткой «формулой» определяется тот или иной стиль. Так, Гете, прослушав «Хорошо темперированный клавир» Баха, писал Цельтеру: «У меня было такое ощущение, будто сама вечная Гармония беседует сама с собой, как это было, вероятно, в груди Господа до сотворения мира». Удивительно, что это определение баховской музыки почти дословно совпадает с определением логики (лучше сказать — Логоса), которое дает Гегель в предисловии к своей «Науке логики»: «Она [логика] есть изображение Бога, каков он в своей вечной сущности до сотворения природы и какого бы то ни было конечного духа». Не видим ли мы здесь поразительную корреляцию художественной и научной мысли? Наверное, не случайно гетевская метафора серьезнейшим образом анализируется в отнюдь не «метафорическом» фундаментальном исследовании Бобровского [5] в связи с проблемой музыкального времени и сравнением организации этого времени у Баха, Моцарта и Бетховена

Великий пианист А. Шнабель говорил: «Моцарт — сад, Шуберт — лес на солнце и в тени, Бетховен — горный кряж». Но и О. Мандельштам, скорее всего не сговорившись со Шнабелем, писал о «висячих парках с куртинами у Моцарта». Возникает вопрос: что это — только красивые метафоры, более или менее произвольные, к которым мы прислушиваемся лишь потому, что они принадлежат гениальным художникам, или нечто большее? Может быть, это *формулы,* а не метафоры? ***Почему Моцарт — сад?*** Нельзя ли взглянуть на эти художественные определения глазами математика, объяснить их математически? Такая постановка вопроса, на первый взгляд странная, оправдывается, во-первых, существованием несомненной исторической корреляции эстетических и научных идей, во-вторых, логической связью эстетики и математики в рамках объемлющей теоретической конструкции. Откладывая пока обсуждение последней (а ею является уже упоминавшаяся ранее лосевская конструкция множества), рассмотрим более подробно проблему сравнения музыки и математики.

3. Одна из важнейших идей лосевского трактата «Музыка как предмет логики» есть идея о тождестве музыки и математики: музыка не предмет психологии, не «стенограмма чувств», а абстрактная идеальная конструкция — как математика.

Интересно, что великий философ оказался здесь солидарен с великим композитором, а именно с И. Ф. Стравинским, — его философия музыки буквально совпадает с лосевской, хотя вряд ли он был знаком с работами философа. Характеризуя музыкальную форму, Стравинский говорил, что эта форма «гораздо ближе к математике, чем к литературе — возможно не к самой математике, но к чему-то безусловно похожему на математическое мышление и математические соотношения... Музыкальная форма математична хотя бы потому, что она идеальна...» [6, с. 55—56]. Наверное, все-таки нужно уточнить: не только «идеальна» (ибо идеальна любая художественная форма), но *отвлеченна, абстрактна.* Эта абстрактность музыки, как ни парадоксально, лучше всего обнаруживается в художественных текстах не собственно музыкальных, а скажем, в литературных, в произведениях живописи, киноискусства, которые можно назвать «музыкальными» (вспомним, что Т. Манн говорил о «музыкоподобии» своих романов). Художественный текст тем более музыкален, чем менее он «сюжетен», чем в меньшей степени он апеллирует к конкретному, чем больше он «замкнут на себя», являясь как бы самодовлеющей «ссылочной структурой». Например, фильмы Тарковского или Годара в высшей степени музыкальны, тогда как фильм «Петровка, 38» совершенно не музыкален.

Но музыка, будучи тождественна математике, одновременно и противоположна ей (оговорка Стравинского «возможно, не к самой математике, но чему-то безусловно похожему на нее...» очень показательна). Лосев утверждает, что и музыка, и математика *конструируют число*, но математика делает это *логически*, а музыка — *гилетически* (от греческого hyle — «материя») и художественно-выразительно, символически.

Что такое гилетическое конструирование? Ответ на этот вопрос мы найдем в платоновском «Тимее». Рассуждая о возникновении оформленных тел из недр «бесформенной», «незримой» Материи (которая имеет еще имена Кормилицы, Матери, Лона, а также имя Ничто — «to me on» — Меона), Платон излагает следующую мысль:

«Положим, некто, отлив из золота всевозможные фигуры, без конца бросает их в переливку, превращая каждую во все остальные; если указать на одну из них и спросить, что же это такое, то будет куда осмотрительнее и ближе к истине, если он ответит «золото» и не станет говорить о рождающихся фигурах как о чем-то сущем, — ибо в то мгновение, когда он их именует, они уже готовы перейти во что-то иное...» («Тимей», 50ab; см. также комментарий Лосева к диалогу в [7]).

В этом фрагменте «Тимея» нет ни слова о музыке, но он с поразительной точностью характеризует сущность музыкального конструирования. Музыкальные темы подобны платоновским отливкам из золота: мы часто не в состоянии ответить на вопрос «Что это означает?», когда слушаем музыку. Словесные разъяснения музыки с большей охотой отвечают на вопрос «какой?», чем «что?». Стравинский не упускал случая поиздеваться над словесными интерпретациями музыки и говорил: «Музыка сверхлична и сверхреальна и, как таковая, находится за пределами словесных разъяснений и описаний... Музыка выражает самое себя... есть вещь в себе» [6, с. 48].

Пытаясь охарактеризовать музыкальные образы, мы, согласно Платону и Стравинскому, будем осмотрительнее и ближе к истине, если на вопрос «что?» ответим «музыка».

У Лосева читаем: «Когда мы воспринимаем музыку, то ясно, что, как музыка ни далека от логики, она требует всего того феноменологического аппарата восприятия, какой нужен и для восприятия раздельных вещей в целях логического мышления над ними. И прежде всего тут необходимо особое sui generis *восприятие формы*... Ясно,... что перед нами... типичный *эйдос*... Но *какой* это эйдос? *Чего*, собственно, эйдос?.. Всякое музыкальное произведение таит в себе некий скрытый эйдос [смысл. — *А. Б.*]... эйдос этот, однако, не дан, и в этом — вся музыка» [1, с. 488, 494].

«Алогизм» музыки и ее «непостижимость» давали повод некоторым поверхностным комментаторам говорить, что музыка — «несемантическое» искусство. Это, разумеется, нонсенс, противоречие в терминах. Лучше было бы сказать, что музыка — *сверхсемантическое* искусство. Отвечая на бесчисленные вопросы «как?», «какой?», мы блуждаем вокруг неведомого «что?», которое иногда приоткрывается. Так, в книге В. Дж. Конен «Театр и симфония» [8] выявлена глубокая связь между чистой, непрограммной музыкой венских классиков (симфония, концерт, камерный ансамбль) и итальянской оперой XVII столетия. Благодаря этому мы получаем опору для содержательной интерпретации совершенно, казалось бы, «абстрактных» музыкальных произведений.

Резюмируя, можно сказать, что и в музыке, и в математике мы имеем дело с самодовлеющими, «замкнутыми в себе» *ссылочными структурами*, но в математике каждый элемент этой структуры имеет *четкий смысл* (хотя бы и чисто формальный, «интенсиональный»: осмысленный — значит доказанный в рамках принятой дедуктивной системы), а в музыке этот *смысл принципиально нечеток*, лишь гипотетически реконструируем. Всякая интерпретация музыкального текста (и любого художественного текста, приближающегося по своей «алогичности» и «несемантичности» к музыке) принципиально является *прерванной*. Заметим, что термин «ссылочная структура» в рассматриваемом контексте можно вполне строго определить как некоторое множество вместе с заданным на нем отношением предпорядка, т.е. рефлексивным и транзитивным, но, вообще говоря, не антисимметричным (для всякого А А «ссылается» на себя само; если А «ссылается» на Б, а Б «ссылается» на В, то А «ссылается» на В, но из того, что А «ссылается» на Б, а Б «ссылается» на А, не следует в общем случае, что А и Б совпадают).

Охарактеризованная таким образом противоположность музыки и математики выражается и в результатах труда математика и композитора. Математик, вполне гилетически, «алогично» изобретающий новые теоремы, придает математическому тексту предельную логическую ясность, а композитор создает как бы *вторичную гилетическую конструкцию, служащую шифром, кодом, символом некоторого скрытого смысла*. И именно эта символичность музыки является, по Лосеву, решающим фактором, отделяющим музыку от математики.

Характеристика диалектического тождества («тождества-противоположности») музыки и математики будет неполной, если не подчеркнуть взаимной устремленности этих двух сфер друг к другу. В недрах математики дремлет «гилетическая стихия», размывающая самые основы ее логически безупречных построений и, с другой стороны, позволяющая математику придумывать правильные теоремы, которые он не в состоянии немедленно доказать. А музыка, как заметил еще Т. Манн в «Докторе Фаустусе», из сферы своей «алогичности», из «прикованности к миру чувств» рвется к кристальным построениям математики. В современной музыке мы имеем яркий пример такой «математической» музыки, математичность которой, что очень важно, открыто декларирована автором, — творчество С. Губайдулиной (следует прочитать хотя бы авторское пояснение к скрипичному концерту, названному «Offertorium»)[1].

4. Таким образом, налицо противоположность музыкального и математического конструирования. Но по всем правилам *диалектики* (не забудем, что Лосев, труд которого мы комментируем, был диалектиком) эти противоположности должны проникать друг в друга: гилетическая конструкция должна проникнуть в математику, которая как таковая есть парадигма логического конструирования, а логическая конструкция должна содержаться в сфере музыки, являющейся парадигмой гилетического конструирования.

Что же является гилетической конструкцией в математике?

Здесь, прежде всего, необходимо сказать о *гилетическом конструировании числа в процессе измерения*, хотя эта конструкция и не лежит в области самой теоретической математики. Если представить, что некто разбросал перед нами всевозможные геометрические тела и нам надлежит измерять их размеры, то получится картина, подобная вышеприведенной платоновской: из нерасчлененной бездны (континуума) «изнедряются» конечные (до конца понятные, анализируемые) структуры — рациональные числа, но числовая «алогическая» бездна никогда не освобождает полностью числовую форму: мы имеем дело всякий раз с некоторой рациональной *аппроксимацией* истинного размера аналогично тому, как мы имели дело с «аппроксимацией» смысла музыкального образа, выбрасываемого, но тут же и поглощаемого бездной музыкального «континуума» (разумеется, характер аппроксимации при интерпретации музыкального текста и при измерениях совершенно различный!).

Если же теперь мы обратимся к теоретическому конструированию числа (ограничимся здесь вещественными числами, определяемыми в рамках классической математики), то увидим два, как бы зеркальных, способа такого конструирования. Первый способ состоит в следующем. Сначала определяются натуральные числа как множества $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, ... и определяются арифметические операции над ними. Затем *полукольцо* натуральных чисел вкладывается в *кольцо* целых, а это последнее — в *поле* рациональных. Далее строится уже *топология* рациональной прямой, и, наконец, вещественная прямая определяется как *пополнение* рациональной [9]. Тем самым *вещественное число априорно конструируется как предел последовательности рациональных чисел.*

Эта конструкция числа абстрагирует *способность счета* и делает попытку экстраполировать эту способность на несчетную бесконечность.

Конечное «внедряется» в бесконечное, от последовательности мы переходим к пределу. Это «logos» числа в классической математике.

Второй способ конструирования состоит в том, что вещественная прямая сразу *аксиоматически* определяется как непрерывное упорядоченное поле [10]. Рациональная прямая тогда «извлекается» («изнедряется»!) из вещественной, и уже доказывается *теорема* о представлении каждого вещественного числа как предела некоторой последовательности рациональных чисел.

Эта конструкция числа абстрагирует *способность измерения*.

Конечное «изнедряется» из бесконечного, от предела мы переходим к последовательности. Это «hyle» числа в классической математике.

Рассматривая эту последнюю конструкцию, нужно обратить внимание на следующие обстоятельства.

Во-первых, несмотря на то, что вещественная прямая сразу определяется априори посредством некоторого набора алгебраических (поле) и топологических (непрерывность и упорядоченность) свойств, перед нами типичная неопределенная числовая бездна: наша аксиоматика не позволяет дать ответ на вопрос «*что такое вещественное число?*», а позволяет только сказать, *какими свойствами*, по определению, *обладают вещественные числа*.

Во-вторых, на пути этого конструирования удерживается вся алгебраическая конструкция рационального числа, знакомая нам по первому способу. Другими словами, «logos» фигурирует здесь как момент в «hyle». Это очень важно понимать: Некто, таинственный платоновский персонаж, отливающий фигуры из золота, чтобы смастерить фигуру, должен иметь в себе некий ее «чертеж», идеальный прообраз («эйдос»), но он должен и расчленить, проанализировать «до конца» этот эйдос, чтобы воплотить его в материи. Он должен владеть логосом того тела, который он строит: только тогда он «вытащит» его из «бесформенной» материи. Только до конца построив алгебру рациональных чисел, мы докажем теорему о представлении вещественного числа как предела некоторой последовательности рациональных чисел, «вытащив» тем самым рациональные числа из первоначальной «числовой материи». Кстати, и в первую априорную конструкцию числа Ничто проникает в виде пустого множества. Здесь «меон» — исходная предпосылка.

5. Но, может быть, с наибольшей отчетливостью противоположность логического и гилетического в математике обнаруживается в топологии на примере пространств, именуемых *дисконтинуумами*.

Дисконтинуум A^ω есть пространство всех бесконечных последовательностей элементов из конечного множества («алфавита») A с топологией, вводимой через метрику

$$\rho(u, v) = 2^{-n},$$

где $n = \inf_{i\geq 0} \{i \mid u(\mathrm{i}) \neq v(\mathrm{i})\}$ и $u = u(0)u(1)...u(\mathrm{n})...$, $v = v(0)v(1)...v(\mathrm{n})...$, причем, как доказывается, та же топология получится, если взять ω-овую декартову степень дискретного пространства A. В частности, при $A = 2 = \{0, 1\}$ получим так называемый канторов дисконтинуум.

Пространство A^ω: 1) нульмерно, 2) вполне несвязно и 3) совершенно, т.е. 1) каждая точка имеет сколь угодно малую окрестность с пустой границей, 2) базис топологии образуют открыто-замкнутые множества («цилиндры»), состоящие из всех последовательностей с одним и тем же началом $[u]_n = u(0)...u(\mathrm{n}\text{-}1)$, $n > 0$ (см. рис. 1), 3) нет изолированных точек.

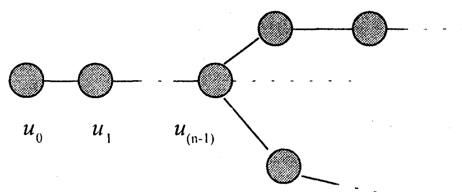


Рис. 1

Кроме того, любой дисконтинуум является компактом.

Дисконтинуум A^ω может рассматриваться как подпространство пространства $A^\infty = A^* \cup A^\omega$ всех последовательностей из некоторого (вообще говоря, не обязательно конечного) множества A, где A^* есть множество всех конечных последовательностей элементов A, включая пустую последовательность. Метрика в A^∞ вводится аналогично:

$$\rho(u, v) = 2^{-n},$$

где $n = \inf_{i\geq 0} \{i \mid u(i) \neq v(i)$ или в точности один член $u(i)$ или $v(i)$ не определен$\}$, причем $\rho(\lambda, \lambda) = 0$.

В частности, при $A = N$ (множеству натуральных чисел) в качестве подпространства N^ω (не являющегося дисконтинуумом ввиду нарушения свойства компактности) получим так называемое *бэровское пространство*.

Пространство A^∞ остается нульмерным и вполне несвязным, но перестает быть совершенным, так как каждая конечная последовательность является в нем изолированной точкой. Но в то же время конечные последовательности образуют в A^∞ счетное всюду плотное множество и являются в этом смысле аналогами рациональных чисел на вещественной прямой, но последние, разумеется, не суть изолированные точки в топологии числовой прямой.

Описанное здесь пространство A^∞ оказывается в настоящее время одной из фундаментальнейших структур в теории алгоритмов и семантике формальных языков [11, 12]. В терминах этого пространства строится *теория нульмерных динамических систем* [11], в рамках которой изучается понятие *алгоритма* (*автомата Тьюринга*), и классификация автоматов сводится к классификации нульмерных динамических систем. Последние особенно важны, ибо доказывается [11], что любая динамическая система есть непрерывный образ некоторой нульмерной динамической системы (при условии, что рассматриваются только компактные пространства). Кроме того, известно, что канторов дисконтинуум 2^ω есть одна из важнейших структур метаматематики (см., в частности, теорему о представлении классических булевых алгебр [13]), а бэровское пространство играет фундаментальную роль в исследовании модальных и интуиционистских логик [14].

Можно утверждать, что на базе теории дисконтинуумов строится некоторая *метатеория логического вывода*, и элементы дисконтинуумов рассматриваются как «протоколы» вычислений или выводов в некоторой формальной системе. Тем самым эта теория дает нам *топос логоса*, а если дисконтинуум представить наглядно в виде бесконечной, но конечно ветвящейся сети (см. рис. 2), то получим картину, если угодно, *эйдос логоса*, даваемый математикой.

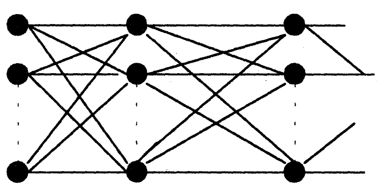


Рис. 2

Известная метафора «сеть логических понятий» получает точный математический смысл.

Но дисконтинуумы, равно как и бэровское пространство, можно строить не только априорно, логически, как это описано выше, но и «гилетически», извлекая, «изнедряя» их из одномерной числовой прямой как подпространства с индуцированной топологией: канторов дисконтинуум оказывается тогда гомеоморфен *канторову совершенному множеству* (получаемому из отрезка [0, 1] по известной процедуре выбрасывания «средних интервалов»), а бэровское пространство гомеоморфно *подпространству всех иррациональных чисел.* Разумеется, здесь (как и в рассмотренном выше конструировании числа) речь идет *не о собственно гилетической конструкции* (как это имеет место в музыке), а *об образе гилетической конструкции в рамках логической*, о hyle *внутри* logos'а.

Итак, даваемый математикой образ логического конструирования — это *априори определяемое нульмерное пространство* «логических выводов» (в частности, дисконтинуум), тогда как даваемый математикой же образ гилетического конструирования — это *нульмерное пространство как подпространство пространства ненулевой размерности*, топологическая пара (скажем, $<[0, 1], 2^{\omega}>$), в которой уже дисконтинуум как чистая форма исчезает и становится, как сказал бы Лосев, *меонально ознаменованным*. Это, уже с философской точки зрения, некая форма на фоне небытия, выступающая из этого фона («меона»), но не «отпускаемая» им.

6. Задумаемся теперь над вопросом, что является символом логического конструирования в музыке?

Необходимо подчеркнуть, что речь идет не о логике музыкальной композиции в целом, для понимания которой необходим «глобальный» анализ произведения, и уж совсем не о логике музыкально-теоретических построений, а о *непосредственно слышимом или видимом* (в нотной записи) *образе, символе логоса в музыке.*

Есть основания считать, что таким символом является *полифония*, прежде всего полифония так называемого *строгого стиля* (XV—XVI вв.). Так акад. Б. В. Асафьев писал, что полифония дает метод продвижения музыкального материала из единой предпосылки (принцип «cantus firmus») [14] т. е. по существу и организует музыкальный текст как ссылочную структуру. Замечательно, что выдающийся итальянский музыкальный мыслитель XVI века Царлино сравнивал пропосту в канонической имитации с посылкой, а риспосту — с заключением некоторого силлогизма [15]. В. Н. Холопова подчеркивает, что «полифоническая техника становится как бы формулой, заключающей в себе идею совершенной музыки» [6, с. 55].

Идею линеарной полифонии как символа логоса в музыке можно, впрочем, вывести и более формально. Если мы рассмотрим графический образ дисконтинуума (рис. 2) и спросим себя, что является коррелятом этого образа в музыке, то ответ получится сам собой: это линеарная полифония как она сформировалась в музыке Западной Европы в XIV-XV вв. Вовсе не случайно, что внешний графический облик полифонической фактуры идентичен графическому образу логоса, даваемому топологией: музыка в виде полифонической фактуры дает тот же эйдос логоса, что и теория дисконтинуумов. Как математика в процедуре измерений и в том типе конструирования числа, который отражает эту процедуру, дает образ hyle внутри logos'а, так музыка в линеарной полифонии дает *образ* logos'а *внутри* hyle.

Непосредственность восприятия полифонии очень важна: мы даже можем не знать, что имеем дело, скажем, с имитационной полифонией, но воспринимать ее ухом или глазом как полифонию. Об этом прекрасно написано в романе Т. Манна «Доктор Фаустус»[2]. Конечно, непосредственно мы воспринимаем не сложную полифоническую форму (такую, как фугу), а саму полифоническую фактуру, если угодно, *материю* полифонии.

Оговоримся, что наличие полифонического склада само по себе недостаточно для выражения логоса (вспомним гетевское восприятие фуг Баха): так и в математике структура канторова дисконтинуума есть одна из важнейших структур метаматематики, но не всякий раз, занимаясь канторовым дисконтинуумом, мы занимаемся метаматематикой.

7. Итак, мы можем нарисовать диаграмму (рис. 3).

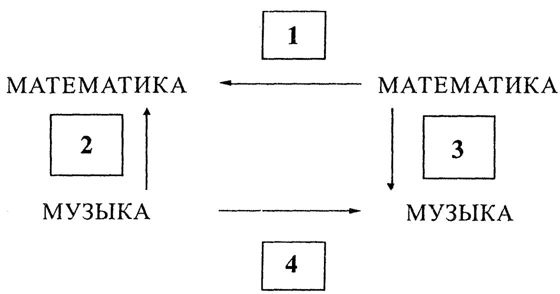


Рис. 2

Математика «моделирует» саму себя (1) — это феномен *метаматематики*; математика «моделирует» музыку (2) в виде гилетических конструкций в рамках математики (феномен *гилетической математики*); музыка «моделирует» математику (3) — феномен *полифонии* (прежде всего чистой полифонии строгого стиля). Но что такое стрелка (4), замыкающая диаграмму?

Это должен быть феномен музыки, моделирующей саму себя, или *феномен метамузыки*. Что же такое метамузыка — *изображение средствами музыки гилетической конструкции при условии, что музыка сама по себе есть парадигма гилетического конструирования?*

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним о соотношении logos — hyle в математике. Если logos в математике ассоциируется с чистой нульмерностью, а именно с определенным априори пространством конечных и бесконечных последовательностей элементов некоторого «алфавита», то hyle — с нульмерным пространством как подпространством одномерного (или, более общо, пространства положительной топологической размерности), топологической парой <пространство положительной размерности, его нульмерное подпространство>. Образно говоря, гилетическая конструкция в математике — это нульмерное пространство, извлеченное («изнедренное») из одномерного, нульмерность на фоне одномерности, которая выступает в такой конструкции как меон, а само нульмерное подпространство (например, дисконтинуум) оказывается «меонально ознаменованным». Тогда, переходя в «музыкальную категорию», получаем, что коль скоро музыкальный коррелят чистой нульмерности — *чистая полифония*, то метамузыкальная конструкция должна реализовывать себя как *полифония на фоне неполифонии*. Это должны быть, образно говоря, «сгустки полифонии», «гомологическая последовательность» полифонических эпизодов на «оси» неполифонического времени. Неполифония, «отсутствие» полифонии, выступает в данном случае как лотмановский «минус-прием» [16, с. 41].

Интересно, что такая музыкальная форма подробно «эмпирически» описана музыковедами: Вл. Вас. Протопопов называет ее *большой полифонической формой* и утверждает, что классический вид эта форма приняла у Моцарта [17, с. 362]. Аналогично этому эволюция полифонии строгого стиля привела к высшей чисто полифонической форме — *фуге*, величайшим мастером которой (но уже в рамках свободного стиля) по сию пору считается И. С. Бах. Разумеется, большая полифоническая форма существует отнюдь не только у Моцарта (равно как не только Бах писал фуги), и ее использование может дать (равно как и применение формы фуги) самые разные художественные результаты (многообразие результатов, если угодно, «художественных интерпретаций» этой формы, видно в творчестве одного только Моцарта) — рассмотрение их, однако, не является предметом данной статьи.

Но большая полифоническая форма имеет, так сказать, «свободную интерпретацию», объясняет сама себя: она может быть, с философской точки зрения, описана как процесс возникновения и исчезновения неких «форм», «тел», «структур» из «хаоса», «неструктурированного» меона.

Интересно при этом, что иногда (как раз в высших проявлениях этой музыкальной формы) созидаемые «структуры» устремлены к некоторой «предельной структуре», показывая как бы процесс становления, постепенной кристаллизации последней точно так, как «изнедряемые» в процессе измерения из дологической числовой «бездны» рациональные числа устремлены к некоторому пределу — вещественному числу, истинному размеру. Резонанс «свободной» (философской) и содержательной (художественной) интерпретаций имеет место, например, в двух величайших творениях Моцарта: симфонии *до* *мажор*, известной под названием «Юпитер», где показан процесс становления сложнейшего и математически кристально выстроенного «пятиголосного и пятитемного фугато» в конце финала [17, с. 369, 378], а всю симфонию можно воспринимать как хвалу творящему Духу («Veni, creator spiritus!»), Мастеру, Зодчему; и опере «Так поступают все женщины» («Cosi fan tutte»), где показан аналогичный процесс кристаллизации строгого канона, символизирующего одновременно венец развития глубокого любовного чувства. Похожие «гомологические ряды» полифонических фрагментов исследователи находят и в музыке Стравинского (см., например, анализ Кантаты на староанглийские тексты в [6] или авторское определение второй части Симфонии псалмов как «перевернутой пирамиды из фуг» [18]).

В рамках метамузыкальной формы тем самым возникает *объектная музыкальная форма* — в данном случае форма *полифоническая* (фугато, канон, фуга). Это точно соответствует тому, что в метаматематическом рассуждении возникает *объектное математическое доказательство*. Математика, которая математически мыслит себя, есть метаматематика; музыка, которая музыкально мыслит себя, есть метамузыка.

Но, будучи метамузыкальной структурой, большая полифоническая форма в то же время являет собой *музыкально-формальный символ становления и метаморфоз*, рисует музыкальный образ *развернутого на некотором фоне ряда художественных форм*. Метафорически это *сад*, точнее, *логический прототип сада*, его, как говорят мифологи, «архе». *Сад* — это принципиальная *неоднородность пространства*, постоянная пульсация тела и породившего его логоса, все время возобновляемая перемена точки зрения: «извне — изнутри». С топологической точки зрения сад — это нульмерный континуум в одномерном, и если смотреть «извне», то точка нульмерного континуума — это «точка на прямой», а взгляд «изнутри» превращает эту точку в процесс, в последовательность. Происходит, таким образом, постоянная пульсация сосредоточения и рассеяния: точка развертывается в мир, а мир свертывается в точку.

Тут вспоминается замечательное четверостишие О. Мандельштама:

И я выхожу из пространства
В запущенный сад величин,
И мнимое рву постоянство,
И самосознанье причин.

Это значит, что взгляд «извне» мы заменяем взглядом «изнутри», от геометрии переходим к логике, от одномерного — к нульмерному, от тела — к логосу, от статуи — к замыслу ваятеля. *Сад*, таким образом, можно трактовать как *зрительно непосредственно воспринимаемый образ гилетического конструирования*. Если угодно, застывшая музыка — это не архитектура, а сад: не случайно у Марселя Пруста тайна музыки сплетается с тайной сада[3]. Становится совершенно ясным, почему Мандельштам, как и Шнабель, считал, что Моцарт — сад.

Можно тогда сказать, что *эстетика сада — эстетика становящегося Космоса*, Космоса, творимого Демиургом (см. «Тимей» Платона)[4]. Напротив, *эстетика логоса* дает изнутри «изображение Бога, каков он есть в своей вечной сущности». Наконец, мы получим *«объектную» эстетику*, если будем смотреть только «извне»: однородное пространство-время с макротелами в нем и нерушимыми, четкими границами — *эстетика реалистического портрета*. Но это же *эстетика контраста* — борьбы и сопоставления разнородных начал (метафорически: «горный кряж», «лес на солнце и в тени...»).

Разумеется, что лишь бегло обозначенные здесь эстетические типы, полученные в результате некоторого теоретического анализа, должны быть подвергнуты обстоятельному историческому рассмотрению: необходимо проанализировать исторические типы «логического» и «гилетического» стилей как в музыке (и в искусстве вообще), так и в математике (и в науке вообще).

8. В заключение рассмотрим коротко лосевскую *диалектическую формулу множества*, в рамках которой эстетика и топология получают единую теоретико-множественную основу и оказываются науками, изучающими один и тот же феномен в различных аспектах.

Критикуя «наивное» канторовское пояснение идеи множества, Лосев выводит следующую диалектическую формулу (вывод этот базируется на платоновском «Пармениде»):

Множество — это единичность, данная как подвижной покой самотождественного различия.

Здесь нет возможности подробно комментировать эту формулу. Нужно лишь отметить, что множество, рассмотренное в аспекте единичности, есть *эйдос*, рассмотренное в аспекте подвижного покоя множество есть *число*, а рассмотренное в аспекте самотождественного различия есть *топос*.

Соответственно различаются и науки, изучающие категорию множества в указанных аспектах: 1) наука об эйдосах есть *эйдология*, или *эстетика*; 2) наука о числах есть *аритмология* и 3) наука о топосах есть *топология*.

Лосевская формула, скорее всего, нуждается в уточнении в свете современной науки (прежде всего, с позиций современной математики). Так, если эстетику считать наукой о способах задания множества как единства, то теорию моделей придется считать частью эстетики, хотя несомненно, что фактор единства является одним из фундаментальнейших при эстетической оценке явлений: известно, например, что Эйнштейн вводил критерий «эстетического оправдания» научной теории, согласно которому теория тем ближе к истине, чем из меньшего числа априорных предпосылок она выводится. Выстраивая теоретическую физику на основе единого принципа наименьшего действия, Ландау и Лифшиц придерживаются именно этого эйнштейновского критерия. В известном смысле можно утверждать, что эстетическое — это «точечное», стянутое к некоторому всеобъемлющему единству. Можно, однако, предложить такое уточнение понятия эстетики: ***эстетика есть наука о внепонятийных методах конструирования многого как единого***.

Важен именно аспект *внепонятийности* (вспомним формулы Канта в «Критике способности суждения»: «Прекрасно то, что нравится всем без понятия», «Прекрасно то, что без понятия признается предметом необходимого благорасположения» [21, с. 87, 109]), но и сформулированное уточнение нужно еще конкретизировать — речь должна идти об истолковании термина «внепонятийный». Художественное произведение стянуто некоторым «гилетическим формализмом», столь же жестким, как и формализм математической теории, но данным вне идеологии, вне понятий. Характерно, что на такую «безыдейную», «формальную» целостность художественного произведения обращал сугубое внимание Лев Толстой, которого принято числить по ведомствам «идейности» и «реализма» [16, с. 47—48].

Что же касается науки, названной Лосевым аритмологией, то это — современная теория множеств (включая теорию трансфинитных чисел), и то, что Лосев называет числом, есть, по существу, *ординал*.

Характеризуя топологию как науку о «топосах», Лосев тем самым объявляет сущностью топологии задачу различения двух точек и, следовательно, задачу достижимости (связности). На наш взгляд, суть топологии здесь схвачена достаточно точно.

Итак, в свете лосевской формулы (повторенной им во всех ранних трактатах и особенно подробно проанализированной в «Античном космосе...»), эстетика и топология логически связываются между собой на единой теоретико-множественной основе. Следовательно, необходимо существует соответствие между топологическими и эстетическими (эйдологическими) структурами, некий «функтор» из категории топологических пространств в «категорию» эстетических структур (художественных текстов). В данной статье мы и рассмотрели соответствие между определенными топологическими пространствами и музыкальными формами.

Примечания

[1] См. аннотацию к компакт-диску с записью концерта в исп. О. Крысы и Королевского Стокгольмского филармонического оркестра под упр. Дж. Де Прайеста (BIS CD-566 STEREO, 1993).

[2] Речь идет о четвертой главе романа, в конце которой описаны вокальные упражнения юного Адриана Леверкюна и его друзей «под регентством скотницы Ханны»: «Ни один из нас не догадывался, что под регентством скотницы Ханны мы под-

нялись на сравнительно... высокую ступень музыкальной культуры, в область имитационной полифонии, которую, для нашего удовольствия, открыл пятнадцатый век» (*Манн Т.* Собр. соч.: В 10 т. М.; Л., 1960. Т. 5. С. 42).

[3] «Однако я напрасно останавливался перед боярышником, чтобы вобрать в себя этот незримый, особенный запах, чтобы попытаться осмыслить его, — хотя моя мысль не знала, что с ним делать, — чтобы утратить его, чтобы вновь обрести, чтобы слиться с тем ритмом, что там и сям разбрасывал цветы боярышника с юношеской легкостью, через неожиданные промежутки, как неожиданны бывают иные музыкальные интервалы, — цветы с неиссякаемой щедростью, неустанно одаряли меня своим очарованием, но не давали мне углубиться в него, подобно мелодиям, которые проигрываешь сто раз подряд, так и не приблизившись к постижению их тайны». (*Пруст М.* По направлению к Свану. Перев. Н. Любимова. М., 1992. С. 119—120).

[4] У *Плотина* в трактате «Об Эросе» читаем: «Всякий же сад есть украшение, роскошное убранство богатства. И то, что принадлежит Зевсу, сияет смыслом, и его убранство, от самого ума идущее к душе, — отсвет. Или чем же еще может быть сад Зевса, как не *его изваянным образом* и его отсветом?» [19, с. 500].

Таким образом, сад — есть *сияющее смыслом изваяние*, вполне, впрочем, материальное (украшение, роскошь, убранство, богатство). Это Ум, полностью перешедший в явленнейшую (ἐκφανέστατον) Красоту (см. также *Платон*, «Федр» 250de и анализ термина ἐκφανέστατον у Хайдеггера [20]).

Список литературы

1. *Лосев А. Ф.* Музыка как предмет логики // *Лосев А. Ф.* Форма, стиль, выражение. М., 1995. С. 405—602.
2. *Зенкин К. Н.* Музыка и наука в философском творчестве Лосева // Муз. академия. 1994. № 5. С. 115—125.
3. *Холопов Ю. Н.* О формах постижения музыкального бытия // Вопр. философии. 1993. № 4. С. 106—114.
4. *Солертинский И. И.* Исторические типы симфонической драматургии // Из истории советской бетховенианы. М., 1972. С. 148—149.
5. *Бобровский В. А.* Тематизм как фактор музыкального мышления. М., 1989.
6. *Холопова В. Н.* «Классицистский комплекс» творчества И. Ф. Стравинского в контексте русской музыки // *Стравинский И. Ф.* Статьи. Воспоминания. М., 1985. С. 40—68.
7. *Лосев А. Ф.* Комментарий к диалогу Платона «Тимей» // Платон. Соч.: В 3-х т. М., 1971. Т. 3. С. 647—676.
8. *Конен В. Д.* Театр и симфония. М., 1975.
9. *Бурбаки Н.* Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. М., 1969.
10. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 3-х т. 2-е изд., перераб. и доп. М., 1988.
11. *Kurka P. A.* Comparison of Finite and Cellular Automata // Lect. Notes in Comput. Sci. 1994. № 841. P. 484—493.
12. *Белоусов А. И.* К понятию алгоритмического пространства // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Труды 2-й Международной научно-техн. конф. М., 1994. Т. 2. Ч. 2. С. 25—28.

13. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М., 1972.

14. *Асафьев Б. В. (И. Глебов).* Музыкальная форма как процесс. М., 1930. С. 26—27.

15. История полифонии: В 7 вып. // Музыка эпохи возрождения / *Дубравская Т. Н.* М., 1996. Вып. 2-Б. С. 19.

16. *Лотман Ю. М.* Анализ поэтического текста // *Лотман Ю. М.* О поэтах и поэзии. СПб., 1996. С. 18—253.

17. История полифонии: В 7 вып. // Западноевропейская музыка XVII — перв. четв. XIX в. / *Протопопов Вл. Вас.* М., 1985. Вып. 3. С. 346—388.

18. *Ярустовский Б. М.* Игорь Стравинский. М., 1968. С. 203.

19. *Лосев А. Ф.* История античной эстетики. Поздний эллинизм. М., 1980.

20. *Хайдеггер М.* Учение Платона об истине // *Хайдеггер М.* Время и бытие. М., 1993. С. 345—360.

21. *Кант И.* Критика способности суждения. М., 1994.

КОММЕНТАРИИ

А. И. Володарский

Как отметил А. И. Белоусов, непосредственным стимулом для написания его статьи послужила работа А. Ф. Лосева «Музыка как предмет логики» с возможным подзаголовком «Музыка и математика». Мне же хотелось бы представить вариации на тему «Эстетика и математика», ключом к чему служит высказывание А. И. Белоусова: «тайна художественного стиля есть в какой-то мере тайна личности творца и с ней связана и судьба творений, их оценка той или иной эпохой». А. И. Белоусов совершенно справедливо отмечает, что великий философ А. Ф. Лосев оказался солидарен с великим композитором И. Ф. Стравинским, утверждавшим, что музыкальная форма «гораздо ближе к математике, чем к литературе». Музыка, — продолжает А. И. Белоусов, — не только идеальна, но она отвлеченна, она абстрактна, и эта абстрактность музыки лучше всего обнаруживается в художественных текстах не собственно музыкальных, а литературных текстах, в произведениях живописи. Художественный текст тем более музыкален, чем менее он «сюжетен», чем в меньшей степени он апеллирует к конкретному.

Говоря о замечательном русском композиторе И. Ф. Стравинском (я готов вслед за А. И. Белоусовым назвать Игоря Федоровича великим композитором), хотелось бы понятие стиля дополнить двумя компонентами: временем и местом. В Париже состоялись мировые премьеры его первых балетов «Жар-птица» (1910), «Петрушка» (1911), «Весна священная» (1913), его оперы «Соловей» (1914). Именно там и тогда (в Париже, в 1910—1914 годы) Игорь Федорович стал тем великим композитором Стравинским, каким знает его весь музыкальный мир.

Но этому должно было сопутствовать множество других событий. В 1898 году — в год создания Московского художественного театра — в Петербурге было создано русское художественное объединение «Мир искусства». Его создатели — художник А. Н. Бенуа и театральный деятель, артист балета и балетмейстер С. П. Дягилев, опираясь на поэтиику символизма, создавали утонченную декоративность, изящную орнаментальность, легкую, почти воздушную стилизацию. Заслугой «Мира искусства» было создание высокохудожественной графики, прекрасного театра, в первую очередь балетного, великолепных декораций. Как тут не вспомнить, что абстрактность музыки лучше всего обнаруживается в произведениях живописи!..

С. П. Дягилев был организатором Русских сезонов в Париже (1907—1914); там же он собрал труппу Русского балета (1911—1929), прославившую русское музыкальное и балетное искусство. Участниками Русских сезонов были знаменитый артист балета Вацлав Нижинский и не менее знаменитый балетмейстер Михаил Фокин, в 1909—1914 годах руководивший балетной труппой Русских сезонов. В. Ф. Нижинский танцевал главные партии в балетах, поставленных М. М. Фокиным; лучшая его партия — Петрушка в одноименном балете И. Ф. Стравинского. Так оказались переплетенными имена и судьбы трех выдающихся представителей русской культуры. В ранних балетах И. Ф. Стравинского прослеживается связь с русским фольклором и обрядовостью, хотя он не избежал и влияния импрессионизма. Являясь реформатором балетного театра начала XX века, М. М. Фокин в своих постановках опирался на передовое искусство театра и живописи, использовал симфоническую музыку, не предназначенную для балета, стремился выразить в танце мироощущение современного ему человека. Вспомним высказывание А. И. Белоусова: «художественный текст тем более музыкален, чем менее он "сюжетен", чем в меньшей степени он апеллирует к конкретному».

А. А. Григорян

Прежде всего хотелось бы остановиться на идее о предельной для искусства абстрактности музыки и ее роли в становлении абстрактной живописи и, тем самым, привести еще один довод в пользу утверждения о близости математики и музыки. Речь идет об известном желании В. Кандинского о том, чтобы живопись могла развивать такие же силы, какими обладает музыка. (Здесь вспоминаются многочисленные высказывания А. Эйнштейна о творческой силе математических конструкций). Не случайно, что свои работы, в которых он отказывается от отображения реальности и переходит к изображению гармонии форм и красок, Кандинский называет на музыкальный манер: «композиция», «импровизация», «фуга» и т.п. «Музыкализации» живописи предшествовала «музыкализация» поэзии. Так, уже в XIX веке для некоторых поэтов ценность поэзии заключалась прежде всего в размере и звуке стихотворения, которые, по их мнению и воздействуют на эмоции слушателей. Подобно этому в словах поэта и философа Новалиса о том, что музыкальные соотношения являются собственно основными соотношениями в природе, также можно усмотреть намек на структурное тождество математики и музыки, если сравнить эти слова с известными высказываниями, Галилея о том, что «книга природы написана на языке математики». Однако следует ли отсюда убеждение, ведущее свое начало от Пифагора и ранних пифагорейцев, что теория музыки может быть построена на основе применения математических конструкций? Дело в том, что математически-космическое обоснование теории музыки, характерное для античного мышления, в новое время было вытеснено эстетикой отдельной личности. Поэтому центральное место в новой теории музыки заняла не математика, а психология. Более того, считается почти очевидным, что «логическая структура» музыки является куда более «богатой», чем любая математическая теория. И хотя музыкальная теория и математика возникли практически из одного источника, в настоящее время их пути в значительной степени разошлись, несмотря на ряд попыток преодолеть этот разрыв. Так, в 1906 г. Вольфанг Грезер пытался преодолеть разрыв между ориентированной на психологию теорией музыки и математикой, используя язык теории множеств, однако, насколько мне известно, его идеи, как и подобные им идеи других ученых и музыкантов, не находили до сих пор широкого признания. Интересная статья А. И. Белоусова возрождает традицию «математически ориентированного» музыкознания, и хочется пожелать ее автору не только новых интересных результатов на этом пути, но и внимательного изучения его идей со стороны профессиональных теоретиков-музыковедов.

ОТВЕТ АВТОРА

Володарскому А. И.

Александр Ильич очень точно выразил мысль о том, что *хронотоп* (единство времени и места) есть одна из основ стиля (художественного произведения, в частности). Именно это обстоятельство и делает возможным математическое (и, прежде всего, топологическое) исследование художественного текста, свидетельствуя о глубоком единстве эстетики и топологии. И речь здесь должна идти и о «модели пространства-времени» в самом тексте (о том, что называют хронотопом произведения), и о реальном, «бытовом» хронотопе, времени и месте рождения автора, времени и месте его успеха и т. д. Т. Манн, например, все время писал о том, что на стиле его произведений глубокий след оставила атмосфера родного города писателя — Любека. Один из ярчайших примеров сопоставления реального и художественного хронотопов — город Дублин, с одной стороны, как место рождения писателя Дж. Джойса, город его юности, а с другой — Дублин как место действия романа «Улисс». И это уже не реальный город, а то, что мифологи называют «теменос» — место, которое посещают боги, и где, в силу этого, радикально меняются «обычные» свойства пространства-времени, возникает как бы некая чудовищная «сингулярность». И не понимая трансформации реального города в точку на карте творимого писателем мифа, нельзя понять и роман. Можно было бы приводить еще множество примеров в таком роде, но из-за нехватки времени и места в данном конкретном издании мне остается только выразить глубокую признательность А. И. Володарскому за его необычный и интересный комментарий.

Григоряну А. А.

Мне очень лестно слышать мнение А. А. Григоряна о том, что я пытаюсь возродить математически ориентированное музыковедение. Я же все-таки должен еще раз подчеркнуть, что считаю своей задачей попытку применения современной математики к решению некоторых проблем анализа художественных текстов. Я ставлю во главу угла именно *взгляд на некоторые эстетические проблемы с позиций современной математики*, так как, с одной стороны, существует множество «структуралистских» или «псевдоструктуралистских» исследований (в русле направления, именуемого «порождающей поэтикой»), в которых, с моей точки зрения, лишь поверхностно (и не всегда грамотно) затрагивается терминология современной математики и которые при этом по существу ничего (или почти ничего) не могут дать для понимания художественного образа; с другой стороны, многие подходы музыковедов к своему предмету с позиций философии и математики страдают философско-математической наивностью и апеллируют, главным образом, к истории математики, а не к аппарату современной математики. В то же время именно математическая постановка задачи позволяет понять роль и смысл полифонии в музыкальном тексте. В заключение я хотел бы обратить внимание на две сравнительно недавно вышедшие книги, принадлежащие перу музыковедов и имеющие прямое отношение к теме моей работы. Это книга М. А. Аркадьева «Временные структуры в новоевропейской музыке» (1993) и книга Т. В. Антиповой «Музыка и бытие» (1997).

ПРОБЛЕМА СЛЕДОВАНИЯ ПРАВИЛУ В ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ ВИТГЕНШТЕЙНА

Лебедев М. В.

Эпистемологический пафос проблемы следования правилу состоит, как предполагается исследователями, прежде всего в том, что ее обсуждение служит для опровержения одностороннего эмпиризма, ведущего к скептицизму. В ходе такого обсуждения в §§ 139—242 «Философских исследований» (ФИ) Витгенштейн устанавливает невозможность «логически индивидуального языка», которому ни в коем случае нельзя научиться. Эта невозможность, по мнению Витгенштейна, особенно наглядна в языке математики.

Считается, что аргумент частного языка лишает ощущения и восприятия статуса сугубо индивидуальных и вследствие этого недостижимых ментальных сущностей, которые не обусловливаются никакими физическими событиями[1]. Витгенштейн подвергает критике «августинианскую» теорию значения, согласно которой значение есть определенный предмет (образ в сознании, абстрактная сущность) и которая, соответственно, представляет собой не просто семантическую теорию, но философскую парадигму, разделяемую многими авторами, в том числе самим Витгенштейном в «Трактате». По мнению Г. Бейкера, «Витгенштейн целится в философский миф, а не в невинное повседневное представление о языке как деятельности, управляемой правилами»[2].

Вообще говоря, в основе подобных «мифических» концепций должно лежать минимум два допущения:

i) знаку соответствует некоторая внеязыковая сущность, и

ii) эта сущность имеет ментальную природу.

В то же время Витгенштейн опровергает идею, что язык есть «исчисление правил значения». Хотя нельзя отрицать, что язык есть деятельность по правилам, но эти правила, с точки зрения Витгенштейна, принципиально нельзя систематизировать в исчисление. Поэтому он стремится показать, что нельзя говорить о неосознанном следовании языковым правилам, которое можно было бы тем или иным образом эксплицировать и дополнить им осознанное следование правилам, чтобы таким образом построить исчерпывающее исчисление языковых правил.

При этом Витгенштейн раскрывает два тезиса:

а) нет такой системы языковых правил, которая была бы полной и недвусмысленной, и

б) нет такого правила, которое независимо от нашей практики его применения определяло бы, правильно или неправильно используется выражение.

Витгенштейн обсуждает пример выписывания числовой последовательности согласно правилу ее образования (ФИ, § 143). Мы можем считать, что обучаемый овладел некоторым правилом, когда он перестал делать ошибки в его применении. Но поскольку невозможно провести резкую границу между нерегулярной и систематической ошибками, то откуда мы можем знать, как много чисел последовательности он должен выписать правильно для того, чтобы считать его понявшим это правило так же, как и мы? «Усвоение (или же понимание) системы не может состоять в том, чтобы продолжить ряд до *того* или *иного* числа; *это* лишь применение понимания... Само же понимание — некоторое состояние, *из которого* вытекает правильное применение» (§ 146). Но невозможно и предположить, будто знание и понимание суть состояния сознания (Zustand der Seele): «Но в чем состоит это знание? Позволь спросить: *когда* ты знаешь это применение (соответствующего математического правила)? Всегда?.. Или когда ты действительно думаешь о законе ряда?» (§ 148). Например, *В* наблюдает, что *А* выписывает последовательность 2, 4, 6, 8, и вдруг понимает, как ее продолжить (§ 151). Является ли происшедшее *пониманием*? Могут ли у нас быть основания для такого утверждения? Пытаясь найти ответ на подобные вопросы, «мы пытаемся тут проникнуть в умственный процесс понимания, который как бы скрыт за этими более грубыми и потому легко бросающимися в глаза его сопровождениями» (§ 153).

Поскольку оснований для такого проникновения не обнаруживается, Витгенштейн выдвигает требование: «Не думай вовсе о понимании как об "умственном процессе". Ибо это лишь оборот речи, который тебя сбивает с толку» (§ 154). Единственное, о чем мы можем делать значимые утверждения в этой связи, — это отнюдь не понимание закона последовательности и тем более не переживание обучаемым этого понимания, но лишь «*обстоятельства*, при которых он испытал это переживание» (§ 155), или, точнее, обстоятельства, при которых делается заявление об этом переживании. Поэтому выражение «я понял и могу продолжить» не аналогично описанию всей ситуации и ее обстоятельств, включая процессы в сознании говорящего, а выступает некоторым «сигналом», маркирующим ситуацию. О правильности данного употребления этого выражения — и/или о его истинности — мы судим по дальнейшему развитию этой ситуации; поэтому было бы ошибочно:

а) интерпретировать подобные выражения как описания состояний сознания (§ 180);

б) полагать, будто правило независимо от нашей практики его применения может определять, правильно или неправильно используется выражение.

Например, ученика учат писать последовательность, прибавляя 2 к последнему числу. Он многократно пишет последовательность четных чисел достаточно далеко и без ошибок, так что мы убеждены, что он овладел этой операцией. Но вот однажды ему случается продолжить ее до 1000, после чего он пишет: 1004, 1008, 1012 и т.д. Он не понимает нашего недовольства, потому что убежден, что делает именно то, чего от него хотят: прибавляет по двойке в первой тысяче, по две двойки во второй, по три – в третьей и т. д. В каком смысле мы можем сказать, что он следует правилу ошибочно, и в чем состоит правильное следование? Для того чтобы делать подобные утверждения, мы, вероятно, должны быть убеждены, будто правило содержит в себе все бесконечное множество своих возможных применений, поэтому вопрос о правильном или ошибочном следовании решается сравнением реальных фактов следования правилу в тех или иных ситуациях с образцами следования, некоторым образом уже содержащимися в правиле. Можем ли мы отказаться от подобного допущения? Если да, то получается, что в ходе следования правилу каждый следующий шаг требует нового решения (§ 186). Но на каком основании мы можем тогда говорить, что тот или иной шаг является правильным или ошибочным? Здесь тоже нельзя отыскать таких значимых предпочтений, которые были бы отвлечены от конкретной ситуации.

Поэтому Витгенштейн вовсе не подвергает сомнению, что человек, давая кому-либо задание выписать последовательность четных чисел, имеет в виду, что после 1000 надо писать 1002. Витгенштейн отрицает только философское утверждение, что акт подразумевания предполагает мгновенное схватывание бесконечной последовательности (для чего не обнаруживается оснований), и философский тезис о том, что мое подразумевание того-то и того-то есть факт (моего сознания), наблюдение которого и оправдывает мое заявление, будто под знаком «+» я подразумеваю операцию с известными свойствами[3].

Обсуждение вопроса о том, детерминируют ли правила свои применения, раскрывает аналогию между правилами и математическими функциями (§§ 189—190). Недооценка обстоятельств следования правилу приводят к механической модели: система правил предстает аналогом некоторой машины — в том смысле, в котором мы обычно думаем о машине как «заключающей в себе» свой образ действия и полагаем, что все действия, которые она способна совершать, «в некоем таинственном смысле... действительно должны уже *присутствовать*» (ФИ, § 193; Замечания по основаниям математики, ч. 1, § 122). Такое представление о машине, по мнению Витгенштейна, формируется тогда, когда человек философствует (ФИ, § 194; Замечания по основаниям математики, ч. 1, § 125). Тогда возможные движения машины трактуются как тени действительных движений, причем находящиеся в более тесном отношении, чем отношение картины к изображаемому. Для прояснения этих представлений надо проанализировать, как мы используем выражение «движения, которые может совершать данная машина». «Непонятное употребление слова превратно истолковывается как выражение странного *процесса*. (Так, мы думаем о времени как о странной среде, а о душе — как о странной сущности)» (ФИ, § 196; Замечания по основаниям математики, ч. 1, § 127).

Результатом обсуждения становится заключение о социальном характере следования правилу: «Невозможно, чтобы правилу следовал только один человек и всего лишь однажды» (§ 199). Нельзя индивидуально следовать

7 Зак. 3711

правилу, так как в подобном случае нельзя будет различить, когда человек действительно следует правилу, а когда он только думает, что следует.

Интерпретация описанной проблематики, предложенная Солом Крипке, утверждает логический приоритет обсуждения следования правилу над обсуждением аргумента частного языка. Эта постановка вопроса отличается от изложенной в § 201 «Философских исследований», где Витгенштейн формулирует проблему, ставшую фокусом дискуссий, следующим образом.

Наш парадокс был таким: ни один образ действий не мог бы определяться каким-то правилом, поскольку любой образ действий можно привести в соответствие. Ответом служило: если все можно привести в соответствие с данным правилом, то все может быть приведено и в противоречие с этим правилом. Поэтому тут не было бы ни соответствия, ни противоречия.

Мы здесь сталкиваемся с определенным непониманием, и это видно уже из того, что по ходу рассуждения выдвигались одна за другой разные интерпретации, словно любая из них удовлетворяла нас лишь на то время, пока в голову не приходила другая, сменявшая прежнюю. А это свидетельствует о том, что существует такое понимание правила, которое является не *интерпретацией*, а обнаруживается в том, что мы называем «следованием правилу» и «действием вопреки» правилу в реальных случаях применения.

По мнению Крипке, «невозможность частного языка появляется как заключение скептического решения [Витгенштейном] его собственного парадокса»[4]. Сам Витгенштейн немедленно отклоняет этот парадокс в следующем же абзаце: «Мы здесь сталкиваемся с определенным непониманием...»; но Крипке использует парадокс для подробного скептического обсуждения проблемы значения.

(Крипке с самого начала оговаривается, что реконструируемая им скептическая фигура Витгенштейна не тождественна своему историческому источнику[5]. В свою очередь, теория Крипке породила собственную интерпретативную литературу, в которой обсуждение часто продолжается в значительной степени независимо от первоначального аргумента частного языка. Витгенштейн Крипке, реальный или вымышленный, стал самостоятельным философом — «Крипкенштейном», и для многих исследователей уже не важно, насколько верно (или насколько последовательно) воспроизведены в этой версии первоначальные идеи исторического Витгенштейна относительно частного языка, — важнее возможные теоретические следствия[6]. В то же время другое возможное здесь соображение состоит в том, что хотя теория Крипке интересна и плодотворна, тем не менее она основана на недискусионном принятии автором некоторых исходных допущений, против которых приводил доводы Витгенштейн[7]. Я попытаюсь показать, что последний аргумент, в самом деле, способен поставить под сомнение предыдущий.)

Чтобы проиллюстрировать проблему, Крипке выбирает пример сложения. Каким образом мы понимаем, что именно нужно делать, чтобы сложить два числа?

Представим себе скептика, подвергающего сомнению все арифметические действия, и назовем его скептиком Крипке. Скептик Крипке складывал в своей жизни конечное число чисел и получал конечное число результатов сложения по правилу сложения; между тем это правило определяет его ответы на неопределенно большое число задач сложения, которых он никогда в прошлом не решал, и получение неопределенно большого числа новых сумм. Так, вычисляя «68 + 57», скептик Крипке (как и всякий разумный человек) обычно предполагает, что не просто необоснованно выдает какое-то число в ответ, а действует по правилу, которое предопределяет для данной задачи единственно верный ответ «125». Суть скептического аргумента может тогда быть выражена таким образом: как я могу знать, впервые вычисляя «68 + 57», что следую именно правилу «сложения», а не какому-то другому, и что знак «+» и в этом случае означает ту же функцию, какую он означал в прошлом — «плюс», а не «квус».

Вопрос, который вытекает из скептического аргумента в изложении Крипке, может быть облечен в две формы[8].

1. Существует ли какой-нибудь *факт*, который бы свидетельствовал о том, что я имел в виду «плюс», а не «квус», отвечая «125» на поставленный математический вопрос?

2. Есть ли у меня какая-нибудь причина быть уверенным, что сейчас я должен ответить на известный вопрос «125», а не «5»?

Эти вопросы связаны: я должен ответить «125», потому что уверен, что этот ответ также соответствует тому, что я раньше *имел в виду* (т.е. действию «плюс»). Если есть факт, свидетельствующий о том, что я имею в виду то же, что и раньше, пользуясь знаком «+», то он может быть причиной моей уверенности в ответе «125». Иначе – мой ответ случаен, т.е. не может быть подведен под какое-то определенное правило или, что то же самое, может быть подведен под любое правило.

При этом скептик не оспаривает *теперешней* нашей уверенности в применении того или иного правила, в легитимности того или иного ответа, он согласен, что в соответствии с нашими теперешними правилами «68 + 57» означает 125; шире — он не оспаривает *теперешних* правил того языка, на котором мы с ним дискутируем: он сам говорит на этом же языке; он только оспаривает, что мое теперешнее использование языка совпадает с моим прошлыми его использованием, что теперь я подтверждаю мои прошлые лингвистические интенции. Проблема не в том, «Как я знаю, что 68 плюс 57 есть 125?», — на это можно ответить, произведя вычисление, — а в том, «Как я знаю, что “68 плюс 57” в согласии с тем, что я *имел в виду* под “плюсом” *в прошлом*, должно означать 125?». Если слово «плюс», как я использовал его в прошлом, означало функцию квус, а не плюс, тогда моя *прошлая* интенция была такой, что на вопрос «Сколько будет 68 плюс 57?» я должен был бы ответить «5».

Т. е. я имею в своем прошлом конечное число вычислений, относительно которых я полагаю, что, делая их, я применял правило сложения, но ничто не мешает нам предположить, что «на самом деле» я следовал в этих случаях правилу «квожения», причем различия между применением правил сложения и квожения не были заметны в прошлом — в том, что касается произведенных в прошлом вычислений, оба этих правила совпадают, — но различие между ними может состоять как раз в том, что сложение требует ответить 125 на известный вопрос, а квожение — 5. Поскольку я не могу сказать точно, какое правило из этих двух я действительно применял в прошлом, хотя думал, что применяю правило сложения, я не могу быть уверен, что в новом случае вычисления ответ 125 предпочтительнее, чем 5; вернее, учитывая специфику скептического поведения скептика Крипке, будучи уверен, что сейчас я должен ответить 125, поскольку сейчас-то я применяю правило сложения, я никак не могу обосновать свою уверенность в том, что в прошлом я тоже применял правило сложения, а не квожения. С другой стороны, этот скептицизм является и скептицизмом в отношении теперешнего использования правил, поскольку никакой факт из моего связанного с вычислениями прошлого не подсказывает мне, что ответ на теперешний вопрос должен быть 125, а не 5, подобно примеру Витгенштейна «Как я знаю, что этот цвет «красный»?» (Замечания по основаниям математики, ч. 1, § 3) или примеру Нельсона Гудмена с применением термина «green», под которым в прошлом он мог постоянно понимать то, что соответствует термину «grue»[9].

Возможно следующее возражение: «я не необоснованно даю ответ 125, поскольку, прежде чем дать его, я выполняю некоторый усвоенный алгоритм — я *вычисляю* ответ». Однако, развивая свое сомнение, скептик может спросить: «Что свидетельствует мне о том, что прежде я считал, а не квитал, т. е. что под правилами “счета” я не мыслил на самом деле “квета”, где “квитать” — значит то же самое, что и считать, за исключением случая “68 + 57”, где “квитать” подразумевает вместо сложения использовать квожение?». И так далее: каждое правило языка, ссылкой на которое мы пытались бы подтвердить применение того или иного правила в прошлом, само подвержено попаданию в круг скептической аргументации ad infinitum.

Количество случаев применения правила сложения потенциально бесконечно, и нетривиальные интерпретации правила — так же, как и стандартные — должны быть совместимы с любым конечным множеством применений обычного вида (таких, как 2 + 2 = 4). Тогда, как представляется, следует предположить наличие некоторого истинностного оператора, делающего истинным мое утверждение «плюс», которым я обозначаю обычную функцию сложения, а не нечто иное. Для Крипке эта ситуация указывает на юмовскую проблему, для которой, по мнению Крипке, Витгенштейн дает «скептическое» решение, причем для обоих упомянутых выше вопросов.

Главная аналогия между скептицизмом Витгенштейна и скептицизмом Юма заключается в том, что оба они считают невозможным прямое решение своей скептической проблемы и предлагают ее скептическое решение. Соответственно, Крипке дает определения прямому и скептическому решениям.

Предлагаемое решение можно считать *прямым*, если оно показывает, что при ближайшем рассмотрении скептицизм оказывается неоправданным; некоторый сложный аргумент может все же доказать тезис, в котором сомневался скептик.

Попытку прямого решения скептического парадокса дает приведенный выше аргумент алгоритма в следующей форме: «в уме» у нас содержится что-то вроде таблицы или инструкции, определяющей применение правила для каждого из случаев. Этот аргумент, однако, может работать только для правил, действующих на конечном числе случаев, поскольку наша память не может вместить информацию о бесконечном числе случаев; большинство же правил распространяются именно на бесконечное число случаев.

Прямым решением могло бы быть диспозициональное. Оно таково: мыслить сложение под знаком «+» — значит быть расположенным (иметь диспозицию), когда попросят суммировать любые «$x + y$», дать в ответ сумму x и y; мыслить сложение (квожение) под знаком «квус» — значит иметь диспозицию дать в ответ на такой же вопрос *квумму* x и y. Сказать, что на деле я в прошлом имел в виду плюс, — значит сказать, что, будучи в прошлом спрошен дать ответ на вопрос «68 + 57 = ?», я *ответил бы* 125. Но в прошлом я не сталкивался с таким случаем, так что моя прошлая диспозиция, соответствующая «следованию правилу сложения», не более, чем гипотеза: в прошлом я мог бы иметь диспозицию дать ответ 5 на указанный вопрос; какова была моя диспозиция в прошлом (и какому правилу она соответствовала), никак не обосновывается тем, что теперь, уж поскольку я актуально отвечаю 125, я могу приписать себе диспозицию давать ответ 125, когда передо мной стоит вопрос «68 + 57 = ?». Кроме того, диспозициональное решение не учитывает существование очень больших чисел, производить с которыми действия в уме или на бумаге (или как угодно) практически невозможно или слишком долго, чтобы на это хватило человеческой жизни. Таким образом, ответом на подобные вопросы будет выражение неспособности дать на заданный вопрос вообще какой бы то ни было ответ; диспозиция между тем предполагает, что ответ в соответствии с правилом сложения может быть дан на любой из бесконечного ряда вопросов о сумме двух положительных чисел, независимо от их размера. К тому же диспозиция вообще устанавливается только на основании фактов прошлой жизни, она ничего не может сказать о применении правила в будущем (соответственно о новых случаях).

Возможно такое возражение: «подразумевание сложения под “плюсом” означает некий нередуцируемый опыт со своими собственными особыми качественными характеристиками, известный каждому из нас непосредственно путем интроспекции». Например, такова головная боль и др. Но и здесь скептический аргумент имеет свое расширение: откуда знаем, что переживаемый в данном случае опыт тот же самый, который я привычно ставил в соответствие с употреблением «плюса» как действия сложения? Правило, которому я «на самом деле» ставлю в соответствие такой опыт своему действию, может быть как одним, так и другим — прошлый опыт таких соответствий мне здесь не дает, как и в остальных случаях ключа: в новом случае такое специальное переживание (как и знак) может указывать мне на необходимость ответа 5 так же, как и на необходимость ответа 125, поскольку я не знаю, какое именно правило (плюс или квус) этот опыт характеризует на основании моего прошлого употребления знака «+».

Итак, прямое решение не проходит, и в этом заключается параллельность скептических ситуаций Витгенштейна и Юма. Априорное оправдание индуктивного рассуждения и анализ каузального отношения как подлинной необходимой связи между парами событий был бы прямым решением поставленных Юмом скептических проблем — индукции и каузальности соответственно. *Скептическое* решение скептической философской проблемы начинается, напротив, с признания скептических негативных утверждений нерешаемыми (безответными). Тем не менее, наша повседневная практика или вера оправдана постольку, поскольку она, как показал скептик, не нуждается в том, чтобы требовать оправдания. И ценность скептического аргумента во многом состоит именно в том факте, что он показывает: ***повседневная практика, если она вообще нуждается в защите, не может быть защищена прямым путем***. Скептическое решение может также включать в себя скептический анализ или описание повседневных полаганий с тем, чтобы опровергнуть их *prima facie* кажущуюся референциальную связь с метафизической абсурдностью.

Скептическое решение Юма таково: если A и B суть два типа событий, которые мы видим постоянно соединенными вместе, то мы обусловлены ожидать, что событие типа B будет сопутствовать событию типа A. Сказать о частном событии a, что оно вызвано другим событием b — значит подвести эти два события под два типа A и B, которые, как мы ожидаем, будут и в будущем так же соединены друг с другом, как они были соединены в прошлом. Только когда частные события a и b мыслятся как относящиеся к двум типам событий A и B, соотнесенных посредством генерализации, — за *всеми* событиями типа A следуют события типа B, — тогда можно сказать, что a «влечет за собой» (является причиной) b. Когда события a и b мыслятся отдельно сами по себе, к ним нельзя применить никаких каузальных отношений. Это заключение Юма Крипке предлагает называть невозможностью индивидуальной каузальности.

Так же, как с юмовским скептическим решением его скептического парадокса коррелирует заключение о невозможности индивидуальной каузальности, так и невозможность индивидуального языка — это заключение Витгенштейна, коррелирующее со скептическим решением его собственного скептического парадокса.

Скептическое решение Витгенштейна основывается на отрицании существования какого-либо «превосходного факта», который бы свидетельствовал философам (служил бы критерием) о следовании тому, а не иному правилу.

Витгенштейн в «Философских исследованиях» критикует ту позицию, которую он сам занимал в «Трактате». Там значение декларативного предложения обеспечивалось наличием у него условий истинности (его соответствием фактам). Теперь Витгенштейн замещает вопрос: «В каком случае данное предложение может быть истинным?» двумя другими. Первый – «При каких условиях эта словесная фигура может соответствующим образом утверждаться (или отрицаться)?»; второй, предполагающий ответ на первый вопрос, – «Каковы в нашей жизненной практике роль и применение утверждения (или отрицания) словесной фигуры при этих условиях?». Правильнее: следует говорить не об условиях «утверждения», а, скорее, в более общем виде, не об условиях, при которых должен быть сделан тот или иной ход (форма лингвистического выражения) в «языковой игре».

Структура «Философских исследований» в свете скептического парадокса, по Крипке, такова: в первой части подрываются основания «реалистической» («репрезентативистской») картины языка – только если заменить эту картину другой, может быть понятно скептическое решение скептического парадокса Витгенштейна; с другой стороны, парадокс рассматривается во второй части и, как антецедент своего скептического решения, представляет собой последний гвоздь, забитый в гроб «репрезентативистской» картины.

Все, что необходимо для легитимации утверждений о том, что некто имеет в виду нечто, — это наличие приблизительно специфицируемых обстоятельств, при которых эти утверждения легитимно утверждаемы, и то обстоятельство, что игра в высказывание таких утверждений при этих условиях имеет место в нашей жизни (жизни языкового сообщества). Никакого предположения, что этим утверждениям «соответствуют факты», не нужно.

Тогда, если Витгенштейн прав, мы не можем начать решать скептический парадокс, пока мы остаемся во власти предпосылки о том, что осмысленные декларативные предложения должны иметь целью (подразумевать) соответствие фактам. Если наши рассуждения основаны на этом, мы можем только заключить, что предложения, приписывающие значение и интенцию другим, сами бессмысленны.

Если мы теперь вернемся к исходному вопросу: «Существует ли какой-нибудь *факт*, который свидетельствовал бы , что я имел в виду “плюс”, а не “квус”, отвечая “125” на поставленный математический вопрос?», то мы должны будем ответить на него так: «не имеется никаких фактов относительно меня, которые отличают мое обозначение определенной функции как “плюс”... и вообще мое обозначение чего бы то ни было»[10]. Отсутствие таких фактов, в представлении Крипке, приводит Витгенштейна к тому, чтобы отказаться от объяснения значений утверждений, подобных «знаком “плюс” я обозначаю сложение», в терминах условий истинности и заменять это объяснением в терминах условий утверждаемости (assertibility), которые отсылают к фактически действующей (а не просто потенциальной) конвенции конкретного языкового сообщества. Под последним в таком случае будет пониматься множество людей, использующих примененную в рассматриваемом утверждении знаковую систему, или, более строго, *все* примененные в рассматриваемом утверждении знаковые системы. Это соглашение, по теории Крипке, узаконивает возможность нашего обозначения операции сложения знаком «плюс» несмотря на то, что для этого отсутствуют фактические основания. Поэтому такое (предполагаемое) решение парадокса Витгенштейном Крипке называет скептическим: оно не опровергает собственно скептического тезиса об отсутствии условий истинности для утверждений описанного вида.

Справедливость (или, скорее, полнота) такой интерпретации Витгенштейна вызывает следующее возражение: требование о наличии соглашения сообщества для возможности обозначения, очевидно, содержит в себе непосредственно отрицание возможности частного языка, делая таким образом аргумент, изложенный в §§ 256—271 «Философских исследований», избыточным. Эта первая формулировка скептической проблемы опирается на предположение Крипке о том, что мы располагаем некоторыми представлениями о фактах независимо от истинности тех или иных фактических утверждений. Но одной из главных идей «Философских исследований» является именно учение о невозможности подобных представлений и о том, что единственный путь к идентификации фактов лежит через анализ использования выражений, заключающих об этих фактах, и анализ условий их истинности.

Таким образом, анализ аргументации Крипке показывает, что Витгенштейн *не противопоставляет* условия утверждаемости условиям истинности (на чем настаивает сам Крипке). Скорее, обоснование Витгенштейном условий утверждаемости следует рассматривать как обоснование условий истинности, учитывающее обстоятельства употребления знака.

Понятно, что принятие последнего положения требует раскрытия используемой концепции истинности. Крипке считает, что Витгенштейн в «Философских исследованиях» принимает «избыточную» (дефляционную) теорию истины. В ее основе лежит следующее допущение: утверждать, что предложение истинно, — значит просто утверждать само предложение («p» истинно = p), а утверждать, что оно не истинно, — значит просто отрицать его («p» ложно = $\neg p$). Это допущение в применении к обсуждаемой проблематике вызывает следующие возражения:

а) только высказывания определенной формы называются «истинными» или «ложными» (это не относится к вопросам, модальным высказываниям, контрфактуалам и т.д.), и они так называются именно потому, что служат утверждению фактов;

б) именно предложения, «утверждающие факты», могут быть компонентами истинностно-функциональных соединений, и их значение в таких соединениях трудно объяснить в терминах условий утверждаемости.

Контраргументация Витгенштейна, в интерпретации Крипке, здесь такова: мы называем нечто пропозицией — соответственно, истинной или ложной, — когда в нашем языке мы применяем к этому нечто исчисление истинностных функций. Важно понять, что мы *не* ищем необходимых и достаточных условий (условий истинности) следования правилу. Такие условия составили бы прямое решение скептического парадокса, а идея прямого решения уже отвергнута.

Представляется, что такая интерпретация влечет за собой следующие результаты. Если развить эту точку зрения, то надо будет признать, что теорию условий утверждаемости Витгенштейна следует отличать от теории, гласящей, что для каждого m и n значение функции, которую мы понимаем под «плюсом», есть по определению то значение, которое все языковое сообщество дало бы в качестве ответа. Последняя теория была бы теорией условий истинности таких утверждений, как «под "плюсом" мы понимаем такую-то и такую-то функцию» или «под "плюсом" мы понимаем функцию, которая, будучи применена к аргументам 68 и 57, дает значение 125». Следовательно, такая теория была бы социальной версией диспозициональной теории и была бы открыта по крайней мере для некоторых элементов того же критицизма, что и ее изначальная форма. Теория условий утверждаемости Витгенштейна в таком случае говорит скорее о следующем: если все согласны, что подобный ответ на подобный вопрос правилен, то никто из разделяющих это соглашение не почувствует себя вправе назвать такой конкретный ответ неправильным.

Поэтому, если мы вернемся к предварительно эксплицированным парадигматическим допущениям, составляющим предполагаемую мишень критики Витгенштейна, —

(i) знаку соответствует некоторая внеязыковая сущность, и

(ii) эта сущность имеет ментальную природу, —

то мы увидим, что объяснение, опирающееся на дефляционную теорию, затрагивает скорее допущение (i), но не (ii). Если мы согласимся с предложенной Крипке интерпретацией позиции Витгенштейна относительно условий истинности, то мы будем вынуждены признать, что антиментализм Витгенштейна не свободен от внутренних противоречий и вообще недостаточно последователен.

Следует заметить, что представление знаковых последовательностей как пропозиций не является необходимым для дефляционной трактовки истинности. Значимое в этой связи различие относится к схеме эквивалентности левой и правой частей утверждения. Мы можем предположить, что эти части являются предложениями. В таком случае именем предложения является само это предложение: так, «Снег бел» является именем предложения «Снег бел». В такой — *сентенциальной* — версии дефляционизма утверждение условий истинности будет выглядеть так:

$$\text{«Снег бел» истинно} \Leftrightarrow \text{снег бел,}$$

а схема эквивалентности, соответственно, так:

$$\text{предложение «}s\text{» истинно} \Leftrightarrow s.$$

В *пропозициональной* версии дефляционизма части утверждения являются пропозициями, а именами пропозиций являются выражения вида «утверждение, что *p*» или «пропозиция, что *p*»: так, «пропозиция, что снег бел» будет именем пропозиции, утверждающей, что снег бел. Утверждение условий истинности будет выглядеть так:

$$\text{пропозиция, что снег бел, истинна} \Leftrightarrow \text{снег бел,}$$

а схема эквивалентности следующим образом:

$$\text{пропозиция, что } p\text{, истинна} \Leftrightarrow p.$$

Эксплицированные Крипке возражения Витгенштейна возможным критикам дефляционизма относятся к пропозициональной, но не к сентенциальной его версии. Дальнейшее рассмотрение этой дистинкции оказывается значимым для прояснения обоснования Витгенштейном условий истинности, учитывающего обстоятельства употребления знака и, следовательно, долженствующего заключать о способах существования языковых выражений в языковом сообществе. Попробуем показать трудности, с которыми сталкивается здесь возможное рассмотрение в рамках дефляционной теории.

Так, если в утверждении

«68 + 57 = 125» истинно ⇔ 68 + 57 = 125,

«68 + 57 = 125» — пропозиция, то утверждение тривиально; если же это — предложение, то утверждение в целом ложно, поскольку для того, чтобы «68 + 57 = 125» было истинно, недостаточно, чтобы 68 + 57 равнялось (в некоторой действительности) 125; надо еще, чтобы «68 + 57 = 125» означало, что 68 + 57 действительно равно 125. Но дефляционная теория истины не способна предоставить нам никаких фактов относительно языка, поскольку принципиально отклоняет референциальную отсылку к фактическим положениям дел.

В этом отношении дефляционная теория противоположна корреспондентной; но даже если мы не принимаем критерий соответствия фактам за эпистемологически основной в нашем представлении об истинности, то мы тем не менее, как правило, склонны рассматривать корреспондентную интуицию как некоторый критерий адекватности. Мы можем попытаться применить этот критерий к дефляционной теории следующим образом.

Предположим, что интуиция о том, что некоторое предложение или пропозиция соответствует фактам, является интуицией о том, что это предложение или пропозиция истинно(-а) *потому, что* мир существует определенным способом[11], т.е. истинность пропозиции *объясняется* некоторым контингентным фактом, внешним по отношению к этой пропозиции:

пропозиция, что 68 + 57 = 125, истинна потому, что 68 + 57 = 125.

Если применить этот критерий к дефляционной теории (постольку, поскольку она имплицирует следование с необходимостью):

«68 + 57 = 125» истинно ⇔ 68 + 57 = 125,

то из этих двух утверждений следует:

68 + 57 = 125 потому, что 68 + 57 = 125.

Последнее утверждение ложно, так как отношение каузальности, вообще говоря, может существовать лишь между отличными друг от друга членами отношения. Это означает, что два предыдущих утверждения несовместимы друг с другом и, следовательно, корреспондентная интуиция неприменима к дефляционной теории[12].

Возможно следующее возражение: связь между пропозицией, согласно которой 68 + 57 = 125, и тем фактом, что 68 + 57 = 125, не является контингентной, а следовательно, утверждение

«пропозиция, что 68 + 57 = 125, истинна потому, что 68 + 57 = 125» неудовлетворительно выражает корреспондентную интуицию. Более адекватно корреспондентная интуиция может быть выражена в таком виде:

«68 + 57 = 125» истинно потому, что 68 + 57 = 125.

Данное утверждение, будучи применено к

«пропозиция, что 68 + 57 = 125, истинна потому, что 68 + 57 = 125»

не даст ложного каузального утверждения. Однако подобная формулировка корреспондентной интуиции исходит из сентенциальной, а не пропозициональной версии дефляционизма, а следовательно, должна быть применена к дефляционному утверждению

«68 + 57 = 125» истинно $\Leftrightarrow$ 68 + 57 = 125,

что в результате снова даст

68 + 57 = 125 потому, что 68 + 57 = 125.

Еще одно возможное возражение связано с тем, что выражение «потому, что» имплицирует референциально непрозрачный контекст, где кореферентные выражения не могут быть взаимозаменимы *salva veritate*. В таком случае вывод «68 + 57 = 125 потому, что 68 + 57 = 125» из приведенных пар неправомерен. Однако открытым для дискуссии остается вопрос, какой именно вид непрозрачных контекстов задается выражением «потому, что»: интенсиональный контекст, запрещающий подстановку контингентно кореферентных выражений, но разрешающий подстановку необходимо кореферентных выражений, или так называемый гиперинтенсиональный контекст, запрещающий подстановку и тех, и других. Если нам надо показать, что описанный вывод неправомерен, то мы должны принять, что выражение «потому, что» задает гиперинтенсиональный, а не просто интенсиональный контекст. Однако это недоказуемо.

Таким образом, корреспондентная интуиция оказывается неприменима к дефляционной теории. Собственно, само по себе это еще не означает, что утверждения вида «Пропозиция, что 68 + 57 = 125, соответствует фактам» являются ложными с дефляционной точки зрения; выражение «соответствовать фактам» в составе подобного утверждения может, с рассматриваемой точки зрения, трактоваться как имеющее значение «быть истинным», где истина может пониматься дефляционно. Тем не менее такой ход все же *фактически* отвергает критерий адекватности. В итоге мы будем вынуждены признать, что дефляционная теория не располагает достаточными средствами для того, чтобы предоставить удовлетворительную теорию истинности высказываний, формулируемых в соответствии с условиями утверждаемости Витгенштейна, т.е. путем коллективного следования правилам употребления языковых выражений. Иными словами, требуемая здесь теория истины должна объяснять, каким образом могут являться истинными высказывания, употребляемые членами языкового сообщества.

Представляется, что такой теорией могла бы быть релятивистская теория корреспондентной истинности, согласно которой понятие истины может быть представлено как трехместное отношение между языковыми предложениями, фактами внешнего мира и третьим термином (концептуальной схемой[13]), или непосредственно когерентная теория, согласно которой истинность высказывания определяется его согласованностью с определенным множеством высказываний. При этом, вероятно, вряд ли однозначно разрешим вопрос о том, экстраполируема ли когерентная теория из текста «Исследований» по более значимым основаниям, чем дефляционная. Однако несомненно, что теории истины, определяющие истинность высказывания через его роль и место в некоторой концептуальной системе, более полно отвечают содержащемуся для нас в «Исследованиях» требованию идентификации фактов через анализ использования выражений, заключающих об этих фактах, и условий их истинности. Конституирующее (для определенного сообщества носителей языка *L*) истинность множество высказываний — множество всех высказываний, тривиальным образом истинных для всех носителей языка *L*, или область пересечения индивидуальных концептуальных схем носителей языка *L* — может в наиболее общем виде быть описано с помощью интенсиональной функции, областью определения которой будет множество всех возможных правильных высказываний языка *L*, а областью значения — множество всех возможных истинных референций, выражаемых на этом языке. Логика нашего языка предполагает эти референции: таким способом конституируется все, что мы можем сказать о мире.

Таким образом, анализ применимости дефляционной теории для обоснования условий утверждаемости позволяет заново поставить вопрос: влечет ли за собой признание социокультурной детерминации значений полный отказ от ментализма? Представляется, что приведенная аргументация свидетельствует в пользу более сложного, чем простое утверждение или отрицание, ответа на этот вопрос; ответ, наиболее полно учитывающий обстоятельства употребления знака, явился бы, вероятно, важнейшим результатом обсуждения проблемы следования правилу.

Примечания

[1] *Stroud B.* Wittgenstein's philosophy of mind // Contemporary philosophy. The Hague, 1983. V. 3. P. 329.

[2] *Baker G. P.* Following Wittgenstein: Some signposts for Philosophical Investigations, §§ 143—242 // Wittgenstein: To follow a rule. L. etc., 1981. P. 43.

[3] *Baker G. P., Hacker P. M. S.* Scepticism, rules and language. Oxford, 1984. P. 2.

[4] *Kripke S.* Wittgenstein on Rules and Private Language. Oxford, 1982. P. 68.

[5] *Kripke S.* Wittgenstein on Rules and Private Language. P. 5.

[6] *Boghossian P. A.* The rule-following considerations // Mind. № 98 (392), 1989. P. 507—549.

[7] *Candlish S.* Wittgensteins Privatsprachenargument // *Savigny E. von* (Ed). Wittgensteins Philosophische Untersuchungen. Berlin, 1997.

[8] *Kripke S.* Wittgenstein on Rules and Private Language. P. 11.

[9] *Goodman N.* Fact, Fiction and Forecast. 4th edition. Indianpolis, 1983. P. 93 — 95.

[10] *Kripke S.* Wittgenstein on Rules and Private Language. P. 21.

[11] *Horwich P.* Truth. Oxford, 1990.

[12] *Stoljar D.* Deflationary Theory of Truth. URL: http://plato.stanford.edu/entries/truth-deflationary.

[13] *Лебедев М. В.* Стабильность языкового значения. М., 1998. С. 100—120.

КОММЕНТАРИИ

Г. Б. Гутнер

Проблема следования правилу, рассматриваемая в настоящей работе, есть, на мой взгляд, одна из возможных интерпретаций одной из наиболее традиционных философских проблем — проблемы тождества. Весьма часто употребляемое выражение «то же самое» оказывается, при подробном рассмотрении, весьма загадочным.

Впервые его загадочность была отмечена Боэцием, сформулировавшим проблему универсалий. Как можно установить, что два нумерически разных предмета принадлежат к одному виду? Такой вывод может быть сделан, если они обладают *одним и тем же* видовым признаком, т. е. являются тождественными по сути. Все предложенные Боэцием варианты определения одного и того же (или того же самого) оказываются парадоксальными и упираются в несопоставимость заведомо различенных сущностей (см. *Боэций.* Комментарий к Порфирию // *Боэций.* Утешение Философией и другие трактаты. М., 1990. С. 40—48, а также *Майоров Г. Г.* Судьба и дело Боэция. Там же).

Эта же трудность была воспроизведена Юмом, правда, в совершенно иной интерпретации. Описывая причинную связь как устойчивую зависимость между явлениями *одного и того же* типа, он обратил внимание на то, что наша способность идентифицировать явления как одни и те же не имеет под собой никакой реальной основы и может быть, в лучшем случае, лишь делом привычки. Иными словами, такая идентификация всегда остается случайной.

Кант попытался преодолеть скептицизм Юма указанием на то, что причинно-следственная связь есть особая конструкция, создаваемая субъектом на основе априорной схемы. Тождественность явлений есть, по Канту, тождественность схемы конструирования или схемы действия. Априорность схемы гарантирует от того, что вывод о связи явлений может оказаться случайным. Но проблема все же остается.

Витгенштейновский скепсис относительно возможности следования правилу есть, по существу, критика кантовского решения проблемы тождества.

Коль скоро два действия различены по времени (как, например, в случае выписывания одного за другим членов числовой последовательности), то как можно удостовериться, что определяющая это действие схема одна и та же? Правило, сообразно которому совершается некоторая операция, всегда оказывается локализовано во времени и, совершенно невозможно придумать критерий для его сопоставления с правилом, которое было применено раньше. Заметим, кстати, что правило (или схему) можно с равным успехом считать как априорным, так и конвенциональным. В последнем случае лишь добавится весьма неприятный вопрос: как возможна конвенция? Ведь если нет критериев отождествления, то весьма сомнительной оказывается база для соглашения.

Г. А. Нуждин

При анализе проблемы следования правилу важно принимать во внимание ожидание и целеполагание.

Согласимся с тем, что можно — теоретически! — поставить в соответствие набору употреблений бесконечное количество правил. Так, для последовательности из n чисел существует бесконечное множество многочленов n-й степени, проходящих в 1,2,.., n через эти точки. Поэтому сколько ни было написано чисел , мы не можем быть уверены, что они лежат на многочлене малой степени, а значит, вероятность правильно продолжить последовательность равна нулю.

Мы доказали, что игра в продолжение последовательности заведомо проигрышна. Однако мы сами, регулярно играя в нее, выигрываем. Чудо происходит на каждом шагу! Напишем 2, 4, 6, 8, 10, 12,... и Вы, скорее всего, угадаете задуманное продолжение.

Следовательно, проблематичной является не возможность ошибиться, а возможность угадать. Казалось бы, у нас есть два хороших объяснения:

1. «Ментальные состояния» — не все последовательности для нас одинаковы. Некоторые обладают «смыслом», соответствующим определенному ментальному состоянию. Механизм угадывания основан на сходстве ментальных состояний разных людей.

2. «Практика употребления» — мы угадываем, потому что знакомы с ответом. Кто-то когда-то обучал нас или продолжал при нас эту последовательность, и мы можем воспроизвести увиденное.

Ясно, что во втором случае действительно непонятно, как угадывание может работать на бесконечном числе случаев (скажем, на очень больших числах). Ведь у нас нет их визуальной памяти. Видимо, ряд типа 996, 998, 1000, можно продолжить (как делают дети) и так: 996, 998, 9910, 9912,... Или вообще как угодно: 996, 1084, 2,... Тем не менее опыт показывает, что после серии ошибок за *конечное число шагов* люди научаются правильно продолжать такие последовательности, более того, они воспринимают их не просто как последовательности, а распознают в них «правило прибавления 2».

Если мы обладаем конечным числом правил, то можно утверждать, что игра в «угадайки» завершится за конечное число шагов. В противном случае она должна быть бесконечной — при условии, что мы имеем бесконечный горизонт ожиданий. Ведь когда мы угадываем, мы действуем не случайно, а исходим из каких-то предположений.

Следовательно, первая отмеченная нами некорректность постановки задачи о следовании правилу — в необходимости рассматривать (конечные) ожидания.

Второй предложенный в работе выход, как показывает автор, является попыткой элиминирования «ментальных состояний». Такая попытка, однако, некорректна сама по себе. Действительно, для реализации выхода «практика употребления» человек должен обладать как минимум двумя способностями:

а) способностью ухватывания и удержания ситуации;

б) способностью воспроизведения ситуации.

Что, впрочем, есть «ситуация»? Как в контексте повседневной деятельности можно ее ухватить и изолировать, не прибегая к ментальным репрезентациям? Теория стимула и реакции здесь не помогает, поскольку в ней тоже должен быть заложен механизм распознавания образцов.

Следовательно, поставленная Витгенштейном проблема действительно нацелена *не* на критику ментализма. Ее цель — выявление двух типов ситуаций: когда угадывание является осознанной деятельностью и когда угадывание происходит неосознанно (хотя и является механизмом сознания!).

Неосознанное угадывание, по Витгенштейну, является не угадыванием, а одной из социальных практик вроде умения есть ложкой. В этой практике все же есть какой-то механизм («правило» — Г. Б. Гутнер, «идеальный проект» — Г. А. Нуждин), обеспечивающий ее стабильность. Этот проект — не абсолют, как и любая социальная практика. Однако должен существовать механизм сознания, этот проект создающий и исполняющий.

Такой механизм был описан Гуссерлем в «Феноменологии внутреннего сознания времени» и состоит он из двух структур: удержания проекта (ретенции) и воспроизведения его как ожидания (протенции).

Для того чтобы понятие проекта вообще было содержательно, необходимо предположить осмысляющую (придающую целостность и соотносящую с другими смыслами) интенцию. Иными словами, осознанное угадывание обязательно предполагает конституирование нового проекта. Это конституирование происходит только при затруднении: наши ожидания (известные проекты) не способны дать нам однозначное продолжение последовательности. А значит, неосознанное употребление всегда дает однозначное продолжение последовательности.

Отсюда ответ на вопрос, сформулированный Крипке: мы можем быть уверены, что до сих пор под «+» понимали плюс, а не квус потому, что у нас не возникало осознанных затруднений в применении этой операции. Т. е. *отсутствие факта, демонстрирующего наше возможное неверное употребление плюса, является гарантией его верного употребления.*

Аналогично разрешается парадокс следования правилу. Чтобы проект попал в сферу наших ожиданий, он должен быть сперва угадан. Для этого необходим хотя бы один прецедент употребления данного проекта в данной ситуации. Поэтому если при объяснении правила «прибавление единицы» мы ни разу не прибавили двойку, то возможность прибавления двойки после 1000 окажется для ученика в данной ситуации просто немыслимой.

Вернемся к осознанному продолжению. Затруднение, связанное с отсутствием однозначного продолжения, не разрешается «просто так» — мы руководствуемся определенными целями. Скажем, если нас попросят дорисовать половину картины по отрывочным линиям, мы сначала поинтересуемся, кого надо дорисовывать, в какой манере и т.д. Если требуемый стиль нам непонятен (отсутствует в сфере ожиданий), нам вообще не удастся продолжить картину. Пусть *А* пишет на доске 1, 3, 5, 7, и у *Б* возникают две гипотезы: нечетные числа и нечетные простые. Если *А* напишет затем 9 или 11, затруднение разрешится однозначно, однако если *А* напишет 7.38, то *Б* справедливо возмутится: «А я был уверен, что мы играем в целые числа».

Поэтому для корректной формулировки задачи продолжения необходимо учитывать и аспект наличия осмысляющей интенции — предположения, что данная игра имеет определенный смысл.

ОТВЕТ АВТОРА

Спасибо за интересные комментарии.

Отмеченная параллель между проблемой следования правилу и проблемой тождества весьма содержательна. Основное различие здесь состоит в том, что последняя традиционно анализируется в категориях признаков или свойств (см.: *Forrest P.* Identity of Indiscernibles // Stanford Encyclopedia of Philosophy. URL: http://plato.stanford.edu/entries/identity-indiscernible/). Если для каждого свойства F предмет x обладает F тогда и только тогда, когда предмет y обладает F, то x идентичен y:

$$(F)(Fx \longleftrightarrow Fy) \longrightarrow x = y.$$

Витгенштейн переносит рассмотрение проблемы в процессуальный, или инструментальный, аспект. При этом априоризм Канта ему, вероятно, не ближе, чем платонизм Боэция, и его скепсис относительно возможности следования правилу, наверное, может быть рассмотрен и как критика кантовского решения проблемы тождества. Однако в центре внимания Витгенштейна, конечно, проблема значения, и скорее он отталкивается от индуктивного парадокса Юма (последнему также принадлежит введение в философский обиход эксплицитного понятия конвенции). Напомню, что, по мнению Крипке, аналогия между скептицизмом Витгенштейна и Юма состоит в том, что оба они считают невозможным прямое решение своей скептической проблемы и предлагают ее скептическое решение; решение Витгенштейна включает (turns on) идею о том, что каждый индивид, о котором утверждается, что он следует правилу, может быть проверен другими. Более глубокое исследование роли индукции в проблеме следования правилу у Витгенштейна провел Криспин Райт (*Wright C.* Wittgenstein on the Foundations of Mathematics. Cambridge, MA, 1980). Я попытаюсь рассмотреть здесь наиболее общие соображения, возможные в этой связи.

Как могли бы эти соображения прояснить употребление выражений «если некто следует правилу, то он должен получить то-то и то-то» и т.п.? Возможно, под вопросом оказывается наша способность делать определенные утверждения о правиле. Есть ли основания полагать, что существует общее понимание правила? Если бы изменения в температуре комнаты были достаточно локализованы, то не имело бы смысла говорить о температуре комнаты. Но та возможность, к которой привлек внимание Витгенштейн, вероятно, есть возможность именно того, что изменения в понимании локализованы подобным образом («кластеризованы»?). Если мы не можем рационально исключить эту возможность, то мы не можем говорить об определенном значении выражения, так как значение выражения — это только способ, которым это выражение обычно понимается.

Это позволяет, по сути, предположить, что в основе комментариев Витгенштейна находится некоторый вид индуктивного скептицизма. Предположение могло бы быть усилено следующим образом. Витгенштейн, очевидно, отклоняет идею о том, что значение выражения — это нечто (что бы то ни было), что может быть легитимно рассмотрено как некоторое ограничение дальнейшего использования этого выражения. Один из способов поддержки этого представления заключается в предположении, что адекватная теория значения выражения должна на любой стадии являться теорией прошлых использований этого выражения. В этом случае каждое новое использование выражения было бы независимо от теории, данной ранее, и требовало бы уточнения и расширения этой теории. Конечно, решающим возражением на такое представление значения выражения был бы его конфликт со стандартными критериями того, что значит неправильно истолковать значение. Неправильно используя выражение, некто показывает, что он не понимает его, каким бы точным ни было знание этим человеком истории использования этого выражения. Знание значения есть знание о том, как сделать нечто: мы, как предполагается, знаем, как вообще должно использоваться это выражение.

Здесь важно заметить, что шаг от теории прошлого использования выражения к утверждению его общего использования является индуктивным. Знание, которое мы получаем, когда мы изучаем первый язык, скорее всего, является индуктивно обоснованными заключениями о том, как выражения должны вообще использоваться, и эти заключения выведены из нашего опыта этих выражений ранее. Таким образом, чтобы обладать тем же самым пониманием выражения, как и кто-то еще, надо сформировать, на основе соответствующего обучения, ту же самую индуктивную гипотезу о правильном использовании этого выражения. Но есть ли свидетельства в пользу того, что широкое семантическое разнообразие является действительной практической возможностью? Скорее напротив, все свидетельства, очевидно, указывают на то, что все мы имеем одни и те же индуктивные гипотезы. Добавляет ли Витгенштейн что-либо к индуктивному скептицизму относительно общих заключений о том, как выражение должно использоваться на основании образцов его применения?

Дело в том, что если бы Витгенштейн этим ограничивался, то этот скептицизм не имел бы никакого отношения к теории значения. Наиболее важна здесь предполагаемая равная валидность неопределенного числа несовместимых гипотез, каждая из которых удовлетворяет (фактическим) данным о прошлом использовании некоторого выражения. Любое количество таких гипотез может ожидать своего часа «Ч» в лингвистическом сообществе. Но, как показали Юм и Гудмен, такова ситуация с *любым* индуктивным выводом. Таким образом, может показаться, что адекватное возражение представлениям Витгенштейна (в их текущей интерпретации) будет состоять в том, чтобы решить проблему индукции, показав, что *не* всегда доступно неопределенное множество гипотез, которые на основе некоторой очевидности могут быть приняты с одинаковой рациональностью. Можно предположить, что хотя при попытке простой индукции мы сталкиваемся с бесконечным количеством возможных гипотез, лишь конечное число их относится к вероятным — таким, принятие которых на основе общедоступной очевидности было бы рационально. Такой тезис опровергает как индуктивный скептицизм вообще, так и специфический индуктивный скептицизм относительно значения. В последнем случае можно ожидать, если язык используется последовательно, что все разумные существа рано или поздно придут к одной и той же гипотезе.

Однако стоит заметить, что неправильно было бы отождествлять проблему представления взглядов Витгенштейна (в этой интерпретации) и проблему традиционных эпистемологических трудностей с индукцией. Если бы позиция Витгенштейна в вопросе о значении была позицией индуктивного скептика, то имелось бы важное различие между его концепцией и индуктивным скептицизмом вообще. Ведь откуда мы можем знать, какие из гипотез являются рациональными, каким образом они (рационально) совместимы с данными, которыми мы располагаем, и какие из них мы можем рационально устранить? Если вообще правомерно допустить, что на любой стадии процесса усвоения любого понятия мы сталкиваемся с неограниченным количеством возможных гипотез о его правильном применении, то такое же допущение должно быть сделано и относительно понятия рациональности, в особенности относительно понятия рационального индуктивного вывода. И теперь наша рациональность не может быть применена (во всяком случае, эмпириком) для сокращения числа возможных вариантов, так как самая рациональность остается для нас непроясненной.

Итак, возможно такое решение проблемы индукции, которое показывало бы, что всегда можно продвигаться, имея адекватные данные, к ситуации, где на основе этих данных осуществлен рациональный выбор только одной специфической гипотезы. Но такое решение не могло бы эффективно опровергнуть общий индуктивный скептицизм относительно идентичности определенных понятий у различных людей и в особенности относительно наших понятий правильного использования определенных выражений. Допустим, что мы полагаем проблему состоящей в объяснении идентичности понимания определенного выражения различными людьми и определяем эту идентичность как использование (намерение использования) в соответствии с одной и той же индуктивно достигнутой управляющей гипотезой. Но в этом случае у нас все еще не будет достаточных оснований предположить, что ситуация будет такова в каждом случае, когда мы достигли наших соответствующих гипотез вполне рациональными методами на основе достаточно широкого опыта. Этот ответ просто свел бы затруднение обратно к необходимости обоснования предположения о том, что мы действуем в соответствии с одним и тем же понятием рационального индуктивного вывода. Если мы представляем индуктивный скептицизм вообще как вопрос по существу: «Как мы можем рационально выбрать некоторую из неопределенного числа гипотез, которые могут быть использованы для объяснения определенного конечного множества данных?», то особенность его применения Витгенштейном (в настоящей интерпретации) такова, что к нему не применимо приведенное выше решение, которое было бы валидно для любого другого применения. У нас не будет оснований предположить, что все мы достигли одного и того же понимания некоторого выражения потому, что все наши заключения рациональны (если только у нас нет дополнительных причин считать их таковыми).

Парадоксальность взглядов Витгенштейна на эту проблему в привлечении внимания к возможности, которую в силу обычных критериев мы имеем основания исключить. Количество успешных лингвистических коммуникаций и разнообразие ситуаций, в которых они имеет место, составляют по любым обычным стандартам кардинально мощные индуктивные основания для того, чтобы предположить, что мы разделяем общее понимание большинства выражений на нашем языке. Кроме успешности нашего использования языка есть и независимые практические причины, чтобы предположить, что это, скорее всего, именно так.

И действительно, настоящая интерпретация идей Витгенштейна о следовании правилу находится в противоречии с его более поздним подходом к традиционным эпистемологическим проблемам. Некоторые из фрагментов «ФИ» можно считать прямо направленными против скептицизма. Но обсуждение парадокса следования правилу, тем не менее, позволяет все детальнее формулировать вопросы, возникающие в связи с проблемой значения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ КАК ПОНИМАНИЕ*

Нуждин Г. А.

1. Причины рассмотрения математической деятельности

1. Традиционное представление о математике как науке связано с понятием математического утверждения, доказательства. Рассматривая весь объем накопленного математического знания, мы должны говорить об утверждениях и способах рассуждения, эти утверждения доказывающих. Но что такое доказанное утверждение? Усмотрение доказательства — это процесс, деятельность; статичная же модель имеет дело лишь с **верой в то, что то или иное утверждение доказано.** Это необязательно будет вера в авторитет, возможно, это будет воспоминание о том, что мы сами когда-то доказали это утверждение. Однако может ли **само доказательство** присутствовать в нас так же, как присутствуют утверждения? Каков его бытийный статус?

Обращаясь к математике как к науке, мы сталкиваемся с расхожим представлением о том, что **математика — самая точная наука.** Но в каком смысле математика «точна»? Точны ее утверждения? Но мы ведь принимаем их на веру. Точны доказательства? Но, как пишет Смаллиан [1, с. 165], поскольку в повседневной практике мы не располагаем критерием «точности» доказательства, мы не всегда можем отличить истинное доказательство от неверного рассуждения.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (код проекта: 98—03—04230).

2. Представление о математике как о точной науке связано с **относительной неоспоримостью математического результата**. Утверждения, однажды вошедшие в математический обиход, не меняют свой облик в дальнейшем. Однако результат — это лишь продукт деятельности, ничего не говорящий нам ни о структуре, ни о способе протекания самой деятельности. Более того, результат — не источник деятельности, но лишь тормоз ее, поскольку он закрывает проблему, дав то или иное, но всегда единственное, решение ее. Математический результат особенно страшен тем, что не допускает иного результата, заранее отвергая любые попытки вернуться к уже рассмотренной проблеме.

Гротендик пишет о последствиях примата результата над самой деятельностью:

1. Печатаются только статьи, которые содержат новые факты (теоремы).

2. Математическое сообщество всегда находится в русле одного взгляда на мир. Все статьи, не укладывающиеся в этот взгляд, не проходят в печать.

3. В печать проходят статьи, из которых совершенно выхолощен сам дух исследования, предельно формализованные и канонизированные. Результат всегда преподносится «на блюдечке», вне осмысляющего контекста самой математической деятельности.

4. Современная математика редко выносит на обсуждение вопросы (проблемные статьи проходят в печать только под именем одного из 20—30 признанных авторитетов). Это приводит к тому, что сама деятельность, естественно состоящая из вопросов и ответов и осмысленная определенной целью, рушится как исследовательская деятельность и превращается в решение задач «с потолка», сформулированных научным руководителем или же по той или иной причине популярных [2, §§ 22—26].

Примат результата приводит также к представлению **о математике как исключительно кумулятивной науке**. Однако математическая деятельность несводима к накоплению результата. В математике нередки случаи «дублирования» понятий, когда один и тот же математический объект обладает двумя не сводимыми друг к другу описаниями, каждое из которых равноценно. Возможно и обратное: оказывается, что два результата из разных областей математики говорят об одном и том же (известный случай mirror symmetry).

Мы попытаемся выделить специфические черты математики именно как деятельности, исследования, разыскания. Это не означает, что мы отказываемся от рассмотрения феномена интерсубъективного результата, **мы отказываемся от редукции математики к результату, воплощенному в формальном выводе**.

3. Еще одним существенным моментом, заставляющим нас обратиться к математической деятельности, является **расхождение между формальным выводом (в частности, математической статьей) и реальной практикой ра-**

ботающих математиков (в частности, деятельностью семинаров). Известно, например, что доказательства, которые в ходу у математиков, зачастую отвергаются многими направлениями конструктивизма (в частности, все доказательства от противного). Однако сам прием ad adversum, который сам по себе чрезвычайно употребителен и полезен, требует объяснения как реально практикуемый и, стало быть, доказательный, понятный.

Наконец, мы хотели бы провести анализ математического понимания, выделив в нем те черты, что роднят его со знанием (фиксируемость, воспроизводимость), и специфически нестабильные черты, которые мы называем «мерцающими». Иными словами, мы попытаемся объяснить две вещи: 1) как возможно интерсубъективное понимание; 2) почему понимание всегда ограниченно и нестабильно.

2. Деятельность как феномен исполнения

Математическая деятельность всегда имеет дело с определенным материалом — утверждениями, подлежащими доказательству и проверке. Доказывая их, мы не имеем право выдумывать, нести отсебятину: нам предписано в точности следовать их внутренней логике. Каким образом мы располагаем этой логикой? Мы будем вслед за Гуссерлем [3] считать, что она дается нам в виде смысловых единств и их связей. Все смысловые единства, воспринятые или созданные субъектом, образуют «горизонт» известных возможностей-альтернатив. Этот горизонт непостоянен, он может расширяться за счет включения нового знания (альтернатив).

Под математической деятельностью мы будем понимать деятельность по изменению горизонта математических альтернатив.

Чтобы подчеркнуть зависимость от исходного материала, мы будем характеризовать ее как деятельность исполнения. В этом отношении исполнение математической задачи близко к исполнению музыкального произведения: в обоих случаях материал (условие теоремы, нотный текст) дан нам в скрытом виде и неясно, как к нему подступиться, с чего начать. Даже если у нас есть текст доказательства, прочтение текста не гарантирует раскрытия, понимания материала. И напротив, часто бывает, что задолго до окончания текста мы уже понимаем доказательство и принимаем его. Отсюда видно, что для принятия материала как альтернативы необходим дополнительный акт.

Каков этот акт, мы и попытаемся выяснить.

1. Что представляет собой деятельность исполнения? По необходимости, это следование исходному материалу в соответствии с его внутренней структурой. Почему мы обязаны включить в исполнение представление о внутренней структуре, об определенной сложности материала? Действительно, пусть такой структуры нет. Представим себе, что мы находимся на каком-то этапе исполнения. Заметим, что исполненный материал нами никоим образом не фиксируется, так как фиксация — это уже структурирование, выделение единства. Казалось бы, нам доступно восприятие последнего исполненного акта, однако такое восприятие бессодержательно: мы не способны сказать, что мы исполнили. Ведь любая характеристика действия также означала бы структурирование материала.

В этих условиях исполнение следовало бы мыслить как нечленимый акт, относительно которого невозможно даже сказать, произошел он, или нет. Так, если мы не обладаем (осмысляющим) представлением о мелодии, музыкальное произведение невозможно исполнить, его можно лишь отобразить в последовательность звуков. Неважно, на какой ноте закончится произведение, повторится ли оно несколько раз (о чем невозможно будет судить на уровне исполнения).

Строго говоря, о следовании материалу можно говорить лишь при наличии выбора, то есть, когда существует сама возможность верного/неверного следования. Выбор же в точности означает создание структуры возможностей.

Итак, под исполнением мы будем понимать деятельность по наделению материала (смысловой) структурой.

2. Обратимся к единичному акту выбора. Он определяет дальнейшее развитие исполнения и потому должен быть связан с некоторым фиксированным значением — уже исполненным материалом. В противном случае, исполнение распалось бы на две несвязанные друг с другом части. Тем самым исполнение предполагает фундаментальную способность сознания фиксировать значение (*тему* актуального сознания [4, с. 14]).

Откуда возникают альтернативы выбора? Во-первых, определенный набор альтернатив всегда существует как «горизонт» знания. Некоторые из них структурно связаны с фиксированным значением и могут быть актуализированы (вопрос о том, каким образом актуализируется именно эта альтернатива мы оставляем открытым). Также мы располагаем «пустой» альтернативой, неожиданной возможностью. В этом случае мы замечаем, что ни одна из известных альтернатив нам не подходит, однако альтернатива должна существовать. Например, есть неправильное доказательство того, что все тупоугольные треугольники — равнобедренные. Это доказательство опирается на представление о том, что серединные перпендикуляры обычно пересекаются внутри треугольника. Человек, никогда не сталкивавшийся на практике с тупоугольными треугольниками, скорее всего не сможет вообразить, что серединные перпендикуляры способны пересечься вне треугольника, однако, побуждаемый парадоксальным фактом, возможно, придет к необходимости проверить эту альтернативу.

Отметим, что исполнение предполагает не фиктивный, а реальный выбор альтернатив, то есть, если мы заранее знаем, какая альтернатива верна, никакого выбора не произойдет. Выбор, поэтому, всегда должен задействовать неожиданную альтернативу, создавать непредвиденную возможность (хотя, возможно, дублируя какую-нибудь возможность, существующую на горизонте). **Тем самым исполнение является деятельностью по произведению, а не воспроизведению альтернатив.** В дальнейшем мы увидим, что это серьёзное требование приводит к мерцанию (нестабильности) исполнения.

Альтернативы могут появляться на горизонте не только как результаты выбора, но и как результаты конституирующей интенции (определения). Например, на вопрос «что такое эллиптическая кривая», можно ответить: «это тор». Такое определение будет воспроизводимо (вне иных структурных связей), однако, само по себе, не повлечет за собой *произведения* структуры, то есть, будет совершенно бессмысленным. Тем не менее, определение может быть осмыслено («а почему эллиптическая кривая — это кривая?») за счет интенции, направленной на раскрытие содержания (интереса).

За этапом постановки альтернатив следует собственно выбор — полагание (смысловой) связи одной из альтернатив с фиксированным значением. Эта альтернатива может присоединяться к горизонту уже известных альтернатив в рамках структуры исполнения. Это произойдет только в том случае, когда у нас уже нет причин сомневаться в ясности выявленной структуры. Скажем, если при доказательстве утверждения у нас не возникло больше вопросов, мы прерываем доказательство и с этого момента можем воспроизводить само утверждение как известную альтернативу. Так будет продолжаться, пока это утверждение не актуализируется как по каким-то причинам неясное.

Возникшее сомнение вынуждает нас пытаться раскрыть утверждение в систему альтернатив. Фактически, этап сомнения и этап воспроизведения всегда находятся в противофазе: мы не способны пользоваться структурой, пока она неясна, а значит, не принадлежит горизонту известных, и напротив, каждое воспроизведение структуры утверждает ее как ясную и не требующую уточнения.

Акт присоединения утверждения к горизонту известных альтернатив мы назовем соглашением.

3. Каждый акт исполнения имеет форму «так, а не иначе». Например, теорема Пифагора может осмысляться в контексте «для непрямоугольных треугольников сумма квадратов двух сторон не может равняться квадрату третьей, в отличие от прямоугольных, где две такие стороны заведомо найдутся». Пара «исходная альтернатива»/«альтернативы оппозиции» образует категорию (например, все треугольники), в рамках которой они противопоставляются по определенному признаку (упомянутое равенство).

Отсюда видно, что решающую роль несет не сама альтернатива, а объемлющая категория и определяющий признак. Можно ввести понятие точности: насколько однозначно определяющий признак классифицирует альтернативы. Так, формула $sgn(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)$ более точно, чем теорема Пифагора (на три группы) классифицирует треугольники; в неевклидовой геометрии, напротив, возникает необходимость иной формулы (уточнения).

За счет чего утверждение становится более точным? За счет раскрытия, расширения смысловой структуры — чем большее количество связей создает структура, тем точнее становится формулировка. Математика, по сути, все время движется по пути уточнения уже воспринятых однажды структур. Заметим по ходу, что в естественном языке существует тот же критерий точности, например, при отгадывании загадки «зимой и летом одним цветом» ответ «елка» воспринимается как более точный, чем «фонарный столб» — потому что елка — дерево, а среди деревьев есть те, что сбрасывают листву (меняют зимой цвет). Фактически, ответ «елка» подразумевает раскрытие «елка, а не береза — в классе деревьев», в точности так же, как в теореме Пифагора фигурирует «прямоугольный, но не иной треугольник».

Ответ «фонарный столб» в загадке про елку неинтересен, поскольку никоим образом не провоцирует раскрытие смысловой структуры. В математике также возможны «неинтересные» ответы на вопрос. Например, раздутие многообразия в подмногообразии интересно только в коразмерности >1, иначе результат — исходное многообразие не приведет к созданию новой структуры и новой альтернативы.

4. В пунктах **1—2** мы показали, что деятельность исполнения — это не воспроизведение структуры (альтернатив), а ее производство. Созданная в результате исполнения структура присоединяется к горизонту уже известных альтернатив и может точно воспроизводиться как и любая альтернатива. Повторное исполнение той же альтернативы, однако, может привести к созданию существенно другой структуры.

Так, А. Гротендик называет эти структуры «плодотворными точками зрения» на проблему. Однозначность постановки проблемы не препятствует появлению различных точек зрения на нее. В качестве элементарного примера можно привести два доказательства (исполнения) Основной теоремы арифметики — классическое, основанное на теории идеалов, и с помощью минимального числа. Если первое доказательство выявляет существенную зависимость разложимости на простые множители и алгоритма Евклида, то во втором доказательстве этот алгоритм заложен неявно, что затрудняет обобщение и понимание этой теоремы.

Мы изучили структуру единичного акта выбора. Теперь попытаемся понять, как начинается и заканчивается деятельность исполнения.

Ясно, что исполнение предполагает некий исходный материал (например, условие или доказательство теоремы). Полное приятие этого материала как такового означает, что мы не намерены производить дальнейшее структурирование, и, тем самым, нет возможности для исполнения. Для исполнения необходимо осознание материала как неясного, спорного, интересного («Каждое смутное, пустое, неясное сознание с самого начала есть сознание о том-то и том-то, поскольку отсылает к *некоторому пути прояснения*» [5, с. 18]). Это предполагает некую конституирующую интенцию, направленную на раскрытие содержания.

Определим интерес как полагание потенциально существующей смысловой структуры. Тогда очевидно, что **деятельность исполнения невозможна без интереса**.

Можно предположить, что исполнение вызывается интересом и прекращается с отсутствием интереса. В частности, доказательство кончается не тогда, когда иссякает текст, не тогда, когда «нечего больше доказывать», а когда ни одна из альтернатив не полагается потенциальной неясной и сложной. Скажем, доказательство Основной теоремы арифметики может оборваться на этапе постановки задачи («это и так очевидно»), в момент доказательства какого-то «ключевого» утверждения типа не существует простых $p_1p_2 = p_3p_4$ («остальное ясно») и т.д. Необходимость расшифровки возникает из-за активности интереса и в принципе не ограничивается сферой известных альтернатив. Например, в упомянутой теореме можно задаться вопросами «а для каких структур верна теорема?», «что такое простое число?».

Характерно, что конституированная интересом (смысловая) структура описывает лишь часть внутренних отношений исследуемого материала, а именно актуализированные в рамках той или иной объемлющей категории. Гуссерль пишет о «бесконечно открытой системе возможных восприятий как таковых» [5, с. 19], понимая под восприятием смыслопорождающие акты. Интерес поэтому есть не полагание той или иной структуры, но полагание возможности бесконечного раскрытия.

5. Когда мы что-то доказываем, «объект» исполнения — готовое доказательство — в определенном смысле «скрыт» от нас. Что-то уже ясно, а что-то нужно прояснить, понять, доказать. Иногда мы понимаем, что надо доказать, иногда нет. Понимание может «прийти» в самый загадочный момент — на ступеньке омнибуса (Пуанкаре), перед сном (Гротендик) и т.д. Но разве процесс доказательства обрывается между двумя последовательными шагами понимания? Нет, он «мерцает».

Мерцание — это специфический способ существования феноменов исполнения. С одной стороны, мы говорим об исполнении одной и той же вещи; как мы показали, можно говорить даже о более или менее точном исполнении. С другой стороны, точное исполнение не всегда воспроизводимо: зафиксированная в результате исполнения логика (структура) не гарантирует нам способность повторить ее.

Действительно, воспроизведение структуры предполагает осознание ее как структуры, актуализацию отношений «так, а не иначе». Для этого необходимо убеждение в том, что «иначе» потенциально возможно, в противном случае это «иначе» не может быть осмыслено как альтернатива. Это показывает, что уже зафиксированный выбор «так, а не иначе» не может быть решающим, не может служить этапом исполнения как структурирования.

На практике зафиксированная структура исполнения только вредит новому исполнению, создавая «эффект зубрежки»: воспроизведение логики не гарантирует истинного понимания. Известный экзаменаторам прием — слегка изменить условие и проверить, сможет ли отвечающий скорректировать решение, как раз выявляет этот эффект. Ведь в процессе воспроизведения логики структура не производится, стало быть, не происходит актуализация никакого частного вопроса. Изменение же условия, неясное в исходной целостности, проявляется именно в процессе исполнения на этапе актуализации частных альтернатив.

Какой же смысл имеет зафиксированное решение задачи, если оно не облегчает процесс решения-исполнения? Ясно, что, исполняя решение, мы встаем перед рядом уже наличных альтернатив, которые нужно заново переосмыслить и актуализировать как результаты выбора. Поэтому по сути наличные альтернативы являются не решением, а условием задачи, которую нужно исполнить этим вот конкретным способом. На самом деле, усложняя с помощью решения условие, мы упрощаем осмысление и постановку задачи, поскольку исходная целостность задачи разбивается на множество (более простых) подзадач. При этом устраняются ошибки постановки задачи.

Мерцание смысловой структуры отличается от ее потенциальности. При том, что потенциальное существование такой структуры обеспечивается интересом, ее *реализация* в одних и тех же условиях может привести к разным результатам, поскольку актуализация каждого выбора нерегулярна. Человек, однажды доказавший теорему о неявной функции, может воспроизвести ее как следствие теоремы о ранге, как следствие принципа сжимающих отображений или вложенных отрезков и т.д. В доказательстве могут быть ошибки (неверный выбор), неточности (не все выборы задействованы). Тем не менее, мы можем говорить об исполнении одной теоремы.

6. Каким способом можно «справиться» с мерцанием?

Как только созданная структура нами фиксируется, она становится понятной, а, значит, неинтересной. В противном случае интерес должен был продолжить процесс структурирования. Для того, чтобы попытаться заново понять эту структуру, нам необходимо заново заинтересоваться ею.

Обладаем ли мы какой-нибудь способностью, позволяющей заинтересоваться неинтересным? Ясно, что интересование предполагает то, что мы перестаем понимать, как эта структура работает, то есть, мы перестаем понимать ее как структуру в рамках привычной нам системы значений. Следовательно, эта способность по сути должна «выключать» данную структуру из числа привычных.

Это может происходить лишь за счет «усилий сознания», и этому обязательно предшествует «остановка мысли». Приведем аналогию: ведь часто бывает, что мы не замечаем, как пришли домой. Уже в квартире, закрывая дверь, вдруг осознаем, что не помним, как мы шли, что видели по дороге. Мы дошли «автоматом», слепо воспроизводя когда-то усвоенный маршрут. Однако, если на нашем пути перекроют движение, уберут ориентиры, нам придется остановиться, чтобы подумать, как идти дальше.

Следовательно, остановка всегда связана с нарушением привычной последовательности. Но мы сами не в состоянии нарушить привычное, для этого необходимо «событие со стороны». Ведь привычное для нас не исполняется, то есть, не структурируется, а всего лишь актуализируется. В привычном нет структуры, элементов, на которых можно было бы остановить внимание. А значит, мерцание нашими силами неустранимо[1].

7. Как можно «остановить» исполнение? Создает ли оно какие-либо «вещи»?

В результате каждого акта соглашения на горизонте появляются новые альтернативы, связанные определенной структурой. Эту структуру легко выявить в **не**формальной записи доказательства, в описании маршрута и т.д. Так, доказательство распадается на «предложения», «леммы». Также для математических утверждений характерны фразы типа: «доказательство распадается на три этапа», «откуда могло возникнуть такое требование?», «нам надо добиться того, чтобы...», «заметим, что..» [6, с. 252, 253]. Видно, что эти фразы служит либо для структурирования частей, либо для фиксации и актуализации тех или иных значений.

Показательно, что смысловая структура исполнения — целевая («дойти до дома», «показать, что сумма стремится к 0»), поэтому формальная часть («где пересечь улицу», «какую подпоследовательность выбрать») может варьироваться в определенных границах. На равнодушие в выборе того или иного средства указывают и такие расплывчатые термины как «хорошая функция», «подходящий морфизм»... Цель, мета («предмет» у Гуссерля) любого исполнения — создание самой точной структуры, неподверженной сомнению. Ясно, что мета исполнения — понятие условное, поскольку сомнение всегда возможно. Однако говорить о мете осмысленно, поскольку деятельность исследователей интерсубъективно устремлена к ней.

Замечательным критерием, объединяющим математическое и гуманитарное доказательство, является полагание меты как возможности неограниченного обобщения (ср. [5, с. 17—18]). В то же время, математику отличает представление о наличии минимальных структур, не подверженных сомнению. Философское доказательство может быть пересмотрено хотя бы в силу вербальности — каждое слово потенциально раскрывается до бесконечности. Математическое «слово», напротив, способно вступить в конечное число структурных связей. Поэтому, когда мы употребляем расплывчатые термины, это отчасти оправдано возможностью конкретизировать, исполнить их. Однако, в силу мерцания исполнения, эти термины не обязаны наделяться одним и тем же содержанием.

Так, «хорошая функция» в разных пространствах будет реферировать разные вещи. Может случиться и так, что в данной ситуации хороших функций не окажется в принципе, хотя мы и будем полагать их существование. Известен случай, когда относительно некоторых пространств было доказано[2] множество интересных фактов, пока не выяснилось, что таких пространств вообще не бывает. Отметим, что доказательства не потеряли своей убедительности — они стали неинтересны для сообщества. Однако на локальном уровне (как меты дальнейшего осмысления) эти пространства непротиворечивы и существуют, и даже уточняемы, при условии, что какой-то математик заинтересуется ими.

8. Фиксируем момент принятия соглашения, когда мы полагаем, что достигли максимально возможной на данном этапе точности. Тем самым исходный вопрос предстал нам в разъясненном виде, когда мы уже все понимаем в нем, и, стало быть, способны работать с ним как со знанием, с известной альтернативой на горизонте. Поэтому созданная нами альтернатива, относительно которой точность достигнута, **уже не является для нас чудесной, совпадает с нашими ожиданиями**. Иначе с неизбежностью она стала бы для нас событием, вынудила бы к дальнейшему раскрытию.

Деятельность исполнителя есть постоянный выбор между альтернативой, диктуемой материалом, и одной из альтернатив, имеющихся на горизонте. Если первую альтернативу мы назвали чудесной, вторую следует назвать ожидаемой. Если деятельность происходит, она неизбежно должна содержать оба плана: как план чудесного, так и план ожидаемого, то есть, **непосредственно сознательная деятельность есть деятельность по конструированию ожидаемой ситуации**. Ожидаемую последовательность раскрытия альтернатив мы назовем идеальным планом.

Это название легко объяснить. С одной стороны, идеальный план — это план, проект развертывания, с другой стороны, он никогда не происходит, поскольку событие всегда вносит свои корректировки. Идеальный план определивает событие, принципиально неуловимое для нас, и превращает его в объект, с которым можно работать, в последовательность известных альтернатив.

Гуссерль называет идеальные планы конкретных содержаний предмета протенциями [7, с. 56], основанными на ретенциях, «следах», которые оставила однажды увиденная вещь. Строго говоря, феномены неповторимы, каждое новое видение — новое событие для нас, однако увиденное нами воспроизводимо за счет ретенций. Характерный пример [8, с. 13] — коробок спичек, у которого мы всегда видим (феноменально) три грани, хотя знаем (идеальный план), что их шесть. «Дорисовывание» трех невидимых граней и есть развертывание идеального проекта. В отличие от Гуссерля, мы будем связывать протенции не с каждым конститутивным актом, направленным на раскрытие конкретного содержания, а с направленностью на сам предмет интереса.

Идеальный план математической задачи — это проект ее решения. Если задача «не решается», это означает, что на горизонте нет обозримых альтернатив к проблеме, то есть, возникает событие непонимания, исполнения. И напротив, если задача решается до конца без проблем, это означает, что никакого исполнения в процессе решения вообще не происходило.

Идеальное положение дел может также «наложиться» на реальное. Поскольку мы оперируем нашим миром в терминах наличных альтернатив, мы можем попросту не увидеть реальной проблемы, обойти ее. Например, человек, знающий, что интеграл от $1/x$ на отрезке [0,1] расходится, может счесть расходящимся и интеграл от $1/x$ на отрезке [-1,1], как составленный из двух расходящихся интегралов. Однако из геометрических соображений видно, что в силу симметрии он равен нулю. Произойдет ли событие понимания, или идеальный план наложится на реальность, предсказать невозможно, так как событие мерцает.

Понятие идеального плана позволяет нам решить скептический парадокс Витгенштейна [9]. Пусть учитель объясняет ученику правило прибавления 1 и демонстрирует ему это правило для небольших чисел. Почему ученик не может превратно истолковать правило, переформулировав его как «прибавление 1 для чисел меньших 1000 и прибавление 10 для чисел больших 1000»?

Потому что видоизменить правило может только событие, которое сконструирует новую альтернативу. Если альтернативы «прибавление 10 для чисел больших 1000» не было на горизонте, а она *обязана отсутствовать* в силу методики обучения, она не может возникнуть сама по себе. Ошибка учителя, прибавившего вместо единицы 10, может привести к непониманию правила, а, стало быть, и к событию рождения альтернативы. Однако при четком объяснении скорее всего произойдет обратное: идеальный план, сконструированный объяснением, *не позволит ученику увидеть ошибку* (что, кстати, чаще всего и происходит в школе).

9. Фиксировав доказательство в структуре, мы обрели метод, обеспечивающий нам воспроизводимость. Заметим, что фиксируется не мета понимания, на раскрытие которой ориентировано доказательство, а логика, сформированная последовательным раскрытием альтернатив исходной проблемы. Таким образом, фиксированное нами имеет дело не с реальностью происходящего, а с идеальностью соглашения, и именно в силу этого факта не мерцает. Более того, зафиксированное нами соглашение интерсубъективно, то есть, последовательность новых альтернатив неизменным образом присоединяется к горизонту всех участников исполнения. Это требует объяснения.

Действительно, альтернатива рождается через событие выбора. В результате любого события некоторой фиксированной альтернативе сополагается другая, поэтому для интерсубъективности необходимо: 1) совпадение фиксированной альтернативы и 2) совпадение ассоциированной с ней структуры. Первое условие заведомо выполняется в случае математического значения, в силу его асемантичности: математическое значение само по себе бессодержательно и потому едино для всех субъектов. Т. е. постановка исходного вопроса, интересной на данный момент альтернативы, предполагает не раскрытие ее «внутренней сущности», а связывание ее с другими альтернативами. Поэтому не существует «субъективного» математического значения, скажем, «моей» или «твоей» непрерывной функции[3].

Совпадение же ассоциированных структур вытекает из их совпадения на каждом конкретном этапе структурирования. Действительно, единичный этап структурирования имеет форму «так, а не иначе». Его семантическая нагруженность ограничена этой бинарной оппозицией. Поэтому, если уж структурирование на даном этапе произошло, то оно однозначно. Совпадение структур, тем самым, зависит от того, произошло ли структурирование на одних и тех же этапах или нет. В математической практике существует аналогичное правило «использовать все условия задачи», т. е. в процессе исполнения поставить все необходимые альтернативы.

За счет чего соблюдается «правильная» последовательность структурирования? За счет постоянного взаимодействия с материалом, который указывает, какое место является ключевым этапом, вопросом, подлежащим структурированию. На семинаре источником вопросов служит докладчик, в статье — способ организации материала (теоремы, леммы, следствия). Как мы указывали в п. **6**, фиксация вопроса может и не произойти в силу мерцания интереса к нему (что и является источником непонимания и ошибок). Однако, если фиксация произошла, раскрытие вопроса интерсубъективно.

Раз нам удалось добиться воспроизводимости и интерсубъективности, мы вправе говорить о методе как сценарии развития всех сходных ситуаций. Иными словами, зафиксировав логику, мы получили инструкцию по применению нашей задачи к любому конкретному случаю, причем эта инструкция не нуждается в дополнительном обосновании или проверке.

Примечания

[1] Впрочем, А. И. Введенский пишет о некоем «пристальном вглядывании» в предмет, которое приводит к тому, что он выпадает из сферы привычного, теряет функциональное единство и предстает перед нами в абсурдном асемантичном виде — как «вещность». Об «экзистенциальном ужасе» как выпадении из сферы привычного взаимодействия с миром пишет и Камю. Однако литература свидетельствует о том, что все эти состояния «находят» на человека, а не продуцируются им, подобно тому, как на математика может «найти» непонимание того, как доказывается элементарнейшая теорема алгебры.

[2] По модулю их существования.

[3] Если в естественном языке возможно рассуждать на тему «правда ли, что мир — это сабля» за счет полагания какой-то иной семантики слова «сабля», то в математике это невозможно, поскольку за любым математическим значением не полагается ничего иного, кроме определяющего его контекста.

Список литературы

1. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр. М., 1985.
2. *Гротендик А.* Урожаи и Посевы. М., 1996. Ч. 1.
3. *Гуссерль* Э. Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии // Язык и Интеллект. М., 1996. С. 54, 57.
4. Ч*ерняк А. З.* Проблема оснований знания и феноменологическая очевидность. М., 1998.
5. *Гуссерль* Э. Парижские доклады // Логос. М, 1991. № 1. С. 8—30.
6. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии, М., 1989.
7. *Гуссерль Э.* Феноменология внутреннего сознания времени. М., 1994.
8. *Гуссерль Э.* Феноменология // Логос. М, 1991. № 1. С. 12—20.
9. *Витгенштейн Л.* Философские работы. М., 1994. Т. 1. С. 163—164.

8 Зак. 3711

КОММЕНТАРИИ

С. Н. Бычков

В работе предпринята попытка проанализировать особенности математической деятельности на основе восходящего к Гуссерлю понимания ее как деятельности по изменению горизонта математических альтернатив. Нет необходимости доказывать актуальность подобного начинания. И дело здесь не столько в авторитете Гротендика (или Декарта, Лейбница и Эйлера, которые придавали существенное значение процессу получения математического результата), сколько в важности подобного рода исследований для преподавания математики. По-видимому, на данный момент не имеется ни одного примера крупного математического открытия, автор которого продемонстрировал бы, что оно не могло быть совершено без соответствующей рефлексии над собственной мыслительной деятельностью. Степень трудности проблем, находящихся на переднем крае математической науки, такова, что желание как можно быстрее получить решение не оставляет места всеохватывающему контролю над процессом его получения. В лучшем случае мы имеем дело с фиксацией в сознании исследователя узловых пунктов рассуждения (лучше всего это описано в замечательных работах Пойа), но говорить о том, что именно рефлексия над собственной мыслительной деятельностью позволила справиться с нерешенной ранее проблемой, мы не можем на сегодня ни в одном из известных примеров. Всегда при внимательном чтении работ, содержащих самоотчет математика о процессе решения проблемы, можно найти хотя бы один логический «скачок», который можно отнести на счет индивидуальной интуиции, особенностей работы подсознания, специфики воображения и т.д. В преподавании же учитель и ученики сталкиваются с относительно несложными задачами, где педагогический акцент целесообразно ставить не на самом факте получения давно известного результата, а на целенаправленном поиске подходов к решению проблемы.

Если оценивать комментируемую работу не с точки зрения полноты феноменологического описания математической деятельности, а с точки зрения возможности использования данного описания для нужд преподавания, то здесь, на мой взгляд, остаются вопросы.

В математических школах ученикам нередко предоставляют возможность самостоятельно доказывать важные математические теоремы, предварительно представив доказательство в виде последовательности относительно несложных отдельных задач. Возьмем в качестве примера рассматриваемую автором работы Основную теорему арифметики. В качестве предпоследней задачи, предваряющей завершающее доказательство однозначности разложения на простые сомножители, естественно взять утверждение о делимости на простое число p хотя бы одного из множителей a и b в предположении, что на p делится число ab. Если при составлении «листка» по теме «Основная теорема арифметики» преподаватель будет исходить из классического «исполнения», связанного с представимостью чисел в виде сумм $ax+by$, то он должен отдавать отчет, что для ученика соответствующее утверждение будет гораздо менее очевидным, нежели основное утверждение. К тому же ученик будет понимать, что сам до подобной «леммы» он никогда бы не додумался. Не лучше ли в таком случае предложить школьнику доказать делимость a или b на p с помощью операции деления с остатком непосредственно из определения простого числа, даже не приводя в листке определения понятия наибольшего общего делителя?

Конечно, подобное доказательство будет уступать классическому в степени общности, но зато ученик будет видеть *причину* однозначности разложения чисел на простые множители. В стандартном же рассуждении он видит только причину *отсутствия неоднозначности*, а это все-таки разные вещи.

Мне кажется, было бы весьма интересно, если бы автор работы «переложил» ее общие положения на конкретный случай Основной теоремы арифметики и опубликовал в одном из журналов, посвященных проблемам преподавания. Это явилось бы одновременно тестом на «полноту общего описания» и поводом для последующего обсуждения поднятой в статье проблематики применительно к развитию математического мышления школьников.

И в заключение одно замечание частного характера. Утверждение о том, что все доказательства от противного «отвергаются многими направлениями конструктивизма» не совсем точно. Основоположник конструктивизма А. А. Марков все же допускал в конструктивной математике рассуждения от противного специального вида (так называемый «ленинградский принцип»).

Г. Б. Гутнер

Основными терминами, которые использует автор для описания математическое деятельности, являются «исполнение» и «мерцание». Мерцающий характер исполнения математического материала — важное открытие Г. А. Нуждина. Всякое исполнение есть чередование длящегося действия и моментов остановки, когда исполняемое предстает как целое и, одновременно, как совокупность альтернатив. Совершающееся привычно и беспрепятственно исполнение не позволяет видеть того, что собственно совершается. Структура альтернатив обнаруживается при нарушении автоматизма действия.

Но чтобы продумать до конца возможные следствия этого открытия, необходимо вглядется в фигуру *исполнителя*, которая оставлена автором на заднем плане. Мне представляется серьезным упущением тот факт, что для обозначения субъекта исполнения в работе постоянно используется местоимение «мы». На мой взгляд, было бы уместней использовать *единственное число.* Мерцание может быть понято только как вспышка сознания. Структура проясняется для меня и мной, а не сама по себе. Можно, конечно, описывать ситуацию исполнения так, будто материал исполняет себя сам, разворачивая свои гештальты в силу имманентных причин. Но тогда не может идти речи о мерцании. Такое развертывание может быть лишь непрекращающимся становлением, а развертываемые структуры будут всеобщими и, следовательно, безальтернативными.

Следует уточнить, при чем здесь сознание (мое, индивидуальное сознание, позволяющее представлять исполнение автореференцией «я мыслю»). Автор справедливо связывает момент остановки с препятствием, т. е. с нарушением действия, которое открывает неединственность выбранного исполнения. Препятствие коррелятивно множественности альтернатив и, следовательно, подразумевает выбор. Иными словами, оно предполагает ответственность за исполнение. Эта ответственность может быть лишь моей, индивидуальной. Ссылка на интерсубъективность ее не снимает. К тому же сама интерсубъективность должна быть объяснена с позиций моего сознания, т. е. с точки зрения единичного субъекта. В противном случае это не интерсубъективность, а нечто иное (проблема ответственности в математическом мышлении обсуждается также в статье А. В. Родина и моем комментарии к ней, помещенным в настоящем сборнике).

А. Н. Кричевец

Хотя в статье Г. А. Нуждина ни разу не употреблено слово «стиль», я постараюсь показать, что это неупотребление есть умолчание достаточно красноречивое, а именно, стилю в математике уготовано весьма скромное место, родственное стилю исполнения музыкального произведения, — и там, и здесь стиль может быть только неизбежной платой, которую требуют условия фиксации того единственного смысла, который исполнение должно воспроизвести. Рассуждение автора мне тем более интересно, что в структуре важных для меня «альтернатив» я, кажется, готов идти с ним в полном согласии вплоть до самой последней, но наиболее важной — до вопроса о единственности этого «единственного», подлежащего исполнению смысла. На этот последний вопрос наши ответы будут различными: как я пытался показать в своей статье, «смыслы мерцают» не только в том значении, которое имеет в виду Г. А. Нуждин, но и в гораздо более интересном для нашей темы стилей в математике контексте.

1. Итак, автор считает, что подлежащий исполнению «след» (я думаю, «след» автор понимает шире, чем «текст», и это, с моей точки зрения, пра-

вильно) в процессе исполнения разворачивает перед исполнителем «горизонт альтернатив» (кажется, слово «варианты» было бы лучше, поскольку изначально «альтернатива» — это проблема, имеющая несколько ответов, сами же возможные ответы именуются альтернативами в нашем языке лишь в самое последнее время), в котором единственно правильный смысл теряется и даже должен теряться, поскольку только такая потеря позволяет ему оставаться «метой» или не вполне проясненной целью, а потому быть исполнителю интересным. Если же этот смысл не потерян таким интересным образом, то исполнение превращается в воспроизведение, родственное воспроизведению зазубренного текста непонимающим учеником.

2. Это описание кажется мне очень интересным. Я хочу добавить к нему только одну деталь, которая была главной темой моей статьи в этом сборнике: единственного подлежащего исполнению смысла нет. В таком случае я уже не могу принять рассуждение автора, помеченное в тексте цифрой «**9**», где описана и обоснована «фиксация последовательного раскрытия альтернатив исходной проблемы». Такая фиксация, пишет автор, может быть проведена, поскольку речь в ней идет не о реальных исторических событиях, в которых смыслы «мерцают», а об «идеальности соглашения» (в слове «соглашение» автор сохраняет событийный смысл: соглашается тот, кто правильно «исполнил» данный ему «след»), о структуре альтернатив в горизонте. Автор выделяет математику из прочих человеческих деятельностей именно потому, что она такую единственную фиксацию позволяет, поскольку «математическое значение само по себе бессодержательно и потому едино для всех субъектов», т.е., как я понимаю, поскольку опирается на эксплицитные отношения с другими математическими значениями. «Поэтому, — пишет автор, — не существует “субъективного” математического значения, скажем, “моей” или “твоей” непрерывной функции».

Автор совершенно последователен, а потому и делает это, по-моему, весьма спорное утверждение, которое более осторожный человек не стал бы высказывать. Очевидно, что непрерывная функция интуициониста отличается от непрерывной функции математика «классического» толка. Можно возразить, что при чтении, скажем, текста в учебнике, посвященного доказательству теоремы о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, интуиционист в состоянии «ретенцировать» тот единственный смысл, который имеет эта теорема. И все же это будет смысл «тот, да не тот», поскольку для интуициониста всякая функция непрерывна (см. *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965) и ретенцируемый смысл классической теоремы для него — бессмыслица, поскольку вместе с тем набором «математических значений», который подразумевается классическим толкованием теоремы, он неизбежно ретенцирует также и еще одно значение — «способ задания функции» — которое придает теореме совершенно иной вид.

3. Таким образом, математика уникальна не тем, что горизонт ее смыслов может быть однозначно ретенцирован вместе с единственным выделенным правильным смыслом, а тем, что она дает наиболее ясный материал для понимания того, что такой однозначности нет. Т. е. тексты и иные «следы» дают лишь опору пониманию (как непосредственному пониманию работающего математика, так и реконструирующему пониманию философа и историка). Понимаемое же содержание (ретенцируемое с помощью данного текста) изменяется, иногда развивается, а иногда и теряется. Поэтому, с моей точки зрения, «непонимание» студента Лузина (см. мою статью в этом сборнике) есть «исполнение» не менее интересное и правильное, чем «правильное» понимание полностью преодолевшего неясность студента Петрова. Это значит, что горизонт альтернатив содержит не только лишь некие фантомные образы, оттеняющие и задающие контекст вопросов и интереса, но также и «иные возможные математики».

4. Возможно, в своем ответе автор будет упрекать меня в том, что в п. 1 своего комментария я неправильно «исполнил» его статью. Это несомненно так и есть, поскольку, с моей точки зрения, исполнение в принципе не может быть совершенно правильным, потому что «след» (в нашем случае, текст) никогда не может быть «следом» окончившей свой путь мысли. Все же, думаю, я могу надеяться, что мое, даже неправильное, исполнение поможет автору в своем ответе продвинуть свои весьма интересные интуиции и дать их более точный «след».

А. В. Родин

С понятием доказательства в математике происходит любопытная метаморфоза. С одной стороны, мы употребляем такие выражения как «получить доказательство», «представить доказательство», «вспомнить доказательство», «опубликовать доказательство», говоря о доказательстве как о некоторой постоянной структуре, воспроизводимом научном результате. С другой стороны, в математике как и в обыденной речи «доказать» означает убедить собеседника в истинности некоторого утверждения; в этом смысле о доказательстве можно говорить как об единичном речевом акте. Эти два значения термина «доказательство» связаны следующим образом: доказательство-результат может убедить в истинности доказываемого утверждения *каждого* (кто сможет это доказательство правильно понять), если доказательство-результат будет, как говорит Г. А. Нуждин, *исполнено* в виде конкретного речевого акта. Такого рода возможность в своей статье я назвал *утопической* и, как я попытался показать, предположение утопической возможности является необходимым элементом всякого рационального знания (см. также мой комментарий к статье Г. Б. Гутнера). Согласно Г. А. Нуждину, если я правильно его понимаю, результат вообще и доказательство-результат в частности являются неким вторичным интерсубъективным следом множества локальных ментальных и речевых событий которые автор называет разговорами и которые, с его точки зрения, характеризуют «саму деятельность». Отвергая примат результата над деятельностью Г. А. Нуждин подробно и интересно анализирует структуру этих локальных событий. Этот анализ мне особенно интересен тем, что в своей статье я также стремился сфокусировать внимание на локальном аспекте математической деятельности, скрытой за тем, что я назвал утопической структурой и что Г. А. Нуждин называет результатом. Однако я не согласен с его оценкой роли результата, когда он называет результат «тормозом деятельности».

По-моему, неверно, что результат закрывает проблему и не позволяет к ней вернуться. 15-летний период апробации результата, о котором говорит Г. А. Нуждин, ссылаясь на В. Я. Перминова, уходит на поиск ошибок. Впоследствии результаты если и не опровергаются прямо, то, во всяком случае, уточняются и заново интерпретируются. Переинтерпретация и уточнение результата актуализируют проблему, при решении которой данный результат был получен. В противном случае мы повторяли бы слово в слово определения и доказательства, полученные много веков назад. Тот факт, что такая переинтерпретация может означать гораздо более радикальную ревизию математики, чем обнаружение ошибки в ответе на какой-то частный вопрос, показывает пример теоремы Пифагора, переформулированной на языке аналитической геометрии.

Более того, я думаю, что пока не получен результат, относящийся к некоторой проблеме, ее как таковой нет вообще, а есть, может быть, только вопрос-головоломка. Проблема несоизмеримых отрезков появилась вместе с доказательством утверждения о невозможности измерить диагональ квадрата его стороной, проблема выбора элемента из множества появилась вместе с аксиоматической теорией множеств, квадратура круга на протяжении веков оставалась головоломкой, над которой ломали головы сотни дилетантов вплоть до известного отрицательного результата, который связан уже с настоящими проблемами, например с проблемой трансцендентных чисел. Подобное недавно произошло с теоремой Ферма.

Результат действительно прерывает приватный разговор, но инициирует публичный. В этом я вижу главную функцию результата. Приватные разговоры могут быть очень интересными, но научную ценность они имеют постольку, поскольку в ходе таких разговоров достигаются результаты, которые могут быть представлены публично. Различие между приватным и публичным, которое я здесь провожу, не количественное (по числу участников разговора), а качественное: публичному разговору свойственна открытость, а приватному — закрытость. Универсальность науки обусловлена ее публичностью, т. е. открытостью научных разговоров. Тот огорчающий Г. А. Нуждина факт, что результат не несет на себе следов деятельности по получению этого результата, на мой взгляд, как раз указывает на границу между приватным и публичным.

Я думаю, что автор может сказать: если публичность и универсальность науки требуют результата, а это требование ограничивает интересный приватный разговор, тем хуже для публичности и универсальности — пусть математика будет приватной. Я отвечу на это, что приватизация математики принесет только временный выигрыш в интересе, и очень скоро математика станет скучной. Ведь именно публичность математики позволяет вести разговоры не только со своими друзьями, но и с математиками далекого прошлого; именно публичность обеспечивает в математику свободный вход, в результате чего там собирается действительно интересная компания.

ОТВЕТ АВТОРА

Родину А. В.

Я благодарен А. В. Родину за его замечание и во всем согласен с ним. На самом деле он хотел сказать, что окончательность результата — это фикция во всех смыслах кроме исторического. Полученный (и опубликованный) результат, конечно же, приводит не только к закрытию породившего его приватного разговора, но и к открытию новых разговоров. Это связано с принципиальной неполнотой результата (т. е. с тем, что понимание никогда не бывает полным и окончательным, а, напротив, всегда «недопонимает» — см. статью А. Н. Кричевца в этом сборнике), о которой всегда догадывается и его автор. Недаром в практику научных семинаров всегда входит обсуждение недавно опубликованных статей, направленное не столько на попытку понять, что сказал автор, сколько на попытку понять, о каких горизонтах он умолчал.

Все же в опубликовании результата есть свои минусы. Во-первых, это угасание личного интереса. Ведь научная деятельность есть структурирование реальности, своеобразная расстановка вешек в неизвестности. И постановка каждой новой вехи вызывает неумолимое желание навсегда остаться рядом с ней, с отвоеванным у неизвестности участком. Во-вторых, формулирование результата есть фиксация того или иного исполнения проблемы. Однако каждая частная фиксация — это описание лишь малой части неведомого маршрута. И в этом описании может потеряться самое главное — доминирующая тенденция, исходное намерение, из которого была реализована, возможно, только самая неинтересная часть (если считать, что в освобожденной от личных стремлений индивидуума науке есть «более» и «менее» интересные вопросы).

Кричевцу А. Н.

Я благодарен А. Н. Кричевцу за адекватное исполнение того единственного смысла, который содержится в моей работе. На самом деле его возражение является не критикой возможности фиксации изолированных смыслов (типа «непрерывная функция»), а критикой их окончательности, «истинности». И здесь я совершенно согласен с комментатором в том, что любые, в том числе и математические, смыслы бесконечно дробимы и уточняемы. Однако дробимость математического смысла (например, альтернатива к классической непрерывной функции) не отвергает возможности зафиксировать классический смысл. И наша способность понять затруднения Виета при оперировании формальными выражениями с коэффициентами подтверждает это.

Вряд ли комментатор будет спорить и с тем, что любой человек — даже интуиционист — способен понять, что имеется в виду под классической непрерывной функцией, т.е. встать на чужую точку зрения (см. ответ на замечание Г. Б. Гутнера). Иначе множество всех людей можно было бы поделить на классы в зависимости от их способности понимать непрерывность (что звучит несколько эксцентрично). Заметим также, что «интуиционистский смысл» — это отнюдь не «индивидуальный смысл». Мои индивидуальные усилия в понимании классической непрерывной функции могут либо провалиться, либо привести к успеху, либо — к созданию альтернативы. Однако эта альтернатива (или «вариант») ни в коем случае не будет «моей», индивидуальной. Эта альтернатива будет выработана в соответствии с законами математики, а также с культурным образцом, которому подчинена человеческая деятельность. Доказательством этому служит то, что другие люди способны понять мою альтернативу (см. также работу М. В. Лебедева, посвященную в частности проблеме индивидуального языка).

Бычкову С. Н.

Обучение математике, конечно же, связано с «серьезной» математической деятельностью, а точнее, служит ее имитацией. Обучая, мы пытаемся научить не стандартным приемам решения типовых задач, а «правильному» математическому мышлению. Однако как нам выявить эту «правильность»?

Естественно было бы в обучении математики попытаться отразить ход решения «настоящей» проблемы. Но какой ход решения рассматривать — исторический? В нем много лишних деталей, связанных с «недопониманием», устраненным на новом этапе развития математики (см. работу А. Н. Кричевца в этом сборнике). Отраженный в учебнике? Но, как справедливо замечает комментатор, последовательность лемм, удобная для простого изложения теоремы, может оказаться надуманной и не имеющей под собой реального основания.

Однако упомянутое нами «реальное основание» есть, поскольку в математике заданы «правила игры» и, стало быть, не все действия возможны. Иногда попытка достигнуть цели оборачивается неудачей из-за каких-то вполне реальных препятствий на пути. Здесь очень точно работает аналогия с прохождением маршрута: именно препятствия и непонимание побуждают нас задуматься и задаться вопросом, т. е. структурируют деятельность.

Попытка научить математике есть попытка научить структурировать математическую реальность и ориентироваться в ней. Структурирование же — это умение задавать «правильные» вопросы, т. е. такие вопросы, которые влекую за собой реальные альтернативы. Например, обнаружив, что в Z разложение на простые множители однозначно, в Z [*x*] — однозначно, а в Z [*i*] уже нет, естественно спросить себя: какое свойство определяет однозначность? Поэтому достаточно, введя определение разложения на простые множители, «напитать» школьника примерами разных колец с тем, чтобы вопрос об однозначности разложения возник сам собой.

Гораздо сложнее (поскольку граничит с математическим открытием) создать связь найденного вопроса с каким-то (возможно известным) понятием — например, связать вопрос об однозначной разложимости с евклидовостью кольца. И здесь вспомогательные задачи могут сыграть свою роль. Я совершенно согласен с комментатором в том, что эти задачи должны быть максимально конкретны, иначе мы отнимем у школьника возможность самостоятельно сформировать понятие. Однако для понимания того, каковы должны быть эти задачи, необходимо осознавать механизм формирования понятий. В работе я попытался показать, что понятие возникает из альтернативы, из необходимости выбора одной из нескольких возможностей. Следовательно, постановка задачи тоже должна предполагать (скрытую) альтернативу. Конечно, задача должна содержать и нечто вроде «определяющей тенденции», подсказывающей, в каком направлении следует развивать решение. Впрочем, я не берусь толковать этот безусловно полезный термин в трансцендентальных категориях.

Гутнеру Г. Б.

Действительно, работа сознания, состоящая в исполнении материала, — это работа индивидуального сознания. Препятствия в исполнении, благодаря которым исполнение становится возможным и осмысленным, также индивидуальны — то, что является самоочевидным для меня, может вызвать недоумение другого и наоборот. Однако, употребляя местоимение «мы», мне хотелось подчеркнуть существеннейший аспект работы человеческого сознания —

его универсальность. Т. е., способность человека понять затруднение другого.

В работе я утверждаю, что эта способность реализуется в разговоре. Именно в разговоре вырабатывается совместное намерение понимания одного и того же. В разговоре затруднение одного из собеседников не может быть упущено другим, оно обязано быть раскрыто в систему альтернатив, общую для всех участников разговора.

Более того, вслед за герменевтами я утверждаю, что любое понимание, будучи нацелено на разрешение конкретного затруднения, уже включено в определенную диалогическую структуру. Эта структура является местом обитания всевозможных культурных контекстов человеческой деятельности. Фактически, она определяется ими. Поэтому можно сказать, что существует определенный «человеческий образец», с одной стороны, ограничивающий, а, с другой стороны, обеспечивающий возможность однотипного (структурное сходство) понимания.

Именно поэтому употребление «мы» так важно. Несмотря на то, что мы никогда не можем дать гарантии успеха индивидуального понимания (мерцание), мы можем гарантировать его принципиальную возможность, равно как и возможность однотипного понимания.

Вглядимся в себя, когда мы возвращаемся домой, решаем задачу, обнаруживаем пропажу. Разве внутренний схематизм наших усилий понимания не одинаков?

ЛОЖНЫЕ ПРЕТЕНЗИИ СОЦИОКУЛЬТУРНОЙ ФИЛОСОФИИ НАУКИ

Перминов В. Я.

> Мировоззрения могут спорить,
> но наука решает и ее решения
> несут на себе печать вечности.
>
> *Э. Гуссерль*

В последние два десятилетия в философии науки появилось направление исследования, которое ставит во главу угла анализ социокультурных влияний на развитие научного знания. В принципе против такого рода исследований нельзя возражать, поскольку такие влияния в действительности имеют место. Однако сторонники социокультурного подхода не ограничиваются тем, чтобы дополнить традиционный методологический анализ науки новым аспектом рассмотрения. Они выдвигают идею социокультурной детерминации знания, в соответствии с которой все наиболее важные стороны науки вплоть до проблем ее логики и обоснования имеют исторический и социально обусловленный характер.

Здесь я хотел бы защитить тезис о логической автономии науки, то положение, что логика развития науки по большому счету определяется только ее внутренними (когнитивными) характеристиками.

1. Истоки социокультурного подхода к анализу науки

Рост интереса к социокультурному анализу научного знания был стимулирован книгой Т. Куна «Структура научных революций», появившейся в начале 60-х гг., в которой на первое место выдвигалось сообщество ученых с системой установок, обусловленных системой образов и верований конкретной эпохи. Переход от одного этапа развития науки к другому определяется у Куна сменой установок (парадигм), которая обусловлена социальными и психологическими влияниями в такой степени, что не допускает полного объяснения на основе общезначимых методологических принципов. История науки, вследствие этого, распадается на ряд изолированных отрезков, заданных несоизмеримыми парадигмами.

Это новое веяние в западной философии науки постепенно захватило и наших отечественных философов. В. С. Степин в своей книге «Становление научной теории» (1976) выдвинул идею, что всякая теория, созданная для объяснения некоторой совокупности опыта и оправданная этим опытом, в конечном итоге вписывается в культуру эпохи [1, с. 76]. В основе познавательной деятельности лежат, по мнению Степина, универсалии культуры, которые своими смыслами определяют категориальный строй сознания в каждую конкретную эпоху [2, с. 43]. Структура научной теории определяется, с этой точки зрения, не только характером исследуемого объекта, но и особенностями культуры, в которую она должна вписаться.

Идея социокультурной детерминации науки последовательно проводится также в работах А. П. Огурцова. Любой идеал научности, считает он, проходя путь от регулятива, работающего в конкретной области, до общенаучной нормы, неизбежно приобретает социокультурное измерение. В процессе институализации норм, по его мнению, «происходит как бы наращивание социальных смыслов и расширение социального контекста идеала научности» [3, с. 70].

Б. Г. Юдин полагает, что не только нормы, но и объектные представления науки всегда соединены с предпосылками социокультурного характера. Он пишет: «Благодаря соотнесенности познавательной деятельности с текущей социокультурной ситуацией, независимо от того, насколько эта соотнесенность осознается самим исследователем, задается поле значений, образов, смыслов, которые могут быть использованы в качестве средств в процессе научного познания. В то же время и возможность объективации нового знания, включение его в существующую систему научного знания, а через ее посредство и в культуру, в значительной мере обусловлена тем, что оно нагружено этими значениями, смыслами, что оно, так сказать, культурно преформировано» [4, с. 158].

Идея культурной обусловленности науки, на первый взгляд, выглядит вполне разумной, проистекающей из самого факта сосуществования этих двух сфер духовной деятельности. Более детальный анализ показывает, однако, что она чисто умозрительна и мало согласуется с истинной логикой развития науки.

2. Типы понятийных систем

Существует несколько типов понятийных систем, различающихся по степени зависимости от внешних влияний. В качестве основных можно выделить следующие семь типов, каждый из которых имеет свои когнитивные характеристики и свою степень автономности от социокультурного контекста.

1. *Априорные понятийные системы.* К этому типу можно отнести три системы, а именно логику, арифметику и евклидову геометрию. Обозначим совокупность этих систем как Л + $М_1$ (логика + первая математика), имея в виду под $М_1$ математические теории, определенные в своей структуре аподиктически очевидными аксиомами. Указанная часть логико-математического знания в общем соответствует тому, что Лейбниц и Гуссерль обозначали понятием Mathesis universalis.

Философы эмпирического направления долгое время пытались вывести эти структуры из опыта, представив их в качестве некоторого продукта абстракции или идеализации. В настоящее время мы понимаем, что все эти попытки бесперспективны. Нормы логики нельзя извлечь из психологии, как это хотел сделать Дж. Ст. Милль, или из структур операциональной деятельности, как это представлено в концепции интеллекта Ж. Пиаже. Эти нормы есть лишь общие требования к языку (к связи значений и смыслов), проистекающие из его практической функции и практической ориентации нашего мышления в целом. Они имеют праксеологическую природу, определены практической ориентацией мышления, т.е. фактором внеисторическим и абсолютно инвариантным к культуре. Они являются предельно стабильными и автономными структурами мышления и как таковые заведомо свободны от всякого исторического и социокультурного компонента.

2. *Некорректируемые системы.* Кроме априорных теорий в математике существуют теории апостериорные, порожденные физикой и внутренними потребностями математики. Такие математические теории, как теория поля

или тензорное исчисление, порождены определенным естественно-научным содержанием и являются в своей сущности формальной систематизацией этого содержания. Это дает основание для различения между математикой логической и математикой физической [5, с. 419]. Можно говорить здесь также о различии между априорной и апостериорной математикой, между математикой, связанной с необходимыми формами мышления (M_1), и математикой, структурирующей некоторое эмпирическое содержание (M_2). Два этих типа математических структур, будучи равноправными в логическом отношении, существенно различаются в плане своего онтологического основания. Евклидова геометрия является *реальной* геометрией, так как она связана с универсальной онтологией и является необходимой основой понятийного мышления вообще. Неевклидовы геометрии и другие более сложные математические структуры уже не обладают таким статусом и могут относится лишь к частным аспектам реальности, выявляемым в теоретических моделях.

Структуры M_2 являются менее фундаментальными в сравнении со структурами M_1 в том смысле, что они не являются истинными для всех миров. Если бы человечество переселилось в другой физический мир, с другой системой сил, то мы, возможно, не имели бы математической теории поля, хотя априорные арифметические и геометрические интуиции, как обусловленные только фактом деятельности, остались бы, несомненно, теми же самыми. Теории M_2 можно назвать некорректируемыми структурами. Они не обладают априорностью и безусловной необходимостью для мыслящего субъекта, но они абсолютны в том смысле, что не зависят в своей структуре от какого-либо социокультурного контекста.

3. *Точные понятийные системы.* Примерами систем этого типа являются развитые теории физики. Физические теории в отличии от теорий M_1 и M_2 не являются некорректируемыми. Даже такие точные физические теории, как механика и термодинамика, принципы которых строго определены и выражены в математической форме, не абсолютны в отношении показаний опыта и постоянно корректируются в описании конкретных ситуаций за счет введения дополнительных сил и взаимодействий. Однако, будучи исторически релятивными, физические системы также являются инвариантными к культуре в том смысле, что они не содержат в себе никаких элементов, детерминированных определенной эпохой или культурой. Нет и не может быть физики китайской, японской или африканской. Есть единая физика, абсолютно безразличная к тому, что мы называем культурой отдельных народов и цивилизаций.

Мы будем называть теорию зрелой, если она достигла выявления своих принципов и, как следствие, определения своего содержания на основе этих принципов. Такие теории, как ньютонова механика, термодинамика, классическая электродинамика, очевидно, являются зрелыми или завершенными в этом смысле.

Сказанное относится не только к физическим теориям, но и ко всем развитым дедуктивным системам в сфере науки. Принципы генетики в той же мере независимы от регионов и культур, как и принципы физики, и в том же смысле идеально точны и неопровержимы для определенной сферы опыта. Достаточно очевидно, что сфера точного знания совпадает с комплексом содержательных понятийных систем, допускающих строгое (математическое) выражение своих принципов.

4. *Содержательные системы.* Существует большое число научных теорий и дисциплин, которые, обладая внутренней логической организацией, способностью к объяснению и предсказанию, тем не менее не поддаются систематизации на основе строгих принципов и не обладают точностью физического объяснения и описания. Сюда относится подавляющее большинство биологических, экономических и психологических теорий. Их отличие от физических теорий состоит в отсутствии математического выражения основных принципов и, как следствие, в отсутствии однозначности понятий и строгости выводов. Общие методологические соображения показывают, что теории за пределами физики не могут получить полного математического выражения своих принципов, а это значит, что чисто содержательные теории всегда будут составлять основную часть нашего знания о мире.

Содержательные понятийные системы, поскольку состав их понятий не определяется жестко требованиями дедукции, более восприимчивы к социокультурным влияниям и, в принципе, в своих понятиях могут отражать некоторые специфические представления определенного народа или определенной культуры. Н. Я. Данилевский утверждал, что теория эволюции является чисто английской, поскольку она построена на понятии конкуренции, органически присущей менталитету англичан. Он обращал внимание на тот факт, что все значительные идеи английских философов, экономистов и политиков построены на основе этого понятия [6, с. 139—141].

Доля истины в наблюдениях Данилевского, несомненно, есть. Но если мы будем рассматривать такого рода теории в процессе их эволюции, то и здесь мы вправе утверждать, что образы конкретной культуры, включенные в их состав на первых стадиях их развития, постепенно сходят на нет и неизбежно исчезают. За полтора века своего существования теория эволюции претерпела существенную критику со стороны интернационального научного сообщества, и в настоящее время она вряд ли является более английской, чем какой-либо другой. Это значит, что и для этого типа наук социокультурные характеристики теории, связанные с обстоятельствами ее возникновения, не могут оставаться устойчивыми, определяющими структуру теории.

5. *Допарадигмальные системы.* К этому классу понятийных систем относятся все философские дисциплины. Хотя философ, как и любой ученый, несомненно, стремится к точности понятий и к логической определенности суждений, по самой природе своих задач он всегда остается на допарадигмальном уровне рассуждения и, как следствие, в рамках образов конкретной культуры. Давно замечено, что философия, как и поэзия, всегда национальна. Социокультурный момент неизбежно присутствует во всех философских концепциях, и он не может быть устранен из них, ибо это устранение привело бы к устранению наиболее значимых моментов системы. Системы такого рода корректируются и опровергаются только через создание новых систем, также неизбежно несущих в себе определенные социокультурные влияния.

6. *Идеологические системы.* К классу идеологических относятся рациональные построения, создаваемые для защиты некоторых социальных или нравственных ценностей. Примером такой системы является теология. Такого рода понятийные системы, хотя они строятся по правилам рациональной аргументации, не ставят своей задачей установление истины в общепринятом значении этого слова. Они нацелены на защиту ценностей определенной культуры и сами по себе являются социокультурными образованиями, имеющими смысл только в рамках данной культуры.

7. *Мифы.* Мифы представляют собой форму художественного отражения мира. Но поскольку они содержат в себе момент объяснения, то они могут пониматься также и в качестве исходной формы рационального познания. Социокультурная обусловленность этой формы отражения мира не подлежит сомнению.

3. Автономность науки

Понятийные системы необходимо разделить на две группы: научные системы (1 — 4) и квазинаучные системы (5 — 7). Это разделение является принципиально важным в том смысле, что только отделяя первые от вторых мы получаем возможность сформулировать признаки собственно научных систем.

Наука *фундаментальна* в том смысле, что собственно научные системы непосредственно определены практикой, т.е. предметной преобразовательной активностью, обеспечивающей само выживание человечества. Если культура, в собственном смысле слова, призвана производить и поддерживать ценности, то наука направлена на производство рецептов действия. Наука принципиально отличается от культуры прежде всего тем, что она свободна от ценностных установок, являющихся ядром всякой культуры: вопрос о том, как некая цель может быть достигнута, не предполагает обсуждения этой цели в ценностном плане. По своей сути наука есть лишь часть практики, она функционально включена в практику и полностью подчинена простым требованиям практики, независимым от особенностей культуры.

Наука *кумулятивна* в смысле системности и прямой преемственности своих результатов. Наука кумулятивна, во-первых, на уровне рецептов в том смысле, что указанные ею эффективные способы действия представляют собой абсолютный результат в плане расширения возможностей действия. Некоторые из признанных рецептов могут оказаться ограниченными или ложными, но важно, что здесь осуществляется абсолютный прогресс, заключающийся в постоянном приросте эффективных рецептов действия. Наука кумулятивна, во-вторых, на уровне теоретических конструкций в том смысле, что развитие этих конструкций приводит к теориям, имеющим абсолютное значение для определенных сфер опыта. Опыт показывает, что теория может достигнуть такой стадии зрелости, на которой она уже не может быть устранена дальнейшим развитием знания. Возможное опровержение классической механики посредством опыта может привести к образованию новой физической теории, но не может привести к устранению механики как законченной теоретической системы. Это значит, что зрелые теоретические структуры, как и рецепты действия, имеют непреходящий характер.

Наука *измерима* в смысле наличия строгих критериев в оценке своих результатов. В отличие от произведений искусства результаты науки и техники могут быть строго упорядочены по степени приближения к идеалу, и эта шкала является независимой от культуры, единой для всех эпох. Это значит, что наука имеет внутренние (независимые от культуры) критерии прогресса. Эта особенность науки проистекает из того, что она опирается на критерий предметной практики, а именно на общезначимость изменений в предметном мире, которым мы приписываем высшую степень объективности.

Научная теория *эквифинальна* в том смысле, что в процессе своего развития она неизбежно освобождается от всех следов внешних влияний. Все историческое остается за пределами зрелой теории. Если зрелая стадия развития живого организма содержит в себе следы своей индивидуальной истории, то научная теория имеет тенденцию к полному освобождению от такого рода следов. Развитие научной теории, таким образом, характеризуется большей степенью имманентности, чем развитие всякой другой детерминированной системы. В этом смысле наука идеальным образом согласуется с гегелевской схемой развития, в которой логическое первично перед историческим и никакие случайности не могут прервать движение к реализации необходимых и объективно предопределенных форм.

Наука *автономна от культуры в своей структуре.* Как уже сказано, не существует китайской физики или биологии, ибо структура научной системы задана только системой феноменов, подлежащих объяснению. Система феноменов, являющаяся базой науки, однозначно задается в сфере практики, т.е. независимо от культуры. Каждая наука обладает внутренней структурой, которая определена исключительно ее предметом и общей логикой внутренней организации теории.

Научная теория *автономна от культуры в стадиях своего развития.* Историческое вызревание научной теории можно сравнить с ростом растения: климатические условия могут замедлить или ускорить этот рост, или даже прервать его, но если все-таки этот рост происходит, то он происходит в соответствии с внутренней программой, заложенной в генотипе растения и проходит стадии, определенные только этим генотипом. Фазы развития научной теории, аналогичным образом, не произвольны и не субъективны, они определены объектом исследования и его методом.

Наука, таким образом, есть нечто радикально отличное от культуры. Если продукты науки и можно отнести к культуре при некотором достаточно широком понимании последней, то это совершенно особая, глубоко автономная часть культуры. Мир человеческих представлений должен быть, таким образом, разделен на два существенно различных отдела: культуру, вырабатывающую ценности, и науку, вырабатывающую рецепты действия. В своей интенции наука внесоциальна и внекультурна, ибо ее успешность напрямую зависит от того, в какой мере она свободна от субъективных установок личностей, сообществ и классов, обусловленных конкретной культурой. В этом плане наука — прямой антипод культуры. Ценности субъективны и национальны, наука, по крайней мере в своей тенденции, объективна и интернациональна. Наука независима от культуры по той причине, что и ее задачи, и оценки ее результатов определены непосредственно практикой, т.е. сферой в принципе безразличной к культуре и одинаково необходимой для всех культур.

Мы должны признать, таким образом, что сущностные закономерности науки, будь то закономерности ее структуры или логики развития, не связаны с культурой; они абстрагируются от культурных влияний как от вторичных, случайных и исчезающих. Идея социокультурной детерминация науки является самопротиворечивой, поскольку случайные факторы, безразличные к зрелому состоянию теории, не могут быть причислены к определяющим факторам.

4. Заблуждения социокультурной философии науки

Социокультурный уклон в теории науки Т. Куна проявляется прежде всего в смешении различных типов понятийных систем, в отсутствии должного разграничения между научными и квазинаучными системами. Аристотелевская физика и теория флогистона, с точки зрения Куна, не более субъективны и не менее научны, чем современные теории физики [7, с. 18]. Если продолжить эту линию дальше, то надо поставить на один уровень с наукой также теологические и мифологические объяснения. При столь произвольном понимании научной теории наука естественным образом теряет признаки, отличающие ее от культуры. Но это ложное понимание, сориентированное на слабые понятийные системы, которые, строго говоря, вообще не относятся к науке.

Наиболее ярко социокультурный релятивизм проявляется у Куна в его трактовке смены научных концепций. Кун полагал, что переходы от одной парадигмы к другой определяются изменением коллективного сознания ученых, социокультурно детерминированным в той степени, которая не допускает его объяснения на основе когнитивных, т.е. проистекающих из самого содержания знания критериев. Лакатос категорически возражал против подобного подхода. «...Там, где Кун и Фейерабенд видят иррациональный переход, — пишет Лакатос, — историк сможет показать, что этот переход был рациональным» [8, с. 257]. Он был убежден в том, что когнитивные характеристики теории достаточны для описания логики ее развития, по крайней мере, постфактум.

Конечно, акт выбора в науке не рационален, и он несомненно зависит от социокультурных образов, типичных для членов конкретного научного сообщества. Но мы не можем допустить, что исходные эвристические матрицы могут навсегда закрепится в теории и определить структуру ее зрелого состояния. Позиция Куна здесь не определена должным образом, ибо с точки зрения его теории в принципе можно допустить существование особой китайской физики, обусловленной психологическими особенностями китайских физиков. Хотя Кун и не делает такого вывода, его концепция никак не защищена от него, так как она не устанавливает никаких границ для психологического волюнтаризма научных сообществ. Детерминизм Лакатоса, несомненно, ближе к истине. По своей сути он сводится к признанию эквифинальности теоретических систем, независимости их зрелой структуры от внешних факторов.

Лакатос допускает, однако, что каждый факт внешней (социокультурной) истории может со временем стать фактом истории внутренней, относящейся к логике развития науки [8, с. 227]. Эта идею трудно принять. Здесь Лакатос делает непонятную уступку экстерналистской концепции развития науки. В действительности, превращение внешней истории во внутреннюю абсолютно исключено по той простой причине, что социокультурный и случайный по своей природе фактор никогда не может быть представлен как проистекающий из необходимых (когнитивных) характеристик науки. Теоретическая модель включает в себя только универсальные детерминации. Теория науки не может включать в себя внешних факторов точно так же, как теоретическая механика не может рассматривать множество разнообразных сил трения, имеющих место в частных случаях.

Наука стремится к основаниям, определенным только в рамках когнитивных характеристик, и в принципе исключает в этом плане апелляцию к социокультурным факторам. Представляется поэтому ошибочной идея В. С. Степина о вписанности науки в контекст культуры. Научная концепция, подтверждаемая опытом, не нуждается в дополнительных подпорках в форме каких-либо гуманитарных доводов. Долгое время философы думали, что общие принципы науки, помимо своего подтверждения в опыте, должны быть оправданы еще и на основе принципов метафизики, выведены из этих принципов или, по крайней мере, согласованы с ними. В настоящее время мы хорошо понимаем несостоятельность этой идеи. Законы науки приобретают признание исключительно на основе их объяснительной силы, они конструируются независимо от метафизики и могут входить в противоречие с ней. Столь же несостоятельна в этом отношении и попытка подчинить принципы науки универсалиям культуры. Приемлемость научных принципов и теорий определяется в конечном итоге только их дедуктивной значимостью в отношении фактов и абсолютно независима от апелляций к метафизике или к культуре.

Универсалии культуры, конечно, существуют. Известно, к примеру, что восприятие времени и характеристик бытия, связанных со временем, было существенно разным в разные эпохи. В этом плане мы вправе говорить о социокультурном архетипе или социокультурной категории времени. Но универсалии культуры и онтологические универсалии, на которых базируется наука, — принципиально различные вещи. Время как параметр физики не тождественно по своим признакам времени как философскому представлению, а последнее не может быть отождествлено с психологическим восприятием времени, изменяющимся от эпохи к эпохе. Поэты и художники могут жить в психологических переживаниях времени, высвечивая различные его аспекты, но ученый должен апеллировать исключительно к его априорным характеристикам, зафиксированным в категории времени. Будь это по-другому, мы не понимали бы сегодня точного смысла законов Кеплера и Ньютона, опирающихся на понятие времени. Наука базируется не на универсалиях культуры, а на онтологических универсалиях, т.е. имеет под собой более глубокое и более прочное основание, нежели то основание, на котором покоится культура.

Нельзя принять также тезис А. П. Огурцова о социокультурной природе нормативных принципов науки. В основе его рассуждений лежит предположение, что институализация нормы увеличивает ее социокультурную нагруженность. В действительности, для развития науки характерен как раз противоположный процесс, а именно процесс очищения нормативных предпосылок от всякого рода ценностных и социокультурных аспектов. Из социального признания принципа никак не вытекает наличие в нем социокультурного измерения. Существует множество чисто когнитивных принципов, инвариантных к культуре, проистекающих только из функции понятийного мышления. Таковы универсальные нормы логики. Но и более конкретные, исторически обусловленные принципы также не являются в обязательном порядке связанными с культурой. Такие принципы, как принцип соответствия, принцип дополнительности, введенные в методологию физики в нашем веке, являются, несомненно, чисто когнитивными установками, не имеющими отношения к каким-либо социокультурным смыслам, характерным для нашего времени.

Является, несомненно, ошибочным и тезис Б. Г. Юдина о социокультурной преформированности науки. Если понять термин преформированнось в его традиционном значении, то основные характеристики зрелой научной теории следует мыслить в качестве предзаданных некими социокультурными смыслами, принятыми при зарождении теории. В действительности, конечно, развитие науки не имеет ничего общего с такой схемой. Научная теория эквифинальна в своей структуре и в конечном итоге полностью элиминирует историческое, национальное и всякое другое социокультурное содержание в процессе своего вызревания. Социокультурный и антропоморфный характер некоторых понятий на начальной стадии теории никак не предрешает ее зрелой структуры. Понятия силы, работы и энергии генетически содержат в себе антропоморфный момент, но это не имеет никакого отношения к логике определения и использования этих понятий в развитой физической теории.

Мы должны, таким образом, полностью отказаться от того мнения, что обоснование науки связано с универсалиями культуры. Наука по своим основаниям несравненно более фундаментальна, чем культура. В плане обоснования наука сориентирована исключительно на абстрактные деятельностные универсалии и может быть связана с универсалиями культуры только в плане эвристики. Особые психологические и социокультурные аспекты восприятия времени, типичные для XVII века, могли влиять на формирование представлений механики, но механика как зрелая структура, несомненно, свободна от этих влияний и опирается только на абстрактную онтологию времени, продиктованную структурой деятельности.

Зрелая теория строится только в соответствии с внутренними, чисто когнитивными принципами, инвариантными культуре. Это значит, что наука стоит на собственных ногах, она не нуждается в процедуре вписывания в культуру или в оправдании на основе культуры. Наука в конечном итоге базируется только на опыте и на априорных онтологических категориях, т.е. на фундаменте, который внеисторичен и не имеет отношения к изменениям культурного контекста.

Историческое вызревание научной теории, как уже сказано, можно сравнить с ростом растения, законы которого предопределены его генотипом и не зависят от условий среды. Ошибкой социокультурной философии науки является превращение вторичных социокультурных влияний на науку в первичные и определяющие. Здесь мы имеем дело со своеобразной «лысенковщиной» в философии науки, с попыткой поставить внутреннюю логику ее развития в зависисмость от внешних условий, в которых это развитие происходит. Давно установлено, что наука не может претендовать на обоснование ценностных установок. Нужно понять, что и обратное движение столь же бесперспективно. Попытки вывести внутреннюю логику науки из особенностей конкретной культуры или из универсалий культуры могут проистекать только из недостаточного понимания природы науки.

5. Социокультурный релятивизм в философии математики

В классификации понятийных систем по степени их автономности от культуры математика стоит на первом месте. Математика априорна в том смысле, что она фиксирует в своих исходных представлениях универсальные структуры мышления, порожденные деятельностью. Зрелые математические доказательства являются завершенными и абсолютно надежными вследствие своей редуцированности к абсолютному обосновательному слою. Математические теории обладают предельной определенностью и исторической стабильностью и, казалось бы, уже самой формой своего бытия исключают попытки их социокультурного обоснования. Однако, как это ни удивительно, такого рода попытки имеют место и здесь.

Зависимость математики от социокультурных представлений ясно выражена в последних работах Э. Гуссерля. В период «Логических исследований» Гуссерль выступал как радикальный априорист, не допускающий никаких уступок релятивизму в истолковании логического и математического знания. В «Происхождении геометрии» мы видим, однако, существенно иную позицию. Отвечая на вопрос, каким образом мысленные конструкции первых изобретателей геометрии, имеющие только субъективное значение, превратились в представления объективные и непреложные, Гуссерль приходит к выводу, что такого рода объективация могла совершиться только на основе межличностной коммуникации и унифицирующей способности языка [9, с. 210—245]. Математическая объективность приравнивается здесь к объективности языка, который является историческим и социокультурным установлением.

Близкие идеи мы находим и в философии математики Л. Витгенштейна. Математическая теория, с точки зрения Витгенштейна, основана на конвенциях и по природе своих внутренних законов подобна шахматной игре, отличаясь от последней только своей полезностью [10, с. 53]. Но в таком случае объективность математических структур — это лишь общезначимость соглашений, поддерживаемая полезными следствиями. Не допуская онтологического основания для исходных математических идеализаций и истолковывая их только в качестве конвенций, Витгенштейн не может обосновать их интерсубъективности и устойчивости и в конечном итоге вынужден, в соответствии с общим духом скептической философии, допускать их историческую обусловленность и относительность.

Выведение базовых математических представлений из языка является, конечно, несостоятельным. Простой анализ показывает, что становление форм языка уже предполагает наличие представлений, заключенных в универсальных онтологических категориях и, в частности, в исходных представлениях арифметики. Ссылка на полезность также ничего не проясняет. Геометрия по-разному использовалась в Египте и в Вавилоне, но в том и другом случае она существовала как *одна и та же* система самоочевидных представлений. Это значит, что структура геометрических понятий определена некоторой более высокой инстанцией, чем конкретные представления, связанные с областью ее применения.

Существует, в действительности, лишь один путь, позволяющий объяснить факт внеисторичности математических идеализаций. Этот путь состоит в уточнении и углублении априористской концепции математики. Для Витгенштейна как последовательного позитивиста этот путь был неприемлем. Гуссерль сознательно шел по этому пути, но ему не удалось создать здесь законченной системы. Причиной этого является прежде всего радикальная имманентность его системы. Феноменология абстрагируется от идеи деятельности, пытаясь вывести априорное знание только из первичных актов чувственных различений и интенциональной активности сознания. Идеальная устойчивость эйдосов при таком подходе не обосновывается, а только декларируется как некая особая способность разума к установлению значений, не корректируемых опытом. Нетрудно видеть, что здесь скрыт тот же порок антропологизма и психологизма, который Гуссерль сам критиковал в системе Канта. Понятие жизненного мира появилось в его системе в качестве основы, призванной придать объективный статус априорным представлениям. Это преобразование системы приводит, однако, к релятивизации математических истин, превращая их в продукт языковой активности, имеющей социокультурную детерминацию.

Сегодня взгляды позднего Витгенштейна и позднего Гуссерля часто превозносятся, рассматриваются как некоторого рода философское достижение, как преодоление узости традиционного рационализма и т.п. В действительности, мы имеем здесь дело с совершенно тупиковым направлением мысли. Неустранимый изъян этого подхода состоит в том, что структуры, связанные с универсальными формами мышления, т.е. со структурами, которые предшествуют языку, объясняются на основе законов языка, имеющих исторический и относительный характер.

Социокультурный релятивизм относительно оснований математики, проповедуемый профессиональными философами, как показывает практика, иногда находит поддержку со стороны самих математиков, рассматривающих методологические проблемы своей науки. В этом отношении представляют интерес рассуждения В. А. Успенского о надежности математического доказательства, которые приводятся в его статье «Семь размышлений о философии математики». Рассматривая понятие математического доказательства, автор последовательно проводит мысль, что представления об убедительности доказательства связаны с используемыми языковыми средствами и с психологией общества. Поскольку и то и другое меняется с ходом истории, то меняются и критерии, отличающие доказанное от недоказанного. «Если математика и абсолютна, — заключает В. А. Успенский, — то только на уровне повседневного опыта — точно так же, как абсолютна ньютоновская физика в применении к явлениям средних размеров...» [11, с. 140—142].

Если сказанное автором понимать серьезно, то надо будет согласиться с тем, что математики как строгой доказательной науки вообще не существует. С точки зрения априористского понимания исходных математических идеализаций такая позиция является, конечно, неприемлемой. Очевидности, на которых базируются арифметика и евклидова геометрия, отнюдь не представления какой-либо эпохи, но фундаментальные интуиции сознания, производные только от деятельностной ориентации мышления и независимые от исторически изменчивых познавательных установок и образов. Это подтверждается прежде всего фактом исторической устойчивости математических доказательств. Если бы действительно убедительность доказательства имела только историческое значение, как это думает В. А. Успенский, то мы имели бы огромные свалки теорем, когда-то признанных математическим сообществом, но неприемлемых для современных математиков. Ничего подобного мы не имеем. Это показывает, что математика в действительности базируется на более глубоком и более твердом основании, чем это представляют себе сторонники социокультурного релятивизма.

М. А. Розов высказывает идею, что бытие математических объектов может быть понято как бытие элементов нормативных систем, воспроизводимых на основе механизма социальной эстафеты, который состоит в подражании образцам мыслительной деятельности. Поскольку образец не определяет однозначно способов своей реализации, то математические структуры, по Розову, в принципе не могут обладать абсолютной стабильностью и однозначностью. Этот ход мысли естественно приводит его к положению, уже высказывавшемуся ранее сторонниками интуиционизма, согласно которому каждый математик реализует свою математику [12, с. 24—25].

Такое понимание статуса математических объектов, конечно, не может быть принято. Оно ошибочно прежде всего потому, что противоречит бесспорному факту, состоящему в наличии единой, общезначимой и устойчивой в своих результатах математики. Ничто в математике не доказывает многозначности или неопределенности математических структур. М. А. Розов упускает здесь из виду также то обстоятельство, что механизмы социальной эстафеты в одинаковой степени приложимы ко всем понятиям науки и ко всем явлениям культуры вообще и, следовательно, сами по себе не могут содержать объяснения специфики математических объектов.

Для объяснения статуса объектов математики необходима не историческая, а функциональная точка зрения, выявляющая априорные формы мышления. Если бы все человечество потеряло на время память и прервало все исторические эстафеты, то, возродившись к жизни, оно неизбежно бы воспроизвело реальную логику, арифметику, евклидову геометрию и абстрактную онтологию в том же самом виде, ибо эти структуры поддерживаются не в силу традиции, но под давлением функции, т.е. из необходимости действовать. Утверждение «2 + 2 = 4» укоренено в нашем сознании не потому, что оно, подобно некоторому обычаю, передается из поколения в поколение, а потому, что оно необходимо функционально. Оно неизбежно воспроизводится в любую эпоху как элемент априорной формы мышления, продиктованной деятельностью.

Проявления ложного социокультурного подхода можно видеть также и в истории математики. Преемственность математических структур по содержанию при таком подходе отодвигается в сторону как нечто несущественное. В общем плане такой подход к истории науки был намечен Т. Куном в его понятии несоизмеримости парадигм, задаваемых различными научными сообществами. В еще более радикальном варианте этот взгляд на историю науки предлагается В. М. Розиным, который утверждает, что существует не одна математика, а несколько математик, определенных различными эпохами развития. «Культурологическое исследование, — пишет В. М. Розин, — приводит к мысли, на первый взгляд необычной, — в разных культурах ученый размышляет о разном, научное познание и мышление имеют разную природу, нет одной науки от шумеро-вавилонской математики до наших дней, а есть несколько разных научных организмов, сменяющих друг друга» [13, с. 179]. Розин убежден, что, переходя от эпохи к эпохе, математика сохраняет лишь свое имя, изменяясь во всех наиболее существенных своих чертах. Практически детерминированная математика Древнего Египта не имеет ничего общего с вавилонской математикой, которая была лишь сферой семиотического производства, и обе они радикально отличаются от греческой математики, стимулируемой в своем развитии теоретическими проблемами.

С чисто логической точки зрения в основу периодизации может быть положен любой признак. Мы, несомненно, можем разделить историю математики по типам культур и регионов, в которых она развивалась. Однако не все признаки одинаково значимы. Рассматривая историю математики различных народов, историки всегда старались прежде всего установить преемственность результатов и наметить ступени объективного процесса обогащения математического знания. Они рассматривали математику как единую науку, хотя и имеющую своеобразие в зависимости от эпох и регионов. Новизна подхода, предлагаемого Розиным, состоит в том, что он декларирует полный отказ от внутренней логики развития науки, объединяющей все ее этапы.

Здесь опять вторичное и случайное ставится на место первичного и фундаментального, когнитивные характеристики, определяющие преемственность в традиционной историографии, заменяются социокультурными. Для истории науки, однако, на первом месте всегда будет стоять логика внутреннего развития и объективная преемственность по содержанию. Стрела прогресса, определенная в ее истории, не может быть разрублена на части и растворена в особенностях культур. Различные периодизации развития науки получают смысл только при наличии периодизации первичной, связанной с прогрессом ее содержания.

Аналогичное искажение логики исторического исследования наблюдается и в других случаях. Рассматривая, к примеру, происхождение дедуктивной математики в древней Греции, современные историки обычно погружают себя в детальное изучение внешних условий ее бытия в тот период и полностью отвлекаются от внутренней логики ее развития. Появление доказательства оказывается тогда продуктом той или иной философии, следствием риторического характера греческой культуры, результатом особого отношения греческих ученых к математической практике и тому подобных внешних факторов. Примером такого чисто культурологического подхода является новая статья С. Н. Бычкова об античной математике, в которой в качестве главного фактора, обусловившего этот переход, выступает деятельность софистов [14].

Очень вероятно, что влияние софистов имело место и сыграло свою роль. Но логика науки подсказывает нам, что столь существенный переход не мог бы совершиться ни при каких влияниях, если бы он не был подготовлен эволюцией математических понятий. Но если это так, то внешние детерминации, как бы правдоподобно они ни выглядели, являются случайными и ни одна из них не может быть истолкована в качестве истинной причины зарождения дедуктивной математики. Проблема состоит, таким образом, в том, чтобы выявить (реконструировать) внутреннюю логику совершенствования математического знания от его первых шагов до появления дедуктивной теории.

6. Заключение

Для понимания логики развития науки необходимо твердо придерживаться того взгляда, что собственно научные системы обладают внутренней детерминацией и могут подвергаться лишь случайным, временным и несущественным воздействиям культуры. Это в первую очередь относится к математике. Адекватная философия математики не может быть построена без прояснения внеисторического основания этой науки, без обоснования априорного характера ее исходных представлений.

Сказанное не означает, что социокультурный анализ истории математического знания является излишним или несущественным. Античная математика погибла с наступлением средневековья, и причины этой гибели, конечно, нельзя вывести из внутренней логики ее развития. Существует множество подобного рода событий в истории науки, объяснение которых предполагает понимание внешних условий ее развития. Смысл изложенного состоит не в том, что социокультурный анализ бесполезен, а в том, что он *вторичен* и сам по себе не может претендовать ни на статус особой философии математики, ни, тем более, на некоторое перспективное направление в философии математики, наиболее соответствующее современному этапу развития математической науки, в чем неустанно убеждает нас А. Г. Барабашев. Все наиболее значимые проблемы современной философии математики: понимание предмета математики, статуса математических объектов, проблемы обоснования математики, математизации знания и даже проблемы логики ее развития — основаны на анализе природы математических идеализаций и никак не связаны с исследованием внешних (социокультурных) влияний. В этом плане очень трудно понять, какие факты побуждают А. Г. Барабашева утверждать, что «нефундаменталистская философия математики ближе к современным исследованиям в математике и истории математики [15, с. 87]. Представляется, что это утверждение порождено все-таки скорее модой на социокультурное обоснование, чем анализом реальных проблем философии математики и путей их решения.

Адекватная философия математики должна быть сориентирована прежде всего на внутренние (когнитивные) характеристики математического знания. Бытие математики как науки не может быть выведено ни из языка, ни из традиции, ни из полезности каких-либо других социокультурных явлений. Социокультурный анализ всегда вторичен и законен лишь в тех пределах, в которых он не разрушает когнитивных характеристик теории, проистекающих из ее природы и функции. Эти пределы не так ясны, как бы хотелось, поскольку всегда остается в какой-то мере не вполне решенным вопрос о том, какие свойства математики проистекают из ее природы и общих целей, а какие являются относительными, свойственными определенным эпохам ее развития. Критика, проведенная здесь, имеет смысл с точки зрения определенного понимания этих границ, как они вырисовываются в априористской философии математики. Но неполная ясность границы не означает ее отсутствия и никак не оправдывает тот безбрежный релятивизм, который вносится в современную философию математики так называемым социокультурным подходом.

Слабость социокультурной философии математики становится особенно ясной, если мы поставим вопрос о теоретической значимости ее проблем. Ф. Брентано отмечал тот факт, что деградация философии всегда начинается с изменения типа проблем, а именно с того момента, когда проблемы теоретические заменяются проблемами фактологическими, прикладными или популярными. Социокультурное направление в философии математики вызывает подозрение не только вследствие слабости предлагаемых им конкретных решений и даже не вследствие утверждаемого им релятивизма, который не находит подтверждения в практике математического мышления, но прежде всего потому, что оно лишено значимых теоретических проблем типа самоочевидности у Декарта, первичных и вторичных качеств у Локка, антиномий у Канта и т.п., которые были бы вызовом человеческому интеллекту и поднимали бы тонус философского мышления в целом. За социокультурным подходом не видно ни одной из таких глубоких теоретических проблем, а это значит, что мы занимаемся здесь заведомо второстепенной работой, которую А. Эйнштейн сравнивал с прокручиванием больших дыр в тонкой доске. Философия, не будучи наукой парадигмальной, является наукой традиционалистской в том смысле, что значимость каждой из ее проблем напрямую зависит от того, в какой мере она освещает традиционные проблемы. Социокультурная философия науки просто уходит в сторону от традиционных проблем, не выдвигая при этом ни одной теоретической проблемы, которая была бы вызовом для ума, нуждающегося в стоящих задачах. Все это говорит о том, что современные исследования социокультурных влияний на становление математических понятий и теорий очень далеки от того, чтобы стать новой философией математики, как бы интересны они ни были с исторической или какой-либо иной точки зрения.

Список литературы

1. *Степин В. С.* Становление научной теории. Содержательные аспекты строения и генезиса теоретических знаний физики. Минск, 1976.

2. *Степин В. С.* Философская антропология и философия науки. М., 1992.

3. *Огурцов А. П.* Институализация идеалов научности // Идеалы и нормы научного исследования. Минск, 1981.

4. *Юдин Б. Г.* Методологическая и социокультурная определенность научного знания // Идеалы и нормы научного исследования. Минск, 1981.

5. *Moss J. M.* B. Kreisel's work on the philosophy of mathematics.1. Realism. // Proceedings of the summer school and colloquiumin in mathematical logic. Manchester, 1966; Amsterdam, London, 1971.

6. *Данилевский Н. Я.* Россия и Европа. М., 1991.

7. *Кун Т.* Структура научных революций. М., 1975.

8. *Лакатос И.* История науки и ее рациональные реконструкции // Структура и развитие науки. М., 1978. С. 257.

9. *Гуссерль Э.* Начало геометрии. Введение Жака Деррида. Начало геометрии. М., 1996. С. 210—245.

10. *Витгенштейн Л.* Замечания по основаниям математики // *Витгенштейн Л.* Философские работы. М., 1994. Ч. 2. Кн. 1.

11. *Успенский В. А.* Семь размышлений о философии математики // Закономерности развития математического знания. М., 1989.

12. *Розов М. А.* Способ бытия математических объектов // Методологические проблемы развития и применения математики. М., 1985.

13. *Розин В. М.* Специфика формирования естественных технических и гуманитарных наук. Красноярск, 1989. С. 179.

14. См.: *Бычков С. Н.* Дедуктивное мышление и древнегреческий полис // Наст. сб.

15. *Барабашев А. Г.* Будущее математики. Методологические аспекты прогнозирования. М., 1991.

КОММЕНТАРИИ

А. Г. Барабашев

Статья В. Я. Перминова, я считаю, является важным вкладом в совершенствование социокультурной философии математики. Ее полемический настрой способствует лучшему осознанию как минимум трех вопросов, характеризующих параметры противостояния социокультурного (нефундаменталистского) и когнитивно-фундаменталистского направлений в анализе математики:

— что такое социокультурная философия математики;

— каковы основные проблемы социокультурной философии математики, в чем их отличие от проблем фундаменталистской философии математики, и как эти проблемы в социокультурной философии математики решаются;

— в чем заключаются недостатки когнитивно-фундаменталистского направления, в особенности недостатки математического априоризма.

Рассмотрим эти три вопроса по порядку.

1. В. Я. Перминов предлагает читателю собирательный и во многом упрощенный образ нефундаменталистской (социокультурной) философии науки и нефундаменталистской (социокультурной) философии математики, который вполне пригоден для полемических целей статьи. Однако этот образ недостаточен для такого понимания социокультурного направления, которое дает возможность осознать распределение его сильных и слабых сторон, продуктивно работать в рамках социокультурной философии науки и философии математики. Так, в начале статьи он пишет, что в соответствии с социокультурной детерминацией знания «все наиболее важные стороны науки вплоть до проблем ее логики и обоснования имеют *исторический и социально обусловленный* (курсив мой. — *А. Б.*) характер.» В первом разделе, поясняя сущность социокультурного направления в анализе науки и ссылаясь на несколько концепций этого направления (Т. Куна, В. С. Степина, А. П. Огурцова, Б. Г. Юдина), В. Я. Перминов смещает свою позицию и говорит о том, что социокультурное направление выдвигает положение о «зависимости науки от *культуры* (курсив мой. — *А. Б.*)» как двух сосуществующих сфер духовной деятельности.

Таким образом, смешиваются три различных ветви нефундаменталистского направления:

— историческая ветвь, полагающая развитие науки некумулятивным. Например, идея о революциях в математике и об историческом отбрасывании устаревших математических теорий происходит из концепции научных революций Т. Куна и развивается в большом количестве публикаций, в частности в известной книге «Revolutions in Mathematics» (ed. by *D. Gilles*, Oxford: Clarendon Press, 1992);

— ветвь социальной детерминации, утверждающая зависимость содержания науки от социальных взаимоотношений, от региональных и национальных особенностей. В философии математики так появились взгляды об «арийской математике» (Л. Бибербах), о «китайской математике», о «буржуазной математике» в ее противопоставлении «пролетарской математике», о «европейской математике», и т. д. Наиболее ясно это течение развивается С. Рестиво и его последователями и представлено в книге «Math Worlds. Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education» (ed. by *S. Restivo, J. P. van Bendegem, R. Fisher*. Albany: State University of New York Press, 1993);

— ветвь культурной детерминации, распадающаяся на течение когнитивно-культурной детерминации (например, такая позиция, заключающаяся в том, что познавательные установки, формирующиеся в данной культуре, обусловливают возникновение формальных структур, трансформирующихся в исходные математические структуры и в основания математики эпохи, отстаивается мною в статье, помещенной в этой книге), и течение деятельностно-культурной детерминации, согласно которому социальные эстафеты действия, составляющие сущность культуры, обеспечивают облик математики, приемлемые способы действия с математическими объектами и само понимание таких объектов как ролей соотношения обозначений, воспроизводящих себя в соответствии с принципами нормативных систем (*Rozov M. A.* The Mode of Existence of Mathematical Objects // Philosophia Mathematica. Second Series. 1998. Vol. 4. № 2. P. 109).

В критике социокультурной философии науки и математики В. Я. Пеминов, как видно, добивается успеха только частично. Он как бы «перескакивает» с одной ветви на другую, полагая, что неважно, на какой из них находиться, ибо социокультурная философия математики опровергается этой критикой в целом. Однако, если одни ветви «трещат» под весом аргументов В. Я. Перминова, то другие «прогибаются» совсем немного, и резкость суждений автора навряд ли обоснована. Например, едкие высказывания В. Я. Перминова относительно недопустимости «китайской» и другой подобной математики (хотя вопрос оказывается не столь простым, если вдуматься в аргументацию С. Рестиво) легко воспринимаются читателем. В то же время, другие тезисы (в частности, тезис о том, что наука вырабатывает рецепты действия, а культура создает ценности; что задачи и оценки результатов науки определены непосредственно практикой; что очевидность евклидовой геометрии в отличии от очевидности неевклидовой геометрии основывается на фундаментальной интуиции сознания; и т.д.) порождают ощущение, что позиция автора тяготеет к радикализму. Но, как известно, радикальная позиция дает возможность ярко и хлестко критиковать, однако защищать ее крайне тяжело.

2. В книге «Будущее математики. Методологические аспекты прогнозирования» (1991) я исходил из представления, что проблемы нефундаменталистской (социокультурной) философии математики более связаны с запросами «работающих» математиков и историков математики, а проблемы фундаментализма — с интересами специалистов по основаниям математики. Как представляется мне теперь, это было ошибочное утверждение.

Прошедший этап параллельного развития фундаменталистской и нефундаменталистской философии математики показал, что между ними наблюдается противостояние по всему фронту предметных областей, граничащих с философией математики. По каждой проблеме философии математики — от казалось бы традиционных проблем фундаментализма о финальном обосновательном слое математики, о статусе математических объектов, о природе доказательства, и до выдвинутых социокультурным направлением проблем устаревания и отбрасывания прежнего математического знания, нестабильности метода, социальных детерминант математического творчества, и т. д., — наблюдается конкуренция фундаменталистского и нефундаменталистского подходов к их решению. В *каждой проблеме* философии математики подход нефундаменталистской (социокультурной) философии математики отличается от подхода фундаментализма.

Например, обсуждая проблему стабильности результатов в математике, В. Я. Перминов пишет (это один из самых его любимых и отстаиваемых тезисов), что однажды принятый и «продержавшийся» в течение контрольного периода времени результат становится незыблемым. В математике нет, утверждает он, огромных свалок теорем, когда-то признанных математическим сообществом, но неприемлемых для современных математиков. Это — решение фундаментализма. Но есть и другие подходы, подходы нефундаментализма. Так, Г. А. Нуждин указывает, что доказательство — «мерцающий» феномен, оно специфически нестабильно, поскольку является воспроизведением смысловой структуры. «Где уверенность — пишет он — что каждый раз мы получим доказательство того же самого?» (*Нуждин Г. А.* Доказательство // Вопросы философии. 1998. № 9. С. 138). Но если доказательство нестабильно, то каковы основания говорить о стабильности его продукта, результата? Результат, полученный в давние времена, может оказаться непонятным, поскольку поддерживающая его смысловая структура (доказательство) как в аспекте терминологии, так и в аспекте методологических приемов может не «вспыхнуть» в очередной раз, не породить нашего понимания. Примеры — результат Л. Эйлера, что сумма ряда 1-1+1-1+1...= 1/2; результат Г. Кантора о несчетности множества действительных чисел; результат А. Пуанкаре о грушевидной форме устойчивости вращающегося жидкого тела.

3. Общим недостатком когнитивно-фундаменталистского направления, я полагаю, выступает отрыв знания от деятельности по получению этого знания и от реального научного сообщества, производящего и воспроизводящего данную деятельность. Так, в рассматриваемой статье, математика понимается автором когнитивно, т.е. только как совокупность утверждений, представленных в текстах. Следствием этого недостатка является жесткое деление систем знания (понятийных систем) по степени их априорности.

Даже логика, арифметика и евклидова геометрия, помещенные В. Я. Перминовым в раздел априорных понятийных систем, не определяются всего лишь «простейшими и неизменными требованиями практики, независимыми от какой-либо культуры», «чисто когнитивными принципами, проистекающими только из функции понятийного мышления», но и зависят от степени развитости этой практики, от исторического усовершенствования когнитивных принципов. Так, утверждение $\omega+1=1+\omega$ менее ясно, чем утверждение 123456789+123456789=246913578 (о чем писал П. К. Рашевский в статье «О догмате натурального ряда» // Успехи математических наук. 1973. Т. 28. Вып. 4). В свою очередь, это утверждение менее ясно и воспроизводимо, чем утверждение 7+5=12, которое в качестве примера числовой формулы — синтетического априорного положения приводит И. Кант в «Критике чистого разума» («Трансцендентальное учение о началах», часть вторая, отдел первый, книга вторая, глава вторая, раздел третий).

А. А. Григорян

Я отношу себя к представителям социокультурного подхода в современной философии математики, так жестко раскритикованному в статье В. Я. Перминова. И мне трудно согласиться с тем, что в рамках этого подхода «мы занимаемся заведомо второстепенной работой». Я думаю, вне социокультурной традиции в современной философии математики вряд ли могут быть разрешимы проблемы выявления предпосылок возникновения тех или иных математических теорий, объяснены предпочтения математиков, обусловивших признание или непризнание на данном этапе развития науки тех или иных альтернативных линий развития математических представлений. В то же время я полностью разделяю те утверждения автора статьи, которые касаются влияния социокультурных факторов на сами результаты математических исследований. Отличие математических представлений, в которых выражаются различные связи между математическими объектами от представлений о добре, зле, красоте и безобразии, жизни и смерти, как раз и состоит в социокультурной инвариантности первых. Другими словами, можно говорить о социокультурной обусловленности возникновения и особенностей развития математических теорий, о причинах приоритетности каких-либо направлений математических исследований в данном социокультурном контексте, но вряд ли имеет смысл серьезно рассуждать о социокультурной обусловленности самого содержания математических теорий.

С. В. Добронравов

В основе обсуждаемой статьи лежит жесткая дихотомия «наука — культура», которая обосновывается тем, что ядром культуры всегда является совокупность некоторых ценностей, наука же «свободна от ценностных установок». Вряд ли с такими утверждениями можно согласиться. Определение культуры только через понятие ценности исключает из нее практику, которая в таком случае остается только на долю одной лишь науки. Тем самым игнорируется вся т.н. «материальная культура», которая, однако, без практики невозможна: жизнедеятельность человека является человеческой лишь в той мере, в какой он использует в ней те или иные предметы, не существующие в природе и специально сделанные им в соответствии со своими «практическими» потребностями. Поэтому культуру можно определить как «совокупность способов и приемов человеческой деятельности (как материальной, так и духовной), объективированных в предметных, материальных носителях и передаваемых последующим поколениям» (Современная западная социология // Словарь. М., 1990). При таком понимании культура оказывается, также как и наука, «функционально включенной в практику». В этом случае оппозиция науки и культуры исчезает, и социокультурный подход опять вступает в свои права. С другой стороны, в науке, вопреки мнению В. Я. Перминова, также имеются некоторые ценности — экономность, простота, гармоничность и т.д. — список хорошо известный и достаточно обширный. Без них был бы невозможен выбор из конкурирующих научных теорий, да и само их построение. Однако, согласно автору, ценности — это всегда нечто, социокультурно обусловленное, следовательно, наука, включая в себя такого рода элементы, неизбежно оказывается подвержена социокультурным влияниям. В связи с этим следует указать на несомненное противоречие, имеющееся в статье В. Я. Перминова. А именно, сперва он утверждает, что «научная теория автономна от культуры в стадиях своего развития», а менее чем через полстраницы — что «в процессе своего развития она неизбежно освобождается от всех следов внешних влияний» (т.е. культуры). Второе утверждение несовместимо с первым: нельзя освобождаться от того, что изначально отсутствует, или быть автономным в своем развитии от того, что этим развитием устраняется. Таким образом, как минимум одно из этих утверждений подлежит устранению, и по всей видимости таким утверждением оказывается то, что указано первым. Наука — это не внезапное откровение вечных и универсальных истин, а долгий и трудный путь к истине от заблуждения, и именно с заблуждения чаще всего начинается история науки. Период заблуждений есть не что-либо, к истинной науке никакого отношения не имеющее, а необходимое предварительное условие ее возникновения в результате коррекции, замены, расширения и т.п. первоначальных (ошибочных) предположений. Так, создание современной химической теории было бы невозможно без предшествующей ей «околонаучной» теории флогистона. Свободным от социокультурных влияний может оказаться только конечный результат этого пути, но не сам путь, поскольку положения, первоначально выдвинутые для объяснения, а при дальнейшем развитии науки признанные ошибочными и замененные другими, несомненно, хотя бы отчасти социокультурно обусловлены. Всякое положение научной теории есть ответ на некоторый вопрос, возникший у ученого, условия же возникновения этого вопроса могут быть как имманентными науке («внутренние вопросы теории»), так и трансцендентными по отношению к ней, вненаучными — последние особенно в тех случаях, когда наука еще не создана, а еще только формируется, и какие-либо «внутренние проблемы», естественно, отсутствуют. Поэтому, вопреки утверждению автора, полное право на существование имеет «социокультурная философия науки, объясняющая логику развития науки из социокультурных феноменов». Социокультурно не обусловленными могут быть не научные проблемы, а их решения — научные теории, и только в своей развитой, завершенной форме, когда, исходя из определенных теоретических положений, мы производим определенные действия, результат которых полностью соответствует тому, что предусмотрено данной теорией. Только это может быть свидетельством инвариантности науки по отношению к различным культурам, поскольку совершение подобных действий доступно представителю любой культуры. Последнее, однако, возможно только в естественных науках, так как здесь имеется внешний критерий истинности — совокупность тех феноменов, о которых говорится в данной теории, «природа», являющаяся пределом теоретических построений. Для математики же никакого внешнего критерия не существует. Поэтому в ней нет различия между теоретическим положением и подтверждающим (или опровергающим) его природным фактом; предположение оказывается одновременно и подтверждением, или, как говорил еще Аристотель, одним и тем же — мысль и то, о чем эта мысль. Вследствие этого исчезают основания утверждать, что математические теории свободны от социокультурных влияний — ведь попавшее в них социокультурно обусловленное положение не будет корректироваться и устраняться внесоциальным предметом этих теорий. Их предмет — они сами, и в таком случае никакое их развитие не устранит имеющуюся социокультурную нагруженность — нечем. Она будет присуща завершенной науке в той же мере, как и только формирующейся.

Отсутствие внешнего критерия в математике также означает отсутствие ее связи с предметной деятельностью. На какие действия могли бы быть направлены «Начала» Евклида? Ответ ясен: ни на какие. Евклидова геометрия (точно также как и любая другая развитая геометрическая система) принципиально «непрактична», ибо предметная деятельность никогда не имеет дела ни с параллельными прямыми, ни с безразмерными точками, ни с одномерными линиями, ни с чем-либо подобным, что, собственно, и конституирует евклидову геометрию. Все это принципиально не может быть встроено в предметную деятельность из-за своего идеального, непредметного характера.

А вот исключив культуру из практики, В. Я. Перминов чрезвычайно упростил себе задачу критики социокультурного подхода, представив последний как некоторую разновидность психологизма (знание, социокультурно обусловленное, — это знание, обусловленное психологическими особенностями данного социума). Конечно, опровергнуть концепции такого рода ничего не стоит — против них достаточно традиционных антипсихологистских аргументов. Однако ими критикуемое направление в философии науки вовсе не исчерпывается. (Замечу, кстати, что напрасно автор упрекает самого Э. Гуссерля в психологизме, поскольку, выводя структуры науки из структур практики, он сам оказывается повинным в этих «грехах»). Существуют и иные концепции, доказывающие социокультурную (или, как лучше будет говорить в этих случаях, просто социальную) обусловленность любого, в том числе и строго-научного, знания путем «дедукции» его содержания из структуры определенной социальной практики. Против таких теорий, которые также основываются на понятии практики, возражать значительно труднее. Легко иронизировать по поводу «китайской или японской физики», но попробуйте доказать независимость как физики, так и любой другой науки от «европейской» социальной практики (т.е. той, которая впервые возникла именно в Европе и в дальнейшем в большей или меньшей степени распространилась по всему земному шару — в марксизме, например, это называется «капиталистическим способом производства»). Ссылки на общезначимость и т.п. свойства научных положений в этом случае уже не помогут, так как они легко могут быть интерпретированы, скажем, таким образом: восприятие субъектом иной социальной практики «европейских» наук возможно только при радикальной перестройке всей его практики — он вырывается из структур той социальной практики, к которой ранее принадлежал, и включается в совершенно другую практику, благодаря чему и усваивает ее продукты. Тогда перед нами уже не внеисторичность и универсальность определенных схем деятельности по отношению к различным «субъективным» культурам, а вытеснение одним типом практики всех других, вследствие чего и возникает иллюзия внеисторичности и универсальности. Говоря более абстрактно, «практики вообще» не существует, есть лишь различные исторически обусловленные практики, и если, как утверждает В. Я. Перминов, «система феноменов, являющаяся базой науки, однозначно задается в сфере практики», то ни о какой внеисторичности и общезначимости науки говорить не приходится, ибо исторически обусловленная социальная практика будет конструировать только исторически же обусловленные («субъективные») феномены. Указанием на инвариантные элементы различных социальных практик здесь ничего добиться нельзя, так как любая практика есть единое целое, и даже если подобные элементы существуют, то они «сплавлены» с другими, исторически обусловленными в одну неделимую структуру, и все, что произведено ею, будет опять же иметь социокультурно обусловленный характер. Признавая, что «наука есть лишь часть практики», нет никаких оснований выводить из этого, что она «подчинена непосредственно универсальным требованиям практики» — наука может оказаться подчинена и не универсальным требованиям практики тоже, поскольку последняя не может происходить при отсутствии любого из своих компонентов — обусловленного точно также как безусловного (если таковые есть).

ОТВЕТ АВТОРА

За недостатком места я отвечу лишь на некоторые из возражений, выдвинутых моими оппонентами.

Я согласен с утверждением А. Г. Барабашева о том, что можно выделить несколько направлений нефундаменталистской философии математики. Степень необходимой детализации, однако, зависит от характера вопроса. Меня интересует простой вопрос, состоящий в том, какие элементы теории являются инвариантными, не подверженными вненаучным влияниям, и существуют ли такие элементы вообще. Я иду, так сказать, изнутри, от рассмотрения собственных элементов науки и пытаюсь показать, что некоторые из них являются априорными и предельно стабильными. При таком подходе у меня не возникает необходимости различать сторонников релятивизма по их видам. Если я показал инвариантность некоторых элементов знания, то это все, что я хотел сказать. Очевидно, что здесь возможен и другой подход, заключающийся в возможно более сильном проведении релятивистской позиции, который потребовал бы детального анализа аргументов нефундаментализма и сравнения его различных направлений. Я думаю, что А. Г. Барабашев может сделать эту работу более квалифицированно, чем кто-либо другой, и могу лишь выразить сожаление по поводу того, что он никак не может взяться за это дело серьезно.

Аргументы против фундаментализма, высказанные в данном комментарии, меня не убеждают. А. Г. Барабашев исходит как из чего-то несомненно обоснованного из положения о релятивности математического доказательства. Но, в действительности, релятивность доказательства никто не доказал, хотя это и пытались сделать многие. Несмотря на большое число книг и статей, написанных на эту тему (И. Лакатос, Л. Кальмар, Д. Девис, М. Клайн, Ф. Китчер и др.), убедительной теории, обосновывающей фаллибилистскую концепцию доказательства, не существует. Примеры типа ряда

Лейбница ($1 - 1 + 1 - 1 + ... = 1/2$) и т. п. также ничего не доказывают, ибо априористская позиция не отвергает возможности ошибок и заблуждений в математической теории на этапе ее формирования. Математическая теория отличается от содержательной не тем, что она не содержит ошибок и неясностей, а тем, что она на определенном этапе полностью очищается от них и всегда содержит неразрушимый центр, абсолютно свободный от этих изъянов.

А. Г. Барабашев пытается внести релятивность в само понимание аподиктической очевидности, указывая на то, что, в действительности, существует некоторая иерархия очевидностей. Утверждение $5 + 7 = 12$ более очевидно, чем утверждение $123456789 + 1234567 = 24691138$, а это последнее более очевидно, чем утверждение $\omega + 1 = 1 + \omega$ и т.д. Психологически эта иерархия действительно имеет место, но она ничуть не колеблет нашу уверенность в предельной надежности всех операций арифметики. Хотя утверждение $5 + 7 = 12$ более очевидно, чем утверждение

$$123456789 + 123456789 = 246913578,$$

нам интуитивно ясна схема получения последнего равенства и, таким образом, оно может считаться ничуть не менее обоснованным, чем утверждение $5 + 7 = 12$. Кант и Брауэр принимали в качестве предельно обоснованных как непосредственно очевидные утверждения арифметики, так и все утверждения, в составе которых лежит самоочевидная конструкция. Поскольку арифметика может быть полностью обоснована на этом (конструктивном) пути, то надежность элементарной математики никак не затрагивается наличием иерархии очевидностей, выявляемой при непосредственном сравнении арифметических утверждений. Утверждения же типа $\omega + 1 = 1 + \omega$ не относятся к арифметике и к априорной математике вообще. Иерархия очевидностей, таким образом, не ставит под сомнение положение о существовании априорного знания, а, самое большее, указывает на трудности строгого определения его границ.

Я не хотел бы здесь обсуждать вопрос об определениях культуры, которые предлагаются в комментарии С. В. Добронравова. Я не думаю, что учет многообразия этих определений каким-то образом приближает нас к решению вопроса, затронутого в статье. Моя цель состоит только в том, чтобы определить инвариантные моменты развития научного знания, и эта инвариантность, если она существует, должна быть обоснована из определений науки, а не из определений культуры. Добронравов видит противоречие моей концепции в том, что, с одной стороны, в ней утверждается автономность научной теории от культуры в стадиях ее развития, а, с другой стороны, говорится об очищении теории от внешних влияний. Мне кажется, что в статье достаточно ясно сказано, что наука автономна от внешних влияний только в смысле своей эквифинальности, т.е. в смысле независимости от внешних влияний ее *зрелой* структуры. Независимость в этом смысле и очищение вполне совместимы. Я думаю, что это относится и к стадиям развития науки. Реальный исторический путь развития научной теории, конечно, существенно обусловлен внешними обстоятельствами, но логика этого развития (реконструированная история) будет свободной от этих влияний. У Гегеля есть важное понятие логического как исторического, очищенного от случайностей. Для пояснения этого момента я сравнивал историческое развитие научной теории с ростом растения, которое развивается по своим стадиям, определенным только его генотипом. История науки не может быть понята без учета такого рода железной логики стадий, определенной только предметом науки.

В рассуждениях о практике С. В. Добронравов, как мне кажется, смешивает вопрос о практической направленности математики с вопросом о праксеологической природе исходных математических представлений. Геометрия Евклида при своем возникновении вряд ли была направлена на какую-либо практику. Я думаю, что мы должны категорически возражать против примитивного истолкования происхождения геометрии из измерения земли или из какой-либо другой практики. Геометрия, однако, является праксеологической дисциплиной в том смысле, что в своих исходных идеализациях она отражает представления, порожденные практической ориентацией человеческого мышления вообще. Геометрия потому и могла возникнуть вне конкретной практики, что по своей сути она отражает не частную практику, а форму мышления, порожденную практикой вообще. Отсюда, в частности, ясно, что адекватная концепция становления математики требует анализа не частных видов практики, а практики вообще, как активности, определяющей всякое мышление.

В целом я согласен с установкой А. А. Григоряна, в которой разделены два аспекта автономности математической науки. Связи между объектами математики не зависят от социокультурных влияний, хотя развитие математической теории, как и развитие всякой другой теории, подвержено этим влияниям. Я хотел бы лишь несколько уточнить это разделение указанием на тот факт, что развитие теории также имеет инвариантный момент, выраженный в жесткой связи стадий развития. Эта связь стадий выражается, в частности, принципом соответствия.

Важность социокультурного анализа математики и науки в целом нельзя отрицать в тех пределах, в которых он не разрушает когнитивных принципов, определяющих ее развитие. Мои претензии к современому социокультурному анализу науки заключаются в том, что он очевидным образом выходит за эти пределы. Я протестую против такого рода социокультурных упражнений в философии науки, когда ученые с серьезным видом связывают основания науки с характером культуры, сводят строгость математического доказательства к простой убедительности, имеющей историческoй значение, объявляют нормы логики зависимыми от типа цивилизации и т.п. Все эти суждения проистекают, на мой взгляд, исключительно из случайных аналогий, и их несостоятельность становится совершенно очевидной, как только мы начинаем более внимательно исследовать сущность науки и природу ее оснований.

Раздел третий

СТИЛИ В ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

ТИПОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ АРИФМЕТИКИ ДРЕВНЕГО ЕГИПТА И МЕСОПОТАМИИ

Янков В. А.

В данной работе делается попытка связать дошедшую до нас арифметическую технику (логистику) двух древних цивилизаций с общими типологическими свойствами этих великих культур. Последнее относятся к тому, что я хотел бы назвать «экзистенциальным типом» культуры: имеется в виду совокупность самых общих глубинных представлений о мире, о силах, в этом мире действующих, и о месте человека среди этих сил. Другое предлагаемое наименование — «фундаментальная картина мира».

В Древнем Египте она определяется противоположностью жизни и вечности. Наследие мегалита определяет эту вечность как магию камня, которая может дать человеку посмертное вечное существование. Стилем жизни является здесь некоторая монументализация, обретение формы, уподобляющей вечному при сохранении живого природного содержания. Эта форма и в живом индивидууме даёт гарантию его цельности, защищает его от разлагающего вторжения враждебных сил. Отсюда особенности египетского мышления: существа не оторваны от магической первоосновы Вселенной, а потому по сути неприкосновенны, не подлежат свободному манипулированию.

В противоположность к этому в Месопотамии первичная магия стихий преодолена силою богов, наделённых волей и произволом и в этом смысле антропоморфных. Человек оказывается здесь рабом и служителем богов; он должен смириться со своей смертностью, и с загробным миром у него не связано ничего положительного. Однако, взамен связи с магическими стихиями человек получает свободную волю вместе с её ядром — произволом, а с вещей спадает магическая защита. Особую роль в новом взгляде на вещи играет «мантический», гадательный подход к ним, когда какие-то естественный или необычные явления служат для раскрытия «записанной» в них воли богов, и жрец-гадатель должен уметь прочесть в них эту волю. Процессы и явления должны истолковываться при этом не сами по себе, а как знаковые схемы sui generis- возникает новое видение вещей как некий «мантический схематизм».

Иллюстрацией к этой кардинальной противоположности может служить письменность, исходящая из очень сходной пиктографической основы, но развивающаяся в различном направлении: в Египте в ярко изобразительную иероглифику, в Месопотамии — в клинопись, т.е. в систему различных знаковых фонетических и идеографических элементов. Я позволю себе здесь отвлечься и от некоторого развития «знаковости» в поздней египетской системе и от чисто исторических объяснений эволюции письменности в Месопотамии. На мой взгляд такие объяснения (техника письма, рецепция семитами шумерской пиктографии) никогда не являются исчерпывающими. Сходные явления в других культурах, например рецепция иероглифов народами Дальнего Востока, могут и не приводить к сходным результатам. То, что я называю «экзистенциальным типом» во всяком случае является одним из факторов процесса, действуя как постоянное силовое поле, что, впрочем, не означает его неизменности.

Имея всё это в виду, я хочу обратить внимание на некоторые особенности арифметической техники двух культур.

Египетская «**теория дробей**» была изучена и описана О. Нейгебауэром (Лекции по истории античных математических наук. Т. I. С. 155—173). Она состоит в искусстве разлагать правильные дроби на составляющие вида $1/n$ ($n \geq 2$), к которым присоединена дробь 2/3 (Нейгебауэр называет их «основными» дробями). При этом в разложении конкретной дроби на основные дроби каждая из последних может фигурировать только один раз. Можно поэтому сказать, что египтянин ощущает каждую из основных дробей индивидуально и такая индивидуальность не может фигурировать дважды в выражении. Правильная дробь разлагается, таким образом, на сумму индивидуальных, не тождественных друг другу единиц, что вполне соответствует охарактеризованной выше фундаментальной картине мира. «Основные» дроби понимаются как индивидуальные составляющие, подобно каменным блокам, а другие правильные дроби — это некоторая неповторимая композиция таких составляющих.

Что касается представления целых чисел, то здесь возможна только единственная система, позволяющая разбивать каждое число на сумму неповторяющихся индивидуальных компонент, а именно — двоичная. В Египте мы видим всё же десятичную систему. Однако, более пристальный анализ позволяет нам открыть следы двоичности. Речь идёт о способе египетского умножения. Множитель фактически разбивается на степени двойки, и параллельно этому разбиению выстраивается последовательность множимого, умноженного на соответствующие степени, накопление чего и даёт результат. Это показывает, что первоначальное понимание чисел как «обрабатываемых» сущностей имеет в виду собрание индивидуальностей.

Если мы обратимся теперь к месопотамским «логистическим» средствам, то уместно вспомнить, что основной «оперативной», т.е. связанной с вычислениями системой счисления в Месопотамии была шестидесятеричная. Однако, каждое выражение в этой системе не мыслилось как выражение индивидуального числа, а интерпретировалось ситуационно — в зависимости от контекста. То есть выражение, для нас наиболее естественно понимаемое как обозначение единицы или, скажем, одиннадцати, вычислитель мог понимать и как обозначение 60 (660) и как обозначение 3600 (39600) и даже как обозначение одной шестидесятой (одиннадцати шестидесятых).

Это даёт возможность однородных мультипликативных операций. Тем самым конкретное число изображается таким образом, что в этом изображении проявляется некая общая схема, подобно проявлению абстрактного сообщения в мантическом предмете. Индивидуальность числа подавляется, и открываются новые возможности оперирования им.

Отсутствие шестидесятиричных нулей в завершающей позиции необходимо для таких вычислений, потому что их условием является отвлечение от конкретной индивидуальности числа и выявление в нём его «абстрактной» сущности, позволяющей равномерные вычисления, которые были обеспечены таблицами. Наоборот, на промежуточных позициях появление таких нулей оказывалось весьма полезным, и постепенно вавилонская математика пришла к этому.

Конечно, этими положениями обрисован только «идеальные» типы египетской и месопотамской логистики. Обе системы в своих истоках были связаны конкретными дробями, а система счисления в обоих случаях включала и десятичные компоненты. В Египте обращает на себя внимание вспомогательная техника так называемых «красных» чисел. Эти числа — не обязательно правильные дроби, — представляемые как индивидуальные суммы «основных» дробей и целых, сопровождали основное вычисление. Но их **единицей** мыслилась не натуральная единица, а некоторая **«основная»** дробь. Такая «подвижность» единицы — уже шаг в стороны «схематизации». Но мышление не сделало здесь дальнейших шагов: «единицами» не стали произвольные числа и даже просто целые. Кроме того, красные числа всегда играют только вспомогательную роль.

Нейгебауэр связывает происхождение месопотамской шестидесятиричной системы с некоторым реконструируемым им случайным историческим фактом: появлением двух разных групп единиц измерений, сходных по внутренней структуре и различающихся друг от друга множителем, примерно равным шестидесяти. Но если исторические факты и угаданы здесь верно, в чём нельзя быть безусловно уверенным, всё равно остаётся вопрос, почему однородность представления чисел в двух позициях стала стартовой площадкой для осознания такой однородности в неопределённом числе позиций. В египетских «красных» числах произошло как раз обратное: однородное оперирование с единицей (с её кратными и долями) и с некоторой «основной» дробью отнюдь не приводит к подобному же оперированию с любым числом вообще. Новыми индивидуальностями, да и то в ограниченном применении, признаются только «основные» дроби. Что-то мешает египетскому математику, и, как мне представляется, дело именно в магическом ощущении индивидуальности. В $^1/_{15}$ такую индивидуальность ещё на время можно признать, но, скажем, в $4 + ^2/_3 + ^1/_5$ ($= 4\ ^{11}/_{15}$) это уже невозможно.

Месопотамское мышление явно превосходит египетское в способности увидеть в вещах общую схему, отрывающуюся от самой вещи. В этой связи я упоминал уже о мантических процедурах. Вот описание, принадлежащее А. Л. Оппенхейму: «[Гадатель] исследовал в традиционной последовательности дыхательные пути, лёгкие, печень, жёлчный пузырь, кольца кишок животного, искал отклонения от нормального состояния. Всякого рода атрофия, гипертрофия, смещение, особые признаки и другие аномалии органов считались основой для предсказания. Сложная и детально разработанная техническая терминология давала возможность составить исчерпывающее описание всех наблюдавшихся явлений, со строго научным перечислением как нормальных, так и патологических особенностей» (*Оппенхейм А. Л.* Древняя Месопотамия. М., 1980. С. 215). Собственно для предсказаний использовались специальные сборники, содержащие признаки, соответствующие им предсказания, а часто и рецептуру — средства предотвращения. Эти своеобразные «таблицы» составлялись на основе тщательно изученного опыта странных природных явлений и наступавших вслед за тем значимых событий.

Параллелью к мантике является месопотамская медицина, тоже использующая таблицы накопленного опыта. «В ряде таблиц установленный образец предсказания (протасис — аподосис) используется для изложения медицинских сведений... Лечение, которое прописывается в исключительно редких случаях, носит магический, а не медицинский характер» (там же, с. 229).

Развившаяся со временем алгебра также широко пользовалась таблицами и имела рецептурный характер, подобно мантике или медицине. Уравнение старались привести к стандартному виду, и существовали таблицы, помогавшие отыскивать решение, например таблицы для функций n^3+n^2 и 2^n. Первые служили для решения кубических уравнений; вторые — для решения задач, связанных с ростом денег.

Цель этих наблюдений — в выявлении внутреннего родства различных феноменов культуры, а не в притязаниях открыть одностороннюю причинную линию от глубинного экзистенциально-религиозного мироощущения к характеру письменности, искусства или математики. Такое мироощущение во времена первых цивилизаций, да и в гораздо более позднее время, несомненно, было ядром всей культуры, но это не означает, что оно было отделено непроницаемой скорлупой от всего потока жизни и от деятельности в других отраслях. Развитие, скорее всего, было совокупным, но роль «экзистенциального» фактора в нём была очень значительной, так что прослеживание и истолкование соответствий и «перекличек» между явлениями в различных ветвях культуры, выявление их глубинного смысла представляется весьма обещающей деятельностью.

КОММЕНТАРИИ

А. А. Григорян

Проблема, поставленная в статье В. А. Янкова, представляется чрезвычайно актуальной в рамках нефундаменталистской философии математики. Действительно, при всей похожести социально-экономических структур цивилизаций Древнего Египта и Месопотамии, а также тех практических проблем, которые решали писцы — носители знаний, историки математики фиксируют огромные различия математических культур этих цивилизаций (преимущественно геометрический характер первой и арифметико-алгебраический — второй). И эти различия начинаются с основы основ практически-ориентированной математики — системы счисления.

Надо сказать, что с точки зрения социокультурного подхода в истории и философии математики идея о том, что именно специфические особенности культуры и мировосприятия древних египтян и жителей древней Месопотамии обусловили вышеупомянутые различия, представляется достаточно естественной, поскольку культурные и мировоззренческие отличия этих цивилизаций видны невооруженному взгляду. Так, в частности, если египтянину эпохи Древнего царства были присущи независимость и уверенность в своих силах, острое ощущение своей индивидуальности, то для его современника в Месопотамии характерно представление о том, что человек слаб, и ему остается лишь надеяться на милость мощных, часто сокрушающих его космических сил — богов. Однако если саму гипотезу о социокультурной обусловленности в общем плане поддерживают многие ученые, далеко не каждый из них возьмет на себя смелость указать конкретный механизм трансформации социокультурных нюансов во вполне определенные черты математического знания. По-моему, попытка В. А. Янкова является хорошим примером для подражания тем исследователям, кто стремится перейти от общих фраз к получению конкретных результатов в рамках социокультурной философии математики. Впрочем, цепочка рассуждений автора, связывающая социокультурный контекст с особенностями математической культуры рассматриваемых им цивилизаций, требует, возможно, ряда дополнений и уточнений. В частности, на мой взгляд, заслуживает серьезного внимания гипотеза о влиянии на преимущественно алгебраический характер математических интересов древних вавилонян их астральной религии и астрологических изысканий, несмотря на то, что дошедшие до нас «астрологические тексты» и результаты наблюдений за планетами относятся к более позднему времени, нежели таблички, содержащие основные арифметико-алгебраические результаты.

Е. А. Зайцев

В современной историографии можно выделить несколько подходов к интерпретации древнеегипетской и вавилонской математики. Во-первых, математика этих культур анализируется с точки зрения современных классификационных схем (арифметика, алгебра, геометрия и т. д.) и, таким образом, отождествляется с некоторой неразвитой формой соответствующей дисциплины. Либо характерные математические приемы интерпретируются, исходя из требований, предъявляемых хозяйственной практикой (способы хранения и передачи информации, землемерие и т.п.). Либо речь идет об анализе математического корпуса, формировавшегося в школе, с точки зрения логики учебного процесса. Каждый из указанных подходов имеет свои ограничения и недостатки, подробно распространяться о которых в этом комментарии было бы неуместно. Недостатки первого подхода очевидны — в его рамках невозможно объяснить такие характерные артефакты архаичной математики, как формулы «ложной площади», повсеместно использовавшиеся в землемерной практике.

В своей заметке (статья скорее носит характер эссе, нежели академического исследования) Вадим Анатольевич предлагает совершенно новый подход к интерпретации египетской и вавилонской математики. Он соотносит определенный фрагмент математики, а именно, арифметику, с общекультурными, или, по терминологии автора, «экзистенциальными» характеристиками этих цивилизаций. Отметим, что в случае успешной реализации этой идеи авторская концепция «экзистенциальной истории» (см. также публикацию: *Янков В. А.* Эскиз экзистенциальной истории // Вопросы философии. 1998, № 6. С. 3—28, особенно — С. 6. К сожалению, в этой содержательной работе Древнему Египту и Месопотамии посвящены всего 2/3 страницы, поэтому она мало что добавляет к общей характеристике двух культур, приведенной в комментируемой публикации) получила бы серьезное подкрепление, а история математики обогатилась бы новыми возможностями интерпретации своих феноменов.

Прежде всего обратим внимание на выбор арифметики в качестве параметра, по которому осуществляется сравнение математических культур Древнего Египта и Месопотамии. С формальной точки зрения этот выбор представляется оправданным, поскольку именно в арифметике проявляется серьезное различие между египетским и вавилонским подходами: оно касается способов представления чисел и, соответственно, приемов осуществления арифметических операций. Однако на деле «удачный» выбор автора отнюдь не способствует повышению доверия к его реконструкции. Поскольку возникает естественный вопрос, почему обладающие столь высокой степенью общности характеристики культуры, как «индивидуализм» (Египет) и «мантический схематизм» (Месопотамия), оказываются нормативными лишь для одной достаточно узкой области математики, а не распространяются на весь корпус математического знания? Не означает ли это, что различие в способах представления чисел носит случайный характер, а отнюдь не является продолжением «экзистенциальных» культурных типов, как это хочет представить автор? Чтобы избежать недоразумений, отметим сразу: арифметика, на деле, является единственной областью, по отношению к которой, с формальной точки зрения, можно говорить о различиях в подходах; в других областях египетской и месопотамской математики используются, по-существу, идентичные приемы и методы. Один из ведущих современных специалистов по вавилонской математике Й. Фриберг пишет: «На первый взгляд кажется, что египетские математические папирусы иератического письма не имеют ничего общего с клинописными текстами вавилонской математики. Однако, внимательное исследование показывает, что различие между египетскими и вавилонскими математическими текстами сводится по существу лишь к использованию двух различных типов базисной арифметики». (См.: *Friberg J.*, Mesopotamian Mathematics: A Survey. Preprint № 1991-06/ISSN 0347-2809. Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, The University of Goeteborg, 1991. P. 53. Перепечатка статьи «Mathematik» из энциклопедии: Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archaeologie).

Предположение о случайном характере различия в системах арифметики является тем более правдоподобным, что, по сути дела, речь в статье идет даже не об арифметике в целом, а лишь о специальном ее разделе — представлении дробей. И это оправдано, поскольку в сфере целых чисел «индивидуализм» египетской математики оказывается «смазанным» тем, что цифры (представляющие единицы, десятки, сотни) формируются путем повторения одного и того же знака необходимое количество раз. Однако и по отношению к проявлениям «схематизма» в месопотамском представлении дробей необходимо существенное уточнение. Дело в том, что этот «схематизм» проявляется в одном единственном контексте — когда дроби используются в вычислениях. Во всех иных контекстах (речь идет о хозяйственных текстах, равно как о формулировках задач и ответов в математических текстах) используются обычные «индивидуальные» дроби, обязанные своим происхождением той или иной метрологической системе и потому характерные для всех цивилизаций без исключения (см., например, *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук. М.; Л., 1937. С. 104—105).

Итак, попытка уловить в математике Египта и Месопотамии следы «экзистенциальных» культурных типов («индивидуализм-схематизм») формально приводит к положительному результату лишь по отношению к единственной и притом крайне узкой узкой области математического знания.

Но остается еще сторона неформальная, исследование которой было в свое время проведено О. Нейгебауром. Тонкий знаток древней математики Нейгебауэр пришел к выводу о том, что различие в представлении дробей не отражает ничего специфически «вавилонского» или «египетского». Результатом хорошо фундированного исследования стал тезис о том, что «аппарат египетских дробей возник естественным путем в историческом процессе, и с точки зрения его исходных понятий его развитие можно считать вполне аналогичным развитию вавилонской математики» (см.: *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук. М.—Л., 1937. С. 170. Подробную аргументацию см. в гл. II, § 3, 4; гл. IV, § 1). В этом вопросе я могу лишь солидаризироваться с мнением С. Я. Лурье о том, что реконструкция Нейгебаура, опирающаяся на здравую идею соединения двух различных метрологических систем, является «красивой и убедительной» (там же, с. 8). Во всяком случае, вступая в полемику с Нейгебауэром, нельзя ограничиться несколькими негативными замечаниями. Контраргументация должна быть, как минимум, столь же солидно подкреплена историческими фактами (см., например, *Вайман А. А.* Шумеро-вавилонская математика. М., 1961. С. 16—18).

Настоящий комментарий отнюдь не ставит под сомнение саму интенцию исследования. Напротив, я с симпатией отношусь к попытке Вадима Анатольевича связать математическую стилистику со стилистикой общекультурной. Я лишь хотел обратить внимание на объективную трудность такого предприятия по отношению к культурам древности и тем самым предостеречь от поспешности в выводах.

Есть цивилизации, по отношению к которым исследование исторических форм математики в тесной связи с типологическими характеристиками культуры несомненно является перспективным. К таким цивилизациям относятся древнегреческая или новоевропейская, в рамках которых математика играет роль своеобразной реплики, в которой манифестируются сущностные (если угодно, «экзистенциальные») характеристики культуры. Что же касается математики других цивилизаций (особенно древних), то аргументированно отстаивать тезис о наличии сущностной, а не акцидентальной связи с культурными типами довольно сложно. Древние цивилизации настолько отличны от привычной нам европейской культуры, а источники столь скудны и неоднозначны, что легче указать на родовые характеристики общие для этих цивилизаций, нежели на их видовые отличия. Вадим Анатольевич, например, полагает, что для Рима характерен «конкретный индивидуализм» (см. *Янков В. А.* Эскиз экзистенциальной истории // Вопросы философии. 1998, № 6. С. 15). Однако известно, что в основе проявлений римской религиозности (культ Юпитера) лежат ауспиции (гадания по полетам птиц) и гаруспиции (по внутренностям жертвенных животных), по-видимому, восходящие (через посредство этрусков) к традициям месопотамского «мантического схематизма». А вот в представлении дробей у римлян действительно, можно указать на черты «индивидуализма», что, впрочем, не является собственно римской чертой. Прежде всего это замечание относится к историческим формам математического знания. Всем так называемые «цивилизациям Востока» свойственен, по существу, один и тот же тип математики, который характеризуется тем, что в центре внимания находятся количественные характеристики материальных объектов (именованные числа), а в качестве метода используются чисто рецептурные приемы при полном отсутствии логического доказательства. Выделение видовых особенностей математической культуры той или иной цивилизации Востока, поэтому, крайне затруднено.

По отношению к математике Древнего Египта и Месопотамии отметим дополнительные трудности, связанные с доступностью или репрезентативностью источников. Так единственными математическими текстами в Египте эпохи фараонов являются (не считая небольших фрагментов) всего лишь два папируса — Райнда и Московский, относящиеся примерно к одному и тому же времени. В Месопотамии ситуация с источниками значительно лучше; однако, как отмечают специалисты, обилие клинописных математических табличек не должно вводить нас в заблуждение относительно их репрезентативности. Дело в том, что за сохранность месопотамского источника (в том числе математического) ответственно не его содержание (ценность), а скорее превратности судьбы.

ОТВЕТ АВТОРА

А. А. Григорян высказал пожелание, чтобы при изучении типологии древнемесопотамской математики была учтена вавилонская астрология, но сам ответил при этом, что астрология проникла в месопотамский мир гораздо позднее рождения техники вычислений с дробями. Это время просто не входило в сферу моих наблюдений.

Теперь об аргументации Е. А. Зайцева.

Предварительно я хочу заметить следующее. «Эскизу экзистенциальной истории» предшествовали штудии как раз культур древнего Ближнего Востока, хотя я не углублялся в них до степени непосредственной работы с источниками. Было даже написано неопубликованное эссе с типологической характеристикой Египта и месопотамского региона. В «Эскизе» дана только короткая выжимка из него.

Попытка глобально связать все культурные проявления какой-то цивилизации с её «экзистенциальными» характеристиками представляется мне бессмысленной, поскольку существует преемственность технических достижений. Представьте себе историка XXX-го столетия, который после катастрофы, постигшей человечество, пытается подобным образом осмыслить нашу технику вычисления с дробями, известную ему по случайно сохранившемуся школьному учебнику, ничего при этом не зная об её исторических корнях.

Общее в культурах Египта и Месопотамии может быть объяснено общей традицией или взаимовлиянием. Но особенное может корениться в собственной творческой работе цивилизации, хотя и не обязательно — от нас может быть скрытой некая передача.

Поэтому предлагаемые мною толкования не безусловны. Но мне представляется интересной сама их возможность. Она-то и является аргументом в пользу того, что техника вычислений с дробями была разработана внутри каждой из двух цивилизаций независимо друг от друга в их креативный период.

Что касается известной исторической реконструкции Нейгебауэра, то она совместима с «типологическим» истолкованием, как и другие возможные варианты. Предполагаемое Нейгебауэром «схождение» двух различных, но сходных систем мер требует осознания тождественности схем метрологического оперирования в двух разных случаях. А это как раз и является следствием того, что я называю «снятием магической защищённости», столь характерным для Месопотамии.

Нейгебауэр даёт такое резюме: «Соединение группы меньших мер с группой больших мер приводит... к отношению 1:60 между разрядами шекель и мина. Как можно доказать соответствующими текстами, это обозначение было первоначально абсолютным: малые и большие единицы различались друг от друга тем путём, что к ним просто присоединялись соответствующие обозначения, либо по крайней мере различной величиной числовых знаков. С этого момента вступают в силу обычные процессы сглаживания. Прежде всего перестают приписывать или символически обозначать подразумеваемую единицу, так как на практике не возникает сомнений, какая именно единица имеется в виду. С другой стороны, первоначально конкретные обозначения дробных частей мер становятся обозначениями для дробей вообще и переносятся на другие группы. Таким путём и шестидесятеричная структура системы мер веса переносится и на другие области» (*Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук. М.; Л., 1937. Т. I. С. 123—124).

То, что здесь называется «обычными процессами сглаживания», как раз и подразумевает особую предрасположенность. Нужно сказать, что отмечаемые Нейгебауэром переходы естественны для некоего абстрактно «разумного» человека (например, для человека, как его представляло Просвещение). В конкретной исторической ситуации такие переходы интимно связаны с конкретной глубинной типологией человека. Стремление к пониманию таких связей и было мотивом моих размышлений в этой области.

В самом деле, как возможен переход от одной измерительной практики к другой? Или — по-другому — как возможна сама **абстракция** вычислительной практики, её изымание из контекста мер веса, перенос сначала на другие меры, а потом вообще на произвольные вычисления? Человек должен быть чем-то подготовлен внутри, чтобы совершить такой скачок. Одного удобства вычислений здесь недостаточно. Собственно говоря, моя догадка и заключается в том, что подготовкой к отвлечению является, с одной стороны, открытость конкретного для манипулирования с ним («снятие магической защищённости»), а с другой — внимание к схематизму, связанное с мантической практикой. И то, и другое отсутствовало в Египте, хотя жизнь и могла «устраивать» такие совпадения, как в Месопотамии.

В общем я соглашаюсь с Е. А. Зайцевым, что все эти соображения имеют скорее наводящий, нежели доказательный характер. Они получают осмысленное место в общем очерке культур, но это опять же не обязательно.

Впрочем, я не знаю ответа на вопрос, какого типа доказательства предлагаемой интерпретации следует считать окончательно убедительными.

ЛОГИКА КИТАЙСКОГО ТРИАДИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Крушинский А. А.

> Три вещи непостижимы для меня, и четырех я не понимаю:
> пути орла на небе, пути змея на скале,
> пути корабля среди моря и пути мужчины к девице.
>
> Книга Притчей Соломоновых. XX, 18—19

Известно, что в китайских текстах существует обширный класс однотипных рассуждений. Однотипность состоит в том, что все эти рассуждения построены согласно фундаментальной классификационной схеме «трех материалов» (*саньцай*, далее — ТМ): Небо-Земля-Человек. Нам удалось реконструировать эти ТМ-рассуждения как реализацию одной хорошо известной логической конструкции, а именно операции введения так называемой «определенной дескрипции»[1].

«Порождающая сила» элементарной[2] дедуктивной схемы ТМ обусловлена динамичной нечетно-неравновесной природой числа 3. Немного о последней.

Поразительна близость пифагорейско-неоплатонических и ицзиновских воззрений на мир, на числа вообще и на число 3 в частности. Определяющая особенность троицы, состоящая в ее изначальной цельности, — «она первая из всех обладает концом, серединой и началом, благодаря чему достигается всякая полнота завершенности»[3] — сводится к ее центрированности[4]. Эту свою срединность троица сообщает всем остальным центрированным числам, тем самым являясь источником срединности для всего существующего. Если, по словам А. Ф. Лосева, все античное мировоззрение основано на понятии центра или середины, то в неменьшей степени краеугольность середины нужно отнести и к китайской культуре с ее культом «Неизменной срединности» (*Чжунъюн*).

Что же означает эта «срединность» троицы? Понятие «середина» выявляет производящую силу числа 3, ведь последнее знаменует собой гармоническое разрешение конфликта, созданного противостоянием двух противоположных начал, и этот брачный союз противоположностей не бесплоден: его плодом и является середина, центр, третье.

Важнейшей образной конкретизацией (когда мы «спускаемся» от числа 3 к образам его воплощающим) троицы в Китае служат уже упоминавшиеся ТМ: Небо-Земля-Человек. В этом триединстве середина (Человек), как ей и полагается в силу сказанного выше, есть производная от двух пределов (Небо и Земля). Небо — это ян, Земля — инь, Человек — смешанный разряд, объединяющий в себе инь и ян, ибо в него в равной мере попадают мужчины и женщины, правители и подданные, мужья и жены, благородные мужи и «маленькие люди» и т.д. Поэтому ТМ иногда изображают в виде трех кругов, верхний из которых, обозначающий Небо, имеет белую окраску, нижний (Земля) — черную, а средний (Человек) рисуется двухцветным — наполовину белым, наполовину черным.

Что касается аргументативной роли схемы ТМ как основного дедуктивного средства древнекитайской логики, то она органично вытекает из онтологического значения троичной схемы. Заключение вывода (занимающее позицию «Человек») трактуется тут как плод супружеской четы посылок (стоящих соответственно на позициях «Неба» и «Земли»). Главнейшим признаком ТМ-рассуждения выступает его трехчастность, обычно достаточно отчетливо выраженная посредством синтаксического параллелизма, связывающего эти части воедино. Дополнительным признаком «ТМ-ности» служит

«Инь-ян контрастность» двух первых частей, часто (но не всегда) описывающих или просто называющих соответствующие полярные явления природы. В третьей, заключительной позиции стоит или фраза, впрямую относящаяся к человеку (совершенномудрому, правителю, благородному мужу и т.п.), — что-нибудь о делах правления, какая-нибудь максима поведения, задающая ту или иную этическую норму («прописную мораль», по словам Ю. К. Щуцкого[5]), — или же, в более общем (онтологическом) случае, некоторое неизвестное, искомое, определяемое-порождаемое через взаимодействие двух предыдущих частей.

В качестве примера рассмотрим следующее поучительное во многих отношениях ТМ-рассуждение общего вида[6] : «[Если] диаметр круга единица, то [длина его] окружности три. [Если] сторона квадрата единица, то [длина его] периметра четыре.

(А)

(1) Развернем периметр квадрата и сделаем [его] большим катетом.

(2) Вытянем окружность круга и сделаем [ее] меньшим катетом.

---

(3) Соединим вместе [стороны] угла, [тогда] наклонная образует гипотенузу [длиною в] пять»[7].

Поучительность данного примера состоит, среди прочего, в недвусмысленно вычислительном, алгоритмическом характере вывода — нахождении гипотенузы по двум катетам, — что вследствие, так сказать, образцовости приведенного ТМ-рассуждения для всех умозаключений подобного рода (на обосновании этого последнего утверждения мы не будем сейчас останавливаться) заставляет с большой степенью уверенности предположить существование строгих правил дедуцирования-вычисления заключений из посылок и для всех остальных ТМ-рассуждений[8].

В китайской философской классике (500—200 гг. до н.э.) опознание самих ТМ-рассуждений в отличие от распознания их дедуктивной природы обычно не составляет большого труда. Достаточно сослаться на такие общеизвестные примеры ТМ-рассуждений, как размышления Мэн-цзы о «небесных временах, земных выгодах и людском согласии» (*тяньши, дили, жэньхэ*), многочисленные ТМ-фрагменты из «Сюньцзы» в русле развиваемого им учения о «страивании с Небом и Землей» (*цань юй тяньди*) и отчетливо трехчастные построения Ханьфэй-цзы. Мы утверждаем, что ключ к пониманию такого рода построений состоит в осознании первообразности для них гексаграмм. Последние суть схемы (конечно, меньшей степени общности, чем сама троичная классификация, в свою очередь уступающая в смысле общности числу 3) и первообразы частных ТМ-рассуждений, выступающих в качестве их текстовых развертываний-экземплификаций. Поэтому выявление гексаграммного прообраза того или иного ТМ-рассуждения позволяет восстановить его логику (хотя бы в первом приближении).

Трактовка ТМ-текстов как своего рода материализаций гексаграмм с непреложностью требует обращения к ицзинистике. Пронизанность всего «И» (и, в частности, «Сянчжуани» и «Туаньчжуани») идеологией ТМ — вещь хорошо известная всем, кто более или менее знаком с ицзинистикой. «ТМ-ность» обеих чжуаней обычно обозначается современными китайскими авторами как «связь Природы и Человека». Само собой разумеется, что в силу, так сказать, «единства плана выражения с планом содержания», когда порядок речей соответствует природе вещей, эта идеологичность материализуется непосредственно в виде ТМ-рассуждений, переполняющих оба комментария, особенно «Сянчжуань» («Дасянчжуань» практически целиком состоит из ТМ-рассуждений). В этих чжуанях та или иная растолковываемая гексаграмма задает пару посылок ТМ-умозаключения (эти посылки суть триграммы, ее составляющие), а его заключением служит афоризм (более или менее жизненно-практического толка), непосредственно за ней следующий. Вот, например, как это выглядит в «Туаньчжуани» к гексаграмме Кань:

(Б)

(1) Небо опасно-препятственно — нельзя подняться [на него].

(2) Земля опасна-препятственна — горы, потоки и холмы.

---

(3) Ваны и гуны создают опасности-препятствия для защиты своего государства.

Заметим, что данный пассаж имеет прозрачную ТМ-структуру, несмотря на то, что в оппозиции «верх — низ» стоят два экземпляра одной и той же триграммы (а именно Кань); единственное, что их различает и создает оппозицию, — их взаиморасположение, следовательно, в гексаграммном случае «Небо» и «Земля» из ТМ являются указателями триграммных позиций в рамках данной гексаграммы, а вовсе не отсылкой к самим триграммам, образующим эту гексаграмму.

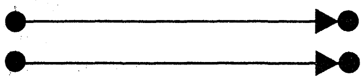
Важность чертежа, рисунка, схемы в теоретических построениях китайских ученых прошлого хорошо известна. При реконструкции древнекитайской формальной логики подобная геометричность выходит на передний план. Логика, как известно, в первую очередь имеет дело с выводом, т.е. неким рассуждением. Чертеж, изображающий устройство самого рассуждения, а не просто иллюстрирующий его, заявляет о себе в следующих двух фактах китайской культуры: 1) нелинейном строении древнекитайских текстов, естественно приводящим к схемам однотипных текстов. Элементарной схемой простейшего структурированного текста, такого, как, например, пара параллельных фраз, открывающих § 7 «Даодэцзина»:

(B)

Небо протяженно (*Тянь чан*)

Земля длительна (*Ди цзю*)

будет следующая схема:



2) непосредственной составленности триграмм и гексаграмм «И» из черт.

Оба вышеуказанных явления отнюдь не независимы друг от друга: первое производно от второго. Имеет место следующая схема: хотя это отношение производности еще далеко от прозрачности, тем не менее уже сейчас можно охарактеризовать соотношение «И» и рассуждений по схеме ТМ как взаимоотношение, грубо говоря, логической теории и логической же практики.

ТМ-рассуждения прочитываются нами как реализация логической операции введения так называемой «определенной дескрипции» (буквально — «определенных описаний»), т.е. описаний вроде следующих: «отец Генриха Шлимана», «высочайшая вершина Альп», «камень, который мы вчера нашли», «число, которое в сумме с 3 равно 5», — часто выражаемых в современных западных языках при помощи определенного артикля (последний отсутствует в русском языке, что, надеемся, все же не затруднит понимание статьи).

Во всех вышеприведенных примерах «определенных описаний» (предметы указываются не посредством их собственных имен, а с помощью неких описаний-дескрипций) описанные таким образом предметы характеризуются тем обстоятельством, что для каждого из них выполняется некоторый вполне определенный предикат (выраженный здесь средствами естественного языка), причем в каждом случае этот предикат выполняется только для данного предмета. Всякий такой предикат изображается первопорядковой формулой $P(a)$, имеющей вид элементарной предикации, а условию, состоящему в том, что этот предикат P выполняется для одного и только для одного объекта, отвечают две следующие формулы, гарантирующие существование и единственность объекта a, которому предицируется свойство P [9]:

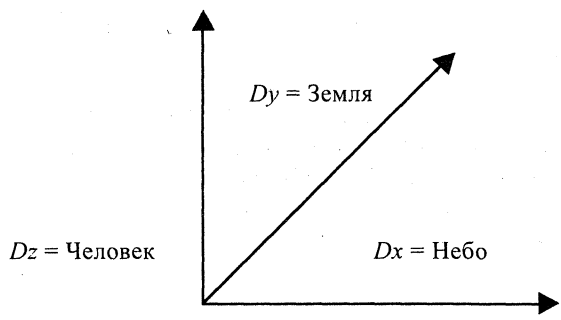
(i) $\exists x P(x)$;

(ii) $\forall x \forall y (P(x) \,\&\, P(y) \supset x = y)$.

Возвращаясь к вопросу о том, что может значить (для нас!) отмеченная выше начертательность древнекитайской аргументации, мы получаем ответ на него в ходе формальнологической реконструкции этой аргументации, т. е. при истолковании ТМ-рассуждений как функций, вводящих определенные дескрипции. В самом деле, основания для опознания ТМ-рассуждений как рассуждений по аналогии очевидны. Образчик едва ли не простейшего структурированного текста **(B)** является одновременно и примером несомненного сопоставления, взаимоуподобления (Земля, так сказать, «повторяет» Небо), т. е. аналогии. Ясно, что понятие аналогии лежит в самой основе китайского (и не только китайского) классификационизма и текстового параллелизма (parallelismus membrorum). Так что же, вся наглядность-начертательность китайской ТМ-аргументации сводится лишь к визуализации (ТМ-структурированности текстов) и систематизации (теории ТМ, развиваемой в «И») аналогий? Мы отвечаем отрицательно и утверждаем, что обсуждаемая начертательность должна быть понята как экзистенциальная квантификация, необходимая для введения определенной дескрипции согласно формуле (i).

Надо, однако, подчеркнуть, что здесь имеется ввиду теоретико-модельный аспект экзистенциальной квантификации, т.е. *семантический*, а не *синтаксический* уровень. Хотя ее алгебраический смысл детально описан в соответствующей литературе[10], все же ненадолго остановимся на нем, чтобы напомнить очевидную геометричность данной операции. Пусть Dx, Dy суть непустые множества, пробегаемые переменными x и y соответственно. Возьмем $A \subseteq Dx \times Dy$, $A \neq \varnothing$. Тогда A будет бинарным отношением между значениями переменных x и y, т. е. областью истинности некоторого предиката $A(x, y)$, высказываемого о данных переменных. Навесим на $\bar{A}(x, y)$ квантор существования по переменной x. Теперь истинностной областью для $\exists x\bar{A}(x, y)$ станет $B \subseteq Dy$ такое, что $B = \{y \in Dy | \exists x \in Dx(xAy)\}$. Определим $\exists xA$ как B. Геометрически $\exists xA$ есть проекция множества A на множество Dy.

Иными словами, $\exists xA$ — это нижнее основание **цилиндра,** построенного на множестве A как на основании по «направлению» множества Dy (как видим, терминология позаимствована из аналитической геометрии, отсюда и названия: цилиндрические алгебры, цилиндрические операции и т.п.)[11]. Теперь посмотрим, как «работает» вышеприведенная алгебраическая конструкция на нашем китайском материале. Примем ТМ за три координатные оси Dx, Dy и Dz:



Естественность подобной реконструкции ТМ[12] подтверждается методами китайских алгебраистов, особенно позднейшей техникой «четырех элементов» (четыре юань шу), предназначенной для решения систем уравнений с четырьмя неизвестными (т. е., фактически, четырьмя сортами переменных). Множествами Dx и Dy будут множества числовых и образных значений янских триграмм (Цянь, Чжэнь, Кань, Гэнь) и иньских триграмм (Кунь, Сюнь, Ли, Дуй), а также всевозможные комбинации этих значений (в частности, произведения и суммы числовых значений триграмм). Множество Dz определим как объединение множеств Dx и Dy:

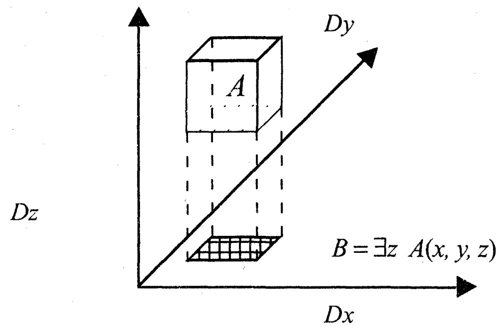
$$Dz =_{\mathrm{df}} Dx \cup Dy.$$

Проиллюстрируем вышесказанное нашим основным (из-за его дедуктивной прозрачности) примером ТМ-рассуждения — трехчастным фрагментом классического комментария Чжао Шуана на «Чжоуский гномон», фиксирующим применение теоремы Пифагора к конкретному треугольнику (так называемому «египетскому треугольнику») со сторонами 3, 4 и 5 и выводящим эти числа из базисных геометрических фигур (круг и квадрат). Для этого обратимся к предполагаемому гексаграммному прообразу данного ТМ-рассуждения – гексаграмме номер 11 Тай, являющейся, по нашему убеждению[13], гексаграммной основой самого «метода большего и меньшего катетов» (*гоу гу чжи фа*), т.е. вычислений, опирающихся на теорему Пифагора. Для гексаграммы Тай множество Dx, согласно нашему определению, будет состоять из совокупности образных и числовых значений триграмм Цянь и Чжэнь (как единственных янских триграмм в составе гексаграммы Тай) и их всевозможных комбинаций. Множество Dy определяется значением триграмм Кунь и Дуй (единственные иньские триграммы в составе гексаграммы Тай). Объединение этих двух множеств дает множество Dz. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь числового аспекта вышеописанных множеств.

Мы утверждаем, что всякая гексаграмма задает некоторое непустое трехместное отношение A в пространстве ТМ, связывающее друг с другом некоторые элементы множеств Dx, Dy и Dz, т.е. $A \subseteq Dx \times Dy \times Dz$. Тем самым A оказывается областью истинности некоторого трехместного предиката $A(x, y, z)$, высказываемого о переменных x, y и z, пробегающих множества Dx, Dy и Dz соответственно. Теперь мы хотим говорить **о квантификации**, для чего нам надо получить формулу $\exists z\, A(x, y, z)$. Ясно, что областью истинности этой формулы станет множество $B \subseteq Dx \times Dy$, задаваемое соотношением

$$B = \{<x,y> \in Dx \times Dy \mid \exists z \in Dz\, A(x, y, z)\},$$

иными словами — **проекция** отношения A на плоскость $Dx \times Dy$:



Нетрудно сообразить, что в случае гексаграммы Тай таким предикатом *A(x, y, z)* будет понятие пифагоровой тройки чисел[14], а областью истинности этого предиката — множество целочисленных положительных пифагоровых троек, порождаемых гексаграммой Тай в качестве ицзиновской основы математического «метода меньшего и большего катетов». Проекция же множества пифагоровых троек A на плоскость даст множество B первых двух координат этих троек, т.е. множество катетов (точнее, положительных целых чисел, выражающих их длину), для каждого из которых всегда (по определению!) найдется третье целое положительное число, выражающее длину соответствующей гипотенузы. Вот почему множество B есть область истинности следующего утверждения: «существует такое z, что (x, y, z) является пифагоровой тройкой».

Понятно, что вышеозначенное отображение проецирует каждую пифагорову тройку точно в одну пару ее первых координат. Поэтому ради простоты станем говорить об отображении $F\colon A \to B$ множества всех пифагоровых троек A на множество пар их первых координат B, где

$$F(<x, y, z>) = pr_{1,2}(<x, y, z>) = <x, y>.$$

Геометрически функция F есть не что иное, как отображение множества всех положительных целочисленных прямоугольных треугольников на множество их катетов. Тогда гексаграмма Тай, рассматриваемая лишь как соположение двух триграмм, представляет собой, на наш взгляд, — среди прочего — изображение множества B. Иначе говоря, она изображает (наглядность!) существование множества всех положительных целочисленных гипотенуз, тем самым дедуцируя, «вытаскивая» из понятия «пифагоровой тройки» (материализованного, персонифицированного гексаграммой Тай) ее третью «человеческую» составляющую — гипотенузу. Таков логический механизм порождения двоичной структурой гексаграммы третьей «человеческой» компоненты ТМ.

Здесь бросается в глаза очевидная множественность всех трех частей ТМ: раз оба катета x, y пробегают все натуральные числа, то вслед за ними и значения гипотенузы z образует бесконечное подмножество этих чисел. Вместе с тем, из самого названия «определенная дескрипция» явствует необходимость **единственности** объекта, удовлетворяющего данной дескрипции. Вот эту-то требуемую единственность и обеспечивает текстовая экземплификация данной гексаграммы, воплощаемая соответствующим ТМ-рассуждением (точнее, двумя его посылками). Речь идет о своеобразном доопределении гексаграммы посредством текстовой спецификации пары составляющих ее триграмм. Канонический образец подобной практики — обе части «Дасянчжуани», содержащие по одному ТМ-рассуждению для каждой из 64 гексаграмм. С логической точки зрения триграммная двоичность гексаграммы есть показатель ее, так сказать, «ненасыщенности» — открытости (как своего рода функции) для подстановок всевозможных значений ее «аргументов» (образных и числовых значений составляющих ее триграмм). Пара соположенных триграмм представляет собой космическую родительскую чету, способную в принципе породить многое множество вещей. Эта потенция реализуется лишь при текстовом определении, сужающим неистощимую плодовитость четы триграмм до порождения ею одного единственного чада. Вот почему «человеческое измерение» гексаграммы (при ее триграммном, а не «почертовом», т. е. «построковом» рассмотрении) в явном виде обнаруживается лишь в ее текстовых экземплификациях.

В разбираемом нами случае текстовой конкретизацией гексаграммы Тай является пара посылок (1) и (2) ТМ-рассуждения (**А**). Числа (3 и 4) в контексте обеих посылок — это акт выбора из бесконечного множества B, выполняющего формулу $\exists z\, A(x, y, z)$ для одной вполне конкретной пары, а именно — $< 3, 4 >$. Этот выбор доопределяет формулу $\exists z\; A(x, y, z)$ до формулы $\exists!\, z\, A(3, 4, z)$. Последняя из формул утверждает существование **одного и только одного** объекта z, удовлетворяющего условию, выраженному следующей дескрипцией: «то самое число z, которое является численным значением гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4».

Итак, вышеописанный механизм определенной дескрипции работает как бы в два приема: на первом шаге гексаграмма обеспечивает **существование** всего класса объектов, удовлетворяющих условию дескрипции (пример последнего — отношение «взаимосообщения между Небом и Землей», характеризующее гексаграмму Тай, и отвечающий ему «взаимоотклик малого и большого катетов»); вторым шагом текстовая конкретность посылок ТМ-рассуждения устраняет гексаграммную неопределенность, превращая неопределенную дескрипцию в определенную.

Учитывая распространенность представлений о «нетеоретичности» или «псевдотеоретичности» древнекитайской математической мысли, разбираемая выше двухчастность ТМ-вывода заслуживает, по нашему мнению, всяческого внимания. Ведь первая — гексаграммная — часть этого чрезвычайно значимого для древнего Китая вида дедукции и является, согласно нашей реконструкции, его **теоретическим** основанием, тем общим законом, общим понятием, под которое подпадает то или иное ТМ-рассуждение.

Примечания

[1] Об этом понятии, а также о соответствующей операции см.: *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики (логические исчисления и формализация арифметики). М., 1979. Т. 1. С. 201, 467—486. Также *Рассел Б.* Дескрипции // Новое в зарубежной лингвистике. М.,1982. Вып. XIII. С. 41—54.

[2] По авторитетному свидетельству «Дао дэ цзина», «третье рождает тьму вещей» (*Сань шэн ваньу*).

[3] *Ямвлих.* Теологумены арифметики, цит. по: *Лосев А. Ф.* История античной эстетики. Последние века. М., 1988. Кн. 1. С. 406.

[4] Классический анализ противостояния центрированности нечетных чисел (и, в частности, числа 3) симметричности четных чисел см.: *Granet M.* Le pensée chinoise. P., 1934. P. 277—279.

[5] *Щуцкий Ю.К.* Китайская классическая «Книга перемен» М., 1993. С. 196. Занятный пример типичного ТМ-рассуждения и его несколько неожиданного практического приложения дает следующее (боюсь, впрочем, что не бесспорное) толкование того «извития словес», которое предпослано нами в качестве эпиграфа данной главе: «Согласно старой еврейской мудрости "никто не может обнаружить след птицы в воздухе, змеи на камне и мужчины в женщине", поэтому евреями считались все дети евреек, независимо от того, кто был их отец». *Гумилев Л. Н.* От Руси к России. Очерки этнической истории. М., 1992. С. 35.

[6] Т.е. не из числа тех социально-этических рассуждений, якобы «не опирающихся на метафизику», о которых столь пренебрежительно отозвался А. Шопенгауэр (см.: Мир как воля и представление. М., 1993. Т. 2. С. 96—97) и исключительная приверженность к которым с незапамятных времен и по сию пору часто выдается чуть ли не за отличительную особенность китайской философии — вопреки достаточно очевидному космизму последней (так называемое «страивание человека с Небом и Землей»), когда этические *Дэ* выводятся непосредственно из онтологических *Дэ* — свойств космоса. Это, впрочем, тривиально для непредвзято мыслящего специалиста. Нетривиальны те правила (а само их существование зачастую оспаривается), по которым происходит это выведение — вычисление одних *Дэ* из других.

[7] Комментарий Чжао Шуана к математическому трактату «Чжоу би». См.: Суань цзин ши шу (счетные каноны в 10 кн.). Т. 1. Чжоу Би суань цзин (Счет-

ный канон о чжоуском гномоне). Цз. 1. Пекин, 1963. Параллельное расположение («столбиком») всех трех частей данного ТМ-рассуждения, призванное сделать наглядной структуру ТМ-вывода и приблизиться к аутентичному виду данного фрагмента текста (основания последнего утверждения — открытие В. С. Спириным нелинейного устройства древнекитайских текстов), равно как и их нумерация (разумеется, вместе с чертой, отделяющей посылки ТМ-вывода от его заключения) — введены *нами* здесь и в последующих ТМ-рассуждениях. В дальнейшем приводимые нами ТМ-рассуждения будут оформляться сходным образом — как фигуры вида

$$\frac{\begin{array}{l}2\ (1)\ \ldots\\ 1\ (2)\ \ldots\end{array}}{3\ \ldots\ldots},$$

где номер каждой из частей ТМ-рассуждения фиксирует их порядок следования в тексте до его схематизации по Спирину, т.е. при его обычном — линейном — прочтении. Возможные недоумения по поводу мнимого специально математического характера процитированного фрагмента устраняются стандартной отсылкой (соответствующие указания имеются как в комментарии, так и в основном тексте) к важнейшим космическим образам, закрепленным за данной пифагоровой тройкой чисел — 3, 4 и 5 («три» — Круг и Небо, «четыре» — Квадрат и Земля), а также, как уже говорилось, к общей мироустрояющей и смыслополагающей роли чисел.

[8] Вопреки распространенному мнению об отсутствии таковых (см., например: *Ли Цзинчи*. Чжоу И тань юань [Исследование истоков «Чжоу И»]. Пекин, 1982. С. 370-377).

[9] См. подробнее: *Гильберт Д.*, *Бернайс П.* Основания математики, М., 1979. Т. I. С. 467, а также: *Клини С.* Математическая логика. М., 1973. С. 200—203.

[10] См., напр., *Плоткин Б. И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. М., 1991. С. 179—181 и особенно библиография работ А. Тарского и П. Халмоша, приведенная в этой монографии.

[11] *Henkin L.*, *Monk D.*, *Tarsky A.*, Cylindric Algebras. Amsterdam, N—Y., Oxford, 1971. P. 1—12.

[12] Она часто используется при описании «И» с помощью понятий современной науки. Разумеется, мы далеки от приписывания древним китайцам декартова метода координат или открытия аналитической геометрии.

[13] Мы не будем сейчас останавливаться на обосновании высказанного тезиса, поскольку оно имеет сугубо филологический характер и требует отдельного рассмотрения.

[14] Передаваемое у Чжао Шуана посредством важнейшего изциновского понятия «взаимоотклик» («взаимоотклик меньшего и большего катетов» — *гоу гу сянъин*).

КОММЕНТАРИЙ

В. А. Янков

Должен сказать, что мне не ясно, действительно ли в китайских трёхчленных текстах мы имеем дело с логическим выводом или хотя бы протовыводом. Совершенно очевидно, что в текстах этих имеется некоторая структура, даже некоторая симметрия. Если отвлечься от того факта, что перед нами осмысленные тексты, и мыслить о них как о симметричных объектах, то и тогда останется возможность в силу симметрии восставливать какие-то их недостающие части по другим, которые у нас имеются. Это свойство симметричных объектов вообще, но в случае симметрии орнамента, например, никто не назовёт это логикой, разве что в переносном смысле («логика этой конструкции такова...»).

Из примеров, приводимых в докладе, наиболее близким к выводу является пифагоров треугольник. Что касается других примеров, то там положение более смутное. В самом деле, каким образом «Небо» и «Земля» дают определение «ванам и гунам»? Известно, правда, что верховный монарх является посредником между Небом и Землёю, но означает ли это, что последние его определяют, не говоря уже о вассальных монархах?

Если говорить, что первые два члена «порождают» третий как свою середину, то пример с «ванами и гунами» не вполне точен: Небо и Земля порождают вана, но значит ли это, что одинаковое действие Неба и Земли порождает такое же действие вана?

Далее, не совсем ясно разъяснение ТМ-рассуждений с помощью проекции. Если нижняя часть триграммы является и проекцией («основанием цилиндра») и областью значений функции (поскольку график мыслится функциональным), то зачем вообще здесь нужна проекция? Проще построить единственный объект как результат применения функции.

Сама по себе мысль искать в магических или мантических формулах один из источников логической дедукции мне представляется очень интересной, хотя является спорным, что получающаяся «логика» будет чем-то точным наподобие логики Аристотеля или стоиков, если пользоваться античными параллелями.

ОТВЕТ АВТОРА

Начнем с того, что в разбираемом нами случае китайских триадических рассуждений ни о каком «восстановлении» недостающих частей по другим —

уже имеющимся частям — речь не идет по той простой причине, что в ТМ-рассуждении все три части, образующие рассуждения данного типа, даны с самого начала. Поэтому обращение к достаточно отвлеченной теме «свойств симметричных объектов вообще», «орнаментов» и т.п. представляется мало уместным — попросту не относящимся к существу дела.

Занимающая нас проблема сводится к опознанию не просто содержательных, а именно формальных скреп, соединяющих друг с другом части ТМ-рассуждения. Ею же продиктован и выбор основного примера (задание египетского треугольника) предлагаемой статьи. Другая иллюстрация ТМ-рассуждений (уподобление деятельности ванов и гунов действию Неба и Земли) и в самом деле далеко не столь прозрачна в интересующем нас отношении как основной пример. Однако данное обстоятельство никоим образом не исключает существования алгоритма, управляющего этим ТМ-рассуждением. Ключом здесь (также, впрочем, как и в основном примере) по-видимому, служит понятие «гематрии». Гематрия — сопоставление текстам натуральных чисел согласно определенным правилам — явление чрезвычайно широко распространенное в китайской культурной традиции. Она превращает разговор о тексте в рассуждения о числах, его кодирующих (наподобие геделевской нумерации, арифметизирующей математику). Известно, что согласно хрестоматийному толкованию иероглифа 王 (ван, царь), его вертикальная черта знаменует собой объединение всех трех планов бытия (Неба, Земли и Человека), изображаемых посредством тройки горизонтальных черт. Кажущаяся метафоричность и расплывчатость этого образа уступает место математической определенности и отчетливости, когда мы обращаемся к гематрическому значению царя. Оно оказывается равным наименьшему общему кратному (далее НОК) трех чисел, приуроченных к трем горизонталям означенного иероглифа: 9 есть число Неба (верхняя горизонталь), 6 — число Земли (нижняя горизонталь), а 8 — число Человека (средняя горизонталь). Таким образом, числовое значение вана однозначно вычисляется по числовым параметрам отвечающей ему триадической классификационной схемы и равно 72 = НОК(9, 6, 8). Мы убеждены, что вышеприведенная выкладка указывает направление поиска математического правила, стоящего за обсуждаемым дедуктивно непрозрачным примером.

Что же до математической конструкции, используемой в нашей статье, то, не входя сейчас в технические подробности, повторим, что речь тут идет не более чем о стандартном алгебраическом представлении первопорядкового квантора существования. Последний же нужен для введения определенной дескрипции, ведь именно посредством данной логической операции мы эксплицируем ТМ-рассуждение.

ДЕДУКТИВНОЕ МЫШЛЕНИЕ И ДРЕВНЕГРЕЧЕСКИЙ ПОЛИС

Бычков С. Н.

В статье «Математика», опубликованной в БСЭ, А. Н. Колмогоров связал возникновение математики как самостоятельной науки с историческими особенностями древнегреческих государств. «Развитие математики в Древней Греции приняло существенно иное направление, чем на Востоке. Если в отношении вычислительной техники, искусства решения задач алгебраического характера и разработки математических средств астрономии лишь в эллинистическую эпоху был достигнут и превзойден уровень вавилонской математики, то уже гораздо раньше математика в Древней Греции вступила в совершенно новый этап логического развития. Появилась потребность в отчетливых математических доказательствах, были сделаны первые попытки систематического построения математической теории... Это изменение характера математической науки объясняется более развитой общественно-политической и культурной жизнью греческих государств, приведшей к высокому развитию диалектики, искусства спора, к привычке отстаивать свои утверждения в борьбе с противником» [1, с. 467].

В подходе А. Н. Колмогорова к объяснению становления древнегреческой математики примечательно то, что оно связывается им с *восходящей* линией развития полиса. «В 4 в. до н.э. в обстановке политической реакции и упадка могущества Афин наступает эпоха известного подчинения математики ограничениям, выдвинутым идеалистической философией. Наука о числах строго отделяется здесь от «искусства счисления», а геометрия — от «искусства измерения»... В самой геометрии производится строгое ограничение построениями, осуществимыми при помощи циркуля и линейки; найденные в эту же эпоху решения... задачи об удвоении куба объявляются лежащими вне геометрии, так как они прибегают к более сложным конструктивным средствам» [1, с. 468]. В V в. до н. э. подъем общественной жизни древнегреческих полисов способствовал, таким образом, перестройке математики на систематически-дедуктивной основе. Кризис же Афинского государства, связанный с поражением в Пелопонесской войне, отразился на математике (через философию) в виде ограничений, внешних по отношению к ней как таковой.

Подход А. Н. Колмогорова в том виде, как он изложен в вышеуказанной статье, носит весьма общий характер[1] и нуждается в конкретизации. Подобная конкретизация возможна в двух вариантах — «сильном» и «слабом». В первом случае практику общественно значимых дискуссий можно представить как *достаточную* причину того, что в Древней Греции «определилось... новое течение, заключавшееся в систематическом и логическом построении основ математической науки...» [1, с. 466][2]. Во втором случае она рассматривается лишь как *необходимая* предпосылка возникновения дедуктивной науки, «нуждающаяся» в адекватном идее аксиоматического метода материале (например, геометрии).

Остановимся сначала на первой из указанных возможностей. Достаточно ли ссылки на практику споров в древнегреческих полисах для исчерпывающего объяснения причин зарождения аксиоматического метода? В состоянии ли подобная практика одна, без дополнительных внешних условий, дать толчок формированию идеи дедуктивного способа рассуждений? На первый взгляд, кажется, что ничего невозможного в подобном допущении нет.

Человек, поднаторевший в ведении дискуссий, в споре с оппонентом всегда стремится отстоять ряд обязательных с его точки зрения положений, опираясь на которые уже можно в дальнейшем принудить собеседника к принятию защищаемого тезиса. В этом способе аргументации заметно сходство с доказательствами дедуктивной науки. Отождествляя завоеванные в начале дискуссии основоположения с аксиомами и учитывая, что противной стороне невыгодно позволять расширять базу аргументации против нее в ходе дальнейшего спора, можно попытаться смоделировать процесс дискуссии в рамках ограничений, характерных для дедуктивного метода.

К сожалению, удачным подобное «моделирование» может оказаться только в том случае, когда оппонент изначально избирает чисто пассивную тактику[3], не стремясь навязать в ответ собственный взгляд на дискутируемую проблему. Если, однако, он столь же искушен в хитросплетениях словесной борьбы, то обязательно попытается отстоять также и удобные для себя исходные позиции ведения спора.

Если противники так умны, что сразу же видят неприемлемость «системы аксиом», взятых на вооружение противной стороной, то спор по существу проблемы просто не начнется: при условии противоположности отстаиваемых конечных тезисов выбранные исходные наборы положений не могут не противоречить друг другу, что делает бессмысленной последующую чисто «дедуктивную» аргументацию. Спор между достойными друг друга соперниками происходит только тогда, когда они не отвергают с порога чужую позицию, будучи не в состоянии просчитать выводы из нее заранее, а строят в условиях взаимодействия с оппонирующей стороной систему рассуждений в надежде обосновать правильность своей точки зрения. По-иному «аксиоматическая модель» ведения содержательной дискуссии выглядеть не может. Будет ли, тем не менее, описанная процедура действительно удовлетворять жестким канонам дедуктивных доказательств или же здесь будет постоянно происходить выход за границы допустимого для аксиоматического метода?

Демонстрация спорящими сторонами необходимости следования отстаиваемых тезисов из принятых основоположений является лишь предпосылкой последующей дискуссии, помогая всего-навсего лучше ознакомиться с исходными позициями и удостовериться, что избранные «системы аксиом» действительно противоречат друг другу. Если дело этим и ограничится, то спор фактически даже не начнется. Первоначальное условное согласие с «аксиомами» противной стороны нужно лишь для того, чтобы затем поставить их под сомнение, апеллируя к реальности или, неявно, к собственным интересам, выдавая их (не важно — осознанно или бессознательно) за всеобщие и потому отвечающие тому же реальному положению дел. Само существо дискуссии требует систематического выхода за рамки формализованных представлений о предмете спора (да и может ли быть иначе, коль скоро приходится иметь дело одновременно с двумя *противоречащими* друг другу системами аксиом?!). Эта процедура «слишком содержательна», для того чтобы допускать моделирование средствами дедуктивного вывода. Последний подходит тогда, когда излагается и, соответственно, оспаривается только *одна* точка зрения.

Итак, принципиальная применимость идей аксиоматики на предварительной стадии дискуссий не дает все же оснований надеяться, что практика споров *сама по себе* могла послужить толчком к развитию представления о логической дедукции. Для того чтобы выдвинуть заранее основоположения, необходимые для доказательства защищаемого тезиса, надо уже владеть идеей дедуктивного вывода. Непосредственный опыт полемики не может исподволь подвести к этой идее по той причине, что отбор оптимальных аргументов — «аксиом» и вспомогательных «лемм», ведущих к доказательству искомой «теоремы», — зависит не только от предмета спора, но и от особенностей оппонента. Варьируемость поводов для дискуссий и противостоящих взглядов столь велика, что единственным способом ведения спора является выбор наилучших доводов прямо в ходе полемики, угадать же их *до* начала беседы не представляется возможным. Поэтому предъявление всех основоположений собственной позиции до начала спора на «житейскую» тему может казаться идеалом только приверженцу уже каким-то иным способом сформировавшегося аксиоматического метода рассуждений.

Детальное продумывание своей и чужой позиций в преддверии полемики имеет место в действительности только в научных дискуссиях и при обсуждении политических проблем большой важности, когда предварительные мнения сторон уже известны, а сам предмет спора допускает прогнозирование развития предстоящих бесед. Но и в этих случаях мышление все время ориентировано на *преодоление* имеющихся противоречий, чего средствами одной формальной дедукции никак не добиться.

Аксиоматический метод представляет собой определенный способ проведения доказательств, и его идея могла зародиться только там, где налицо *потребность в обосновании* имеющихся в распоряжении или требуемых утверждений. Если бы процесс его становления оказался не связанным со спецификой той или иной области знания (как это было бы в случае возникновения его из практики публичных дискуссий и судебных разбирательств), т.е. не опирающимся на конкретное содержание доказываемых утверждений, то это означало бы, что идея дедуктивного вывода способна появиться сразу в чистом виде, высвобожденном из оболочки геометрических или каких-то иных частных представлений. Но в какой ситуации замысел аксиоматического способа обоснования знания мог бы возникнуть сразу во всей общности, не имея в качестве образца предварительной реализации в особенном материале одной или нескольких наук?

Общность идеи метода может покоиться на общности его фактического использования в реальной практике рассуждений, но в отношении дедуктивного метода это исключено, так как для обоснования многих положений достаточно простой апелляции к чувственному опыту. Обусловленность применимости дедуктивного вывода предметным содержанием мысленных построений совместима с универсальной формулировкой аксиоматического метода лишь при *сознательном отвлечении* от этого предметного содержания, т.е. при исследовании форм умозаключений *как таковых*, вне зависимости от того, в каком материале они воплощены. Разве не мешало бы проанализировать, перед тем как рассуждать о конкретных вещах, на каких принципах вообще можно строить доказательство?

Всякое доказательство должно с чего-нибудь начинаться, причем начинаться *с недоказанного*. Поэтому во всяком рассуждении, претендующем на непреложность своих заключений, следует явно оговорить принимаемые за аксиомы исходные посылки и продемонстрировать, что требуемые заключения на самом деле вытекают из принятых предпосылок. Почему бы к такому выводу не придти в результате анализа неудачных попыток отстаивания собственных точек зрения в обыденных спорах? Если бы какому-то выдающемуся уму пришла в голову подобная идея, то тогда замысел аксиоматического метода действительно мог бы возникнуть сразу в универсальной форме, независимо от конкретного содержания той или иной науки. Не фактический опыт практики дискуссий, а отталкивание от его негативных сторон могло бы послужить в таком случае становлению «правильного» метода доказательств. И тогда в геометрию его можно было бы перенести уже в готовом виде, не дожидаясь постепенного вызревания его предпосылок в процессе исследования свойств треугольников и окружностей. Насколько вероятен подобный вариант развития событий?

Критическая установка по отношению к сообщаемым сведениям, коль скоро она возникла в общественном сознании, не может сделать исключение для геометрии или какой-либо другой дисциплины, допускающей изложение в соответствии с принципами аксиоматического метода. Наличие подобной науки к моменту созревания потребности в открытом отстаивании взглядов привело бы к неизбежному преобразованию ее в дедуктивную теорию, вследствие чего для альтернативного варианта становления аксиоматического метода сразу во всей его общности уже попросту бы не оставалось возможности. С какой стати кому-то придет в голову анализировать неудачи попыток убеждения в собственной правоте в повседневных дискуссиях, раз это удается в спорах теоретических?! Позитивный опыт всегда плодотворнее негативного для кристаллизации перспективной идеи, освещающей по-новому прежнюю практику и кардинально преобразующей будущую, как это случилось с дедуктивным методом в отношении искусства доказательных рассуждений. Поэтому если идея аксиоматического метода и могла появиться в чистом виде, без предварительной опоры на практику научных доказательств, то лишь при условии, что ко времени этого события ни теоретической геометрии, ни какой-то иной науки, в лоне которой рассматриваемый метод мог бы при наличии подходящих условий зародиться самостоятельно, в наличии еще не было бы.

Возникнув в голове индивидуума, идея дедуктивного обоснования утверждений так и осталась бы невостребованной, если бы она не получила воплощения в адекватном материале. Отсутствие подходящей специальной дисциплины, где дискуссия с оппонентом велась бы при помощи аксиоматического метода касательно содержания данной науки, а также невозможность его применения в публичных диспутах и судебных разбирательствах, где предмет спора составляют конфликтующие позиции сторон, вынудили бы в таком случае обратиться к предмету, в котором для реальных оппонентов на первых порах вообще нет места, — речь идет об исследовании *общих приемов* построения умозаключений, своеобразной «теории ведения дискуссий».

Для искушенного в искусстве полемики подготовка к очередному диспуту сводится к ознакомлению с содержанием предмета спора и имеющимися точками зрения на этот счет. Конечный успех зависит всецело от глубины специальной подготовки и от быстроты реакции при неожиданных поворотах дискуссии, что никак не связано с особенностями дедуктивных рассуждений. Но помимо указанных содержательных моментов в дискуссиях имеется и сугубо формальная сторона.

О чем бы ни шла полемика и кто бы в ней ни участвовал, в ее «структуре» содержатся такие элементы, отказ от которых равносилен разрушению всей «конструкции спора». Если один из оппонентов согласился с тем, что из A следует B, а затем признал справедливость A, то он будет вынужден принять и утверждение B, как бы это ни было ему невыгодно или неприятно. Корить себя допустимо за опрометчивость согласия с первыми двумя утверждениями, но поставить под сомнение заключительный вывод означало бы лишить в дальнейшем также и себя самого какого-либо способа принуждения противника. Аналогичным образом, нельзя не согласиться с одним из двух взаимоисключающих высказываний при условии, что оба они не могут быть одновременно ложными, а также с другими подобными «метаутверждениями», обязательность которых вытекает не из специфики «материи» спора, а из одной лишь его *формы*, «предполагающей» равные права участников дискуссии.

По мере накопления подобных универсальных правил и под напором критики вездесущих оппонентов рано или поздно придется поставить вопрос и об *их* обосновании. И тогда придется выделить среди этих правил простейшие и показать, что все остальные к ним сводятся. Но это и было бы дедуктивным построением «теории ведения спора», или, в современной терминологии, — логики высказываний. Не будет ли описанный сценарий представлять другой возможный вариант становления аксиоматического метода, в котором первой дедуктивной наукой оказалась бы не геометрия, а логика? В случае, если дедуктивный способ рассуждений формируется внутри логики, мы по-прежнему имели бы дело с «сильным вариантом» подхода А. Н. Колмогорова, при котором для возникновения аксиоматической геометрии действительно было бы достаточно ссылки на особенности общественной жизни древнегреческих городов-государств.

Формальные правила, регулирующие поведение спорящих сторон, инвариантны не только по отношению к содержанию дискутируемых вопросов, но и относительно способа вывода заключений. Совершенно не важно, имеет ли он форму дедуктивного вывода из заранее оговоренных посылок, апеллирует ли к реальности или является всего лишь более или менее правдоподобным, рассчитанным на неопытность (или снисходительность) оппонента рассуждением, — во всех этих случаях в узловые моменты спора, когда в борении интеллектов достигается согласие относительно определенных положений, нейтральный судья-наблюдатель, даже не вникая в содержательные тонкости дискуссии, в состоянии вынести вердикт по поводу отдельных утверждений, ссылаясь на один только факт согласия каждого из участников спора с некоторыми из предшествующих предложений.

Ограничение контроля за ходом дискуссии одной ее формальной стороной было бы оправданно только при полном доверии к логической культуре ее участников. Но та самая логическая культура, которая гарантирует отсутствие ошибок в содержательных моментах полемики, заодно должна избавить спорящих и от ошибок формального характера, ибо для заключения о справедливости какого-то высказывания из предположения «истинности» некоторых прежде сделанных утверждений нет никакой необходимости в абстрагировании от их смысла. К демонстрации *схемы* умозаключения приходится прибегать тогда, когда со времени доказательства посылок вывода прошло достаточно много времени и оппонент мог уже и позабыть о них, однако эта схема никогда не приводится в абстрактно-логическом виде, но всегда только в ее содержательном «обрамлении». Поэтому те правила вывода, которые создатель «теории спора» мог бы извлечь из реальной практики дискуссий, расположив затем их в соответствии с канонами аксиоматического метода, все равно использовались бы на деле в их неформальном, «дотеоретическом» виде, и особенности дедуктивного построения логики высказываний никак не отразились бы на реальном предмете теории. Для того чтобы подобная теория «работала», а только это и могло бы оправдать ее существование (и последующую ее аксиоматизацию), она должна способствовать отысканию таких *новых* способов умозаключений, которые в практике дискуссий прежде не встречались и появились в ней затем именно благодаря дедуктивной форме данной теории.

Абстрагирование от различных возможных смыслов термина «следует», производимое в дедуктивной теории умозаключений, позволяет чисто формально получать новые правила вывода с помощью предварительно выделенных простейших правил. Каким, однако, образом хоть одна из подобных искусственно сконструированных схем умозаключений могла бы найти применение в реальной практике дискуссий?

Каждый из участвующих в полемике должен постоянно удерживать в голове представление не только о предмете спора, но и о взглядах оппонента. Постепенное прояснение мнения противоположной стороны и, как следствие, уточнение собственной позиции и продвигают вперед обсуждение в случае, если оно действительно является плодотворным. Противоречие изначально отстаиваемых тезисов служит как бы мотором дискуссии, оканчивающейся либо «победой» одной из сторон, либо взаимным углублением исходных позиций. Поскольку в ходе спора происходит всегда переход от старого *содержания* к новому *содержанию* же, то формальный момент дискуссии оказывается всегда подчиненным ее предметной стороне. Если же открытая дедуктивно-теоретически новая схема вывода как бы «внедряется» в материальную ткань полемики и формальный момент становится активной, ведущей стороной в одной из критических точек дискуссии, то это означает, что *не зависящая ни от какого содержания* схема в состоянии сформировать из «материи спора» адекватное себе *содержательное* умозаключение, способствующее достижению целей одного из участников диспута. «Допустит» ли детерминируемая своим собственным содержанием структура дискуссионного процесса «вторжение» в нее со стороны «вещи», никак с этим содержанием не связанной? Вопрос, наверное, чисто риторический.

Теоремы аксиоматической «теории диспутов» распадаются, таким образом, на два резко различающихся между собой класса. К первому относятся «естественные» логические правила, реально используемые в практике дискуссий, для проверки достоверности которых факт дедуктивного выведения их из простейших недоказуемых правил не имеет ровно никакого значения, ибо в каждом отдельном случае их «истинность» гарантируется конкретным содержанием диспута. Ко второму относятся «искусственные» правила, не применяемые (до определенного момента) в практике дискуссий и потому обязанные своим существованием исключительно аксиоматической форме теории. Мало того, что подобные формальные правила никак нельзя перепроверить внешним по отношению к логической дедукции способом, но даже *догадаться* до них без помощи готовой идей аксиоматического метода было бы совершенно невозможно! В той части рассматриваемой гипотетической «теории диспутов», которая имеет отношение к реально проходящим дискуссиям, логическая дедукция тем самым оказывается ненужной, а там, где она необходима, исчезает какая-либо связь с материальной и формальной сторонами «конструкции спора». Поэтому если исторически дедуктивное изложение логики высказываний все же возникает (как это имело место у стоиков), то оно должно быть привнесено в нее *извне*.

Не обслуживая никаких реальных потребностей логики, понимаемой как «теория диспутов» (а подобное понимание нисколько не сужает области применимости логических правил, поскольку всякое доказательное рассуждение можно рассматривать как спор с оппонентом, отстаивающим прямо противоположное утверждение), аксиоматическое построение логической науки способно лишь *расширить* область действия ранее созданного дедуктивного метода, укрепив тем самым веру в потенциальную неограниченность сферы его применения. Подлинный же источник идеи аксиоматического способа рассуждений не может находиться в области формально-логических правил умозаключений. Должна существовать *особая предметная область*, специфическое содержание которой способно породить из себя идеи аксиоматики. В [3] показано, что такой наукой может быть только геометрия.

Мы видим, таким образом, что при попытке уточнения подхода А. Н. Колмогорова «сильный вариант», когда общественно-политическая и культурная жизнь греческих государств рассматриваются как достаточное условие возникновения аксиоматического метода, приходится признать неудовлетворительным. Указанное историческое обстоятельство фактически играло роль лишь *необходимого* условия, которое могло реализоваться только при наличии специальной теоретической дисциплины, изучающей свойства фигур и углов.

***

Полученный вывод в принципе мог бы устроить современного математика, не задумывающегося в момент обращения к аксиоматическому методу о том, что это испытанное «оружие» появилось некогда на свет не без помощи внешних по отношению к математике условий. Даже если это и так, все равно подобные «когда-то внешние» предпосылки вошли в плоть и кровь современной математики и давно уже воспринимаются как «внутренние» условия ее существования. По-иному могут отнестись к указанному выводу логик или философ, не связывающие свою деятельность с ограниченным содержанием той или иной предметной области знания. И вот по какой причине.

У Платона идеальные геометрические объекты образуют лишь «второсортный» вид умопостигаемого, поскольку при познании их свойств «душа... бывает вынуждена пользоваться предпосылками... и пользуется лишь образными подобиями, выраженными в низших вещах, особенно в тех, в которых она находит и почитает отчетливое их выражение» (Государство, 511 a). Высший раздел умопостигаемого составляет «то, чего наш разум достигает с помощью диалектической способности. Свои предположения он не выдает за нечто изначальное, напротив, они для него только предположения как таковые, то есть некие подступы и устремления к началу всего, которое уже не предположительно. Достигнув его и придерживаясь всего, с чем оно связано, он приходит затем к заключению, вовсе не пользуясь ничем чувственным, но лишь самими идеями в их взаимном отношении, и его выводы относятся только к ним» (там же, 511 b–c). И для того чтобы еще отчетливее пояснить преимущество диалектики по отношению к математическим дисциплинам, Платон говорит устами Главкона, что «бытие и все умопостигаемое при помощи диалектики можно созерцать яснее, чем то, что рассматривается с помощью только так называемых наук, которые исходят из предположений. Правда, и такие исследователи бывают вынуждены созерцать область умопостигаемого при помощи рассудка, а не посредством ощущений, но поскольку они рассматривают ее на основании своих предположений, не восходя к первоначалу, то... они и не могут постигнуть ее умом, хотя она вполне умопостигаема, если постичь ее первоначало» (там же, 511 c–d).

В отличие от поддающейся лишь усилиям разума диалектики геометрия, по Платону, вынуждена довольствоваться менее совершенной способностью — рассудком, занимающим «промежуточное положение между мнением и умом» (там же, 511 d). Этим и объясняется подчиненное положение математических наук по отношению к высшей из наук — диалектике (у Аристотеля математика подчинена «первой философии»).

Преимуществом диалектики по отношению к геометрии для Платона оказывается ее «более чистый» характер: если дедуктивно построенная геометрия стремится не пользоваться ничем наглядным лишь в процессе *доказательства* сложных утверждений на основе первоначально принятых без доказательства исходных основоположений (для их «обоснования» геометрия вынуждена обращаться к помощи чувственных представлений), то диалектика более систематична в последовательном «отталкивании» от окружающей действительности, будучи *самообосновывающейся* наукой. Геометрии и следующим за ней наукам «всего лишь снится бытие, а наяву им невозможно его увидеть, пока они, пользуясь своими предположениями, будут сохранять их незыблемыми и не отдавать себе в них отчета. У кого началом служит то, чего он не знает, а заключение и середина состоят из того, что нельзя сплести воедино, может ли подобного рода несогласованность когда-либо стать знанием?» (там же, 533 с).

После формулировки начал дедуктивной науки в процессе развертывания ее содержания допускается опираться на ранее зафиксированные представления только в их *словесной* форме, стремясь не примешивать к ним дополнительных неформальных соображений. Нечего и говорить, что во времена Платона геометры еще были далеки от реализации в полном объеме выставленных требований. Лишь в конце XIX в. с введением аксиом связи, порядка, конгруэнтности и непрерывности удалось устранить остававшиеся у Евклида неформальные моменты, после чего изложение геометрических предложений стало «чисто словесным», без какой-либо опоры на пространственную интуицию.

Не допустимо ли в свете вышеуказанного, могут заметить логик или философ, рассматривать учение об идеях Платона в качестве одной из фактических исторических предпосылок возникновения дедуктивного метода? В таком случае в процессе развития математика должна была впитать в себя не только внешние социально-исторические условия времен своего возникновения, но и элементы определенных философских доктрин, что, при нелюбви многих математиков к философии, вряд ли оказалось бы приемлемым для самосознания «точнейшей из наук».

«Слабый» вариант подхода А. Н. Колмогорова, таким образом, тоже нуждается в уточнении. Могла ли геометрия в хорошо известных социокультурных условиях своего существования самостоятельно преобразоваться в дедуктивную науку или же без дополнительного воздействия со стороны любимой Платоном диалектики здесь было не обойтись? Без ответа на этот вопрос составить себе более или менее полное представление об исторических условиях становления аксиоматического метода нельзя.

Проблема реконструкции исторической картины возникновения аксиоматического метода в рамках «слабого варианта» подхода А. Н. Колмогорова сводится, таким образом, к выбору между двумя возможностями: 1) дедуктивный метод зарождается *внутри геометрии* независимо от философии; 2) опыт «работы» с бестелесными объектами (такими, как «справедливость», «мужество») при обсуждении этической проблематики аккумулируется *внутри философии*, которая затем способствует «идеализации» и предмета изучения геометрии. Во втором случае платоновское учение об идеях выполняет функцию как бы *катализатора* в процессе преобразования геометрии в дедуктивную науку.

Ответ на вопрос, имело ли место на исторической почве Эллады подобное взаимодействие философии и геометрии или нет, не может быть решен на абстрактно-теоретическом уровне. Единственное, что здесь остается, это исторически-конкретный анализ платоновского учения об идеях в интересующем нас аспекте.

***

Целью теоретического знания является поиск общих законов, раскрыть которые одному «испытующему взгляду» не под силу. Тайны окружающего мира отступают лишь перед натиском мощи постигающей мысли, мышления в *понятиях*. Облеченные в словесную форму понятия оказываются исключительно эффективным инструментом познания, так что вполне естественным выглядит представление о неразрывной связи общих закономерностей бытия с мышлением. Даже если ученый и не задается вопросами о «природе» законов, «управляющих» действительностью, эмпирически несомненным для него является факт «причастности» этих закономерностей мыслящей голове. По этой причине чем-то само собой разумеющимся для современного читателя выглядит и характеристика Платоном в «Федре» занебесного «царства идей» как бесцветной, неосязаемой сущности, зримой «лишь кормчему души — уму» (247с). Идеи «идеальны» — значит находятся «в голове».

Если, прочитав указанный фрагмент из «Федра», на этом и остановится, то тогда и построение Платоном теории идей, и преобразование геометрии на дедуктивно-аксиоматической основе будут выглядеть как нечто банальное, что рано или поздно все равно должно было свершиться. Знание может иметь дело лишь с чем-то повторяющимся, устойчивым, научные термины также однозначны и устойчивы (хотя бы в силу своей «знаковой формы»), поэтому словесная оболочка выражения знания автоматически, «по определению» оказывается пригодной для выполнения возложенной на нее функции.

Если источник возникновения теории идей и дедуктивного построения геометрии видеть в использовании при изложении науки однозначных терминов, гарантирующих одновременно общность и воспроизводимость доказательных рассуждений, то тогда невещественный характер идей и фигур окажется производным от их «словесного бытия». В таком случае «недедуктивный» характер многих существующих ныне наук придется отнести как раз на счет *неоднозначности* используемых в них слов естественного языка, «устранение» которой должно создать предпосылки последующей аксиоматизации. Аксиоматический метод предстает при этом как универсальный способ построения научных дисциплин. Правда, все равно остается вопрос о причинах равнодушия к логической дедукции, например, в Индии. Если в Китае это можно было бы попытаться объяснить использованием иероглифического письма, то в Индии санскрит обладал не меньшими выразительными возможностями, нежели греческий язык. Тем не менее ни какого-то аналога платоновых идей, ни чего-то близкого к евклидовой геометрии мы при всем старании в истории индийской мысли не обнаружим. Представление о «знаковой» обусловленности формального характера научного знания не очень хорошо согласуется с реальной историей.

То обстоятельство, что воззрения творца теории идей отличны от представлений взявшего впервые в руки платоновы диалоги, видно даже из приведенного выше отрывка из «Федра». Указание Платона, что бесцветная идеальная сущность зрима лишь для ума (247 с), вполне гармонирует с нашими неотрефлектированными «общепринятыми» представлениями, но при чем тут Занебесье? Зачем вообще куда бы то ни было «помещать» Платону его идеи? В этом вопросе уже «сквозит» наше непонимание замысла древнего философа.

И уж совсем ставит в тупик фрагмент диалога «Парменид», в котором при рассмотрении предположения о делимости идей между почтенным элейцем и молодым Сократом происходит следующий обмен репликами:

— Но, положим, кто-нибудь из нас будет иметь часть малого: малое будет больше этой своей части; таким образом, само малое будет больше, а то, к чему прибавится отнятая от малого часть, станет меньше, а не больше прежнего.

— Но этого никак не может быть, — сказал Сократ (131 d–e).

Что поражает в этом фрагменте? Отнимаемая от идеи малого часть прибавляется к обыкновенной вещи (не-идее) как *однородная* с нею *вещь*, что не вызывает у Сократа в предлагаемом Парменидом «мысленном эксперименте» никаких протестов по поводу самой возможности подобной операции. Вместе с Парменидом Сократ признает абсурдность лишь *результата* операции!

Подобное «неразличение» идеи по «субстрату» от уподобляемых ей вещей можно видеть и в «Государстве»: кровать, производимая плотником, отличается от идеи кровати не «вещественным составом», а только лишь степенью совершенства (597 a—b).

Что касается естественного для нашего сознания отождествления идей с мыслями, то в «Пармениде» анализируется (132 b—d) и после рассмотрения отбрасывается и эта попытка интерпретации. Вывод напрашивается сам собой: идеи в учении Платона столь же «вещественны», как и уподобляющиеся им предметы.

И если аристотелевы аналоги платоновых идей — «формы» — определяются Стагиритом как сущность *без материи* (Метафизика, VII 7, 1032 b 1, 13—14), то, следовательно, именно Аристотелю, а не Платону принадлежит понимание общего как «бестелесного».

Аристотель прекрасно сознавал отличие собственного понимания «форм-эйдосов» от платоновских «эйдосов-идей», замечая, что «нелепо утверждать, что существуют некие сущности помимо имеющихся в небе, а с другой — что эти сущности тождественны чувственно воспринимаемым вещам, разве лишь что первые вечны, а вторые преходящи. Действительно, утверждают, что есть сам-по-себе-человек, сама-по-себе-лошадь, само-по-себе-здоровье, и этим ограничиваются, поступая подобно тем, кто говорит, что есть боги, но они человекоподобны. В самом деле, и эти придумывали не что иное, как вечных людей, и те признают эйдосы не чем иным, как наделенными вечностью чувственно воспринимаемыми вещами» (Метафизика, 997 b 5 — 12). Признающие эйдосы «не в состоянии показать, каковы такого рода — непреходящие — сущности помимо единичных и чувственно воспринимаемых. Так вот, они объявляют их тождественными по виду с преходящими (эти-то сущности мы знаем), изобретают «самого-по-себе-человека» и «самое-по-себе-лошадь», присоединяя к чувственно воспринимаемым вещам слово «само-по-себе» (там же, 1040 b 30—34).

С формой как таковой, по Аристотелю, имеет дело всякий «искусных дел мастер», поскольку «через искусство возникает то, форма чего находится в душе» (там же, 1032 a 32 — 1032 b 1). Например, «дом, имеющий материю», возникает «из дома без материи, ибо... искусство домостроителя — форма дома» (там же, 1032 b 11 —13). Представление Аристотеля о том, что «в душе находится не камень, а форма его» (О душе, 431 b 29) хорошо согласуется с нашими представлениями, однако не так просто понять, почему Стагирит полагает при этом, будто формы вещей извечно «предсуществуют» в уме-перводвигателе.

Для обоснования существования ума-перводвигателя Аристотель предварительно различает свойства «быть мыслью и быть постигаемым мыслью» (Метафизика, 1074 b 38 — 1075 a 1), замечая, что иногда тем не менее это оказывается одним и тем же: «... в некоторых случаях само знание есть предмет [знания]: в знании о творчестве предмет — сущность, взятая без материи, и суть бытия, в знании умозрительном — определение и мышление» (там же, 1075 a 1—3). Поэтому, раз «постигаемое мыслью и ум не отличны друг от друга у того, что не имеет материи, то они будут одно и то же» (там же, 1075 a 3—4).

Для современного читателя нет особой разницы между указанными Стагиритом случаями. Представляется вполне вероятным, что каждый из них сам по себе мог бы привести к представлению о божественном уме. Но так ли обстоит дело с исторической точки зрения?

«Разбиение» вещи (статуи или дома) на «материальную составляющую» и бестелесную форму, существующую как таковая только «в уме», выглядит совершенно естественным для современного читателя, но для Аристотеля было совсем не простым делом. Стагирит пришел к этому представлению вследствие трудностей, вытекающих из предположения Платона об отдельном существовании идей. Важно при этом отметить, что форма вещи, совпадая по виду с ее внешним обликом, не сводится целиком к одним только наружным очертаниям. По Аристотелю, дом возникает из дома, «а именно дом, имеющий материю, из дома без материи, ибо... искусство домостроительное — форма дома» (там же, 1032 b 11—13), но домостроительное искусство включает в себя в виде схемы весь процесс построения дома[4], реконструировать который неопытному человеку путем одного лишь созерцания завершенной постройки невозможно.

При воплощении замысла в реальность требуется каждый раз особая (Аристотель называет ее «последней») материя: «у некоторых вещей, именно потому, что они разные, материя необходимо должна быть разной, например: пила не может получиться из дерева, и это не зависит от движущей причины: ей не сделать пилу из шерсти или дерева» (там же, 1044 a 27—29). Но если, как это делает Стагирит, искать у всех вещей *одну* общую основу, единый субстрат, то подобную — «первую» — материю приходится трактовать гораздо более изощренным образом. «Естественно возникновение того, — указывает Аристотель, — что возникает от природы; то, из чего нечто возникает, — это, как мы говорим, материя... А все, что возникает — естественным ли путем или через искусство, — имеет материю, ибо каждое возникающее может и быть и не быть, а эта возможность и есть у каждой вещи материя» (там же, 1032 a 16—17, 19—22). Материя, рассматриваемая как возможность, оказывается, таким образом, умопостигаемым *началом* изменения вещей.

Точно таким же началом *изменения* вещей оказывается у Аристотеля и «беспредельное», которое «существует таким образом, что всегда берется иное и иное» (Физика, 206 a 27—29). «...Беспредельное есть материя для завершенности величины и целое только в возможности, а не в действительности; оно делимо и при уменьшении и обратном прибавлении, а целым и ограниченным [беспредельное] оказывается не само по себе, а по отношению к другому, и поскольку оно беспредельно, оно не охватывает, а охватывается» (там же, 207 b 21—25).

Свойству неограниченной делимости материи Стагирит придавал первостепенное значение. Анализируя выдвинутую Платоном в «Тимее» концепцию, согласно которой тела «слагаются из плоскостей и разлагаются на плоскости» (О небе, 298 b 34 — 299 a 1), Аристотель отмечает: «ясно с первого взгляда, сколько противоречий с математикой из нее вытекает, а между тем справедливо либо не ниспровергать математику, либо ниспровергать ее на основании принципов более достоверных, чем ее аксиомы» (там же, 299 a 4—6).

Аристотель совершенно правильно отмечает особую роль математики в обосновании неограниченной делимости материи: последнюю можно гарантировать, лишь *постулировав* в той или иной форме возможность неограниченного деления отрезка пополам. Никакое реальное предметное действие (осуществляемое при помощи веревки или циркуля и линейки, или еще чего-нибудь) не в состоянии сколь угодно долго производить последовательное деление отрезка пополам. Третий постулат, в котором выставляется требование возможности описать из всякого центра всяким расстоянием круг, сам по себе допускает двоякое толкование: его можно понимать как «предметно» (с соответствующими ограничениями на реальную возможность выбора центра круга и величины радиуса), так и «идеально» (когда снимаются всякие ограничения). Последняя трактовка, как указывалось в [3], возможна только в предположении выполнимости четвертого постулата о равенстве всех прямых углов, и лишь она обеспечивает неограниченную делимость материи. Поэтому Аристотель мог разработать свою оригинальную концепцию материи лишь после преобразования геометрии в дедуктивную науку.

Это позволяет сделать вывод, что представление о предмете «творческих наук» как о лишенном материи у Стагирита является производным от аналогичного представления о предмете теоретических наук (точнее, в силу [3], геометрии). Тем самым оказывается, что представления об уме-перводвигателе, о бестелесности форм у Аристотеля оказываются зависимыми от предварительно выработанного умения обращаться с бестелесными объектами в дедуктивной геометрии.

Аксиоматическое построение геометрии является реакцией на утверждения софистов о том, что все истинно. Доказанная дедуктивным образом геометрическая теорема утверждает, что противоположное ей утверждение обязано быть ложным. В этом смысле и аксиоматическая геометрия, и диалектика Платона в равной мере выступают против софистического релятивизма. Вряд ли можно полагать, что геометрия добилась этого на 50–60 лет раньше философии. Знаменитый геометр Феодор из Кирен, как известно, был другом Протагора (Теэтет, 162 а). Когда Феодор говорит, что он «отошел от отвлеченных рассуждений и склонился к геометрии» (там же, 65 а), это естественнее всего истолковать как указание на то, что в его время геометрия еще не противопоставляла «идеальных» геометрических объектов чувственно воспринимаемым. Скорее всего, дедуктивное построение геометрии относится ко временам младших софистов, т.е. ко времени кризиса Афинского государства.

Помимо уточнения подхода А. Н. Колмогорова в пользу «слабого варианта» с непосредственной «аксиоматизацией» геометрии без опосредующего воздействия платоновой диалектики необходимо, видимо, внести коррекцию и в отношении сроков дедуктивной перестройки. Аксиоматическое построение геометрии, как и появление теории идей, правильнее связывать не с восходящей линией развития полиса, а с его кризисом.

Примечания

[1] С формальной точки зрения, безусловно, точнее было бы, следуя А. П. Юшкевичу, охарактеризовать приведенные высказывания одного из крупнейших ученых XX века как «соображения о развитии математики» [2, с. 7].

[2] Поскольку подобное построение представляет собой вывод частных результатов науки из ее исходных общих положений, то оно вполне естественно называется *дедуктивным*. Так как в Новое время имевшиеся у Евклида «общие понятия» и «требования» стали отождествляться с отсутствовавшими в тексте «Начал» «аксиомами», то дедуктивное построение науки можно называть также *аксиоматическим*. А. Н. Колмогоров проводит различие во второй части статьи между аксиоматикой теоретико-множественного типа и понятием дедуктивной теории, однако с точки зрения проблемы генезиса дедуктивного метода это различение абсолютно несущественно. Мы употребляем везде термины «дедуктивный» и «аксиоматический» как синонимы.

[3] Именно так ведет себя сомневающийся в истинности излагаемых ему геометрических утверждений учащийся.

[4] Поэтому, как указал А. В. Ахутин [4, с. 60], подобного рода замысел можно назвать словосочетанием «форма-проект».

Список литературы

1. *Колмогоров А. Н.* Математика // БСЭ. М., 1954. Т. 26. С. 464—483.

2. *Вернан Ж.-П.* Происхождение древнегреческой мысли / Пред. А. П. Юшкевича. М., 1988.

3. *Бычков С. Н.* Геометрия и аксиоматический метод // ИМИ. Сер. 2. 1996. Вып. 1 (36). № 2. С. 195—204.

4. *Ахутин А. В.* История принципов физического эксперимента. М., 1976.

КОММЕНТАРИИ

А. А. Григорян

Не считая себя большим знатоком очень важной и до сих пор не потерявшей своей актуальности проблемы о предпосылках возникновения дедуктивного метода, решусь высказать ряд своих соображений по поводу интересной статьи С. Н. Бычкова. Во-первых, мне кажется, есть основания для утверждения, что дедуктивный метод и аксиоматика не возникают одновременно, хотя, разумеется, сказав А (открытие дедукции), уже значительно легче сказать Б (последовательное проведение дедуктивного метода буквально приводит к идее аксиоматизации). Однако если Фалес уже владел дедукцией, то лишь у Гиппократа Хиосского, назвавшего свой трактат «Начала» можно зафиксировать первую попытку действительной реализации идеи аксиоматики. Далее, можно согласиться с утверждением автора статьи в том, что аксиоматический метод не мог возникнуть вне специфического математического материала хотя, возможно, для этого вполне сгодилась бы пифагорейская арифметика (в статье утверждается, что аксиоматический метод возникает на геометрическом материале). Кроме того, автор не связывает его возникновение лишь с внешними факторами (демократия, риторика и т.п.), справедливо полагая, что, наоборот, становление аксиоматического метода во многом обусловлено попытками противостоять утверждениям и практике софистов, настаивавших на возможности доказательства любого утверждения. При этом, однако, в статье чувствуется желание автора связать становление идеи аксиоматического метода с платоновской философией, хотя и не настаивая не «жесткости» этой связи. Думается, это не проясняет проблему. Возможно, речь может идти о неком параллелизме структур диалектики Платона и особенностей аксиоматического построения, однако во времена Платона, по-видимому, математики уже владели аксиоматическим методом в развитой форме, и влияние философии Платона могло сказаться лишь в не слишком существенных нюансах (по крайней мере, вряд ли можно наверняка утверждать, что все математики современники Платона были «платониками»). Кроме того, уровень «доказательности» в философии значительно ниже уровня доказательности в математике (это в еще большей степени справедливо по отношению к политическому дискурсу) . Поэтому речь может идти скорее о влиянии математики на философию и риторику, а не наоборот.

Е. А. Зайцев

Статья Сергея Николаевича построена в форме развернутого ответа на замечание А. Н. Колмогорова о том, что изменение в характере древнегреческой математики (становление дедуктивного метода) объясняется особенностями политической и культурной жизни Греции, приведшими к развитию искусства спора и т. п. К сожалению, выбор в качестве отправной точки весьма краткого и в силу своей краткости неопределенного высказывания Колмогорова следует признать неудачным. В попытке дать полный обзор возможных логических вариантов его интерпретации автор был вынужден строить свое изложение подобно математической теореме, в которой львиную долю занимает скучное доказательство рутинных проверочных лемм (первая часть), а содержательная часть (квинтэссенция статьи) «задвинута» в самый конец.

Что касается первой части, то ее содержание фактически сводится к выдвижению серии гипотез, формулируемых с одной лишь целью показать некорректность «сильного» варианта интерпретации высказывания А. Н. Колмогорова. Подобное почти формальное рассуждение, обставленное по всем правилам логики и вместе с тем полностью игнорирующее специфику античной дискуссии, выглядит совершенно искусственным. Вероятно, задумывая эту часть статьи, автор имел ввиду более серьезные намерения, нежели опровержение им же самим предложенного варианта колмогоровской трактовки. К сожалению, мотивы, которыми он руководствовался, выстраивая свои рассуждения, остались за кадром.

Напротив, вторая часть статьи, которая посвящена рассмотрению «слабого» варианта интерпретации (поистине, Колмогоров здесь вообще ни при чем), несмотря на краткость изложения, содержит целый веер оригинальных и перспективных идей, содержательная сторона которых, подкрепляемая удачными ссылками и цитатами, выглядит достаточно убедительной. Здесь речь идет, действительно, о вещах принципиальных. Прежде всего автор заставляет усомниться в том, что так называемый платоновский идеализм является идеализмом в расхожем значении этого термина, т.е. концепцией, основанной на положении о бестелесности идей в отличие от телесности вещей. Далее он указывает на то, что представление о бестелесности идеального (помещаемого в Ум-Перводвигатель) впервые формируется в философских работах Аристотеля, а затем пытается раскрыть механизм этого процесса. Результатом анализа становится тезис о том, что для формирования аристотелевского представления о бестелесности формы необходимо существование дедуктивной геометрии. Попутно автор показывает, что во времена Платона геометрия еще не оформилась в дедуктивную науку, а оставалась дисциплиной о чувственно воспринимаемых объектах.

Не имея возможности подробно рассматривать каждое из положений, выдвинутых автором, остановлюсь коротко лишь на первом и четвертом.

Тезис о телесном характере идей у Платона, несмотря на явное противоречие с западноевропейской идеалистической традицией, при ближайшем рассмотрении оказывается вполне достоверным. Достаточно вспомнить мысль Э. Кассирера о том, что в мифе не существует представления об идеальном в отрыве от телесного. Идеальное, в смысле духовно переживаемого или служащего источником переживания, мифическое сознание постоянно и систематически (в соответствии с определенной системой правил) «переводит» на язык телесно-пространственных образов. Если предположить, что философская мысль Платона остается все еще тесно связанной с традицией мифа (что само по себе достаточно правдоподобно), то вещественный характер платоновских идей, на котором настаивает автор, отнюдь не покажется нонсенсом.

Второе замечание касается тезиса о том, что во времена Платона геометрия еще не оформилась в дедуктивную науку. В «Государстве» (510d) Платон пишет о том, что когда геометры «пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит. Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили». Если предположить, что геометрия во времена Платона уже излагалась аксиоматически, то возникает трудность, связанная с возможным смыслом второго постулата (о возможности неограниченного продолжения прямой). Он не может относиться к той (чувственной) прямой, которая рисуется на чертеже, поскольку эта прямая, очевидно, ограничена. Но одновременно, он не может относиться и к идеальной прямой, образом которой является прямая на чертеже, поскольку эта идеальная прямая, как и все прочие идеи, вещественна, и поэтому также пространственно ограничена. Единственной возможностью остается отличная от естественной трактовка неограниченной продолжаемости по отношению к прямой-самой-по-себе, при которой исчезла бы специфика неограниченного пространственного расширения. Нечто в духе перечисления точек монотонной сходящейся последовательности по аналогии с апориями Зенона. Трудность существует и по отношению к третьему постулату, в котором возможность проведения окружности любого, в том числе сколь угодно большого, радиуса вступает в противоречие как с чувственным характером окружности на чертеже, так и телесным характером окружности-самой-по-себе. Если исключить неестественные трактовки пространсвенного расширения (типа сходящейся последовательности), то указанные трудности служат дополнительным аргументом в пользу тезиса автора о том, что во времена Платона геометрия еще не приобрела законченную форму дедуктивной теории — без введения этих двух постулатов она еще не могла работать в полную силу. В случае принятия нестандартных трактовок пространственного расширения с учетом телесности платоновских идей возможны интересные результаты по отношению к апориям Зенона.

В. Я. Перминов

Сергей Николаевич представил в своей статье систему довольно изощренных доводов, имеюших целью показать, что дедуктивный метод а античной математике не вырос исключительно из практики споров и не был следствием прямого влияния диалектики Платона. В качестве существенного фактора, способствующего становлению дедукции и аксиоматического метода в математике, он рассматривает деятельность софистов, заостривших проблему отличения истины от лжи.

Представленные доводы интересны, но они вызывают и ряд вопросов. Прежде всего возникает сомнение относительно самой возможности решать такие вопросы на основе предложенной автором методологии. Греческая цивилизация V—IV вв. до н. э. — это интеллектуальный котел, продукты которого нам в достаточной степени известны. Но что в действительности происходило в этом котле, что на что влияло и что было главным — об этом мы почти ничего не знаем. Сергей Николаевич как энтузиаст древней истории исходит из оптимистической гипотезы, состоящей в том, что если хорошо поработать с материалом, в частности, если хорошо прочитать Платона и Аристотеля, то мы непременно докопаемся до всего нас интересующего. Я не разделяю этого оптимизма и полагаю, что многие процессы, имевшие место в прошлом, недоступны для прямого исторического анализа вследствие принципиальной недостаточности данных. Вряд ли по сохранившимся текстам, относящимся, кстати, к значительно более поздней эпохе, чем эпоха становления дедуктивного метода, мы можем восстановить реальную картину всех мотивов и взаимовлияний. Тут могут быть интересные гипотезы, но, по-моему у нас никогда не будет оснований считать их в достаточной степени достоверными.

Исходя из этого соображения, я не могу согласится с С. Н. Бычковым, когда он утверждает, что вопрос о факторах становления дедуктивной математики и аксиоматического метода не может быть решен на абстрактно-теоретическом уровне, а должен решаться на основе анализа источников и, прежде всего, текстов Платона. Думаю, что положение здесь как раз обратное. У нас исключительно мало данных для решения вопроса на уровне твердо установленных исторических фактов, но имеются некоторые шансы приблизится к истине посредством абстрактно-теоретического анализа, опирающегося на современные представления о логике науки. Мы в состоянии, я считаю, начертить достаточно определенную схему становления дедуктивного метода и аксиоматики, исходя из современных представлений о природе математических идеализаций, о месте и роли дедукции в математике и из современных представлений о значимости тех или иных внешних влияний. К теоретической схеме мы можем тогда привязать и имеющиеся у нас факты. Конкретный исторический анализ будет в этом случае не основой решения. вопроса, а основой для выбора конкурирующих методологических (реконструирующих) гипотез. Такого рода абстрактно-теоретический подход, полагаю, в действительности, — единственно возможный подход, приближающий нас к истине в данном случае.

Позитивная идея, проведенная в докладе, проистекает, на мой взгляд, именно из некоторой отстраненности автора от теоретического анализа логики становления научной теории. Утверждается, что аксиоматическое построение геометрии является реакцией на утверждение софистов о неотличимости истины от лжи. Возникает вопрос: неужели появление кучки людей, проповедующих, что все истинно, могло привести к существенному ускорению такого процесса как оформление геометрической теории в виде аксиоматической системы? Если это так, то все в науке случайно и аксиоматика в математике могла бы вообще не появится. Внешние факторы развития математики, которые с точки зрения логики становления науки не могли играть сколь-нибудь существенной роли, превращаются здесь в основную причину появления математики как дедуктивной науки. Но ведь есть внутриматематические факторы, которые нельзя сбрасывать со счетов. Очевидно, что аксиоматика не могла бы появиться в плохо развитой системе понятий при каком угодно засилии софистов. Почему бы не посмотреть более тщательно на эти внутренние и, несомненно, более значимые факторы становления математики. Но здесь требуется не анализ текстов Платона, а теоретический анализ возможных факторов становления математической теории, исходящий из соподчинения ее сущностных компонентов.

Я никак не хочу сказать, что чисто исторические поиски бесполезны. Я утверждаю, что сами по себе они в данном случае малоперспективны и что ключом к решению поставленной проблемы мог бы быть именно абстрактный теоретический анализ становления математической теории, который помог бы выявить систему реальных факторов, влияющих на процесс, соподчинить их по рангу значимости и найти, в конечном итоге, твердую линию в интерпретации имеющихся исторических свидетельств.

В. А. Янков

В общем статья мне представляется очень убедительной. Геометрия и диалектика софистов и ораторов развивались параллельно, и считать, что софистическая техника дискуссии оказала большое влияние на аксиоматический метод нет оснований.

Всё же софисты занимались математикой, особенно Протагор, Антисфен и Гиппий. Первый, как кажется, возражал против «роговидных углов». Может быть, их критика заставляла математиков быть более аккуратными в своих построениях и доказательствах.

В этой связи мне хочется рассмотреть вопрос о вероятном появлении «айтем». Сейчас это слово применяется у нас как «постулат», и честно говоря, современному математику не совсем понятна разница между постулатами и аксиомами.

Разница становится ясной, когда мы обратимся к Аристотелю.

В «Первой аналитике» Аристотель различает аксиомы и айтемы. Первые «общи всем», и из них «как из первого ведётся доказательство». Айтему же «принимают в то время, как изучающий не имеет никакого мнения об этом или имеет противоположное время» (гл. 10).

Очень может быть, что Аристотелю принадлежит само слово «аксиома» (в смысле наиболее важного положения). Оно привилось отнюдь не сразу — в «Началах» в таком смысле используется стоический термин «общие мысли».

Но термин «айтема» у Евклида есть, так что он принадлежал практике математики независимо от Аристотеля. Да, собственно, нам и неизвестно какое-нибудь его внематематическое использование.

Поэтому следует считать, что понятие айтемы выработалось в геометрии до Аристотеля.

Происхождение их можно объяснить стремлением отделить собственно содержание математики (геометрии) от вопросов о реальности математических объектов, их свойств и отношений между ними. Вторжение софистов в геометрические вопросы вполне могло стать поводом для такого отделения (равно как и для конструкций Энопида). Обсуждавшиеся вопросы были разумеется не главными для софистики, но в аргументах нападающей стороны могла проявлять себя общая культура диалектики.

Замечу, что появление айтем — только одна составная часть аксиоматического метода и далеко его не исчерпывает.

ОТВЕТ АВТОРА

В первую очередь отвечу на замечания Е. А. Зайцева, касающиеся целесообразности выбора отправной точки исследования.

Математики редко задумываются над тем, сколь необычной является выбранная ими сфера профессиональной деятельности. И даже если это происходит, типичной оказывается позиция, отраженная в статье «Математика» во втором томе «Философской энциклопедии». «...Наряду с накоплением математических знаний, – пишет автор статьи А. Д. Александров, — с установлением связей между получаемыми результатами и унификацией правил решения задач складывались теоретические способы вывода новых результатов и первые математические доказательства. В конечном итоге это привело к качественному скачку: сложилась чистая математика с ее дедуктивным методом». Особенностью этой позиции является увязывание *формы изложения* математики с ее *содержанием*. В качестве следствия мы получаем освящение принятого ныне способа преподавания математики на все будущие времена.

Позицию А. Н. Колмогорова выгодно отличает то обстоятельство, что в ней дедуктивная форма математического знания связывается с *внешними* по отношению к науке условиями. Не берусь судить об истоках удивительной проницательности великого математика (не исключено, что важную роль здесь сыграли юношеские увлечения Андрея Николаевича историей на младших курсах университета), но достаточно веские аргументы в пользу наличия внешних предпосылок возникновения дедуктивной математики удалось получить лишь на основе значительно позднее выполненных исследований (прежде всего в области истории индийской и китайской математики).

Для студентов-гуманитариев, обязательное преподавание математики которым было введено несколько лет назад, мысли А. Н. Колмогорова из энциклопедической статьи по естественным причинам являются наиболее авторитетным мнением относительно условий формирования математической науки. Между тем современные исследования в области истории и философии математики не могут не коснуться частных моментов статьи, написанной более 60 лет тому назад. В этой связи выбор в качестве отправной точки именно статьи А. Н. Колмогорова представляется мне не только оправданным, но и единственно приемлемым. Среди ученых, писавших о проблеме генезиса теоретической математики, невозможно найти автора более авторитетного одновременно и в кругах математиков, и среди историков науки.

Теперь о методологии изложения. Не могу не согласиться с утверждением В. Я. Перминова о том, что при исследовании историко-научных вопросов «ключом... мог бы быть именно абстрактный теоретический анализ становления математической теории, который помог бы выявить систему реальных факторов, влияющих на процесс, соподчинить их по рангу значимости и найти, в конечном итоге, твердую линию в интерпретации имеющихся исторических свидетельств». Именно такой абстрактный анализ (в стиле «математической теоремы», как квалифицирует Е. А. Зайцев) и проведен при помощи «скучного доказательства рутинных проверочных лемм» в первой части работы. Он позволяет, например, рассматривать дедуктивную логику стоиков не как предпосылку аксиоматической геометрии (эта точка зрения приведена на с. 134—137 работы А. С. Степановой «Философия Древней Стои»), но лишь как следствие зародившегося в геометрии дедуктивного метода.

Если для логики или арифметики вопрос об их отношении к генезису аксиоматического метода вполне может быть исследован на абстрактно-теоретическом уровне, то касательно диалектики этого сказать нельзя. Диалектика в ее специфически *платоновском* понимании не может при абстрактном анализе предпосылок аксиоматического метода рассматриваться наряду с арифметикой и логикой в качестве одного из возможных «кандидатов» на роль первой дедуктивной науки по целому ряду причин. Во-первых, как таковая она всецело принадлежит прошлому и сама нуждается в исторической реконструкции не меньше, нежели дедуктивная геометрия. Во-вторых, в отличие от физико-математических наук в настоящее время весьма затруднительно указать ее «законного правопреемника» (вопрос о том, кто — Плотин, Гегель или какой-то иной мыслитель — наиболее адекватным образом развил диалектические прозрения Платона, сегодня навряд ли имеет исчерпывающее решение), а потому мы лишены возможности взглянуть на исторически первую форму диалектики «с высоты современности», как это возможно благодаря Д. Гильберту в отношении дедуктивной геометрии Евклида. Наконец, исторически теоретическая философия вплоть до XVII в. рассматривалась как более совершенный вид знания по сравнению с математикой, и лишь начиная с Декарта, Гоббса и Спинозы мы встречаемся с (не вполне удачными) попытками распространения идей аксиоматического метода с геометрии на философское знание. По этим причинам никакой вариант платоновской диалектики не может рассматриваться в качестве альтернативы «позитивным наукам» при абстрактно-теоретическом анализе предпосылок генезиса дедуктивного метода рассуждений, и в результате приходится прибегать непосредственно к конкретно-историческому исследованию. Тексты Платона и Аристотеля, как я пытался показать в работе, относятся ко времени формирования и совершенствования дедуктивного метода, так что они вполне могут быть использованы для ответа на вопрос о взаимовлиянии философии и математики в IV в. до н. э.

«Чрезмерная гипотетичность» исторической реконструкции процесса зарождения дедуктивной математики, вытекающая из недостаточности письменных источников, может быть, хотя бы частично, устранена за счет использования археологических данных, отбор которых должен производиться на основе абстрактного анализа современного состояния аксиоматического метода, что исключит произвол в анализе соответствующих исторических предпосылок. По этой причине задачу построения достоверной исторической картины генезиса дедуктивного метода не следует заранее считать абсолютно безнадежной. При удачном стечении обстоятельств, при опоре на достижения наук об античности последних десятилетий успех, на мой взгляд, вполне достижим объединенными усилиями специалистов в данной области.

Из замечаний более частного характера остановлюсь на пожелании А. А. Григоряна более четко проводить различение между дедуктивным методом и аксиоматикой. Я, честно говоря, не считаю, что у Фалеса или Гиппократа Хиосского мы имеем уже дедуктивный метод в действии. Даже у последнего речь идет фактически не о словесным образом заданных теоретических объектах, а о нарисованных на чертеже фигурах. Конечно, задним числом мы можем увидеть у Гиппократа рассуждения от общего к частному, но здесь не идет речь о выведении *класса* утверждений из более общих *классов* предложений. Скорее мы имеем дело с разложением конкретного сложного чертежа на более простые составные элементы, которые в силу их «простоты» и являются более общими. Рассуждение при этом не абстрагируется от особенностей сделанного чертежа, что фактически происходит при словесном изложении.

Что касается пифагорейской арифметики как кандидата на роль первой аксиоматической дисциплины, то С. А. Яновская еще в 1956 г. в докладе «Из истории аксиоматики», прочитанном на III Всесоюзном съезде математиков, весьма обстоятельно рассмотрела данный вопрос, решив его в пользу геометрии.

По вопросу об отношении диалектики Платона и геометрии я лично не придерживаюсь мнения о реальном воздействии первой на последнюю. Если я и поднимаю данный вопрос, то исключительно «для полноты рассмотрения».

Большая часть комментария Е. А. Зайцева и весь комментарий В. А. Янкова представляют собой скорее не возражения, а развитие некоторых идей работы, изложенных в ней довольно бегло. Ограниченный объем работы в сборнике не позволял мне более подробно на них остановиться, и в этом смысле указанные соображения существенно дополняют затронутые в статье вопросы. Выражая признательность авторам комментариев в связи со значительным углублением рассмотрения проблематики статьи, вместе с тем замечу, что не со всеми высказанными ими положениями я согласен на все 100%. Так как обсуждение спорных моментов вынудило бы далеко выйти за рамки непосредственной темы статьи, то я позволю себе оставить это для последующих дискуссий. В заключение еще раз хотел бы поблагодарить всех комментаторов за труд по прочтению довольно сумбурно написанной статьи и за замечания, во многом прояснившие остававшиеся неясными места работы.

ТОЧКА: НЕОБХОДИМОСТЬ И ДОСТАТОЧНОСТЬ

Прошлецова И. Л.

Одними из основных понятий в математике являются точка и пространство, которые в настоящее время вводятся без определения. Однако в древнегреческой математике существует определение точки в «Началах» Евклида — σημεῖόν εστιν, οὗ μέρος οὐθέν (букв. *точка есть, где часть ничто*)[1]. В «Схолиях» к «Началам» Евклида приводится пифагорейское определение точки как μόνας, ἔχουσα θέσιν[2], которое обычно переводят как «*единица, имеющая положение*»[3]. Но, собственно, какой объект здесь понимается под единицей? Если натуральное число или метрика, то как они могут иметь положение? Если это Единое или универсум, то его положение будет состоянием и в нем можно только быть. При таком переводе пропадают некоторые особенности: во-первых, в μονάς ударение поставлено как в μόνος — *единственный, один только, одинокий*; во-вторых, в словаре Вейсмана приводятся случаи употребления причастия ἔχουσα в смысле *направляться, простираться, проходить через что-либо*. Если учитывать эти особенности, то фразу можно перевести как «*единственная, направляющая положение*». Существует ли связь между указанными определениями точки?

В современной математике принято считать каноном античной математики «Начала» Евклида, при этом из виду обычно упускаются другие дошедшие до нас древнегреческие памятники. Но, вообще говоря, операция присоединения отрезка к отрезку, т.е. операция суммы, вводится в «Данных» Евклида, здесь же находятся предложения о подобии, теорема Пифагора. Кроме того, Папп Александрийский в «Математическом сборнике» открывает «Данными» список книг, которые составляют 32 тома «Сокровищницы анализа». И им предварительно сообщается, что «Начала» являются простым учебником геометрии и написаны в манере синтеза. В списке перечислено 11 наименований 12 трактатов всего четырех авторов, среди которых Евклиду принадлежат еще два сочинения: «Поризмы» и «Места к поверхностям»[4]. Заканчивается он «Средними» Эратосфена, там же «Коники» Аполлония Пергского и «Телесные места»[5] Аристея. В издании 1706 года «Сборника» Паппа Галеем было вставлено пропущенное наименование книги Аполлония как «Разграниченная секущая»[6], в соответствии с упоминаниями в описании содержания этого трактата.

В «Данных» нет постулатов и различается данность по величине, по «идее прямолинейной схемы» (т.е. по виду прямолинейной фигуры) и по положению. «Δεδομένα τῷ μεγέθει λέγεται χωρία τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι[7] — *Говорят, [что] области и линии, и углы [есть] данные по величине, которым можно доставлять равное*»[8]. «Τῇ θέσει δεδόσθαι λέγονται σημεῖά τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, ἅ τὸν αὐτὸν ἀεὶ τόπον ἐπέχει — *Скажем, [что] точки и линии, и углы [есть] данные по положению, которые всегда держат то же самое место*»[9]. Действительно, отдельно определяется, что на краях линии имеются точки. Точка имеется при пересечении двигающихся линий, однако она пропадает при слиянии или наложении линий. Тогда при пересечении линий всегда имеется место точки и не обязательно она сама. Но, собственно, что считать краем линии и совпадает ли он с концом? Кроме того, постулируется возможность продолжить отрезок по прямой, но останутся ли точки по краям теми же — непонятно. И во всех этих случаях каждый раз имеется математический объект как целое и только потом его точки, линии и углы, т.е. точка появляется необходимым образом.

Риман в работе 1854 г. «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» вводит линию как однократную непрерывную протяженность, плоскость как двукратную и т. д. В геометрии есть движение, но отсутствует время, и, следовательно, любое положение точки равновозможно во времени; в силу этого существует вся линия как целое в пространстве и точка может быть представлена в любом месте линии. Точка не обладает размером, а значит, сама по себе неразличима. Мы настолько привыкли к возможности где угодно поставить точку, что забываем спросить, а каковы достаточные условия существования точки?

В «Схолиях» к «Началам» Евклида упоминается, что «пифагорейцы полагали, что точка соответствует единице, линия — двойке, плоскость — тройке, тело — четверке»[10]. В современной математике мы считаем, что, с одной стороны, любое число представлено на прямой точкой, с другой стороны, оно связано мерой, в качестве которой рассматривается отрезок на прямой, представленный куском прямой между двумя точками с именами 0 и 1. При этом явного определения понятия «прямой» нет. Евклид в «Началах» определяет прямую как εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται — *прямая линия есть [та, которая] сама в себе точками полагается равной*[11]. Если это определение читать с точки зрения современных представлений в математике буквально, то под точки автоматически отводятся самоподобные «меры» линии, при этом весь процесс глобально связен. Евклид в первом постулате соединяет точки прямой линией, которая и будет определять продолжение отрезка[12] во втором постулате. Четвертый постулат: καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι — *все прямые углы являются равными друг другу* — необходим с точки зрения определения прямого угла: ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ εκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, κτλ. — *если прямая поставлена на прямую, то* *[она] образует один за другим равные друг другу углы, каждый из равных углов есть прямой, и т. д.*[13] Это определение зависит от последовательности рассмотрения углов и от возможности поставить одну прямую на другую, но в постулате и вводится возможность такого момента, при котором все углы одновременно равны, потому что только в этом случае все равно с какого именно угла начать считать. Кроме того, Евклид не приводит никаких дополнительных постулатов для стереометрии, что несколько странно, так как переход к пространству не обоснован. Однако если предположить, что Евклид во всех «Началах» находится в трехмерном пространстве и приводит обоснование для того, чтобы работать с идеальной плоскостью в этом пространстве, то в стереометрии и не должно появляться дополнительных оснований. Платон в «Государстве» приводит остроумный пример: «волчок весь целиком стоит и одновременно движется — он вращается, но острие его упирается в одно место. Можно привести и другие примеры предметов, совершающих круговращение, не меняя места. Но мы отбросим все это, потому что в этих случаях предметы пребывают на месте и движутся не в одном и том же отношении»[14].

В «Началах» постулируются следующие действия: *построение* отрезка, *продолжение* отрезка, *построение* круга и только потом *равенство* всех прямых углов. Действительно, прямую, отрезок и круг нельзя уравнять, поскольку их общей мерой является точка, а вот прямые углы можно. Следовательно, вместе третий и четвертый постулаты обеспечивают возможность построения в центре круга перпендикуляра к любому радиусу этого круга, но, вообще говоря, это перпендикуляр к плоскости круга. Для перпендикулярности прямых в одной плоскости нам необходимы все четыре постулата вместе, так как сначала нужны две точки, соединенные прямым отрезком. Вращение этого отрезка около одной из вершин образует круг и, учитывая возможность продолжения отрезка, задаст всю плоскость. На точку в центре круга нужно идеально поставить перпендикуляр, и только потом можно рассматривать первый прямой угол, образованный перпендикуляром и радиусом, проведенным в точку на окружности. Перпендикулярность обязательно должна быть идеальной, так как иначе на горизонтальной линии будет имеющая части «тень» вертикальной, т. е. их пересечение не будет точкой, где часть ничто. Поскольку радиус и перпендикуляр, образующие первый прямой угол, можно продлить за вершину угла, то продолжение одного из них и определит второй прямой угол; третий однозначно задается продолжением другого, в результате чего все три угла образуют идеальную плоскость, в которой автоматически получается четвертый угол и где можно продолжать считать по круговому обходу сколь угодно долго. Для второго угла имеются две возможности, третий однозначен, может быть, поэтому у пифагорейцев первое число — это три и все индукции Евклида обрываются на четвертом шаге.

Но нам еще нужно прямую поставить, и, кроме того, если одна точка есть центр, то другая будет описывать окружность, для которой есть отдельный термин — περιφέρεια, и почему, собственно, внутренние места отрезка образуют круг? Тут уж скорее прав Чжуан-Цзы, и «угломер не имеет квадратной формы, циркуль не описывает круг»[15].

Допустим, что вращением прямой вокруг одной из своих точек можно образовать коническую поверхность, тогда другая точка на фиксированной длине от первой будет описывать окружность. Для построения центра окружности нам нужны на ней четыре места, которые должны разделить окружность на четыре самоподобных дуги так, чтобы было возможно построение двух пересекающихся диаметров. Точка из вершины конуса еще должна «увидеть» это пересечение, в соответствии с идеей правильного треугольника «как-то по оси конуса попасть» в центр окружности и «занять» место. Это движение сделает кусок оси конуса «явным», и можно соединить точку на окружности и точку в центре радиусом. Когда конец радиуса по ходу вращения встретит место из множества концов самоподобных дуг, то из радиуса и куска оси образуется первый прямой угол; далее с учетом направления вращения в концах самоподобных дуг последовательно будут получаться следующие прямые углы. После полного оборота пятый прямой угол зафиксирует ось конуса в центре окружности, и точка в центре «сможет определить» величину круга. Только потом точки смогут начать двигаться по радиусу, и это движение задаст круг.

Итак, в античности тоже все свелось к двум произвольным точкам. Однако нужно заметить, что, например, при квадрировании круга важной оказывается вполне определенная точка линии. И решение Архита, где точка возникает как пересечение поверхностей тора, цилиндра и конуса, было вполне корректным с точки зрения дедукции. Интересно, что трисекция угла, удвоение куба и квадратура круга упоминаются вместе (исключением является Архимед), хотя грекам была известна разная степень сложности решения, и, может быть, они пытались найти совместное решение этих проблем. Архимед вводит прямую как кратчайшую линию между точками, т.е. с точки зрения современной математики здесь сразу вводится метрика.

Если вернуться к «Данным» Евклида, то после определения данности по величине следуют определения данного «логоса», данность прямолинейной фигуры по виду, данность по положению и только после этого данность величины круга. Пифагорейцы получали пространство эманацией точки, которая, подобно героям Гомера, вероятно, могла двигаться во времени независимо от движения в пространстве. Если все это учесть, то ответ на вопрос о размерности математического пространства, где всегда можно получить точку по положению, не является тривиальным. В связи с этим определение точки как «единственной, направляющей положение» не является математически бессмысленным.

В современной математике существует понятие системы независимых векторов, которые задают систему координат. В геометрии их независимость связана с их перпендикулярностью. Т. е. в геометрии с учетом метрики для плоскости получается квадрат, для пространства — куб (правда, и квадрат, и куб ориентированные). По аналогии с трехмерным пространством вводятся многомерные кубы. Если вспомнить, что у китайцев Земле соответствует символ квадрата, куб с точки зрения правильных тел есть символ «земли», а второй закон Кеплера утверждает, что при движении по эллиптической траектории квадраты времени относятся как кубы пути, то слово *геометрия* скорее следует читать как *«земля есть мера»*. Но что мы мерим Землей? Пространство? Интересно отметить, что в греческом языке *пространство* (χώρα) связано со *страной* и *землей*, в русском — со *страной* и *стороной*, в немецком языке — Raum — это одновременно *космос, вселенная, комната*. И как именно «Земля» «вертится» у Галилея и на чем собирался «повернуть» ее Архимед?

С единичным отрезком связана процедура построения канторова множества. Множество строится следующим образом: задается итерационный процесс, в котором единичный отрезок делится на три равные части, средний интервал выкидывается, а два отрезка остаются; затем берется пересечение всех оставшихся частей. При этом построение, как правило, сопровождает картинка, в которой смещаются именно оставшиеся части, а не та, которую выкинули. Но для осуществления пересечения оставшихся отрезков нужна актуальная бесконечность, поскольку уже после первого шага у нас будут два непересекающихся отрезка, и в силу этого потеряется связность. После того, как пересекли отрезки, получается некоторая совокупность отдельных точек, поскольку мера этого множества равна 0. Точки, соответствующие концам отрезков, будут иметь числовые имена 0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, ... Можно показать, что этому множеству в качестве внутренних будут принадлежать точки с именами 1/4, 3/4, 1/12, 11/12. Но выяснение принадлежности этому множеству точки с именем $1/\pi$ или $1/\delta$, где δ — трансцендентное число Фейгенбаума, связанное с переходом от периода 2^n к периоду 2^{n+1}, не является тривиальной задачей. Количество остающихся отрезков тоже растет как 2^n.

Однако если бы мы захотели строить множество Кантора алгоритмически, то нам пришлось бы столкнуться со следующими трудностями. Во-первых, придется уточнять «среднюю часть» и «выкидывать» ее, т.к. на втором шаге возникает «между» 1/3 и 2/3, но среднюю часть мы уже выкинули. Во-вторых, на каждом шаге деление отрезков на части и выкидывание средней из них нужно делать синхронно. В-третьих, возникает вопрос, как индуцировать количество и длину части, поскольку длина сохраняется только у выкидываемых интервалов, количество которых растет как n, и в сумме эти длины как раз составляют 1. При всем этом мы должны их именно «выкидывать», например, переводить в другое или каждый раз в разные измерения. Но если мы хотим затем их суммировать, то нам придется как-то запоминать количество шагов и его «длину» или строить из всех этих интервалов прямую как раз в соответствии с определением прямой у Евклида. Следовательно, нам нужна глобальная связность некоторой меры. Интересно отметить, что $1/e$ мы выкинем на первом шаге, но именно это число есть единица без одной из самоподобных частей в степени, где степень — это количество данных частей, по которому и берется предел. И не является ли точка, соответствующая этому числу, той самой «единственной, направляющей положение» в определении пифагорейцев.

Лосев в «Диалектических основах математики» упрекает Гильберта в непоследовательности и тавтологичных повторах аксиоматики. «Гильберт “не знает”, что такое прямая; и, определивши ее двумя точками, он еще не знает, имеются ли эти две точки на ней фактически или нет»[16]. Но все дело именно в том, что вряд ли хоть один математик знает это, особенно если учитывать замечание Гильберта о том, что «надо, чтобы такие слова, как “точка”, “прямая”, “плоскость”, во всех предложениях геометрии можно было заменить, например, словами “стол”, “стул”, “пивная кружка”»[17]. И наша обычная математическая неясность устраняется только лишь при конкретном исследовании, где всегда нужно «шаг за шагом прослеживать способы манипуляции над данным числовым материалом»[18]. Но если нам в конце концов удастся синхронизация пространства-времени, может быть, мы наконец сможем оценить устойчивость равновесия и открытую окрестность точки. Кажется, после того как они разминулись, ее уже видел Морис Бланшо и даже оставил мемуары об этом, «когда, все так же пребывая в охватившем меня со всех сторон преисполненном мощи созерцании, я заметил, что мои глаза зорко следят за чем-то оставшимся поначалу мною несхваченным, за точкой, нет, не точкой, а за расцветом, улыбкой сразу целого пространства, она выражала, занимала все пространство...»[19]

Если вернуться к обычному символьному инструменту математика, то мы Землей заполняем Пространство для того, чтобы найти Точку опоры актуальной бесконечности. Считается, что дедукция появилась в Греции и слово «математика» происходит от Μάθημα — *Наука*, но мы как-то умудрились потерять предмет нашего знания. Может быть, имеет смысл написать звук «θ» по разному и повторить слово на разных диалектах и в различных стилях «и» — μάτη ἤ μάτιν μάτην[20] τοὶ μάταν[21] Μάθημα — что означает *безумие или блуждание без основания конечно попусту Наука.*

Наука в том, чтобы усматривать необходимость, допускать возможности, понимать достаточность, оценивать скорости сходимостей различных «необходимо» и «достаточно», хотя бы с точностью до выколотой окрестности действительной точки — части Ничто.

Итак, если необходимость точки возникает как пересечение линий, достаточно ли пересечения трех поверхностей для нахождения точки, направляющей положение, т.е. точки, относительно которой получает положение точка с именем «единица» и в пространстве появляется единица пути или метрика? Но какова должна быть минимальная размерность пространства, где всегда можно получить точку опоры актуальной бесконечности, т. е. Точку, где часть Ничто, актуализация которой и есть «Единое» Платона или «Великая Пустота» пути даосов. И только потом можно будет понять, что означает определение прямой у Евклида и сколько на ней одновременно «равных» точек. Тогда, возможно, кратность точек и последовательность мест, связанные размерностью пространства, будут ориентировать прямую и определять ее края. Может быть, это и есть Наука — достаточность Ничто и необходимость пути через Точку.

Примечания

[1] Цит по [1, с. 376]. Начала. Кн. I. Опр. 1. Вместе *есть, где* иногда переводят как *в некоторых местах.*

[2] Цит. по *Флоренский П. А.* Symbolarium // Соч.: В 4 т. М., 1996. Т. 2. С. 575.

[3] Фрагменты ранних греческих философов. М., 1989. Ч. 1. С. 478.

[4] Τόπων πρὸς 'Επιφανείαι [3, ч. 1, с. 84].

[5] Τόπων Στερεῶν [3, ч. 1, с. 84] — сочинение утеряно; Аристей, видимо, был старше Евклида.

[6] Διωρισμένης Τομῆς [3, ч. 1, с. 84]. Но διορισμός первым значением имеет *разграничение,* обычно название переводят как «Определенные сечения».

[7] Переводится как *доставлять, давать, приготовлять, придумывать.* Глагол происходит от существительного πόρος - *путь через что-либо; отверстие.* В «Началах» не встречается.

[8] Цит. по: [2, с. 1]. Опр. 1.

[9] Цит. по: [2, с. 1]. Опр. 4.

[10] Фрагменты ранних греческих философов. М. Наука, 1989. Ч. 1. С. 478.

[11] Цит по [1, с. 105]. Начала. Кн. I. Опр. 4.

[12] *Бычков С. Н.* Четвертый постулат Евклида и потенциальная бесконечность // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты / Под ред. А. Г. Барабашева. М., 1997. С. 35—39.

[13] Цит по [1, с. 109]. Начала. Кн. I. Опр. 10.

[14] Платон. Соч.: В 4 т. М., 1994. Т. 3. С. 209.

[15] *Чжуан-Цзы*. Ле-Цзы. М., 1995. С. 283.

[16] *Лосев А. Ф.* Хаос и структура. М., 1997. С. 159.

[17] Цит. по: *Вейль Г.* Математическое мышление. М., 1989. С. 237.

[18] *Лосев А. Ф.* Хаос и структура. М., 1997. С. 167.

[19] *Бланшо М.* Тот, кто не сопутствовал мне // Последний человек. СПб., 1997. С. 192.

[20] Аттический

[21] Дорический

Список литературы

1. *Mugler Ch.* Dictionnare Historique de la Terminologie Géométrique des Grecs. Paris, 1958.

2. *Euclidis*. Data cum commentario Marini et scholiis antiquis / Ed. *H. Menge*. Lipsiae, 1896.

3. *Pappus* of Alexandria. Book 7 of the Collection / Ed. *A. Jones*. In 2 parts. N.-Y.: Springer-Verlag, 1986.

КОММЕНТАРИИ

С. Н. Бычков

С точки зрения принятых в истории математики стандартов главным достоинством работы И. Л. Прошлецовой следовало бы считать привлечение к обсуждению «статуса» геометрических объектов в античном мышлении наряду с «Началами» «Данных» Евклида. Полагаю, однако, что автор счел бы подобную трактовку слишком узкой. В Древней Греции, впрочем как и в Европе вплоть до XIX в., математическое знание имело метафизический характер. Соглашаясь с упреком А. Ф. Лосева в адрес Гильберта (а в лице Гильберта — математиков вообще), что тот не знает, что такое прямая, автор недвусмысленно заявляет о необходимости анализа «метафизического контекста» понятия точки. Я не буду касаться здесь этого контекста ввиду необычайной сложности поднятых Ириной Львовной проблем и ограничусь лишь одним из чисто математических аспектов вопроса.

Автор предлагает нетривиальное объяснение роли четвертого постулата Евклида в системе основоположений геометрии, в котором «задействовано» понятие конической поверхности. То обстоятельство, что V—VII определения первой книги «Начал» касаются поверхностей, делает правомерным предположение о том, что «Евклид во всех “Началах” находится в трехмерном пространстве», вследствие чего предлагаемое обоснование вполне допустимо. Необходимость принятия четвертого постулата для построения перпендикуляра к плоскости круга не вызывает сомнений, но это не означает, что именно здесь и возникает впервые в нем необходимость.

Все построения евклидовой геометрии осуществляются непосредственно на плоскости, а не в пространстве. Проблема однозначности продолжения прямой прежде всего планиметрическая, а не стереометрическая. По этой причине, если мы рассматриваем не «психологическую реконструкцию» хода мысли первооткрывателя четвертого постулата, а действительные роль и место данного постулата в *систематическом построении* геометрии, то объяснение его происхождения естественно все же искать в написанном в «манере синтеза» «простом учебнике геометрии», а не в проблематике менее элементарных евклидовых «Данных».

Главный интерес статьи И. Л. Прошлецовой представляется мне в актуализации проблематики оснований античной геометрии в связи с «метафизическими» воззрениями античных мыслителей. Надеюсь, что это лишь начало большой и трудной работы.

В. В. Тарасенко

Что происходит при обосновании точки? Создается понятие. Это создание не взывает к прошедшему опыту, не ищет слов в языке для своего уточнения, не апеллирует к практике или деятельности. Т. е. воззвания, поиски и апелляции появляются после того, как понятие есть, когда уже есть нечто, что мы понимаем. Если понятия нет, то бессмысленно рассматривать опыт или слова. Нужно что-то иное.

Создание понятия точки — это авантюра и мистический акт встречи исходного «нигде в ничто» и дальнейшего «здесь и теперь» — перевод в «здесь и теперь» того, что нигде не было.

Определения точки — попытки эту начальную авантюру и мистику скрыть. Поэтому они несут недосказанность, от которой в геометрии и истории осталась начальная дырка, лакуна, плохо заделанная аксиомами-определениями. Слова определений точки как заплатки прикрывают исходные дырки в ткани математического рассуждения. И это – нормальная ситуация. Математическое рассуждение должно начинаться с дырки, с недосказанности. Это симптом рождения, засохшая пуповина, симптом чего-то внешнего.

Что было вместо дырок? Возможно, какие-то другие понятия и категории — ныне разрушенные и переделанные. Можно ли их, согласно желаниям А. Ф. Лосева, «шаг за шагом» реконструировать, реставрировать и тем самым обосновать введение точки, найти смысл? Эта задача представляется мне изначально некорректной: у нее масса возможных неверифицируемых решений. Но, тем не менее, интересной — именно с философской точки зрения. Задача будит воображение, подсовывает неожиданные возможности.

Подход «шаг за шагом», противоречит подходу к математике-науке как к блужданию. Шаг за шагом никогда не блуждают. Чтобы блуждать, не обязательно уточнять основания введения понятия и оглядываться на каждом шагу. Надо просто встать и пойти. Гильберт — блуждает. Несмотря на то, что он оппонент Брауэра и интуиционизма. Как блуждает? Берет точку, линию и

11 Зак. 3711

плоскость или – кружку, стол, крышку, или еще что-нибудь и начинает их компоновать, соотносить, передвигать, определять друг через друга. Ну и что, что видна недосказанность и круги в фундаментальных определениях? Важнее то, что категории встречаются во время блуждания.

Блуждание не заблуждается. Потому что во время блуждания многое постепенно становится понятным — прежде темное ничто и нигде превращается в видимое здесь и теперь. Понимается.

И это понимание и будет понятием. И это понятие вовсе не обязательно должно быть связано с определением. В блуждании много тропок, возможностей, перескоков. Блуждание едино.

И вот это самое блуждание, его несходимость к неизменности, его эвристичность, его самоподдерживаемость, его горизонты и обосновывают точку — как нечто, вдруг появившееся здесь и теперь.

ОТВЕТ АВТОРА

Как мне представляется, принятие четвертого постулата следует из необходимости наглядного введения в геометрию, а возможно, и в математику, «равенства», и понятие конической поверхности здесь не требуется. Кроме того, форма «все прямые углы» одновременно полагает безразмерную точку, правда, только необходимым образом. Однако если в трех первых постулатах математические объекты допускали некоторый чертеж на какой-нибудь реальной поверхности, то четвертым постулатом вводится первый «идеальный» объект и возможность абстрагирования. Следовательно, становится необходимым переход к некоторому нейтральному способу зрения или идеального видения. В этом случае четвертый постулат эквивалентен требованию изотропности математического пространства, а пятым постулатом введется его гомогенность. При этом интересно, что все постулаты упорядочены: наложение связности, открытость, финитность и сингулярное положение центра, общность равенства, существование потенциально достаточной точки.

Требование нейтрального зрения, вообще говоря, представляет некоторую реальную сложность осуществления, связанную с квантификацией светового пучка и физиологическими особенностями. Поскольку можно наложить связность между двумя точками, то ее можно рассматривать как метрику. Вершина конуса в этом случае «видит», а вращающаяся точка «смотрит», и при достижении конца третьей из самоподобных дуг, т.е. «четвертого места», уже возможны два пересекающихся диаметра и возникнет перпендикулярная ось конуса. Ровно в это мгновение верхняя точка может «схватить картинку» и нечто увидеть, т.е. стать «смотрящей». Вращающейся точке при этом придется куда-то прыгать и стать «видящей». В случае сохранения метрики возникнет другой конус. Связность при этом будет зависеть от пройденных трех самоподобных дуг и возможной четвертой. В силу альтернативности второй дуги и однозначности третьей, четвертая дуга существует. «Схваченные картинки» склеиваются в поверхность, на которую можно смотреть и в которой можно что-то видеть. Если метрика не сохраняется, то с локальной точки зрения возникает случайный процесс, а с глобальной — потеря квазиустойчивой дифференциации фаз смотрения и видения, которая приводит к изменению топологических свойств.

Но идеальное видение, вообще говоря, не должно зависеть от метрики. Тогда при потере хаусдорфовой отделимости нужно сохранить хотя бы регулярность, чтобы хоть как-то видеть объект и смотреть на мембрану, т.е. получить возможность процесса понимания, блуждая в котором нужно будет вербализовать понятие. В остальных случаях возникает «слепое» блуждание, где при преобладании видения возникает Стрела или парадокс паузы, а при смотрении — Единая область или нечто. При равновесии увиденного и просмотренного станет возможным идеальное видение актуального Ничто из любой необходимой точки и усмотрение смысла в достаточной Точке, относительно которой существует проекция необходимых точек в область-круг. И, скорее всего, квадрирующей этот круг точке действительно придется идти «шаг за шагом» по диагонали квадрата в центр.

Вообще говоря, греческая речь этот пройденный путь зафиксирует и в новогреческом языке μαθέ(ς) — это *конечно, безусловно, действительно, следовательно*; μάτι означает *глаза, взгляд*, ботанический термин «*почка*», а при использовании в бытовой ситуации может оказаться *конфоркой* кухонной плиты или *петлей* в вязаных вещах.

И мне кажется интересным эпизод XIX из жизни Пифагора, упоминающийся Ямвлихом, где описываются особенности обучения достигшего преклонного возраста гиперборейского жреца Абарида, который вручил Пифагору стрелу. «Пифагор же, приняв стрелу и не удивясь ей и даже не спросив, почему тот дарит ее, но, ведя себя так, как будто он действительно бог, и в свою очередь, отведя Абарида в сторону, показал свое бедро (знак «бедра» обычно соответствует созвездию Большой медведицы, указание на золото — времени. — *И. П.*) из золота» (см.: *Ямвлих*. Жизнь Пифагора / Перев. В. Б. Черниговского. М., 1998. С. 70.).

Кроме того, существует символическое «потерянное слово» мистиков, по поводу которого «на Востоке рассказывают некоторую древнюю историю о том, что в одной стране когда-то существовала стена тайны. Если кто бы то ни было забирался на эту стену, чтобы посмотреть на другую сторону, то вместо того чтобы вернуться и рассказать, что там, он улыбался, прыгал туда и никогда не возвращался назад. Так людям этой страны стало любопытно узнать, что за тайна находится за этой стеной. Однажды, когда один человек забрался на эту стену, чтобы посмотреть, что там на другой стороне, они приковали к его ногам цепи и держали его, чтобы он не мог спрыгнуть. Когда он посмотрел на другую сторону, он также пришел в восторг от того, что увидел и улыбнулся; а те, кто стоял у подножия стены — желающие узнать, что же он расскажет — потянули его назад. Но к их великому разочарованию, он лишился дара речи» (см.: *Инайят Хан Х.* Мистицизм звука. М., 1998. С. 298—299). При этом интересно, а размеры «стены» случайно не связаны с «размером» порога «чудовищного» порядка, кажется 10 в 20-ой степени, между «динамической необратимостью системы» и «механическим следованием ее частей». Почему в живой клетке при ее делении, т.е. при образовании мембраны и отделении стенок, сложное вихреобразное движение ДНК замирает на месте и возникает «форма паузы». И зачем расплетается «косичка» ДНК перед выстраиванием параллельной.

Возникает вопрос, — становятся ли понятными следствия эксперимента, потому что возможен опыт? В этом случае меня интересует не только «грамматический контекст» единого дискурса точки, но и «семантический текст» единицы. Почерк последней, скорее всего, может регулярно заблуждаться в ориентации, но периодически утрачивает возможность заблудится в пути и должен следовать необходимости «держания места и выбору дистанции», т.е. «доказательству» и «оценке».

Если в «Началах» постулаты упорядочены и, возможно, определения последовательны, то сами книги должны согласованно следовать синтезу смысла. В связи с чем в этом «простом учебнике геометрии» требуется прояснить смысл самой древней восьмой книги, авторство которой приписано «изобретателю погремушки» Архиту из Тарента (конец V в. до н. э., корень имени означает «первоначально»).

О СТИЛЕ НЕОПИФАГОРЕЙСКОГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Вандулакис И. М.

В своем капитальном труде «Стили научного мышления в европейской традиции» А. Кромби [1] приписывает грекам аксиоматический стиль мышления (postulational style) по образцу геометрии. Согласно Кромби, греческая концепция аксиоматики и метод постулатов, по существу, восходит к Платону, Аристотелю и Евклиду [1, с. 103]. Платоновская концепция науки, развиваемой на основе гипотез, иллюстрируется в известной Диаграмме Отрезок[1], где знание разделено на уровень рассудка (διάνοια) и уровень разума (νόησις). На уровне рассудка, знание, касающееся математических предметов, выступает в виде умозаключений, получаемых рассуждениями (λογισμός), исходя из некоторой совокупности условно (ὁμολογίαν)[2] принимаемых гипотез.

Однако вышеупомянутая схема неприменима в случае греческой арифметики. В частности, она не применима к тому варианту пифагорейской арифметики, осуществляемой с помощью камешков (ψηφοφορία), известному нам из сочинений Никомаха Геразского, Теона Смирнского, Ямвлиха, и других. Стиль изложения арифметики в этих сочинениях существенно отличается от стиля, известного нам от Евклида и других математиков классической Греции. Для них, характерно отсутствие доказательства в смысле Евклида и своеобразное представление чисел с помощью камешков. Отсутствие математической изобретательности арифметики камешков привело историков математики к негативной оценке такой версии арифметики и ее характеристике как декаданс греческой математики [2, с. 11—12; 3, с. 97—99]. И это несмотря на то, что работы Никомаха пользовались широким влиянием среди византийских, латинских, и арабских ученых вплоть до XVI века, и Никомаха считали авторитетом в области арифметики того же ранга, как Евклида в геометрии.

В этой работе мы постараемся выделить основные черты пифагорейского арифметического мышления на основе имеющихся источников[3].

1. Областью арифметических рассуждений является трех-размерная среда, неограниченная в одном направлении.

Число у неопифагорейцев, условно (νόμῳ)[4] обозначается конечным, но неограниченно продолжаемой строкой знаков, построенных из единиц определенным образом, т.е. расположением единиц подряд. Оно имеет *внутреннюю структуру* (σχῆμα) и обладает *стандартным порядком* (εὔτακτον). Более того, оно зависит от единицы, так как оно является множеством единиц, а их «бесконечно много».

Линейность расположения знаков нарушается в случае плоских и телесных чисел. При этом, плоское (телесное, соответственно) число получает своеобразное схематическое изображение в виде «области», ограниченной совокупностями знаков, представляющими числа низшего порядка, т.е. линейные или плоские числа.

Таким образом, область предметов арифметики камешков стратифицирована в соответствии с размерностью их представления, т.е. в зависимости от их комбинаторной сложности. Такая стратификация в линейных, плоских и телесных числах делает необходимым применение различных порождающих операций на каждом уровне. Линейный числовой универсум порождается применением итеративного процесса прибавления единицы[5]. В случае фигурных чисел в роли основной порождающей операции выступает применение «гномона»[6].

2. «Алфавитом» арифметики камешков служит единица, т.е. $L = \{a\}$.

Единица в пифагорейской традиции представляет собой «минимальную сущность»[7], «неделимую по природе»[8] и служит «естественным началом всех "чисел"»[9]. Операция прибавления единицы допускает определение над L так, что числа определяются как строки вида

$$\vec{k} \urcorner (a, a, \ldots, a),$$

где $\urcorner$ значит, что $\vec{k}$ является сокращением строки

$(a, a, \ldots, a)$,

состоящей из k знаков.

Далее, понятие «естественной строки» (ὁ φυσικὸς στίχος)[10] вводится как конечная последовательность вида

$\langle 1, 2, 3, \ldots, k \rangle$,

и все виды чисел, обсуждаемых в неопифагорейских сочинениях, вводятся с помощью естественных строк, порождаемых определенными правилами.

3. Финитный принцип.

Число в арифметике камешков есть *пересчитанная* последовательность дискретных единиц. Эти дискретные, неделимые сущности образуют *однородную дискретную среду счета* (τὸ διῃρημένον), «безграничный» универсум неделимых единиц. В этой среде единицы сочетаются в определенные, упорядоченные «ограниченные» совокупности и образуют числа. Соответственно, число представляет собой «границу» (πέρας) на фоне «безграничного» (ἄπειρον)[11]. «Ограничение» (определенность) достигается путем «сочетания» единиц в совокупности.

Согласно Проклу, «число, начиная с единицы может возрастать без конца, однако любое число взятое в отдельности — конечно»[12]. Предметом науки могут стать только конечные объекты, а предметом арифметики, только «определенное множество». «Необходимо, — пишет Ямвлих — чтобы природа предметов науки была *обозримой*» (ἐνοράσται)[13]. Прокл также свидетельствует, что пифагорейцы рассматривали конечные предметы в отвлеченности от бесконечности, так как последнее «нельзя охватить интуицией» (γνώσει)[14]. Никомах также подчеркивает, что «поскольку всякое множество и всякая величина по необходимости бесконечны по своей собственной природе (так как множество начинает возрастать от определенной основы и [никогда] не прерывается, а величина делится, начиная от определенной целостности, и никоим образом процесс деления не может прерываться, а продолжается до бесконечности), а науки всегда являются науками о конечных [вещах], и никогда о бесконечных, то ясно, что не может возникнуть никакой науки, изучающей множество в чистом виде или величину в чистом виде (потому что каждое из них — не определено: множество — в отношении большего, а величина — в отношении меньшего). Наука [может изучать] только нечто ограниченное: множество — количеством, величина — мерой».[15]

Следовательно, пифагорейцы ограничивались рассмотрением только таких предметов, которые допускают *финитное содержательное истолкование*, т.е. предметами, обозримыми *конечным умом.*[16] Соответственно, только определенные «отсчитанные области», т.е. конечные конфигурации, рассматриваются в каждом случае. Конечный ум способен охватить конечный сегмент различных предметов. Такой сегмент фиксирован *конечной верхней границей*. Эта граница, как правило, малая, но может, в принципе, стать как угодно большой. Соответственно, сегмент можно считать *потенциально бесконечным*.

4. Арифметика строится посредством генетических построений различных конфигураций, соответствующих различным «состояниям ума». Акт выполнения следующего шага в процессе генетического построения осуществляется операциями комбинаторного характера, а его выполнение влечет за собой изменение «отсчитанной области».

Пифагорейская арифметика камешков строится как *наглядная теория счета*, т.е. как теория о фигурах некоторого простого вида. Все различные конфигурации являются результатами конкретных завершающихся *генетических построений*. Предметы, вводимые такими генетическими построениями, являются бесконечными последовательностями, которые обычно иллюстрируются неполностью с помощью конечной естественной строки или конфигурации. Поскольку рассматриваемые предметы (числовые последовательности, строки, конфигурации) представимы только посредством только конечных сегментов и никогда не рассматриваются как имеющиеся в наличие, предполагается, что процесс построения может продолжаться до бесконечности.

Все генетические построения обладают следующими свойствами:

а) начинают из единицы; б) если результат применения определенных итеративных операций порождает числа требуемого вида, то акт выполнения следующего шага порождает новые числа требуемого вида; в) процесс генетического построения порождает *все* числа требуемого вида.

В каждом этапе математик наблюдает некоторую «отсчитанную область» и решает, какую операцию он должен выполнить на следующем этапе. Операциями, которыми пифагорейские математики воспользовались при этом, следующие:

i) прибавление (или снятие) единицы;

ii) сложение конечного числа членов строки;

iii) сложение частей числа;

iv) умножение членов строки на число;

v) умножение двух естественных строк почленно;

vi) построение по умножению или по *announceинтезу*;

vii) преобразование естественных строк по определенному правилу.

Их выполнение влечет за собой изменение «отсчитанной области». Сам акт определяется обозримой «отсчитанной областью» на каждом этапе, а также настоящим «состоянием ума».

5. *Арифметические рассуждения осуществляются в виде «эксперимента» над конкретными предметами — камешками.*

Любое высказывание о числах в пифагорейской арифметике провозглашает некоторый закон, который мог подтверждаться в каждом конкретном случае чисто комбинаторным путем. Для заданных конкретных чисел достаточно *проверить*, с помощью камешков (διὰ ψήςων) и построения соответствующих конфигураций, верно ли то, что высказано данным предложением об этих числах или нет.

Подобная ориентировка на содержательные рассуждения о таких наглядных объектах, как камешки, может осуществляться независимо от предположений аксиоматического характера. Содержательные арифметические рассуждения выступают при этом в виде *мысленных экспериментов*[17] над конкретно заданными предметами — камушками, а центральное место занимает процедура не доказательства (ἀπόδειξις), а *эффективной разрешимости* (δεῖξις).

Соответственно, арифметическое бытие неопифагорейцев представляет собой генетическое истинное, положительное (без отрицания) бытие, порождаемое минимальным, неделимым, выделенным предметом — единицей. Оно также дескриптивно, так как оно основано на «указании», т. е. на вневременном процессе порождения, протекающем по определенным правилам.

Примечания

[1] Платон. Государство. 511d-e.

[2] Там же, 533c.

[3] Речь идет о работах Никомаха Геразского (II в. н.э.), Теона Смирнского (II в. н.э.), Ямвлиха (IV в.), Прокла (V в.) и др. Среди ранних свидетельств об арифметике камешков — несколько отрывков в фрагментах досократиков а также в сочинениях Платона и Аристотеля. К ним следует прибавить предложения 21-36 Книги IX «Начал» Евклида, которые О. Беккер [4] приписывает пифагорейцам, а также соответствующее сочинение Диофанта «О полигональных числах». Однако эти сочинения изложены в евклидовском стиле.

[4] Nicom. Intr. Arith., II. vi. 2, Hoche.

[5] Nicom. Intr. Arith., II. vi. 2; vii. 3, Hoche.

Об этой операции свидетельствует также более древний источник, чем «Арифметика» Никомаха. Это — фрагмент Эпихарма:

— [Если] к четному числу или, если тебе угодно, к четному,
Кто-нибудь пожелает прибавить камешек или же отнять [его],
Как ты думаешь, после этого число останется таким же?
— Ни в каком случае, клянусь богами!

(Diels, Fragmente der Vorsokratiker, Epicharmos, A. 2).

[6] Общее определение гномона находим у Герона: «вообще гномоном является то, что при прибавлении к чему-нибудь, числу или фигуре оставляет составленное целое подобным тому, что было до прибавления» [Heron, Def. 56: Heron, IV, Heiberg, 225].

Основные свойства гномона четко выделяются Ямвлихом, а именно, свойства увеличительности и сохранения формы фигур: «Гномон увеличительный... при сложении сохраняет форму фигуры» [Iambl, in Nicom. Arith. Intr. 58, 19—21, Pistelli].

Об истории этого инструмента см. [3, с. 78—79].

[7] Iambl, in Nicom. Arith. Intr., 11. 1, Pistelli.

[8] Nicom. Intr. Arith. I. viii. 4, Hoche; Theon in math. ad Platonis, III. 35-6, Hiller.

[9] Nicom. Intr. Arith. 1. viii. 2, Hoche.

[10] Nicom. Intr. Arith. II. viii. 3, Hoche.

[11] Учение о безграничном и границе впервые появляется у Филолая, только вместо термина «граница» он использует термин «ограничивающее» (περαίνον). Аристотель, при своем изложении пифагореизма, видимо, опирается на свидетельство Филолая [5], который, по всей видимости, был первым, кто письменно изложил это пифагорейское учение.

[12] Procl. in Eucl 6. 5, Friedlein.

[13] Iambl. De Comm. Math. Sci.7,31, Festa; in Nicom. Arith. Intr. 4, 26, Pistelli.

[14] Procl. in Eucl. 36. 5—10, Friedlein.

[15] Nicom. Intr. Arith. I. ii. 5. 1—12, Hoche.

[16] Однако есть свидетельства, показывающие, что в области философии пифагорейцы, видимо, проявляли готовность признать актуальную бесконечность, но они оказывались непоследовательными и склонялись к допущению потенциальной бесконечности. В частности, Аристотель пишет, что «пифагорейцы и Платон трактуют [бесконечное] как само по себе, а, именно, не как акциденцию чего-то другого, а как самобытную субстанцию» [Phys. III. iv. 203a, 4–6]. Но, далее, он их обвиняет в непоследовательности: «пифагорейцы нелепо полагают бесконечное субстанцией и одновременно делят его на части» [Phys. III. v. 204a, 33—35].

Особенно отчетливым является также свидетельство комментатора Аристотеля Фемистия, который замечает: «пифагорейцы намерены рассматривать то, что они называют «бесконечным» как субстанцию, но они непоследовательны и склоняются к тому, чтобы считать его акциденцией. Действительно, они полагают бесконечным четное и, следовательно, рассматривают бесконечное как атрибут числа и делят его на части. Стало быть, [согласно пифагорейцам], бесконечное есть количество, а не субстанция» [Paraphr. to Phys., 84.21; Фрагменты, 1989, 482].

[17] Это характерная черта финитной точки зрения, см.: [6, с. 20].

Список литературы

1. *Crombie A.C.* Styles of Scientific Thinking in the European Tradition. London: Duckworth, 1994.

2. *Tannery P.* La Geometrie Grecque. Histoire génerale de la géometrie élementaire. Paris, 1887.

3. *Heath Th.* A History of Greek Mathematics. Clarendon Press, Oxford, 1912. Vol. 1.

4. *Becker O.* Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der euklidischen Elemente // Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. 1936. Bd. 3. S. 533—553.

5. *Burkert W.* Lore and Science in Ancient Pythagoreanism. Cambridge Mass., 1972.

6. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики: логические исчисления и формализация арифметики. М., 1982 (рус. пер. *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagen der Mathematik. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1934.)

КОММЕНТАРИИ

С. Н. Бычков

В работе И. М. Вандулакиса поднят важный и малоисследованный вопрос о статусе арифметических объектов в древнегреческой математике. Мы привыкли смотреть на евклидову арифметику через призму платоновского разделения чисел на «имеющие число видимые и осязаемые тела» и на те, «которые допустимо лишь мыслить» (Государство, 525 е — 526 а), имея в виду, что предметом математики являются только последние. Судя по проанализированным в работе сочинениям неопифагорейцев, объектом теоретической арифметики являлись также и числа первого рода.

Исследование вопроса осложняется тем обстоятельством, что «мыслимость» идеальных чисел у Платона вовсе не означала их бестелесность. Аристотель, анализируя различные варианты числового учения в платонизме, во всех случаях считает число самосущим (φύσις), т.е. обладающим телесным бытием (Метафизика, 1080 а 12 — b 36). И это не случайно, поскольку Платон, помещая идеи и числа за пределы космоса, лишал их при этом только присущей миру становления «изменчивой телесности», одновременно постулируя у них наличие некоей «самотождественной телесности». В связи с этим было бы интересно выяснить, почему неопифагорейцы, испытавшие мощное воздействие со стороны платонизма, оперировали в арифметике с телесными камешками. Можно ли, например, считать достаточным такое объяснение: камешки, являющиеся твердыми телами, в арифметике допустимо уподоблять их неизменным идеальным прообразам (как бы последние ни понимались: в виде особых неизменных тел в первоначальном платонизме, или как чисто мысленные образования в среднем платонизме). Ясно во всяком случае, что исчерпывающий ответ на данный вопрос, оставаясь в рамках одной только математики, дать невозможно.

Что касается «неаксиоматического стиля мышления» в неопифагорейской арифметике, то еще в 1956 году в докладе «Из истории аксиоматики», прочитанном на III Всесоюзном съезде математиков, С. А. Яновская показала, что в отличие от геометрии арифметика не нуждается в аксиоматическом изложении, так что даже у Евклида изложение дедуктивно скорее по форме, нежели по существу.

И. Л. Прошлецова

В «Началах» Евклид определяет единицу как μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται — *говорят, единица есть [та], по которой каждое [из] сущих одно* (опр. 1, VII). Здесь единицей названа точка отделимости чего-либо из сущего, которая прежде всего носит статус «имени». Эта дефиниция, скорее всего, восходит к пифагорейцам и существенно отличается от указанного в статье неопифагорейского понимания, в котором, как мне кажется, происходит слияние «естественного неделимого начала» как «типа» и «рода». Вероятно, в связи с этим в неопифагорейской трактовке числа и становится интересной его форма. Аристотель в «Метафизике» замечает, что «монадическими полагают числа все, кто считает одно элементом и началом вещей, кроме пифагорейцев, которые, как сказано выше, полагают числа обладающими величиной» (см.: *Аристотель*. Метафизика. VI. 1080b30.) Величиной и будет как раз одно — «имя», а не размер, упорядочивание или количество. И в случае некоторого предъявленного количества объектов с одним именем, что и есть собственно число по Евклиду (VII, опр. 2), существует их «род» — размерность и генезис. Если же предъявить некоторое количество нельзя, то потенциальная процедура какого-либо генезиса вряд ли возможна. В связи с вышеуказанным, как мне кажется, следует более аккуратно присоединять предложения из «Начал» к арифметике камешков, особенно при явных различиях в терминологии «числа».

Насколько известно пифагорейцы ограничивались треугольными и квадратными числами, при этом для первых «гномоном» является «линейка», для вторых — «угольник». Из двух «угольников» можно образовать первое прямоугольное число «шесть», которое потенциально можно наращивать относительно любого из образующих «гномонов». В этом случае будет сохраняться только самоподобие «угольников». Вероятно, поэтому в пифагорейской традиции первым числом было «три».

Арифметика оперирует камешками, за которыми прежде всего закреплены процедуры подсчета, в том числе и голосов в народном собрании. При этом сам счет является предметом греческой логистики. Интересно, что же собственно способствовало переводу счета внутрь математики. Арифметика камешков работает с «типом», в связи с чем форма становится чем-то достаточно условным, что позволяет ее обозначать только камешками по углам. И, вообще говоря, существует выбор камешка, относительно которого можно раздвигать форму многоугольника, что, наверное, могло иметь значение при реальном подсчете голосов. Правда, такой выбор вне логистики становится равновозможным и в силу этого несущественным. Но все-таки сама многоугольная форма на каждой итерации сохраняется, и к тому же она имеет этот один выбранный камешек сингулярным, что позволяет говорить об ее актуальном статусе. В таком случае в арифметике камешков можно потенциально раздвигать актуальную форму, но тогда что же здесь можно доказывать? И хотя камешек играет роль точки, но неопифагорейское понимание единицы или точки как «неделимой по природе сущности» не согласуется ни с определением Евклида, ни с пифагорейцами. Современная математика обязана формированием «натурального числового ряда», скорее всего, именно неопифагорейской арифметике камешков.

ОТВЕТ АВТОРА

Как известно, Платон различает два вида абстрактных арифметических сущностей, называемых «математическими числами» и «эйдетическими числами». Математические числа составляются из абстрактных неделимых единиц, число которых бесконечно. Выделяя абстрактную единицу, мы можем выбирать единицы бесконечно многими способами, и каждый такой выбор представляет собой математическое число. Эйдетические же числа представляют собой эйдосы. Они являются едиными сущностями, так что их нельзя считать составленными из единиц. В то время как математические числа являются предметом математики, эйдетические числа являются предметом диалектики, которая исходит из определенных гипотез, принимаемых без доказательств и, в конечном счете, обосновываемых посредством Идеи Блага.

Такой подход Платона к арифметике показывает его стремление к единой трактовке как геометрических, так и арифметических сущностей. При этом платоновская философия арифметики строится наподобие его философии геометрии. Однако точку зрения Платона на эйдетические числа нельзя проследить у философов доплатоновского периода, и нет оснований считать, что математики пользовались таким понятием числа. Известно, что понятие числа как множества единиц восходит к Фалесу. Также известно, что как пифагорейцы, так и Евклид не отклоняются от такого понятия. Здесь следует отметить отклонение Платона от принятой пифагорейской традиции, о котором свидетельствует Аристотель:

«А что Платон в отличие от пифагорейцев считал единое и числа существующими помимо вещей и что он ввел эйдосы, это имеет свое основание в том, что он занимался определениями (ведь его предшественники к диалектике не были причастны)» (Метафизика, 987b, 29—34). Однако следует подчеркнуть, что хотя понятие числа как у Евклида, так и у пифагорейцев одно и то же и подход к построению арифметики у них вовсе не аксиоматический (См. *Яновская С. А.* Из истории аксиоматики // Третий всесоюзный конгресс математиков. 26, июня 1956. Т. 2. С. 105. *Бычков С. Н.* Геометрия и аксиоматический метод // Историко-математические исследования. М., 1996. Вып.1(36). Т. 2. С. 195—204. *Vandoulakis I. M.* Was Euclid's Approach to Arithmetic Axiomatic? // Oriens — Occidens. 1998. Vol. 2. P. 141—181), стиль арифметических рассуждений у пифагорейцев (который мы постарались описать в нашей статье) существенно отличается от стиля Евклида, что было отмечено еще арабскими математиками. Ибн ал-Хайсам формулирует это различие явным образом: арифметика Никомаха развивается индуктивными расуждениями, в то время как арифметика Евклида — дедуктивными.

«Свойства чисел устанавливаются двояким путем. Во-первых, индуктивным путем. Когда мы рассматриваем числа одно за одним и различаем их, мы находим таким путем все их свойства, а найти свойства чисел таким путем называется al-arithmâṭiqî. Это изложено в книге al-arithmâṭîqî [Никомаха Геразского]. Другой путь — это когда свойства чисел устанавливаются доказательствами и дедукциями. все свойства чисел, устанавливаемые доказательством, изложены в этих трех книгах [Евклида] или у тех, которые ссылаются на них» (*Ибн ал-Хайсам.* Комментарии к посылкам «Начал» Евклида. Feyzullah, Istanbul, MS 1359, f. 213v. Цит. по книге *Rashed R.* The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algera. Dordrecht, Boston, London. Kluwer, 1994. P. 246).

Арифметика в стиле Никомаха называется al-arithmâṭîqî, этот термин является транскрипцией греческого термина αριθμητικη — а арифметика в стиле Евклида называется `ilm al-`adâd, т.е. наука о числах (там же).

Следовательно, арифметика пифагорейцев и арифметика Евклида представляют собой два стиля арифметических рассуждений античности, на примере которых можно рассматривать и наиболее общий историко-математический вопрос о стилях математического мышления.

МОНАСТЫРСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И БИБЛЕЙСКАЯ ЭКЗЕГЕЗА*

Зайцев Е. А.

I

«Все это происходило с ними, как образы; это были образы для нас» (*Haec autem omnia in figura contingebant illis; haec autem in figura facta sunt nostri.* 1 Кор. 10. 11, 6). Эти слова, сказанные апостолом Павлом о скитаниях израильтян по пустыне после египетского пленения, явились для христианских экзегетов ключом к пониманию Священного Писания. Смысл их состоит в том, что библейские события кроме собственно исторического имеют еще и символическое значение (*allegoria*), подлежащее специальному истолкованию. В соответствии со своим высоким происхождением библейский текст обладает *полнотой смысла*, так что всякая попытка его *исчерпывающего* символического истолкования изначально обречена на неудачу. Вместе с тем, полнота, понимаемая как присутствие «неисчислимых смыслов» (*innumeri intellectus*, по словам папы Григория Великого), оставляет за всякой попыткой истолкования (если та не вступает в противоречие с основами веры) право на отражение одного из этих смыслов[1]. Отсутствие противоречия можно назвать «разрешительным» критерием, в соответствии с которым происходит отбор толкований.

Одновременно патристическая мысль выработала критерий «положительный», основанием которого является тезис о *единстве смысла* Писания. Единство смысла состоит в том, что всякое событие, описанное в Библии, истолковывается посредством других, раскрывающих его смысл. Каноническим типом такого истолкования является использование евангельских текстов для раскрытия смысла событий Ветхого Завета.

Кроме разрешительного и положительного критериев в арсенале средневекового комментатора было несколько аллегорий, стоявших особняком по причине своей исключительной ценности. К ним относились, прежде всего, толкования притч, данные Христом своим ученикам. Забегая вперед, отметим, что ключевое значение для нашего исследования будет иметь толкование поля как образа мира из евангельской притчи о сеятеле (Мф. 13. 38).

Латинская экзегеза двойственна. С одной стороны, будучи формально связана лишь разрешительным критерием, она отличается известной свобо-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (код проекта: № 97–03–04204).

дой в выборе средств истолкования. С другой стороны, эта свобода не превращается в произвол, ибо регулируется иерархией истолкований, в которой предпочтение отдается каноническому типу истолкования (Ветхого Завета посредством новозаветных образов), а также толкованиям Христа.

Для некоторых раннесредневековых авторов естественным способом выразить свое понимание библейского текста являлось включение в экзегетические рассуждения идей, навеянных образами художественной и научной литературы античности. Что касается вопроса об ассимиляции латинской художественной литературы библейской экзегезой в раннем средневековье, то он получил достаточно полное освещение в современных исследованиях[2]. Напротив, проблема взаимоотношения научно-технических, в том числе математических, текстов с экзегетической традицией толком не изучалась. В настоящей статье, основанной на материале монастырской геометрии IX—X вв., будут предложены некоторые подходы к прояснению этого вопроса, которые позволят, я надеюсь, по-новому взглянуть на значение геометрических текстов этой эпохи.

II

Историка математики, обратившегося к изучению геометрических текстов каролингского времени, неизбежно постигнет разочарование, ибо достигнутые результаты (если под результатами понимать собственно математическую интерпретацию) будут ничтожны по сравнению с усилиями, затраченными на их добывание. Утомительное блуждание по лабиринтам рукописей, составленных из десятков и сотен фрагментов, в конце концов вынудит традиционного историка согласиться с оценкой Поля Таннери, с горечью писавшем о «неисправимом беспорядке» (*désordre irrémédiable*), царящем в этой буйной стихии. Действительно, составленные из текстов, различных по происхождению и стилистике, геометрические рукописи предстают перед нами причудливыми образованиями, лишенными какой бы то ни было внутренней связи. Крайний беспорядок в композиции усугубляется отсутствием логики в развитии рукописной традиции: перестановка, переработка и парафраза нередко приводят к появлению текстов, в которых фрагменты математического содержания занимают еще более скромное место, чем в их непосредственных источниках. Например, составители новых компендиумов нередко секвестрируют фрагменты «Начал» Евклида, замещая их сентенциями почтенных «апологетов» — обычно Кассиодора и Исидора Севильского — или описаниями приемов землеустройства из Римского землемерного корпуса[3].

Фрагментарность геометрических текстов позволяет отнести их к разряду флорилегия — одного из самых распространенных жанров раннесредневековой литературы (находящегося в одном ряду с комментарием, глоссой и «подступом к авторам» — accessus ad auctores)[4]. Тематика раннесредневековых флорилегий разнообразна. Это — сочинения Отцов Церкви, трактаты по философии, логике, естественным наукам и т.д[5]. Одним из классиков флорилегия является Рабан Мавр (IX в.), а типичным образцом жанра — его трактат «Об обучении клериков» (819 г.), в котором практически нет фрагментов, принадлежащих самому Рабану.

Указание на жанровую принадлежность дает возможность по-новому взглянуть на содержание и композицию геометрических текстов. В данном случае «литературоведческий» ракурс обладает тем преимуществом (перед историко-математическим или филологическим исследованием), что он позволяет выделить некоторые существенные черты этих текстов, остающиеся вне поля зрения традиционного исследования[6].

Прежде чем перейти непосредственно к интерпретации геометрических текстов, остановимся коротко на полезной аналогии, возникающей при сопоставлении геометрического флорилегия и раннесредневековой живописи. Дело в том, что такие черты геометрических текстов, как соединение разнородных частей в единое целое, фрагментарность, постоянная трансформация, наличие вставок-глосс, а также различных версий одной и той же темы, находят параллели в раннесредневековой западной иконографии.

Речь идет о таких характерных чертах католической иконографии, как использование в рамках одной картины различных тем и стилистических приемов изображения (например, появление в миниатюре на библейскую тему космологических мотивов, заимствованных из античных научных иллюстраций); фрагментарность изображений (когда часть тела, скажем, голова или рука, представляет персонаж или эпизод в целом); подверженность образов постоянным модификациям; включение в живописное изображение текстовых вставок, поясняющих его смысл (так называемые tituli); существование различных типов изображений, посвященных одному и тому же сюжету[7].

Причиной, обусловившей наличие указанных черт, является сдержанное отношение католической церкви к иконопочитанию. На Западе со времен Карла Великого («Libri Carolini») получила распространение точка зрения, согласно которой изображения библейских лиц и событий не могут быть отнесены к разряду объектов культа и что их использование ограничено лишь сферой «педагогической практики». Иными словами икона на Западе является своего рода (невербальным) комментарием, используя который, верующий может совершать «интеллектуальное странствие» в область неисчислимых смыслов Писания. Лишение иконографического образа сакрального содержания приводит к тому, что в его создании допустимо свободное использование самых разных стилистических приемов. По этой причине западная иконография, в отличие от иконографии византийской (ориентированной на строгое соблюдение канона), активно варьирует палитру стилистической средств[8].

Обратимся теперь к геометрическим текстам IX—X вв. Типичным для них является совмещение тематически и стилистически разнородных частей. Обычно таких частей три. Это — фрагменты «Начал» Евклида (в переводе Боэция), выдержки из Римского землемерного корпуса и «окологеометрические» пассажи, эксцерпированные из трудов Августина, Кассиодора, Исидора и др. «Начала» Евклида — хрестоматийный пример научного трактата, в котором стилистика изложения выстраивается в строгом соответствии с законами логической формы. Стилистика фрагментов Римского землемерного корпуса совершенно иная. Написанные профессионалами для своих коллег эти тексты не претендуют на полноту и последовательность изложения. Из-за обилия специальной терминологии их содержание доступно лишь подготовленному читателю. Фрагменты из Августина, Кассиодора и Исидора разительно отличаются по своей стилистике и от научных трактатов, и от заметок землемеров. Текст Августина (речь идет о «De quantitate animae») облечен в форму свободного диалога, в котором используется богатейшая палитра художественных средств латинской классической литературы. Энциклопедии Кассиодора и Исидора кратки и сугубо информативны.

Несмотря на стилистическую разнородность фрагментов, геометрические флорилегии являются целостными произведениями. Об этом свидетельствует наличие общего названия, разбивка на главы (границы которых не всегда проходят между разнородными фрагментами), включение одних фрагментов в другие, придание части фрагментов формы диалога (под влиянием диалога Августина), глоссирование одних фрагментов другими и т.д.

Другой особенностью геометрического флорилегия, позволяющей говорить о его сходстве с иконографическим образом, является фрагментарность составляющих его частей. Так, из «Начал» Евклида эксцерпируются только определения, часть аксиом, постулаты и формулировки предложений; доказательства теорем опускаются. Подобным образом составители геометрических текстов поступают и с Римским землемерным корпусом, из которого «вырезается» большое количество фрагментов. Стремление к фрагментарности иногда приводит к тому, что эксцерпируемый источник оказывается представленным одним или несколькими предложениями или даже характерным словосочетанием. Аналогичной обработке подвергаются тексты Кассиодора и Исидора (в данном случае своей стилистикой они сами провоцируют переписчиков на эксцерпирование).

Геометрические флорилегии IX—X вв., подобно иконографическим образам того времени, находились в процессе постоянной трансформации: с течением времени в них появлялись все новые и новые фрагменты, в состав основного текста входили маргинальные и интерлинеарные глоссы, одни флорилегии вырастали из других (многоступенчатое эксцерпирование), тексты передавались не дословно, а в парафразе, и т.д. Стеммы геометрических флорилегий, отражающие зависимости между рукописями, выглядят подчас весьма сложно.

Фрагменты геометрических текстов нередко разъяснялись с помощью дополнительных глосс подобно тому, как образы иконографии пояснялось текстовыми вставками. Например, размышляя над определением треугольника из «Начал» Евклида, средневековый компилятор писал: «Это — треугольник. Здесь он (Евклид. — *Е. З.*) говорит о части поля, лежащей вне регулярных границ». Неудовлетворенный определениями геометрических фигур из *«Начал»* Евклида переписчик отсылал читателя к землемерным текстам, в которых обсуждались различные формы полей — четырехугольные, треугольные, квадратные, круглые и т.д. Понятие геометрической фигуры компилятор пояснял с помощью аграрно-юридического термина «место (на поле)». Встретив в своем источнике описание этапов геометрического доказательства (из схолий к «Началам» Евклида), он «разъяснял» их в терминах римской практики восстановления границ, и т.п. Глоссирование геометрической терминологии посредством землемерной говорит о том, что компилятор не ограничивал значение термина собственно геометрией. Он полагал, что в область значений геометрических понятий входят также землемерные реалии. Отметим, что такая точка зрения (о возможности экспликации геометрической формы посредством ссылки на форму чувственную, телесную) естественным образом вписывается в символизм поля, как мира, о котором будет идти речь ниже.

Еще одна особенность геометрических флорилегий состояла в одновременном циркулировании нескольких трактатов, отличавшихся как составом фрагментом, так и способом структурирования. Эти тексты не противопоставлялись, но взаимно дополняли друг друга. Так, в середине IX в. под руководством библиотекаря Гадоарда в монастыре Корби — «геометрической и землемерной столице раннего средневековья» (Berthold L. Ullmann) — на основе так называемой «Первой геометрии» псевдо-Боэция была создана целая серия геометрических рукописей, отличавшихся набором фрагментов[9].

Обозначив стилистические особенности геометрических текстов, попытаемся ответить на вопрос, почему в раннем средневековье геометрия оказалась облаченной в одежды флорилегия — жанра весьма далекого от традиций научной литературы. Ответ на этот вопрос (пока в самом общем виде) таков. В IX—X вв. всякий текст, в том числе и научный, являлся потенциальным источником идей и образов, приложение которых к раскрытию «неисчислимых смыслов» Священного Писания могло оказаться плодотворным. Подобно тому, как сугубо светские образы, заимствованные из античных научных иллюстраций, использовались в иконографии (явление, которого практически не знает христианский Восток), научные сюжеты были востребованы практиками библейской экзегезы. Научный текст, составленный в форме флорилегия, уже самой своей структурой (фрагментарность) был подготовлен к исполнению роли депозитария специальных символических сюжетов. Какими свойствами должен обладать такой депозитарий? Прежде всего, поскольку речь идет о «неисчислимых смыслах», он должен быть достаточно богатым. Затем, как всякий удобный «склад», в котором каждая вещь лежит на своем месте, он должен быть соответствующим образом организован. Это означает, что в тексте, хотя бы в форме намека, должны быть прописаны возможности экзегетического использования материала.

Геометрические флорилегии каролингского времени этими свойствами обладали. Прежде чем мы остановимся на некоторых из них, наиболее характерных и ярких, сделаем еще одно замечание, вытекающее из сопоставления иконографических образов с геометрическими текстами.

Использование в иконографии мотивов светской живописи — явление двуплановое. С точки зрения самой иконографии оно ведет, по-существу, к профанации изображаемого сюжета. С другой стороны, в том, что касается мотивов светской живописи, то вовлечение их в процесс истолкования библейских тем имел своим следствием неизбежную сублимацию самих этих мотивов. В результате этой сублимации, светские живописные темы (в том числе научные иллюстрации) получали дополнительное духовное измерение. Таковы, например, восходящие к Античности картографические и космологические живописные сюжеты, нашедшие повсеместное применение в западной иконографии.

Сходное явление происходило и с теми землемерно-геометрическими темами, которые оказывались значимыми для библейской экзегезы. Рассмотрим несколько конкретных примеров, начав с явных случаев использования землемерно-геометрических тем для истолкование Писания.

III

Тема «*четырех элементов*». Согласно составителю «Первой геометрии» псевдо-Боэция — наиболее популярной геометрической компиляции раннего средневековья — замысел Евклида заключался в создании дисциплины, трактующей о «природе вещей» (*ad naturas rerum respiciens*)[10]. Что понимали раннесредневековые геометры под «природой вещи»? Если ограничиться популярными в то время космологическими текстами, то, за вычетом платоновского «Тимея» (в раннесредневековой версии которого отсутствовал ключевой фрагмент «геометрической» доктрины возникновения четырех элементов), в распоряжении каролингских геометров были только два источника, в которых речь шла непосредственно о связи геометрии с «природой вещей». Это — глава «О частях мира» из космологического трактата Исидора Севильского «De rerum natura», где на геометрическом языке описывались свойства «четырех элементов»[11], и анонимный фрагмент, посвященный геометрической интерпретации «четырех элементов» и их свойств (элементам ставились в соответствие пирамида, сфера, икосаэдр и куб), входивший в так называемую третью редакцию «Наставлений в науках Божественных и человеческих» Флавия Кассиодора[12].

Тема «четырех элементов», осмысленная с точки зрения космогенеза, имеет непосредственное отношение к библейской экзегезе: ее обсуждение нередко присутствовало на страницах произведений Отцов и докторов Церкви, посвященных теме Творения. Появилась она и в раннесредневековой картографии, известной своей склонностью к символическому истолкованию географических реалий.

Тема «*orbis quadratus*» («*квадратный круг*»). Другая область приложения геометрии к истолкованию Писания — вопрос о форме космоса. Характерный пример — комментарий Кассиодора на Псалом 95. 13, в котором Кассиодор пишет, что представление о Земле, как о круге (*orbis terrae*), как будто вступает в противоречие с выражением «четыре угла Земли» (*quatuor anguli terrae*) из Евангелия (Мф. 24. 31). На самом деле, разъясняет Кассиодор, противоречия нет, ибо круг «содержит» вписанный в него квадрат, как «это ясно показано в четвертой книге «Начал» Евклида». (Рассуждение Кассиодора через два века будет дословно передано в комментариях Рабана Мавра.)

Близким по содержанию является комментарий Кассиодора на Псалом 96. 4. В начале комментария «круг земли» служит отправной точкой для размышлений о геометрическом круге, его центре и диаметре. Затем, наоборот, указанные геометрические понятия проецируются на космос. Круг, согласно Кассиодору, — это есть мир, диаметром которого является линия восток-запад, особое значение которой раскрывается в строках Псалма 112. 3 «От восхода солнца до запада да будет прославляемо имя Господне»[13].

Использование геометрии при обсуждении «четырех элементов» и «*orbis quadratus*» проходит по разряду «исторического» истолкования. Дело в том, что в раннем средневековье словосочетание «природа вещи» в контексте экзегетической традиции относилось к «историческому» истолкованию. Как указывают знатоки латинской экзегезы, собственно историческая составляющая появилась у «исторического» истолкования лишь в XII в. В раннем средневековье довольствовались вневременной «природой вещи»[14].

Значение геометрических сюжетов не ограничивалось областью «исторического» истолкования. Нередко они также обслуживали аллегорическую составляющую библейских текстов.

Богатейшим источником аллегорических толкований являлась в раннем средневековье геометрическая тема *orbis quadratus*[15]. В энциклопедии Рабана Мавра «De universo» в главах «О земле» и «О небе» подробно рассматривается символическое значение «круга земель» как образа вселенской Церкви[16]. Тема *orbis quadratus* была актуальной и для раннесредневековой символической картографии. На картах этого времени Земля изображается либо в виде круга, либо в виде квадрата или прямоугольника. Например, на некоторых картах, восходящих к «Толкованию на Апокалипсис» Беата из Лиебаны (конец VIII в.), «круг земли» имел вид прямоугольника. Эти карты служили комментарием к фрагменту, в котором служение апостолов в мире сравнивалось с зернами, брошенными в почву (при этом шла прямая ссылка на образ поля как мира из притчи о сеятеле)[17].

Влияние геометрических сюжетов сказалось также на формировании представления о Господе, как символическом геометре. В основе этого представления лежит тезис Кассиодора о том, что строение мироздания согласуется с законами геометрии: «все что правильно располагается и обладает законченностью форм, подчиняется законам этой дисциплины». Поэтому неудивительно, что Тот, кому мир обязан своим возникновением, предстает в образе геометра: «Святая Троица, когда творит мир, поступает как геометр (*geometrizat enim Sancta Trinitas...*)». Обе цитаты взяты из «Наставлений» Кассиодора[18]. Любопытно, что в том же фрагменте Кассиодор полемизирует с «мнением древних», согласно которому символическим геометром, «рисующим фигуры на покрытой пылью геометрической доске» и одновременно выстраивающем мировой порядок, является Юпитер. О теме передачи властных полномочий Громовержца христианскому Творцу, как топосе раннесредневековой литературы, мы дополнительно скажем при обсуждении символического значения землемерных фрагментов каролингских геометрий.

Фрагмент Кассиодора, в котором он вводит аллегорию Бога-геометра пользовался большим успехом у компиляторов. Классик флорилегия Рабан Мавр включил его в трактат «Об обучении клериков», тем самым подчеркнув значение этой аллегории для монастырской педагогики. Фрагмент Кассиодора появился также и в двух геометрических текстах IX в. Влияние образа Творца как геометра, существенно повышавшего ценность геометрических идей в глазах средневековых книжников, не ограничилось сферой литературного творчества. Вскоре после 1000 г. изображение Творца с циркулем в руках появилось в иконографии, служа иллюстрацией к строкам Книги Притч 8. 27: «Когда Он уготовлял небеса, я была там, когда Он проводил круговую черту по лицу бездны»[19].

Пристальное внимание к теме круга и его элементов в экзегетической литературе не осталось без последствий для каролингских геометрий. Проявляется это обстоятельство в том, что третья и четвертая книги «Начал» Евклида, в которых речь идет о свойствах окружности и ее элементов, оказались более других книг подвержены изменениям, связанным с перестановкой фрагментов Евклида и их контаминацией со стороны землемерных текстов. Кроме того, именно к этим книгам оказался «приклеенным» фрагмент Августина, в котором (помимо прочего) речь идет о превосходстве круга над другими фигурами.

IV

Перейдем теперь к обсуждению символического значения землемерных сюжетов, которыми так богаты каролингские геометрии. Поле как реалия библейского повествования имеет свое «историческое» значение. Речь идет, прежде всего, о ветхозаветных полях, переданных Господом во владение иудейскому народу. Уже сам факт того, что обладание землей находится под покровительством Всевышнего, привносит в понятие ветхозаветного поля ярко выраженную символическую составляющую. Другой важной компонентой «горней» семантики ветхозаветного поля является сакральный характер проведенных на нем границ. Он выражен в Божественном запрете на перемещение пограничных (межевых) камней (Втор. 19. 14; 27. 17; Прит. 22. 28; ср. Иов 24. 2).

Божественный характер пограничных установлений является ключом к раскрытию символического значения римских землемерных текстов. Дело в том, что с точки зрения статуса границ (пограничных камней) римское поле типологически идентично ветхозаветному. Межевые камни римского поля находились под покровительством Юпитера, точно так же, как межевые камни поля ветхозаветного — под покровительством Яхве. Их установка сопровождалась торжественными жертвоприношениями (римский праздник *Terminalia*), а перемещение сурово каралось. Поскольку библейские тексты бедны техническими подробностями землемерия, а римские, напротив, богаты такого рода сведениями, последние могли выполнять роль депозитариев землемерных тем, полезных для разъяснения Божественного характера пограничных установлений на ветхозаветном поле.

Яркой иллюстрацией символического значения поля для раннесредневековой экзегезы служат пассажи из главы «О полях» энциклопедии Рабана Мавра «De universo». В первой ее части Рабан дает «историческое» истолкование аграрных реалий в духе «природы вещей» с использованием соответствующей главы «Этимологий» Исидора. (По своему содержанию и стилистике эта часть главы типологически сходна с текстами римского землемерного корпуса; Исидор использовал для своего трактата некоторые неизвестные нам тексты римских землемеров). Во второй части главы Рабан, следуя обычной тактике, оставляет аграрную проблематику как таковую и приступает к ее символическому истолкованию. Опираясь на библейские тексты и труды комментаторов, он разворачивает полотно аллегорических трактовок слова «поле». Согласно Рабану, «поле есть мир, в котором посеяно Святое слово Божие». Затем, «поле есть Церковь», а также «народ иудейский». Кроме того «поле — религиозное христианское учение» и «учение небесных дисциплин»[20].

Не нужно быть знатоком библейской экзегезы, чтобы указать источник, из которого Рабан черпал вдохновение, размышляя о символическом значении поля. Опытный толкователь Писания и Отцов Церкви, он следовал устойчивой традиции, восходящей к евангельской притче о сеятеле, в которой Христос связал воедино образы поля и мира («Поле есть мир». Мф. 13,38). Этой традиции еще до Рабана отдали дань несколько поколений авторитетных западных экзегетов, использовавших мотив поля как мира при толковании самых разных богословских сюжетов. «Мир, который чаще всего сравнивают с полем,» — пишет Амвросий Медиоланский в комментарии на Евангелие от Луки[21]. «Земля Божия, поле Божие — есть Церковь Божия,» — отмечает Проспер Аквитанский в комментарии на Псалмы[22]. Среди ранних латинских писателей, в сочинениях которых появлялась тема поля как мира, — такие разные авторы, как Коммодиан, Новациан, Блаженный Иероним, Паулин из Нолы, Фауст из Реи, Кассиодор[23].

Если в сочинении Рабана символическое значение поля прописано явно (что определено самим характером его трактата, посвященного изложению различных мирских сюжетов и их аллегорическому истолкованию), то реконструкция «горней» составляющей аграрной тематики в землемерно-геометрических текстах IX в. требует дополнительных усилий. Дело в том, что средневековые авторы обычно воздерживались от изложения мотивов, которыми они руководствовались при составлении своих трактатов. Им чужды были проявления внешней рефлексии относительно создаваемого текста. Это замечание относится и к составителям землемерно-геометрических рукописей. В отличие от «De universo», эти тексты не содержат прямых указаний на то, что источником вдохновения для их создателей служат библейские образы. Геометрические рукописи лишены пространных рассуждений о смысле землемерно-геометрической символики; их основное содержание носит подчеркнуто «технологический» характер. Однако кроме собственно дисциплинарных частей античного происхождения эти тексты содержат вставки-глоссы. Эти вставки, ничего не дающие для понимания «позитивного» содержания трактатов, — Н. М. Бубнов называл их «отсебятинами» — обычно расцениваются как свидетельства скудности раннесредневековой мысли. Напрасно. Именно эти фрагменты, отличающиеся чрезвычайно эмоциональной риторикой, неожиданными ходами в истолковании терминов, приводящими в недоумение исследователей, нередко являются теми смысловыми хрящами, которые соединяют землемерно-геометрические тексты в единое целое, не позволяя им распасться на огромное число бессвязных фрагментов. Именно эти вставки могли переключить внимание читателя с технических подробностей римского землемерия на темы духовного характера. Основанием для переключения была аллегория поля как мира. Несколько примеров послужат иллюстрацией этого тезиса.

Выше мы указывали на то, что средневековые авторы нередко наделяли Господа теми атрибутами, которые древние приписывали Юпитеру. Среди прочих оснований для подобного «делегирования полномочий» было то, что римляне считали Юпитера ответственным за перенесение на землю установленного на небе порядка. Речь идет о создании на римском поле квадратной сетки границ, повторявшей аналогичную структуру сакральных границ на небесном своде. Последняя находила применение в практике ауспиций (гаданий по полетам птиц) и гаруспиций (по печени жертвенных животных). В римских землемерных текстах тема границы во всех ее сложных технических, юридических и религиозных аспектах (в том числе связанных с перенесением небесного порядка на землю) была подробно разработана.

В IX в. на страницах землерно-геометрических рукописей происходит следующая метаморфоза. Образ Юпитера, освящающего незыблемость пограничных камней (termini), соотносится с образом Христа, приносящего на землю «мир разграничения» (*pax terminationis*). На одной из первых страниц землемерной рукописи, созданной ок. 820 г. (и еще одной, производной от нее), компилятор вставил короткий фрагмент, рассказывающий о том, что «до Юпитера» не было принято устанавливать границы на поле. Античные корни этого фрагмента очевидны: тема установки границ Юпитером — один из топосов латинской литературы (ср. Вергилий, «Георгики» I.125 или Сенека, «Федра» 527). За этим фрагментом следует набор римских землемерных текстов, внешне никак не проявляющих своего аллегорического значения. Однако ближе к концу рукописи посреди чисто технического текста, посвященного типам и виду пограничных камней, появляется глосса средневекового комментатора, конец которой по своей стилистике напоминает апостольские послания: «Ибо земля определена под небесной осью. Евангелие от Матфея, святой Петр, святой Павел, святой Лаврентий, святой Иоанн евангелист, Христос сын Божий, через которого сошел на землю мир разграничения, [который] заповедал хранить границы ...»[24] Вырванная из контекста неведомого произведения (и потому труднопереводимая), эта короткая глосса недвусмысленно свидетельствует о том, какие ассоциации возникали у переписчика при компилировании землемерного текста. Очевидно, что, странствуя по лабиринтам римской практики межевания (технические подробности которой в раннем средневековье едва ли кто мог понять), компилятор посчитал необходимым помимо передачи «исторических» сведений указать также на символическое значение поля. За полвека до того, как ученый Рабан в «De universo» продемонстрировал батарею аллегорий, скрывающихся за фасадом вполне светских фрагментов главы «О полях» исидоровых «Этимологий», неизвестный монастырский компилятор, связанный узами жанровых ограничений, не допускавших пространного комментирования переписываемых фрагментов, попытался путем короткой вставки выразить то, что волновало его при чтении старого римского текста. За рутинной практикой установки границ компилятор, как и его римские предшественники, прозревал образы небесного порядка. Только порядок этот, разумеется, был принесен на землю не Юпитером, а Христом.

В связи с темой поля как мира симптоматичным следует признать одновременное вхождение исидорова фрагмента «О полях» в состав каролингских геометрий и в «De universo» Рабана. В геометрических рукописях этот фрагмент служил естественным дополнением к текстам римского землемерного корпуса; в «De universo» тот же фрагмент был отправной точкой интеллектуального странствования по символическим значениям поля. Таким образом, для читателей геометрических рукописей, знакомых с содержанием трактата Рабана (а он был очень популярен), глава «О полях» могла служить своего рода знаком, приглашавшим к переключению внимания с деталей римской землемерной практики на экзегетическую проблематику.

В контексте влияния образа поля как мира может быть также понят такой феномен как «сублимация» землемерных терминов, происходившая за счет символического обобщения их значений. Например, аграрный термин «место (на поле)» в контексте «Первой геометрии» псевдо-Боэция приобретал символическое значение части Земли, с указанием на то, что совершенная форма последней, включая разбиение на части, обязана своим происхождением Господу. Другой технический термин «земельное владение» (*fundus*) в результате глоссирования превращался в некоторое подобие субстанции, в которой «располагаются меры всех вещей». Одновременно этот термин смыкался по смыслу с однокоренным техническим термином fundamentum (основание, фундамент), имеющим в христианской экзегезе богатейшую традицию символического истолкования.

Эти факты свидетельствуют о том, что компиляторы раннесредневековых землемерно-геометрических рукописей пытались выстроить серию намеков на возможное символическое истолкование содержания своих трактатов. Обычно это происходило неявно, исподволь. Пожалуй, лишь однажды, некто Гиземунд, составитель испанской компиляции «Искусство геометрии», прямо указал на то, что при изложении землемерных вопросов не следует ограничиваться чисто технической стороной дела, оставляя задачу символического истолкования потомкам. Аргументируя свой тезис, Гиземунд сослался на то, что «для созерцания высшей реальности недостаточно силы зрения, на которую опирается геометрия (под геометрией Гиземунд подразумевал землемерие. — *Е. З.*)»[25].

* * *

Анализ геометрических флорилегий раннего средневековья показывает, что их стилистика сформировалась не без влияния «социального заказа», сделанного практиками библейской экзегезы. Ценность геометрического флорилегия, составленного в монастырском скриптории и служившего целям преподавания дисциплин квадривия в монастырской школе, в значительной степени определялась не столько его математическим содержанием, сколько теми возможностями, которыми этот текст обладал с точки зрения толкования Писания. По-видимому, именно этим обстоятельством объясняется включение в геометрию плохо понятых землемерных текстов римской эпохи, в том числе и не обладавших никаким геометрическим содержанием. Эти тексты, помимо прочего, изобиловали чудесными рисунками, на которых римские колонии со всеми строениями, дорогами, храмами, алтарями и, конечно же, полем, изображались покрытыми регулярной сеткой границ. Темы этих миниатюр переносили средневекового читателя в мир порядка и гармонии, установленных на Земле Творцом.

«Поле есть мир, в котором посеяно Святое слово Божие», — именно эту аллегорию Рабан поставил на первое место среди прочих толкований, тем самым недвусмысленно указав на приоритет образа, обозначенного Христом. Учитывая это обстоятельство, мы можем теперь ответить на вопрос о том, почему в каролингских геометриях землемерные тексты оказались по соседству с геометрическими сюжетами «Начал» и были использованы для разъяснения последних. Основанием для столь неожиданной трактовки могло послужить представление о том, что в иерархии символических истолкований землемерные фрагменты имели большую ценность, нежели сюжеты геометрии. В сущности, ни сам библейский текст, ни комментарии Отцов Церкви не содержат развернутых указаний на значение геометрической символики для понимания духовных тем. По этой причине средневековые переписчики (хорошо знакомые и с этимологией слова «геометрия» и с легендой о египетском происхождении геометрии из землемерия) предпочитали переводить геометрические термины в разряд землемерных, обращение к которым в контексте библейской экзегезы было санкционировано почтенной традицией истолкования поля как образа мира. Статус геометрии при этом отнюдь не понижался. Напротив, геометрия с помощью землемерия, становилась источником медитаций о структуре мироздания в целом, включая внутренний микрокосм человеческой души.

Примечания

[1] Monumenta Germaniae Historica. Epistolae. Vol. I. Pars I. Regist. Ep., III. Ep. LXII / Ed. *Ewald P.* Berlin: Weidmann'sche Buchh., 1891. S. 223. Обсуждение библейского символизма см. в гл. VII, 3 «Omnia in figura» книги *de Lubac H.* Exégèse médiévale. Les quatre sens de l'Écriture. Paris: Aubier, 1964. Vol. 2, 2. P. 60—84.

[2] *Leclercq J.* L'amour des lettres et le désire de Dieu. Paris: Les Éditions du Cerf, 1957.

[3] Фрагментарное представление материала проявляется не только в геометрических рукописях. Оно характерно и для каролингских астрономических текстов, состоящих из частей «Естественной истории» Плиния Старшего, фрагментов трактата Марциана Капеллы «О бракосочетании Филологии и Меркурия» и чертежей, изображавших траектории движения планет. Что касается богатейшей текстовой традиции трактатов Боэция по арифметике и музыке, то она остается плохо изученной.

[4] Флорилегий (от лат. florilegus — собирающий цветочный нектар) — это компиляция, составленная из фрагментов одного или нескольких авторов.

[5] Обзор некоторых флорилегий IX—X вв., составленных из комментариев Отцов Церкви см. в книге *Grabmann M.* Die Geschichte der scholastischen Methode. Berlin: Akademie-Verlag, 1957. Bd. I. S. 186—188.

[6] Аналогичная ситуация складывается с исследованием медицинских текстов. Хорошо разработанные приемы филологической критики оказываются бессильными, когда речь заходит о смысле изучаемых текстов в контексте раннесредневековой культуры. См. *Fischer K.-D.* Überlieferungs- und Verständnissprobleme im medizinischen Latein des frühen Mittelalter // Berichte zur Wissenschaftsgeschichte. 1994. Bd. 17. S. 153—165.

[7] *Grabar A.* L'image chrétienne en Occident // *Grabar A.* Les vois de la création en iconographie chrétienne. Paris: Flammarion, 1979. P. 163—91; *McKitterick R.* Text and Image in the Carolingian World // The Uses of Litteracy in Early Medieval Europe. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. P. 297—318.

[8] Разумеется, монастырское сообщество прилагает также определенные усилия к регулированию производства живописной продукции, выбраковывая образы, выходящие за рамки представлений о пристойности.

[9] *Bischoff B.* Hadoard und die Klassikerhandschriften aus Corbie // *Bischoff B.* Mittelalterliche Studien. Stuttgart: Hiesermann, 1966. Bd. I. S. 49—63.

[10] *Boethius.* Liber de Geometria. Patrologiae Cursus Completus. Series Latina / Ed. *Migne J.P.* Paris, 1847. Vol. 63. Coll. 1358D.

[11] Isidori Hispalensis de natura rerum liber. Ed. *Becker G.* Amsterdam: Hakkert, 1967. P. 24.

[12] Cassiodori Senatoris Institutiones / Ed. *Mynors R.* Oxford: Clarendon Press, 1937. P. 67—68.

[13] *Cassiodorus.* Expositio Psalmorum. Corpus Christianorum. Pars II, 2. Turnhout: Brepols, 1958. Vol. XCVIII. P. 868—869, 871—872.

[14] *de Lubac H.* Exégèse médiévale. Paris: Aubier, 1964. Vol. 2, 2. P. 337.

[15] *Bronder B.* Das Bild der Schöpfung und Neuschöpfung der Welt als *orbis quadratus* // Frühmittelalterliche Studien. 1972. Bd. 6. S. 188—210.

[16] *Rhabanus Maurus.* De Universo 12. 2. Patrologia latina. Paris, 1864. Vol. 111. Coll. 331—333.

[17] *Williams J.* Isidore, Orosius and the *Beatus* Map // Imago Mundi. 1997. Vol. 49. P. 7—31; *Moralejo S.* World and Time in the Map of the Osma *Beatus* // Apocalipsis Beati Liebanensis. Burgi Oxomensis 2: Il Beato de Osma, Estudios. Valencia: Vicent Garcia Editores, 1992. P. 145—174.

[18] Cassiodori Senatoris Institutiones / Ed. *Mynors R.* Oxford: Clarendon Press, 1937. P. 150.

[19] *Wormald F.* An English Eleventh-Century Psalter with Pictures, British Library, Cotton MS Tiberius C.VI // *Wormald F.* Collected Writings. 2 Vols. Vol. I: Studies in Medieval Art from the Sixth to the Twelfth Century. Ed. *Alexander J. J. G., Brown T. J., Gibbs J.* London—New York: Harvey Millers Publishers of Oxford Univ. Press, 1984. P. 123—138.

[20] *Rhabanus Maurus.* De Universo. Coll. 410, 484.

[21] *Ambrosius.* Expositio euangelii Lucae. Corpus Scriptorum Ecclesiasticorum Latinorum. Vienne: Tempsky, 1891. Vol. 32. P. 417.

[22] *Prosperus Aquitanus.* Expositio Psalmorum. Corpus Christianorum. Turnhoult: Brepols, 1972. Vol. 68 A. Pars 2. P. 54.

[23] Thesaurus Linguae Latinae. «Ager (allegorice)». Leipzig: B. G. Teubner, 1900. Vol. I. P. 1302:79—1303:25.

[24] *Blume F., Lachmann K., Rudorff K.* Die Schriften der römischen Feldmesser. 2 Bd. Berlin, 1848; Reprint: Hildesheim: G. Olm, 1967. Bd.I. S.362:27—29.

[25] *Toneatto L.* Note sulla tradizione del *Corpus agrimensorum romanorum.* I. Contenuti e struttura dell'*Ars gromatica* di Gisemundus (IX sec.) // Mélanges de l'École française de Rome. 1982. Vol. 94(1). P.191—313.

КОММЕНТАРИИ

А. И. Володарский

Блистательное исследование Е. А. Зайцева показало сколь огромен скачок, сделанный в историко-математических изысканиях за последнюю треть уходящего века. Написанный крупнейшим российским историком математики А. П. Юшкевичем раздел о средневековой математике (История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М., 1970. Т. I), вполне адекватно отражал уровень наших представлений по этой теме в момент написания книги. И вот перед нами работа Е. А. Зайцева о раннесредневековой западноевропейской монастырской геометрии эпохи Каролингов, работа, заставляющая совершенно по-иному посмотреть на эпоху, казалось бы, нам всем хорошо знакомую. Работа Е. А. Зайцева — это прорыв в достаточно традиционном изложении этой проблемы в научной литературе, это новация, не применявшаяся до него, по крайней мере, в отечественной литературе. Евгений Алексеевич ввел в историко-научный оборот совершенно новый пласт литературы, который исследователи либо в силу идеологических установок, либо недостаточного архивно-лингвистического владения источниками изучать не могли. Исследователям, рассматривавшим средневековье с традиционных историко-математических позиций, необходимо вслушиваться в мелодику совершенно необычных для них терминов и понятий, требуется проверить геометрию гармонией нового стиля в исторических контрапунктах. Для нас все это внове, все необычно, все чарующе, все загадочно, все звучит как волшебная мелодия — вот он новый стиль в исторических изысках.

Если же встать на позиции историка математики — традиционалиста, мне хотелось бы вернуться к проблеме, меня давно волнующей: почему после блистательного древнегреческого чуда раннесредневековая западноевропейская геометрия откатилась назад. Пожалуй, лучше всего это можно проиллюстрировать на формуле нахождения площади выпуклого четырехугольника; приближенную площадь можно получить как произведение полусумм противоположных сторон. Эта формула существовала в шумерских (III тыс. до н. э.) и вавилонских (около 2000 г. до н.э.) текстах, представляя собой основное правило для вычислений площадей. В «Математическом папирусе Ринда» (около 1650 г. до н.э.) при нахождении площади земельного участка также использовалась эта формула. Она же была использована в древнегреческих сочинениях, в древнекитайском «Математическом трактате пяти ведомств» (IV в. н.э.), она встречается у индийского математика Брахмагупты (VII в.). Эту формулу использовали математики стран Ближнего и Среднего Востока, в частности, Абу-л-Вафа (940—998). В Западной Европе эта формула найдена в работах Алкуина (735—804) и Герберта (около 940—1003).

Впрочем, интересующая меня тема выходит за рамки проблематики раннесредневековых флорилегий, а сочинение Е. А. Зайцева само по себе замечательно и самодостаточно.

А. А. Крушинский

В обсуждаемой работе привлекают как богатство содержания, так и изящество изложения. Ограничимся сейчас некоторыми критическими соображениями относительно первого. Автор уверенно ведет зачарованного читателя увлекательными тропами лабиринта смыслов, выстроенного христианскими экзегетами раннего средневековья. Однако, как говорится, «и на солнце есть пятна»: нам представляется, что Е. А. Зайцев недостаточно последователен в проявлении заявленного им «литературоведческого» (т. е. ориентированного на понимание специфики жанра) подхода. Огрубляя, этот упрек можно свести к явственно ощущаемому диссонансу между, с одной стороны, убедительной демонстрацией цельности *композиции* анализируемых источников и, с другой стороны,— приметными затруднениями с осознанием самоценности их *содержания*. О последних, на наш взгляд, свидетельствуют такие неудачные обороты речи, как «социальный заказ» (правда, взятый автором в кавычки) и «плохо понятые», к сожалению, стоящие в заключительной — итоговой — части статьи. А также весьма наивно звучащее противопоставление собственно «математического содержания» обсуждаемых землемерно-геометрических рукописей их подсобно-инструментальной роли в библейской экзегезе.

Похоже, что *автор* все же иногда путает особенности телосложения изучаемого им персонажа со складками драпирующего его одеяния, — иначе бы он не писал о геометрии, «облаченной в одежды флорилегия, — жанра, весьма далекого от традиций научной литературы».

Увлеченность автора параллелями между раннесредневековой католической иконографией и геометрическими флорилегиями тоже иногда приводит его к малооправданным выводам. Так, сопоставляя иконографические образы с геометрическими текстами, Е. А. Зайцев замечает: «Использование в иконографии мотивов светской живописи — явление двуплановое. С точки зрения самой иконографии, оно ведет, по существу, к профанации изображаемого сюжета. С другой стороны, в том, что касается мотивов светской живописи, то вовлечение их в процесс истолкования библейских тем имело своим следствием неизбежную сублимацию самих этих мотивов. В результате этой сублимации, светские живописные темы (в том числе научные иллюстрации) получали дополнительное духовное измерение... Сходное явление происходило и с теми землемерно-геометрическими темами, которые оказывались значимыми для библейской экзегезы». Предложенная аналогия выглядит довольно сомнительной: во-первых, привлечение естественно-научных и прочих специально-технических (в частности, математических) тем для иллюстрации общефилософских постулатов или вероучительных положений является нормальной экзегетической практикой (например, в древнем Китае), и ни о какой профанации оно не говорит, скорее, наоборот — сообщает изъясняемому таким образом тексту дополнительную эзотеричность. Во-вторых, что касается землемерно-геометрических образов, то о какой «сублимации» может идти речь, когда они с самого начала наделены всевозможными возвышенными символическими смыслами (см., например, замечания самого Е. А. Зайцева относительно изначально сакрального характера древнеримских межевых установлений).

В. А. Шапошников

Знакомство с работой Е.А.Зайцева создает у меня устойчивое впечатление наличия тесной связи между специфическими чертами существования геометрии в культуре эпохи Каролингов и основными идеями моего доклада «Математическая мифология и пангеометризм».

Изучаемая Е. А. Зайцевым эпоха предоставляет нам уникальную возможность ближе познакомиться с тем, как трансформируется математика, оказываясь, по существу, исключительно в религиозном контексте, при почти полном отсутствии контекста естественно-научного. Мне было приятно обнаружить, что математика в культуре раннего средневековья дает блестящую иллюстрацию центральных тезисов моей работы. Представленный автором материал прекрасно дополняет примеры, приведенные мной.

Здесь мы видим, что математический образ в раннем средневековье полностью оттесняет на задний план математическое понятие, что приводит к эстетическому восприятию математики. Отсюда — отмирание доказательства и сближение геометрии с живописью.

ОТВЕТ АВТОРА

Крушинскому А. А.

Критические замечания Крушинского основаны на недоразумении, в котором отчасти повинен и я сам, ибо в статье обошел молчанием существенное отличие раннесредневековой экзегетической практики от подобной деятельности в других культурах. Дело в том, что христианская экзегеза (в отличие от иных разновидностей символического толкования — античного, древнекитайского и т.д.) в основе своей ориентирована не на экспликацию идеи или же события посредством идеи. Она от начала до конца нацелена на конкретное историческое событие или последовательность событий, зафиксированных в Писании, которые истолковываются посредством других событий. Общая схема экзегезы такова: в основе лежит историческое событие, обычно переданное в Ветхом Завете, по отношению к которому выстраивается *историческая* интерпретация. Посредством соотнесения того же события с иным историческим событием, зафиксированным в Евангелиях, формируется первая ступень символического христианского истолкования, называемая *аллегорией.* С этими двумя историческим событиям — одно из которых получает свой смысл в зеркале другого — соотносится *тропологическое* толкование, значимое для христианской этики («внутреннего человека»). И наконец, исходя из той же серии событий, развертывается высшая *анагогическая* ступень экзегезы, истолковывающая историю в смысле одновременно временного и вневременного бытия вселенской Церкви. В раннесредневековой экзегезе все подчинено реальности исторически конкретного «здесь и теперь», смысл события раскрывается в других событиях, имевших место быть или же грядущих, но столь же реальных как и прошедшие. Она ни в коем случае не является упражнением в указании на нечто занебесное и неподвижное, вроде платоновской идеи или аристотелевской формы (единственное исключение — Эриугена). По этой причине в экзегезе нет, например, места той разновидности теологии, которая трактует о вневременных формах бытия Божия. Такая теология (в ее творческом варианте, а не как повторение перечня общедогматических положений, восходящих к первым векам христианства) появится на латинском Западе лишь в XIII в. По той же причине в экзегезе нет места и философии, если под философией (в соответствии с античными канонами) понимать учение о вневременных формах бытия мира.

Когда в XIII в. теология выделится из экзегезы Писания и станет самостоятельной дисциплиной, сформулированной в терминах аристотелевской философии (в частности, с использованием категорий количества и отношения), привлечение математики и прочих наук «для иллюстрации общефилософских постулатов» станет вполне уместным. Именно этот и последующий период будет временем Оккама, Орема и оксфордских калькуляторов, т.е. всех тех, кто с помощью математики попытается расширить представления богословия и философии о формах Божественного и земного.

Что же касается периода, рассматриваемого в статье (VIII—XI в.), то в это время математика, в силу своей внеисторичности (историчность — как признак принадлежности к серии событий Священного Писания), оказалась лишенной возможности полноправного участия в экзегезе и могла быть использована лишь на «вторых ролях». Каким бы ярким и многообещающим не казался бы нам, скажем, образ Творца как геометра для раннесредневековых экзегетов, он не мог выступать в ранге авторитетного экзегетического приема, ибо являлся всего лишь плодом смелой гипотезы (аллегории, в античном, но не христианском понимании этого слова), не имевшей прочных корней в тексте Писания. Отметим, что и сам Кассиодор, когда писал о том, что «Святая Троица поступает как геометр», не забывал осторожно добавить «если прилично будет так выразиться».

Поскольку использование аллегорий, навеянных математикой, не является каноническим (т.е. библейским в своей основе) приемом, то в контексте взаимодействия Библии и математики и возникает, с одной стороны, тенденция к сублимации тем математических, а с другой — известная профанация тем библейских. Это неизбежно, ибо библейская историчность принадлежит к более высокому смысловому уровню, нежели математическая образность. Античности такого рода проблема незнакома, ибо в античной математике находят выражение вневременные принципы античного космоса (В. Г. Моров). Судя по замечанию самого А. А. Крушинского, подобного напряжения не возникает и в древнекитайской культуре, где использование математики для «иллюстрации вероучительных положений является нормальной экзегетической практикой».

СОЦИОКУЛЬТУРНЫЕ И МЕТАФИЗИЧЕСКИЕ КРУГИ И ИХ ПРЕОДОЛЕНИЕ В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ*

Григорян А. А.

Несколько лет назад, выступая на одном из заседаний Всероссийского семинара по философии математики, я говорил о «социокультурных запретах», препятствовавших возникновению математических теорий на тех или иных этапах развития математики. В качестве примера приводились три высказывания Аристотеля: «О случайном не может быть знания через доказательство», «Актуально-бесконечного не существует», «Математические науки чужды движению, за исключением тех, которые относятся к астрономии». Я утверждал, что эти слова характеризуют тот социокультурный (и/или, метафизический) контекст развития греческой математики, в рамках которой не могли возникнуть такие теории как теория вероятностей, анализ бесконечно малых и теория геометрических преобразований на плоскости и в пространстве, хотя соответствующий уровень развития математики (математической техники) и имевшиеся проблемы делали возникновение упомянутых теорий вполне вероятным. Речь разумеется не шла о том, что философия в лице Аристотеля «запрещала» возникновение математических теорий, на самом деле Аристотель лишь констатировал сложившийся социокультурный контекст развития математики, признававшийся, по всей видимости, и теми учеными, которые будучи математиками-профессионалами стояли достаточно далеко от метафизических дискуссий того времени. Однако само выражение «социокультурные запреты» вызвало достаточно резкие возражения вследствие предполагаемой им жестко детерминирован-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (код проекта: № 97–03–04120).

ной взаимосвязи между социокультурным контекстом и фактическим развитием математики. Эти возражения показались мне в достаточной мере справедливыми по двум причинам. Во-первых, существуют историко-математические факты (например, математическая деятельность Демокрита), которые свидетельствуют о том, что «социокультурные запреты» не обладают непререкаемым авторитетом, и, во-вторых, преодоление социокультурных ограничений часто бывает обусловлено не столько изменениями социокультурного контекста , сколько существенно внутриматематическими причинами.

Более подходящим термином (или более удачной метафорой) в контексте этих размышлений представляется понятие «круга» (социокультурного и/или метафизического), введенное выдающимся французским математиком А. Гротендиком в его философско-математическом эссе «Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математика». Остановимся на его идеях несколько подробнее.

По мнению Гротендика, большинство математиков ограничивают себя жесткими понятийными рамками, затворившись во Вселенной, обустроенной раз и навсегда, а именно в том универсуме, который они нашли тогда, когда принимались за свои научные изыскания. Получив в наследство большой, красиво обустроенный математический дом со всеми удобствами, гостиными, кухнями, мастерскими и общедоступными инструментами, они и не задумываются, почему и как были задуманы и изготовлены инструменты, которыми они пользуются, почему комнаты размещены и благоустроены так, а не иначе[1]. При этом Гротендик замечает, что подобная ситуация, не является специфичной лишь для математики. С подобным положением дел можно столкнуться в любой из сфер человеческой деятельности с незапамятных времен.

Но существуют математики, к числу которых Гротендик (и, надо сказать, не без оснований) относит и себя самого, чьим призванием является беспрестанная жажда строительства новых домов. И как бы прекрасно и гармонично не были устроены имеющиеся вселенные, этим ученым претит дальнейшее благоустройство построенных трудами предшественников (или даже ими самими) математических дворцов, они стремятся к открытию новых, непривычных миров. К такого типа математикам Гротендик относит прежде всего Галуа, Римана и Гильберта. Среди своих современников Гротендик причисляет к их числу одного из своих учителей Ж. Лере.

Говоря о математиках, не принадлежащих к числу избранных, Гротендик отмечает, что им часто удавалось получать значительные, порой очень красивые результаты, однако эти результаты находились в рамках уже завершенного контекста. Эти ученые, не подозревая о том, так и остались узниками «кругов невидимых и властных», установленных в качестве своеобразных границ для математической Вселенной в данную эпоху и в данной среде. Они и не помышляли о том, чтобы затронуть эти границы. Для того чтобы переступить их, считает Гротендик, ученый должен был бы вновь обрести дарованную ему при рождении способность быть одному[2]. Другими словами, способность самостоятельно анализировать проблемы, не доверяя вербально или по умолчанию общепринятым представлениям, способность не становиться добровольным узником тех кругов, которые в каждую эпоху ограничивают горизонт творчества. В процессе познания Вселенной (в том числе и ее «математического среза»), утверждает Гротендик, только невинность, и ничто другое, наделяет нас реформаторской властью. Это та первоначальная невинность, которая дана человеку от рождения, которая порой неявно обитает в каждом из нас, являясь зачастую объектом нашего же презрения и тайного страха. Одна лишь невинность, по убеждению Гротендика, объединяет смирение и смелость, благодаря которым человек оказывается способным проникнуть в суть «вещей», и, с другой стороны, проникнуться ими, впустив их внутрь себя. Эта власть (а отнюдь не особый «дар», подобный исключительной способности рассудка усваивать и управляться легко и ловко с огромной массой известных идей, технических приемов и фактов, а также и не честолюбие, поддержанное непреклонной волей к успеху) позволяет перешагнуть «круги невидимые, но властные», ограничивающие наш творческий горизонт. Это преодоление часто не вполне осознается именно благодаря осуществляющей его невинности.

Но какова природа этих кругов, о которых говорит французский математик? Отмечая наиболее важные темы своего математического творчества, Гротендик заявляет, что каждая из них является воплощением единого широкого видения, которое может быть обозначено как новая геометрия. «Новизна» этой геометрии заключается в обеспечении синтеза двух миров, до ее появления хотя и тесно взаимосвязанных друг с другом, но все же отдельных, различных: мира «арифметического» и мира непрерывных величин. В «новой геометрии» эти два мира, некогда отдельные, сливаются в один, сметая существовавшие ранее границы. При этом идею топоса, стоящую в центре «новой геометрии» Гротендик рассматривает как свидетельство фундаментального изменения наших представлений о пространстве. Дело в том, что до появления понятия топоса (конец 50-х годов) эволюция представлений о пространстве происходила в рамках природы самой непрерывности. И лишь идея топоса охватила в общетопологической интуиции как традиционные топологические пространства, олицетворяющие мир непрерывных величин вместе с многообразиями («пространствами») абстрактной алгебраической геометрии, так и бесконечное множество структур другой природы, до тех пор считавшихся принадлежащими миру арифметическому («дискретные» или «разрывные» системы). Показательно, что Гротендик сравнивает появление новой геометрии с возникновением теории относительности Эйнштейна прежде всего потому, что обе концепции демонстрируют фундаментальное изменение наших представлений о пространстве (соответственно о «математическом» и «физическом» пространстве), а также из-за того, что эти концепции охватывают в едином видении множество ситуаций, ранее воспринимавшихся совершенно изолированно друг от друга. Продолжая сравнение с развитием современной физики, Гротендик указывает на квантовую механику, в которой материальная точка классической физики уступает место «вероятностному облаку», что символизирует еще более, чем у Эйнштейна, фундаментальное изменение самого способа восприятия явлений. Другими словами, круги, ограничивающие горизонт мышления ученого и преодолеваемые учеными-первооткрывателями имеют преимущественно метафизическую природу (представления о пространстве, времени и т.п.). Кроме того, очень часто можно говорить об укорененности этих метафизических представлений в социокультурном контексте развития науки.

Следует отметить, что выявление социокультурных и метафизических кругов и анализ процесса их преодоления в развитии науки затруднены настолько, насколько близко находится исследователь к рассматриваемому им фрагменту истории науки. И это не является удивительным, ведь мы сами зачастую являемся пленниками предрассудков, унаследованных от не столь отдаленных времен, что, разумеется не способствует адекватному их выявлению и характеризации. Поэтому вернемся к анализу ситуаций, упомянутых в начале данной статьи.

Круг № 1: «О случайном не может быть знания через доказательство», или почему теория вероятностей не возникла вплоть до XVII в.

В историко-математической литературе является общепринятым связывать возникновение теории вероятностей как науки со второй половиной XVII века. При этом считается, что исходным пунктом развития теории послужила переписка между двумя выдающимися математиками Нового времени Ферма и Паскалем. Эта переписка относится к 1654 г. и содержит главным образом решение задач на разделение ставки, связанных с рядом азартных игр.

В письмах, впервые опубликованных в Тулузе в 1697 г., как Паскаль, так и Ферма неявным образом пользовались такими фундаментальными теоретико-вероятностными представлениями, как зависимость и независимость событий, теоремами сложения и умножения вероятностей (не определяя еще самого понятия «вероятность»). Было введено также и такое важное понятие будущей теории вероятностей, как математическое ожидание случайного события (в данном случае выигрыша в игре).

Еще до опубликования этих писем, примерно в 1656—1657 гг., Гюйгенс, узнавший о том, что такие корифеи новой математики, как Ферма и Паскаль, серьезно заняты задачей на разделение ставки, подключился к этим исследованиям и в 1657 г. опубликовал работу «О расчетах в азартной игре» — первое увидевшее свет сочинение по теории вероятностей. В предисловии к этому изданию можно прочитать следующие примечательные строки: «Чем более трудной является задача определения при помощи рассуждений того, что кажется неопределенным и подчинено *случаю*, тем более *наука*, которая достигает результата, представляется удивительной. Во всяком случае, я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь *закладываются основы очень интересной и глубокой теории* (курсив мой. — *А. Г.*)»[3]. Значение этой небольшой работы Гюйгенса трудно переоценить. И не случайно, что первая часть работы Я. Бернулли «Искусство предположений», появление которой знаменует окончательное становление новой теории, представляет собой перепечатку и тщательный комментарий упомянутой работы Гюйгенса.

Таковы вкратце историко-научные факты, из которых следует вывод о том, что становление теории вероятностей как науки происходило во второй половине XVII в. (основные теоретико-вероятностные результаты были получены Я. Бернулли в 90-х гг. XVII столетия)[4]. В связи с этими фактами интересно было бы разобраться в таком вопросе: является ли возникновение математической науки о случайном именно в XVII в. «случайным событием»? Правомерность этого вопроса обусловлена, с одной стороны, достаточно высоким уровнем развития математики в античности, а с другой стороны, имеющимися сведениями о распространенности как в античности, так и позднее, азартных игр, послуживших в XVII в. источником первых теоретико-вероятностных проблем. Можно ли предположить, что, сумей какой-либо любитель азартных игр в античности (вроде вошедшего в историю теории вероятностей кавалера де Мере) привлечь внимание крупных математиков своего времени к задачам на разделение ставки, то наука о случайном могла бы возникнуть намного раньше, чем это произошло на самом деле? Подобное предположение нельзя отметать с порога и потому, что для античности характерно пристальное внимание к проблемам необходимости и случайности, возможности и действительности.

Одним из первых философов античности, рассмотревших проблему необходимого и случайного был Демокрит. Следует отметить, что реконструкция его позиции затруднена ввиду большого количества зачастую противоречивых сведений поздних авторов, которые характеризуют точку зрения Демокрита по этой проблеме. Уже само по себе такое многообразие мнений говорит о том, что проблема случайного отнюдь не относилась к маргинальным проблемам античной философии.

Проблема необходимости и случайности занимает одно из центральных мест в философской системе Аристотеля. Философ предваряет изложение своей точки зрения обзором мнений предшественников и современников. «Некоторые сомневаются, существует случай или нет. Они утверждают, что ничего не происходит случайно, но что есть некоторая определенная причина для всего того, относительно чего мы говорим, что оно произошло спонтанно и случайно... Но и вот что удивительно: многое и происходит и существует случайно и спонтанно; эти мудрецы хорошо знают, что каждое [из этих событий] можно свести к какой-нибудь причине возникновения, как говорит древняя теория, отрицающая случай, и тем не менее часть [этих событий], по мнению всех людей, происходит случайно, а часть — неслучайно»[5]. Примечательно, что здесь Аристотель считает своим долгом соотнести точку зрения философов со здравым смыслом — «мнением всех людей». И не случайно, что точка зрения самого Аристотеля в снятом виде включает в себя «философию здравого смысла». «Уничтожение случая, — пишет Аристотель, — влечет за собой нелепые последствия. Есть многое, что совершается не по необходимости, а случайно... Если в явлениях нет случая, но все существует и возникает из необходимости, тогда не пришлось бы ни совещаться, ни действовать для того, чтобы, если поступить так, было одно, а если иначе, то не было этого»[6]. Подобная взвешенная точка зрения, признающая как необходимость, так и случайность, вряд ли преобладала в античности. Большинство античных мыслителей скорее были бы солидарны со Стобеем, утверждавшим, что «люди измыслили идол [образ] случая, чтобы пользоваться им как предлогом, прикрывающим их собственную нерассудительность»[7]. Демокриту приписывается тождественное по смыслу высказывание: «Люди сотворили себе кумир из случая как прикрытие для присущего им недомыслия»[8].

В целом философско-методологические представления, так или иначе связанные с теоретико-вероятностными рассуждениями, их значимостью и статусом, можно разделить на три большие группы. Первая группа представлений — назовем их онтологическими — отвечает на вопросы о природе случайного, его месте в структуре реальности, о взаимоотношении случайного и необходимого. Вторая группа представлений отвечает на вопросы теоретико-познавательного характера (гносеологические представления). (Возможно ли, и если да то при каких условиях достижение абсолютно достоверного знания? Имеет ли ценность для науки и философии знание, не обладающее абсолютной достоверностью? Каков статус так называемого вероятного знания?) Третья группа представлений — методологические представления — связаны с характеризацией самой теории вероятностей, выявлением ее места в системе научного знания, определением ее предмета, критериев истинности теоретико-вероятностных утверждений и т. п.

Можно показать, что отличия гносеологических представлений, господствовавших в античности, от возникших в рамках философии и науки Нового времени позволяют понять причины как отсутствия науки о случайном в античности (и средневековье), так и ее возникновения и бурного развития в XVII—XVIII вв.

Для античной философской традиции характерна принципиальная дихотомия между знанием (episteme) и мнением (doxa). При этом под знанием понималась система абсолютно достоверных (истинных) утверждений, доказанных по образцу евклидовой геометрии (с соблюдением требований евклидовой строгости — утверждения выводятся из очевидных аксиом). Достижение достоверного знания, описывающего ту или иную область материи или духа, объявлялось единственной целью науки. За рассуждениями же, которые не удовлетворяли критериям доказательства геометрического типа, не признавали статуса научности. Выводы, связанные с подобными рассуждениями, относили к разряду мнения. Согласно Аристотелю, «предмет знания и знание отличаются от предмета мнения и от мнения, ибо знание направлено на общее и основывается на необходимых [положениях]; необходимое же есть то, что не может быть иначе. Многое же, хотя и истинно и существует, но может быть иным. Ясно поэтому, что о нем нет науки»[9].

Очевидно, что в рамках такой гносеологической позиции невозможно представить себе возникновение науки о случайном, ибо оно не есть то, «что не может быть иначе». Это справедливо даже в том случае, если случайности придается статус объективного существования, что, как мы видели, имеет место у Аристотеля.

Именно Аристотель, как никто другой, убеждает нас в том, что в условиях господства античных гносеологических представлений о достоверности знания, становление теории вероятностей как науки было невозможным. Признание объективности случая не могло навести Аристотеля на мысль о необходимости науки о случайном потому, что он резко «противопоставил логику истины, свойственную теоретическому знанию, логике вероятного и правдоподобного, присущей случайным спорам и обыденной практике»[10]. «О случайном, или преходящем, — писал Стагирит, — нет знания через доказательство... Если случайное... не есть ни то, что бывает большей частью, ни необходимое, то для него не может быть доказательства»[11].

Средневековая европейская философия, основывавшаяся на теологически переработанной концепции Аристотеля, также не допускала возможности существования знания, не обладающего чертами абсолютной достоверности, завершенности, окончательности. Соответственно этому и в Средние века случайность, вероятность не стали объектом научного исследования, несмотря на то, что в трудах схоластов нашли место интересные философские рассуждения о природе случайного.

Любопытно, что в Средние века (начиная с X—XI вв.) в связи с распространением азартных игр, с использованием игральных костей в различных рукописях встречаются подсчеты количества различных исходов при их бросании. Более того, в 1494 г. в Венеции был издан труд Луки Пачоли (1445 — ок. 1514 г.) — «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», в котором рассматриваются, в частности, задачи о справедливом разделе ставки между двумя игроками, когда игра прервана до того, как один из играющих выиграл определенное число партий или очков согласно условиям игры. Однако в отличие от Паскаля и Ферма, рассматривавших подобные задачи в XVII в., Пачоли пытался решать их без использования вероятностных соображений (позднее предложенные им решения были признаны неверными)[12].

Таким образом, задачи, решение которых в XVII в. привело к возникновению теории вероятностей, в условиях отсутствия соответствующих гносеологических предпосылок не сыграли той роли, которую им предстояло сыграть позднее. Более того, гносеологический пласт философско-методологических представлений о случайном лишь препятствовал возникновению науки о случайном — теории вероятностей.

Но за счет чего был преодолен этот круг? Как показывает анализ, прежде всего вследствие вполне определенных социокультурных и соответствующих им метафизических метаморфоз.

«Новый Органон» Бэкона в качестве новой гносеологической позиции, противостоящей перипатетизму, не снимал противопоставления «знание — мнение» в аристотелевском смысле. Однако у Бэкона нет пропасти между episteme и doxa. Напротив, достижение абсолютно достоверного знания «форм» связывается Бэконом с постепенным преобразованием данных опыта из области мнения в сферу знания посредством разработанных им процедур индуктивного метода. Исследовательская программа Бэкона стала программой созданного в 1660 г. Лондонского королевского общества.

Однако на пути реализации указанной программы члены Королевского общества столкнулись со значительными трудностями. Исследовательская практика навязывала убеждение в том, что максимально достижимый результат в опытном естествознании — это хорошо обоснованная гипотеза. В дальнейшем эта гипотеза может уточняться за счет привлечения новых фактов, степень ее обоснованности может повышаться, при этом, однако, никогда не достигая уровня достоверности в аристотелевском смысле. Из этой ситуации может быть два выхода: устремиться по пути, указанному скептиками, и воздержаться от научных суждений или переосмыслить само понятие достоверности. Члены Королевского общества выбирают второй путь.

Надо отметить, что на становление вероятностных аспектов гносеологии членов Королевского общества существенное влияние оказали философско-методологические воззрения Декарта[13]. В свете принципиальных отличий декартовского рационализма от английского эмпиризма сам факт упомянутого влияния как нельзя лучше характеризует торжество вероятностной гносеологии XVII — начала XVIII вв.

Согласно Декарту, абсолютно достоверное знание возможно лишь о том, что полностью подчинено сознанию. Это — знание, удовлетворяющее критериям ясности и отчетливости для разума и ограниченное пределами математики (в частности, созданной Декартом аналитической геометрии) и метафизическими истинами типа cogito ergo sum. Физический мир, однако, недоступен для абсолютно достоверного познания. Физическое познание, убежден Декарт, — это сфера более или менее вероятных гипотез, следствия из которых должны согласовываться с опытом, хотя последнее не гарантирует их абсолютной истинности. Предельно достижимый уровень достоверного в сфере опытного естествознания — это уровень моральной достоверности, «достаточный для того, чтобы управлять нашими нравами при равной достоверности вещей, в которых мы обычно не сомневаемся, касательно правил нашего поведения, хотя и знаем, что в смысле абсолютном эти правила могут быть и неверны»[14]. Любопытно, что Р. Бойль, находившийся под влиянием идей декартовского гипотетизма, полагал, что моральная достоверность достижима на пути согласования или соединения нескольких вероятных суждений.[15]

Проблемы сравнения гипотез по их большей или меньшей вероятности, оценки вероятности гипотезы, полученной на основе соединения или согласования двух или нескольких вероятных гипотез, численной оценки вероятности морально достоверной гипотезы, поставленные в связи со становлением новой, вероятностной гносеологии, настоятельно требовали создания, с одной стороны, соответствующего математического аппарата для необходимых вычислений, и, с другой стороны, построения основ новой, вероятностной логики научного познания. Необходимость создания вероятностной логики вскоре была зафиксирована Лейбницем, также испытавшим существенное влияние картезианства. «Я уже не раз говорил, — писал Лейбниц в «Новых опытах о человеческом разумении...», — что нужен новый раздел логики, который занимался бы степенями вероятности, так как Аристотель в своей «Топике» ничего не дал по этому вопросу»[16].

Таким образом, для создания вероятностной логики оказалось необходимым возникновение математической науки об «оценке случайностей», или исчисления (теории) вероятностей. При этом просто и ясно сформулированные и в то же время достаточно содержательные (в свете целей исчисления вероятностей) задачи, связанные с азартными играми, стали стартовыми проблемами для становления новой теории.

Отметим, что вероятностный круг был абсолютно невидим для античных математиков, они не осознавали в этом отношении какого-либо запрета или ограничения, препятствующего их научным исследованиям. Это справедливо потому, что данный круг носил исключительно внешний относительно математики характер. Социокультурные основания теоретического знания античности предопределили невозможность появления не только каких-либо вероятностных понятий, но и вообще каких-либо *научных* проблем, при решении которых такие понятия могли понадобиться. Другими словами, ни одному из античных математиков и в голову не могло прийти рассматривать какую-либо проблему, включающую какие-либо аспекты понятия «случайного». Естественно, что преодоление этого круга произошло без каких-либо сверхусилий со стороны математиков. Более того, становление вероятностной гносеологии Нового времени, ее укорененность в социокультурном контексте теоретического знания существенным образом подталкивало математиков к разработке необходимого математического аппарата для создания казавшейся крайне необходимой вероятностной логики.

Круг № 2: «Математические науки чужды движению, за исключением тех, которые относятся к астрономии»

За этими словами Стагирита стоит более фундаментальное представление, если угодно более фундаментальный метафизический круг, существенно ограничивавший античное математическое мышление. Речь идет о признании фундаментальных различий физического и математического существования, физического и математического мышления. Физические объекты могут изменяться (в частности, находится в движении), оставаясь при этом самими собой, математические же объекты существуют в дискретном пространстве состояний, более точно, каждый из математических объектов тождественен своему единственному и уникальному состоянию, которое в принципе не может быть подвержено какому-либо изменению[17]. Ясно, что никакого представления о переменной величине любой природы (арифметической или геометрической) в античности просто не могло возникнуть. Кроме того, несмотря на наличие собственно математических предпосылок вряд ли возможно было возникновение чего-то подобного теории геометрических преобразований (движений). Греческие математики знали о возможности доказательства теорем с помощью движения и наложения (вспомним хотябы про теоремы, доказанные Фалесом). Движения и наложения использовались даже в «Началах», однако можно вполне определенно утверждать, что Евклид старается избегать этого там, где это только возможно. И хотя с современной точки зрения решение проблемы об удвоении куба Архитом Тарентским с помощью так называемых «механических приспособлений» (а на самом деле с помощью представлений о непрерывном преобразовании геометрических объектов) является вполне приемлемым, греческие математики в большинстве своем были на стороне Платона, высмеивавшего подобные доказательства, отказывая им в принадлежности к математике. Здесь следует отметить, что данный круг, по-видимому, не имел значения для доплатоновской (может быть, допифагорейской) математики. Но затем, несмотря на его чисто метафизическую природу, он стал осознаваться математиками как один из аспектов требований строгости математических рассуждений, отступление от которых являлось крайне нежелательным. Таким образом, в отличие от вероятностного круга, круг № 2 оказался укорененным в математике, что обусловило значительные трудности в процессе его преодоления. В свете сказанного, на основании чисто умозрительных соображений можно встать на точку зрения тех историков науки, которые отрицают факт существования так называемой «античной геометрической алгебры». Построение алгебры предполагает представление о возможности преобразования (трансляции) одних величин в другие. Но круг № 2 отрицал такую возможность для математических величин. Появление же алгебры в рамках «арабской» математической традиции следует объяснять, по-видимому, принципиально иным метафизическим и социокультурным контекстом (данная проблема заслуживает специального и тщательного исследования).

Другой характерный пример. Со времени открытия Менехма античные математики понимали, что при пересечении конуса плоскостями под различными углами наклона последовательно появляются все конические сечения. Однако это не могло служить основанием для объединения данных кривых в один род. В своем трактате о конических сечениях Апполоний, стараясь давать единые доказательства ряда общих свойств (разумеется далеко не всех) конических сечений, пользуется соображениями, связанными с так называемым «методом площадей», а не с представлениями о преобразовании этих геометрических образов друг в друга.(Здесь, разумеется стоит упомянуть и о третьем круге античной математики («Актуально бесконечного не существует»), о котором будет идти речь ниже. Не случайно Харди, говоря о проективной геометрии Дезарга, отмечал что она знаменует первое в истории введение актуальной бесконечности в математику. Ведь именно введение бесконечно удаленных точек и прямых позволили Дезаргу говорить о непрерывном изменении геометрических образов, возникающих при пересечении конуса плоскостью под разными углами наклона.)

Оборотной стороной данного метафизического круга был принципиально качественный характер физики Аристотеля. Поскольку «математические науки чужды движению», движение не может быть описано с использованием математики (небесные движения занимают особое, уникальное положение, поэтому для астрономии греческая наука делает исключение).

Преодоление данного круга (в европейской математической традиции) начинается в позднем средневековье с попыток сближения математического и физического существования. Я имею в виду прежде всего философско-математическую деятельность мыслителей Оксфордского и Парижского университетов. Именно в Оксфорде Р. Гроссетест и Р. Бэкон впервые в Средние века настаивают на необходимости математизации знания, при этом существенно отходя от античной (пифагорейско-платоновской) традиции, выдвигая принципиальной важности идею количественной структуризации античных натурфилософских представлений о движении. В том же направлении развиваются исследования и в Сорбонне. «Английские (Т. Брадвардин, Р. Суайнсхед и др.), а также французские (особенно Н. Орем) ученые XIV в., — отмечал А. П. Юшкевич, — предпринимают смелую попытку подвергнуть с помощью инфинитезимальных идей квантификации квалитативную в своей основе натурфилософию перипатетиков. Прежде всего — и это оказалось особенно важным для дальнейшего — по новому осмысливаются те разделы «Физики» Аристотеля, в которых рассматриваются соотношения между силой и движением, силой и сопротивлением; иными словами перестраивается перипатетическая механика; вслед за тем математическому рассмотрению подвергаются любые виды изменения непрерывных, а частью и кусочно-разрывных измеримых величин или, в терминологии перипатетиков, интенсификации — усиления и ремиссии — ослабления всякого рода «форм» или качеств — теплоты, цвета и т.д., но также доброты, греховности и т.п., переменная интенсивность которых зависит от их экстенсивности — распределения интенсивностей на конечных или бесконечных интервалах в пространстве либо времени. К категории форм относится и простейшее механическое движение, т.е. пространственное перемещение»[18]. Таким образом, средневековые ученые преодолевают пропасть, лежащую между математикой и естествознанием, преодолевают круг, во власти которого находилось античное мышление. Математика в их представлении не описывает лишь мир вечных и неизменных чисел и геометрических форм, а также и небесных движений, она способна внести свой вклад в понимание закономерностей «форм» изменяющихся. Иными словами, в новом социокультурном контексте математика низвергается с пьедестала «вечности», уступая место теологии, толкующей о действительно вечном и абсолютном. От этого, с одной стороны, выигрывает естествознание, разумеется не сразу, но предпосылки математического естествознания складываются уже тогда, достаточно упомянуть, что в Оксфорде и Париже «формируется идея о переменности — течении (fluxus) величин, о мгновенных скорости и ускорении, для которых вводятся соответствующие, даже латинские, термины и в совершенно отвлеченном, не связанном с физикой плане, доказывается основной закон и другие свойства равномерно ускоренного движения»[19]. И, с другой стороны, что для нас особенно важно, допуск в математику представлений об изменении, движении способствует преодолению кругов невидимых, но властных, препятствовавших самой возможности появлению математики, имеющей дело с изменяющимися, перетекающими друг в друга переменными величинами. Преодоление метафизических представлений, принципиально разводящих математическое и естественнонаучное (механическое и физическое) мышление приводит в конце концов к становлению эмпиристской философии математики, ставшей краеугольным камнем нового метафизического круга, долгое время препятствовавшего, в частности, появлению и признанию неевклидовых геометрий. В то же время радикальный отказ от эмпиристской философии математики привел к образованию очередного круга в рамках которого современная математика находится и поныне.

Здесь следует указать на принципиальные различия в преодолении кругов, доставшихся в наследство от античности (круги № 1 и № 2) и «эмпиристского» метафизического круга. В первых двух случаях именно изменения социокультурного и метафизического контекста (процесс, происходивший независимо от развития математики) освобождали математическое мышление от невидимых, но властных ограничений. Эмпиристские же запреты преодолеваются изнутри самой математики, вследствие, в частности, построения интерпретаций непривычных неевклидовых образов на евклидовых объектах, а также понимания того, что новые математические образы оказываются чрезвычайно полезными при решении математических проблем, возникших независимо от новых понятий и концепций. То же самое происходило (и происходит сейчас) когда антиэмпиристский круг местами рвался под натиском математического мышления, изобретательно, но незаконно пользовавшегося физическими соображениями. Правда, как правило, строгие приверженцы математической нравственности восстанавливали статус кво (вспомним, например деятельность ученика Вейерштрасса Шварца, давшего строгое обоснование незаконнорожденному «принципу Дирихле», а также обобщенные функции Дирака и Хевисайда, получившие вскоре после своего появления законный математический статус). Сам факт поиска таких оправданий свидетельствует о прагматизме математиков нового и новейшего времени, принципиально чуждом математикам античности (достаточно сравнить осторожные высказывания Архимеда по поводу квадрирования криволинейных фигур и прагматизм ученых, отраженный в словах Даламбера по поводу нестрогих инфинитезимальных методов: «Идите вперед, уверенность придет потом!»). И даже в период полного преобладания антиэмпиристской философии математики, использование официально запретных способов рассуждения в математике не прекращается. Более того, в последние годы Э. Виттен с помощью интегралов Фейнмана совершенно удивительным образом находит новые инварианты для трехмерных многообразий и т.д. Безусловно, в будущем интегралы Фейнмана будут формализованы, но сейчас их использование требует огромной физической интуиции и опыта. Ю. И. Манин пишет по этому поводу : «В предыстории интегрального исчисления важное место занимает замечательный труд Кеплера «Стереометрия винных бочек». Интегралы, выражающие объемы тел вращения, полезных в народном хозяйстве, были вычислены в этой работе до появления общего определения интеграла. Математическая теория великолепных интегралов Фейнмана, которые физики пишут в огромных количествах, все еще не далеко ушла от стереометрии винных бочек. С точки зрения математики, каждое такое вычисление есть заодно определение того, что «вычисляется», либо построением текста в формальном языке, грамматика которого заранее не описана. В процессе таких вычислений физик спокойно делит или умножает на бесконечности (точнее, на нечто, что если бы оно было определено, оказалось бы бесконечным); суммирует бесконечные ряды бесконечностей, предполагая при этом, что 2—3 члена ряда дают хорошее приближение ко всему ряду, и вообще живет в царстве свободы, нарушая все «моральные нормы»[20]. Но можно ли в таком случае утверждать, что статус социокультурных и метафизических кругов, начиная со второй половины XIX века, радикально изменился? Можно ли сказать, что они потеряли былую жесткость и непререкаемость в глазах математического сообщества? Для того, чтобы прояснить эту ситуацию обратимся к третьему из указанных в начале статьи кругов.

Круг № 3: «Актуально бесконечного не существует»

Аксиома Евдокса об «архимедовых» величинах («Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга»[21]) предназначена не только для легализации отношений между несоизмеримыми отрезками, но также и для того, чтобы исключить из математики как актуально бесконечно малые, так и бесконечно большие величины. Таким образом, в лице Евдокса, греческая математика сознательно ограничивает множество объектов, оперирование с которыми является допустимым. Другими словами, данный круг возникает изнутри математики в качестве средства, позволявшего застраховаться от парадоксов бесконечного, возможность появления которых для греческих математиков стала очевидной в свете апорий Зенона Элейского. Одними из наиболее интересных объектов, оставшихся за границами этого круга были роговидные углы. Поскольку роговидные углы (например, угол, образованный окружностью и касательной к ней) меньше любого, сколь угодно малого прямолинейного угла, постольку они оказались под запретом, несмотря на то, что греческим математикам были известны ряд их свойств. Особенность данного круга как раз и состоит в его совершенно отчетливой осознанности математиками-профессионалами, что вело к использованию «запретных объектов» и связанных с ними рассуждений в качестве эвристического средства получения новых результатов. Подчеркнем, что истинность полученных «незаконным» путем результатов не подвергалась сомнению. Доказательство в этих случаях было равносильно соблюдению необходимых формальностей, поскольку оперирование (не только в качестве эвристического средства, но и в контексте обоснования) актуально бесконечно малыми (неделимыми), впервые имевшее место в «любительских», с точки зрения математика-профессионала, работах Демокрита считалось признаком дурного тона. При этом статус инфинитезимальных рассуждений оценивался выше тех, которые основывались на «механических» аналогиях, поскольку выход за пределы круга № 3 не выводил за пределы математики (в отличие от выхода за пределы круга № 2), хотя мог признаваться допустимым лишь в контексте открытия новых фактов, но никак не в контексте их обоснования. Заметим, что круг № 3, сформировавшийся, как уже было отмечено изнутри математики (в отличие от круга № 2, имевшего метафизическую природу и круга № 1, сформированного сочетанием метафизических и социокультурных предпосылок (?!)), прекрасно вписывался в социокультурный контекст развития античной математики и, разумеется подпитывался этим контекстом. Это очень хорошо известно, и наиболее ярко, хотя и далеко не всегда корректно об этом писал О. Шпенглер. Однако изменение социокультурного контекста отнюдь не вело автоматически к преодолению этого круга в развитии математики (как это было с «вероятностным» кругом). «Я протестую..., — писал Гаусс Шумахеру, — против пользования бесконечною величиною как завершенною, что в математике никогда не позволено. Бесконечность есть лишь некий fa on de parler [способ выражаться], причем в действительности имеют в виду границы, к которым определенные отношения подходят как угодно близко, в то время как другим запрещается расти без ограничения»[22]. О глубокой укорененности в математике инфинитезимального круга (особенно той его части, которая относится к актуально бесконечно малым), существовавшего в течение достаточно долгого периода времени практически независимо от изменений, происходивших в социокультурном и метафизическом контексте развития математики, очень красноречиво свидетельствуют колебания Галилея, которыми он делится как в своих опубликованных работах, так и в письмах к своему знаменитому ученику Кавальери. Как считает П. П. Гайденко, и с ней, по-видимому, следует согласиться, Галилей фактически пользуется представлением об актуально бесконечно малых в своей механике. Так, говоря о причине сопротивляемости некоторых материалов разрыву, Галилей упоминает о мельчайших пустотах, замечая, что «хотя эти пустоты имеют ничтожную величину и, следовательно, сопротивление каждой из них легко превозмогаемо, но неисчерпаемость их количества неисчислимо увеличивает их сопротивляемость»[23]. Как не без оснований считает П. П. Гайденко, «неисчислимость количества ничтожно малых пустот — это в сущности бесконечное множество бесконечно малых, можно сказать пустот, а можно сказать, сил сопротивления. Потом окажется, что этот метод суммирования бесконечно малых — неважно чего: моментов времени, частей пространства, моментов движения и т. д. — является универсальным и необычайно плодотворным инструментом мышления»[24]. Говоря о новых возможностях, открывающихся перед мышлением, принимающем понятие актуально бесконечно малого (он не просто говорит о возможностях применения этого понятия, но реализует эти возможности вводя, например, понятие о мгновенной скорости), Галилей осознает парадоксальность природы неделимых. Это приводит его к колебаниям относительно вопроса о возможности допущения актуально бесконечно малых (неделимых) в математику. И хотя в «Беседах о математических доказательствах» Галилей не отрицает этой возможности, позднее, когда Кавальери создает свою геометрию неделимых, он высказывается против представлений своего ученика. «Хотя письмо Галилея к Кавальери и не сохранилось, но по некоторым высказываниям самого Галилея и по ответу Кавальери на письмо Галилея можно судить о том, что именно понятие суммы бесконечно малых Галилей считал теоретически несостоятельным»[25]. И действительно, признавая, что в целом философия науки Галилея бесконечно далека от представлений Аристотеля, Галилей, подобно Стагириту, настаивает на необходимости для математиков оставаться в рамках инфинитезимального круга. «Бесконечность, — писал Галилей в одной из своих работ, — должна быть вовсе исключена из математических рассуждений, так как при переходе к бесконечности количественное изменение переходит в качественное, подобно тому, как если мы будем самой тонкой пилой... размельчать тело, то как бы мелки ни были опилки... каждая частица имеет известную величину, но при бесконечном размельчении получится уже не порошок, а жидкость, нечто качественно новое, причем отдельные частицы вовсе исчезнут»[26]. Одним из доводов Галилея против признания актуально бесконечно малых в математике было его убеждение в том, что различные бесконечные множества не могут находиться между собой в каком-либо из отношений (равенства, больше, меньше), ибо это приводит к неустранимым парадоксам. Но для Кавальери, стоящего перед проблемами нахождения площадей и объемов, эта парадоксальность неделимых постулируется и закрепляется в качестве основополагающего положения. «Я решился признать тот факт, — отвечал на письмо Галилея Кавальери, — что одно бесконечное может быть больше другого, за прочнейшее основание геометрии»[27]. Таким образом, пользуясь парадоксальным представлением об актуально бесконечно малом в механике, Галилей не соглашался с подобным прагматическим компромиссом в математической концепции Кавальери. Даже Кантор (в конце XIX в. (!)) подчеркивал, что к идее введения актуальной бесконечности в математику он пришел почти против своей воли, вступая в конфликт с ценными для него традициями. Изучая свойства тригонометрических рядов, он обнаружил, что понятия предельной точки и иррациональных чисел требуют введения и использования совершенно новых и непривычных представлений — так он пришел к общему понятию и классификации бесконечных множеств (вновь «прагматические» соображения являются существенным фактором преодоления ограничений!). Именно укорененностью «инфинитезимального» круга в самой математике (относительно независимо от социокультурного контекста) можно объяснить не только длительный период игнорирования идей проективной геометрии (от пионерских работ Дезарга и Паскаля в XVII в. до появившихся лишь в XIX веке работ Понселе), но и насколько чрезвычайно яростную, настолько и ничем логически не обоснованную атаку самого Кантора на ученых, пытавшихся ввести в математику актуально бесконечно малые величины. В письме Виванти от 13 декабря 1893 г. он называет их «инфинитезимальными бациллами холеры в математике», бумажными величинами, не обладающими «никаким другим существованием, кроме как на бумаге, исписанной их открывателями и приверженцами»[28], добавляя, что место этих величин — в корзине для бумаг. Более того, основываясь на теории порядковых чисел, Кантор пытался доказать, что актуально бесконечно малые не могут существовать в принципе. Об абсолютной нелогичности этой деятельности Кантора свидетельствуют следующие слова Цермело: «Несуществование «актуально бесконечно малых величин» недоказуемо в той же мере, как и несуществование канторовских трансфинитов, и в обоих случаях ошибочное умозаключение одно и то же; оно состоит в том, что новым величинам приписываются некоторые, не могущие быть присущими им, свойства обычных «конечных величин»[29]. Любопытно, что сам Кантор задолго до Цермело, используя практически те же аргументы убедительно показывал тщетность попыток доказательства невозможности существования актуально бесконечных чисел, не замечая, что эти же доводы показывают тщетность его собственных усилий относительно доказательства абсурдности актуально бесконечно малых. «Все так называемые доказательства абсурдности актуально бесконечных чисел ошибочны, — писал Кантор, — как может быть показано в каждом отдельном случае и вытекает так же из общих соображений. Причина заключается главным образом в том, что в этих доказательствах стоящим под вопросом числам заранее приписываются, а точнее — навязываются все свойства конечных чисел, в то время как, наоборот, бесконечные числа, если они вообще мыслимы в какой-либо форме, вследствие их противоположности конечным числам должны образовать совершенно новый род чисел, строение которого целиком зависит от природы вещей и является предметом исследования, но не нашего произвола или нашей предубежденности»[30]. К чести Кантора следует отметить, что позднее (о чем свидетельствует сравнительно недавно обнаруженное письмо к Лассвицу) он «отказался от категоричности своего прежнего мнения и допустил возможность того, что в дальнейшем исследователям удастся дать строгое определение бесконечно малых величин»[31]. Однако вряд ли обосновано предположение, что это мнение Кантора, будь оно высказано в одной из его печатных работ, нашло бы поддержку, достаточную для признания концепций, появившихся в конце XIX века, о которых в первой четверти XX века известный историк математики Г. Вилейтнер счел необходимым заметить следующее: «И действительно, Веронезе (G. Veronese) в 1894 г. ...построил вполне последовательную систему бесконечно малых величин различных порядков. Еще раньше этого (Гальфен, Halphen, 1877) , бесконечно малые различных порядков элементы кривой с успехом применялись в теории особых точек алгебраических кривых. *Однако дух времени не благоприятствовал, да и сейчас не благоприятствует такого рода исследованиям* (выделено мною. — *А. Г.*)»[32]. Пытаясь объяснить факт непризнания упомянутых концепций, Вилейтнер отмечает : «Причина лежит в том, что математика, начиная с Вейерштрасса (1860 г.) стала на путь все усиливавшейся «арифметизации». Иными словами, она отказывается от геометрической наглядности и во имя полной строгости заковывает себя в логически безупречную арифметическую форму»[33]. Несомненно, факт арифметизации анализа, а также стремление ученых оставаться в рамках строгости, заданной эталонными работами Вейерштрасса, трудно переоценить. Однако нельзя не отметить, что введение в математику актуально бесконечно малых сдерживал тот самый круг № 3 («инфинитезимальный круг»), который был настолько глубоко укоренен в самой математике, что даже изменение социокультурного и метафизического контекстов не означало его автоматического преодоления (как это было с «вероятностным кругом», имевшим внешние по отношению к математике характер и происхождение). Как уже отмечалось, его частичное преодоление в работах Кантора было обусловлено прежде всего прагматическими соображениями (настоятельной необходимостью введения общего понятия и классификации бесконечных множеств в связи с его исследованиями тригонометрических рядов). Заметим здесь же, что у Кантора были схоластические предшественники, рассуждавшие о равенстве или неравенстве бесконечных последовательностей, причем равенство фактически определялось через взаимно однозначное соответствие. При этом все они придерживались представления о числе как совокупности единиц. Именно это представление подпитывало формирование инфинитезимального круга в античности, и средневековые ученые, естественно, разделяли его. Но определяющим для них было убеждение в самопротиворечивости актуальной бесконечности. Поэтому опыт установления взаимно однозначных соответствий, выявление способности бесконечных множеств стоять во взаимно однозначном соответствии со своим подмножеством использовалось средневековыми мыслителями в качестве еще одного подтверждения этого фундаментального убеждения. В частности, Дунс Скот отмечал, что если рассматривать отрезок как актуально бесконечную совокупность его составляющих точек, то придется согласиться с равенством таких, например, отрезков, как сторона и диагональ квадрата, что, по его мнению, абсурдно. Подобные примеры приводит в своем трактате о континууме и Брадвардин, отмечая, что представление о континууме, составленном из неделимых (т. е. из точек) приводит к неразрешимым парадоксам. В отличие от своих схоластических предшественников, перед Кантором стояли конкретные математические проблемы, необходимость решения которых толкала его к выходу за пределы привычных представлений. Поэтому он использует известные схоластам конструкции не для демонстрации самопротиворечивости актуально бесконечного, а для констатации необходимых ему свойств актуально бесконечных множеств. Последующие метафизические и методологические обоснования законности операций с актуально бесконечными объектами выглядят у Кантора скорее лишь как ad hoc аргументы, что косвенно подтверждается упомянутым фактом резкого неприятия создателем наивной теории множеств актуально бесконечно малых величин. И лишь с появлением нестандартного анализа А. Робинсона (60-е годы XX века) начался процесс окончательного преодоления инфинитезимального круга, связанный с достижением полной уверенности в том, что средствами нестандартного анализа можно получить все теоремы, справедливые в рамках классического анализа, нисколько не нарушая при этом общепринятых норм строгости математических доказательств.

Как известно, А. Робинсон, используя достижения современной математической логики и в значительной мере созданной им самим теории моделей, построил свой нестандартный анализ на основе введения системы гипердействительных чисел, включающие в себя «стандартные» действительные числа и актуально бесконечно малые, которые определяются у него в духе Лейбница. А именно: положительное бесконечно малое есть число, которое меньше любого действительного числа, но больше нуля, а отрицательное бесконечно малое — это число, большее любого отрицательного действительного числа, но меньшее нуля. В то время как математики XVII—XIX вв. считали, что поскольку актуально бесконечно малые не удовлетворяют аксиоме Архимеда и, следовательно, не могут быть приняты как полноправные математические объекты, Робинсон сознательно поставил себя вне рамок инфинитезимального круга, обретя, пользуясь метафорой Гротендика, первоначальную невинность, наделившую его реформаторской властью. При этом Робинсон исходил из того, что хотя, в отличие от эпсилон-дельта формализма, интуитивные представления Лейбница, братьев Бернулли и Эйлера не получили в свое время строгого обоснования, полученные ими на основе этих представлений результаты выдержали испытание временем. И не случайно, что сам Робинсон рассматривал свою деятельность не только как продолжающую традиции инфинитезималистов XVII—XIX вв., но даже как оправдание и объяснение их представлений и методов. Важно и то, что непосредственно в процессе разработки нестандартного анализа Робинсон не преследовал каких либо прагматических целей, т.е. не имел в виду необходимость решения тех или иных конкретных математических проблем. Более того, создается впечатление, что работая над созданием теории моделей, Робинсон уже имел программу преодоления инфинитезимального круга, возникшую во многом в процессе тщательного изучения истории классического анализа (первые самостоятельные научные результаты были получены Робинсоном в области гидро- и аэродинамики)[34]. Несомненно, что преодоление данного круга облегчалось для Робинсона тем, что его укорененность в математике не подпитывалась социокультурным или метафизическим контекстами развития математики. Более того, формалистская философия математики, на позиции которой Робинсон перешел (будучи ранее платоником) в процессе разработки нестандартного анализа стимулирует подобные исследования. Тем не менее, наличие жесткой критики нестандартного анализа как «формального ухищрения» и «унижения смысла»[35] намекает на существование других кругов, невидимых, но властных, которые ограничивают горизонт современной математики, подобно тому, как это происходило практически на всех предшествующих этапах ее развития[36].

Примечания

[1] См.: *Гротендик А.* Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математика. М., 1995. Выпуск 0. С. 29.

[2] См.: Там же. С. 22.

[3] Цит. по: *Майстров Л. Е.* Развитие понятие вероятности. М., 1980. С. 56.

[4] См.: *Юшкевич А. П.* Биография Я. Бернулли // *Бернулли Я.* О законе

больших чисел. М., 1986. С. 157.

[5] *Лурье С. Я.* Демокрит. Л., 1970. С. 213—214.

[6] Материалисты Древней Греции / Под общ. ред. М. А. Дынника. М., 1955. С. 70.

[7] Там же. С. 69.

[8] *Лурье С. Я.* Демокрит. С. 216.

[9] *Аристотель.* Соч.: В 4 т. М., 1978. Т. 2. С. 312.

[10] *Вернан Ж.-П.* Происхождение древнегреческой мысли. М., 1988. С. 69.

[11] *Аристотель.* Соч.: В 4 т. Т. 2. С. 308—309.

[12] См.: *Майстров Л. Е.* Развитие понятия вероятности. С. 28—29.

[13] См: *Lauden L.* The clock methaphor and probabilism: The impact of Decartes in English methodological thought. 1650—1665 // Annals of science. N. Y. L., 1966. Vol. 22. P. 93—104.

[14] *Декарт Р.* Избранные произведения. М., 1950. С. 541.

[15] Подробнее о становлении вероятностной гносеологии Нового времени см. обзор Л. М. Косаревой (Вероятностная концепция естественнонаучного знания в гносеологии XVII века // Современные исследования по истории и методологии науки. М., 1987).

[16] *Лейбниц Г. В.* Соч.: В 4 т. М., 1983. Т. 2. С. 479.

[17] Я полагаю, что это представление разделяли работающие математики античности, которые вряд ли вдавались в более изощренные метафизические различения того же Аристотеля или Платона.

[18] *Юшкевич А. П.* Математика и ее история в ретроспективе // Закономерности развития современной математики: методологические аспекты. М., 1987. С. 61—62.

[19] Там же. С. 62.

[20] *Манин Ю. И.* Математика и физика. М., 1980. С. 59.

[21] *Евклид.* Начала. М.— Л., 1948. С. 142.

[22] Цит. по: *Пуркерт В., Ильгаудс Х. И.* Георг Кантор. Харьков, 1991. С. 31.

[23] *Галилей.* Избранные труды: В 2 т. М., 1964. Т. 2. С. 131.

[24] *Гайденко П. П.* Эволюция понятия науки (XVII—XVIII вв.) М., 1980. С. 73.

[25] Там же. С. 135.

[26] Цит. по: *Кавальери Б.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. М.—Л., 1940. С. 37.

[27] Цит. по: Там же. С. 46.

[28] Цит. по: Там же. С. 67.

[29] Цит. по: Там же. С. 67—68.

[30] Цит. по: Там же. С. 67.

[31] *Пуркерт В., Ильгаудс Х. И.* Георг Кантор. С. 68.

[32] Вилейтнер Г. Как рождалась современная математика. М.—Л., 1927. С. 109.

[33] Там же. С. 109—110.

[34] Е. А. Зайцев заметил, что потребность в строгом обосновании опера-

ций с актуально бесконечно малыми величинами достаточно естественна для ученого, имеющего богатый опыт исследований в области гидро- и аэродинамики.

[35] *Bishop Erret.* The crisis in contemporary mathematics // Historia mathematica. 1975. № 2. P. 513—514.

[36] В настоящей статье метафора «круга» использовалась для обоснования «ограничительного» характера социокультурного и метафизического контекстов развития математики. Разумеется, значение этого контекста не сводится к налагаемым им ограничениям. Однако для характеризации его конструктивной роли, возможно, лучше использовать куновское понятие «парадигмы». Впрочем, сам Т. Кун, насколько мне известно, не применял это понятие для описания развития математики.

КОММЕНТАРИИ

В. Я. Перминов

А. А Григорян, на мой взгляд, дал нам пример правильного подхода к анализу социокультурного влияния на развитие науки. Когда пытаются доказать, что аксиомы логики или арифметики зависят от типа культуры, то это, конечно, чепуха и дискредитация самой идеи социокультурного влияния, ибо ничего подобного быть не может. А. А. Григорян выявляет те стороны научного прогресса, которые действительно зависят от социокультурного контекста. Мы видим, что появление новых научных понятий и теорий связано с мировозренческим фоном и существенно ограничивается им. Такого рода факты важны для философии науки, и против такого рода социокультурного анализа науки нельзя возражать.

Но автор, к сожалению, прекращает анализ, там где он становится действительно интересным в философском плане. Изложение в своей основе сводится к анализу фактов. Но мы, очевидно, нуждаемся в их объяснении. Как возникают эти «метафизические» круги и как они разрушаются? В статье есть только отдельные намеки на объяснение, но серьезного теоретического подхода нет. Идут ли эти метафизические ограничения от самой науки (можно допустить, к примеру, что древние греки ограничили себя идеей конечной величины просто потому, что не дошли еще до определений и алгоритмов, связанных с бесконечными множествами), или они идут от философских представлений о мире, господствующих в данную эпоху, или они порождаются непосредственно некоторыми сторонами общественной практики. В этом важно разобраться, так как главная задача философии состоит не в констатации исторических фактов, а в их объяснении. Это было бы интересным и потому, что здесь, как мне кажется, намечается путь к исследованию реального механизма взаимодействия метафизики и науки в истории науки, о котором мы имеем до сих пор довольно смутное представление.

Л. Б. Султанова

Публикация А. А. Григоряна интересна не только тем, что она при помощи истории математики лишний раз подтверждает важность неявных философских предпосылок, так называемых «социокультурных и метафизических кругов» в развитии математики. Важное значение имеет то, что автор показывает негативно-ограничительную роль, которую играют предпосылки, а не только их позитивно-формирующий характер, что является более традиционным в публикациях такого рода.

В самом деле, неявные историко-философские предпосылки заранее задают определенный исторический период, а, значит, неявно в определенной исторической перспективе задают и границы, которые не могут быть преодолены математикой в той же самой исторической перспективе.

В частности, в публикации показано, что теория вероятности как область математики не могла сформироваться вплоть до XVII века вследствие наличия соответствующего негативного метафизического утверждения «о случайном не может быть знания через доказательство». Распространяя подобный подход на весь процесс познания как таковой, мы в конце концов подходим к пониманию ограниченности всего человеческого познания в целом, поскольку оно строится на фундаменте определенных неявных философских предпосылок априорного характера в том числе. А это значит, что знание, которое требует **совершенно иных** предпосылок, нежели те, что свойственны человеку изначально и априорно, в принципе человеку недоступно даже с точки зрения самой широкой исторической перспективы. Таким образом, из существующих социокультурных и метафизических кругов или запретов выводится не только невозможность познания абсолютной истины, но и антропной принцип, наиболее радикально ограничивающий человеческое познание.

Как отмечает А. А. Григорян, положительное значение для развития науки имеет преодоление подобных запретов. В этой связи автор, опираясь на работы французского математика Гротендика, апеллирует к некой «невинности», которая одна только и способна наделить математика реформаторским даром. Может быть, все-таки речь идет не о невинности, а о наивности, неком мудром неведении, незнании этих запретов, позволяющем их обойти и выдвинуть новые идеи?

Позитивный интерес вызывает и то, что А. А. Григорян указывает на значительно более сложный характер преодоления запретов внутриматематического характера по сравнению с запретами социокультурными и метафизическими. Более того, автор предполагает, что по отношению к современной математике даже выявление подобных запретов представляет большую проблему, о существовании которой говорит наличие жесткой критики нестандартного анализа.

Представляется, что все это позволяет провести известную аналогию между указанными в публикации запретами и неявным знанием, в частности, знанием априорным, хотя эти круги или запреты, указанные в публикации, сами к неявному знанию не относятся. В целом представляется бесспорным, что исследование философской и математической природы этих кругов или запретов полезно для классификации всех философских предпосылок, имеющих отношение к математике.

ОТВЕТ АВТОРА

Султановой Л. Б.

Метафора Гротендика о «невинности», вне сомнения, может быть интерпретирована по разному, в частности и так, как предлагается в комментарии. Я полагаю, однако, речь идет не о том, что ученый, преодолевающий социокультурные и метафизические запреты находится в счастливом неведении относительно их содержания. Напротив, как показывает история науки, это делается, как правило, с полным осознанием нарушения общепринятых правил игры. «Невинность» ученого-реформатора напоминает, скорее, поведение человека, который, ясно понимая, что все люди вокруг него руководствуются общепринятыми традициями, осмеливается, тем не менее, в силу каких-то, очень важных для него мотивов, действовать, как бы не замечая их.

Перминову В. Я.

В статье я пытаюсь предложить типологию кругов по их возникновению и способах преодоления. Ваши замечания показывают, что эта попытка проведена не вполне последовательно и выпукло. При этом хотелось бы заметить, что в большинстве случаев природа кругов представляется весьма «смешанной». Другими словами, на философские представления о мире, господствующие в ту или иную эпоху накладываются ограничения, обусловленные ценными для математиков собственно научными традициями. И чем более философские представления, до неузнаваемости трансформируясь, смешиваются с представлениями, воспринимаемыми математиками в качестве внутренних требований, скажем, строгости математических рассуждений, тем более затруднено преодоление соответствующих кругов.

В заключение, хочется выразить авторам комментариев искреннюю признательность за доброжелательные замечания, наводящие на плодотворные размышления.

ВЫЧИСЛИМОСТЬ КАК СТИЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Кузичева З. А., Кузичев А. С.

Математика как дедуктивная наука выступает уже ко времени Евклида. Теоретическое оформление вычислительной составляющей математики происходит в совершенно другую эпоху, фактически в наши дни — теория алгоритмов как самостоятельная математическая дисциплина формируется в XX столетии. В статье сделана попытка хотя бы в общих чертах обозначить (восстановить) процесс оформления вычислительной математики как самостоятельной математической теории.

I. Отличительной особенностью источников математического содержания, относящихся к Древней Месопотамии и Древнему Египту, является их алгоритмический, вычислительный характер. Они сформулированы в виде предписаний для решения конкретных задач. Никаких сведений теоретического или методологического характера не сохранилось. С математикой Древней Греции ситуация совсем иная — были составлены и дошли до наших дней глубокие теоретические трактаты (достаточно упомянуть «Начала» Евклида, «Конические сечения» Аполлония, труды Архимеда), а от «практической арифметики» или «логистики» почти ничего не осталось. Греческая наука восприняла значительный запас математических сведений от математики Древнего Востока. Но не произошло простого заимствования. Наука претерпела кардинальное качественное изменение: она стала доказывающей наукой. Если ранее в центре внимания составителей текстов была вычислительная, алгоритмическая компонента математики, то теперь она отошла в тень, а главенствующую роль стала играть дедуктивная ее составляющая. Более того, возникла теория, изучающая способы доказательств и принципиальные особенности доказывающей науки. Теперь мало обнаружить способ решения той или иной задачи, необходимо его обосновать. Акцент переносится на строгость методов, на доказательство утверждений. Для греков неприемлема традиция вавилонян, считающая достаточным написать или сказать: «Ты сделаешь так», и привести рецепт решения задачи. Учитель не может ограничиться сообщением предписания для решения задачи, он должен убедить учащегося в своей правоте. На первый план выступает рассуждение, исследование особенностей рассуждений при обосновании как отдельных математических предложений, так и их совокупностей. Математические факты организуются в стройную систему.

В наши дни вряд ли кто-нибудь возьмется всерьез утверждать, что алгоритм решения какой-либо задачи не подчиняется никакой логике. Ясно, что если разрушить внутреннюю логику любого алгоритма, он перестанет вести к цели, перестанет быть алгоритмом. Если произвольно написать какую-нибудь последовательность операций, то она с весьма малой вероятностью приведет к успеху в решении задач. Но логика в предписаниях вавилонских текстов скрыта, внимание сосредоточено на процессе вычисления, а не на объяснении того, почему следует поступать так, а не иначе. Способ рассуждения и обоснования остается, так сказать, за кадром. Очевидно, что составление рецептов невозможно без умения рассуждать, но оно оставалось неявным, проводилось в процессе составления алгоритма, но не сообщалось вместе с алгоритмом.

В греческой науке внимание переносится на обоснование теоретических положений. Это, конечно, не означало, что прекратилось накопление новых фактов, поиск новых методов. Просто на первый план выступила дедуктивная часть теории. При этом обращает на себя внимание не только строгость и стройность рассуждений, но и страстность в их отстаивании. Словно отклик бурных будней молодой греческой демократии нашел отражение в строгой и беспристрастной логике. Так обстояло дело в математике, так обстояло дело и в других областях знаний.

Такую смену акцентов, выдвигавшую на первый план то алгоритмическую, то дедуктивную составляющую математики можно проследить на протяжении ее истории, вплоть до наших дней. При этом, разумеется, они, эти тенденции, эти предпочтения вовсе не означают уничтожения, исчезновения той части, которая на время ушла в тень. Очевидно также, что смена предпочтений меняет стиль математических теорий, меняет шкалу ценностей. Мы обратим внимание главным образом на алгоритмическую составляющую математики, как определяющую и стиль, и содержание математический теорий. При этом неизбежно придется говорить о взаимосвязи ее с дедуктивной частью теорий.

II. Идея вычислимости, алгоритмичности пронизывает все творчество Г. Лейбница. Она лежит и в основе его грандиозного проекта реформирования всей системы знания, проекта, названного им **универсальной характеристикой.** Напомним, что осуществление этого проекта, впоследствии названного программой Лейбница, предполагало три этапа. На первом этапе необходимо было выделить все основные исходные понятия (категории), их перечень составил бы **алфавит человеческих мыслей**. На втором этапе следовало проанализировать все имеющиеся сведения, понятия, отношения, с тем, чтобы выяснить, как каждое из них составлено из некоторых исходных понятий (отношений). Завершением этого этапа явилось бы составление, обнаружение всех взаимосвязей понятий и отношений, т.е. доказательство существующих фактов. Их сводка явилась бы своеобразной **энциклопедией доказательств**. Третий этап предполагал формирование оперативной части универсальной характеристики, т.е. создание корпуса правил преобразования информации и доказательства истин. Это — своеобразная логическая система, создание которой предполагало исследование и развитие логики.

Реализация этого проекта, по Лейбницу, позволила бы просто решать научные разногласия. Философы не будут больше спорить, вместо этого они возьмут в руки перья и скажут: «Давайте посчитаем!». Все можно вычислить! — вот подлинный пафос замысла Лейбница. Но вычислить в подходящей символической системе. Знаковым системам он уделял большое внимание [1; 2].

Итак, заменить рассуждение вычислением. Вычисление предполагает наличие алгоритма, т.е. списка последовательных элементарных действий. Не случайно Лейбниц был одним из создателей арифмометра, наряду с Паскалем и Шиккардом. По-видимому, Лейбниц первым стал употреблять термин «алгоритм» в современном смысле, а не как синоним арифметики, основанной на десятичной позиционной системе счисления.

Творчество Лейбница развернулось на фоне математики периода великой технической революции с ее последствиями для всех разделов науки. Неизмеримо возросли объемы вычислительной работы. И, конечно же, возникла необходимость усовершенствовать приемы вычислений, уточнять алгоритмы решения задач. Достаточно напомнить здесь о создании логарифмов. Вычислительные идеи, можно сказать, носились в воздухе. Все эти обстоятельства вынуждали создать дифференциальное и интегральное исчисления. Своеобразные исчисления можно считать стилем математики того времени.

Но вернемся на момент к началу XX столетия. В основаниях математики обозначились три направления: формализм, интуиционизм, логицизм. Что собою представляет последнее из них? Логицистический тезис состоит в том, что математика — не более чем одна из составляющих логики; математические понятия следует определять в терминах логики. При этом первым, кто рассматривал логику как науку, лежащую в основе других наук, считается Лейбниц [3, с. 45]. Тот, кто призывал вычислять вместо того, чтобы рассуждать, признан первым логистом! Не парадоксально ли это? Видимо, нет. Для нас же здесь важно следующее: вычисление и рассуждение неотделимы друг от друга. Дедуктивная и алгоритмическая составляющая математики всегда присутствуют в любой ее теории и в любом периоде. Меняются лишь акценты, на первый план выступает то одна, то другая из них. Но смена акцентов неизбежно меняет стиль математики, весь ее облик.

Какие характерные черты алгоритмичности как стиля математики можно выделить в первую очередь? Конечно, наличие алгоритма, вычислимость —

это определяющая черта конструктивных теорий, требующих явных методов для построения объектов и не допускающих теорем «чистого существования». Каждая теорема в конструктивной теории обязательно дает метод построения объекта, существование которого она утверждает.

III. В XIX в. на первый план выступают проблемы строгости, обоснования анализа и примыкающих к нему разделов математики. Одним из следствий этой тенденции явилось создание теории множеств, которую можно по праву считать кульминацией дедуктивной составляющей математического мышления. В противоположность Лейбницу, своим девизом она могла бы принять призыв: «Будем рассуждать!», заменить вычисление рассуждением — таков основной подход к оперированию с бесконечными множествами. В теории множеств, как ни в какой другой ветви математики, существенную часть ее утверждений составляют теоремы чистого существования, доказываемые средствами классической логики. В этом теории множеств предъявлялось немало упреков. Особенно резкие протесты вызывал принцип (свободного) выбора, в аксиоматических вариантах теории обычно называемый аксиомой выбора. Все эти претензии теоретического плана в конечном итоге содействовали тому, что способы рассуждений подвергались критическому разбору, взамен неэффективных методов стремились найти и использовать иные, более подходящие приемы рассуждений. Эта тяга к конструктивным, эффективным математическим методам, наряду с другими факторами, привела к возникновению сразу нескольких новых разделов математики, предметом которых были как раз эффективные алгоритмические методы.

Но наряду с отмеченной теоретико-множественной, дедуктивной тенденцией, XIX век, как никакой другой период ранее, отмечен всплеском попыток, так сказать, овеществить идеи алгоритма и вычислимости. Мы имеем в виду многочисленные варианты построения логических машин [4, с. 28, 29], а также разработки Ч. Бэббеджа. Эти конструкции предполагали разбиение процесса вычисления на элементарные однотактные шаги, а это значит, что «алгоритм» как правило выполнения некоторой математической операции, также дробился на все более мелкие и элементарные шаги. В то же время набор неподдающихся решению задач продолжал накапливаться. Необходимость уточнения понятия «алгоритм», «вычислимая функция» стимулировалась всеми этими обстоятельствами.

В 1930 г. защитил докторскую диссертацию воспитанник Гёттингентского университета Х. Б. Карри, предметом которой является теория комбинаторов [5]. Позднее комбинаторные теории часто стали называться комбинаторной логикой.

Комбинаторные теории имеют своей целью исследование основных понятий математической логики, которые обычно принимаются как самоочевидные, не нуждающиеся в пояснении. К ним относятся понятия переменная, функция, множество, операция, правило вывода и др. Одним из наиболее сложных правил вывода в логике является, пожалуй, правило подстановки. Анализу этого правила Карри посвятил свою статью, опубликованную в 1929 г. [6].

В качестве основных понятий в комбинаторных теориях принимаются одноместная функция и операция применения функции к аргументу (аппликация). При этом понятие функции предполагается первичным по отношению к множеству. Происходит определенное «уравнивание в правах» функции и аргумента, а именно, функция может принимать объекты одного и того же уровня и в качестве аргументов, и в качестве значений. Значение функции f от аргумента x обычно обозначается через $f(x)$, в комбинаторных же теориях пишут (fx): к f справа **прилагается** x , т.е. fx получен в результате **аппликации** x и f. Обобщение состоит в том, что законными считаются объекты, полученные путем приложения x к f, f к x, x к x, f к f: (fx), (xf), (xx), (ff) и т.п.

Аппликация позволяет получать новые объекты из уже заданных или полученных ранее. Для простоты скобки в записи объектов часто опускаются, запись $f\, x_1\, x_2 \ldots x_n$ понимается как $(\ldots((f x_1)\, x_2)\ldots x_n)$.

Функция f, удовлетворяющая равенству

$$f x_1 \ldots x_n = F,$$

где $x_1, \ldots, x_n$, $(n \geq 1)$ — произвольные функции, F — объект, построенный из этих функций посредством аппликации, его называют **комбинатором** (отсюда — комбинаторная логика) [7].

Комбинаторные теории и созданные в тот же период λ-теории имели три аспекта: проблемы оснований математики, чистые комбинаторные и λ-исчисления, вычислительные проблемы [8, с. 14— 16]. Мы будем иметь в виду главным образом последний аспект теорий. Но сначала необходимо дать некоторую историческую справку.

Карри и Чёрч, хотя и подчеркивали независимость своих исследований, всегда отмечали, что у них был предшественник и приоритетными считали немногочисленные работы московского логика М. И. Шейнфинкеля[1]. На заседании Математического общества в Геттингене 7 декабря 1920 г. Шейнфинкель выступал с докладом «Об основных понятиях математической логики», который был опубликован на немецком языке в обработке Г. Бемана [10], переиздан в 1971 г. В 1967 г. опубликован перевод на английский язык с предисловием Куайна. На русском языке первый обзор работ Шейнфинкеля опубликован в 1948 г. в статье С. А. Яновской [9].

В логических исчислениях высказываний и предикатов используются определенные системы связок (операторов), выражающих взаимосвязи высказываний, например, знаки для «и», «или», «не», «если... то» и др. Известно, что связки могут быть выражены через некоторые другие, т.е. можно построить исчисление, в котором используются только связки для «не», «если... то»; связки «или» и «и» выражаются через импликацию и отрицание. Известны операторы, которые заменяют все логические связки (штрих Шеффера, стрелки Пирса). Но при использовании этих операторов в формулы входят знаки для пропозициональных переменных; для предикатных переменных нужны знаки, различающиеся по числу аргументов. Шейнфинкель имел в виду свести к минимуму число различных знаков, используемых для записи формул логических исчислений. Используя комбинации трех постоянных знаков C, S, U, обозначающих некоторые индивидуальные функции, Шейнфинкель выражал любое предложение логики. Он создал общее исчисление функций, основанное на четком различении функций как особого предмета от значения функции. Пусть, например, y — функция, примененная к аргументу x (x, в свою очередь, может быть функцией), пусть yx—значение функции y, примененной к аргументу x. В таком случае: индивидуальную функцию C можно описать следующим образом

$$C\,yx = y$$

Значениями функции C служат функции Cy, которые при данном y относят одно и то же постоянное значение y к любому предмету x.

Функция S определяется следующим образом:

$$Syxz=(yz)(xz).$$

Функции C и S позволяют «обойтись» без функции тождества:

$$Ix=x.$$

Действительно, $SCCx=(Cx)(Cx)=Cx(Cx)=x$, т. е.

$$I=SCC.$$

Идеи Шейнфинкеля, как уже упомянуто, были использованы Х. Карри при построении комбинаторных теорий. Близкие концепции содержатся в исчислениях λ-конверсии А. Чёрча (λ-исчислений мы коснемся несколько позже). Теперь же заметим, что у этих направлений в основаниях математики имеется и более ранний источник.

Комбинаторные теории имеют дело с объектами (по терминологии Карри, обами), которые определяются следующим образом. Задается некоторый алфавит $A=\{(,), x_1, \dots , x_n\}$, $n > 0$.

1. Каждая буква алфавита, отличная от скобок *(,)*, считается исходным (элементарным) обом.

2. Элементарный об считается обом.

3. Если U и T — обы, то (UT) считается обом.

Для краткости некоторые скобки опускаются. Но они легко могут быть восстановлены. Например, xf, $f(xf)$, $xf(fx)$ и $x(fx)(ff(xf))$ являются сокращениями соответственно для (xf), $(f(xf))$, $((xf),(fx))$ и $((x(fx))((ff)(xf)))$, x, f — обы [7; 11—13].

В 1904 г. на III Международном конгрессе математиков (Гейдельберг)

Д. Гильберт выступил с докладом «Об основаниях логики и арифметики». Доклад опубликован в 1905 г. в трудах конгресса.

Гильберт полагает, что для обоснования арифметики «необходимо в некоторой части одновременное развитие и законов логики, и законов арифметики» [14, с. 400].

Мыслимой вещью, или просто вещью (ein Ding) Гильберт называет произвольный предмет мышления. В качестве основной он принимает мыслимую вещь I и называет ее простой вещью. Соединение вещи I с самой вещью I он называет комбинацией вещей I. Так,

(II), (III), (IIII), ... — примеры комбинаций вещи I.

Символом = Гильберт обозначает другую простую вещь. Аналогично,

(=), (= =), (= = =) называются комбинациями простой вещи = самой с собой. Вводятся комбинации двух простых вещей:

(I),(= I),(= = =), ((II)(I)(=)),(= =), (I = I) и т.д.

К двум основным вещам Гильберт добавляет еще три вещи: σ — бесконечное множество, c — «следующее», c' — «предшествующее» (последнюю вещь он называет сопровождающей операцией). Комбинацию σx Гильберт называет элементом бесконечного множества s. Например, σI, σ(II), σc — элементы множества σ.

Таким образом, «множество» оказывается частным случаем мыслимой вещи, следовательно, теория «вещей» более общей, чем теория множеств, т.е. если бы Гильберту удалось доказать непротиворечивость теории вещей, была бы доказана и непротиворечивость арифметики, и непротиворечивость теории множеств.

Заметим, что в комбинаторных теориях просматривается не только аналогия объектов (обов) с «вещами» Гильберта, но и аналогия операций «комбинации» Гильберта и «аппликации» обов. Более того, аппликацию (xy) истолковывают иногда как принадлежность оба x обу y, т.е. x есть элемент y. Гильберт придавал особое значение тому, что в этом докладе множество выступает как некоторая мыслимая вещь. В седьмом издании «Оснований геометрии» (1930) доклад был опубликован в качестве Добавления VII. Гильберт приводит такую мотивацию этой публикации: «Хотя этот доклад и был перекрыт по своему содержанию моими более поздними исследованиями по основаниям математики, мне все же показалось полезным снова поместить его здесь, особенно потому, что я в этом докладе впервые изложил многие концепции и методы исследования, как например, требование непротиворечивости, самостоятельное рассмотрение множества как некоторой вещи, тенденцию к финитной установке, совместное исследование логики и арифметики» [14, с. 570].

Исчисления, аналогичные комбинаторным теориям, были построены

Чёрчем также с целью найти основания математики, отличные от теоретико-множественных. Функция — это некоторое соответствие, в силу которого элементу некоторого множества отвечает элемент (вообще говоря, другого) множества. Запись $y=f(x)$ означает, что задано определенное соответствие между x и y. Но воспринимается такая запись двояко: либо как функция f, т.е. соответствие, либо как значение функции $y=f(x)$ при фиксированном значении аргумента x. Для различения указанных случаев Чёрч ввел в 1932 г. так называемый оператор функциональной абстракции λ ; в этой нотации $\lambda\, x f(x)$ обозначает, что имеется в виду функция (соответствие), а не ее значение при фиксированном x; $\lambda\, x_1 f(x_1, x_2)$ — функция от одной переменной x_1 с параметром x_2; $\lambda\, x_1 x_2\, f(x_1 x_2)$ — функция от двух переменных $x_1 x_2$. [3, с.37,38].

Создатели комбинаторных теории и λ-исчислений в аспекте математики предполагали достичь двух целей: разработать общую теорию функций, во-первых, и, во-вторых, расширить теорию введением логических операторов. (см. например, [7; 8; 11—13]. В теориях комбинаторной и λ-теориях имеется и вычислительный аспект, который нас главным образом интересует.

Были сформулированы понятия комбинаторно-определимой и λ-определимой функции. Функция λ-определима, если она может быть представлена как объект некоторого λ-исчисления. Всякая λ-определимая функция эффектно вычислима. Таким образом, понятие λ-определимой функции является уточнением понятия алгоритма. Комбинаторная определимость формулируется аналогично [5; 15; 16].

Используя аппарат λ-исчислений, Чёрч доказал, что общая проблема разрешимости для исчисления предикатов неразрешима, т.е. не существует алгоритма, позволяющего по виду формулы исчисления предикатов распознать, доказуема эта формула в рассматриваемом исчислении или нет. Сама задача уточнения понятий «вычислимая функция», «алгоритм» возникла в связи с потребностью решать проблемы разрешения различных математических теорий.

В 30-е годы текущего столетия теория алгоритмов оформилась как самостоятельная ветвь математики. Наряду с наиболее ранними уточнениями понятия алгоритма (комбинаторная определимость и λ-определимость) было предложено много других определений. Чёрч (1936) высказал тезис, носящий теперь его имя: Всякая эффективно вычислимая функция является общерекурсивной, отождествив, таким образом, понятия вычислимости и общерекурсивности. Тьюринг и Пост определили понятия вычислимости и алгоритма в терминах абстрактных вычислительных машин Тьюринга и Поста соответственно [17; 18]. Тут же появились примеры отрицательного решения проблемы разрешимости. Первый пример такого рода принадлежит Чёрчу и был построен с использованием понятия λ-определимости [15]. Тьюринг привел примеры неразрешимых (алгоритмически) проблем в терминах своей вычислительной машины. В 1947 г. А. А. Марков и Пост, независимо друг о друга, решили стоявшую с 1914 г. проблему Туэ [19], носящую название проблемы эквивалентности слов, или проблемы тождества для полугрупп, показав, что не существует алгоритма для решения вопроса об эквивалентности двух данных слов, при произвольно заданных алфавите и словаре [18; 20; 21].

IV. Процесс накопления разнообразных способов решения различных задач вылился в конечном итоге в создание математики как доказывающей науки. В ходе ее развития обнаруживались все новые области исследования, требующие изобретения новых методов решения. Неявное использование понятия «алгоритм» сопровождало математику от самых ее истоков. Создано необозримо много разнообразных алгоритмов. Но именно их разнообразие затрудняло выявление характерных признаков, присущих общему понятию «алгоритм». Не удивительно поэтому, что задача уточнить понятие алгоритма, сделать его объектом математического исследования поставлена и решена так поздно.

Итак, без точного понятия «алгоритм» как математического объекта невозможно доказать, что не существует алгоритма для решения некоторой (массовой) проблемы. Это обстоятельство, безусловно, явилось одним из факторов, требующих изучения «алгоритма» и построения соответствующей теории. Но в начале столетия, на излете которого мы теперь находимся, возникли и другие факторы, стимулировавшие создание теории алгоритмов. Прежде всего, конечно, развитие вычислительной техники, требующее новых методов вычислений и программирования, которое вылилось в то, что теперь называют computer science, и где главенствует идея вычисления. Компьютерная математика наложила четкий и своеобразный отпечаток на облик всей математики текущего столетия, особенно второй его половины. В этой связи хотелось бы напомнить статью В. М. Тихомирова «Финитизация бесконечности в классическом анализе» [22, с. 177—184] и его доклады, касающиеся стиля и облика математики конца XX столетия (ср. [23]).

Но теория алгоритмов зародилась в недрах математической логики и восприняла многие ее методы и проблемы. Наблюдается сложное взаимодействие дедуктивной (логической) и вычислительной (алгоритмической) составляющих математики, развертывающееся в их диалектическом единстве.

Примечание

[1] Сведений о жизни М. И. Шейнфинкеля почти не сохранилось. В [9] С. А. Яновская сообщает, что он был учеником С. О. Шатуновского (1859—1929). Год рождения не приводится, указывается только, что умер Шейнфинкель в Москве, в 1942 г. Мы указываем год рождения на основании того, что обнаружили его в статье В. П. Тугаринова и Л. Е. Майстрова «Против идеализма в математической логике» // Вопросы философии. 1950.

13 Зак. 3711

№ 3. С. 331—339,: ссылка на с. 336. Часто спрашивают, почему фамилия Шейнфинкеля на немецком языке пишется через о-умлаут: «ö», а не через «ei». Ответа на этот вопрос мы не имеем.

Список литературы

1. *Leibniz G. W.* Dissertatio de arte combinatoria // Die philosophische Schriften. B., 1880. Bd. 4. S. 27—102.

2. *Кузичева З. А.* Логическая программа Лейбница и ее роль в истории логики и кибернетики // Вопросы кибернетики: Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982. С. 3—36.

3. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М., 1957.

4. *Кузичева З. А.* Математическая логика // Математика XIX века. Математическая логика . Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. М., 1978, с.11—38.

5. *Curry H. B.* An analysis of logical substitution // Amer. j. of math. 1929. Vol. 51. P. 363—384.

6. *Curry H. B.* Grundlagen der kombinatorischen Logik // Amer. j. of math. 1930. Vol. 52. P. 509—536, 789—834.

7. *Кузичев А. С.* О предмете и методах комбинаторной логики // История и методология естественных наук. М., 1973. Вып. 14. С. 131—141.

8. *Барендрегт Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М., 1985.

9. *Яновская С. А.* Основания математики и математическая логика // Математика в СССР за 30 лет (1917—1947). М., 1948. С. 11—50.

10. *Schönfinkel M.* Über die Bausteine der mathematischen Logik // Math. Ann. 1924. Bd. 92. S. 305—316.

11. *Кузичев А. С.* Принцип комбинаторной полноты в математической логике // История и методология естественных наук. М., 1974. Вып.16. С. 106—127.

12. *Кузичев А. С.* Об одной арифметически непротиворечивой λ-теории // Zeitschr. Fur Math. Log. Und Grundl. Der Math. 1983. Bd. 29. H. 5. S. 385—416.

13. *Kuzichev A. S.* Sequential Systems of λ-Conversion and of Combinatory Logic // *Seldin J. P.*, *Hindley J. R.* (eds) To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism. L., Acad. Press. 1980. P. 141—155.

14. *Гильберт Д.* Об основаниях логики и арифметики // *Гильберт Д.* Избранные труды. М., 1998. Т. 1. С. 399—408.

15. *Church A.* An unsolvable problem of elementary number theory // Amer. j. of math. 1936. Vol. 58. P. 345—363.

16. *Turing A.* Computability and λ–definability // J. Symb. Log. 1937. № 2. P. 153—163.

17. *Post E.* Recursive unsolvability of a problem of Thue // J. Symb. Log. 1947. № 12. P. 1—11.

18. *Turing A*. On computable numbers, with application to the Entscheidungsproblem // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1936—37. № 2. P. 230—265.

19. *Thue A*. Probleme Über Veränderungen von Zeichenreihe nach gegebenen Regeln // Skrif. Ut. Av Vidensk. i Kristiania, I, Math.- naturv. klasse. 1914. № 10.

20. *Марков А. А*. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем // ДАН СССР, новая серия. 1947. Т. 55. С. 587—590.

21. *Марков А. А*. Теория алгорифмов // Труды математического института АН СССР. Т. 42. 1954.

22. *Тихомиров В. М*. Финитизация бесконечности в классическом анализе // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997. С. 177—184.

23. *Кузичева З. А*., *Кузичев А. С*. Системы с бесконечной логикой и неограниченным принципом свертывания. К 150-летию со дня рождения Г. Кантора // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997. С. 107—119.

КОММЕНТАРИИ

А. Г. Барабашев

А. Н. Колмогоров, а также С. А. Яновская и ее ученики, выделили в развитии математики ряд этапов, связанных с тем, какой тип аксиоматического метода в математике используется. Сложились две немного различающиеся классификации:

— согласно первой, аксиоматический метод (и математика вместе с ним) прошел четыре этапа. Сначала, в эпоху античности, в математике главенствовал содержательный аксиоматический метод. Затем, в связи с открытием гиперболической геометрии, утвердился полуформальный аксиоматический метод. Далее, Д. Гильберт выдвинул идею формальной математики и дал определение формального аксиоматического метода, и, наконец, коллектив Н. Бурбаки выдвинул и постарался как можно более полно реализовать программу аксиоматического построения математики в условиях принципиальных ограничений формального аксиоматического метода;

— согласно второй классификации, в истории математики и развитии аксиоматического метода остается три этапа (этап полуформального аксиоматического метода устраняется, включаясь в качестве начальной фазы становления формального аксиоматического метода).

То, что эта классификация полностью отечественного происхождения, подтверждается фактом трудности адекватного перевода слова «*содержательный* [аксиоматический метод]» на английский язык: слово «contentual» неточно и искаженно передает существо дела, а более длинные выражения теряют емкость термина.

Как бы то ни было, развитие математики напрямую связывается с ее аксиоматическим представлением. Однако в стороне остаются другие черты математики и другие периодизации, использующие развитие этих «упущенных» черт.

Я считаю, что авторы статьи в неявном виде предлагают новую периодизацию развития математики, исходящую из представлений о ее вычислительно-алгоритмическом характере. Этапы развития математики, в таком случае, предстают в следующем виде:

— догреческий этап алгоритмическо-вычислительных предписаний решения конкретных задач;

— этап становления и начальной реализации программы универсальной характеристики (Лейбниц, Бэббедж);

— этап формального представления алгоритма и понятия вычислимой функции (20—30-е годы XX столетия), развития комбинаторной логики и теории алгоритмов;

— наконец, я бы выделил следующий, не затронутый в статье этап — этап реализации формально-алгоритмических процедур в связи с потребностями разработки математического обеспечения для компьютеров.

Таким образом, как мне представляется, периодизация развития математики как алгоритмически-вычислительного комплекса процедур дополняет периодизацию математики как аксиоматической науки.

А. Н. Кричевец

1. Противопоставление алгоритмического и формального стилей в математике очень интересно. Однако правомерно ли причислять к единому стилю совершенно разноуровневые вещи? Египетские рецепты вычислений (которые временами содержали ошибки) и доказательства несуществования алгоритмов решения массовых проблем едва ли можно считать разновременными воплощениями одного стиля. В Месопотамии и Египте алгоритм существовал в виде конкретного предписания, обобщение которого «оставляли читателю». Такое отношение к алгоритму еще более явно в случае современного алгоритма перемножения десятичных чисел. Предметом в данном случае являются числа, а в обучении передается не вполне артикулированная деятельность с ними. Современные формализации понятия «алгоритм» можно было бы считать развитием этого древнего подхода, если бы, например, правило умножения чисел было бы записано на алгоритмическом языке и в таком виде давалось ученику. Однако такой способ задания, несомненно, слишком труден для усвоения.

В математической логике алгоритм, напротив, сам является предметом, а передаются от учителя к ученику деятельности с алгоритмами, которые сами алгоритмами могут и не быть. Если родство данных случаев имеет место, хотелось бы, чтобы основания были предъявлены более явно.

2. В середине статьи приводятся очень интересные примеры подходов (Шейнфинкель, Карри), которые, как кажется, отличаются от прямых алгоритмических подходов (Тьюринг, Пост). Было бы очень интересно, если бы авторы разъяснили неспециалистам суть различий.

Л. О. Шашкин

В статье прослежена закономерность смены стилей в математике. Авторы предложили выделить «алгоритмическую» составляющую, связанную с вычислениями, методами решения задач, и «дедуктивную», включающую доказательства, обоснования, рассуждения. При таком подходе можно обнаружить в истории математики чередование периодов, когда предпочтение отдавалось то развитию методов вычислений, то проблемам их обоснования.

Такое рассмотрение естественно завершить ответом на вопрос о состоянии современной математики. На каком этапе циклической смены стилей она находится и каковы, следовательно, перспективы. В статье современный этап характеризуется как «сложное взаимодействие дедуктивной (логической) и вычислительной (алгоритмической) составляющих математики». Однако это можно отнести и к любому другому периоду развития науки.

Если ни одну из компонент нельзя назвать главной, можно ли сделать вывод, что именно в настоящее время происходит смена стилей? Можно ли утверждать, что на смену дедуктивной «классической» математике приходит алгоритмическая, связанная с развитием вычислительной техники и проникновением соответствующих методов в различные области математики.

С другой стороны, требование обоснования результатов остается характерной чертой математики, что позволяет говорить о «дедуктивном» акценте даже в самой теории алгоритмов. Проблемы разрешимости, непротиворечивости следует отнести к «доказательной» части науки.

Наконец, создание теорий, стремящихся перестроить основания математики с использованием понятий функции и алгоритма, возможно, говорит о том, что на фоне дедуктивной теоретико-множественной математики разворачивается следующий дедуктивный этап — функциональный, который не завершает этап развития методов вычислений, а движется параллельно (нарушая обнаруженную закономерность).

ОТВЕТ АВТОРОВ

Во время работы над текстом мы, признаться, не имели в виду периодизацию математики, не намеревались предлагать новые точки отсчета. Мы рассматривали смещение акцентов в ходе развития математики, выдвижение на первый план то вычислительной, то дедуктивной компоненты, как специфических черт стиля математических теорий. Но, поскольку все изменения протекают во времени, их можно трактовать как отличительные особенности того или иного периода. В этом смысле точка зрения А. Г. Барабашева представляется весьма интересной. Интересна она и в других отношениях. Например, становится яснее, насколько трудно указать ориентиры в «свободно текущем времени», которые четко отграничивали бы один период от другого. Впрочем, так же трудно выделить главную компоненту «изнутри« любого периода, например, современной нам математики. Но все же, по мнению авторов статьи, в последние десятилетия алгоритмическая компонента становится доминирующей, сменяя стиль, кульминацией которого можно считать стиль математических трактатов Н. Бурбаки. В подтверждение этого тезиса в статье сделана ссылка на позицию В. М. Тихомирова. По мнению тех, кто преподает математику студентам нематематических специальностей, именно в обучении умению *доказывать*, т.е. упорядочивать определенным образом свои мысли, и есть основная функция преподавания математики студентам гуманитарных специальностей, в полезности которой не могли отказать ей и самые яростные ее противники. Жаль, что именно эта функция все больше вымывается из школьных и университетских программ, заменяясь все больше алгоритмичностью.

Подходы Шейнфинкеля, Карри, Черча, действительно, отличаются от прямых алгоритмических подходов Тьюринга, Поста. Тем не менее, это отличие можно считать техническим, но, чтобы детально описать нюансы каждого из подходов, нужно написать специальное сочинение или сделать доклад.

В заключение хотелось бы отметить, что в процессе развития математики, как понятие алгоритма (вычислимости), так и понятие дедуктивности меняли свое содержание.

«ФРАНЦУЗСКИЙ» И «ГЕТТИНГЕНСКИЙ» СТИЛИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ В ПИФАГОРЕЙСКОЙ ТРАДИЦИИ

Визгин Вл. П.

Введение

Творцы релятивистской и квантовой физики — А. Эйнштейн, А. Зоммерфельд, В. Гейзенберг и другие — не раз подчеркивали глубокое родство современного способа теоретизирования с пифагорейско-платоновской концепцией познания природы, согласно которой подлинными структурами реальности являются математические структуры.

А. Эйнштейн писал в 1933 г.: «...Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы... я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность» [1, с.184]. В том же году об этом же несколько иначе говорил Зоммерфельд: «Платоновское выражение, что Бог является геометром, сегодня кажется истинным более, чем когда-либо. Мы все яснее видим, что наиболее общая математическая формулировка одновременно является и физически наиболее плодотворной... Математические формулы эффективно контролируют физические явления и могут даже привести к их открытию... Происхождение математической физики можно ретроспективно датировать тем временем, когда Пифагор попытался дать теорию колебаний струны на основе целых чисел...» [2, с. 111—112].

В 1950-е годы Гейзенберг эту мысль выражал следующим образом: «...Современная физика идет вперед по тому же пути, по которому шли Платон и пифагорейцы. Это развитие физики выглядит так, словно в конце его будет установлена очень простая формулировка закона природы... Подобный факт согласуется с религией пифагорейцев, и многие физики в этом отношении разделяют их веру...» [3, с. 37].

Конечно, далеко не всем физикам близка эта концепция. Не менее важными элементами современного теоретизма были и остаются тщательный анализ экспериментально-эмпирического материала, мысленные эксперименты, операционально-измерительное обоснование понятий, вопросы физической интерпретации теории и т.п. (выдающимися теоретиками этого рода были, например, С. Карно, М. Фарадей — в XIX в, ранний Эйнштейн, Н. Бор и др. — в XX в.).

Несомненно, мы можем говорить о пифагорейско-платоновской традиции в физическом познании, уже в третий раз после Платона (первый раз в точном естествознании Нового времени в трудах И. Кеплера, Г. Галилея, И. Ньютона, Г. В. Лейбница и др., второй раз при математизации физики в XIX в. — в работах П. С. Лапласа, Ж. Б. Фурье, А. М. Ампера, Дж. К. Максвелла и др.), проявившейся с особой силой в квантово-релятивистких теориях. Термин «традиция» предпочитал использовать Гейзенберг [4]. Для обозначения различных форм этой традиции уместно использовать и выражение «стиль» как «пошиб, род, образ... манеру» (по В. И. Далю) теоретизирования.

В близком смысле это выражение использовали классики современной теоретической физики М. Борн, В. Паули и др., трактуя понятие стиля в духе комплекса характерных особенностей классических или неклассических фундаментальных теорий. В этом случае понятие стиля сближается с понятиями куновской парадигмы или глобальной исследовательской программы (по И. Лакатосу).

«...Я думаю, — писал в 1953 г. М. Борн, — что существуют какие-то общие тенденции мысли, изменяющиеся очень медленно и образующие определенные философские периоды с характерными для них идеями во всех областях человеческой деятельности, в том числе и в науке. Паули в недавнем письме ко мне употребил выражение "стили": стили мышления — стили не только в искусстве, но и в науке. Принимая этот термин, я утверждаю, что стили бывают и у физической теории, и именно это обстоятельство придает своего рода устойчивость ее принципам» [5, с. 227—228].

В дальнейшем мы воздержимся от абстрактных рассуждений, касающихся понятий научных «традиции» и «стиля», и сосредоточимся на описании и анализе двух форм математического стиля мышления в теоретической физике: «французской» (связанной с именем Лапласа, Фурье, Ампера и др. и, соответственно, с созданием классической математической физики в конце XVIII — 20-х гг. XIX в.) и «геттингенской» (связанной с именами Ф. Клейна, Д. Гильберта, Г. Минковского, Г. Вейля и др. и, соответственно, с созданием теории относительности и квантовой механики в 1-й трети XX в.). Некоторые общие итоги этого обсуждения будут подведены в «Заключительных замечаниях».

Математико-аналитический стиль и «французская революция» в физике («французский» стиль)

Первая фаза создания стройного здания классической физики, выходящей за рамки ньютоновской механики сосредоточена в узком временном интервале (1810—1820-е гг.) и в наибольшей степени связана с трудами французских исследователей. Это позволило нам говорить о «французской революции» в физике, включающей в себе построение основ электродинамики (Ампер и др.), волновой оптики (О. Френель и др.), теории теплопроводности (Ж. Б. Фурье), термодинамики (С. Карно) [6; 7].

Фундаментальной чертой этой революции была огромная структурообразующая роль математического анализа в разработке упомянутых теорий. Дальним предшественником этого феномена было создание классической механики, получившей мощное развитие в трудах Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа и др. А ближним — построение Лапласом и С. Д. Пуассоном математической электростатики и магнитостатики.

Институционально этот процесс математико-аналитического рождения классической физики был укоренен в Парижской политехнической школе, где преподавали Лагранж, Лаплас, Фурье, Ампер и др. и выпускником которой были Пуассон, Френель, О. Коши, С. Карно и др. Математическому анализу с его обширными приложениями к геометрии и механике уделялось там особое внимание. Анализ преподавали выдающиеся математики, успешно работавшие и в области его приложений. В результате анализ приобретал значение универсального точного подхода к построению механических, астрономических, физических и даже химических теорий.

Поначалу лидером «математико-аналитического» стиля был Лаплас, но этот стиль был обременен концепцией «молекулярной механики», физическими представлениями о невесомых жидкостях и корпускулярном строении света. И хотя в целом Лаплас не достиг решающего прогресса в создании основ классической физики, в некоторых случаях (электростатика и магнитостатика, теория капиллярности) ему и его ученикам удалось продемонстрировать эффективность математического анализа в физике. «Поскольку эти явления (т. е. явления капиллярности. — *В. В.*), — писал в 1796 г. Лаплас, — были приведены к одной математической теории, для точного сравнения ее с природой было необходимо иметь серию очень точных опытов. Необходимость в таких опытах дает себя чувствовать по мере того, как *физика, совершенствуясь, входит в область анализа* (выделено нами. — *В. В.*)» [8, с. 250].

И Фурье, и Френель, и Ампер, и некоторые другие «революционеры» 10—20-х гг. были «антилапласианцами» в отношении физических представлений. Но уверенность в мощи анализа они сохранили, и после публикации в начале и середине 1820-х гг. их основополагающих трудов по волновой оптике, теории теплопроводности и т.д. впервые обрел реальные черты проект теории физических явлений, основанный на математическом анализе. Правда, на первых порах речь могла идти о комплексе теорий, устроенных похожим образом, а не о некоторой единой теории, каковой в 60-е гг. стала теория Максвелла, объединившая электричество, магнетизм и свет (за исключением, впрочем, тепловых процессов).

Фурье показал, что практически все задачи о распространении тепла в различных средах сводятся к интегрированию дифференциального уравнения с частными производными:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

где T — температура, a — некоторая комбинация из коэфициента теплопроводности, удельной теплоемкости и плотности среды. При этом подход к построению физической теории, согласно Фурье, заключался в том, чтобы сначала «выявить и точно определить элементарные свойства, которые определяют тепловые (или какие-либо иные. —*В. В.*) явления» [9, с. 152], затем с помощью дифференциального исчисления, переформулировать эти элементарные соотношения в виде дифференциальных уравнений или их аналогов. В результате, как писал Фурье, «все физические вопросы этого рода (т. е. относящиеся к распространению тепла. — *В. В.*) подчинялись математическому анализу» [9, с. 152].

Пифагорейско-платоновский идеал на этот раз реализовался в форме сведения всей физики к структурам анализа, прежде всего к дифференицальным уравнениям с частными производными. «Дифференциальные уравнения распространения тепла, — писал далее Фурье, — выражают самые общие условия и сводят физические процессы к проблеме чистого анализа...» [9, с.155]. Ему показалось, что отныне найден адекватный язык теоретической физики, или универсальная математическая структура, на которую отображается физическая реальность,— это математический анализ (и дифференциальные уравнения): «Не может быть языка более всеобъемлющего, чем аналитические уравнения, и более простого, лишенного ошибок и неясностей, т.е. более достойного для выражения неизменных соотношений реального мира» [9, с. 156]. И далее: «...Математический анализ так же всеобъемлющ, как сама природа; анализ выражает связь всех явлений, дает меру времени, пространству, силе, температуре и т.д.» (там же).

Аналогичным образом рассуждали и действовали Френель и Ампер. Для Френеля аналогом дифференциального (волнового) уравнения было соединение принципа Гюйгенса с принципом интерференции, что позволяло ему свести задачи вычисления амплитуды результирующей волны (при суммировании «элементарных волн») к так называемым «интегралям Френеля»:

$$\int_0^\infty \cos\,(az^2)\,\mathrm{d}z, \quad \int_0^\infty \sin\,(az^2)\,\mathrm{d}z.$$

Вычисление подобных интегралов требовало тогда большого аналитического искуства (в частности Френель использовал и геометрические построения), но вычислительные сложности не могли, по его мнению, рассматриваться как довод против волновой теории: «Для природы не существует трудностей анализа...» [10, с.141]. Д. Араго, имея ввиду волновую оптику Френеля, так формулировал основное преимущество математико-аналитического стиля: «Математический закон важнее самого явления, потому что становится источником всех будущих открытий» [11, с.77]. Ампер, исследуя взаимодействие проводников с током, шел тем же путем. Сначала он установил элементарный закон взаимодействия для малых элементов тока; затем представил его в дифференциальной форме. После этого любая конкретная задача о взаимодействии токов была сведена к интегрированию. Тот же Араго писал о теории Ампера, выявляя суть математико-аналитического стиля: «Когда известна общая формула взаимных действий бесконечно-малых элементов, тогда определение действий целого тока всякой формы есть дело высшего анализа» [11, с. 278].

Эффективность этого стиля коренилась в его соответствии природе макроскопических процессов, локальных и континуальных по своему существу. Позже А. Пуанкаре, истолковывая это, писал о том, что «знание элементарного факта позволяет сформулировать задачу в виде уравнения (именно, дифференциального уравнения. — *В. В.*)» [12, с. 101]. Поскольку же эксперименту, измерению подлежат величины конечные, именно интегрирование дифференциальных уравнений позволяет сопоставить теорию с опытом. Тем самым, выявляется математико-аналитическая природа классической физики, которая «состоит... в том, что наблюдаемое явление есть результат суперпозиции большого числа элементарных явлений, подобных друг другу»... «Значит, — продолжал Пуанкаре, — здесь вполне естественно появиться дифференциальным уравнениям...Таким образом, возможность рождения математической физики (как теории дифференциальных уравнений с частными производными. — *В. В.*) обусловлена приблизительной однородностью изучаемого предмета» [12, с. 101—102].

«Французский», математико-аналитический, стиль теоретизирования очень быстро был воспринят и успешно развит и за пределами Франции в Британии, Германии и др. странах (Дж. Стокс, В. Томсон, Дж. К. Максвелл, Дж. Рэлей, Ф. Нейман, Г. Кирхгоф, Г. Гельмгольц, Г. Герц, Л. Больцман, Н. А-. Умов, Х. А. Лоренц и др.). К концу XIX в. классическая физика воспринималась как совокупность дифференциальных уравнений с частными производными. Как отмечал А. Эйнштейн, «система дифференциальных уравнений с частными производными входила в теоретическую физику как служанка, однако постепенно она стала в ней госпожой» [13, с. 137]. Он имел в виду то, что пока подлинным фундаментом физики считалась классическая механика, «госпожой» оставалась система обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка — математическая структура ньютоновской механики. Но, несмотря на популярность классико-механической парадигмы, ее размыв, начавшийся во время «французской революции» в физике (уже Фурье писал, что «как бы всеобъемлющи не были механические теории, они никак неприменимы к тепловым явлениям» [9, с. 151]) приводил в конечном счете к автономии уравнений с частными производными и, тем самым, к осознанию их несводимости к механике.

Математико-аналитический стиль теоретизирования в физике, сформировавшийся в 1810—1820-е гг. во Франции и опиравшийся на богатый опыт применения анализа в механике, выходит за рамки механики и быстро интернационализируется, теряя черты своего французского происхождения. Можно, конечно, говорить и о математико-аналитической традиции, возникшей вместе с дифференциальным и интегральным исчислением и классической механикой во времена Ньютона и Лейбница, получившей мощное развитие в трудах Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Лапласа и обретшей новые жизнь и смысл в трудах Фурье, Ампера, Френеля и др. Но, по-видимому, более правильно было бы считать эту традицию возрождением или новым проявлением долговременной пифагорейско-платоновской традиции.

Вместе с тем, математико-аналитический стиль приносил замечательные плоды в сочетании с прецизионными экспериментами и тщательным осмыслением физических аспектов конструируемой теории (как это было, например, при построении френелевской оптики и амперовской электродинамики). К концу XIX в. на анализ и, особенно, на дифференциальные уравнения стали смотреть как на естественный и, фактически, единственно возможный математический язык теоретической физики. И если в 20-е годы XIX в., например у Фурье и Араго, мы чувствуем почтительное изумление перед чудом предустановленной гармонии между математико-аналитическими структурами и физическими теориями, то к концу XX в. математика рассматривается, в основном, как инструмент, как некая вторичная форма, идущая вслед за физикой (см., например, замечание Максвелла о соотношении физики и математики [14, с. 37]).

Геттингенский стиль и квантово-релятивистская революция

Среди историков и методологов науки нет особых расхождений по поводу этой революции. Создание релятивистских и квантовых теорий разрешило накопившиеся экспериментальные и логико-теоретические трудности классической физики при ее вторжении в микромир и космические сферы. Решающую роль при этом играли прежде всего сами физики и их настойчивые попытки физического осмысления упомянутых трудностей. Излишне подчеркивать значение в этом прорыве экспериментальных разработок и таких экспериментаторов, как Г. Герц, Дж. Дж. Томсон, П. Зееман, В. Кауфман, Э. Резерфорд и многие другие. Ключевую конструктивную роль в разработке неклассических теорий сыграли физики-теоретики Х. А. Лоренц, В. Вин, М. Планк, А. Эйнштейн, А. Зоммерфельд, Н. Бор и позже — плеяда «квантовых теоретиков»: В. Гейзенберг, В. Паули, М. Борн, Э. Шредингер, П. Иордан, П. Дирак и др.

Заметим, что российский и советский вклад в квантово-релятивисткую революцию был не слишком велик, но вовсе не нулевым. Наряду с периодической системой Д. И. Менделеева и замечательными экспериментальными работами П. Н. Лебедева и А. А. Эйхенвальда, назовем основополагающие труды А. А. Фридмана по релятивитской космологии, а также важные теоретические работы В. А. Фока, Я. И. Френкеля, И. Е. Тамма, Л. И. Мандельштама, Л. Д. Ландау и др.

Но постепенно, сначала в частной теории относительности (ЧТО), затем в общей теории относительности (ОТО), после этого — в квантовой механике и квантовой электродинамике, стала выявляться особая, вдруг резко возросшая, роль математики. В ЧТО начало было положено великим наследником французского стиля А. Пуанкаре и триумфально развито геттингенцем Г. Минковским. При построении и дальнейшем развитии ОТО сразу вслед за Эйнштейном выдвинулась группа «математиков-релятивистов», прежде всего — геттингенцев Д. Гильберта, Ф. Клейна, Э. Нетер, Г. Вейля и др., француза Э. Картана, итальянца Т. Леви-Чивиты и др. В квантовой механике это были те же геттингенцы-математики Д. Гильберт, Г. Вейль, И. фон Нейман и др. и тесно связанные с ними геттингенцы-физики М. Борн, Л. Нордгейм, Е. Вигнер, В. Паули, В. Гейзенберг, П. Иордан и др. (кстати говоря, Нордгейм и Вигнер были ассистентами Гильберта по физике).

Эта новая, особая роль математики в физике высоко оценивалась Л. И. Мандельштамом и несколько позже — Ф. Дайсоном. Они подчеркивали мощную эвристическую и конструктивную функцию математики, зачастую опережающей физическое осмысление.

Л. И. Мандельштам писал: «Современная теоретическая физика, не скажу сознательно, но исторически так оно и было, пошла по иному пути, чем классика. Теперь прежде всего стараются угадать математический аппарат, оперирующий с величинами, о которых или о части которых заранее вообще не ясно, что они означают» [15, с. 329].

Ф. Дайсон же подчеркивал: «Математика для физики — это не только инструмент, с помощью которого можно количественно описать любое явление, но и главный источник представлений и принципов, на основе которых зарождаются новые теории» [16, с. 112].

Это позволило говорить об очередном мощном проявлении пифагорейско-платоновской традиции в физике (см. также высказывания Эйнштейна, Зоммерфельда и Гейзенберга, цитированные выше). Несколько раньше, предвосхищая это возрождение, французский философ А. Рей говорил о «завоевании физики духом математики» [17].

Программа этого «завоевания» была в 1900 г. (на II Международном конгрессе математиков в Париже) объявлена одним из лидеров математического Геттингена Д. Гильбертом. В преддверии теории относительности и квантовой теории ставилась задача аксиоматизации физических теорий по образцу математических дисциплин, прежде всего успешно аксиоматизированной самим Гильбертом геометрии [18, с. 34—36]. Заметим, что уже тогда он предвидел первостепенное значение в решении этой задачи теории непрерывных групп.

И действительно, через пару лет после создания ЧТО друг Гильберта, геттингенец Г. Минковский в известной мере реализовал этот замысел, разработав теоретико-инвариантную формулировку теории, согласно которой она (теория) получила чисто геометрический статус (четырехмерная псевдоевклидова геометрия) и в свете знаменитой «Эрлангенской программы» патриарха Геттингена Ф. Клейна могла рассматриваться как теория инвариантов группы Лоренца (или, точнее группы Пуанкаре).

Кстати говоря, введение физических теорий в рамки «Эрлангенской программы» явным образом осуществил как раз Ф. Клейн в докладе 1910 г., посвященном памяти безвременно умершего Минковского [19]. Казалось, что фундаментальные теории физики переходят в сферу клейновской геометрической системы и что пифагорейско-платоновская концепция «предустановленной гармонии» между физикой и математикой реализуется буквально и вполне конкретно (см. также [20]). И Минковский, и Клейн, и Гильберт прямо использовали это выражение Лейбница, подчеркивая, что математика при этом должна рассматриваться не только как вспомогательный инструмент, аппарат но, прежде всего, как мощный источник структур для описания физической реальности.

Вот тут-то и начинают проявляться черты общего подхода к фундаментальным теориям нарождающейся неклассической (квантово-релятивисткой) физики, который естественно назвать геттингенским стилем теоретизирования.

Сразу можно назвать некоторые из главных особенностей этого стиля. Прежде всего он характерен для математиков, занимавшихся проблемами абстрактной, чистой математики, но проявивших со времени зарождения неклассических теорий физики пристальный интерес к ним. Ключевой концептуальной основой описываемого подхода оказывается квази-лейбницевская идея преустановленной гармонии между физикой и математикой, которая схватывается крылатой формулой Лейбница: «Cum Deus calculat, fit mundus» («Как Бог вычисляет, так мир и делает»). Стремление использовать абстрактные математические структуры, ранее не связывавшиеся с физикой, для описания физической реальности является непосредственным следствием этой идеи (например, использование теории непрерывных групп). Еще двумя важными составляющими нового стиля становятся аксиоматический подход и связанная с ним установка на объединение физических теорий в единую теоретическую схему.

Вполне естественно геттингенский стиль теоретизирования в физике, так ярко проявившийся в период квантово-релятивисткой революции (не только в ЧТО, но и в ОТО и в квантовой механике — к этому мы еще вернемся), подключить к геттингенской же традиции К. Ф. Гаусса и Б. Римана. Оба прославили Геттингенский университет, оба проявили большой интерес к физике и внесли в математическую физику значительный вклад (кстати говоря, оба активно сотрудничали с выдающимся геттингенским физиком В. Вебером), оба стояли у истоков неэвклидовой и многомерной геометрии и теории кривизны, которые они связывали с физикой, в частности, с вопросом о природе реального физического пространства. Конечно, в первой половине XIX в. и даже в 1850—1860-е гг. геттингенский стиль не обрисовывался достаточно отчетливо (Гаусс немало занимался прикладной математикой, участвовал в экспериментальных работах; он был слишком универсален), да и носителей «предгеттингенского» стиля было очень немного. Достаточно условно к ним можно отнести Г. Л. Дирихле и Р. Клебша, пришедших в геттингенский университет вскоре после смерти, соответственно, Гаусса и Римана. Некоторое возрождение геттингенской традиции математической физики начинается с приходом в Геттинген Ф. Клейна (1886) и Д. Гильберта (1893). А формирование геттингенского стиля и блестящей плеяды его носителей происходит в первые полтора-два десятилетия XX в.

Геттингенский стиль и создание общей теории относительности (ОТО)

Продолжим изучение геттингенского стиля на материале истории создания ОТО. Конечно, основную роль в этом деле сыграл сам Эйнштейн, который глубоко исследовал трудности и недостатки ньютоновской и лоренц-ковариантных (основанных на ЧТО) теорий тяготения, сформулировал фундаментальную физическую идею теории — принцип эквивалентности (1907), создал (впрочем, с помощью математика М. Гроссмана) тензорно-геометрическую концепцию гравитации (1913) и, наконец, после напряженных более, чем двухлетних поисков нашел правильные общековариантные уравнения гравитационного поля [21].

Но на последней стадии он работал параллельно с Д. Гильбертом, который с 1913 г. всерьез заинтересовался реализацией своей программы аксиоматического синтеза физики на основе нелинейной электродинамики Г. Ми и теории Эйнштейна-Гроссмана 1913 г. Решающего прогресса в завершении ОТО — получении конкретных уравнений гравитационного поля — добиваются оба почти одновременно (в ноябре 1915 г.), но существенно разными путями. В этом различии путей легко усматривается их приверженность к различным научным традициям и, соответственно, к различным (если не полярным!) научным стилям.

Заметим также, что решающего продвижения вперед в разработке ОТО Эйнштейн достиг только после того, как он взял на вооружение геттингенскую формулировку ЧТО, созданную Минковским. До 1911 г. он недооценивал эту формулировку, считая ее формально-математической и не несущей нового физического содержания. Но только переход к концепции четырехмерного пространства-времени позволил ему выйти на риманову геометрию, ставшую ключом к построению ОТО. Помог ему в этом его друг по Цюрихскому политехникуму математик М. Гроссман, который хорошо усвоил геометрические уроки Минковского, в 1902 г. перебравшегося в Геттинген, а также К. Ф. Гейзера, преподававшего там гауссову теорию поверхностей. Таким образом, уже на этом (догильбертовском) этапе приверженец теоретико-физической традиции вступал во взаймодействие с геттингенской (дальней и ближней) традицией.

Опишем вкратце условно выделенную теоретико-физическую традицию и соответствующий стиль теоретизирования, характерный для раннего Эйнштейна (до начала 1920-х гг.). Эта традиция не локализована в той или иной научной школе и, пожалуй, в наибольшей степени связана с ведущими теоретиками немецкоязычного ареала конца XIX — начала XX вв.

Наиболее отчетливо характерные черты соответствующего научного стиля выражены в творчестве Больцмана, Лоренца, Планка, Эренфеста, Лауэ и самого Эйнштейна (в 1900—1910-е гг.). Это — тщательный концептуальный анализ экспериментально-эмпирических и логико-теоретических трудностей предшествующих теорий, тесная связь с экспериментом, широкое применение метода мысленного эксперимента и операционально-измерительного подхода, виртуозное использование общефизических или методологических принципов, явная подчиненность математических, аксиоматико-дедуктивных аспектов собственно физическим, стремление избегать гипотез о структуре материи и понятий, лишенных достаточного физического обоснования. Этот стиль был присущ и творцам квантовой механики: Бору, Гейзенбергу, Шредингеру, Паули, Дираку, Борну, Иордану и др., хотя некоторые из названных теоретиков испытывали также заметное воздействие геттингенской манеры теоретизирования.

Как мы уже отмечали, при построении основ ОТО (сначала в форме теории Эйнштейна-Гроссмана) резко возросло значение математической стороны дела. Это сказалось и в той помощи, которую оказал Эйнштейну Гроссман. Выход на четырехмерную псевдориманову геометрию прстранства-времени подсказывал форму уравнений гравитационного поля с использованием тензора кривизны Риччи R_{ik}:

$$R_{ik} = -\kappa T_{ik},$$

где κ — гравитационная постоянная, а T_{ik} — тензор энергии-импульса материи (т. е. вещества и электромагнитного поля). Но теоретико-физический стиль настоятельно требовал тщательного физического осмысления этих уравнений, в частности их согласования с основополагающими принципами физики, методологическими по своему существу.

Опуская важные детали, заметим, что Эйнштейн и Гроссман тогда же пришли к выводу, что эти уравнения не согласуются, по крайне мере, с тремя из этих принципов. Прежде всего, они не давали правильного ньютоновского приближения (т.е. вступали в противоречие с принципом соответствия). Далее, закон сохранения энергии-импульса с учетом гравитации не удавалось сформулировать в общековариантном виде. И, наконец, эти уравнения не удовлетворяли принципу причинности, в том смысле, что величины T_{ik} не определяли однозначным образом значение гравитационного потенциала g_{ik}. В результате Эйнштейн отказался от общековариантных уравнений поля с тензором Риччи и вступил на путь поиска необщековариантных полевых уравнений, конструируемых на основе физических и формальных соображений. При таком подходе теория гравитации обладала двойной ковариантностью: все соотношения теории, кроме полевых уравнений, были общековариантными (и тем самим, удовлетворяли общему принципу относительности), а уравнения гравитационного поля должны были допускать более узкую группу преобразований типа группы линейных преобразований. Поиски такой группы и таких уравнений успеха не имели. Такое положение вещей существовало вплоть до осени 1915 г.

С лета 1914 г. в Геттингене Гильберт и по его просьбе физик П. Дебай организуют семинар по строению материи. В это время в Геттингене с докладами и лекциями выступают лидеры новой физики Лоренц, Зоммерфельд, Бор. Под влиянием работ Ми и Эйнштейна Гильберт думает о полевой теории материи, учитывающей гравитацию и способной объяснить ее электронно-квантовую структуру. Заметим, что Гильберт оказался менее чувствительным к физическим изъянам теории Ми (связанным с ее калибровочной неинвариантностью), чем Эйнштейн и другие физики.

Но теория гравитации Эйнштейна (или Эйнштейна-Гроссмана) представляется Гильберту сложной и незаконченной. Он приглашает Эйнштейна в Геттинген (в июне-июле 1915 г.), где тот читает серию лекций о тензорно-геометрической теории тяготения.

Достаточно оснований считать, что этот визит Эйнштейна, его встреча и беседы с Гильбертом были весьма важными и стимулирующими для них обоих (см. об этом [21—24]): Гильберт «из первых рук» услышал о теории Эйнштейна и ее трудностях, а Эйнштейн, стимулированный беседами с геттингенцами, которые были искушены в римановой геометрии и тензорном исчислении, понял, по-видимому, желательность возврата к идее общековариантных уравнений гравитационного поля, который должен стать последним решающим шагом на пути к завершению основ ОТО.

И вот в ноябре 1915 г., Гильберт —20 ноября в Геттингенском математическом обществе, Эйнштейн — 25 ноября на заседании Прусской академии наук в Берлине, оба докладывают свои знаменитые работы, в которых были получены, наконец, правильные общековариантные уравнения гравитации. Этому предшествовала весьма оживленная ноябрьская переписка между учеными, свидетельствующая об их интенсивной «паралельной» работе и своеобразном драматичном «соревновании» двух стилей и их главных адептов [25].

Начало этому было положено работой Эйнштейна, доложенной в Прусской академии наук 4 ноября. В ней был объявлен возврат к идее общековариантных уравнений поля с тензором Риччи ($R_{ik} = -\kappa T_{ik}$), хотя и ограниченных некоторым дополнительным условием. 7 ноября Эйнштейн посылает Гильберту корректуру этой статьи и открытку, в которой замечает о ставшем ему известном от Зоммерфельда возражении Гильберта против последнего эйнштейновского варианта теории с необщековариантными уравнениями поля.

11 ноября Эйнштейн докладывает в Берлине вторую работу, в которой он попытался обосновать уравнения поля с тензором Риччи, ограничив допустимые преобразования условием

$$\sqrt{-g} = 1,$$

где g — определитель матрицы метрического тензора пространства-времени g_{ik}, и получив в результате вывод о том, что след тензора T_{ik} должен быть равен нулю, что наводило на мысль об электромагнитоподобном строении материи. Наблюдаемый ненулевой след тензора энергии-импульса вещества, по его мнению, объяснялся учетом гравитации. 12 ноября Эйнштейн сообщает Гильберту об этой своей работе, подчеркивая, что таким образом «тяготение должно играть фундаментальную роль в структуре материи» (физическая идея, которая была положена Гильбертом в основу его единой теории см. ниже).

14 ноября Гильберт отвечает сравнительно длинным письмом, написанным на двух отдельных открытках. Прежде всего он с волнением сообщает о своем «*аксиоматическом* (выделено нами. — *В. В.*) решении... великой проблемы» построения последовательной общековариантной теории гравитации и добавляет: «Из общей математической теоремы следует, что (обобщенные максвелловы) уравнения электродинамики есть математическое следствие уравнений гравитационного поля, т.е. между тяготением и электродинамикой нет никакого различия» (цит. по: [23, с. 252]). В этом последнем замеча-

нии суть единой теории поля Гильберта, изложенной в докладе от 20 ноября и опубликованной затем в виде первого сообщения его «Оснований физики» [26]. Сами уравнения гравитации в письме отсутствуют, но все говорит о том, и в частности приглашение Эйнштейна на доклад, который намечался на 16 ноября в Геттингене, что работа Гильберта была завершена. 15 ноября Эйнштейн сообщает, что из-за переутомления и болей в желудке он не сможет приехать в Геттинген, и просит выслать текст подготовляемого Гильбертом доклада.

Несмотря на недомогание, Эйнштейн в эти дни работает крайне интенсивно. 18 ноября он докладывает третью работу, в которой на основе уравнений гравитационного поля для пустого пространства ($R_{ik}= 0$), ограниченных условием $\sqrt{-g} = 1$, ему удалось объяснить аномальное вековое смещение перигелия орбиты Меркурия — основное эмпирическое затруднение классической теории тяготения. Судя по письму, написанному Эйнштейном 18 же ноября, он накануне получил первоначальный вариант гильбертовского доклада, который, как недавно стало известно, заметно отличался от опубликованного текста [27].

В этом письме он пишет о совпадении гильбертовских уравнений со своими уравнениями поля и о своем блистательном расчете аномальной прецессии перигелия Меркурия на их основе.

20 ноября Гильберт докладывает свою работу об аксиоматическом построении единой полевой теории материи, названную им «Основания физики» (его классическая монография по аксиоматике геометрии, вышедшая в 1899 г., называлась «Основания геометрии»). В качестве одного из ее важных результатов, на который среагировал в своем письме Эйнштейн, было получение уравнений гравитационного поля.

Главная же задача, которую перед собой ставил Гильберт, заключалась в реализации его аксиоматического замысла в отношении физики (6-я проблема из его доклада 1900 г.). В теориях Эйнштейна и Ми, точнее в их некотором объединении, он усмотрел возможность реализации своего аксиоматического замысла и, тем самым, построения единой теории поля, которая потенциально должна была бы содержать всю физику. Нелинейная электромагнитная теория материи Ми, формулируемая с помощью лоренц-ковариантного вариационного принципа с обобщенным максвелловским лагранжианом, позволяла в принципе свести вещество к электромагнитному полю. Но существовало еще одно поле — гравитационное, значительно более сложное, чем электромагнитное. Согласно Эйнштейну, оно было не только тензорным, но одновременно определяло структуру четырехмерного пространства-времени, которая оказывалась римановой. При этом,требование лоренц-ковариантности перерастало в требование общей ковариантности, естественно связанной с этой (римановой) структурой. Взяв за основу общековариантный вариационный принцип (принцип Гамильтона) с лагранжианом H, представляющим собой сумму скалярной кривизны риманова пространства-времени и общековариантного аналога электромагнитного лагранжиана Ми, зависящих от 10 гравитационных $g_{\mu\nu}$ и 4 электромагнитных q_s потенциалов, Гильберт, в качестве 14 лагранж-эйлеровских уравнений, получает 10 уравнений гравитационного поля и 4 уравнения электромагнитного поля, являющиеся обобщенными максвелловскими уравнениями.

Связь между этими полями достигается на редкость нефизично, за счет использования 2-й теоремы Нетер об инвариантных вариационных задачах, предвосхищенной Гильбертом для случая преобразований общей ковариантности и доказанной (в общей ситуации) его ученицей Эмми Нетер, ставшей впоследствии одним из основоположников современной абстрактной алгебры. Смысл этой теоремы в рассматриваемом построении заключался в том, что из инвариантности действия (или соответствующего вариационного принципа: $\delta\int H\sqrt{g}\,\mathrm{d}\omega=0$) относительно произвольных непрерывных преобразований, зависящих от 4-х функций пространства-времени, следует, что 4 уравнения поля из 14 можно рассматривать как следствия остальных 10. Именно таким чрезвычайно абстрактным способом достигалось объединение электромагнетизма и гравитации, точнее сведение электромагнетизма к гравитации. Электромагнитное же поле, описываемое уравнениями Ми, заключало в себе и материю. Оставалось только получить из основных уравнений квантовое поведение частиц и электромагнитного поля, что собирался сделать в дальнейшем Гильберт и о чем он писал Эйнштейну в своем последнем ноябрьском письме (от 19 ноября).

Конкретная форма уравнений гравитационного поля в начале не слишком интересовала Гильберта; главным был общий замысел построения оснований физики на основе «полевого идеала единства», общая структура единой общековариантной полевой «теории всего». Вероятно, поэтому он ограничился в докладе записью уравнений гравитации с использованием вариационной производной скалярной кривизны по $g_{\mu\nu}$. Правда, и общей ковариантности в полной мере в этом докладе достичь Гильберту не удалось, поскольку он, как и Эйнштейн ранее, думал, что полностью общековариантные уравнения поля вступают в противоречие с принципом причинности. Нековариантные условия, восстанавливающие причинность, он надеялся получить из уравнений для закона сохранения энергии-импульса.

Эйнштейн же довел свою ноябрьскую серию до логического конца, доложив 25 ноября работу, в которой несколько искусственным образом с использованием физических соображений получил правильные общековариантные уравнения гравитации

$$R_{ik} = -\kappa\,(T_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}T),$$

эквивалентные тем, которые в скрытой форме содержались в докладе Гильберта и которые в явном виде фигурировали в опубликованной версии доклада в форме

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}\,R = -\kappa\,T_{ik}.$$

Опубликованная версия доклада (а публикация эта была осуществлена гораздо позже публикации эйнштейновской работы, доложенной 25 ноября) также не содержала ограничений на общую ковариантность. Не вдаваясь в подробности, заметим также, что прекратившаяся внезапно примерно на месяц переписка между героями ноябрьской истории (Эйнштейн не ответил на письмо Гильберта от 19 ноября), объясняется, по-видимому, возникшей между ними ссорой, размолвкой, что подтверждается примирительным письмом Эйнштейна Гильберту от 20 декабря 1915 г. [23; 25]. Дополнительный свет на эту размолвку проливают: 1) письмо Эйнштейна Цангеру, написанное, скорее всего, в конце ноября 1915 г., в котором Эйнштейн сообщает, что он подозревал геттингенского мэтра в желании «нострифицировать» ОТО, которую Эйнштейн справедливо считал своим детищем [28; 29] и 2) воспоминания сотрудника Эйнштейна Э. Страуса, присланные последним А. Пайсу [23, с. 253—254], в которых говорится также о выступлениях Эйнштейна в Геттингене в июне—июле 1915 г. и о письменных извинениях Гильберта перед ним. После месячной размолвки отношения между ними наладились и каких-либо споров приоритетного характера между ними в дальнейшем не возникало.

Даже этот беглый рассказ о драматичной истории завершения основ ОТО и, особенно, открытия уравнений гравитационного поля демонстрирует специфику геттингенского стиля теоретизирования и, в известной мере, его полярность по отношению к стилю, условно обозначенному нами как теоретико-физический.

Относительно подробный анализ этой истории демонстрирует различие или даже полярность геттингенского математико-физического стиля и описанного выше теоретико-физического стиля, который был свойствен Эйнштейну в первые два десятилетия XX в., когда он выполнил свои главные работы по частной и общей теориям относительности и квантовой теории:

Теоретико-физический стиль (Эйнштейн)	**Геттингенский стиль (Гильберт)**
Основное творческое начало — собственно физика (концептуальный анализ и т. п.). «Инструментальное» отношение к математике.	Основное творческое начало — математика; приверженность идее предустановленной гармонии между физикой и математикой.

Первенство физического аспекта или определенное равновесие физического и математического апсектов.	Явное преобладание математического аспекта над физическим.
Конструктивно-физический подход. Тенденция к единству физического знания подчинена идее баланса между экспериментом и теорией.	Аксиоматическо-дедуктивный подход. Отчетливо выраженная тенденция к построению единой физической теории.
Использование общефизических и методологических принципов (причинности, симметрии, сохранения, соответствия, наблюдаемости и т. д.) для конструирования уравнений.	Использование вариационных принципов и теоретико-групповых методов для вывода уравнений.
Особое внимание к экспериментально-эмпирической стороне теоретических построений.	Существенная недооценка экспериментально-эмпирического аспекта.
Стремление избегать ненадежных гипотез о строении материи.	Пониженная чувствительность к физически ненадежным гипотезам о структуре материи в условиях, когда эти гипотезы встроены в «хорошую математику».
Носители стиля — в основном, физики-теоретики (Лоренц, Планк, Эренфест, Паули и др.)	Носители стиля — в основном, математики и математические физики (помимо гетингенцев Э. Картан, Леви-Чивита, поздние Эйнштейн, Шредингер, Дирак и др.)

В какой-то степени это противопоставление двух стилей подтверждается и материалом из истории квантовой механики, которая в середине 1920-х гг. увлекла Гильберта. Основополагающие, ставшие классическими, математические представления этой теории, которые были развиты прежде всего Гильбертом в соавторстве с И. фон Нейманом, Л. Нордгеймом, а также геттингенцами Г. Вейлем, Е. Вигнером и позже фон Нейманом, выявили подлинную математическую структуру этой теории, понимаемой как функционально-аналитическая теория линейных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Заключительные замечания

Несколько замечаний о стиле теоретизирования в физике. Первое — приверженность к одному из стилей не всегда постоянна. Например, деятельность теоретиков Эйнштейна, Шредингера, Гейзенберга и др. в области единых теорий поля в 20—50-е гг. свидетельствует о том, что в этот период они (Эйнштейн — раньше, Шредингер — позже, Гейзенберг — еще позже) явно сдвинулись в сторону геттингенского стиля. В действительности, именно геттингенцы, сначала Гильберт, а затем Г. Вейль (1918) были пионерами программы геометрического полевого синтеза физики, к которой Эйнштейн, например, поначалу относился гиперкритично, а вскоре (с середины 20-х гг.) сам стал лидером этого направления.

Далее, понятие научной традиции шире, чем понятие стиля научного мышления, связанного именно с этой традицией, но у́же расширенного понятия стиля (в смысле М. Борна — см. введение), близкого по своему существу к понятию куновской парадигмы или квазилакатосовскому понятию глобальной исследовательской программы.

Еще один вариант понимания стиля научного мышления, в некотором смысле промежуточный между нашим пониманием (связанным с некоторой научной традицией) и борновским, относится к национальной специфике научного мышления. О национальных стилях теоретизирования в физике писали П. Дюгем [30] и ссылавшийся на него П. А. Флоренский [31]. При этом, оба, скорее, сопоставляли континентальный стиль, охватывающий труды классиков математической и теоретической физики XIX в. во Франции и Германии (Лаплас, Ампер, Коши, Фр. Нейман, Кирхгоф, Гельмгольц и др.), и британский стиль (Фарадей, В. Томсон, Максвелл и др.). Флоренский, правда, употребил выражение «стиль французской мысли» [31, с. 116], имея в виду, по-видимому, определенную преемственность французского математико-аналитического стиля с аналогичной его формой в немецкой теоретической физике XIX в. Ограничимся следующим высказыванием Флоренского, дающим представление об этом сопоставлении: «Разверните любой классический трактат по физике, принадлежащий перу француза или немца. Вы увидите здесь последовательную цепь умозаключений, облеченных в одежду математического анализа. Трактату предпослано введение, которым устанавливаются гипотезы, связывающие опытно найденные величины... Алгебраический (т. е. математический. — *В. В.*) анализ имеет значение только средства, только облегчает вычисления, но суть дела всегда может быть передана в виде силлогизмов. Ничего подобного мы не найдем у физиков английских, и не каких-либо, а бесспорно гениальных и бесспорно первоклассных. Совершенно новые элементы не только не получают оправдания, но даже не определяются... Алгебраическая (т. е. математическая. — *В. В.*) часть теории тут не вспомогательное средство, а сама есть своеобразная модель, картина... В английских трактатах нечего искать чего-нибудь аналогичного теориям континентальных ученых, ибо в них — или чувственно созерцаемые модели-машины, или наглядно-мыслимые математические символы, поддающиеся различным комбинациям и преобразованиям и стоящие в сознании вместо изучаемых процессов» [31, с. 114—115].

Такой подход ближе к нашему, хотя здесь мы не затрагиваем британских традиций и соответствующего им стиля и при этом далеко не во всем можем согласиться с позицией Дюгема и Флоренского.

С нашей точки зрения научный стиль — непременная составляющая часть научной традиции, институционально закрепленной или в научной школе, или в преемственно связанных группах исследователей. Есть долговременные научные традиции, берущие начало, например, в античной натурфилософии, иногда прерывающиеся или вытесняемые другими, но затем обретающие новое дыхание и существенно новое содержание. Порою в какие-то периоды эти новации приобретали национальную окраску. Сказанное вполне может быть отнесено к долговременной пифагорейско-платоновской традиции взаимосвязи физики и математики, а также и к ее более локальным проявлениям — французской математико-аналитической и к геттингенской формам. Естественно, что в обоих случаях речь может идти и о соответствующих этим традициям стилях физико-математического мышления.

«Французский» стиль был воспринят и во многом усвоен и немецкой теоретической физикой (Фр. Нейман, Кирхоф, Гельмгольц и др.), и британской теоретической мыслью (Дж. Грин, В. Томсон, Дж. Стокс, Максвелл и др.). Он через Гаусса, Вебера и Римана повлиял и на возрождение геттингенской традиции в начале XX в. Вместе с тем, геттингенский стиль вышел далеко за пределы Геттингена. Г. Вейль, И. фон Нейман, Е. Вигнер и др., а также физики, близкие к геттингенской традиции Борн, Зоммерфельд, Гейзенберг, Паули и др. разнесли его по всему миру.

Кстати говоря, геттингенская традиция — через посредство прежде всего В. К. Фредерикса, бывшего во время Первой мировой войны одним из «физических ассистентов» Гильберта, и В. А. Фока, стажировавшегося в Геттингене в 20-е гг. — повлияла на формирование аналогичного стиля физико-математического мышления в советской физике (А. А. Фридман, В. А. Фок и др.), имевшего, впрочем, и отечественные корни в научной традиции П. Л. Чебышева.

Геттингенский феномен активной включенности «абстрактных» математиков в фундаментальную физику весьма характерен и для современной российской ситуации 70—90-х гг. Достаточно назвать в этой связи имена Н. Н. Боголюбова, И. М. Гельфанда, Ю. И. Манина, В. И. Арнольда, Л. Д. Фаддеева, С. П. Новикова и др. Интересной задачей для историка математики и физики второй половины XX в. может быть изучение научного стиля упомянутых и связанных с ними математиков и возможного влияния на него различных научных традиций (в частности и геттингенской).

Список литературы

1. *Эйнштейн А.* О методе теоретической физики // Собр. научных трудов: В 4-х т. М, 1967. Т. IV. С. 181—186.

2. *Зоммерфельд А.* Пути познания в физике // *Зоммерфельд А.* Пути познания в физике: Сборник статей. М., 1973. С. 109—116.

3. *Гейзенберг В.* Физика и философия // *Гейзенберг В.* Физика и философия. Часть и целое. М.,1989.

4. *Гейзенберг В.* Традиция в науке // *Гейзенберг В.* Шаги за горизонт. М., 1987. С. 226—240.

5. *Борн М.* Состояние идей в физике // *Борн М.* Физика в жизни моего поколения. М., 1963. С. 226—251.

6. *Визгин В. П.* Математика в классической физике // Физика XIX—XX вв. в общенаучном и социокультурном контекстах: Физика XIX в. / Под ред. *В. П. Визгина* и *Л. С. Полака*. М., 1995. С. 6—72.

7. *Визгин В. П.* «Французская революция» в физике, математическое рождение классической физики и С. Карно // Исследования по истории физики и механике. 1995—1996. М.,1999 (в печати).

8. *Лаплас П. С.* Изложение системы мира. Л., 1982.

9. *Фурье Ж. Б.* Аналитическая теория тепла (Введение) // Жизнь науки. Антология вступлений к классике естествознания / Сост. *С. П. Капицы*. М., 1973. С. 151—159.

10. *Френель О.* Избранные труды по оптике / Под ред. *Г. С. Ландсберга*. М., 1955.

11. *Араго Д. Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. СПб., 1860. Т. 2.

12. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза // *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 5—152.

13. *Эйнштейн А.* Влияние Максвелла на развитие представлений о физической реальности // Собр. научных трудов: В 4-х т. М., 1967. Т. 4. С. 136—139.

14. *Максвелл Дж. К.* О математической классификации физических величин // *Максвелл Дж.* Статьи и речи. М.,1968. С. 37—47.

15. *Мандельштам Л. И.* Лекции по физическим основам теории относительности (1933—1934) // *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., 1972. С. 89—285.

16. *Дайсон Ф.* Математика в физических науках // Математика в современном мире. М., 1967. С. 111—128.

17. *Визгин В. П.* «Завоевание физики духом математики...» и его отражение в художественной литературе (по романам Р. Музиля и Ч. Сноу) // Иссле-

дования по истории физики и механики. 1993—1994. М., 1997. С. 102—111

18. *Гильберт Д.* Математические проблемы // Проблемы Гильберта / Под ред. *П. С. Александрова.* М., 1969. С. 11—64.

19. *Визгин В. П.* Эрлангенская программа и физика. М., 1975.

20. *Pyenson L.* The Young Einstein. Bristol & Boston: A. Hilger Ltd., 1985.

21. *Визгин В. П.* Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование, 1900—1915 гг.). М., 1981.

22. *Mehra J.* Einstein, Hilbert and the theory of gravitation. Dordrecht; Boston, 1974.

23. *Пайс А.* Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. М., 1989.

24. *Визгин В. П.* Единые теории поля в первой трети XX в. М., 1985. (Исправленное и уточненное издание на английском языке: Unified field theories in the first third of the XX-th century. Basel etc.: Birkhäuser Verl., 1994).

25. *Earman J., Glymour C. G.* Einstein and Hilbert: two months in the history of general relativity theory // Arch. Hist. Exact. Sci. 1978. Vol. 19. P. 291—308.

26. *Гильберт Д.* Основания физики (1-е сообщение) // Вариационные принципы механики / Под ред. *Л. С. Полака*. М., 1959. С. 589—598.

27. *Corry L., Renn J., Stachel J.* Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute // Science. 1997. V. 278. P. 1270—1273.

28. *Medicus H. A.* A comment on the relations between Einstein and Hilbert // Amer. Journ. Phys. 1984. Vol. 52. № 3. P. 206—208.

29. *Визгин В. П., Кобзарев И. Ю., Явелов Б. Е.* Научное творчество и жизнь А. Эйнштейна: Рецензия на кн.: *Pais A.* Subtle is the Lord... Oxford, 1983 // Эйнштейновский сборник. 1984—1985. М., 1988. С. 301—350.

30. *Дюгем П.* Физическая теория. Ее цель и строение. СПб., 1910.

31. *Флоренский П. А.* Наука как символическое описание // *Флоренский П. А.* У водоразделов мысли. М., 1990. Т. 2. С. 109—124.

КОММЕНТАРИЙ

С. С. Демидов

Центральная тема доклада В. П. Визгина — обозначившееся в первой половине XX века яркое проявление пифагорейско-платоновской традиции в физическом познании. Речь идет об общих представлениях творцов современной квантово-релятивистской физики — А. Эйнштейна, В. Гейзенберга, Д. Гильберта, Г. Вейля. Традиция эта живет в физике всегда, но с особой силой проявлялась лишь в определенные (вообще говоря, революционные для судеб самой физики) периоды ее истории — в трудах создателей Новой науки — И. Кеплера, Г. Галилея, И. Ньютона и Г. Лейбница, в период зарождения в первой половине XIX века математической физики, наконец, в первой половине нынешнего века при разработке новейших квантово-релятивистских представлений. Наиболее отчетливо ее суть выражена кругом математиков и физиков, тяготевших к Геттингену и являвшихся приверженцами специфического «геттингенского стиля», который В. П. Визгин противопоставляет «французскому стилю». Этот последний тоже можно рассматривать как некоторую реализацию духа пифагорейско-платоновской традиции, но понимаемой в чрезвычайно трансформированном смысле. Физика, развиваемая во «французском стиле», ориентирована прежде всего на эксперимент (он предшествует всякому теоретизированию, и это теоретизирование постоянно экспериментом корректируется). Дань же пифагорейско-платоновской традиции ограничивается чрезвычайно большой ролью, которая отводится построению математической модели и последующему ее математическому же исследованию. Математика здесь выступает как инструмент. Физика, развиваемая в «геттингенском стиле», рассматривает математические структуры как подлинные структуры реальности и пытается выявить «Математику» реального мира — теоретизируя или даже экспериментируя. На наш взгляд, всю историю современной теоретической физики (начиная с XVII века) можно рассматривать как причудливую игру двух тенденций — пифагорейско-платоновской и противостоящей ей теоретико-экспериментальной, назовем ее бэконовской, по имени Ф. Бэкона, выразившего ее суть с обезоруживающей простотой.

Таким образом, приверженность к пифагорейско-платоновской традиции, причем, в крайнем ее выражении, является одной (вероятно, главной) особенностью «геттингенского стиля». Разумеется, эта особенность не является единственной характеристикой стиля. Первое, что бросается в глаза, если сравнивать его с «французским», скажем, стилем, это иной подход к аксиоматическому методу (определяемый в первую очередь Д. Гильбертом), наконец, иной взгляд на математику, употребляемую в физике. Если для «французского стиля» естественно давать предпочтение анализу, то «геттингенцы» чрезвычайно расширяют математические границы физики — здесь и тензорная геометрия, и теория групп, и теория вероятностей. Я полагаю, что за двумя разными стилями скрыто существенное мировоззренческое расхождение.

В. П. Визгин очень удачно выделил «геттингенскй» стиль в картине развития теоретичесой физики XX века, совершенно правильно противопоставляя его «французскому» (который, на мой взгляд, лучше назвать «парижским» — во-первых, «парижский» лучше противопоставляется «геттингенскому» и естественнее с ним сопрягается, во-вторых, рожден он был не во Франции вообще, но в самом Париже по преимуществу). Теперь, когда задача уже поставлена, естественно заняться ее решением — основательным изучением феноменов «геттингенского» и «французского» (или, позволю себе такую вольность, «парижского») стилей.

ОТВЕТ АВТОРА

1. С. С. Демидов обратил внимание на то, что пифагорейско-платоновской традиции в развитии теоретической физики можно противопоставить теоретико-экспериментальную традицию, которую можно условно назвать бэконовской. Тогда, по его мнению, вся история физики (начиная с XVII в.) предстанет как «причудливая игра» этих традиций-тенденций.

Отмеченный мной в статье теоретико-физический стиль, характерный для таких теоретиков конца XIX — начала XX вв., как Дж. Максвелл, Л. Больцман, М. Планк, А. Эйнштейн, находится как раз на их стыке. В статье, фактически, не обсуждались иные трактовки в физике, противостоящие пифагорейско-платоновской. Но, конечно, можно говорить о теоретико-экспериментальной (или экспериментально-теоретической) традиции, которую, по-видимому, было бы лучше связать не столько с Бэконом, сколько с Галилеем и Ньютоном, несмотря на признание ими фундаментального значения математического начала в физике. Думаю, что достаточно четко эта традиция оформилась во 2-й половине XIX в. под влиянием Ф. Неймана, Г. Гельмгольца, Г. Кирхгофа и др. — в Германии и В. Томсона, Дж. Максвелла и др. — в Британии.

Правда в физике, особенно в XVII—XIX вв. можно усмотреть и другие традиции, например, натурфилософскую (например, квазиромантическая — Х. Эрстед, И. Риттер и др.) и экспериментистскую («физика — это искусство точных измерений», ее представители — Г. Магнус, И. Поггендорф и др.), поэтому «причудливая игра» оказывается еще более причудливой, чем игра только двух партнеров-соперников. Эта игра, к тому же, может осложняться за счет существования различных исследовательских программ, существующих в рамках одной и той же традиции.

2. Различие в математических структурах, используемых «французами» и «геттингенцами» во многом объясняется почти столетним интервалом, разделяющим «золотые периоды» каждого из этих стилей. Поэтому у первых — анализ и дифференциальные уравнения, а у последних — введение и новых математических структур: многомерных тензорных геометрий, теории групп Ли, функционального анализа. Правда, интерес к дифференциально-геометрическим структурам просматривался уже у ранних «геттингенцев» Гаусса и Римана.

3. Я не думаю, что приверженность к тому или иному стилю всегда связана с мировоззренческими установками ученых. Например, «геттингенец» Г. Вейль в начале испытывал сильное влияние И. Канта, затем был увлечен Э. Махом, А. Пуанкаре и позитивистами; во время своих занятий теорией

относительности и единой теорией поля он находился под влиянием феноменологии Э. Гуссерля, а в 1920-е гг. под влиянием Фихте, и даже Майстера Экхарта. В Геттингене популярностью пользовались в 1910-е гг. два противостоящих друг другу геттингенских философа Э. Гуссерль и неокантианец Л. Нельсон, которого поддерживал сам Д. Гильберт.

4. Что касается предложения С. С. Демидова именовать «французский» стиль «парижским», то, вероятно, это вполне приемлемо, хотя бы в силу «симметрии» с «геттингенским стилем» и связи «французского стиля» с Парижской политехнической школой.

СТИЛЬ И МЫШЛЕНИЕ: ЕЩЕ РАЗ О КОНФРОНТАЦИИ ДВУХ СТОЛИЦ*

Демидов С. С.

О стиле в математике

Стиль в математике — мы употребляем это словосочетание, как правило, не уточняя его смысл, понимая его по аналогии со стилем в литературе и искусстве. В «Толковом словаре русского языка» под редакцией Д. Н. Ушакова[1] слово «стиль», происходящее от греческого stylos (буквально — заостренная палочка для писания на навощенных дощечках), трактуется и как «совокупность художественных средств, характерных для произведений искусства какого-либо художника, эпохи или нации», и как «система языковых средств и идей, характерных для того или иного литературного произведения, жанра, автора или литературного направления», и как «способ, манера словесного выражения мыслей» и, наконец, с пометой — «перен.», как «характерная манера поведения, метод деятельности, совокупность приемов какой-нибудь работы». Естественно и стиль в математике понимать как совокупность математических средств и идей, характерных для работ какого-либо математика, математической культуры (если речь идет о временах достаточно от нас удаленных), школы или направления.

Если говорить о математике XVIII—XX вв., то очень трудно, на наш взгляд, с какой-либо определенностью говорить о национальном математическом стиле (скорее всего такое понятие попросту лишено отчетливого

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (коды проектов: 98—03—04084, 99—03—19868).

смысла), но вполне возможно говорить о стиле присущем школе, направлению, отдельному крупному ученому.

Конечно, стиль (здесь и далее мы будем иметь в виду, не оговаривая этого каждый раз специально, стиль в математике) определяется более фундаментальными категориями, ориентированными на глубинное понимание сути математики и математических структур, целей и задач математического творчества, наконец, ее методов. Однако стиль — характеристика объективная, требующая серьезного анализа, на который настоящая заметка претендовать не может. Мы ограничимся лишь некоторыми соображениями, имеющими, на наш взгляд, общий интерес, хотя и возникшими в связи со специальными вопросами истории математики в России.

Начну с анекдота. Известно, что петербургские математики последней трети XIX — начала XX века свысока и с нескрываемым пренебрежением взирали на труды своих московских коллег. И когда последние занялись новой, возникшей во Франции, теорией функций действительного переменного, считали хорошим тоном отпускать на счет этих занятий, которые рассматривали как пустяковые, язвительные замечания. Рассказывают, что знаменитый петербургский математик академик В. А. Стеклов брал в руки диссертацию восходящей московской звезды Н. Н. Лузина, написанную в русле этой новой тематики, знаменитый «Интеграл и тригонометрический ряд» и, листая ее, риторически вопрошал: «Где же здесь формулы?» И на основании недостаточного, с точки зрения петербуржца, их числа заключал: «Это же не математика, это какая-то философия!» Что, с точки зрения ортодоксального петербурского математика, являлось оценкой самой уничижительной! Большей бессмыслицей, чем философия, по мнению петербургских позитивистов, было разве только богословие. Математический текст, с их точки зрения, должен состоять преимущественно из формул.

Таким образом, даже не вникая в содержание, по одному виду текста, он считал возможным сделать заключение о его математической несостоятельности.

Скорее всего этот случай — выдумка (хотя кто за это может поручиться?), причем выдумка самих москвичей, окарикатуривших одного из тогдашних петербургских столпов. Но для нас это обстоятельство особой роли не играет, так как анекдот этот очень рельефно выделяет отличие стиля московских и петербургских математических работ, за которым (это-то и вызывает раздражение героя анекдота, названного именем Стеклов) скрываются глубокие принципиальные различия.

Стиль вторичен, ему можно и подражать. Математик, как и живописец, может выполнить работу не в свойственном ему стиле — это может быть сознательной стилизацией или, в случае, если работа выполнена второстепенным мастером, бессознательным чисто подражательным актом — например, при попытке доказать тот или иной результат по известному образцу.

Тем не менее, стиль — объективный признак характерный для творчества крупного математика или математической школы. В конечном итоге он является внешним выражением и мировоззренческих установок, и понимания предмета, и методов математики. Рассмотрим в связи с этим конфронтацию петербургской и московской математических школ в последней трети XIX — начале XX вв.

Повесть о двух городах

Во второй половине века основными центрами математической жизни в России были столицы — Петербург (где её средоточием выступала Императорская Академия наук) и Москва, где тон задавал Московский университет. Основным содержанием петербургской математической жизни стала деятельность переехавшего из Москвы П. Л. Чебышева и сформировавшейся вокруг него школы, известной как Петербургская школа Чебышева. Эта школа, прославившаяся выдающимися результатами в теории наилучшего приближения функций (Е. И. Золотарёв, А. А. Марков, В. А. Марков и др.), в теории чисел (А. Н. Коркин, Е. И. Золотарёв, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной и др.), в теории вероятностей (А. А. Марков, А. М. Ляпунов и др.), в математической физике и теоретической механике (А. М. Ляпунов,В. А. Стеклов, Н. М. Гюнтер и др.), получила всемирную известность и признание. Для исследований этой школы характерны: 1) ярко выраженный прикладной характер (исключением служит теория чисел — область традиционная для петербуржцев со времён Эйлера); 2) постоянное стремление к строгому и одновременно эффективному решению математических задач, к построению алгоритмов, позволяющих доводить решение задачи либо до точного числового ответа, либо до пригодного приближённого решения; 3) стремление к простоте и элементарности используемых средств. Такая направленность деятельности школы определяла известное недоверие к новомодным направлениям западной математики (в частности, новаторские идеи Римана оценивались как математический декаданс), к новым веяниям в основаниях математики. При этом общее осмысление математики и её места в мире носило позитивистский характер. «Мы решаем конкретные задачи, конкретными строгими методами (строгость понималась в смысле возможно точного установления пределов погрешностей используемых методов) и никакого философского тумана (скажем, в стиле Г. Кантора) не потерпим».

Математическая жизнь в Москве определялась ритмом, задаваемым Московским математическим обществом, организованном в 1864 году при Московском университете и издававшем специальный математический журнал «Математический сборник». В последней трети века здесь сформировался крупный научный центр, исследования которого в некоторых направлениях получили признание в Европе. Прежде всего это работы по теоретической механике и прикладной математике (Н. Е. Жуковский), по геометрии (прежде всего диффереациальной — К. М. Петерсон, Д. Ф. Егоров), теории чисел (Н. В. Бугаев), теории аналитических функций (П. А. Некрасов), теории вероятностей и её приложениям (в первую очередь к социальным наукам — П. А. Некрасов). Для работ москвичей характерны — интерес к прикладной тематике, приверженность к ясным геометрическим конструкциям, склонность к философии. Последнее дало основание называть школу, сформировавшуюся в Москве в последней трети XIX — начале XX столетия, философско-математической. Эта философская заинтересованность москвичей, носившая ярко выраженный антипозитивистский характер, а также интерес к геометрическим проблемам, мало занимавшим петербуржцев, породило сложный конфронтационный характер взаимоотношений московских и петербургских математиков, сохранявшийся вплоть до 30-х годов XX века (впрочем, эту конфронтацию следует рассматривать и в общем контексте культурного противостояния двух столиц). Разумеется, молодых честолюбивых москвичей никак не устраивало положение математиков, если даже в Европе и признанных, то уж во всяком случае не в качестве лидеров направлений, определяющих лицо современной математики. И они искали тематику, которая бы позволила им выйти на передовые рубежи тогдашней науки. В то же время эта тематика должна была лежать в стороне от интересов петербуржцев. И этой тематикой стала теория функций действительного переменного — направление, родившееся в 90-е годы в трудах французских математиков Э. Бореля, Р. Бэра и А. Лебега и основывающееся на столь нелюбимой в Петербурге теории множеств Г. Кантора («это не математика, — говаривали там про теорию множеств, — это теология»). Выбор, сделанный Д. Ф. Егоровым, был естественным ещё и потому, что его учитель Н. В. Бугаев, начиная с 60-х годов выступал активным проповедником построения теории разрывных функций и предложил собственный (правда, неудачный) вари ант такой теории — аритмологию. Не отпугивали, а скорее привлекали москвичей и теологические одежды некоторых построений Г. Кантора. В 1911 году в Comptes Rendus Академии наук Франции появилась заметка Д. Ф. Егорова, содержащая одноименную теорему, а в следующем году в том же журнале была опубликована статья его ученика Н. Н. Лузина о *С*-свойстве. Этими событиями принято датировать рождение Московской школы теории функций Егорова-Лузина, первое поколение учеников которых (Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, В. С. Фёдоров, М. Я. Суслин, П. С. Александров, В. И. Вениаминов, В. В. Степанов, И. И. Привалов) сформировалось уже до революции

1917 года. Следует заметить, что реакция петербуржцев на деятельность школы Егорова-Лузина долгое время была высокомерно негативной. Об этом — приведенный выше анекдот о реакции В. А. Стеклова на диссертацию Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд». Другой выдающийся деятель петербургской школы, академик Я. В. Успенский, в письме к А. Н. Крылову, написанном в 1926 г., дал такую оценку Н. Н. Лузину: «Относительно Лузина я знаю, что он хороший специалист в своей области (теория множеств и связанная с нею канторовско-лебеговская дребедень), блестящий профессор, создавший в Москве школу своих учеников и своим влиянием упразднивший настоящую математику в Москве» [2, с. 193]. Число таких примеров можно умножить. Для нас ясно одно — в основе конфронтации лежали серьезные идеологические противоречия. Эти противоречия приводили к постоянным столкновениям, к взаимному отчуждению математиков обеих столиц, наконец, к появлению стилистических особенностей, по которым можно было угадать приверженность автора текста.

Особенности эти проявлялись даже в мелочах. Например, в терминологии. Москвичи говорили — «теория функций действительного переменного», тогда как петербуржцы — «... вещественного переменного». Дальше уже больше — позитивистская направленность петербургских лидеров, их сугубо прикладная ориентация приводили к тому, что даже чисто геометрические исследования оставались за пределами их активного интереса. Если москвичи с удовольствием и с успехом развивали дифференциальную геометрию, то петербуржцы эту тематику открыто игнорировали. Даже комплексное переменное оказалось для них слишком умозрительным объектом и в своих конкретных исследованиях они старались без них обходиться[2].

Совершенно естественным поэтому был для них отказ от канторовской теории множеств. А если принять во внимание философско-богословские фрагменты в сочинениях Г. Кантора, то можно понять и ту неприязнь, которую они к ней испытывали (напомним слова Успенского, процитированные нами выше!).

Москвичи же вовсе не были ориентированы исключительно на математику, имеющую приложения, хотя прикладной математикой с успехом занимались. При этом выдающиеся прикладники-москвичи, такие как Н. Е. Жуковский и его ученики, живо интересовались философией и богословием (вспомним интерес все того же Н. Е. Жуковского к штудиям молодого П. А. Флоренского). Позитивистский дух Петербурга не позволил лидерам школы по достоинству оценивать новые математические направления, нацеленные не на непосредственные приложения, а на решение некоторых общих, по существу, философских проблем. Если москвичи с активным интересом относились к подобной тематике (см., например, реакцию Н. Н. Лузина на логические рабо-

14 Зак. 3711

ты Н. А. Васильева [3, с. 137—138]), то для петербуржцев такой энтузиазм выглядел дурным тоном.

Наконец, московские математики даже в математических работах могли допустить отступления философского характера (их можно встретить и у Н. В. Бугаева, и у Н. Н. Лузина), то петербуржцы, как правило, до этого «не опускались». А уж тем более петербургскому математику и в голову не могло придти пуститься в философские спекуляции, что охотно делали москвичи[3].

Стиль школы во многом определяется стилем ее руководителя. Так очень многое, что мы сказали о петербургском стиле, можно отнести к стилю самого Чебышева. Ясный, организованный вокруг аналитической выкладки (можно даже сказать — к выкладке почти и сводящийся), лишенный философских отступлений, и, еще раз подчеркнем, носящий сугубо аналитический характер.

С москвичами дело обстоит сложнее. Тексты Егорова и Лузина стилистически очень разные. Очень сухой, лишенный отступлений (за исключением превосходных, как правило, исторических введений)[4], текст Егорова и более пространный с отступлениями исторического и философского характера эмоциональный[5] текст Лузина. Многие особенности их стилей перенимают и их ученики. При этом очень хорошо видно — под чьим преимущественным влиянием находился тот или иной из их учеников.

Интересной стилистической особенностью москвичей стала виртуозная техника построения контрпримеров — именно к такому жанру относятся многие известные их достижения[6].

Проблема стиля в математике не только не изучена, но даже толком не поставленный. Ее изучение поможет понять и особенности процесса развития математики как на макроуровне (уровне школ, направлений), так и на уровне творчества отдельного ученого.

Примечания

[1] Я выбрал этот словарь [1] только по причине удобства — именно он стоит рядом с моим письменным столом.

[2] Известные исключения (вроде теоремы Сохоцкого) лишь подтверждают правило.

[3] Попытку высказаться на общие темы предпринял, правда, однажды сам В. А. Стеклов, выступивший в 1923 г. с брошюрой «Математика и ее значение для человечества» — сочинением примитивно позитивистским, выглядящим (особенно, по контрасту со славным именем автора) попросту убого.

[4] Егоров, чрезвычайно интересовавшийся вопросами философии и, особенно, богословия, считал предосудительным обсуждать их в математических работах — математика отдельно, философия отдельно.

[5] Скрытые за буквой текста эмоции редко вырываются наружу, обыкновенно они лишь только угадываются. Оценить силу этих эмоций в ряде случаев позволяет сохранившаяся в связи с тем или иным текстом переписка. Так очень много дает для понимания авторских переживаний в связи с текстом учебника Гренвиля-Лузина недавно опубликованные письма Н. Н. Лузина к М. Я. Выгодскому [4].

[6] Пример Д. Е. Меньшова тригонометрического ряда с коэффициентами, не равными нулю, сходящегося к нулю почти всюду (1916), опровергший гипотезу о единственности тригонометрического ряда, сходящегося почти всюду к данной функции, построенный М. Я. Суслиным (1916) знаменитый пример A-множества, не являющегося B-множеством, пример М. А. Лаврентьева (1925) дифференциального уравнения вида $y'' = f(x, y)$ с непрерывной правой частью, у которого в любой окрестности каждой точки области определения функции f через эту точку проходит не одна, а по крайней мере две интегральные кривые. Это лишь несколько, сразу пришедших на ум, придуманных москвичами контримеров. Их число легко умножить.

Список литературы

1. Толковый словарь русского языка / Под ред. *Д. Н. Ушакова*. М., 1940. Т. 4.

2. *Ермолаева Н. С.* Новые материалы к биографии Н. Н. Лузина // Историко-математематические исследования. 1989. Вып. 31. С. 191—203.

3. *Бажанов В. А.* Николай Александрович Васильев. М.,1988.

4. Два письма Н. Н. Лузина М. Я. Выгодскому // Историко-математематические исследования. 2-я сер. 1997. Вып. 2 (37). С. 133—152.

КОММЕНТАРИЙ

А. Г. Барабашев

Я считаю, что следует поостеречься включать в стиль направление (предметную область, или, как пишет С. С. Демидов, область идей) исследований. Аналогично тому, как можно различными походками («стилями») направляться в любую сторону, так и любая дисциплина, предметная область математики подвластны вторжению любого стиля. В подтверждение этого можно привести многочисленные примеры из истории алгебраической геометрии, calculus, развития геометрии в эпоху перед созданием «Эрлангенской программы» Ф. Клейном.

Уместными примерами в случае сравнения Петербургской и Московской школ являются:

— Н. В. Бугаев занимался среди прочего числовыми тождествами;

— активный член Петербургской школы М. М. Филиппов писал о геометрии Лобачевского, но «в стиле» петербуржцев, используя аппарат теории аналитических функций;

— В. В. Голубев (Московская школа) занимался аналитической теорией дифференциальных уравнений, популярной в Петербургской школе;

— Н. Е. Жуковский принадлежал Московской школе, но занимался направлением (теоретическая механика; инженерные проблемы; математическая физика), развиваемым также в Петербургской школе (в частности, А. Н. Крыловым);

— разделение предметных областей «смазано» даже у Н. Н. Лузина. Так, он писал о своем вторжении в «чуждую мне область» теории чисел, которая «всегда привлекала меня своими глубокими и таинственными соотношениями» (из письма Н. Н. Лузина Д. М. Петрушевскому — *Ермолаева Н. С.* Н. Н. Лузин и академическая среда // Историко-математические исследования. Вторая серия. 1977. Вып. 2 (37). С. 50). Эта область была особым предметом занятий петербуржцев начиная с П. Л. Чебышева. Тот же Н. Н. Лузин интересовался некоторыми прикладными областями, в том числе преближенными вычислениями и интерполированиями (это зафиксировано в его переписке с А. Н. Крыловым); и т. д.

Итак, следовало бы считать, что «математическая школа» характеризуется стилем — интерсубъективным компонентом творчества, «почерком», характеризующим принятые в данном коллективе методы исследования, особенности осуществления методов исследования, способы связи методов и объектов исследования в единую сеть рассуждений. Стиль накладываем на любые предметные области исследований. Стиль связан более с методом, нежели с предметом. Конечно, у каждой школы имеются приоритетные предметные области, но предметные (дисциплинарные) границы школы весьма размыты. Фиксация этих границ без дополнительных объяснений, без серьезного обоснования критериев приоритетности предметных областей в рамках школы (попытки такой «наивной» фиксации, чреватой контрпримерами, постоянно проскальзывают в тексте статьи) скорее уводит в сторону, нежели помогает понять феномен математической школы.

ОТВЕТ АВТОРА

Нельзя не согласиться с А. Г. Барабашевым, «что следует поостеречься включать в стиль... направление исследований». Я бы даже сказал жестче — такое включение нелепо. Однако я не разделяю мнения А. Г. Барабашева о том, что «математическая школа» характеризуется, прежде всего, стилем. Стиль лишь одна (на мой взгляд, далеко не главная) из характеристик школы. В конце концов возможна стилизация — можно, не выходя за рамки, дозволенные идеологией одной школы, выполнить исследование «в стиле» другой. Более важной, на мой взгляд, характеристикой является именно выбор «предметной области» исследований школы. Можно, конечно, привести многочисленные примеры противостоящих друг другу школ, которые занимаются разработкой одной и той же «предметной области». Это говорит о том, что выбор «предметной области» не может служить определяющей характеристикой школы. Но все же выбор области исследований является фундаментальной ее характеристикой, ибо он задается определенным видением предмета математики, субординации ее иерархической структуры, за которыми скрываются мировоззренческие установки представителей школ. Нельзя представить себе ученика А. А. Маркова или В. А. Стеклова, который в период их владычества в северной столице позволил бы себе выполнить работу по канторовской теории множеств или математической логике — предметам, с их точки зрения, к настоящей математике не относившихся.

МЕТАФИЗИКА ФРАКТАЛА

Тарасенко В. В.

Метафизика задания категории

Введение фрактальной концепции в практику научных исследований разрушает евклидианскую исследовательскую научную программу. Этот процесс можно рассмотреть используя представления И. Лакатоса о влиятельной метафизике научной теории (т. е. о положениях, стоящих над эмпирической проверкой и направляющих научный поиск).

Концепция фрактала игнорирует «защитный пояс» классических геометрических концепций (конкретные исчисления, связанные с евклидианской программой фрактальной концепцией даже не критикуются), заменяя «жесткое ядро» — тривиальные первые принципы — категории геометрии. Этим самым задается метафизика фрактала — влиятельная метафизика фрактальной концепции.

Эта замена идет не по пути изменения или введения новой аксиоматики, основанной на строгих логических приемах определения понятия, а по пути введения интерсубъетивного контекста фрактальной концепции — создания устойчивых практик узнавания фрактала как в феноменах математики (геометрических множествах, решениях нелинейных уравнений), так и в феноменах — конструктах прикладных теорий (географии, лингвистики, астрофизики).

В связи с этим, можно предложить схему контекстуального введения категории фрактала и задания на этой базе влиятельной метафизики — как самоорганизации коммуникаций, интерсубъективной среды для диалога между учеными, способствующему усилению познавательной ценности категории фрактала. Предлагается следующая модель введения Мандельбротом категории фрактала в научное знание: в первую очередь, Мандельброт ввел термин «фрактал»; далее, он ввел «затравку» — первое (математически точное, но, в общем случае, неверное) определение понятия фрактала через размерность Хаусдорфа-Безиковича; и, наконец, он запустил интерсубъективный механизм «самоорганизации научного понятия»: во-первых, сумел описать (пользуясь методами аналогии, компьютерной визуализации, перечислением сходных, по его представлениям, предметных областей, применяя метафоры) способы отождествления (узнавания) различных математических и природных форм как фрактальных, с помощью которых можно было бы расширить «затравочное» определение и произвести диверсификацию понятия фрактала на различные области знания, придав этому понятию категориальный статус, и, во-вторых, создать на базе этих способов массовую научную коммуникацию — стратегию диалога среду самоорганизации нового понятия.

С середины прошлого века геометрические фрактальные предметы уже существовали как предмет исследования, появлялись первые операциональные способы работы с ними, но общего понятия фрактала еще не было. Не было общей методологии, связывающей в единое представление такие, казалось бы, совершенно не корреспондирующие между собой вещи, как, например, множество Кантора и чертеж побережья Британии.

С методологический точки зрения представляется важным тот факт, что для введения нового понятия — понятия фрактала — Мандельброт не «изобретал» каких-то абсолютно новых формализмов или теорий, он, скорее, не «первооткрыватель», а «перворассматриватель» — «первый-по-новому-рассмотритель»: его работа заключалась в перестройке перцептивных схем и создании языка объяснения новых предметностей. Для этого он переключил «гештальт» (парадигму) — воспринимающие и интерпретирующие способности научного сообщества — на сборку нового понятия, на распознавание и интерпретацию фрактальных структур в конкретных познавательных контекстах, создавая как устойчивые перцептивные механизмы, так и устойчивые лингвистические коммуникативные практики в науке, заставляя научное сообщество по новому оценивать давно известные вещи (например, различные типы размерностей, парадоксы измерения, множества, типа множества Кантора).

Поэтому фрактальная геометрия не есть «чистая» геометрическая теория. Это, скорее, концепция, новый взгляд на хорошо известные вещи, перестройка восприятия, заставляющая исследователя по-новому видеть мир.

Мандельброт сделал сильный методологический ход, перейдя от некомуникабельного современной ему науке «чистого» конструктивного монстра к фракталу — предмету измерения как математики, так и прикладных наук, сконструировав две процедуры отождествления: процедуру отождествления рекурсивных математических «монстров» как фракталов и процедуру отождествления предметов измерения фрактальной концепции и предметов измерения теоретических конструктов прикладных исследований (географии, лингвистики, материаловедения и др.). В этом смысле он ввел цельность представления в разрозненные нагромождения фактов и моделей, создав (предустановив) «фрактальную» гармонию — фрактальный порядок интерпретируемого мира (точнее, запустив интерсубъективный механизм самодостраивания, самоорганизации этого порядка).

После подобного «переключения внимания» в научном сообществе интерсубъективно фиксируется познавательная ценность категории фрактала, формируется некоторое «личностное» знание — подразумеваемое знание о фрактале, предающее статус очевидности категории фрактала, создающее контекст фрактальной концепции и снимающее необходимость точного определения фрактала.

Если попытаться понять, какую роль (какие «языковые игры») играют понятия, вводимые Мандельбротом, то можно заметить, что язык введения категории фрактала не связан напрямую с уточнением и ограничением этого понятия. Это впечатление усиливается и при прочтении его «Fractal Geometry of Science». Мандельброт вводит категорию фрактала «фрактальным способом»: задает «затравку» — первые (пусть и неверные) определения, а потом запускает механизмы их итерации, изменений. И пытается описать то, что при этом получается, какие интерпретации при этом появляются.

Это становится очевидным при рассмотрении проблем определения фрактала. Как известно, точного определения фрактала до сих пор не предложено: с одной стороны, все формулировки разрушались контрпримерами; а с другой — определение для категории фрактала особо и не нужно после того, как родилась интерсубъективная практика научного применения категории.

В качестве примера можно рассмотреть определение фрактального множества через понятие самоподобия. Как известно, это понятие неприменимо для описания многих фрактальных множеств, например, для множеств Жюлиа и Мандельброта: их фрагменты, строго говоря, не переводятся во все множество с помощью преобразования подобия. Чтобы выйти из этого положения, Мандельброт говорит о том, что можно расширить описания фракталов через преобразования фрагмента фрактального множества во всё множество, используя и подыскивая не только преобразования подобия, но и другие виды геометрических преобразований (например, аффинные).

Действительно, видно, что фрактал — фигура Коха и фрактал — множество Мандельброта — это разные типы фракталов. У них есть общее — наличие рекурсивной процедуры их генерации, но есть и отличия. В первом случае мы имеем дело с инвариантным относительно масштабных преобразований фракталом, во втором — можно говорить о коваринтности (о нарушениях инвариантности при масштабных преобразованиях). Поэтому можно говорить о том, что фигура Коха — это инвариантный фрактал, а множество Мандельброта — это ковариантный (или, если взять на вооружение термин Тимофеева-Ресовского, ковариантно редуплицированный) фрактал.

Исходя из этого, на наш взгляд, можно ввести представление о двух пониманиях самоподобия: жесткого самоподобия (ЖС) — самоподобия типа самоподобия фигур Коха, связанного инвариантностью относительно масштабных преобразований, и нежесткого самоподобия (НС) — ковариантного самоподобия типа самоподобия множества Мандельброта, когда преобразование фрагмента во всё множества нетривиально.

На наш взгляд, жесткое и нежесткое самоподобие есть фундаментальные предикаты описания категории фрактала. Именно на поиске и интерпретации самоподобии основаны поиск и интерпретация фрактальных структур в конструктах прикладных теорий, о которых речь пойдет далее.

Подчеркну еще одну важную вещь, связанную с описаниями фрактала. На мой взгляд, концепция фрактала дистанцируется от традиционных понятий задания и описания формы: места, границы, ширины, длины, дихотомий «непрерывное — дискретное», «простое — сложное», определений типа «сложное есть сумма простых частей». Этих понятий просто нет. Они не имеют смысла (перестают работать внутри концепции фрактала) хотя бы потому, что совершенно не понятно, как их применять.

Например, когда мы говорим о самоподобии, о том, что часть в каком-то смысле подобна целому, то познавательный статус понятия «часть» в этом контексте отличается от понятия части в контексте евклидовой геометрии.

Когда утверждается, что отрезок АВ есть часть треугольника АВС, то механизмы восприятия утверждающего — как зрительные, так спекулятивно-теоретические — уже настроены на некоторую очевидность границ части и целого, заданную в выделенных точках А и В. С точки зрения этой очевидности я могу, во-первых, совершить сборку целого (сборку треугольника АВС с помощью частей-отрезков), а во-вторых, решить обратную задачу — перейти от частей к целому.

В случае применения фрактальной концепции эта методология сборки целого посредством частей сильно меняется: части не очевидны, границы не видны, для «сборки» целого частей недостаточно (точнее, частей бесконечно много, они бесконечно иерархизированы, перепутаны, наложены друг на друга) и традиционная методология, идущая по пути часть—граница—целое, не приводит к сборке целого, а разрушает познание бесконечными усложнениями и ограничениями.

Понятие самоподобия есть некий конструктивный фактор, фактор, требующий такого же статуса очевидности у фрактала, как статус гладкости евклидовой прямой. Без представления о самоподобии, на наш взгляд, корректно ввести представления о фрактале невозможно.

Поиск самоподобия направлен на поиск инвариантов описания в бесконечных метаморфозах различных масштабов рассмотрения, в различных фрагментах фрактальных множеств.

Фрактальная концепция входит в научные коммуникации потому, что она занимается поиском и интерпретацией неких количественных инвариантов. Проблема описания этих инвариантов, на мой взгляд, стыкуется с проблемой измерения, о которой будет сказано ниже.

Несомненно, что научные коммуникации неявно принимают «метафизические» правила игры — волюнтаризм ввода категории фрактала. Но принятие этого волюнтаризма «новообращенными» рождает новые научные практики, новые фрактальные интуиции, «символы веры» и возможность научной коммуникации в понятиях. На этой базе рождается отождествление математического множества с определенными свойствами и категории фрактальной концепции, в частности, происходит превращение «монстра» во фрактал.

Исходя из интерсубъективных коммуникативных практик, связанных с освоением языка, перцепций, воспитанием интуиций, выкристаллизовывается междисциплинарный статус фрактальной концепции и статус категории фрактала в науке. Статус, задающий новые «порядки слов» и «порядки вещей».

Порядок вещей, всегда связан с нашей его интерпретацией словами-понятиями-метапорядками, интерпретацией, подразумевающей какие-то явные или нет концептуальные установки исследователя, и с этой точки зрения, этот порядок есть не независимая от наблюдателя вещь.

Фрактальные интерпретации мира, так же как и «евклидовские» исследовательские программы оказываются заложниками собственной метафизики: активность разума творит новый нелинейный мир — фрактальный космос — из саморазваливающегося линейного знания.

Метафизика движения

Принятие фрактальной метафизики, на мой взгляд, необходимо влечет принятие новых представлений о процессуальности, о движении.

Статус процессуальности фрактала отличается от понимания процессуальности движения тела в каком-то пространстве. Более того, на наш взгляд, введение фрактальных представлений обессмысливает понимание движения как движения физического тела по чему-то внешнему, а вслед за этим тоже деструктурирует представление о части и целом.

Поясним эту мысль.

Геометрия Евклида, как и геометрия Лобачевского и классическая механика, подразумевают какую-то заданность предмета измерения в определенном пространстве. Назовем эту заданность термином «интуиция тела в пространстве».

Точку или линию можно задать на плоскости или шаре, и в этом смысле, плоскость или шар будут пространствами точки или линии. Для объяснения взаимоотношений тела в пространстве (точки на линии или линии на плоскости) необходимо вводить представление о месте — категорию места. Далее можно задать движение, процессуальность — во-первых, как какой-то способ описания изменения положения тела в пространстве, во-вторых, как способ изменения формы самого тела.

Исходя из этого (во-первых, из разных способов задания пространства, во-вторых, из разных способов задания движения — перемещений или преобразований геометрического тела в пространстве) можно классифицировать и конструировать различные типы геометрий, и на этой базе интерпретировать различные типы движений и физических процессов.

Мы можем взять и рассмотреть треугольник на плоскости. При этом мы считаем само собой разумеющимся, не требующем отдельного обоснования фактом то, что чтобы изменить треугольник, с ним надо что-то сделать — нам надо специально произвести над ним какую-то операцию, описать процесс его изменения, после чего треугольник как бы «застынет» — будет ждать следующей над ним операции — мы можем растянуть или сжать этот треугольник с помощью аффинной геометрии, можем его двигать по плоскости-пространству согласно какому-то закону движения.

Треугольник может меняться — под действием каких-то наших геометрических преобразований и операций, но кроме этих специальным образом оговоренных и *конечных* операций геометра над телом — предметом в пространстве — этот треугольник меняться не может. В этом смысле демиург треугольника — геометр — есть внешний наблюдатель треугольника. Геометр как бы «толкает» треугольник, заставляя включаться в какой-то процесс.

Фрактал же есть нечто иное, он не приемлет оценок с точки зрения интуиции заданного тела-предмета в заданном пространстве. Он скорее есть бесконечное изменение самого себя, тело-автомат с обратной связью — геометр задает итерационный процесс, а после этого начинает удивляться тому, что вдруг выросло.

В этом смысле традиционная интуиция «тело в пространстве» при оценке фрактала только запутывает геометра, так как нет четкой границы между телом и пространством, нет неизменчивости тела.

Поэтому многие действия, считавшиеся нами, например, в евклидовой геометрии тривиальными и само собой разумеющимися становятся загадочными при обращении к фракталам.

Например, непонятно, как вводить тождество и различие фрактальных объектов.

К примеру, в евклидовой геометрии два треугольника считаются равными, если их можно наложить друг на друга с помощью преобразования движения. А в аффинной геометрии — если их можно наложить друг на друга с помощью аффинного преобразования.

В утверждении о равенстве тел в данном случае тоже неявно принимается гипотеза о неизменности заданной формы треугольника (кроме случаев какого-то над ним геометрического преобразования). Неизменность — гарант наложения и отождествления равных треугольников.

Кроме того, треугольник надо задавать на плоскости — в каком-то неизменном геометрическом пространстве.

У треугольников есть три выделенные точки: по ним осуществляется наложение, а далее оговаривается процедура, подтверждающая наложение всех остальных точек.

Но как сравнивать в этом смысле тела, у которых каждая точка меняется при ее рассмотрении?

Надо признать, что в случае с фракталом, граница тела становится контекстуально зависимой, каждый раз ее приходится переопределять и описывать заново, и отождествление фрактальных форм не осуществляется через описание и отождествление границ тел.

Поэтому отождествление различных фрактальных структур физиками производится не их наложением — как треугольников, а с помощью отождествления масштабных инвариантов — размерностей или их спектров.

Но несмотря на это, проблема тождественности и различия фрактальных структур остается — в смысле отхода от описательной интуиции формы как тела в пространстве.

Фрактал как бы самодостаточен. Ему внешнее пространство не нужно: процессуальность фрактала рефлексивна, поэтому он есть не движение по внешнему пространству, а *само-движение*, движение по самому-себе, всегда подразумевающее бесконечно длящуюся обратную связь, т. е. — рост или умирание (в зависимости от направления). Фрактал как математический объект всегда незавершенность, «чистое» становление. Поэтому он так хорошо моделирует процессы самоорганизации, саморазворачивания. Живое — растущее или умирающее — тело, есть тело, состоящее из складок, «повсюду сгибаемое». Живое (в отличие от неизменного мертвого) очень трудно, практически невозможно поймать, локализовать, ограничить телом в пространстве.

Фрактал и монада

Эти представления, на мой взгляд, соотносятся с воззрениями Лейбница — с его представлениями о теле и о монаде.

Лейбниц вводит различие между телом жидким и телом сгибаемым, состоящем из складок. Можно предположить, что эти разные тела символизируют разные парадигмы, разные интуиции, разные методологии, одну из которых можно пометить как телесно-атомистскую (или телесно-корпускулярную), другую — как телесно-монадологическую.

Здесь надо сделать небольшую оговорку. Говоря о монаде, Лейбниц тоже использовал термины «атом» или «не имеющая частей» субстанция. Но субстанциональная заданность лейбницевской монады отличается от субстанциональной заданности евлидовой точки или линии.

Постараемся рассмотреть фрактал с точки зрения отхода от атомистской парадигмы оценки физических тел в сторону парадигмы монадологической — для этого перечитаем лейбницевскую «Монадологию», уже имея представление о фракталах.

Лейбниц начинает с рассуждения о монаде как о простой субстанции, атоме не имеющем частей.

На первый взгляд, здесь имеется несоответствие с представлением о фрактале, ведь фрактал вроде бы вещь всегда делимая, всегда демонстрирующая нам какие-то свои новые фрагменты.

Часть, в нашем понимании, нечто простое, составляющая некоторого сложного агрегата. Агрегат — это то, что может делиться, имеет способность распадаться на части.

Монады распадаться не могут: им некуда делиться, как и не из чего собираться. Поэтому они и не имеют частей.

Но, с другой стороны, монады изменчивы как во времени, так и по отношению друг к другу (именно внутренне изменчивы), а каким образом они могут быть внутренне изменчивы, не имея частей, если внутри них нечему меняться?

Казалось бы парадокс? Противоречие? Нет.

Атом, не имеющий частей, можно понимать двояко.

С одной стороны, образ атома — это образ точки. Вспомним определение Евклида еще раз: точка есть то, что не имеет частей. Но по какому внутреннему принципу можно отличить одну точку от другой? Непонятно: ведь по внутреннему устройству точки тождественны, их нельзя покрасить или дифференцировать по имманентным, индивидуальным признакам.

Значит, модель атома-точки это не модель монады.

Монада должна иметь внутреннюю структуру хотя бы потому, что в отличие от точки она изменяется, и по различиям этих изменений можно типологизировать монады:

«Это многоразличие должно обнимать многое в едином или простом. Ибо так как естественное изменение совершается постепенно, то кое-что при этом изменяется, а кое-что остается в прежнем положении; и, следовательно, в простой субстанции необходимо должна существовать множественность состояний и отношений, хотя частей она не имеет»[1].

Субстанциональная заданность лейбницевской монады отличается от субстанциональной заданности евклидовой точки или линии.

В связи с этом можно отметить две совершенно четкие тенденции (если пользоваться терминологией М. Полани «неявного знания» — условностей акта сознания, установок сознания по отношению к «простой субстанции»).

Простая субстанция может быть автоматом, непрерывно разворачивающимся перед нами («само-штампующим» свои уровни рассмотрения, новые и новые точки зрения на себя) и потому от нас непрерывно ускользающим, а может быть и «лежачим камнем», «универсально простым кирпичиком — раз и навсегда аксиоматически заданным и не требующим дополнительных обоснований.

Отсутствие частей не необходимо является отсутствием внутренней структуры, состояний и отношений — в простой монаде есть множественность, источник их внутреннего действия. Множественности монады есть только наши различные точки зрения (может быть, точнее — различные масштабы) монады. Но почему тогда монада не имеет частей?

Очень просто. Монада всегда есть единое. Единое, принципиально неделимое на части, и обессмысливающее само противопоставление часть-целое.

В этом месте сразу вспоминается платоновский «Парменид» — где великолепно вводится методология исследования единого.

Единое по Платону, беспредельно — оно не имеет ни начала, ни конца, ни середины (иначе оно бы имело части), оно не стоит на месте (нет интуиции тела в пространстве) и не движется, не причастно ко времени, но причастно к бытию.

С подобной точки зрения, с точки зрения единого, на наш взгляд, надо выстраивать методологию понятия фрактала.

У фрактала нет конца, начала или середины — «читать», рассматривать фрактал можно с любого места.

Генерирующее масштабное преобразование у геометрического фрактала, конституирует его как единое — ведь оно не задает его части, не описывает все подробности фрактала на всех масштабах. Это и не нужно. Нет нужды локализовывать предмет, описывать точно его границы.

Фрактал делокализован — различие субстанциальной заданности фрактальной предметности проявляется в переходе от локализации свойств на уровне четко ограниченной предметности (неделимого носителя свойств, точки — того, что не меняется внутри, чьей внутренней структурой можно пренебречь) к делокализованной связности, метаморфозам монады-целого.

От редукции (часть-целое или целое-часть) к мета-редукции, обессмысливающей понятия части и целого в монадологически-фрактальном единстве.

Метафизика измерения

Все разговоры о делокализации, становлении и процессуальности форм фрактальной концепции были бы только качественными метафорами, если бы фрактальная концепция не предложила способ количественной оценки нелинейных структур.

Центральным понятием, из которого, на наш взгляд, первоначально «выросла» фрактальная «идеология», было понятие размерности — числа измерений, с помощью которых можно задать положение точки на геометрическом объекте. Причем, первоначальное — «неправильное» — определение-затравка фрактала через размерность Хаусдорфа-Безиковича сыграло свою конструктивную роль, родив новые научные интерпретации форм.

В свое время бурные дискуссии вызвал переход в «многомерие» — от плоскостей с размерностью два и евклидовых пространств с размерностью три к менее представляемым n-мерным абстракциям. Достаточно сложно себе представить четырех, пяти или шестимерное пространство. Представить сложно, а вот формализовать и исследовать геометрических «жителей» такого пространства гораздо легче. Но для этого к подобного рода пространствам надо как бы привыкнуть, включить в свои интерпретационные механизмы.

Подобная эпистемологическая ситуация, на наш взгляд, происходит сейчас с концепцией фрактала.

Подчеркнем, что размерность сильно зависит от того *как* ее измерять. Это означает, что кроме формул для подсчета размерности необходимо точно задать и некий операциональный набор способа измерения и интерпретации размерности.

Эти особенности могут образовывать не только разные виды размерностей, но и разные понятия, разные подходы к измерению.

Я. Б. Зельдович и Д. Д. Соколов в одном из первых обзоров по фракталам[2] приводят такой пример. Положение точки области плоскости, ограниченной квадратом, можно задать двумя измерениями, и тогда ее размерность будет равна двум, а можно исхитриться и представить себе эту область в виде ломаной с очень сильно прижатыми друг к другу звеньями, сложенными наподобие столярного метра. Тогда, для задания положения точки хватит и одного измерения, и размерность будет равна единице. Об этом же пишут и

Ю. А. Данилов с Д. Д. Кадомцевым[3] — по их мнению, размерность объекта зависит от наблюдателя, точнее от связи объекта с внешним миром.

На основе чего поддерживается эта связь? На мой взгляд, на основе интерсубъективных коммуникаций формирующих представления о предмете измерения.

Нашим фундаментальным предположением, к которому мы еще будем не раз обращаться, будет предположение об интерсубъективности введения размерности в контекст измерения, и как следствие этого, об интерсубъективности введения понятия фрактала в научном исследовании — как множественности интерпретаций, которые могут конституировать принципиально разные понятия в научной практике.

Конституирование научного понятия сопровождается созданием устойчивых схем научных коммуникаций, и в этом смысле, понятие зависит от того, сколько людей вступили в коммуникацию, сколько людей приняли это понятие, как возникла смысловая согласованность их понимания.

Именно таким образом можно объяснить свойство «маргинализации» метафизических проблем в научном дискурсе. Для этого, вслед за В. И. Аршиновым[4], приходится принимать модель науки как цепи перцептивно-лингвистических коммуникаций. Смысловая согласованность в виде появления понятия, в этом случае, рождается вовсе не на базе уточнения или определения понятия, а на базе возможности научной коммуникации — если у нас есть возможность обсудить свои прикладные проблемы с помощью понятия фрактала, не пускаясь в дискуссии о его генезисе и онтологическом смысле, то у нас есть возможность создать механизмы употребления этого понятия и конституировать его в научном дискурсе, элиминировав метафизические проблемы, связанные с уточнением и определением фундаментальных категорий.

В момент создания научной коммуникации создаются интерпретационные схемы — на этой базе понятие фрактала конституирует процедуру измерения фрактального предмета, достраивая наблюдаемые величины. Без этого не может быть наблюдаемости измеряемой величины — ни странный аттрактор, ни даже фрактальная размерность броуновской частицы не наблюдаемы без представлений о специфике фрактальных предметностей.

Интерсубъективность есть еще и возможность вариантов, введения различных схем объяснения. Субъект-исследователь, рассматривающий свой предмет измерения не может быть локализован независим от предметности рассмотрения уже в силу того, что он может влиять на предмет измерения, меняя его статус. В этом смысле исчезает объяснение в связке субъект-объект, образуя какое-то новое взаимодействие, которое можно пометить как наблюдатель-предмет наблюдения.

Чем отличается наблюдатель от субъекта, а предмет измерения от объекта? Разными метафизическими статусами их локализации. Наблюдатель менее закреплен в своих границах, его стратегии познания более зависимы от языка описания, ему практически невозможно элиминировать свои познавательные установки из исследования[5].

Тезис об интерсубъективности может вызвать суждения о «конце науки» в смысле придания волюнтаризма и прозвольности научному дискурсу. Это, на наш взгляд, неверно.

Очень важно подчеркнуть, что интерсубъективность — это не произвол наблюдателя хотя бы в силу того, что не все интерпретационные схемы устойчивы — в смысле создания массовости научных коммуникаций. В этом месте встает так называемая проблема «лженауки», маргиналий научного дискурса.

Устойчивость интерпретации научного понятия подразумевает принятие основных модельных установок исследования, вступление в научную коммуникацию, освоение языка объяснения.

Устойчивых состояний может быть много, и каждое — со своими способами коммуникации, со своим языком, ставя наблюдателя перед проблемой выбора. При этом, в момент выбора интерпретационной схемы совершенно непонятно, какое место в научном дискурсе оно займет.

Исходя из этого наблюдатель уже не может спрятаться, в отличие от субъекта, за понятие объективного закона природы, элиминируясь из научного дискурса. Ему приходится нести ответственность за свой выбор наблюдаемой величины. Это, несомненно, привносит определенные антропные элементы в науку.

Это замечание делает характер связей между наблюдателем и предметом измерения нетривиальным.

Этот ход нашего рассуждения можно проиллюстрировать с помощью анализа проблем измерения береговой линии.

Как известно, с трудностями при измерении длины береговой линии Британии столкнулся в начале нашего века английский гидромеханик Ричардсон при попытке заменить линию ломаной с длиной $L=Ne$. Оказалось, что при уменьшении единицы измерения e, длина L резко возрастает.

Мандельброт предложил аппроксимировать степень «убегания» длины береговой линии в зависимости от e степенным законом, связав показатель степени с размернстью Хаусдорфа-Безиковича формулой, сходной с формулой для кривой Коха.

Он показал, что размерности различных побережий отличаются и могут служить достаточно информативной географической характеристикой, описывая степень извилистости, скрученности побережья.

Почему побережье «является» фракталом? Только ли потому, что его длина аппроксимируется степенным законом? С таким же успехом можно задать вопрос о том, почему поверхность стола является плоскостью.

Но если побережье — «действительно» фрактал, то почему, этого так долго «не замечали» географы? С чем это связано?

С одной стороны, можно сказать, что факт аномального поведения длины побережья — ошибка географов, которую исправила фрактальная теория.

Но нам интереснее рассмотреть этот факт не в терминах ошибки или заблуждения, а в терминах интерсубъективности. С этой точки зрения весьма интересной представляется концепция личностного знания М. Полани. Факт невнимания географов к масштабному «разбеганию» длины побережья, выразившийся, в частности, в попытках найти и обосновать «истинный», «самый верный» масштаб измерения, обусловлен отсутствием «влиятельной метафизики» и соответствующей ей научной теории, и — как следствие — языка описания, способов интерпретации.

В результате этого рождается селективный отбор эмпирических фактов:

«... в научном исследовании всегда имеются какие-то детали, которые ученый не удостаивает особым вниманием в процессе верификации точной теории. Такого рода личностная избирательность является неотъемлемой чертой науки»[6].

Когда внимание ученого направлено на линию, происходит интенциональный акт понятийного «схватывания» линии, который, несомненно, связан с «влиятельной метафизикой» евклидианской исследовательской программы, определяющей свойства сознания ученого, характеристики познавательной среды, в которую он погружен. Личностная избирательность — результат этого «схватывания», абстрагирования понятия.

Математические «монстры» (затем преобразившиеся в фракталы) — яркий пример личностной избирательности научного сообщества, нежелающего принимать «в свою компанию» то, что «противоречит здравому смыслу».

Ситуация становится более интересной, когда появляются дополнительные схемы объяснения, когда бывшие монстры теряют свои маргинальные статусы. В дополнительности кроится конфликт, вызов коммуникационной тотальности единой схемы объяснения.

В результате этого могут появляться смысловые парадоксы, когда понятие, в зависимости от личностных установок, может либо приобретать, либо терять смысл.

Парадоксы отождествления

Для корректного рассмотрения данной проблемы введем понятие о парадоксе отождествления понятий фрактальной теории с природным феноменом, когда предмет измерения, в зависимости от понятийных установок исследователя, может менять свой понятийный статус.

По аналогии с интерпретацией квантово-механических событий копенгагенской школой, можно предположить, что при отождествлении предмета измерения разными теориями (фрактальной геометрией и геометрией Евклида) образуются комплиментарные предложения, по крайней мере одно из которых может быть определенным, тогда как другое — не определено.

Будем считать, что утверждение о том, является ли отождествление природного феномена, например, с евклидовой линией или фракталом, является неопределенным до тех пор, пока мы не уточним, в рамках какой теории мы его пытаемся объяснить: на языке фракталов или на языках других геометрий. Только после такого уточнения одно из дополнительных понятий приобретает смысл.

Например, пусть *A* — высказывание «длина побережья Британии равна 2 километра», *B* — высказывание «фрактальная размерность побережья Британии равна 1,23».

Высказывания *A* и *B* находятся в отношении, напоминающим отношение дополнительности в квантовой механике. Если измерена длина побережья, и результаты измерения выражены высказыванием *A*, то *A* — истинно или ложно.

В этом случае высказывание *B* о том, что побережье Британии имеет фрактальную размерность принципиально не определено — фиксированием длины мы задали линейность побережья как ее единичную, нефрактальную размерность.

Длину и фрактальную размерность измерить одновременно (при одном и том же масштабном преобразовании) нельзя. *A* дополнительно к *B*. И наоборот — *B* дополнительно к *A*. Как и в квантовой механике, дополнительность в данном случае симметрична.

Эти высказывания подпадают под определение отношения дополнительности В. С. Меськова[7]: *«Два высказывания находятся в отношении дополнительности, если и только если: 1) они не могут быть одновременно истинными; 2) они не могут быть одновременно ложными; 3) если одно из них является истинными или ложным, то второе — неопределенным; 4) если одно из них является неопределенным, то второе может принимать любое из допустимых истинностных значений»*[8].

Если высказывание *A* или его отрицание определены как истинные или ложные, то высказывание *B* неопределено и наоборот.

Как известно, Г. Рейхенбах, наряду с М. Штраусом и П. Феврие, был основоположником семантического подхода в логике квантовой механики, суть которого заключалась в логической экспликации дополнительности, *«предполагающей переход от дополнительности как отношения между одновременно ненаблюдаемыми в квантовой механике величинами к дополни-*

тельности как отношению между высказываниями о значении этих величин, то есть как к отношению между экспериментальными высказываниями квантовой механики»[9].

Аналогичный переход вполне возможен и при рассмотрении методологии интерсубъективной сборки понятия фрактала.

Введение в предмет рассмотрения фрактальных размерностей или характеристик, связанных с гладкими моделями, зависит от наблюдателя. Поэтому говорить об «объективности» измерения как о возможности точного разделения субъекта и объекта измерения, в смысле их независимости, принципиально невозможно: «фрактальная» или «линейная» установка наблюдателя неизбежно оказывает влияние на результат измерения.

Данный пример может служить иллюстрацией того, как разные способы задания размерностей могут конституировать разные понятия. В «побережье-как-линии» наблюдатель метафизически (доопытно, до осуществления операциональной геометрической практики) уже предположил линеарность предмета измерения, введя этим предположением целую размерность предмета измерения. Из-за этого предположения конституируется понятие длины, лишающее понятие фрактала смысла, и соответственно, обессмысливающее употребление этого понятия в данном «линейном» контексте. В этом контексте фрактал и фрактальная размерность *ненаблюдаемы.* Наблюдатель, в силу настроенности своих механизмов интерпретации на линейные схемы объяснения, их просто не видит.

И наоборот, линия ненаблюдаема (вместе с понятием длины) при настройке механизмов «схватывания» — отождествления фрактала (естественно, что в определенном диапазоне масштабов).

Надо заметить методологическое отличие от введения различения предметов измерения на одном природном феномене типа длина-размерность от различения предметов измерения типа длина-площадь, или длина-цвет.

Отличие состоит в специальном выстраивании соответствия теорий, задающих понятия длины и понятие размерности.

Мандельброт специально искал такое определение размерости (по Хаусдорфу и Безиковичу), которое в общем случае было бы характеристикой фрактального множества, а частном случае совпадало бы с обычной топологической размерностью.

Теория измерения фрактала включает в себя в качестве частного случая и измерение размерностей гладких тел.

Соответствие теорий в данном случае является условием появления дополнительности высказываний *A* и *B*. Если вместо них взять высказывания о результатах измерения длины и цвета или длины и площади, то никакой дополнительности не будет.

Подчеркнем еще один важный момент, связанный с невозможностью одновременного измерения линейных и фрактальных характеристик. На наш пример можно возразить следующим образом: диапазон изменения масштабов, на котором фрактальная размерность является инвариантом у береговой линии, в отличие например, от фигур Коха и других геометрических фракталов, не бесконечен — всегда можно указать верхнюю и нижнюю границу масштабного преобразования. На этих границах нет никакого фрактала: есть только линия, и побережье «на самом деле» — линия.

Определенностям понятий линии и фрактала соответствуют разные способы задания масштаба измерения. Вводя один единственный масштаб (пусть и самый маленький), мы тут же предустановили линейность измерения и лишили понятие фрактала смысла. Исходя из этого линейность и фрактальность побережья несоизмеримы с точки зрения того, чем побережье является «на самом деле».

Осмысленность понятия вводится интерсубъективно на основании теоретических установок, относящихся к введению масштаба предмета измерения и «неявным знанием наблюдателя» — его установками на масштабную локализацию «первичной субстанции».

У понятий побережье-фрактал и побережье-линия установки разные из-за разных предположений о вводе масштабного преобразования, которые диктуют различные виды операциональной деятельности.

Этот подход снимает проблему «реальности» или «эмпиричности» фрактала. Реальность, исследуемая наукой, интерсубъективна и коммуникативна, завися от наших о ней предположений, она способна самодостраиваться и устанавливать на этой базе практики измерения.

Любое измерение всегда связано с интерсубъективной коммуникацией. Поэтому фрактал, линия представимы как результаты интерсубъективной интерпретации, шаги понимания сложности мира.

В этом смысле измерение есть процесс коммуникации наблюдателя с миром. Миром, имеющим достаточно прихотливую структуру — изменчивую, нежесткую, но единую, не распадающуюся на части.

Револьт Пименов[10] в одной из своей статей сравнивал переход от гладких геометрических концепций к фрактальным с переходом группы туристов от хорошо возделанной лужайки к темному и мало предсказуемому лесу. Образ достаточно точный, если учесть, сколькими (казавшимися незыблемыми) понятиями приходится при этом пожертвовать.

Но будем, оптимистами, надеясь, по примеру блаженного Августина, на то, что «фрактальная» наука это не только слом старых представлений, но и рождение новых представлений неизбежно сложного и красивого мира.

Примечания

[1] *Лейбниц Г. Б.* Собр. соч.: В 4 т. М., 1982. Т. 1. С. 414.

[2] *Зельдович Я. Б, Соколов Д. Д.* Фракталии, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физических наук. 1985. Т. 146, июнь. Вып. 3.

[3] *Данилов Ю. А., Кадомцев Б. Б.* Что такое синергетика? // Нелинейные волны. Самоорганизация. М., 1983.

[4] *Аршинов В. И.* Синергетическое познание в методологическом контексте постнеклассической науки // Информация и самоорганизация: Сборник статей. М., 1996.

[5] Понятие наблюдателя, его отличия от понятий субъектно-объектных схем познания интересно исследовано У. Матураной в его известной статье «Биология познания» (*Матурана У.* Биология познания // Язык и интеллект. М., 1995. С. 95).

[6] *Полани М.* Личностное знание. М., 1985. С. 43

[7] *Меськов В. С.* Очерки по логике квантовой механики. М., 1986. С. 34

[8] Данные утверждения легко записываются в «трехзначной» логике Рейхенбаха:

$$A\vee{\sim}A\rightarrow{\sim}{\sim}B\Leftrightarrow B\vee{\sim}B\rightarrow{\sim}{\sim}A,$$

где: $\vee$ — обычная дизъюнкция,

$\rightarrow$ — альтернативная (по Рейхенбаху) импликация,

$\sim$ — «циклическое» (по Рейхенбаху) отрицание

Значения операций логики Рейхенбаха приведены в кн.: *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник. М., 1975. С. 515

[9] *Меськов В. С.* Квантовая логика: основополагающий идеи и направления современных исследований // Современные исследования по квантовой логике. М., 1989. С. 11

[10] *Пименов Р. И.* Дифференциальные уравнения — насколько они оправданы? Документ ИНТЕРНЕТ: http://www.iph.ras.ru/~mifs/work.htm

КОММЕНТАРИЙ

В. Э. Войцехович

Сегодня возникает целое направление науки, связанное с теорией хаоса, с фракталами и фрактальной геометрией (как разделами синергетики).

Каковы свойства фракталов и важнейшие вопросы этой области? Это самоподобие фрактала, специфика математической формы его выражения, неуловимость дефиниции фракталов, трудности их измерения, отождествления и различения, следовательно, классификации фракталов, их значения для разработки новой научной парадигмы.

Автор говорит о жестком и нежестком самоподобии и это единственное, что напоминает классификацию фракталов, а между тем для математических фракталов она уже проведена, например, А. Дуади (см. Множества Жюлиа и множества Мандельброта // *Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. М., 1993. С. 141—153). Рассмотрим уравнение $Z_{n+1}=Z_n^2+C$ (где Z_n — комплексная переменная, C — комплексная постоянная). Если фиксируется C, а изменяется Z_0, то получается множество Жюлиа, а если фиксируется $Z_0=0$ и изменяется параметр C, то возникает множество Мандельброта. Множества Жюлиа делятся на связные и канторовы («облака»). Возможно дальнейшее подразделение и этих множеств.

Складывается впечатление, что в теории фракталов и в синергетике в целом, судя по работам С. П. Курдюмова и коллег, мы нащупали наиболее общие математические формы живых организмов как сверхсложных самоподобных развивающихся систем (монад), а реальные, воплощенные в веществе живые организмы (от вирусов до человека и биосферы) есть лишь весьма частный атомарно-молекулярный случай этих математических форм. Невольно вспоминаются мир вещей и мир идей Платона, их приложение к биологии Любищевым, расхожая фраза физиков-теоретиков «в математике все есть», теория возможных миров Лейбница, «непостижимая эффективность математики» Вигнера и тому подобные захватывающие дух образы.

Трудно согласиться с утверждением автора, что нельзя сравнивать фракталы. Можно. И не только на основе субъективно-эстетического чувства, но и объективно-рационалистически. Возможны не только классификации, подобные сделанным Дуади, но и более общий подход — на основе логики нечетких предикатов. Тогда возможно отождествление и различение, приближающееся к эстетически-интуитивным критериям.

Требует уточнения метафора «фрактал самодостаточен». Так ли это? Ведь он нуждается в субстанции и фоне (пространстве), на котором разворачивается: для карты побережья нужна бумага, для математического фрактала — комплексная плоскость.

Нуждается в ряде замечаний и раздел о монадной природе фрактала. Поскольку сам Лейбниц называл монаду духовным атомом, то некорректно говорить о телесно-атомистской или телесно-монадной парадигмах. Телесность и монадность находятся на противоположных концах мировоззрения (таких как материя и дух). Лучше просто говорить о монадной природе фрактала.

Не всегда корректно резкое противопоставление евклидовой и лейбницевой монадной парадигм. Например, если назвать монадой математический фрактал $Z_{n+1}=Z_0^2+C$, то при $Z_0=0$, $C=0$ получаем точку. Это всего лишь напоминание известного афоризма «в точке все есть» (можно продолжить метафорический ряд: и «в пустом множестве» (в теории множеств), «в Великой пустоте»(у даосистов и буддистов), «в вакууме» (в теории элементарных частиц) и т.п.). Резкие противопоставления не проходят в синергетике. Время двузначной логики прошло.

Далее автор утверждает, что «монада должна иметь внутреннюю структуру». Неужели Лейбниц не прав? Можно спросить: имеет ли точка структуру? А пустое множество, вакуум, Великая пустота? По-видимому, есть нечто в монаде, что обеспечивает ее способность к восприятию и духовной эволюции (стремлению к совершенствованию), но это нечто — не структура, а набор *потенциальных* структур (но не актуальная структура), поскольку монада — микрокосм.

Труднейшей проблемой фракталов является измерение. Автор правильно предполагает интерсубъективность введения понятия фрактала в научном исследовании. Но ведь это относится ко всем научным понятиям.

Вызывает внутренний протест суждение о «лженауке» как маргиналии научного дискурса. Приставку «лже» корректнее было бы заменить на «пара», иначе мы скатываемся к вненаучной оценке науки в идеологическом духе.

О маргиналах, столь любимых социологами науки. Гений, например, всегда маргинален, поскольку далеко отрывается от среднего уровня. В своем времени он одинок. Общается же со столь же великими через тысячелетия. Достаточно вспомнить великих маргиналов (своего времени) — Леонардо да Винчи, живших в провинцииЛобачевского и Бойаи, одиночку Брауэра, создавшего интуиционизм, принятый в штыки большинством, и других маргиналов-оригиналов, не говоря уже о гениях искусства и религии («Великое рождается в пустыни» — сказано в Евангелии).

Если же мы спустимся на уровень средней науки, то и здесь в силу критичности и терпимости научной коммуникации в проблемном поле почти всегда существуют не одна, а несколько конкурирующих, либо дополняющих друг друга парадигм и соответствующих школ. Какая из них ведущая, захватившая внимание большинства, — дело случая, не всегда справедливого, как мы знаем из истории науки. Можно ли говорить о «научности» одного подхода и «лженаучности» и маргинальности конкурирующих подходов?

Сам термин «маргинальность» эффективен в материальной деятельности и мало применим в духовной в силу того, что определенную точку в физическом пространстве может занимать лишь одно *физическое* тело, но в понятийном пространстве (например, фазовом) может занимать *множество духовных* образований (идей, парадигм, образов...). Наука — материальная или духовная деятельность? Если ее считать материальной, то к ней применимы понятия агрессивности, нетерпимости, некритичности, торговли, рекламы, даже лжи и войны. Но наука ли это? Видимо, в своих низших проявлениях наука — это материальная деятельность, а в высших — духовная.

Поэтому в проблемном поле есть несколько школ, несколько парадигм, языков и центров коммуникации.

Автор спрашивает: почему географы не замечали, что побережье — фрактал? И отвечает: это следствие евклидовой исследовательской парадигмы. Это так, но можно добавить — это следствие также господства объективизма в естествознании, т.е. наивной веры в существование «настоящей» длины — объективной, независимой от ученого.

Далее автор скопом записывает *всех* математических монстров в будущие фракталы. Это неверно.

Монстры всегда во много раз разнообразнее, чем магистральное течение, поэтому из одних монстров вырастут фракталы, а из других — совершенно иные структуры.

Последнее замечание. Автор, на мой субъективный взгляд, недооценивает революционность фракталов для науки в целом и математики в частности. Ведь здесь переплелись труднейшие проблемы познания в целом — измерение и логика, зависимость от человека и независимость от него, сложность и бесструктурность (монад), странная, автоматическая красота и т.п., — а это явные признаки приближающегося принципиального пересмотра старых взглядов не только на порядок и хаос, но на реальность, на человека и познание.

Раздел четвертый

ПРОГНОЗ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТИЛЕЙ

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ МАТЕМАТИКИ XX ВЕКА

Тихомиров В. М.

На рубежах веков

Небезынтересно сравнить наши ощущения — людей, стоящих на пороге двадцать первого века, — и тех, кто пересекал незримую черту веков сто лет назад.

И сейчас еще в Москве нетрудно найти дома, в которых их жители праздновали наступление нового двадцатого века. Многим доводилось расспрашивать своих близких о том времени и о чувствах и мыслях, которые в ту пору владели ими. В домах тогда не было электрического освещения («свеча горела на столе»), холодильников, радио, магнитофонов, дома отапливались печами, улицы освещались газовыми фонарями, а единственной тягловой силой была лошадь. Но те, кто поднимал свой бокал в честь наступления нового столетия, мог смотреть на будущее с надеждой.

Можно было верить в то, что где-то впереди наступит эра Благоденствия, Разума и Просвещенности. Тридцать лет как не было больших войн, и, казалось, наступил вечный мир. А сколь приметны были следы научного и технического прогресса! Железные дороги покрыли Европу и Америку густой сетью, шикарные пароходы бороздили океаны, в некоторых домах были телефоны. Было уже изобретено радио. Процветали физика, химия, биология, гуманитарные науки. И математика. Был жив Лев Толстой.

Конечно, было много признаков социального неустройства, но верилось, что наступает эра свободы, равенства и братства. (Чеховские герои не сомневались в том, что «через двести, триста лет жизнь на земле будет невообразимо прекрасной, изумительной», а многие верили в то, что это произойдет гораздо раньше, при их жизни.)

Тогда невозможно было даже вообразить, что по истечении полувека (срока ничтожного в масштабе истории) возникнет угроза самому существованию всего человечества. И через пару лет, когда каждый будет с бокалом в руках загадывать, «что случится на моем веку» и веку детей и внуков, боюсь, что твердой уверенности в том, что будущая жизнь — это счастливая сказка, не имеющая конца, у него не будет.

Жизнь человечества в нашем веке изменилась радикально, произошли огромные социальные потрясения, мир стал свидетелем ни с чем не сопоставимых катаклизмов, преступлений, экологических и иных катастроф, с одной стороны, но с другой — невероятного взлета человеческой мысли, многих технических и научных достижений. Таков был наш век.

В произошедших изменениях — невиданных, никакими пророками не предсказанных, случившихся на глазах всего трех поколений — математика сыграла очень заметную роль. Она была разной: иногда она торжественно выступала в качестве царицы наук, принимая восторги и восхищения своих почитателей, но ей доводилось (к примеру, в тяжкие годы «горячей» и «холодной» войны) работать и служанкой у властей предержащих, участвуя в создании орудий уничтожения людей.

О некоторых общих изменениях

Но прежде чем начать говорить о достижениях математики в нашем столетии, надо сказать хоть несколько слов о том, что изменилось в самом характере нашей науки.

Во-первых, изменился «масштаб». Точные цифры должны знать историки науки, а я вынужден ограничиться некоторыми прикидками. Мне кажется, что число математиков увеличилось за век по крайней мере на два порядка. Если к началу века в мире было вряд ли больше тысячи активно работающих математиков, то сейчас их, наверное, не меньше ста тысяч. Если на Первом математическом конгрессе присутствовало около двухсот его участников, то на последних конгрессах принимают участие три—пять тысяч человек. И при этом надо сказать, что сами границы математики весьма расширились и, скажем, вероятностное общество Бернулли собирает на своих конгрессах также многотысячные собрания.

Или, вот еще одно фундаментальное изменение. В первой половине века математика развивалась в основном в национальных рамках. Национальные школы зародились в конце XVIII века, и XIX век прошел под знаком творческого соперничества двух крупнейших математических школ — немецкой и французской (об этом весьма выразительно, хотя и пристрастно, написано в книге Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии»). Кроме них со времен Ньютона существовала выдающаяся английская «физико-математическая школа». В прошлом веке сформировались многие другие математические школы — в Италии, Швеции и других странах. В России в середине прошлого столетия образовалась замечательная Петербургская математическая школа. С распадом империй возникли школы в Венгрии и Польше. Появились крупные научные центры в США, зачатки школ в Индии, Японии, Китае. В тридцатые годы советская математическая школа стала вне всякого сомнения крупнейшей во всем мире.

А сейчас положение изменилось, и математика стала приобретать характер интернациональной науки. Начала осуществляться мысль Гильберта о том, что математика не знает рас, и для математика весь культурный мир представляет собой единую страну. Ныне возможно беседовать в реальном времени, слыша голос и видя выражение глаз своего коллеги, живущего на другом континенте. Можно встретиться с заинтересованными коллегами на всевозможных конференциях, симпозиумах, школах, конгрессах, которым несть числа. И если в первой половине века не было лишено смысла выражение «математическая Мекка», куда направлялись толпы паломников (таковыми были в разные времена и Геттинген, и Москва, и Париж), то теперь такого понятия, пожалуй, не существует.

Ныне математический мир не имеет единой столицы, у него множество крупных научных центров в разных странах. И если раньше привычно было указывать национальную принадлежность того или иного математика, писались и имели содержательный смысл выражения «Коши — французский математик» или «Вейерштрасс — немецкий математик», то теперь: что следует сказать про Ю. Мозера, родившегося и учившегося в Германии, имеющего американское гражданство и постоянно живущего в Швейцарии, или про М. Громова, воспитанника ленинградской математической школы, ныне гражданина Франции и (неиностранного) члена ее Академии.

Третье, о чем надо сказать, — о расширении тематики исследований. Представление о том, какие направления преобладали в математике в начале XX века, дает список секций на историческом Парижском конгрессе 1900 года. Там были четыре основных секции: арифметики и алгебры, анализа, геометрии, механики и математической физики, и еще две: истории и библиографии, и преподавания и методологии.

Об изменениях, произошедших в математике в XX веке, свидетельствует перечень секций современных конгрессов: математическая логика и основания математики; алгебра; теория чисел; геометрия; топология; алгебраическая геометрия; комплексный анализ; группы Ли и теория представлений; вещественный и функциональный анализ; теория вероятностей и математическая статистика; дифференциальные уравнения с частными производными; обыкновенные дифференциальные уравнения; математическая физика; численные методы и теория вычислений; дискретная математика и комбинаторика; математические аспекты информатики; приложения математики к нефизическим наукам; история математики; преподавание математики.

Многие из названных направлений родились или оформились в XX столетии. И при этом произошла довольно резкая смена приоритетов. Если до Второй мировой войны основным и главенствующим напревлением в математике был анализ (с различными своими ответвлениями такими, как обыкновенные уравнения, уравнения с частными производными, теория вероятностей, теория функций комплексного переменного и др.), то после войны вкусы многих математиков, формировавших в ту пору общественное мнение, стали смещаться в сторону топологии, алгебры, алгебраической геометрии, теории групп Ли, теории представлений, многомерного комплексного анализа.

Наша наука в течение четверти века (с 1930 по примерно 1955 гг.) была в значительной мере отделена от математики остального мира железным занавесом, и у нас не сразу были осознаны те сдвиги, которые произошли в сознании многих математических лидеров за эти годы. Вот один из примеров. В 1958 году А. Н. Колмогоров впервые (после 1930 года) выехал в длительную заграничную командировку в Париж. Он повез туда свои крупнейшие достижения, полученные в предшествующий период — в классической механике, теории информации, суперпозиции функций, теории приближений, теории вероятностей. Математики старшего поколения, как например, Лере, Поль Леви, Данжуа и Анри Картан, вполне восприняли эти выдающиеся результаты (что нашло отражение в их докладах при обсуждении кандидатуры Колмогорова для избрания в качестве иностранного члена Французской академии наук). Но новое поколение (Гротендик, Серр, Том и другие) были заняты в ту пору совсем другой математикой, и посетив первую лекцию, дальше перестали ходить.

И понадобились большие усилия, чтобы, к примеру, Запад освоил идеи Колмогорова в классической механике (это произошло благодаря западным контактам В. И. Арнольда в шестидесятые годы и работам Ю. Мозера; теперь каждый знает аббревиатуру «КАМ-теория»). И «Восток» , т. е. наша математика, смог выйти на уровень западных достижений, например в топологии, благодаря героическим усилиям С. П. Новикова и некоторых его товарищей (А. С. Шварца, Д. Б. Фукса и др.).

Для того чтобы охарактеризовать «изменение приоритетов», достаточно посмотреть на список филдсовских медалистов: из всех медалей, присужденных в послевоенный период лишь три (Л. Шварца, Хермандера и Феффермана) были присуждены за достижения в области анализа, а девять за топологические исследования (но список их действительно блистателен: Серр, Том, Милнор, Атья, Смейл, Новиков, Фридман, Дональдсон и Терстон).

И (хочу повториться) математика становится все больше и больше «федеративной наукой», где достаточно независимо существуют такие «федерации», как теория вероятностей, дискретная математики, информатика и т.п.

И еще разумно (прежде, чем переходить к собственно достижениям в нашей науке) сказать несколько слов

О стимулах к математическому творчеству

В прошлом веке как-то состоялся диалог между двумя знаменитыми учеными — французским математиком Жаном Фурье и немецким математиком Карлом Якоби. В ответ на высказывание Фурье о том, что цель математики содействовать объяснению Природы, Якоби отвечал, что мыслителям, подобным Фурье, следовало бы знать, что цель математики — прославление человеческого Разума. (Вдохновенным сторонником концепции Фурье является один из крупнейших математиков современности — Владимир Игоревич Арнольд. В статье в «Успехах математических наук» он написал: «Математика — часть физики.» Но можно было бы привести и многие свидетельства математиков другого умонастроения — сторонников концепции Якоби.)

Наш век прославился в обоих направлениях. Мы увидим, как изменились и сам Мир, и представление о нем в течение нашего столетия, и как много внесла здесь математика. Однако и стремление «прославить человеческий разум», не привязываясь к какой-либо практической цели, стимулировало усилия многих и многих ученых, нередко уводя их в такие дебри, которые имели мало соприкосновений хоть с какой-либо реальностью.

(Не следует при этом торопиться осуждать или осмеивать таких математиков. Среди разных своих достоинств математика, несомненно, обладает и еще одним: математика — это занятие. Когда человек, сидя с карандашом и бумагой, исследует свойства квазипсевдометрических пространств или развивает теорию неассоциативных алгебр (я фантазирую с названиями, возможно, именно этим никто и не занимается), он не совершает ничего дурного, постыдного или аморального. Он не способствует экологической катастрофе, никому не вредит, не перебегает никому дороги. А сам он получает удовлетворение (как это ни покажется многим странным), довольствуясь (в подавляющем большинстве своем) весьма и весьма скромным материальным обеспечением, предоставляемым ему государством.)

К этим двум стимулам следует присоединить и третий — прикладные аспекты математики, возможность использовать ее при решении различных инженерных и экономических задач. В нашем столетии математика участвовала во многих подобных деяниях века, и некоторые из них подвели человечество к грани всемирной катастрофы. (В частности, огромное число математиков приняли участие в развитии военно-промышленного комплекса. Прикладная математика обслуживала атомную и космическую программы, совершенствовала авиацию и флот противоборствующих мировых систем; огромные усилия были потрачены на создание совершенной системы шифровки и дешифровки и т. п.)

Отметим еще, что многих математика привлекает своей близостью к философии, ибо она является опорой философских воззрений и призвана исследовать сами границы познания.

Все это привело к созданию новых областей и разделов, получению выдающихся результатов, развитию новых теорий, разработке эффективных методов и выработке фундаментальных концепций.

В начале семидесятых годов состоялся интересный диалог между В. И. Арнольдом и Ж. Дьедонне. Арнольд спросил (я стараюсь передать смысл вопроса): «Почему «добурбакистская» математика была понятной и целесообразной, а современная математика стала малопонятной и малоосмысленной». Дьедонне в ответ сказал, что достигнутое в математике после 1939 года (когда начал печататься Никола Бурбаки) по меньшей мере сопоставимо с тем, что было сделано в математике со времен Фалеса (которого принято считать первым математиком в истории, он жил в VII веке до нашей эры) до 1939 года. Оставив за скобками дискуссию о вреде или пользе Бурбаки, и несколько ослабив полемический выпад Дьедонне, мне кажется убедительной мысль о том, что со времен Фалеса до 1900 года в математике было создано меньше — в любом смысле этого слова, — чем в одном только нашем двадцатом веке.

Это я и постараюсь мотивировать в дальнейшей части статьи, которая распадается, в соответствии с названными выше «стимулами» на следующие разделы: математика и Природа; «математика для математики» (как искусство для искусства, другими словами, математика — прославление человеческого разума); математика и ее приложения и, наконец, математика и философия.

Математика и Природа

Не раз высказывалась мысль о том, что математика и физика в течение этого века переживали то, что нередко случается среди супругов: нежную любовь и дружбу в первой трети века (итогом явилось, в частности, рождение теории относительности и квантовой механики), охлаждение и расставание — во второй, и в последней трети века — снова бурный и плодотворный роман.

В конце прошлого века у многих сложилось убеждение, что наука близка к полному объяснению всего — природных явлений, биологических процессов, социальных законов, но двадцатый век не дал утвердиться этому легкомыслию.

Из уст в уста повторяется легенда о юноше, обратившемся к мэтру с просьбой о напутствии — он хотел стать физиком. Мэтр сказал, что не советует: на почти безоблачном небе открытых истин — лишь два небольших облачка — опыт Майкельсона и законы излучения. Скоро они рассеются, и в физике нечего будет делать.

Через несколько лет из первого облачка родилась специальная теория относительности, а из второго — квантовая механика, которые перевернули все наше представления о Мире.

Специальная теория относительности, была создана в 1905—06 гг. усилиями Лоренца, Эйнштейна и Пуанкаре. Устройство физического мира, описываемого этой теорией было очень непривычно, оно противоречило физической интуиции выработанной на протяжении всех предшествующих времен. Чего стоит, например, парадокс близнецов, один из которых живет на Земле, а другой отправляется в космическое путешествие на сверхскоростной ракете. Возвратившись почти не изменившимся, почти таким же юным, как в момент старта, он застает своего брата глубоким стариком: время на Земле и в космической ракете протекало по-разному.

Математические корни специальной теории относительности были вскрыты выдающимся немецким математиком Германом Минковским. Им была объяснена связь специальной теории относительности с геометрией Лобачевского. (Её можно выразить одной фразой: пространство скоростей в специальной теории относительности есть пространство Лобачевского, где формула сложения скоростей определяется с помощью движения этого пространства.)

Это было вдохновляющим событием для математиков: теория, казавшаяся абсурдной заумью, вдруг легла в основание механики Мироздания. Так счастливо завершилась драма, в которой великий Гаусс остановил перо, боясь быть непонятым, Бойаи сошел с ума, а наш гений — Н. И. Лобачевский — умер осмеянным и непонятым.

А через десять лет Эйнштейн создает общую теорию относительности, где рушит представление о «плоском» мире. Геометрия Мира оказывается искривленной, а его кривизна связана с тяготением. Эйнштейн пользовался для построения теории новейшими исследованиями геометров итальянской школы.

Это повлекло за собой интенсивнейшее развитие геометрии и топологии в двадцатые и тридцатые годы.

В двадцатые годы человечество ожидал еще один шок — рождение квантовой механики. Рушился один из незыблемейших бастионов научного миросознания прошлого — предсказуемость будущего по прошлому. Основной тезис постньютоновской научной философии состоял в том, что мир управляется дифференциальными уравнениями, иначе говоря, он полностью предсказуем.

И вдруг выяснилось, что микромир принципиально непредсказуем! Что можно предсказать только вероятность появления электрона в данной области на экране за отверстием, через которое этот электрон пропускается. Это казалось невероятным даже для такого величайшего ученого, как Эйнштейн. « Я не верю в Бога, играющего в кости», — не уставал повторять он.

И снова усилия физиков — Планка, Эйнштейна, Бора, Гейзенберга и Шредингера — были завершены созданием красивейшей математической теории (среди основных её создателей — Джон фон Нейман).

Можно назвать и другие области физики, которые были оплодотворены глубокой математической теорией. Такова, например, теория броуновского движения, начатая на физическом уровне Эйнштейном, продолженная Смолуховским и завершенная, как яркая математическая теория, Винером и Колмогоровым.

Затем, как было сказано, наступил период взаимного охлаждения. Физики пробовали двигаться дальше, но математики их плохо понимали. Их интересы в подавляющем большинстве были сосредоточены на приложениях и внутренних проблемах нашей науки. Но с шестидесятых годов началось сближение интересов физиков и математиков. Ограничусь здесь замечательной цитатой В. И. Арнольда: «Взаимопроникновение идей и методов физики и математики на сегодняшний день принесло больше пользы математике, чем физике. Оно привело к огромному и быстро растущему числу замечательных теорем и гипотез, строгие доказательства которых — вызов математикам следующих поколений». У нас еще будет возможность подтвердить это высказывание конкретными примерами.

Математика для математики

Два крупнейших ученых оказали основное влияние на развитие математики в этом столетии — Пуанкаре и Гильберт. И если для Пуанкаре основным стимулом было объяснение законов природы, то Гильберт (как и любой универсальный гений, он внес свой вклад и в физику) был одним из тех, кто старался постичь архитектуру самой математики, и этому придавал большое значение.

В первой половине нашего века возникла концепция аксиоматического построения всей математики, в развитии которой особую роль сыграл сам

Гильберт. Согласно этой концепции, — по словам А. Н. Колмогорова, — «в основе всей математики лежит чистая теория множеств» — духовное детище Георга Кантора. Эта теория оставила глубокий след в истории математики. Многим казалось, что Кантору суждено было найти такое место для математики, которое Гильберт назвал «раем». (Когда обнаружились противоречия в теории множеств и многие стали выражать сомнения в ее основаниях, Гильберт воскликнул: «Никому не дано изгнать нас из канторовского рая».)

(Огромное число исследований по аксиоматическому методу никак не были связаны ни с физикой, ни с какими бы то ни было приложениями. Они как бы «прославляли человеческий разум». Среди учителей моего поколения ярким представителем математики, базирующейся на аксиоматическом методе, был Павел Сергеевич Александров. Он много раз говорил и писал о том, что произведения Кантора произвели на него неизгладимое впечатление и предопределили его судьбу — он стал математиком благодаря им. Таких же вдохновенных приверженцев аксиоматического метода можно привести множество.)

Чего же достигла математика, развивая этот аксиоматический метод?

Оформилась идея построения всей математики, как единого целого. Согласно Н. Бурбаки, математика — это теория структур. При этом фундамент математического здания составляют теория множеств и математическая логика. Первый этаж образуют множества с какими-то простейшими свойствами. Сюда относятся алгебра, где изучаются множества с операциями на них (группы, кольца, модули, поля, линейные пространства и т.п.), общая топология и теория меры (где имеются множества с выделенными системами подмножеств), упорядоченные множества и т.п. На более высоких этажах алгебраические объекты соединяются с топологией (и появляются, скажем, непрерывные группы), возникают числа, линейные топологические пространства, многообразия, группы Ли и т. д.

По изначальному замыслу Н. Бурбаки так может быть возведено всё здание Математики. (Но на самом деле вышел очередной вариант Вавилонской Башни — замысел оказался неосуществленным и вряд ли осуществимым.) Но в итоге усилий целого поколения математиков многое вошло в плоть и кровь нашей науки. В частности, произошла алгебраизация математики, и ныне нельзя даже очертить границы приложимости, скажем, понятия группы в анализе, теории дифференциальных уравнений, геометрии, топологии и других математических дисциплинах.

Была аксиоматизирована элементарная геометрия (Гильберт) и теория вероятностей (Колмогоров). Стали развиваться и многие другие аксиоматические теории.

Одним из важнейших событий развития математики, происходивших в период от начала века до Первой мировой войны, было рождение функци-

15 Зак. 3711

онального анализа, в котором воссоединились многие концепции классического анализа, линейной алгебры и геометрии. В некотором отношении это тоже аксиоматическая теория, но она оказала огромное воздействие и на физику и на прикладную математику.

Далее. В нашем веке родились два раздела математики, которые первоначально были едины и назывались словом «топология». Для их различения употребляли свои определения при слове «топология». Одну топологию, родоначальником которой был Пуанкаре, называли долгое время комбинаторной, за другой (у истоков ее были исследования Кантора и которую всю последнюю часть своей жизни развивал П. С. Александров вместе со своими учениками) закрепилось название общей или теоретико-множественной.

Общая топология примыкает к теории множеств и лежит в основании математики. Это аксиоматическая теория, призванная исследовать такие понятия, как «предел», «сходимость», «непрерывность» и т.п. Основы общей топологии в нашем веке были заложены немецким математиком Хаусдорфом, польским математиком Куратовским, П. С. Александровым и другими.

Комбинаторная топология — это раздел геометрии. Она изучает свойства геометрических фигур, остающихся неизменными при взаимно однозначных и непрерывных отображениях. Кантор построил взаимно однозначное отображение отрезка на квадрат. Но взаимно однозначного и непрерывного отображения отрезка на квадрат построить невозможно. Это доказывается в теории размерности — разделе топологии, который появился на свет во втором десятилетии нашего века. В его создании принимали участие Пуанкаре (поставивший задачу и наметивший путь ее решения), крупнейший голландский математик нашего века Брауэр, великий французский математик — Лебег, австрийский математик Менгер и выдающийся представитель Московской школы (трагически погибший в возрасте 26 лет) Урысон.

Ныне слово «комбинаторная» при определении «геометрической» топологии оказалось отброшенным: и когда произносят слово «топология» без дополнительного определения, имеется в виду топология, рожденная Пуанкаре.

Судьба двух топологий оказалась различной. Общая топология служит, в основном (еще раз вспомним Якоби), прославлению человеческого разума, не участвуя непосредственно в постижении законов природы или прикладных исследованиях. Долгое время и геометрическая топология воспринималась, как наука «далекая от жизни», призванная лишь прославлять человеческий разум, но в наше время выяснилось, что она имеет самое непосредственное отношение к объяснению устройства Мироздания. (В частности, упомянем две сенсационные работы последнего времени — Дональдсона и Фридмана, удостоенные филдсовских медалей, в которых феноменальные топологические результаты были получены на базе физических рассмотрений!)

Помимо этого, топологические методы ныне пронизывают фактически все разделы математики — анализ, теорию дифференциальных уравнений и т.п.

Одной из самых потрясающих математических работ двадцатого года явилась работа Милнора о семимерной сфере, где была решена «основная проблема комбинаторной топологии» о гладкости триангулируемого многообразия, и заодно послужившая началом для новой главы топологии — дифференциальной топологии.

Еще одна теория аксиоматического склада оказала огромное влияние на последующее развитие математики. Это — лебеговская теория меры.

Эту тему можно долго продолжать.

Мирные и военные приложения математики

Конец прошлого и начало нынешнего века были ознаменованы великими достижениями в физике и технике. Вспомним: в 1895 Рентген открывает лучи, названные его именем, а Попов изобретает радио. В следующем году А. Беккерель обнаружил естественную радиоактивность лучей урана. В 1903 г. поднимается над землей и парит в воздухе 59 секунд самолет братьев Райт, в 1906 г. рука Эйнштейна выводит формулу $E=mc^2$. Все это в корне изменило жизнь человечества. В каждом доме ныне — радио, телевизоры и многое другое; авиалинии соединили страны и континенты, затем взлетели ракеты, появились спутники и баллистические ракеты; вступили в жизнь атомные станции и были сброшены атомные и взорваны водородные бомбы.

Ничто из этого не могло обойтись без математики.

И огромное число математиков «по обе стороны баррикад» приняли участие в разнообразных программах по созданию новейших средств вооружения и ведения военных действий.

Лучи Рентгена и радиоактивность Беккереля постепенно подвели ученых к мысли о «раскрепощении» атомной энергии. Первоначально физики обходились без математиков. Но создание атомного, а тем более водородного оружия потребовало построения сложнейших математических моделей и больших расчетов. В создании бомбы в той или иной мере приняли участие многие выдающиеся математики. В итоге были переосмыслены принципы вычислительной математики и созданы мощнейшие вычислительные машины. По-видимому, не настало еще время (во всяком случае в нашей стране) для объективного анализа вклада математиков в создание атомного и ядерного оружия.

И братья Райт взлетели без математики, но в дальнейшем потребности развития авиации стали стимулом к рождению аэродинамики, которая в начале века создала теорию полета. Среди классиков этой науки «отец русской авиации» Николай Егорович Жуковский и его последователи (С. А. Чаплыгин, В. В. Голубев, и другие). Они применяли в теории полета (и при этом интенсивно развивали) теорию функций комплексного переменного.

Рождение радио также стимулировало развитие новых областей математики — теорию нелинейных колебаний. Среди ее создателей — наши выдающиеся ученые — Л. И. Мандельштам и его ученики и сотрудники — Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов и другие.

Управление артиллерийским огнем и проблемы бомбометания оказали влияние на развитие многих разделов теории вероятностей (фон Нейман, Н. Винер, А. Н. Колмогоров).

Проблемы шифровки секретных сообщений и эффективной передачи их по каналам связи привели к рождению нового раздела в математике — теории информации (К. Шеннон) и развитию теории кодирования.

Проблемы автоматического управления в промышленности стимулировали развитие оптимального управления (Л. С. Понтрягин, Р. Беллман). То же можно сказать и о многих других разделах прикладной и чистой математики.

Многое из свершенного под покровом тайны потом раскрывалось и становилось достоянием всего человечества.

Противостояние двух систем привело к невиданному развитию техники и (уже в наше время) к невероятному информационному взрыву, вызванному компьютеризацией. Создание первых компьютеров относится к концу того периода, который мы обозреваем, и роль математиков в их разработке весьма велика. (Американцы обычно подчеркивают выдающуюся роль фон Неймана в создании идеологии конструирования компьютеров и программирования.)

Здесь же разумно напомнить о линейном программировании. Многие считают, что именно линейное программирование стало наибольшим потребителем компьютерного времени для математических расчетов. Началось все с того, что к Леониду Витальевичу Канторовичу пришли за помощью инженеры из фанерного треста. Канторович изобрел линейное программирование, предполагая его применять для совершенствования советской экономики. Но не был понят у себя на родине. Линейное программирование было переоткрыто в Америке. Оно применялось для проблем военно-промышленного комплекса. А сейчас оно применяется почти универсально и для решения экономических проблем, и для управлением войсками, и для многого другого.

Математика, разумеется, участвовала и в гражданском строительстве, и в развитии инженерии, биологии, всего не назовешь. Среди выдающихся механиков и инженеров, внесших значительный вклад в развитие математики назовем имена И. Г. Бубнова, Б. Г. Галеркина, А. Н. Крылова, С. П. Тимошенко, Тейлора, Т. фон Кармана — этот список можно очень долго продолжать.

Математика и философия

Величие нашего века, в частности, можно усмотреть в том, что он нарушил, изменил преобразовал почти все представления человечества об окружающем нас Мире. И здесь математика играла выдающуюся роль.

Поколение, вступавшее в жизнь в начале века, как мы сказали уже в самом начале, взирало на Мир иными глазами, чем мы. Тогда, в частности, казалось, что наука близка к объяснению картины Мироздания. Рационалистически мыслящие люди могли быть уверены в том, что Мир познаваем; что Вселенная существует вечно; что она не имеет ни начала ни конца (ни во времени, ни в пространстве); что Земля образовалась естественным путем; что естественным путем возникла жизнь на Земле и естественное развитие привело ко всему тому, что открыто перед нашими глазами.

И все это было подвержено в нашем веке тягчайшим испытаниям.

Общая теория относительности Эйнштейна привела к развитию космологии, к теории «большого взрыва», существованию начальной точки отсчета жизни Вселенной. (Она существует — согласно современным воззрениям — не больше 10—14 миллиардов лет.) Пространство «заполненной» Вселенной оказалось ограниченным, хотя и расширяющимся. (В разработке этих концепций выдающуюся роль сыграли А. А. Фридман и Г. Гамов). Вопрос о «схлопывании Вселенной в точку» и тем самым «конце Света» остается открытым. (А в самое последнее время появились фантастические теории множественности областей Вселенной, отличающихся направлением времени и т.п. (А. Д. Сахаров).)

В большинстве теорий о происхождении нашей солнечной системы обнаружились глубокие изъяны. И математика здесь пока играет роль «отрицательницы» (пока нет полноценной математической модели происхождения солнечной системы). Еще более таинственным представляется происхождение Земли, Жизни, их эволюция, происхождение Человека, но от математики пока здесь мало толку.

Были подвергнуты сомнению и многие основополагающие философские концепции.

Основной тезис постньютоновской научной философии состоял в том, что Мир полностью предсказуем. Послушайте Лапласа: «Ум, — писал он, — которому были бы известны для каждого данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, — он обнял бы в одной формуле движения величайших тел вселенной наряду с движениями легчайших атомов; не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно и будущее, так же, как и прошедшее, предстало бы перед его взором». Сейчас мы думаем совершенно по-другому.

Во времена Лапласа огромный мир Природы являл собой Царство Порядка, где все предсказуемо и предопределено. И только на ничтожном клочке этого упорядоченного мира находилась «противоправная» область, где царил Хаос: он утверждал себя лишь в азартных играх, где все-таки не все можно было предсказать. Паскаль, Ферма, Я.Бернулли и сам Лаплас описали первые законы Случая.

Но область Хаоса все росла и росла. Наука о случайном — теория вероятностей — развивалась и крепла. В двадцатом веке (во многом благодаря усилиям Чебышева, Ляпунова, Маркова, Бернштейна и нашего великого соотечественника — А. Н. Колмогорова) она приобрела оформленнные очертания и стала занимать все большее и большее место в толковании Царства Природы. Еще полвека назад казалось, что Царство Хаоса и Царство Порядка соизмеримы по занимаемым ими территориям. И лишь в наше время и этот бастион рухнул.

Многие ученые ныне исповедуют воззрение прямо противоположное ньютоновско-лапласовскому, утверждая, что все есть Хаос. И они имеют много оснований для этого.

Была подвергнута сомнению идея «безграничных возможностей человека». Уже говорилось о новом направлении в математике, родившемся в сороковые годы — теории информации. Норберт Винер включил теорию информации в более общую научную дисциплину, которую он назвал словом «кибернетика». Рождение этой науки также связано с осмыслением многих философских концепций, и прежде всего с понятием сознания. Большинству людей казалось, что лишь человек наделен способностью мыслить. Но в сороковые годы Тьюрингом и Винером была декларирована идея моделирования человеческого сознания. Еще недавно мысль о том, что машина может выиграть у чемпиона мира по шахматам, многим казалась кощунственной. Но это ведь произошло! Обсуждение возможности создания искусственных существ, обладающих мышлением, также относится к новой философии, возникшей в наше время.

В начале века у многих (в частности, у Гильберта) была иллюзия возможности «разрешения всех проблем» (имеющая также большую философски-познавательную значимость, в частности, в связи с проблемой познаваемости). Казалось осуществимым записать аксиоматическую теорию в виде текста, прочитываемого машиной и затем придумать алгоритм, с помощью которого машина сможет доказать любую теорему в рамках теории. Для элементарной геометрии это оказалось возможным, что доказал Тарский (правда, «построенный» автомат должен трудиться неслыханно долго, чуть ли не до конца Света, прежде чем не разберется в элементарной геометрии). Но по отношению к большинству теорий (в частности, арифметике) такой алгоритм построить невозможно. Этот великий результат был доказан Геделем в 1931 г.

Одна из старинных концепций классической философии — «переход количества в качество» — получила некоторую математическую мотивировку в «теории катастроф», заложенной французским математиком Р. Томом. (Если бы основы теории возникли у нас лет сорок назад, чего доброго ее назвали бы теорией революций).

Проблемы

Все в совокупности — и участие в постижении законов природы, и развитие абстрактной математики, и достижения в математике прикладной, и размышления о философских началах Мироздания — все это привело к зарождению новых областей и разделов, выдвижению фундаментальных концепций, получению выдающихся результатов, развитию новых теорий и разработке эффективных методов. О новых областях и разделах было уже сказано, затронем тему решения проблем.

«Невозможно отрицать глубокое значение, которое имеют определенные проблемы для продвижения математической науки вообще и важную роль, которую они играют в работе отдельного исследователя», — эти слова были сказаны Гильбертом во вступительной части его доклада, посвященного формулировкам математических проблем (на Втором математическом конгрессе).

Нашему веку досталось от прошлых времен несколько великих проблем.

Самая старая из них — проблема Ферма — о неразрешимости в натуральных числах диофантова уравнения $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$. Она была поставлена в XVII веке. Две знаменитые проблемы — Гольдбаха и Эйлера — в теории чисел пришли из XVIII века. Верно ли, что каждое нечетное число, большее 6, есть сумма трех простых? С этим вопросом в 1742 году обратился к Эйлеру Христиан Гольдбах. Эйлер в ответ заметил, что для ответа на поставленный вопрос достаточно доказать, что каждое четное число является суммой двух простых.

Из проблем XIX века наиболее известны проблема Римана о нулях дзета-функции и проблема континуума, поставленная Кантором.

В XX веке наиболее известен цикл проблем Гильберта, о котором мы упоминали. На первом месте в списке гильбертовских проблем стояла проблема континуума: существует ли такое несчетное множество, которое можно взаимно однозначно отобразить в единичный отрезок, но при этом единичный отрезок нельзя отобразить взаимно однозначно в это множество?

Проблема Ферма оказалась разрешенной в нашем веке Уайлсом. Проблема Гольдбаха оказалась «почти» решенной И. М. Виноградовым, доказавшим (1937), что любое достаточно большое нечетное число представимо суммой трех простых. Проблемы Эйлера и Римана стоят и по сей день (середина 1998 года).

Расскажем о решении нескольких проблем Гильберта. В значительной доле Гильберт оказался хорошим провидцем, но в нескольких случаях интуиция изменила ему. Как правило, это оказалось напрямую связанным с тем оптимистическим взглядом на мир, который был свойственен людям, родившимся в прошлом столетии.

Заостряя вновь внимание на проблеме континуума, Гильберт исходил из возможности ее разрешения в ту или иную сторону: да или нет. Но выяснилось, что она не может быть ни доказанной, ни опровергнутой методами математической логики и одной общепринятой аксиоматической теорией множеств. То, что она не может быть опровергнута, доказал Гедель (1936), обратную теорему доказал Коэн (1963).

Убежденность Гильберта в неограниченных возможностях человеческого разума, нашедшая свое выражение в его крылатом афоризме: «мы хотим знать, мы будем знать», придали ему «уверенность в том, что каждая определенная математическая проблема непременно должна иметь решение», и это побудило его поставить 10 проблему: «указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли данное уравнение в целых рациональных числах» (или иначе: доказать,что существует алгоритм, который по данному многочлену P от n переменных с целыми коэффициентами, распознавал бы, имеет ли уравнение $P=0$ решение в целых числах или нет). Решение этой проблемы также оказалось отрицательным (Матиясевич, 1970).

Гильберт был настолько уверен, что функции трех переменных устроены сложнее, чем функции двух переменных, что высказал гипотезу, что некоторая конкретная функция трех переменных не представима в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных (13 проблема). Гипотеза Гильберта оказалась опровергнутой весьма радикально: оказалось, что с помощью только одной и при том простейшей функции двух переменных сложения — $(x, y) \to x+y$ и непрерывных функций одной переменной можно восстановить любую функцию n переменных (Колмогоров, Арнольд, 1957).

Рождение топологии сопровождалось великими свершениями. Вот несколько примеров. Окружность делит плоскость на две части: нельзя удаленную от центра точку соединить с центром, и не пересечь окружность. Французский математик Жордан в XIX веке доказал, что гомеоморфный (т.е. непрерывный и взаимнооднозначный) образ окружности также делит плоскость на две части. Голландский математик Брауэр обобщил этот результат на случай гомеоморфного образа многомерной сферы. При этом он использовал и развил исходные идеи Пуанкаре. В частности, он доказал замечательный результат, называемый теоремой Брауэра о неподвижной точке, который в простейшем случае выглядит так: при непрерывном отображении плоского круга в себя есть неподвижная точка. Дальнейшее развитие топологии привело к замечательным обобщениям этих результатов в трудах американского ученого Александера, П. Александрова, Колмогорова, Понтрягина и других.

Несколько замечательных топологических проблем поставил Пуанкаре. Такова, например, проблема о трех замкнутых геодезических. Если взять гладкий камешек и попытаться надеть на него аптечную резиночку, то в случае удачи (если резиночка не соскочит), это будет означать, что вы нашли замкнутую геодезическую. Для любого гладкого овалоподобного тела обязательно найдутся три замкнутые геодезические — в этом состояла гипотеза Пуанкаре, а число три не может быть увеличено (в частности, для эллипсоида с разными осями оно в точности равно трем). Эта проблема была решена советскими математиками Люстерником и Шнирельманом. Великие проблемы топологии решили названные выше филдсовские лауреаты.

Приведем еще краткую хронологию достижений в математике за первую половину нашего века. (Разумеется, она неполна и отражает вкусы и узость обзора автора статьи. Но без этого рассказ о математике XX века не может быть полным. Для продолжения списка требуются слишком большие усилия с одной стороны, а с другой — не хочется касаться творчества ныне активно работающих математиков. В основном, в нашем кратком перечне мы привязываемся к тем темам, которые были затронуты выше.)

Начнем с тех новых разделов, которые фактически родились в начале столетия.

Функциональный анализ. Теория Фредгольма (1900); понятие линейного функционала и начала теории двойственности — Адамар (1903); начала бесконечномерной теории квадратичных форм — Гильберт (1904—12); теорема Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в пространстве C (1909); начала нелинейного бесконечномерного функционального анализа — Вольтерра, Фреше (начало десятых годов); основные теоремы линейного анализа — Хелли (1912); Хан, Банах — конец двадцатых годов; определение нормированных пространств — Винер, Банах — начало двадцатых годов; теория нормированных пространств — Банах (1932); определение линейных нормированных пространств — Колмогоров, фон Нейман — середина тридцатых годов; теорема Крейна-Мильмана (1940); теория обобщенных функций — Соболев (1937); теория нормированных колец — Гельфанд — конец тридцатых годов; теория распределений — Шварц (1948).

Топология. Зарождение комбинаторной топологии — Пуанкаре (1901); определение индуктивной размерности — Пуанкаре (1902); определение размерности через покрытия — Лебег (1910); понятие степени и теория размерности Брауэра (1910—11); топологическая инвариантность групп Бетти —

Александер (1915); теория размерности Урысона (1921—24); теория кос Артина (1925); хопфовские отображения сфер (1926); аппроксимация компактов полиэдрами («воссоединение» теоретико-множественной и комбинаторной топологии) — П.Александров (1929); теорема Люстерника-Шнирельмана о трех геодезических (1929); теория де Рама (1929); вложение *n*-мерных компактов в *2n+1*-мерное пространство — Небелинг-Менгер-Понтрягин — начало тридцатых годов; теория Морса (1934); двойственность Понтрягина (1934); начала когомологической теории — Александер-Колмогоров (1935); начала теории гомотопий — Гуревич — середина тридцатых годов; теория расслоенных пространств — Лере (1943); теория пересечений Уитни (1944); классы Понтрягина (1949).

Теория функций. Начала теории меры — Лебег (1902); начала дескриптивной теории функций — Бэр (1903); теорема Егорова (1911); основополагающая монография Хаусдорфа «Теория множеств» (1914); диссертация Лузина (1915); проблема континуума для борелевских множеств — Александров-Хаусдорф (1916); пример Меньшова (1916); начала теории суслинских множеств — Суслин (1917); пример Колмогорова тригонометрического ряда расходящегося почти всюду (1921); монография Лузина по проективным множествам (1929); теорема Меньшова-Радемахера об ортогональных рядах — середина тридцатых годов.

Теория вероятностей. Центральная предельная теорема — Ляпунов (1901); марковские цепи (1906); винеровский процесс (1921); начала современной статистики — Фишер — середина двадцатых годов; закон повторного логарифма — Хинчин; Колмогоров — конец двадцатых годов; усиленный закон больших чисел — Колмогоров (1930); теория марковских процессов — Колмогоров (1931); аксиоматика теории вероятностей — Колмогоров (1933); интерполяция, экстраполяция и фильтрация случайных процессов — Колмогоров, Винер — начало сороковых годов; стохастическое исчисление — Ито — сороковые годы.

Аксиоматический метод. Теоретико-множественная топология создавалась в первые десятилетия века. Понятие компактности зародилось в трудах Фреше (1904) и получило завершенную форму в мемуарах Александрова-Урысона двадцатых годах. В 1926 году Тихонов доказал свою теорему о компактности произведения пространств (высказывалось мнение, что в семидесятые годы это была самая цитируемая теорема). Аксиоматика теории множеств была построена в первое десятилетие века — Цермело (1908) и сразу же начались дискуссии о состоятельности ее оснований. Хаусдорф (1916) построил ряд примеров, совершенно противоречащих здравому смыслу. Начала интуиционизма относятся к 1907 году (Брауэр). Аксиоматические теории геометрий были завершены в первом десятилетии века (Гильберт, Вейль, Веблен и др.). Исключительного развития достигла алгебра (Нетер, Ван дер Варден и др.).

Логика. Основополагающий труд, подводящий итоги развития этой дисциплины — Principia Mathematica Рассела и Уайтхеда вышел в свет в 1910 году. Наиболее фундаментальный вклад в математическую логику в нашем веке внес Гедель своей теоремой о неполноте (1934), доказательством непротиворечивости континуум гипотезы (1940) и другими своими исследованиями. Колмогоров (1925) дал интерпретацию классической математики в интуиционистской. Основы теории алгоритмов и теории неразрешимости заложили Пост (1936), Черч (1936), Тьюринг, Марков и Новиков (тридцатые-сороковые годы).

Классический анализ. Из основных достижений назовем начала теории аппроксимации Паде (1902); развитие теории аппроксимации в трудах Валле-Пуссена, Бернштейна, Колмогорова — десятые-тридцатые годы; теория нормальных семейств Монтеля (1911); преобразование Радона (1917); теоремы Стоуна-Вейерштрасса — тридцатые годы; рождение теории вложения в трудах Соболева — середина тридцатых годов; теорема Сарда (1942); начала теории особенностей — Уитни.

Теория чисел. В 1742 году Христиан Гольдбах высказал в письме к Эйлеру гипотезу, что любое число $n \geqslant 6$ можно представить, как сумму трех простых. Эта проблема не решена в полной мере поныне. Первый сдвиг был сделан российским математиком Шнирельманом, который доказал, что любое число есть сумма конечного числа простых. Гипотеза Гольдбаха для достаточно больших чисел была доказана И. М. Виноградовым в 1937 г. Английский математик Варинг в 1770 году поставил проблему: верно ли, что любое положительное целое число представимо в виде суммы $n_1^k + n_2^k + \ldots + n_m^k$ для некоторого фиксированного m. Гипотезу Варинга доказал Гильберт в 1909 году. Завершенную форму она приобрела в трудах Виноградова (1934). Седьмую проблему Гильберта решил Гельфонд. (Из его результата, в частности, следует, что $2^{\sqrt{2}}$ — число трансцендентное.)

Геометрия. Из достижений дифференциальной геометрии отметим построение параллельного перенесения Леви-Чивита (1917) и завершение теории римановых многообразий в трудах Г. Вейля. Начала выпуклой геометрии (перенесенные Хелли, Банахом, Крейном, Мильманом и др. на бесконечномерные пространства) были заложены Минковским в начале века. Итоговый труд Боннезена и Фенхеля вышел в свет в 1934 году. Теория выпуклых поверхностей была построена А. Александровым в тридцатые-сороковые годы.

Уравнения с частными производными. Теория задачи Коши — Адамар (десятые годы); аналитичность решений эллиптических уравнений — Бернштейн (1904). В тридцатые годы наиболее фундаментальный вклад был привнесен Петровским (в общую теорию систем, теорию лакун гиперболических систем, теорию эллиптических систем и т.д.) и Соболевым (доказательство теорем существования через теорию вложения и теорию обобщенных функций). Отметим еще работу Колмогорова, Петровского, Пискунова (1937).

В тридцатые-сороковые годы началась переориентация интересов математической элиты от классического анализа к геометрии многообразий, теории групп Ли и их представлений, теории чисел, алгебраической геометрии, комплексному анализу. А затем снова возник интерес к физике. Но все это требует особого осмысления. А пока на этом поставим точку.

КОММЕНТАРИЙ

А. Г. Барабашев

На рубеже столетий — тем более тысячелетий — уместно оглянуться назад и оценить, что было сделано в математике, и каковы ее перспективы. В 1900 году Давид Гильберт построил прогноз основных направлений математики на последующее столетие. Это был прогноз, опирающийся на колоссальный авторитет Гильберта как ведущего математика, лидера Геттингенской физико-математической школы. За прогнозом Гильберта стояли оценки истории математики XIX столетия, и в первую очередь «Лекции о развитии математики в XIX столетии» Феликса Клейна. Возможны ли ныне, на более крупном переломе эпох, аналогичная оценка математики прошедшего столетия и эффективный прогноз (выдвижение неких центральных для математики XXI века, а может быть и всего III-го тысячелетия, проблем), наподобие прогноза Гильберта, его знаменитых 23-х проблем, во многом обусловивших вектор развития всей математики XX столетия?

В. М. Тихомиров, как мне представляется, склонен ответить на этот вопрос отрицательно.

Во-первых, он подчеркнуто дистанцируется от завершенности оценки математики XX столетия и дает серию зарисовок ее различных сюжетов, тем, направлений, не претендующих на систематичность. Его статья написана в жанре путевых заметок, а автор предстает в виде восхищенного рассказчика, свидетеля «разнообразных дел великих».

Во-вторых, он указывает, что стремительное развитие математики в XX столетии превосходит границы всяческого частного воображения и изобилует многочисленными непредсказуемыми поворотами. Здесь я могу только дополнить соображения В. М. Тихомирова о колоссальном росте математики как области знания и как социального института результатами расчетов, приведенных в моей книге «Будущее математики. Методологические аспекты прогнозирования» М., МГУ, 1991, глава 1 первой части книги. В конце 1970-х годов в математике работали 150—300 тысяч человек, которые в совокупности доказывали около 200 тысяч теорем в год. В Mathematical Subject Classification на 1979 год значилось 60 основных областей, 467 разделов и 2950 тем.

В-третьих, В. М. Тихомиров вообще не дает никаких элементов прогноза будущего математики (возможных тем-лидеров, центральных проблем, направления исследований, и т.д.). У меня сложилось впечатление, что он считает создание прогноза будущего математики в настоящее время — в отличие от рубежа XIX и XX столетий — в принципе невозможным.

Как мне представляется, эта позиция верна лишь отчасти. *«Внутриматематический» прогноз*, выступающий в виде описания в целом центральных проблем, тем, теорий и т.п. теоретической математики *ныне невозможен*, поскольку резко меняются культурные и познавательные условия существования современной математики. Теоретическая математика, будучи порождением этих культурных и познавательных условий, также вынуждена резко измениться. Соответственно, исходящие из этой математики «внутренние» прогнозы будут иметь только локальный (дисциплинарный) проектно-исследовательский характер. Тем не менее, остается возможным новый, пока еще не реализованный вид прогноза — *«внешний», философско-методологический прогноз*, опирающийся на культурологический анализ математики, выявляющий формальную структуру познавательной установки культуры, воссоздающий из этой формальной структуры основные математические структуры и основания грядущей теоретической математики. Тысячелетие заканчивается, и оценка математики, равно как и прогноз ее будущего, должны увеличить масштаб, взять математику как момент культуры, а не как растущий набор технических приемов, дисциплинарных и проблемных предпочтений.

ОТВЕТ АВТОРА

Я во многом не согласен с А. Г. Барабашевым. Его комментарий начинается с того, что на рубеже столетий «уместно оглянуться и оценить, что сделано в математике и каковы её перспективы». Кто спорит? Моя статья «О некоторых особенностях математики XX века» посвящена тому «что сделано», а о перспективах в ней нет речи. С моей точки зрения, не совсем верно, что проблемы Гильберта во многом обусловили «вектор» развития математики XX столетия. Я как раз старался показать, что математикой двигали не только «внутренние причины» (направленные на прославление — по Якоби — человеческого разума). У неё были и другие стимулы: Естествознание, Война, Философия (осмысление Мира, как единого целого)... (Большинство этих тем Гильбертом не затрагивается.) А ведь именно участие математики в объяснении природы и в разрешении технических проблем привело к тому, чему мы все свидетели (атомные электростанции и ядерные щиты, ракеты и спутники, сверхзвуковая авиация и вертолёты, пейджеры и компьютеры и т. п.).

Комментатор почему-то счёл, что я склонен ответить отрицательно на вопрос о возможности прогнозов. Это никак, по-моему, нельзя извлечь из моего текста и совершенно не соответствует моему мироощущению. Меня не пугает несметность числа математиков, теорем, областей и разделов. От Фалеса до начала XX века вряд ли было доказано больше миллиона теорем, того числа, что по справке, приведённой А. Г. Барабашевым, в наше время доказывают за 5 лет. А я в статье уравниваю содеянное с начала нашей науки до XX века и в нашем веке, полагая, что истинные достижения науки несопоставимо скромнее в сравнении с приведёнными гигантскими цифрами «теорем». И я старался обозреть математику, как единое целое (так что меня както удивило мнение, что я даю серию «не претендующих на систематичность» зарисовок).

Прогнозы, разумеется, возможны, и все делают их с удовольствием (правда, без заметного успеха). Этих прогнозов и будет великое множество. Проблемы в духе Гильберта будут поставлены крупнейшими современными авторитетами (такая идея была предложена В. И. Арнольдом). Конечно, масса прогнозов будет высказана о том, чего следует ожидать в будущем от естествознания, от совершенствования технических и информационных средств и о роли математики в этих будущих достижениях. Разумеется, возможно поразмышлять и о том, каковы пределы наших познавательных возможностей, нашего сознания... Все эти темы обозначены в моей статье, но размышления об их развитии в будущем оставлены за её пределами. Мой взор был обращён в прошлое, и мне хотелось обратить внимание на различные неповторимости нашего века в сравнении с его предшественниками. И главная «неповторимость» была объявлена с самого начала.

Во времена Гильберта не было сомнения в том, что человечество будет существовать вечно, а сейчас никто из серьезных экспертов не может поручиться, что человечеству суждено прожить ещё хотя бы сто лет. Разница в исходных позициях Гильберта перед началом нашего века и наша перед началом будущего — чудовищная.

Перед человечеством ныне стоит основная проблема — выживания. Человечество не выживет, не объединившись, не признав равного права на существование людей разных рас, национальностей, религиозных и иных убеждений и не признав неизбежности действовать сообща. И математика призвана, с моей точки зрения, прежде всего поспособствовать выработке глобальной всечеловеческой модели устойчивого развития. А если эту проблему удастся разрешить, то математики найдут, чем занять себя. И многие согласятся поразмышлять о том, чем ей следовало бы позаняться. Но я этой задачи в своей статье не ставил.

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ ПОСРЕДСТВОМ АНАЛИЗА ФОРМАЛЬНЫХ СТРУКТУР ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК*

Барабашев А. Г.

> Кто из нас не хотел бы приоткрыть завесу,
> за которой скрыто будущее, чтобы
> хоть одним взглядом проникнуть в предстоящие
> успехи нашей науки и тайны ее развития
> в грядущие столетия?
>
> Д. Гильберт

В настоящей статье будет рассмотрен вопрос, как *культура*[1] определяет *содержание*[2] и *направление развития*[3] *теоретической математики*[4]. Получит развитие и прогностическое наполнение идея О. Шпенглера о культурных корнях европейской математики.

Основные тезисы таковы:

1. Культуры можно разделить на те, которые способствуют развитию теоретической математики и определяют ее содержание, и на те, которые не способствуют развитию теоретической математики и мало влияют (не определяют) на ее содержание (что отнюдь не препятствует развитию математики в таких культурах как практически ориентированной области знания). Первые культуры назовем теоретико-**математически продуктивными**, а вторые — теоретико-**математически непродуктивными**.

2. Всякая культура обладает **познавательной установкой**. Познавательная установка представляет собой совокупность как эксплицированных, так и не эксплицированных принципов познания реальности, выработанных в культуре. Принципы познавательной установки выделяют область познаваемых феноменов, а также задают способы соотнесения одних познаваемых феноменов с другими.

3. Чтобы культура была теоретико-математически продуктивной, она должна обладать особой, **математически продуктивной познавательной установкой**: некоторые (но не все) познавательные установки могут содействовать созданию оригинальной теоретической математики (данной культуры).

4. Для того, чтобы познавательная установка была математически продуктивной, представимой в виде формальной структуры, она должна быть

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (код проекта: № 99–03–00078).

сравнительной познавательной установкой, т.е. познаваемые феномены должны разбиваться на непересекающиеся классы, и, кроме того, эти классы должны соотноситься напрямую, быть познавательно взаимозаменимыми.

5. Сравнительная познавательная установка, только такая установка, представима в виде набора формальных отношений — символьной кодировки допустимых познавательных операций, классов сравниваемых феноменов, а также связи этих феноменов и операций. Этот набор назовем **формальной структурой познавательной установки** (формальной структурой). Таким образом, математически продуктивная культура обладает «амбивалентной» познавательной установкой:

— своей стороной, обращенной к математике (формой познавательной установки) эта познавательная установка может быть представлена в виде формальной структуры;

— стороной, обращенной к культуре (содержанием познавательной установки), такая познавательная установка выглядят как набор сравнений, подразумевающих замещение одних феноменов другими.

5. Определяющее влияние математически продуктивной культуры на теоретическую математику концентрируется в **основаниях математики**. Это влияние транслируется через сравнительную познавательную установку культуры и через формальную структуру этой познавательной установки. Отсюда следует, что исследование сравнительной познавательной установки и ее формальной структуры одновременно является исследованием принципиальных черт теоретической математики данной культуры.

6. Формальная структура познавательной установки логически развертывается в основания математики в два приема: сначала она трансформируется в **прото-математические структуры**, а затем в **математические структуры**, частным случаем которых являются математические структуры (в смысле Н. Бурбаки). Общее направление этой трансформации — уточнение исходного формализма (формальной структуры познавательной установки), превращение его в полный и замкнутый.

7. Среди культур, породивших амбивалентные познавательные установки, находится культура классической античности. Формальная структура познавательной установки классической античности — это **формальная структура предмет-предметного сравнения**.

8. Формальная структура предметной познавательной установки (предмет-предметного сравнения) является первой в линейной последовательности усложняющихся формальных структур познавательных установок различных культур. Второй в этом ряду находится **формальная структура** познавательной установки **предмет-функционального сравнения**, задающая изменения наряду с предметами, вводящая функциональные зависимости. Такая познаватель-

ная установка окончательно сложилась в Новое время и существует до наших дней, а ее кульминация пришлась на первую половину XX века.

9. Современная культура порождает третью теоретико-математически продуктивную познавательную установку, в которой наряду с предметами и изменениями участвует и третий компонент — финальные состояния. Сходные траектории изменения предметов и свойств развертываются в один финально определенный кластер состояний. Эта «эквифинальная» познавательная установка обладает **формальной структурой предмет-функционально-финального сравнения**. Из данной познавательной установки и ее формальной структуры можно воссоздать основания будущей теоретической математики.

* * *

Как раскрыть связь теоретической математики с культурой? Является ли эта связь причинно-следственной, т.е. определяет ли культура содержание теоретической математики? — Я полагаю, что на этот вопрос следует ответить положительно, и что две известные разновидности теоретической математики — математика классической античности, и теоретическая математика, начавшаяся в эпоху Великой научной революции XVII века и существующая до нашего времени — обладают различными культурными причинами (корнями). Точнее, причины принятия именно таких, а не каких-либо иных *оснований и фундаментальных теорий математики* являются причинами культурного плана. Обоснование теоретической математики есть вложение этой математики в пропитывающую и окружающую математику культурную среду. Этот тезис противостоит кантианскому тезису об априорной природе математики и, следовательно, о ее культурной независимости.

I. Теоретико-математически продуктивные познавательные установки

Всякая культура включает в себя воззрения на реальность, человека и их взаимоотношение. Эти воззрения могут быть выражены в виде описаний процедур действия, непосредственных феноменологических описаний, в виде теорий, отличающихся разным уровнем абстрактности и шириной охвата рассматриваемых феноменов. В той части и степени, в которой эти описания и теории обращены на реальность, в них заложены принципы познания реальности — способы распознания (выделения) классов различных феноменов реальности и соотнесения этих классов. То, что распознается, и то, как это распознаваемое соотносится, зависит от свойственных данной культуре принципов познания реальности. Назовем принадлежащую культуре совокупность принципов познания реальности *познавательной установкой*. Познавательная установка состоит как из эксплицированных, так и не эксплицированных принципов. Познавательную установку можно полностью эксплицировать посредством познавательной рефлексии — размышлений об актах разграничения познающего субъекта и познаваемой реальности. Эти размышления обосновывают способы распознания феноменов реальности, или, иными словами, оправдывают принципы познания реальности.

Если познавательная установка явным образом разделяет познаваемые феномены на непересекающиеся классы и соотносит эти классы, то она может быть интерпретирована как прямое соотнесение. Обратное, вообще говоря, не верно: не всякая познавательная установка нацеливает на прямое соотнесение познаваемых феноменов. Здесь можно сослаться на слова дона Хуана, героя сочинений К. Кастанеды, утверждавшего, что поиск причин и соотнесение встают между человеком и миром[5].

Сравнение является наиболее радикальным вариантом прямого соотнесения. Применительно к познавательной установке нацеленность на сравнение означает, что в познании происходит сведение одного класса феноменов к другому классу. Например, элемент D описывается через (сводится к элементу) X, или представим как X через операцию (последовательность операций) $*$, через метод M, и т. д. Отсюда, одни феномены, их представления и образы оказываются как бы равными, эквивалентными, симметричными другим феноменам, их представлениям и образам, могут быть заменены ими. Предполагается, что эта замена не препятствует применимости процедур познания, не вредит внутренней согласованности этих процедур. Далее будет показано, что только сравнительные познавательные установки теоретико-*математически продуктивны*.

Познавательная установка в эпоху классической античности была сравнительной установкой. Более того, предпочитались сравнения особого вида: познавательная установка отдавала приоритет сведению утверждений об одних предметах многообразного мира, окружающего античного человека, к утверждениям о других предметах. Это было *предмет-предметное сравнение*. Предметы реальности сравнивались по своей сущности. То обстоятельство, что одни и те же предметы в разных ситуациях могут проявлять себя по-разному, расценивалось как маскирующее сущность предметов. (В эллинистический период изменение культурных условий вызвало смещение познавательной установки, что может быть рассмотрено отдельно). Это было одноместное сравнение, матрица которого может быть представлена в виде одномерной таблицы размером 1 (т. е. одной строчки с элементом c в ней, сравниваемым с самим собой).

Сравнение предметов в познавательной установке классической античности реализовывалось как изучение *равенства и различия предметов* разнообразной природы. Максима «все сравнимо» означала, что равенство и различие могут быть зафиксированы, предметы — выделены. Данная установка являлась как бы вектором, исходящим из культурных приоритетов античного полиса (закон и порядок, демократия, сакральность гармонии).

С названной познавательной установкой связаны, а может быть и выводимы из нее, многие феномены греческой культуры. Так, дихотомическое мышление греков (составление дихотомических классификаций, в которых целое делится на две части, каждая из частей делится в свою очередь на две части, и т.д.) в массово доступной форме выражало устремленность на сравнение различных предметов, их отождествление или различие. Другой пример — агональность мышления и поведения, не терпящая полутонов и требующая поступка и мысли в чистом, максимально выраженном виде (сюда входит и распределение высказываний относительно их истинности или ложности). Можно отметить свойственную гражданину полиса приверженность идеалам и отказ от компромиссов, полагание антагонизма добра и зла. Здесь обретаются корни спортивного состязания с его непременной борьбой за первое, и только за первое место, резкие переходы от жестокости к мягкосердию, от доверия к полному недоверию и подозрительности, от любви к ненависти, от плача к смеху, противопоставление ремесла и искусства. Наконец, само отделение человека от себе подобных и осознание своей индивидуальности и связи с другими людьми, своих интересов, несовпадающих с интересами других людей, выступает как частный, хотя и важнейший случай установки на выяснение равенства и различия предметов. Сравниваемые предметы могли быть самыми разнообразными — от амфор, сделанных различными ремесленниками (какая амфора прекраснее), от скульптур, сравниваемых со своими прототипами, и вплоть до единого в его соотношении со многим (элеаты). Стержнем познавательной установки античной цивилизации в ее классической форме был пафос установления равенства и различия всего со всем, принципиальной возможности и неустранимости такого сравнения. (Кстати, именно поэтому несоизмеримость оказалась не просто техническим фактом, имеющим ограниченное хождение в среде математиков, но событием, вызвавшим колоссальный общественный резонанс и породившим культурный шок в античной цивилизации. Греки не ограничились сведением несоизмеримых диагонали и стороны квадрата к соизмеримым квадратам на этих отрезках для преодоления возникшего затруднения, но перестроили всю математику. Столь резкая реакция как раз и была обусловлена культурным значением открытого факта.)

Познавательная установка была тем тиглем, в котором интеллектуальные усилия классической античности были переплавлены и отлиты в форму математики. Два названных выше обстоятельства — выделение предметов, и наличие сравнения как выявление равенства и различия предметов — обусловили облик античной математики.

Как будет показано далее, следствием предмет-предметной познавательной установки стало стремление выделить именно такие, а не какие-либо иные основания математики. Благодаря данной познавательной установке произошло признание арифметики натуральных чисел и евклидовой планиметрии фундаментальными математическими теориями. Осуществлялась специфическая редукция одних математических объектов к другим: установление равенства и различия этих объектов. Например, таковым было сведение различных геометрических фигур к окружности и прямой линии (построение с помощью циркуля и линейки); попытка выражения любого числа как отношения натуральных чисел; выражение произвольного натурального числа как составленного из простых, как суммы четных и нечетных и т.д.; сведение одних типов дробей к другим и т.д.

В эпоху Великой научной революции XVII в. окончательно оформилась новая познавательная установка. В ней наряду с предметами равноправие получил новый вид феноменов — *изменения*. «Переставание предмета быть самим собой», «выход из себя», «стремление к», траектории и потоки и т.п. разновидности изменений начинают рассматриваться как самостоятельный вид феноменов. То, что было немыслимо для культуры классической античности — сравнение устойчивой сущности предмета с его (предмета) «непредметностью», текучестью, изменчивостью — становится обычной познавательной процедурой. Переменная величина, неопределенная величина — понятия для грека противоречивые — легко воспринимаются человеком Нового времени.

Наиболее ярко новая познавательная установка проявилась в таких областях культуры, как:

• технологии мануфактурного и машинного производства, рассчитанные на использование стабильных параметров изменений предметов (материальная культура);

• технологии государственного управления — усиление роли выборных органов, укрепление основ гражданского законодательства с оценкой деяний независимо от осуществляющих эти деяния субъектов (организационная культура);

• теории мироздания — движение планет и других небесных тел, механика, оптика и т. д., а также основывающиеся на этих теориях представления о возможности преобразования природы (духовная культура).

Только с появлением этих культурных условий идея переменной величины, возникшая ранее, окончательно закрепилась в математике.

Если представить эту познавательную установку в виде таблицы, то она будет выглядеть как двухмерная таблица (квадрат размером 1×1, состоящий из одной строки и одного столбца): предметы и изменения сравниваются посредством введения понятия функциональной зависимости. Эту познавательную установку сравнения можно назвать установкой *предмет-функционального сравнения*. Данная установка превалирует вплоть до нашего времени, хотя ее недостаточность при изучении уникальных феноменов, сложных систем, хаоса и бифуркаций становится все более и более заметной. Есть основания предположить, что начинается переход к новой познавательной установке, в которой наряду с двумя компонентами учитывается некий третий компонент, объединяющий различные «траектории» изменения разнородных предметов. Такую гипотетическую познавательную установку, условно называемую далее «эквифинальной» установкой, или же установкой *предмет-функционально-финального сравнения*, можно представить в виде трехмерной таблицы (куб $1 \times 1 \times 1$, состоящий из одной горизонтальной строки — «длины», одного столбца и одной «ширины» — строки, занимающей третье координатное направление куба), в которой взаимодействуют три равноправных вида феноменов: предметы, изменения, кластеры («финалы»). Далее будет показано, что такая познавательная установка выводит на новые основания математики и возможные математические структуры, могущие стать фундаментом будущей теоретической математики.

II. Формальные структуры познавательных установок

Перейдем от рассмотрения познавательной установки к рассмотрению ее формальной структуры. Это — переход от изучения процесса познания к изучению продукта этого процесса, т.е. к изучению знания.

Любая познавательная установка порождает знание. Однако только сравнительные познавательные установки порождают устойчивое относительно сравниваемых феноменов знание, не меняющееся при каждом новом познавательном акте. Так, вообразим, что бы было, если лампа, текст на экране компьютера, тиканье часов, намерение поправить шторы, движение кошки и т. д., каждый раз идентифицировались бы по-новому, не попадали в разные классы, не отделялись друг от друга устойчивым образом. Процесс познания стал бы тогда полностью ситуативным, всякое сравнение устаревало бы сразу после того, как оно было сделано.

Сравнительные познавательные установки, нацеливающие на разделение познаваемых феноменов на непересекающиеся классы и на соотнесение этих классов, намного лучше сочетаются со своим продуктом, с получаемым знанием. Определенность знания соответствует определенности процесса получения этого знания, процесса познания. Родство сравнительных познавательных установок и получаемого с их помощью знания позволяет прибегать к анализу знания везде, где речь идет об устойчивом, сравнительном познании. Для сравнительного познания верно утверждение: каково познание, таково и знание.

Если познавательная установка может быть описана как сравнение, то ее продукт, знание, обладает характеристикой, которую можно назвать «симметрией сравниваемых феноменов» (симметрия знания и разделение коллекторских и исследовательских программ организации знания рассмотрены М. А. Розовым[6]). Знание как совокупность утверждений, полученных в результате сравнений, представляет собой высказывания типа «D есть X» («D строится из X согласно такой-то процедуре»). Тем самым, полученное знание симметрично относительно замены D на X: содержание знания не меняется, если вместо D подставляется X. Так, утверждение «снег есть замерзшая вода», позволяет всюду, где говорится о снеге, употреблять слова «замерзшая вода».

Симметрия знания может быть выражена в виде формальной структуры посредством формализации элементов и связей элементов в таблице познавательной установки. *Формальная структура познавательной установки* культуры состоит из символов, формализующих выделяемые классы сравниваемых феноменов и познавательные операции над ними, а также из комбинаций символов, представляющих связь этих феноменов и операций.

Первой сравнительной познавательной установкой была познавательная установка предмет-предметного сравнения классической античной культуры. Она обладала простейшей одномерной таблицей размером 1, порождающей *формальную структуру предмет-предметного сравнения.*

Формальная структура предмет-предметного сравнения включает в себя:

— элементы c_i,

— операцию сравнения элементов $*$,

— формальное соотношение элементов и операции сравнения элементов (комбинация символов, совместно представляющих элементы и операцию их сравнения):

(1.1) $$c_i *$$

Установление в эпоху Великой научной революции XVII в. следующей, двухкомпонентной сравнительной познавательной установки, открыло дорогу для нового формализма. *Формальная структура предмет-функционального сравнения* развертывает двухмерную таблицу этой сравнительной познавательной установки размером 1x1 в набор формальных соотношений, в котором участвуют:

— элементы c_i,

— изменения f_i,

— операция сравнения элементов $*$,

— операция сравнения изменений $\#$,

—операция сравнения элементов и изменений $\rightarrow$,

— формальное соотношение элементов и операции сравнения элементов (аналогичное (1.1)):

(2.1.1) $c_i\,*$

— формальное соотношение изменений и операции сравнения изменений (аналогичное (1.1)):

(2.1.2) $f_i\,\#$

— формальное соотношение элементов, изменений и операции сравнения элементов и изменений:

(2.1.3) $c_i \xrightarrow{f_i}$

Из указанных формальных соотношений только соотношение (2.1.3) является принципиально новым, выражает сущность формальной структуры предмет-функционального сравнения.

Третья, только начинающаяся революция принципов познающего мышления, ставит вопрос о возможной трехкомпонентной сравнительной познавательной установке. Трехмерная таблица размером 1×1×1 этой гипотетической познавательной установки, в таком случае, аналогично может быть спроецирована в формальную структуру, соединяющую символы трех видов познаваемых феноменов — элементов, изменений, финальных кластеров состояний, завершающих изменения. Назовем эту структуру *формальной структурой предмет-функционально-финального сравнения.*

В этой формальной структуре имеются:

— элементы c_i,

— изменения f_i,

— финалы z_i,

— операция сравнения элементов $*$,

— операция сравнения изменений #,

— операция сравнения финалов **$**,

—операция сравнения элементов и изменений $\rightarrow$,

— операция сравнения элементов и финалов $\sim$,

— операция сравнения изменений и финалов $\leftarrow$,

— операция сравнения элементов, изменений и финалов $\leftrightarrow$,

— формальное соотношение элементов и операции сравнения элементов (аналогичное (1.1) и (2.1.1)):

(3.1.1) $c_i\,*$

— формальное соотношение изменений и операции сравнения изменений (аналогичное (2.1.2)):

(3.1.2) $f_i\,\#$

— формальное соотношение финалов и операции сравнения финалов (аналогичное (1.1), (2.1.1) и (2.1.2)):

(3.1.3) $z_i\,\$$

— формальное соотношение элементов, изменений и операции сравнения элементов и изменений (аналогичное (2.1.3)):

(3.1.4) $$c_i \xrightarrow{f_i}$$

— формальное соотношение элементов, финалов и операции сравнения элементов и финалов (аналогичное (2.1.3)):

(3.1.5) $$c_i \sim z_i$$

— формальное соотношение изменений, финалов и операции сравнения изменений и финалов (аналогичное (2.1.3)):

(3.1.6) $$\xrightarrow{f_i} z_i$$

— формальное соотношение элементов, изменений и финалов и операции сравнения элементов, изменений и финалов:

(3.1.7) $$c_i \xleftrightarrow{f_i} z_i$$

Из указанных формальных соотношений только соотношение (3.1.7) является принципиально новым, выражает сущность формальной структуры предмет-функционально-финального сравнения.

III. Протоматематические и математические структуры

Сравнительная познавательная установка культуры жестко определяет (детерминирует) выбор и само содержание оснований математики данной культуры. Направление этой детерминации заключается в развертывании (все более полной детализации) формы познавательной установки. Первые этапы логического развертывания познавательной установки в основания теоретической математики уже продемонстрированы для сравнительных познавательных установок сложности 1, 2 и 3: сначала составляется *n*-мерная таблица сравнительной познавательной установки, затем выписывается ее формальная структура. Рассмотрим, как эта процедура реализуется далее.

Идея следующих (заключительных) двух этапов логической процедуры нахождения оснований любой возможной теоретической математики состоит в том, что формальная структура познавательной установки по некоторым простым и естественным правилам трансформируется в *протоматематическую структуру*, а затем протоматематическая структура пополняется и замыкается в формальных основаниях теоретической математики эпохи, т. е. в ее основных *математических структурах,* частными случаями которых выступают структуры, описанные Н. Бурбаки[7]. То, какие основные математические структуры свойственны данной теоретической математике, полностью определяется формальной структурой познавательной установки культуры.

Из сказанного следует, что *можно найти формальные основания любой* (а не только ближайшей в линейной последовательности почленно усложняющихся сравнительных познавательных установок) *теоретической математики будущего*, ее основные математические структуры.

Начнем с первого заключительного этапа. Для этого введем понятие протоматематической структуры. Протоматематическая структура представляет собой набор *наиболее существенных формул*, составленных с использованием символов и формальных отношений (комбинаций символов) формальной структуры познавательной установки. Рассмотрим, как протоматематическая структура логически получается из формальной структуры, и что значит, что в протоматематическую структуру входят наиболее существенные формулы, развертывающие формальную структуру познавательной установки.

I. Формальная структура предмет-предметного сравнения порождает *протоматематическую структуру предмет-предметного сравнения*. Во-первых, наряду с операцией сравнения * элементов вводится ее результат. Иными словами, операция сравнения элементов распадается на два варианта — равенство =, и различие *. Во-вторых, после введения результатов операции сравнения — установления равенства или различия элементов — формальное соотношение (1.1), единственное соотношение формальной структуры предмет-предметного сравнения, превращается в две формулы, которые можно также изобразить в виде картинок:

(1.2.1). $c_i =$ (равенство) ••

(1.2.2). $c_i \,*$ (различие) • •

В сумме (1.2.1) и (1.2.2) образуют протоматематическую структуру предмет-предметного сравнения.

II. Теперь получим *протоматематическую структуру предмет-функционального сравнения*. Во-первых, наряду с исходными операциями сравнения элементов *, сравнения изменений #, сравнения элементов и изменений $\rightarrow$, вводятся их результаты. Эти результаты можно обозначить как равенство = и различие * (два варианта операции сравнения элементов), равенство = и различие # для изменений, равенство $\Rightarrow$ и различие $\rightarrow$ для пар элементов и изменений. Во-вторых, после введения результатов операций сравнения элементов, изменений, пар элементов и изменений, главное отношение формальной структуры предмет-функционального сравнения — отношение (2.1.3), сопоставляющее элементы и изменения — превращается в формулы:

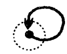
(2.2.1) $c_i \overset{f_i}{\Rightarrow}$ (сохранение) 

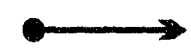
(2.2.2) $c_i \xrightarrow{f_i}$ (изменение) $\bullet\!\!\longrightarrow$

Формулы (2.2.1) и (2.2.2) в совокупности составляют протоматематическую структуру предмет-функционального сравнения.

III. *Протоматематическая структура предмет-функционально-финального сравнения* вводит дополнительный по отношению к предшествующей протоматематической структуре (результатам ее основных операций) компонент: результат выполнения операции сравнения элементов, изменений и финалов, то есть два случая, на которые распадается операция сравнения. Эти случаи таковы: либо для тройки «элемент-изменение-финал» фиксируется равенство $\Leftrightarrow$, либо различие $\leftrightarrow$.

Тогда главное формальное отношение третьей формальной структуры (3.1.6) превращается в две альтернативные формулы протоматематической структуры:

(3.2.1) $c_i \overset{f_i}{\Leftrightarrow} z_i$ (устойчивость) 

(3.2.2) $c_i \xleftrightarrow{f_i} z_i$ (неустойчивость) 

Последний этап логического развертывания формальной структуры познавательной установки состоит в преобразовании протоматематической структуры в математическую структуру, являющуюся, как будет показано далее, формальным основанием математики данной культуры. Чтобы протоматематическая структура превратилась в математическую структуру, необходимо эксплицировать операции сравнения и их результаты в формулах протоматематической структуры, в том числе, разрешить совместное употребление (конъюнкцию и дизъюнкцию) формул протоматематической структуры и установить результат такого совместного употребления. Для этого следует ввести вспомогательные логико-теоретические операции и связи. Они замыкают протоматематическую структуру в математическую структуру, т.е. предупреждают о том, что операции сравнения будут производиться, что их есть над чем производить, что их результат тоже есть, соответственно, элемент, изменение, финал, их комбинации. К этим операциям относятся: логико-теоретические связи (логические операции) разделения, следования (импликации), конъюнкции и дизъюнкции, кванторы общности и существования.

I. Если в протоматематической структуре предмет-предметного сравнения разрешить замыкание операций (т. е., применение операции к элементу дает элемент) и комбинирование (соединение) ее формул (1.2.1) и (1.2.2), то получится математическая структура, представляющая все три возможных случая соединения формул:

(1.3.1). $(c_i = c_j) \wedge (c_j = c_k)$: $c_i = c_k$
(соединение равенства и равенства) •••

(1.3.2). $(c_i * c_j) \wedge (c_j * c_k)$: $c_i * c_k$
(соединение различия и различия) • • •

(1.3.3). $(c_i * c_j) \wedge (c_j = c_k)$: $c_i * c_k$
(соединение равенства и различия) •• •

Видно, что из этой математической структуры следует *математическая структура порядка* (в смысле Бурбаки), если эксплицировать результат операции $*$ как «больше» $>$.

Комментарий: подразумевается, что множество элементов c_i не пусто. Вопрос об объеме этого множества остается открытым.

Резюмируя, математическая структура порядка является прямым формальным следствием предмет-предметной познавательной установки культуры классической античности.

II. Аналогично, если в протоматематической структуре предмет-функционального сравнения разрешить замыкание операций над c_i и f_i и комбинирование (соединение) формул (2.2.1) и (2.2.2), то получится математическая структура, задающая три возможные комбинации указанных формул:

(2.3.1). $$(c_i \overset{f_i}{\Rightarrow}) \wedge (c_j \overset{f_j}{\Rightarrow}) : (c_i * c_j) \overset{f_i \# f_j}{\Rightarrow}$$

(соединение сохранения и сохранения)

(2.3.2). $$(c_i \overset{f_i}{\rightarrow}) \wedge (c_j \overset{f_j}{\rightarrow}) : (c_i * c_j) \overset{f_i \# f_j}{\rightarrow}$$

(соединение изменения и изменения)

(2.3.3). $$(c_i \overset{f_i}{\Rightarrow}) \wedge (c_j \overset{f_j}{\rightarrow}) : (c_i * c_j) \overset{f_i \# f_j}{\rightarrow}$$

(соединение сохранения и изменения).

Эта математическая структура является более общим вариантом *математической структуры группы изменений* f_i (в смысле Бурбаки). Именно, для перехода к структуре группы надо операцию сравнения элементов и изменений $\rightarrow$ эксплицировать как преобразование $\rightarrow$, неизменяющее преобразование эксплицировать как тождественное $\Rightarrow$, а также все сохраняющие преобразования $\Rightarrow f_i$ связать только с одним «неизменяющим» изменением f_o. Т. е. сохраняющее преобразование может встречаться только в комбинации: $\Rightarrow f_o$. Изменение f_o будет выполнять роль единичного элемента в группе f_i.

Если же дополнить математическую структуру группы математической структурой порядка, то получится *топологическая структура* (в смысле Бурбаки), в которой для c_i-*х* одновременно выполняются отношения порядка и группового преобразования.

Комментарий: подразумевается, что множества элементов c_i и изменений f_i не пусты.

Резюмируя, математическая структура группы является прямым формальным следствием предмет-функциональной познавательной установки культуры, начавшейся с XVII в. и существующей до наших дней.

III. Предмет-функционально-финальная протоматематическая структура развертывается в математическую структуру по правилам, аналогичным сформулированным в предыдущих примерах. Этот случай особенно интересен, поскольку в получающейся математической структуре присутствуют новые, пока неизвестные математические структуры (в смысле Бурбаки), характеризующие формальные основания будущей теоретической математики.

Операции сравнения элементов, изменений, финалов, их парных комбинаций и их тройственного сравнения в данной математической структуре распадаются в результаты операций — равенство и различие. Результат операции сравнения троек «элемент-изменение-финал» предстает либо как устойчивая комбинация $c_i \overset{f_i}{\Rightarrow} z_i$, либо как переход $c_i \overset{f_i}{\rightarrow} z_i$.

При этих условиях комбинирование формул (3.2.1) и (3.2.2) дает математическую структуру:

(3.3.1). $$(c_i \overset{f_i}{\Rightarrow} z_i) \wedge (c_j \overset{f_j}{\Rightarrow} z_j) : (c_i * c_j) \overset{f_i \# f_j}{\Rightarrow} (z_i \$ z_j)$$ 

(соединение устойчивости и устойчивости)

(3.3.2). $$(c_i \overset{f_i}{\rightarrow} z_i) \wedge (c_j \overset{f_j}{\rightarrow} z_j) : (c_i * c_j) \overset{f_i \# f_j}{\rightarrow} (z_j \$ z_j)$$ 

(соединение неустойчивости и неустойчивости)

(3.3.3). $$(c_i \overset{f_i}{\Rightarrow} z_i) \wedge (c_j \overset{f_j}{\rightarrow} z_j) : (c_i * c_j) \overset{f_i \# f_j}{\rightarrow} (z_i \$ z_j)$$ 

(соединение устойчивости и неустойчивости)

Если элементы и финалы принадлежат одному множеству (наше мышление пока отказывается воспринимать более общую возможность их несовпадения), а устойчивость понимать как тождественный переход $c_i \overset{f_0}{\Rightarrow} z_i$, то найденная математическая структура представляет аксиомы теории категорий (c_i — объекты категории, f_i — морфизмы категории, f_0 — единичный морфизм) — см., например, (8). Видимо, указанная центральная структура будущей теоретической математики является математической структурой теоретико-категорного типа, т. е. таким обобщением аксиом самой теории категорий, в котором объекты категории, или же узлы диаграмм, неоднородны (элементы и финалы принадлежат «разным мирам»).

Выдвинем гипотезы:

1. Если дополнить теоретико-категорную структуру *структурой группы* (чтобы объекты категории обладали групповым свойством), то получится нечто вроде обобщенной структуры аттракторного типа.

2. Если дополнить эту же структуру *топологической структурой* (объекты категории распределяются по их «близости», для них вводится понятие окрестности), то получится некая обобщенная структура «топологии категорий», что-то похожее на обобщение теории топосов.

3. Наконец, если дополнить эту структуру *структурой порядка* (объекты категории упорядочены), то получится обобщенная структура некоего расширительного понимания чисел.

Все названные математические структуры (в смысле Бурбаки) покуда мало подкреплены реальными математическими теориями — их создание, по-видимому, дело будущего.

IV. Математические структуры как формальные основания математики, ее фундаментальных математических теорий

Покажем, что математические структуры предмет-предметного, предмет-функционального и предмет-функционально-финального сравнения являются *формальными основаниями* теоретической математики соответствующей эпохи. Для этого введем некоторые вспомогательные определения.

Известно выделение в составе математических теорий их оснований. Под *основаниями* понимается тот минимальный набор *конструкций* — понятий, определений, аксиом и логических правил, который применяется в этих математических теориях. То, какие основания выбираются, является постоянным предметом дискуссий в научном сообществе[9]. *Основания теоретической математики* данной культуры в целом представляют собой те *минимальные основания,* из которых посредством прибавления дополнительных конструкций получаются основания математических теорий этой теоретической математики. *Фундаментальность* математических теорий означает, что они опираются непосредственно на основания теоретической математики (прямо используют их). Таким образом, любые теории, как фундаментальные, так и остальные, есть продукт сборки конструкций, либо непосредственно входящих в основания теоретической математики, либо дополняющих эти основания. Если конструкции, входящие в основания теоретической математики данной культуры, представлены в формальном виде, то назовем их *формальными основаниями математики.*

Используя данные выше определения рассмотрим, каковы формальные основания классической античной математики и современной математики (с эпохи Великой научной революции XVII в.).

1. Для математики классической античности фундаментальными математическими теориями называют арифметику натуральных, а затем и арифметику рациональных чисел, а также евклидову планиметрию. Покажем, что основания этих теорий, в сумме составляющие основания математики классической античности, в их формальном представлении являются математической структурой предмет-предметного сравнения. Тем самым, структура порядка как частный случай этой математической структуры является составной частью формального основания классической античной математики.

Фундаментальные теории классической античной математики возникают вследствие применения предмет-предметной познавательной установки к некоторым первичным объектам, интуиция которых достаточно ясна и обеспечена культурными условиями полисной цивилизации. Эти объекты — единица (теория натуральных чисел) и точка, линия, окружность (евклидова планиметрия). В то же время, операции равенства и различия также получают интуитивно ясное, содержательное истолкование (а не формальную интерпретацию): мы знаем и в каждом конкретном случае не затруднимся ответить, когда одна вещь (объект) равна другой и когда эти вещи различны.

Оперирование с числами, с окружностью и другими объектами имело во многих случаях, и в особенности у ранних пифагорейцев, сакральную подоплеку, оно столь же неразрывно переплеталось с демократическим устройством общества, характер логических рассуждений был вплетен в жизнь античного полиса, разграничение математики и логистики было сродни разделению искусства и ремесла.

Равенство (первоначально — подобие двух) одновременно имело смысл logos (закон, порядок) и символизировало одинаковость граждан полиса вне зависимости от их принадлежности к той или иной социальной группе. Simmetros, означая подобие относительно выделенного третьего (центра, закона), приводило к идее расположения двух на одной и той же окружности, соотнесенности с центром этой окружности, а отсюда и к прямой и точке как соединенным с окружностью, связывая идею симметрии со способом проведения геометрических рассуждений (геометрические рассуждения должны осуществляться в виде построений, устанавливающих симметрию объектов и выражающих эти объекты через отрезки прямых, точки и окружности). Логическое следование было в его общем культурном значении выражением свободы граждан, признанием их неотъемлемого права иметь и отстаивать свою собственную точку зрения, что, в частности, воплотилось в демократической судебной процедуре, где многое зависело от убедительности аргументаций обвинителя и защитника, рассчитанных на собрание граждан. Наконец, планиметрия, осуществляющая построения с использованием точек, отрезков прямых и окружностей (построения с помощью циркуля и линейки), согласно представлениям греков, была инструментом постижения гармонии Космоса, либо, более того, сутью этой гармонии.

Сравниваемые элементы c_i в случае арифметики превращаются в числа, причем числами эти объекты делает как раз то обстоятельство, что они сравнимы с эталонным объектом — единицей (что формально может быть задано в виде аксиомы замкнутости: любое число N может быть представлено через единицу). Представление через единицу задается введением дополнительной операции сложения + (что формально может быть введено через аксиому порождения: порождение новых чисел производится посредством последовательного прибавления единицы). Остальные операции (вычитание, умножение и деление) задаются через операцию сложения: вычитание есть оборачивание во времени операции последовательного прибавления единицы, умножение — это свертывание операции сложения, а деление — оборачивание во времени операции умножения. Рациональные числа задаются через применение указанных операций к множеству натуральных чисел. Сами операции (и в первую очередь операция сложения) интуитивно ясны и обоснованы навыками действования с вещами окружающего мира.

В случае «обогащения» познавательной установки предмет-предметного сравнения образами точки, отрезка прямой и окружности (евклидова планиметрия как фундаментальная теория античной математики), осуществлялось представление любой геометрической фигуры через эти эталонные предметы. Возникает классификация геометрических фигур — эталонные, кривые первого рода, кривые второго рода. Эта классификация показывает, насколько просто кривые могут быть выражены через эталонные. Таким образом, геометрические фигуры не могут быть выражены иначе, как через операцию сравнения. Остальные фигуры (не сравнимые с исходными) не являются геометрическими в строгом смысле. Операция сравнения — единственный путь получения новых фигур из уже имеющихся. Эта операция, называющаяся геометрическим построением, задает аксиому порождения — все новые фигуры получаются только через геометрическое построение из фигур исходных.

Итак, с одной стороны, математическая структура предет-предметного сравнения и ее частный случай — математическая структура порядка (в смысле Бурбаки) — разворачивает и замыкает исходный формализм сравнительной познавательной установки классической античности. С другой стороны, математическая структура является формальным основанием математики данной культуры, она вбирает в себя основания фундаментальных математических теорий этой культуры, поскольку она является формализацией оснований этих теорий.

2. В истории современной математики, берущей начало в XVII веке, представление о том, что является фундаментальными математическими теориями, неоднократно менялось. Тем не менее, можно выделить две ветви фундаментальных теорий, как бы передающих «эстафету фундаментальности» друг другу: ветвь анализа и его центральных понятий бесконечно малой, функции, окрестности, ряда и т. д., и ветвь алгебры и ее понятий уравнения, поля, группы, кольца и т. д.

Покажем, что анализ и алгебра как фундаментальные теории современной математики, составляющие в совокупности основания математики с XVII в. до нашего времени, с одной стороны, следуют из предмет-функциональной познавательной установки, а, с другой стороны, их основания формально представимы в математической структуре предмет-функциональной познавательной установки.

Интуиция исходных объектов анализа и алгебры, применяемых логико-теоретических операций дифференцирования, интегрирования, группового преобразования и т.д., напрямую проистекает из познавательной установки культуры предмет-функционального сравнения. Так, представление об изменении как движении предметов было одним из источников введения теории флюксий и изучения функциональных зависимостей. Близость предметов как их стремление к совпадению порождает образ окрестности. Наличие тождественных преобразований («неизменяющих действий») влечет введение групповой операции и понятия группы. Наиболее зримые очертания предмет-функциональное сравнение приняло в области точного естествознания, поскольку именно здесь применение математического аппарата оказалось наиболее эффективным.

Основные понятия и операции анализа и алгебры хорошо соответствуют математической структуре предмет-функционального сравнения. Так, понятие функции соответствует f_i, понятие функциональной зависимости соответствует соотношению $c_i \xrightarrow{f_i}$ этой структуры, групповой операции — соотношению $f_i \# f_0$, окрестности — совокупности отношений (2.3.3) структуры предмет-предметного сравнения и (3.3.3) структуры предмет-функционального сравнения и т. д. Тем самым, структура группы является формальным основанием математики начиная с эпохи Великой научной революции XVII в., а если математику этой культуры рассматривать совместно с классической античной математикой, то в их общее формальное основание наряду со структурой группы войдут топологическая структура и структура порядка.

3. Вопрос о фундаментальных математических теориях и основаниях теоретической математики, складывающихся в условиях действия познавательной установки предмет-функционально-финального сравнения, в настоящее время остается открытым. Ясно одно — формальным представлением этих оснований и будущих фундаментальных теорий станет математическая структура предмет-функционально-финального сравнения. Ее изучение дает материал для реконструкции облика грядущей теоретической математики, определяет узлы главных проблем и направлений исследований и, я надеюсь, облегчит работу тем математикам, которые стремятся открыть новые горизонты этой науки.

Примечания

[1] Из имеющегося многообразия определений культуры в качестве рабочего примем следующее: культура есть способ жизнедеятельности данного общества или отдельной социальной группы. В культуру входят:

— используемые материальные ценности и продукты материального труда;

— имеющиеся воззрения на окружающий мир, человека и их взаимоотношение;

— закрепленные в социальных институтах способы организации межсубъектных взаимоотношений;

— традиции и принятые нормы поведения.

В культуре можно выделить материальную культуру, духовную культуру, организационную культуру, поведенческую культуру. Культура включает в себя рефлексию относительно входящих в нее компонентов (элементов материальной, духовной, организационной и поведенческой культур).

Любая культура неоднородна, однако в ней можно выделить центр, те компоненты, рефлексия относительно которых в данном обществе или социальной группе наиболее сильна.

[2] Под содержанием теоретической математики далее будет пониматься набор включаемых в теоретико-математическое знание (доказанных, т.е. принимаемых за истинные) утверждений.

[3] Направление развития теоретической математики — это совокупность: (а) утверждений, сравнительно недавно вошедших в состав теоретико-математического знания; (б) гипотез, т.е. еще не признанных утверждений, предлагаемых для включения в теоретико-математическое знание; (в) оценки наблюдаемой динамики возникновения и принятия утверждений вида (а) и (б), сравнительной значимости этих утверждений для теоретической математики. Таким образом, направление развития теоретической математики складывается из новых результатов, гипотез и оценок этих знаниевых нововведений.

[4] Понятие теоретической математики (теоретико-математического знания) как совокупности утверждений, удовлетворяющих условиям теоретического способа систематизации, и как определенным образом организованного набора терминов и понятий, сформулировано в книге: *Барабашев А. Г.* Диалектика развития математического знания. М., 1983. Там же говорится о «башне прогнозов», идея которой послужила исходным моментом в построении последовательности формальных структур познавательных установок.

[5] *Kastaneda C.* The Tales of Power. N.Y., 1974. См. описание мира тоналя в сравнении с миром нагваля — p. 97.

[6] *Розов М. А.* О двух аспектах проблемы редукционизма. Пущино, АН СССР, НЦБИ, 1986; *Розов М. А.* География и явление симметрии знания // Методы изучения расселения. М., 1987; *Розов М. А.* Процессы и механизмы интеграции в развитии науки // Интегративные тенденции в современном мире и социальный прогресс. М., 1989.

[7] *Бурбаки Н.* Архитектура математики // *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М., 1963.

1/2 16 Зак. 3711

[8] *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. М., 1986. С. 229—230.

[9] Позиция математического сообщества во многом определяется мнением ведущих исследователей. А поскольку ведущие исследователи зачастую расходятся в мнении относительно того, что считать основаниями математики, то однозначно фиксированных оснований и непреложно признанных фундаментальных математических теорий нет. См., например, переписку В. И. Вернадского и Н. Н. Лузина об аксиомах геометрии Д. Гильберта, в особенности письмо Н. Н. Лузина от 28 июня 1938 г.: *Вернадский В. И.* Переписка с математиками. М., 1996. С. 53—55.

КОММЕНТАРИИ

В. Э. Войцехович

За последние двадцать лет А. Г. Барабашев проделал большую работу по осознанию глубинных тенденций и закономерностей эволюции математики. Тот же подход продолжает развиваться и в данной статье. Он вполне укладывается в традиционную для большинства ученых объективистскую научную парадигму. Некоторые из последующих комментариев даются с позиций пока не совсем четко сформулированной, но уже используемой *коммуникативной парадигмы*, развивающейся в синергетике и близкой к герменевтике и феноменологии.

1. Хотелось бы убедиться в правомерности перенесения *современного значения* термина «теоретическая математика» на будущее, поскольку:

а) в современной математике и философии науки возникли идеи и теории, отвергающие само деление математики на практическую и теоретическую (например, к такой мысли подводят в области логико-математического знания логика нечетких предикатов, фрактальная геометрия, компьютерная математика, а в области философии науки — работы Полани, Фейерабенда, статьи об «эмпирической природе математики». По-видимому, приблизилось время осознания научным сообществом (или его частью) неэффективности старого, платоновского деления бытия на «мир вещей» и «мир идей», от которого идут представления о практическом и теоретическом, бинарная логика и т.п. Пришло время осознать новую научную парадигму — коммуникативную, парадигму диалога, а не монолога, характерного для традиционного объективизма;

б) в ряде работ прошлых лет автор прогнозирует практический характер будущей математики. Это полностью сходится и с мнением ряда философов XX века о цивилизации XXI—XXIII веков. Она должна быть гораздо более практической, чем индустриально-технологическая цивилизация XVI—XX веков, хотя бы из-за трудно разрешимых глобальных проблем, но одновременно и гораздо более духовной («Новое Средневековье» по Н. А. Бердяеву). Если будет развиваться «духовно» ориентированная математика (как продолжение интуиционизма, метаматематики и т.п.), то назовут ли это теоретической математикой? Ведь в конце XIX в. П. Гордан сказал о пионерских работах Д. Гильберта «это не математика».

Деление математики на «практическую» и «теоретическую» потеряло свою плодотворность после работ Гильберта по метаматематике, Брауэра по интуиционизму, Геделя по основаниям. Возникло ощущение, что Платон устарел.

2. Тезис 5 об определяющем влиянии оснований математики нуждается в более глубоком обосновании, поскольку в любом виде творчества огромную роль играет *бессознательное*. Об этом писали А. Пуанкаре, Ф. Клейн и другие. Работа математиков базируется и на отрефлектированных установках, и на неотрефлектированных. Как писал Клейн, в математике есть и логики, и поэты. Последние не сковывают свою фантазию с помощью «внутреннего цензора» и добиваются наиболее неожиданных результатов, к которым многократно возвращаются иногда сотни лет спустя (Лейбниц, Вронский, Риман, Пуанкаре, Брауэр, Г. Вейль, Рамануджан...).

3. Главный тезис — № 9 — в сущности связан с тенденцией алгебраизации, ставшей ведущей за последние три века, но сегодня исчерпавшей себя (вместе с индустриально-технологической цивилизацией XVI—XX веков), т.к. в основе и алгебры, и технического мышления лежит операция комбинирования «жесткими», дискретными элементами. Ряд математиков и философов высказывают мнение о перспективности альтернативных путей дальнейшего развития: о математике «человеческого мышления» (Брауэр) и даже духовной математики (это близко П. А. Флоренскому, А. Ф. Лосеву), о будущей геометризации (фольклор), о бесконечности как сущности этой науки (Г. Вейль) и другие.

4. Утверждение «можно найти формальные основания любой... будущей математической структуры» дискуссионно уже потому, что предикат «любой» в суждениях можно только постулировать, но нельзя обосновать. В истории науки подобная ситуация неоднократно повторялась, например, в связи с открытием неевклидовых геометрий. Стоило Канту высказать мысль об абсолютной фундаментальности для человеческого познания евклидовой геометрии, как он сам усомнился в этом (правда, в личном письме), а позже Гаусс, Лобачевский, Бойаи и прямо опровергли данную познавательную установку.

В познавательной установке имеется огромное количество *потенциальных* формальных структур, только *некоторые* из которых актуализируются. Не возникает ли у нас иллюзия: мы видим то, что хотим увидеть? Но тогда дедукции (познавательная установка $\rightarrow$ формальная структура $\rightarrow$ протоматематическая структура $\rightarrow$ математические структуры) не получается. Признание свободы (и непредсказуемости) математического творчества неизбежно ограничивает возможности такого прогнозирования.

5. Наиболее важным результатом прогноза является вполне убедительный вывод о том, что одной из магистральных структур будущей теоретической математики явится структура теоретико-категорного типа. Этот вывод соответствует и моей оценке теории категорий (см. мою диссертацию: «Становление математической теории». М., 1992). Познание развивается от внешнего (природы) к внутреннему (разуму), от материального к духовному, а в математике — от «математики природы» к «математике разума», к своим собственным основаниям.

6. Трудно согласиться с утверждением о том, что дополнение теоретико-категорной структуры структурой группы приблизит ее к структуре аттракторного типа, т.к. в последней всегда присутствует время (в той или иной форме), направленность от начала к концу, а в группе времени нет.

Время возникает в топологических структурах, т.к. эволюционирующая система, попав в *окрестность аттрактора*, неизбежно приближается к нему.

7. Нуждается в обсуждении тезис о том, что любые теории есть продукт *сборки* конструкций, входящих в основания, либо дополняющих их. О необходимости глубокого обоснования постулирования предиката «любой» уже было сказано. Кроме того, не ясно, результатом какой сборки могли бы быть достаточно неожиданные для научного сообщества геометрия Лобачевского или интуиционизм? По-видимому, все-таки личность в истории играет выдающуюся роль и обеспечивает достаточно большой заряд некумулятивности, случайности и неожиданности — «человечности» в математике.

8. Автор утверждает, что в современной математике, берущей начало в XVII веке, можно выделить 2 ветви фундаментальных теорий — анализ и алгебру. Почему опущена геометрия (топологическая структура)? Ведь ее теории также укладываются в предмет-функциональную установку. По-видимому, автор включил топологию в анализ как комплексное направление (именно так понимает анализ Н. Бурбаки). Тем более, что понятие окрестности, перечисляемое среди аналитических, является специфически топологическим.

9. Очень правильна мысль о том, что структура группы является формальным основанием математики с XVII в. Ведущее направление культуры XVI—XX веков — *инженерия* как комбинирование предметов, их свойств и отношений (включая и их изменения). Именно индустриально-технологический способ мышления в культуре порождает группу в математике.

10. Не ясно, почему автор считает, что вопрос о фундаментальных математических теориях, складывающихся в условиях познавательной установки предмет-функционально-финального сравнения, остается открытым. Это верно лишь частично, по крайней мере одна такая теория известна — теория категорий. К ней может быть присоединена (со временем) и фрактальная геометрия.

11. Определение культуры выглядит не слишком убедительно. Хотя известно около 300 ее дефиниций и образных характеристик, главное в культуре — *духовные* ценности, остальные пункты второстепенны (в контексте прогнозирования математики это особенно ясно: можно ли говорить о найденном археологами предмете как культурной ценности, если в нем не воплощены знания, картина мира, мечты и идеалы людей данной культуры?). Например, пирамиды Египта и рукописи Александрийской библиотеки не были нужны средневековому обществу, т.к. они «не способствовали спасению души».

12. В ряде работ А. Г. Барабашева уже намечен *прогнозный стиль* мышления в философии математики. Интересно было бы выделить характерные его черты.

Таким образом, прогноз автора обоснован и вероятен, хотя в самом подходе чувствуется формальный редукционизм. Философское мышление, конечно, может быть любым — редукционистским и нередукционистским, дискурсивным и недискурсивным, но ценно оно своей недискурсивностью. Поэтому желательно дополнить прогноз содержательным анализом и рассмотрением альтернативных подходов. После этого можно (по стопам Гильберта) браться за «Проблемы III тысячелетия».

С. С. Демидов

«...Определяет ли культура содержание теоретической математики? Я полагаю, — пишет А. Г. Барабашев, — что на этот вопрос следует ответить положительно, и что две известные разновидности теоретической математики — математика классической античности и теоретическая математика, начавшаяся в эпоху Великой научной революции XVII века и существующая до нашего времени — обладают культурными причинами (корнями)».

На этом тезисе А. Г. Барабашева я хочу остановиться подробнее.

Разумеется, можно (и должно) говорить о влиянии культуры на содержание теоретической математики. Но каков характер этого влияния? Конечно, культурный контекст оказывал большое воздействие и на математику классической античности и на теоретическую математику XVII—XX вв. Но может быть правильнее уподоблять культуру (воспользуемся образами, близкими к употребляемым А. Г. Барабашевым) не корням теоретической математики, но почве, на которой наше растение (математика!) произрастает?

Я полагаю, что в некоторые (наверное, важнейшие) моменты своей истории развитие математики действительно определяется внешними факторами, проистекающими из социокультурного контекста. Возможно, таким растянутым, правда, во времени моментом была эпоха зарождения математики как науки в Древней Греции (судить о чем при удаленности событий и отсутствии достаточной информации можно лишь предположительно). С большими основаниями мы можем считать таким «моментом» Научную революцию XVII века.

В «нормальные» же (мы употребляем здесь этот термин в смысле близком куновсому) периоды своего развития движущие факторы развития математики скрыты внутри самой математики. Это то, что принято называть внутренней логикой развития самого предмета.

Развитие любой математичесой теории можно рассматривать на довольно протяженнных исторических интервалах как достаточно гладкий детерминированный процесс (управляемый этой внутренней логикой). В некоторых точках гладкое течение процессов нарушается. Причиной такого нарушения, приводящей к разрывам непрерывного процесса развития, служат внешние факторы, которые следует искать в социокультурном контексте.

Судя по всему, 1900 год (время произнесения Гильбертом знаменитого доклада «Математические проблемы», фраза из которого взята А. Г. Барабашевым в качестве эпиграфа к обсуждаемой нами статье) приходился на гладкий участок кривой развития математики, что и определило успех сделанного Гильбертом прогноза развития математики — дальнейшее поведение кривой определялось ее поведением в малой окрестности точки рассмотрения. Если же взять сегодняшнюю ситуацию, т. е. ощущение, что мы находимся в окрестности особой точки, когда прогнозировать дальнейший ее ход, исходя из данных о локальном ее поведении, становится невозможным. Основания для такого прогноза может дать только анализ социокультурного контекста (кстати, ощущение необходимости выхода в такой контекст оставляют публикованные в 7-ом номере 45 тома «Notices of the American Mathematical Society» за 1998 год прогностические размышления одного из крупнейших совеменных метематиков М. Громова). Поэтому предлагаемый А. Г. Барабашевым подход к проблеме прогнозирования на современном этапе развития математики посредством анализа формальных структур познавательных установок и сам характер этого анализа представляются мне перспективными.

А. Н. Кричевец

Статья А. Г. Барабашева имеет ярко выраженный характер научного проекта, философской заявки. Автор высказывает несколько очень сильных тезисов, не претендуя на исчерпывающее их обоснование. В пользу серьезности проекта говорит в данном случае то, что тезисы взаимоувязаны и черты будущей системы легко угадываются. С некоторыми тезисами согласиться легко, с другими трудно, иногда очень трудно, но прежде, чем система развернута, я бы не стал торопиться с полемикой, например, против попытки представить познавательную установку формально, хотя, на мой взгляд, такая попытка вряд ли обещает успех. Попытаюсь, напротив, предложить некоторые дополнительные соображения в пользу, с моей точки зрения, самого сильного тезиса статьи.

Легко увидеть аналогию между описанием античной познавательной установки в данной статье и описанием фундаментальной идеи телесности в античной культуре у О. Шпенглера. Точно так же описание познавательной установки Нового времени как ориентированной на процессы вполне согласуется с общими представлениями о Научной революции XVII века. Действительно новым здесь является утверждение о том, что именно познавательная установка и составляет основания математики соответствующей эпохи. Не могу согласиться с тем, что от формального описания познавательной установки прямая дорога ведет к формальным основаниям математики — как мне кажется, те попытки формализации оснований математики Нового времени, которые делались до наших дней, возможно, близки какой-то другой познавательной установке, хотя в классификации А. Г. Барабашева таковой и нет места. В пользу этого утверждения см. цитату из письма Лузина об основаниях интегрального исчисления в моей статье в данном сборнике.

Однако и без увязывания познавательной установки с формальными основаниями тезис выглядит более чем эвристично. Действительно, основание динамики развития математики не может быть чем-то предметно определенным, а должно быть основанием какого-то математического общекультурного интереса, определяющего и объединяющего частные интересы математиков и через них выбор перспективных тем. Возможно, при проработке подхода А. Г. Барабашева окажется необходимым выделять какие-то дополнительные установки и субустановки, но это не отменяет решающего факта — основания динамики следует искать в установках.

К этому можно добавить достаточно правдоподобную гипотезу (ее почти в таком виде высказывала в своей диссертации Л. Б. Султанова), что математические структуры суть затвердение и опредмечивание динамичных структур, связанных с постановкой интересных задач и их решением — я вижу связь познавательной установки и математических структур в таком виде.

Добавлю к этому, что характеристика в статье А. Г. Барабашева современной познавательной установки на первый взгляд кажется чересчур смелой. Однако, если принять оговорку о возможности субустановок и альтернативных установок — вообще о возможности более разнообразного ландшафта предметного поля, то в пользу важности такой установки вспоминается немало аргументов. Уходящий век можно назвать веком девальвации предметности в науке. Самоочевидность самотождественности предметов утеряна, если не навсегда, то надолго и, во всяком случае, всерьез. Попытки реанимировать квазипредметность предметов как некоторое финальное состояние процессов, подобные предпринимаемым в рамках математизированной синергетики, явно будут множиться и обрастать системными связями. Кандидаты на такие структуры множатся с каждым днем. Упомяну о теории биолога К. Уоддингтона, в которой вместо привычного гомеостаза при описаниях живых организмов используется понятие «гомеорез», характеризующее устойчивость траекторий развития организма, в противовес устойчивости его формы. Такие феномены Уоддингтон предлагает описывать множествами потенциалов (рельеф(ы) Уоддингтона), которые и являются единицами наследования.

Таким образом, возникновение и господство соответствующей «предмет-функционал-финальной» математики выглядит вполне вероятным.

В. Я. Перминов

Общая идея статьи, несомненно, интересна. Показано, что исторически происходит не только расширение предмета исследования, но и качественное его изменение в плане усложнения типа связей и отношений. Алексей Георгиевич пытается выразить логику этого усложнения в такой форме, которая выявляла бы направление эволюции и позволяла бы сформулировать некоторые представления о структуре будущей математики. Мои замечания сводятся к следующим двум.

1. Остается не вполне ясным, насколько предложенная схема устойчива, т.е. насколько она проистекает из сущностных характеристик математики и насколько она может быть продолжена в будущее. Известно, что прошлую историю можно запаковать в различные схемы, но лишь некоторые из них схватывают нечто существенное и позволяют бросить взгляд на будущее. Алексей Георгиевич строит определенный прогноз и, следовательно, он убежден, что предлагаемая им схема является именно такой, сущностной схемой. Я думаю, что достаточного основания для такой уверенности пока нет. Тут нужно не только наблюдение и выявление определенного эмпирического ряда, но и некоторого рода теоретическое обоснование, проистекающее из природы математики.

2. Мне трудно согласится с общей философской идеей А. Г. Барабашева. состоящей в том, что причины развития таких, а не каких-либо иных оснований и фундаментальных теорий математики, являются причинами культурного плана. Содержание математического знания, т. е. состав теорий и характер обсуждаемых понятий, конечно, в какой-то мере зависит от запросов времени, но это никоим образом не относится к основаниям математики, выбор которых происходит исключительно на основе внутренних(когнитивных) характеристик. Принципы, лежащие в основаниях математики, должны обладать прежде всего особого рода очевидностью или непосредственной данностью. Опыт показывает, что система такого рода принципов не зависит от опыта и не расширяется с течением времени. Я хотел бы обратить внимание Алексея Георгиевича на тот факт, что математики XX века ищут основания математических теорий в первичных интуициях арифметики, геометрии и логики, т. е. в точности в тех же элементарных и самоочевидных представлениях, на которые опирался Евклид и математики всех последующих веков. Где

тут результаты социокультурного влияния? Традиционный априоризм несовершенен, его можно критиковать, но я думаю, его нельзя устранить из оснований математики.

В. К. Петросян

Статья А. Г. Барабашева очень близка мне как по своим интенциям (вера в возможность рационального прогнозирования развития систем и основополагающих регуляторов мышления), так и по конечным выводам (убежденность в том, что будущее – за финалистскими математическими системами).

Однако именно эта близость и побуждает выяснить некоторые конкретные черты сходства и различия в наших позициях.

1. Основной тезис А. Г. Барабашева состоит в том, что культура некоторой эпохи и цивилизации полностью определяет форму и содержание фундаментальных математических структур, присущих коллективному мышлению данной цивилизации. Этот тезис противопоставляется автором кантианскому тезису об априорной природе математики и ее культурной независимости.

Что касается И. Канта, то он, по моему мнению, просто отождествляет абсолютный объективный логос (реальную логико-математическую структуру мира) с субъективным логосом (современной ему — Канту — математикой) и приписывает на этом основании последнему свойство априорности, т. е. фактически, подменяет понятия. В этом смысле Кант безусловно уязвим.

Однако не вполне, думается, прав и А. Г. Барабашев, отстаивая полную детерминированность творческой деятельности (в сфере оснований математики) наличным уровнем культуры.

Дело в том, что объективный мир, очевидно, обладает некоторой устойчивой и лишь частично нами постигаемой априорной абсолютной логико-математической структурой, и мы можем лишь более или менее адекватно отображать ее в своих субъективных логико-математических построениях (различно – в каждую конкретную эпоху). В этом смысле математика (точнее – математики) вполне потенциально свободна от влияния культурной среды в своем развитии. (Иначе не было бы никакого развития математического знания в смысле смены базовых парадигм и аксиоматик.)

Для каждого конкретного математика нет никакой объективной интеллектуальной необходимости следовать каким – либо культурным (в том числе – математическим) стереотипам (познавательные клише любого рода не всегда – благо), если он обладает достаточным уровнем нонконформизма, интеллектуальной силы, интуиции и способен непосредственно созерцать объективный логос и отображать результаты своего созерцания в форме логико-математических текстов, доступных (или недоступных) пониманию современников. Другое дело, что число математиков, способных вырваться за пределы (устаревших) математических стереотипов («познавательной установки») эпохи и работать (как правило, — в одиночку) над принципиально новыми математическими системами (существенно отличными от общепринятых) в каждую конкретную эпоху либо равно нулю, либо не превышает 2—3 человек.

Т. е. суть проблемы не только в том, что культура что-либо порождает или детерминирует в рамках некоторой общепринятой «познавательной установки» (прогрессивной или регрессивной — неважно), но, главным образом, в том, способны ли математики данной эпохи преодолевать стагнирующее ментальное и социально-экономическое давление инерционной культурной среды (более или менее высокое в каждом конкретном случае) и проектировать принципиально новые логико-математические системы, более адекватно отражающие абсолютный объективный логос, чем их поддерживаемые культурной средой прототипы.

2. Убежденность в доминирующей детерминирующей роли культурных стандартов и стереотипов в процессе становления математического знания заставляет А. Г. Барабашева делать упор лишь на одном возможном типе прогнозирования эволюции математических систем — на поисковом прогнозировании. В статье делается попытка выявить основные (культурно обусловленные) тенденции развития математического знания и экстраполировать их в будущее. Это, безусловно, правомерный и плодотворный подход, позволивший автору (в отличие от многих других современных математиков и философов математики) убедиться в перспективности «финалистского» (как он его называет) направления в математике и предречь ему лидирующее положение в будущем. Это делает честь автору как философу математики и науки в целом.

Вместе с тем, существует и другое направление в прогнозировании – нормативное (проективное) прогнозирование, позволяющее выйти за «створ» наличных тенденций развития исследуемого объекта и исходить непосредственно из высших потребностей человечества в познании абсолютного логоса. Этот вид прогнозирования довольно скептически относится к наличным тенденциям развития любого рассматриваемого объекта, исходя из того, что они могут быть вызваны чем угодно и могут быть (под воздействием ранее неучтенных факторов) изменены в любом направлении – вплоть до полной обратимости вспять. Нормативное прогнозирование своей высшей целью полагает достижение желательного состояния объекта путем его целенаправленного проектирования с учетом необходимости преодоления сопротивления (культурной) среды.

Другими словами, речь идет о прогнозировании, проектировании и предопределении желаемого будущего с «позиции интеллектуальной силы». По-моему, только таким путем можно рассчитывать на сколь-нибудь быстрые крупные прорывы в сфере оснований логики и математики. Об этом и идет речь в моей статье об инновационных войнах, опубликованной в настоящем сборнике.

3. Что касается собственно будущего математики, то, повторюсь, я полностью солидарен с А. Г. Барабашевым, когда он говорит о предстоящем лидерстве *«финалистстких»* математических систем (математических систем, включающих в себя *завершенные во времени* процессы и объекты), но считаю, что вопрос надо ставить шире и вести речь также о других типах завершенных объектов, не имеющих отношения ко времени (например, о *завершенных пространственных и числовых бесконечных множествах*). В этом случае вопрос будет стоять уже о лидерстве не только «финалистских», а (что имеет более высокую степень общности) *актуалистских* математических систем (в противовес доминирующим сегодня *потенциалистским*).

Кроме того, хотел бы добавить, что в будущем, по моему мнению, для математики переломным будет переход к индустриальному (в пределе – к автоматизированному) конструированию и проектированию логико-математических систем с заранее заданными свойствами. Это создаст управляемое единство сотен тысяч различных равноправных математических систем высшего уровня общности, полностью освободит математику от влияния культурной среды и позволит человечеству выйти на принципиально новый уровень познания абсолютного логоса.

4. Несколько слов о ключевом понятии статьи — о «познавательной установке».

А. Г. Барабашев определяет «познавательную установку» как «принадлежащую культуре совокупность принципов познания реальности».

Данное определение оказалось весьма эвристичным и позволило автору выстроить элегантную цепь рассуждений, приводящую к искомым выводам, и хорошо организовать огромный материал. Вместе с тем, по моему мнению, данное определение имеет некоторый недостаток, устранение которого позволит автору сделать свою концепцию существенно более полной и убедительной.

Дело в том, что термин «установка» уже долгое время активно используется общей психологией, социальной психологией, социологией и другими науками в несколько отличном смысле. Термин «установка» был введен в общенаучный оборот немецким психологом Л. Ланге (1888), экспериментально доказавшим, что скорость реакции индивида на внешнюю ситуацию зависит от его предрасположенности к адекватному восприятию данной ситуации.

С тех пор под «установкой» в социальных и психологических науках понимают состояние готовности или предрасположенности субъекта к действию каким-то определенным, жестко канализированным образом. Т. е. в понятии «установка» акцент делается не на то, каким именно образом (на основе каких норм и принципов и в каком направлении) действует (или собирается действовать) субъект, имеющий «установку», а на сам факт его готовности действовать некоторым канализированным способом, на уровень его мобилизованности, на действие определенного вида. При этом изучаются скорость реакций субъекта действия на определенные стимулы, его эмоционально-волевая и морально-аксиологическая (мотивационный блок) сферы и т.п.

Применительно к комментируемой статье сказанное означает, что не вполне правомерно говорить о «познавательной установке» какой-то эпохи и цивилизации в отрыве от рассмотрения общих и дифференциальных характеристик научного сообщества этой эпохи в качестве целостного субъекта действия и носителя некоторой «познавательной установки». Тем более, что «познавательная установка» научного сообщества в целом есть (в значительной мере) «средневзвешенное» синтетическое выражение множества индивидуальных и групповых «познавательных установок» членов данного сообщества, которые далеко не всегда тождественны. В этом смысле *для произвольно взятой культуры «познавательная установка» есть состояние готовности конкретного научного сообщества к реализации определенного типа познания в фиксированном временном диапазоне.*

Таким образом, рассматриваемая концепция, по моему мнению, существенно обогатилась бы, если бы автор (наряду с доминирующими математическими принципами и латентными гносеологическими императивами той или иной культуры) анализировал и современное этой культуре математическое сообщество (носителя установки), его совокупное ментальное, аксиологическое и психо-энергетическое состояние, диапазон его возможных реакций на давление культурной среды.

В противном случае, более целесообразно говорить о типе познания или о системе познавательных стандартов (канонов, норм, принципов, стереотипов) некоторой культуры (эпохи), нежели о ее познавательной установке.

ОТВЕТ АВТОРА

1. Среди многочисленных замечаний В. Э. Войцеховича остановлюсь на следующих:

— деление на «практическую» и «теоретическую» математику устаревает, поскольку платоновское объективистское деление бытия на «мир идей» и «мир вещей» неэффективно в коммуникативной парадигме, а также, поскольку будущая цивилизация «должна быть гораздо более практической и одновременно более духовной»;

— в познавательной установке имеется много потенциальных формальных структур, и поэтому мое выделение формальных структур произвольно;

— построенный прогноз основывается на формальном редукционизме, который явно недостаточен для выявления направления развития современной математики.

Отвечу на эти замечания.

Во-первых, сравнительная познавательная установка не может не быть объективистской. Объективизм нарушается, как я полагаю, только в периоды разрушения сравнительных познавательных установок. Именно такой период наблюдается ныне, и это порождает иллюзию окончательного разрушения объективизма. Мне кажется, что отход от объективизма — временное явление. Соответственно, фундаментальное разделение исторических периодов практической и теоретической математики неустранимо.

Во-вторых, я был бы рад, если бы мой уважаемый оппонент показал, как из описанных в статье познавательных установок можно получить другие формальные структуры. Это перевело бы нашу полемику в другое русло, русло обсуждения вариативности теоретических математик одной эпохи. Пока же это замечание выглядит как не подтвержденная гипотеза.

В-третьих, я согласен с тем, что формальный редукционистский поход к построению прогноза не достаточен. В настоящее время я пытаюсь найти способы его дополнения с помощью содержательного анализа современной математики — ее основных проблем, теорий, результатов.

Остальные замечания В. Э. Войцеховича (о преходящей роли алгебраизации, о «творческой» математике, о соотношении теоретико-категорной и аттракторной структур) выходят за границы моего ответа, и я признаю их ценность для дальнейшей работы в направлении построения прогностически ориентированной философии математики.

2. Я согласен с С. С. Демидовым, что социокультурный контекст, а точнее, как я считаю, — смена познавательной установки, как бы концентрирующая в себе эпохальное изменение социокультурного контекста, — только в некоторые важнейшие периоды истории непосредственно определяет будущее развитие математики. Эти периоды в других моих работах названы периодами главенства «практической математики». В другие, «нормальные» периоды, познавательная установка принимается как набор самоочевидных и, зачастую, не эксплицированных принципов и допущений. На первый план в «нормальные» периоды истории выходит внутренняя логика развертывания теории, исходящая из данной познавательной установки. Конечно, конфигурация (т. е. доказанные утверждения, перечень теорий, их субординация) получающегося в процессе такого развертывания теоретико-математического знания не может не зависеть от того, в какую сторону направлены интересы ведущих представителей математического сообщества (например, как я полагаю, проблемы Гильберта в существенных чертах определили вектор развития математики XX столетия). Однако эта конфигурация целиком умещается в рамки, заданные формальной структурой познавательной установки, будучи одной из ее возможных реализаций.

3. В целом благожелательных замечаниях А. Н. Кричевца имеются два критических момента (об отсутствии прямой связи формальной структуры познавательной установки и формальных оснований математики; о других формальных основаниях математики Нового времени). Мне не ясно, какие другие формальные основания математики Нового времени имеются в виду, цитата из письма Н. Н. Лузина недостаточно проясняет этот вопрос, поэтому для обсуждения данного замечания нет должного материала.

Позволю себе не согласиться с первым замечанием об отсутствии прямой связи формальной структуры и формальных оснований математики. Эта связь имеется, и она построена по принципу дополнения формальной структуры, а именно ее замыкания (результаты операций принадлежат структуре). Мне представляется, что такое замыкание единственно, хотя в данной статье эта задача только намечена, но не реализована.

4. В. Я. Перминов указывает, что для превращения предложенной схемы реконструкции истории математики в «отражающую сущностные характеристики математики» необходимо теоретическое обоснование, проистекающее из природы математики. Такое обоснование, как полагает мой оппонент, не может быть социокультурным, поскольку фундаментальные первичные интуиции одинаковы для всех исторических периодов развития математики. Я согласен с тем, что историю можно «упаковать» в различные схемы, и что философское обоснование схем делает их более обоснованными в сравнении с другими схемами, не обладающими таким обоснованием. Однако, во-первых, только видимое совпадение происходящих изменений (фиксируемое в течение *длительного времени*) с предсказанными в прогнозе делает его сущностным, т.е. верифицированным. Поэтому прогноз может быть опровергнут не сразу, но — наверняка. Во-вторых, возможны различные философские «упаковки» прогнозов, и, не исключено, что последовательность познавательных установок и их формальных структур может быть основана на априорных первичных интуициях, хотя мне этот вариант представляется сомнительным.

5. Я хотел бы сопоставить два замечания В. К. Петросяна. Одно замечание — что познавательную установку лучше определять не через состояние культуры в целом (принадлежащая культуре совокупность принципов познания), а через познавательное состояние научного сообщества, складывающееся из познавательных устремлений его участников. В другом замечании говорится, что каждый отдельный математик *в принципе* не ограничен никакими объективными интеллектуальными рамками и может создавать любые новые математические системы.

Из сопоставления этих двух замечаний следует, что познавательная установка математического сообщества данной эпохи не может быть монолитной, что в ней имеется различие познавательных устремлений и порожденных ими конструкций. Но, как я считаю, «крайние» конструкции и познавательные устремления, сильно отличающиеся от общепризнанных познавательных принципов, обычно отсекаются, а их авторы — испытывают трудности признания.

Хотелось бы остановиться и на замечании о существовании двух типов прогноза – «объективистского» и «нормативного». Конечно, моя статья построена в жанре «объективистского» прогноза. Более того, в заключительном параграфе книги «Будущее математики» (М., 1991) я пытался обосновать утверждение, что переход от такого прогноза к «нормативному» требует превращения математического сообщества в рефлексивную систему (именно, обладающую «феноменом Мидаса») по отношению к высказанному вербальному «объективистскому» прогнозу.

ГОСПОДСТВУЮЩИЕ СТИЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ*

Войцехович В. Э.

Человек — это стиль.
Ж. Бюффон

Стиль — понятие, развивавшееся тысячелетия в искусстве, литературе, языке и означавшее целостность образной системы, единство средств художественной выразительности. Например, в архитектуре известны стили — античный, готика, классический, барокко, модерн и другие. С 70-х годов XX в. в исследованиях по истории и методологии науки было введено и широко обсуждалось понятие стиля научного мышления.

Аналогично можно говорить о стиле мышления в математике: это целостное единство содержания и формы математического творчества и его результата — научного произведения; это единство идеи и ее доказательства (обоснования и изложения). Стиль является неотъемлемой характеристикой личности автора и его математического творчества (под личностью здесь понимается отдельный ученый, сообщество, научная школа).

Каждый выдающийся математик отличался собственным стилем творчества, проявлявшимся во многих произведениях. Для Пифагора и его школы характерен мистико-математический стиль, т.е. изотерическое мировоззрение, отрывки из которого выглядят для непосвящённого то как религиозное, то как философское знание. Для Демокрита — математический атомизм, ставший первым предвестником дифференциального и интегрального исчислений. Для Евклида — строго последовательный, предельно лаконичный, я бы сказал, аскетический стиль аксиоматики. Для Архимеда — гениальный своей простотой и смелостью механико-геометрический стиль доказательств (во многом схожий с корпускулярно-механическим стилем И. Ньютона, понимавшего мир как совокупность корпускул, движущихся по одним и тем же неизменным, раз навсегда установленным законам). Стиль Архимеда и Ньютона возникает при восхождении мысли от содержательного к формальному, от конкретно-физического к абстрактно-математическому уровню понятий.

Прямо противоположен по направленности стиль Г. Лейбница, шедшего от философии к математике, от философско-теологической модели бытия (монадологии) к более конкретному уровню — анализу бесконечно малых.

Стиль голографичен, т.е. узнаваем по отдельному произведению. Прочитав кусок из древнего текста об аксиомах и постулатах, мы сразу узнаем его автора — Евклида. Несколько страниц из книги XIX века об основаниях геометрии однозначно укажут на их автора — Н. И. Лобачевского, Я. Бойаи или Б. Римана. Поэтому и в математике работает герменевтика — теория понимания, возникшая в типично гуманитарных областях — теологии, филологии, юриспруденции.

Стоит отметить известную мысль Ф. Клейна о двух типах математиков — интуитивистах и формалистах [1]. Первые стремятся проникнуть в сущность проблемы и «увидеть» результат (путем озарения, инсайта), потом сформулировать теоремы и доказать. Но доказательство для них — дело второстепенное.

Для вторых наоборот: главное — доказать теорему — тщательно, скрупулезно, не только одним, но и вторым, и третьим способами, чтобы проверить и перепроверить доказанное, убедиться в получении «абсолютной истины».

Большинство выдающихся математиков относятся к интуитивистам (в последние века — П. Ферма, Р. Декарт, Л. Эйлер, Н. И. Лобачевский, Б. Риман, А. Пуанкаре, Л. Брауэр, Г. Вейль и др.). Но немало известных ученых гармонично сочетали в своем стиле и глубочайшую интуицию, и строгую логику — Гаусс, например.

Можно говорить также о стилях, определяемых излюбленными методами математика, либо связями с приложениями, либо истоками идей (из естествознания, управления, философии или даже политики).

Как видим, стили чрезвычайно разнообразны и определяются неповторимым сочетанием следующих трёх факторов:

1. Личностью учёного (его одухотворённостью, эмоциями и интеллектом, памятью, волей, системой ценностей, преобладанием дискретных или непрерывных процессов в мышлении, нацеленностью на открытие, новизну или на обоснование ранее полученного знания, на доказательство, ориентацией на красоту идеи или на пользу и т.п.). Всё это составляет гуманитарную, субъективно человеческую и наиболее богатую составляющую стиля.

2. Специфическими свойствами математического знания (требованием его аподиктичности — доказательности и неопровержимости, трансцендентностью, умозрительностью и формально-знаковым характером, тремя фундаментальными структурами — арифметической, алгебраической, топологической, ориентацией на истину, а не пользу, его связью с приложениями в естественных и гуманитарных науках). Это «объективная» составляющая стиля, наиболее независимая от личности учёного.

3. Социально-культурным контекстом данного времени, определяемым: а) спецификой культуры — восточной или западной; б) господствующим мировоззрением — мифологическим, религиозным или философским, а также ведущей ориентацией эпохи — на гармонию (как в древней Греции), или на духовное совершенствование (как в Средние века), или на материально-технический прогресс (как в Новое время, в последние четыре столетия), или на поиски гармонии человека и природы (с XXI века); в) нацеленностью научного сообщества в текущий период математики на эмпирические или теоретические методы обоснования теорем, на алгоритмический (генетический) или аксиоматический способы развития и изложения полученной информации, на конкретные или абстрактные задачи, на практический или теоретический способы организации математического знания и т.п.

Эти три фактора во взаимодействии и образуют необычайное богатство математических стилей как единства формального и содержательного, духовного и материального, фантастического и реального, гуманитарного и естественнонаучного и других элементов знания.

Каковы же главные стили, как их классифицировать, систематизировать — по каким основаниям?

Большинство людей мыслят в рамках двузначной логики, поэтому и стили мышления удобнее всего представить как расположенные между двумя противоположными полюсами A и $\neg$A (как аттракторами — центрами притяжения мышления самых различных ученых). Отсюда естественно ввести классификацию стилей по линии противопоставления: 1) содержательный стиль — формальный стиль (или близкое к ним деление: конкретный — абстрактный стиль, частное — общее, имея в виду стремление одного ученого к решению конкретных задач, а другого наоборот — к построению абстрактно-формальных схем и их применению к решению частных вопросов)[1]; 2) дискретный — непрерывный (в частности, алгебраический — геометрический) [2, с. 24—41], 3) платонистский — неплатонистский (в частности, классический, в духе теоретико-множественной математики, — интуиционистский, в духе интуиционизма Л. Э. Я. Брауэра). Кроме подобных делений с философско-методологических позиций, возможны гуманитарные классификации: 1) национальный — интернациональный, 2) индивидуальный, неповторимый — повторяющийся, 3) временный, относящийся к данной эпохе — «вечный», внеэпохальный, 4) относящийся к определенной математической школе — «внешкольный» и т.п.

Рассмотрим их подробнее на примерах сопоставления стилей отдельных ученых. Из сравнения и будет видно — чей стиль более содержателен, чей более формален, более непрерывен или более дискретен.

Сравним И. Ньютона и Г. Лейбница.

Области их интересов в математике во многом сходны — это начала дифференциального и интегрального исчислений, вариационного исчисления, аналитическая геометрия. Но постановка проблем, формулировка задач, подходы к их решению, методы решения, философия и особенности мышления — различны и нередко противоположны.

Ньютон во всем основателен, фундаментален, требователен к себе — вследствие этого медлителен. Лейбниц гораздо более разбросан и тороплив. Получив результат, спешит опубликовать. Англичанин эмпиричен, строит приборы, проводит тщательную проверку выводов, стремится избегать гипотез, не обоснованных опытом («hypotesis non fingo»). Немец — сторонник чистого умозрения, теоретик, не слишком затрудняющий себя обоснованием многочисленных идей (догадок, обобщений, аналогий), непрерывно выдвигаемых им. Ньютон идет от конкретного к абстрактному — от фактов к законам и теории в целом, математика для него — лишь часть естествознания. Лейбниц обычно мыслит от общего к частному, от абстрактного к конкретному — от философской схемы монадологии к ее интерпретации в математике — идеям дифференциала и интеграла. Математика и логика для него — нечто вроде формального раздела философии. Создатель «Математических начал натуральной философии» мыслит целостными геометрическими образами, ему по душе правополушарное мышление, мышление непрерывным. Основоположнику математической логики ближе алгебраические формы, дискретные символы, левополушарное мышление.

Таким образом, хотя стиль каждого ученого глубоко индивидуален, а выдающегося — просто неповторим, тем не менее можно сделать вывод, что стиль Ньютона в основном геометро-механический, а стиль Лейбница — алгебро-логический. Это вполне соответствует и культуре их стран. Англия, как известно, родина эмпиризма, оплот индуктивизма и индивидуализма. Германии же более присуще чисто теоретическое, формально-схематическое мышление, движение мысли от абстрактного к конкретному, а следовательно — дедуктивизм, стремление подчинить индивидуальное, частное — тоталитарному целому.

Сходным образом, можно сравнить стили мышления Д. Гильберта и Л. Э. Я. Брауэра. Они заложили две программы обоснования математики —

формализм и интуиционизм. Сходство и различие их стилей (как специалистов по основаниям) легче всего обнаружить при сравнении позиций в дискуссии по основаниям математики, которая проходила то разгораясь, то затухая в 1910—1920 годы. Обсуждалось значение теории множеств для математики, роль аксиоматического метода, формализации, абстракции актуальной бесконечности, законы логики (в особенности закон исключенного третьего), связи между математикой, языком, логикой, существование математических объектов, природа и методы математического мышления, проблема реальности.

Брауэр критикует классическую (теоретико-множественную) математику за необоснованность, неубедительность ее слишком умозрительных, «лихих» абстракций. Гильберт защищает идеалы Кантора. Брауэр опирается в качестве философского фундамента на «непосредственно данную реальность», на переживания индивида — в этом смысле ему близки буддизм, экзистенционализм, философия потока сознания. Гильберт берет за основу объективную реальность, данную в коллективном чувственном опыте. Его философия — платонизм и неокантианство.

В дискуссии обсуждались 5 главных проблем: 1) проблема непротиворечивости и полноты теории (математики); 2) обоснования теории; 3) существования математических объектов; 4) природы познания; 5) реальности и ее единства [3; 4; 5; 6].

***Проблема непротиворечивости и полноты*[2].**

Брауэр: классическая математика противоречива, т.к. опирается на теорию множеств, содержащую парадоксы. Новая (интуиционистская) математика рассматривает мир мысленных процессов, развертывающихся в последовательность элементарных актов (шагов). Результаты этих процессов — математические объекты и конструкции.

Гильберт: классическая математика непротиворечива, ее теории полны, т.к. а) ее конструкции продуманы и признаны математическим сообществом, б) она прекрасно работает в практике. Бессмысленна замена классической математики на интуиционистскую, т.к. последняя неполна, это обрезанная (секвестированная) математика.

Проблема обоснования.

Брауэр: только такая математика обоснована, которая соответствует критериям интуиционизма как конструктивному обобщению человеческого опыта. Аксиоматический метод и формализация не выражают сущности математического мышления, ибо скрывают за языковой формой эту сущность. Убедительное обоснование математики дает лишь интуиция как непосредственное внутреннее безъязыковое переживание образов, идущих из глубины «я». Лишь по требованию социума ученый вынужден облекать эти образы в языковую форму и тем искажать их (в точности, как у Ф. И. Тютчева: «мысль изреченная есть ложь»). У Гильберта же математика вырождается в игру формулами.

Гильберт: классическая математика обосновывается коллективным опытом научного сообщества. Окончательное обоснование даст теория доказательств. Она является «протоколом о правилах мышления». Ее существенной частью являются формализм и аксиоматический метод. Задача науки — освобождение от субъективизма, который достиг своего наивысшего выражения в интуиционизме.

Проблема существования математического объекта.

Брауэр: математический объект существует, если он построен явно или его построение возможно с помощью алгоритма. Теоремы о существовании без построения не имеют никакого значения.

Гильберт: объект существует, если он непротиворечив. Доказательсва существования сокращают и экономят мысль. Они всегда были вехами математического прогресса.

Проблема природы мышления.

Брауэр: математическое мышление опирается на интуицию (прежде всего интуицию времени, интуицию раздвоения единого). Существуют исходные принципы мышления, но они лишь результат свободного творения математика-индивида. Изначально математическое исследование не зависит ни от языка, ни от логики. Главный метод мышления — интроспекция. Обыденное знание выше формального. Существуют неразрешимые проблемы.

Гильберт: математическое мышление основано на интеллектуальной ясности. До математики мы имеем опытные представления, конкретные объекты. Математика начинается со знаков, обозначающих эти объекты, и с логики, дающей надежные выводы. Математика интерсубъектна (является результатом коллективного творчества) и, вообще говоря, объективна (в платонистском смысле). Формальное знание выше обыденного. Мир познаваем, все математические проблемы в принципе разрешимы.

Проблема реальности и единства мира.

Брауэр: реальность — это сознание индивида, это образы, мыслеформы, восходящие от внутренней сферы к внешнему миру. Это субъективная реальность. Существует ли объективная реальность, единая для всех индивидов, — открытый вопрос.

Гильберт: существует объективная реальность, данная нам наглядно, в качестве чувственных переживаний до какого-то ни было мышления. Единство мира проявляется в математике как универсальном языке, раскрывающем сущность мира.

Как мы знаем, в споре не оказалось победителя. Интуиционистская и теоретико-множественная математики дополняют друг друга.

Гильберт и Брауэр работали в различных областях. Гильберт ясен, последователен, логичен. Более склонен к формальному мышлению, что особенно видно на теории доказательств. Он платонист и кантианец. Его стиль можно назвать формально-платонистским. Это господствующий стиль, т. к. абсолютное большинство математиков — платонисты.

Брауэр же пытался оторваться от платонизма, порвать с античной традицией математиков оперировать идеальными объектами подобно материальным предметам. Отсюда впечатление противоречивости. Хотя, с точки зрения классически мыслящего ученого, он действительно противоречив: работал и теоретико-множественными методами (в топологии), и интуиционистскими, создавая принципиально новую неплатонистскую математику.

Определенными сдвигами в неплатонистском направлении стали также конструктивизм, теория категорий, некоторые теории в логике. Действительно, если радикализировать позицию Брауэра, высказать её ещё яснее, убрать из его философско-математических высказываний натуральные числа, то останется только алгоритм. Тогда не важно ***ЧТО*** преобразуется, а важно ***КАК*** (само преобразование). По идейному подходу это близко к теории алгорифмов, λ-исчислению А. Черча, теории категорий. В одном из направлений конструктивизма — теории алгорифмов А. А. Маркова (мл.) главное — само преобразование, но алгорифм понимается платонистски. Однако уже λ-исчисление, метафорически выражаясь, логика без переменных. Теорию категорий Ю. И. Манин назвал социологическим подходом [7], т.е. это как бы структуры без элементов, на что первым обратил внимание Ф. У. Ловер.

В чём состоит неплатонистский стиль мышления?

— В преодолении мышления целостными «недвижными» понятиями, подобными языковым формам или материальным вещам, и утверждении мышления движущимися образами, становящимися мыслеформами, следовательно, переходными, дробными объектами — фракталами; оперирование ими требует и неплатонистской логики — мышления как бы дробными понятиями, суждениями, умозаключениями;

— в отказе от классической тройки: элемент, структура, система и утверждении системы без элементов, но со структурой (законом);

— в отказе от субъект-объектного расщепления бытия, признании его ограниченности и в утверждении единого бытия, в котором слиты объект и субъект.

Подобно тому, как в начале XX века в естествознании возникла неклассическая наука, а к концу века — постнеклассическая, также возникла неклассическая математика (интуиционизм), а позже стала развиваться постнеклассическая (например, фрактальная геометрия). Их отличие — в сдвиге к картине мира, в которой в математическое знание включён идеальный мыслящий субъект[3], в отказе от жёсткой структурности (как в теоретико-множественной картине). Есть классы и структура, но нет элементов. Это предполагает предельно высокий уровень абстрактности (отсюда у конкретно мыслящих математиков возникает ощущение пустоты категорных форм).

Неплатонизм предполагает мышление самоподобными объектами — фракталами. Их странность в том, что невозможно выделить части (они совпадают с целым) — у них нет структуры как связи элементов. В то же время есть закон. Например, это формула Б. Мандельброта: $Z_{n+1} = Z_n^{\,2} + C$.

Таким образом, интуиционизм, метаматематика, фрактальная геометрия образуют зачатки неплатонистской математики — области свободно становящихся объектов, относительно которой возникает ощущение, что в ней ***нет*** классических (теоретико-множественных) понятий, или их может не быть — они уходят на второй план. В то же время и здесь ***есть*** неизменные идеальные объекты, например, алгоритм, фрактал (как формула, организующая его, или соответствующая геометрическая картинка, мыслимая как завершённое целое) — но это при платонистской интерпретации, тогда исчезает специфика неплатонизма, его шарм, брауэровский привкус.

Мы получаем противоположности, отрицающие друг друга (***нет*** и ***есть***) — с точки зрения двузначной логики.

Учёному же, стремящемуся к мудрости (философу), необходимо преодолеть ограниченность двузначности — подняться над противоположностями и, следовательно, искать ***между*** «существует» и «не существует», т. е., в области становления — именно здесь область роста постнеклассической математики.

Эта область заполнена одними лишь монстрами — странными объектами, подобно кентавру совмещающими в себе взаимоисключающие свойства, например, наличие структуры при отсутствии элементов, неподвижность и вечное движение, живость и мертвенность — как фракталы, а также непрерывность при недифференцируемости, конечность площади при бесконечности периметра — как давно открытые некоторые функции и фигуры. Причём исторически первый монстр — это иррациональные числа (VI в. до РХ). В гармонической картине мира древних греков этих чисел как бы нет, и в то же время они налицо — как диагональ квадрата.

На единичном отрезке прямой рациональные числа (вида m/n) образуют множество меры 0 (их почти нет), а иррациональные — меры 1 (это почти все числа). Подобным же образом почти всё, что есть во всей математике как мире всех возможных миров — это монстры, а прекрасные гармоничные непротиворечивые понятия образуют множество меры 0[4]. Это наилучший из всех возможных миров. Это наш мир, поскольку человеческий род в принципе прекрасен и может устойчиво существовать (жить) лишь в окружении прекрасного. Так монадология Лейбница и антропный принцип сходятся в хаосе — промежуточной области вечного становления, между «да» и «нет». Хаос здесь выступает своей творящей стороной.

Таким образом, сравнивая Гильберта и Брауэра, мы видим, что неплатонистский стиль последнего отрицает оперирование «ставшими», неподвижными формами и ведет к математике «абсолютно текучего», в котором нет целых понятий, но (гипотетически) возможны фрактальные — дробные понятия, суждения, умозаключения. Философией, наиболее близкой к такой — синергетической трактовке Брауэра, является даосизм как учение о становящемся, но никогда не ставшем бытии.

Стиль Брауэра (как основателя интуиционизма) можно назвать интуиционистско-неплатонистским, (предшествующим синергетическому стилю мышления). Жизнь=математика=музыка=искусство — все слилось в его противоречивой, мятущейся и мятежной душе отрицателя основ, стремящегося к Единому, понимаемому в духе восточной философии. Известные слова Бюффона «Человек — это стиль» (как в быту, так и в науке) относятся ко всем описанным ученым. В частности, манера поведения, особенности личной жизни Брауэра коррелируют с его поисками неплатонизма в математике.

Подобные пары математиков, дискутировавших или параллельно совершавших одни и те же открытия и отличавшиеся стилями, неоднократно встречаются в истории науки, на что обращает внимание И. М. Яглом [8]. Он обращает внимание на универсальность двух типов мышления: левополушарного и правополушарного, арифметико-алгебраического и геометрического. Именно этим отличаются Пифагор и Фалес (как создатели теоретической математики), Аристотель и Платон (разработчики философии математики, один — создатель логики, второй — его учитель, мысливший яркими картинками), Я. Бойаи и Н. И. Лобачевский (создатели неевклидовых геометрий), Г. Грасман и У. Р. Гамильтон (внешняя алгебра и кватернионы), К. Вейерштрасс и Б. Риман (алгебраическая теория функций и геометрическое направление теории аналитических функций), С. Ли и Ф. Клейн (теория групп) и другие.

Лево- и правополушарный типы мышления обусловлены спецификой физиологии человеческого мозга и лежат в основе соответствующих стилей. Если согласиться с Бюффоном, что стиль несёт в себе индивидуально-личностный привкус, то:

стиль = тип + индивидуальность.

Таким образом, среди гигантского количества стилей можно выделить главные и классифицировать их по парам противоположностей:

— содержательный — формальный (близкое деление: конкретный — абстрактный);

— дискретный — непрерывный (близкое деление: арифметико-алгебраический — геометрический);

— платонистский — неплатонистский (исторически-преходящее деление: теоретико-множественный — интуиционистский), как мышление дискретными целостными понятиями и мышление переходными, дробными, фрактальными мыслеобразами.

XX век впервые после великих греков через интуиционизм, конструктивизм, метаматематику, теорию категорий, фрактальную геометрию обозначил отход от господствовавшего тысячелетия платонистского стиля.

Примечания

[1] В паре противоположностей «стиль А — стиль В (˥А)» А имеет смысл лишь в отношении к В, но не само по себе (так же и В), поэтому необходимо сравнивать двух авторов. Так, мы можем выявить стиль Лобачевского лишь сопоставляя и даже противопоставляя ему стиль Бойаи при решении проблемы пятого постулата, и только в таком контексте имеет смысл говорить о непрерывности, геометричности стиля первого и дискретности, алгебраичности второго, содержательности одного и формальности другого, а также упорстве, терпении русского учёного и эмоциональности, срывах венгерского.

[2] Излагаемые далее позиции ученых по той или иной проблеме являются либо их собственными высказываниями, либо адекватным выражением их мнения.

[3] Так, в инуиниционизме есть «свободно становящиеся последовательности», подразумевающие непредсказуемость и свободу. Более того, по мнению Брауэра, в математику необходимо включить понятие «творящего субъекта» и, следовательно, сделать её по крайней мере двуслойной: с новым «творящим» уровнем и старым «сотворённым». Сходные мотивы присутствуют и в метаматематике. Поскольку цель метатеории — анализ и объяснение объектных теорий, постольку первая выступает как бы в роли субъекта по отношению ко вторым. Аналогиия подтверждается и тем, что метатеория принципиально богаче объектных теорий и несёт в себе специфические рефлексивные понятия.

[4] Сходным образом с позиций концепции фракталов (раздела синергетики) почти всё в природе — фракталы, а конечные неизменные вещи — почти отсутствуют.

Список литературы

1. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XX столетии. М.—Л., 1937. Ч. 1.
2. *Вейль Г.* Математическое мышление. М., 1989.
3. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.—Л., 1948.
4. *Рид К.* Гильберт. М., 1977.
5. *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965.

6. *Панов М. И.* Методологические проблемы интуиционистской математики. М., 1984.

7. *Манин Ю. Н.* Лекции по алгебраической геометрии. М., 1970. Ч. 1. Аффинные схемы.

8. *Яглом И. М.* Почему высшую математику открыли одновременно Ньютон и Лейбниц? // Число и мысль. М., 1983. Вып. 6. С. 99—125.

КОММЕНТАРИЙ

В. В. Тарасенко

Противопоставление платонизм-неплатонизм, на мой взгляд, не совсем корректно, во-первых, из-за не совсем удачного термина «неплатонизм» (лучше всё-таки найти позитивный термин), а во-вторых, из-за того, что правильно говоря о троичности, о поиске третьего, автор скрывает возможность для третьего в дуальной связке платонизм-неплатонизм.

По сути дела, речь идет о выявлении приближения к пониманию целостности, связности познающего и познаваемого, расположенной между эмпирическим (и потому временным, изменчивым, историческим, частным) и универсальным (и потому абстрактным, вневременным, неизменным, вечным, общим).

И с этой точки зрения, разговор о стиле очень перспективен — он вносит антропологическое измерение в математику. Человек всегда между временным и вневременным. Человек в третьем измерении. В третьем времени.

Антропоморфна ли математика? Скорее да, чем нет. Если бы мы были мыслящими нелокализованными сгустками какой-нибудь аморфной субстанции, то возможно, у нас бы была совсем другая математика, в которой точки линии и плоскости были бы трудно представляемыми играми ума нескольких странных чудаков.

Надо сказать более, поскольку антропология вынуждена рассматривать различные человеческие культуры и субкультуры (нет единой культуры, и как следствие одной на всех антропологии), то и вполне корректно рассмотрение стилей как культурных и субкультурных особенностей в математическом мышлении. С этой точки зрения, разделение на «островной» и «континентальный» стили вполне корректно и интересно.

Лейбниц, на мой взгляд, по стилю мышления был французом, а не немцем. Лейбниц —певец рекурсий, сверток-разверток, складок, самоподобий. В этом есть некоторое изящество, отсутствие немецкой монументальности.

Может быть поэтому, мотивы его творчества используют в своих работах такие, казалось совсем не рядоположенные авторы как Жиль Делез и Бенуа Мандельброт.

ОТВЕТ АВТОРА

Говоря о неполной корректности противопоставления платонизма и неплатонизма, комментатор и не прав, и прав. «*Не прав*» в том смысле, что платонизм (П) является наиболее влиятельным течением среди математиков, многие из них воспринимают только это течение. Поэтому приходится говорить о неплатонизме (не-П) как собирательном образе маргинальных течений (среди которых, например, интуиционизм). В рамках 2-значной логики методически ясно только противопоставление П и не-П. Их сумма покрывает весь универсум U течений в современной философии математики. «*Прав*» комментатор, говоря о сокрытии третьего в дуальной связке П — не-П. Но третья, обобщающая позиция выходит за рамки современности и относится к будущей философии математики (и науки вообще) и будет существовать в обобщенном, расширенном универсуме $U' = U + DU$, в котором П и не-П- весьма частые случаи.

Согласен с мнением и об определенной антропоморфности математики. Среди математиков распространено платонистское представление об объективности мира идей, его независимости от людей. Это верно, но только если под людьми здесь понимать отдельных индивидов, а не человеческий род в целом.

Современные эзотерические учения и эскизы новой научной парадигмы исходят из представления о том, что мир идей является частью ноосферы, точнее различных *эгрегоров* как совокупностей очень общих идей, образов, переживаний, которые существуют вне физического пространства. Из них ученые способны черпать мысленные формы, разрешающие поставленные наукой задачи. Но воспринять они могут только те идеи, которые способны понять, т.е. формы, соответствующие структуре *человеческого мышления.* В этом смысле теоретическая математика — совокупность антропоморфных мыслеформ. Нечеловекопобные, негуманоидные разумные биовиды, видимо, могут ограничиваться практической математикой.

Выдающийся американский математик С. Маклейн (создатель теории категорий) назвал математику Протеем (чудовище в мифологии древних греков, могущее принимать любой вид). Математический Протей может использоваться в любой конкретной области, принимать произвольный образ, но в своей основе он остается самим собой. Сущность Протея — это твоя душа, читатель. Поэтому математика-Протей — это тоже глубоко антропоморфный образ.

ИННОВАЦИОННАЯ ВОЙНА КАК СПОСОБ ОПТИМИЗАЦИИ ЭВОЛЮЦИИ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Петросян В. К.

В настоящей статье в общем виде рассматривается новая технология массового познания и творчества, способная (при ее адекватном систематическом использовании) существенно ускорить решение фундаментальных научных, технических и общесоциальных проблем, стоящих перед человеческим сообществом на рубеже тысячелетий.

Речь идет об особом механизме организации массового гносеологического процесса в наиболее сложных междисциплинарных предметных областях, получившем название «инновационная война».

Данная технология многие годы разрабатывалась и шлифовалась автором в рамках Программы «Метаапейрон», реализуемой ФФИ «Апейрон». В частности, некоторые элементы технологии инновационных войн были в экспериментальном порядке успешно применены в ходе совместной инновационной игры ФФИ «Апейрон» и ЦСГО МГУ по теме «Университетское образование в третьем тысячелетии», состоявшейся в 1991 году (около 200 участников).

Технология инновационных войн по состоянию на сегодняшний день крайне сложна и многоаспектна, что делает невозможной задачу сколько-нибудь подробного описания даже основных ее подсистем и компонентов в ограниченной по объему статье.

Поэтому основные акценты в настоящей статье будут сделаны (с учетом специфики предполагаемой читательской аудитории) на общелогических и гносеологических особенностях этого нового «органона» и на возможности его применения к задаче оптимизации эволюции логико-математических систем.

Понятие и сущность инновационной войны

Для полного определения какого-либо достаточно простого объекта или явления, как правило, достаточно выявить его ближайший род, указать видовое отличие и проследить эволюцию.

Применительно к сложным синтетическим объектам мышления такой подход часто оказывается недостаточным. Дело в том, что синтетический объект часто имеет не один, а несколько ближайших родов, одинаково важных для его правильного понимания и интерпретации. В таких случаях вначале дают частные дефиниции конструируемого идеального объекта — понятия, — а потом объединяют их в некоторое интегральное определение, представляющее собой своего рода «семантический конфигуратор» предшествующих.

Именно к таким сложным синтетическим объектам мышления и относится понятие «инновационная война».

Выделим (из множества необходимых и возможных) лишь два родовых понятия, наиболее существенных, на наш взгляд, для определения понятия «инновационная война». Эти родовые понятия суть следующие: война и логическая система.

Следующим шагом мы должны представить «инновационную войну» как особый вид войн и логических систем.

Рассмотрим вначале «инновационную войну» как войну особого рода.

Определим войну вообще как способ насильственного разрешения противоречий произвольной природы между социальными субъектами.

Соответственно, множество войн наиболее существенным для нашего изложения способом можно разделить на классы по критерию доминирующего типа применяемого в ходе боевых действий насилия. Существуют следующие наиболее «типологически чистые» виды насилия: физическое, экономическое, психологическое и интеллектуальное.

Это дает нам четыре основные категории войн: физические, экономические, психологические и интеллектуальные.

Физические войны — это войны, в которых доминирующим видом применяемого насилия является насилие физическое, направленное на уничтожение (или подавление дееспособности) живой силы противника.

Экономические войны — это войны, в которых доминирующим видом применяемого насилия является экономическое насилие, направленное на минимизацию материальных ресурсов существования противника или на контроль над ними.

Психологические войны — это войны, в которых доминирующим видом применяемого насилия является психологическое насилие, направленное на подавление психологической устойчивости, внутренней я-концепции противника и/или на дискредитацию последнего в глазах более широкого социального сообщества. К психологическим войнам можно отнести, кроме прочего, все виды недобросовестного идеологического противоборства, направленные на дезавуирование противника как такового, а не его интеллектуальной позиции, софистические споры, «войны компроматов» и т.п.

Особой разновидностью психологических войн, где психологическое насилие скрывается под маской мнимой объективности, является известная еще в античности логомахия (от греч. «логос» — слово и «махе» — спор) — такое интеллектуальное противостояние, когда стороны, не определив вначале строго предмет спора и критерии истинности утверждений, полемизируют друг с другом по той лишь причине, что оперируют неточными терминами, преследуя при этом, по-видимому, весьма далекие от поиска истины цели.

Общей чертой названных широко представленных в человеческой истории видов войн является то обстоятельство, что перечисленные основные виды насилия применяются, главным образом, непосредственно к противнику, силовое воздействие осуществляется «на игрока», а не «на мяч».

В этом смысле совершенно особым и редко применяемым видом войн являются интеллектуальные войны — войны, в которых единственно допустимым видом применяемого насилия является насилие интеллектуальное, направленное на доказательство истинности собственной интеллектуальной позиции, системы выдвигаемых тезисов по какому-либо вопросу и, соответственно, ложности позиции противника, а не на дискредитацию (или подавление) интеллекта, психологической устойчивости или каких-либо других качеств и интересов противника как такового.

Насилием здесь является акт принудительной замены в сознании противной стороны некоторой ложной позиции на противоположную ей истинную позицию под воздействием исчерпывающе достоверной и убедительной аргументации.

Прототипом интеллектуальных войн, о которых идет речь, в некотором смысле можно считать древнегреческий спор, диалог, очищенный от софистических технологий и логически некорректных уловок, нацеленных на достижение интеллектуальной победы «любой ценой» — независимо от истинности отстаиваемой позиции.

С некоторой натяжкой к жанру интеллектуальных войн можно отнести также такую современную форму организации коллективного интеллектуального процесса с взаимно противоречивыми позициями и интересами сторон, как научная дискуссия (если она нацелена не на простой обмен мнениями и простое уточнение позиций дискутантов, а на обязательное доказательство правоты одной из сторон или на непротиворечивый синтез исходных позиций противников).

Интеллектуальные войны, в свою очередь, могут быть поделены на два четко различимых класса: репродуктивные войны и инновационные войны.

Репродуктивные войны определим как интеллектуальные войны, направленные на доказательство каких-либо известных, но не в полной мере доказанных истин или истин новых, но несущественных для развития той или иной научной дисциплины, по которым у различных субъектов мышления могут быть противоположные взгляды. Универсальная цель репродуктивной войны — упорядочение, расширение и гармонизация существующего знания, накопление мелких полезных инноваций, снятие частных интеллектуальных противоречий между комбатантами.

Соответственно, инновационные войны (с учетом произведенных выше делений понятия войны) единственно логически корректным образом могут быть определены как интеллектуальные войны, направленные на генерацию и доказательство каких-либо качественно новых истин, идей (их множеств), более адекватных действительности и более эффективных в каком-либо существенном для человеческой эволюции отношении, чем старые.

Универсальная цель инновационной войны — максимизация общей человеческой способности к существованию в произвольной среде обитания, интеллектуальное развитие в широком смысле, осуществление фундаментальных прорывов в неопределенных, плохо структурированных полидисциплинарных предметных областях, имеющих стратегическое научное или общесоциальное значение, полная реконструкция оснований давно сложившихся, устойчивых научных дисциплин.

Другими словами, в общем случае инновационная война — это способ разрешения фундаментальных антагонистических гносеологических или аксиологических противоречий эволюционного характера между различными социальными субъектами в произвольной предметной области путем применения сторонами логически корректного интеллектуального насилия (принудительного установления истинности одних тезисов и ложности других).

Рассмотрим теперь определение инновационной войны как особой логической системы. Определим вначале понятие логической системы вообще.

В данном вопросе мы исходим из следующих не вполне стандартных соображений.

Поскольку окружающий нас мир, очевидно, организован (по крайней мере, — частично), т. е. не абсолютно хаотичен, существует некоторый универсальный закон такого упорядочения, лежащий в основе всей совокупности частных законов бытия, изучаемых «естественными» науками, но не сводимый к ней, — абсолютный объективный логос.

Человек эффективен в своей биологической и — шире — общекосмической борьбе за существование настолько, насколько адекватно он отражает этот универсальный закон упорядочения и развития мира (абсолютный объективный логос) по косвенным признакам (латентным следам) его проявления в реальности и умеет использовать свои знания в целях максимизации собственного экзистенциального потенциала.

На разных этапах эволюции человечества качество отражения абсолютного объективного логоса различно. Это необходимо свидетельствует, во-первых, о возможности (и реальности) существованиия множества отличных друг от друга неравноистинных (в смысле адекватности, уровня соответствия абсолютному объективному логосу) субъективных логосов и, во-вторых, об их неравноценности как инструментов борьбы человека за существование.

Связь между экзистенциальной (эволюционной) эффективностью человека, его способностью к адаптации и преадаптации к быстро изменяющимся условиям существования в широком смысле и степенью истинности его логического инструментария (уровнем соответствия абсолютному логосу) несомненна и отражена уже в родовом определении человека как существа разумного. Вопрос состоит лишь в высоте способности человека к осознанному изменению наиболее фундаментальных параметров своей разумности, к ускоряющимся циклическим переходам ко все более высоким качественным ступеням разума и соответствия абсолютному логосу.

Сделанные замечания позволяют в общем виде определить произвольную логическую систему (субъективный логос) как некоторое относительно адекватное (ограниченно истинное), отчужденное от мыслящего социального субъекта (имеющее формальное языковое выражение) отражение абсолютного объективного логоса, являющееся, одновременно, средством (методом, технологией) эффективного мышления и — шире — борьбы человека за существование.

В этой связи основную эволюционную проблему человечества можно определить как проблему выигрыша в экзистенциальной силе (способности к существованию в сколь угодно неблагоприятной внешней среде и/или способности к максимально длительному существованию цивилизации) посредством создания и практического применения логических устройств и технологий новых поколений или, иначе, как проблему максимизации человеческого существования за счет осознанного «вертикального» прогресса в качестве разума вообще и в качестве его наиболее фундаментальной и продуктивной части — базовых логических систем — в особенности.

Данная трактовка позволяет говорить если не об актуальном существовании в общественном сознании нашей цивилизации, то о принципиальной возможности существования в одной духовной культуре иерархии взаимно субординированных логических систем (субъективных логосов), представляющих собой различные качественные уровни отражения абсолютного объективного логоса, а также об абсолютной истине особого рода — реально существующей, хотя и непознанной абсолютной логической истине.

Более того, становится возможным логически корректно рассуждать о степенях истинности (соответствия абсолютному объективному логосу) и сравнительной гносеологической эффективности различных логических систем, их поколениях и прогрессивной эволюции. Это — ключевой момент конструируемого определения инновационной войны как специфической логической системы нового поколения с повышенными качественными характеристиками и, одновременно, центральная гносеологическая проблема, раз-решаемая инновационной войной как универсальным метапарадигмальным инструментом познания, как метааксиоматическим методом.

В этом контексте уместно сделать несколько замечаний относительно соотношения понятий «стиль» и «метод», являющихся предметом обсуждения и весьма важных для понимания сущности инновационной войны. Представляется, что «стиль» и «метод» — это однородные термины, имеющие ближайшим родом понятие «канон».

Понятие «канон», переводимое с древнегреческого просто как правило, предписание, сегодня, по нашему мнению, является предельно широким понятием, включающим в свой объем любые (даже чрезвычайно общие) понятия, связанные (одновременно) с ограничивающей, аксиологической и прескриптивной функциями человеческого мышления — такими, как, например, мера, норма, образец, клише, формат, парадигма, алгоритм, фрейм и т.п. Необходимо подчеркнуть, что «канон» — это всегда осознанное искусственное ограничение предмета, средств и способов получения и представления результатов деятельности, осуществленное в каких-либо достаточно существенных целях, а не некоторая интрасубъективная особенность мышления или поведения какого-либо субъекта.

Важно отметить, что совершенно неправомерны попытки отождествлять «стиль» или (тем более) «метод» какого-либо автора с индивидуальными особенностями его мышления или конструирования текстов. И «стиль», и «метод» всегда имеют вполне определенный интерсубъективный смысл.

Вместе с тем, «стиль» и «метод» — не просто независимые друг от друга однородные понятия, а понятия жестко субординированные, соответствующие (в каждом конкретном случае) различным степеням выраженности некоторых ключевых параметров мышления и — шире — деятельности человека, т. е. отражающие разную количественную определенность, различную меру выраженности некоторых общих качественных видовых признаков.

Речь идет прежде всего о таких общих свойствах любой человеческой деятельности как уровень интерсубъективности (степень общепонятности, общедоступности и общезначимости), уровень прагматичности (степень телеологичности, практической полезности), уровень строгости (уровень точности и обоснованности применяемого понятийного аппарата и средств деятельности, уровень однозначности получаемого результата).

В общем случае для любого общего предмета и субъекта деятельности «стиль» всегда менее интерсубъективен, прагматичен и строг, чем «метод».

В общем случае можно сказать также, что «стиль» первичен по отношению к «методу», т. е. «стиль» — это «недо-метод» (или, в лучшем случае, — «пра-метод») , а «метод» — это отшлифованный до максимальной интерсубъективности и полной семантической определенности и надежности (в пределе — алгоритмичности) «стиль» («мета-стиль»). При этом важно подчеркнуть, что, хотя каждый «метод» имеет в своей основе некоторый первичный вполне субъективный (присущий его автору или группе авторов) «стиль», далеко не каждый (даже очень хороший) «стиль» способен дорасти до «метода». В этом смысле, в предположении тождественности предмета деятельности и качества результатов, самый плохой «метод» всегда на много порядков ценнее для общечеловеческой практики самого лучшего «стиля».

Если же говорить о таких жестко ориентированных на поиск истины сфер мышления, как логика и математика, то преобладание значимости (ценности) «метода» над «стилем» здесь просто абсолютно. Это вытекает хотя бы из того очевидного факта, что в большинстве конкретных, достаточно формализованных областей логики и математики, в отдельных алгоритмах и процедурах «стилю» просто нет места (было бы абсурдно говорить о «стиле» построения категорического силлогизма или умножения чисел, например), а в более сложных и слабо формализованных областях «стиль» допускается к существованию только на ранних концептуальных стадиях — до тех пор, пока еще не найден какой-либо адекватный «метод» получения тех же или лучших (более сложных и/или глубоких) результатов. Последнее связано с тем обстоятельством, что во многих важнейших случаях «стиль» вообще не в состоянии обеспечить требуемого уровня связности, надежности и качества (вообще говоря, — истинности) результатов. Речь идет прежде всего об изучении и проектировании больших и сверхбольших (по размерности и уровню связности) формальных и неформальных систем, где требуется высокий уровень интеграции и координации усилий значительного числа субъектов деятельности, т. е. априори высокая степень интерсубъектности и строгости общего знания, а также прагматичности, жесткой целенаправленности применяемых ментальных технологий.

Говоря о понятии «инновационная война» применительно к логико-математической предметной области и в аспекте противопоставления понятий «стиль» и «метод», в некотором смысле можно сказать, что «инновационная война» — это ***метаметод***, а) предназначенный для глубокой многоуровневой *индустриальной* переработки всех и всяческих «стилей» формального и неформального мышления с целью извлечения из них компонентов логически корректных и полезных общезначимых идей, массового производства полноценных «методов», применимых в ранее плохо формализованных сферах, и б) направленный, в пределе, на полное искоренение самого понятия «стиля» в логике и математике или, по крайней мере, резкое сокращение ареала его приемлемости и применимости (до «порога внутренней кухни» исследователя, проектировщика и программиста).

Обобщая сказанное, заключим: главное отличие «метода» от «стиля» в науке, аккумулирующее все прочие, состоит в том, что первый всегда позволяет реально, с максимально высоким уровнем надежности и строгости искать, фиксировать и доказывать истины, а второй лишь более или менее обоснованно на это претендует.

Для адекватного определения инновационной войны как логической системы нового поколения в контексте сказанного нам необходимо сделать еще одно замечание.

Уже в античности наметилось жесткое противопоставление логических систем двух типов, которые мы условно назовем диалогическими и монологическими.

Диалогические логические системы (ДЛС) предназначались для организации коллективного мышления двух субъектов (диалога), а монологические — для повышения продуктивности односубъектного мышления (монолога).

ДЛС, наиболее ранним и ярким представителем которых являлась древнегреческая эристика (единство диалектики и софистики), в силу вынужденного признания релятивности истины, ее зависимости от исповедуемых собеседниками способов идеализации действительности и избираемых критериев достоверности, изначально были крайне плохо формализованными и уязвимыми для всякого рода недобросовестных семантических и логических уловок, имевших целью добиться победы в споре «любой ценой». Иными словами, античным ДЛС, при всем их потенциально высочайшем гносеологическом и эвристическом потенциале, изначально в весьма скромной степени были присущи свойства интерсубъективности, прагматичности и строгости рассуждений и итоговых результатов. Отдельные блестящие образцы логической безупречности, убедительности и красоты в споре («Диалоги» Платона, например) лишь подчеркивали перманентную стилистичность ДЛС, невозможность эффективного применения ДЛС как надежного метода познания истины в общем случае.

Это обстоятельство было настолько существенным, что в конечном счете привело к полной деградации искусства спора (диалога) и к абсолютному преобладанию монологических логических систем в научной и общечеловеческой практике.

Монологические логические системы (МЛС), самым показательным примером которых может служить логика Аристотеля, обладали существенно большей, чем диалогические, внутренней строгостью, прагматичностью и инструментальностью (технологичностью) и позволяли мыслящему субъекту (при достаточной точности определения исходных посылок) в конечное время приходить к принудительным выводам относительно истинности или ложности тех или иных утверждений.

МЛС обладали также тем преимуществом, что они позволяли единообразно мыслить и получать истинные утверждения относительно некоторого достаточно формализованного предмета мышления не одному лишь отдельно взятому субъекту мышления (человеческому индивиду), как это, казалось бы, следует из их названия, но неограниченному количеству субъектов, полностью отождествляющих свои наиболее общие гносеологические и аксиологические позиции по какой-либо предметной области с позициями своих предшественников и коллег, т. е. как бы сливающихся в одного совокупного индивида с унифицированной системой мышления (свойство интерсубъективности МЛС).

Названная совокупность свойств МЛС, обобщаемая понятием «методичность», способствовала тому, что МЛС явились ключевой предпосылкой существования науки в том виде, в котором мы ее имеем сегодня.

Вместе с тем, при всех своих преимуществах МЛС оказались не в состоянии адекватно отображать и гармонизировать эволюционные процессы в науке, синтезировать взаимно противоречащие интеллектуальные платформы (парадигмы) и крупные стилевые ориентации, сосуществующие в рамках одной предметной области, устанавливать сравнительную истинность и эффективность различных инструментов познания и предметных научных теорий и на этой основе своевременно и безболезненно проводить «плановую замену» устаревших или недостаточно общих стилей, методов, теорий и доктрин.

«Абсолютным мерилом» сравнительной истинности той или иной теории во все века было, по существу, количество ученых, являющихся ее приверженцами (членами соответствующей «научной школы») и имеющих доступ к средствам репрографии, а императивом отношения к инакомыслящим в науке до наших дней является средневековая пословица: «С еретиками не спорят — их сжигают».

Эти явления, приводящие к неоправданно длительному искусственному доминированию какого-либо одного научного стиля, неадекватно претендующего на истинность и общезначимость, и к несоизмеримости различных однопредметных научных теорий, из-за их крайне деструктивной роли в развитии науки и человеческой эволюции в целом со второй половины XX века стали объектом пристального внимания общей гносеологии и теории науки (Кун, Лакатос, Фейерабенд и др.), однако эффективного общенаучного механизма ускоренного преодоления межпарадигмальных кризисов, установления точных значений сравнительной истинности и ценности различных взаимно противоречащих способов идеализации и интерпретации действительности до сих пор выработано не было. Ниже, при анализе проблемы *метаистинности* и *метаочевидности* будет показано — почему.

Долгое время считалось (особенно в странах «социалистической ориентации»), что механизм гармонизации и ускорения научной эволюции — равно как и любых других видов развития — существует и им является гегелевская диалектика, «обогащенная» марксизмом. Время показало, что это далеко не факт.

Попытка реанимации и дальнейшего развития древнегреческой диалектики, предпринятая в XIX веке Гегелем, кроме прочих имела тот существенный недостаток, что это была, скорее, заявка на монологизацию диалектики (диалога), чем на диалектизацию (диалогизацию) монологической логики (монолога). Другими словами, Гегель попытался научиться «в одиночку думать за двоих», волевым образом расставив воображаемых собеседников-соперников (стороны «диалектического противоречия») на контрарные и контрадикторные позиции и устранив при этом гармонизирующие весь процесс мышления традиционные формальнологические регулятивы и фильтры, включая закон непротиворечия, вместо того чтобы задаться целью расширить формальную логику (монологику) с ее жесткими законами правильного мышления до уровня некоторой достаточно строгой металогической системы, эффективно регулирующей и организующей процесс полипарадигмального многосубъектного мышления.

Сказанное позволяет достаточно точно, хотя и предварительно, определить *инновационную войну как синтетическую логическую систему, металогическую технологию нового типа,* объединяющую в себе свойства формальной логики, монологики (прежде всего, методичность, способность к логическому насилию, принудительному доказательству тех или иных истин) и диалектики, диалогики (наличие двух и более сторон, полюсов антагонистической интеллектуальной коммуникации, преимущественная ориентация на анализ и интерпретацию «пограничных проблем», парадоксов, конфликтных ситуаций, процессов развития в широком смысле).

Важной особенностью инновационной войны как логической технологии нового поколения в отличие, скажем, от платоновской диалектики, является то обстоятельство, что первая рассчитана на неограниченное число участников (полюсов) антагонистической интеллектуальной коммуникации. Например, инновационные войны по наиболее принципиальным вопросам политического и социально-экономического развития той или иной страны могут насчитывать миллионы активных участников, объединенных в сотни взаимно антагонистичных общественно-политических группировок различной идеологической ориентации.

Поэтому инновационную войну, рассматриваемую как особую многополярную логическую систему, новую металогическую технологию упорядоченного массового мышления, позволяющую обеспечивать соизмеримость и строго устанавливать сравнительную истинность и ценность тех или иных взаимно противоречащих идеальных конструкций, назовем также «полилектикой» (или «полилогикой»), а собственно процесс многополюсной антагонистической интеллектуальной коммуникации, составляющий содержание инновационной войны, — «полилогом» (или «полиалогом» — на выбор).

Если говорить об аналогах или прототипах инновационной войны, то в качестве таковых не подходят в чистом виде ни классические формы интеллектуального противоборства (диалог, научная дискуссия), ни современные системы усиления коллективной креативности («мозговая атака», синектика, метод «Дельфи», организационно-деятельностные игры, инновационные игры в их стандартном варианте и т.д.).

В мировой литературе существует (на уровне художественного замысла) единственная форма коллективного творчества и интеллектуального противоборства, соизмеримая, на наш взгляд, с инновационной войной по своему гносеологическому, методологическому и эстетическому потенциалам, — «игра в бисер» Г. Гессе.

Единственное существенное отличие между рассматриваемыми замыслами в аспекте целеполагания состоит в том, что главная цель «игры в бисер» — итерационное, эволюционное приближение к Абсолютно прекрасному, а «инновационной войны» — к Абсолютно истинному. Если учесть, однако, что, возможно, Абсолютно истинное и есть Абсолютно прекрасное (и наоборот), то в своих целевых ориентациях оба замысла просто тождественны.

Что же касается отличий формы и способа реализации общей цели, то «игра в бисер» Гессе — это апология Стиля, а «инновационная война» — это апология Метода. Это очень существенное отличие. Возможно, не случайно Г. Гессе не удалось достаточно четко сформулировать общий механизм и конкретные правила «игры в бисер». В романе при всем желании не найти и двадцати страниц описаний самой «игры в бисер» как коллективной формы интеллектуальной деятельности. Речь идет, в основном, о миро- и самоощущениях главного героя — Магистра игры. Скорее всего, для замысла такого уровня глубины и универсальности в принципе невозможно подобрать адекватную организационную форму, ориентированную на Стиль как высшую форму самореализации творческой личности (творческого коллектива). По-видимому, это связано с тем, что Стиль таковой просто не является ни по определению, ни по существу. Для этого ему необходимо стать Методом. Но тогда «игра в бисер» перестает быть самотождественной. Она становится «инновационной войной».

Резюмируя сказанное, отметим, что, хотя мы подходили к определению инновационной войны с двух разных сторон, итоговые конструкты семантически довольно близки между собой и взаимно дополнительны.

Системообразующими признаками инновационной войны и как особой войны, и как специфической логической системы, полилектики являются:

— наличие многополюсного интеллектуального антагонизма среди потенциальных комбатантов в рамках некоторой точно очерченной предметной области;

— наличие по крайней мере одной принципиально новой идеальной конструкции фундаментального характера, претендующей на большую истинность и/или эффективность по сравнению со старыми;

— наличие специального логического инструментария, позволяющего обеспечивать соизмеримость и сравнимость предлагаемых комбатантами инноваций и гарантированно осуществлять акт интеллектуального насилия по отношению к менее истинным и менее эффективным идеальным конструкциям, т. е. в полной мере доказывать их несостоятельность по отношению к более достойным претендентам;

— наличие специальных институтов и инструментов, позволяющих полностью блокировать применение недобросовестных логических и психологических уловок, направленных на достижение победы «любой ценой».

Инновационная война как метааксиоматический метод

Приведенные выше определения и параметры качества инновационной войны как интеллектуальной войны и логической системы особого рода, как метода поиска и доказательства истин в условиях многополюсной антагонистической коммуникации могут быть квалифицированы лишь как абсурдная, внутренне противоречивая попытка конструирования «логического вечного двигателя», если они не подкреплены конкретными интеллектуальными и организационными механизмами, обеспечивающими реальность постулированных свойств.

Что же делает инновационную войну (по определению *полисубъектную интеллектуальную систему*) методом, инструментом познания и признания каких-либо интерсубъективных истин, если уже на уровне более простых диалогических систем, начиная с античности, установление общезначимых истин в условиях антагонистической межсубъектной коммуникации считалось в каждом конкретном случае почти безнадежным делом, а в общем случае — ментальной пропастью без дна?

Для разъяснения ситуации нам необходимо обратиться к одному из наиболее загадочных и наименее исследованных интеллектуальных артефактов античности — «парадоксу бесконечного регресса» (regressus ad infinitum). Данный парадокс, сформулированный в явном виде Секстом Эмпириком, но известный, по-видимому, на много веков раньше, сводится к следующему рассуждению: для доказательства истинности каких-либо посылок необходим некоторый критерий истины. Последний также нуждается в верификации и требует нового критерия истины и так далее — до бесконечности.

Древние греки по неведомым нам причинам сочли, что бесконечность эта дурная и отказались от каких-либо дальнейших исследований в данной области. Уже применение понятия «регресс» (от лат. regressus — обратное движение), которое однозначно истолковывается как деградация, упадок, тип развития, характеризуемый понижением уровня организации, нисхождением от высшего к низшему, возвратом к изжившим себя формам и структурам, к процессу поиска все более общих и совершенных критериев истинности знания свидетельствует, что либо античные ученые были в принципе не способны отличить «зерна от плевел», либо они разуверились в возможности получения интерсубъективного знания об истине и ее критериях средствами ДЛС, либо осознанно пошли на грандиозный аксиологический подлог и перевернули иерархию интеллектуальных ценностей на 180 градусов, чтобы оградить последующие поколения от «прелести» (соблазна, ереси) метааксиоматизма. Так или иначе, поиск все более глубоких истин об истине, критериев истины и способов их обоснования (как самостоятельный род интеллектуальной деятельности) получил в античной науке самый низший аксиологический ранг и; более того, стал своего рода «табу» для всех последующих поколений ученых.

Это обстоятельство, на наш взгляд, привело к двум результатам: а) созданию аксиоматического метода в его классической форме и б) деградации древнегреческой (а заодно и общечеловеческой) цивилизации в целом.

Рассмотрим вначале утверждение «а» о зависимости между отказом древних греков от углубления в сферу «дурной бесконечности» метааксиоматизма и метаистинности и созданием ими аксиоматического метода.

Действительно, не имея жесткой методологической установки на абсолютную порочность углубления в сферу метаоснований языка и мышления, метаистинности (создания иерархии критериев истинности) сверх некоторого заранее заданного минимально необходимого уровня, именуемого «очевидностью», вряд ли древние греки решились бы на такой фундаментальный, ответственный и весьма логически уязвимый шаг, как принятие в некоторой предметной области каких-либо достаточно субъективно выбранных утверждений (аксиом) за очевидно истинные без доказательства и даже без аргументирования в их пользу. Ведь все выводимые из некоторой системы аксиом истины являются истинными только в данной конкретной ментальной системе. Малейшее изменение аксиоматики, любой мало-мальски обоснованный намек на самопротиворечивость сразу же ставит под сомнение устойчивость всего выстроенного здания научной теории. Все ранее конвенционально истинные суждения и выведенные из них утверждения одновременно перестают быть истинными.

Установка же на порочность «бесконечного регресса» в сферу метаочевидного, метаистинного, метааксиологического и метарационального принципиально отрицает соизмеримость различных взаимно противоречащих аксиоматических систем, сосуществующих в рамках одной предметной области, поскольку это потребовало бы полной реконструкции понятия истины и создания осмысленной многоуровневой иерархии критериев истинности и рациональности вообще. Возникает логический тупик, свидетельствующий о невозможности интерсубъективного знания как такового, что полностью подтверждает позицию софистов.

На наш взгляд, только инстинктивной солидарностью с древнегреческой трактовкой парадокса бесконечного регресса, т. е. поистине зоологической боязнью «дурной бесконечности» различных по глубине уровней мышления и бесконечности вообще, а также леностью ума человеческого можно объяснить тот парадоксальный факт, что по миру до сих пор еще не «гуляют» сотни тысяч и миллионы совершенно равномощных (в смысле охвата предметной области), взаимно противоречивых, равноправных и равноистинных (в силу несоизмеримости в рамках «аксиоматического метода» и «метода принципов») логик, арифметик, геометрий, физик и прочих «точных» наук (не говоря уже о теологиях, философиях, социологиях и других «ограниченно точных» дисциплинах). Подобный «Суперпарад наук» существенно подорвал бы всеобщую веру в эффективность аксиоматического метода в его древнегреческой и современной трактовках и, очевидно, в условиях отсутствия подходящей «интеллектуальной вакцины» способствовал бы массовому ментальному расстройству.

Другими словами, классический аксиоматический метод — это метод распутывания «гордиевого узла» метаочевидности и метаистинности путем его разрубания и отбрасывания всех возможных альтернатив решения какой-либо универсальной ментальной проблемы, кроме одной единственной, возводимой в ранг Суперканона, не подлежащего критике и развитию. В этом смысле классический аксиоматический метод — идеальный способ псевдорационализации и суперканонизации всех и всяческих религий и любых других фантомных порождений человеческого ума. Не случайно, что средневековые монахи Европы так любили Аристотеля и Евклида.

Так или иначе, будучи созданным в качестве узкой тропинки умеренно эффективного мышления, ведущей между «Сциллой» дурной, по мнению античных греков, бесконечности метаочевидности и метаистинности и «Харибдой» ничем не регулируемого эмпиризма, аксиоматический метод сослужил хорошую службу в качестве первого, самого примитивного варианта разрешения (путем аксиологического уклонения от реального разрешения) «парадокса бесконечного регресса» и, возможно, спас человечество от коллективного помешательства.

Попытаемся теперь привести аргументы в пользу утверждения «б» о зависимости между отказом науки от попыток рационального разрешения «парадокса бесконечного регресса» и кризисами древнегреческой и современной (западной) цивилизаций.

Что касается древнегреческой цивилизации, то, в силу отрицания возможности, ценности и целесообразности углубления в «дурную бесконечность» метаочевидности (метаистинности, метарациональности) и одновременного врожденного презрения к эмпиризму и натурфилософскому экспериментированию, она отрезала себе оба возможных пути дальнейшей интеллектуальной эволюции (метааксиоматический и эмпирический) и тем самым обрекла себя на деградацию, застой, полную некомпенсированную релятивизацию интеллектуальных ценностей и самоуничтожение, что выразилось в итоговой неспособности эффективно противостоять внешним врагам, более лояльно относившимся к эмпиризму (по крайней мере, — как к способу выживания).

Что же касается деградации современной (западной) цивилизации, то ее причины лежат, на наш взгляд, в несколько иной, хотя и близкой области. Будучи наследницей античности в части базовых интеллектуальных ценностей, западная цивилизация до самого последнего времени не слишком утруждала себя самостоятельными изысканиями в области оснований мышления, вполне удовлетворяясь накопленным древними греками ментальным потенциалом и соответствующими ему христианскими этическими ценностями.

«Мотором» западной цивилизации стала установка на абсолютный, ничем (кроме ограничений инструментальной базы) не сдерживаемый эмпиризм, периодически подкрашиваемый более или менее правдоподобными теоретическими обоснованиями. Это привело к непреодолимому доминированию в массовом научном мышлении рационализма низшего уровня (прометеевского, эмпирического), который сегодня стал реальной угрозой для выживания человечества и генератором глобальных антропогенных катастроф. Выиграв в малом (в объеме эмпирического познания и в уровне жизни), западная цивилизация проиграла в главном (в качестве интеллектуальной эволюции и в потенциальном бессмертии), все более ускоряя свой конец.

Следует отметить также, что наметившаяся, по нашему мнению, с начала XX века тенденция к росту уровня саморефлективности западной науки, к уточнению оснований логики и математики ничего общего не имеет с осознанной целенаправленной работой по разрешению «парадокса бесконечного регресса», по созданию иерархии уровней рациональности, по познанию метаочевидного и метаистинного. Получив к концу XIX и началу XX в. по 2—3 конкурирующие теории на одну базовую предметную область (помимо своей воли и вопреки собственным ценностям), западная наука стала осозна-

18 Зак. 3711

вать свое развитие как кризисное, избыточно плюралистическое, расшатывающее, релятивизирующее сложившуюся за тысячелетия общечеловеческую сферу очевидного, почувствовала угрозу своему существованию в статусе наследницы нетленных базовых интеллектуальных ценностей античной культуры. В науке начались бесплодные лихорадочные попытки поверхностного саморефлексирования, экспериментирования с различными отдельно взятыми критериями истинности в целях сохранения достаточной устойчивости оснований научного знания при одновременном сверхжестком (вследствие изначальной высокой импринтированности) отказе от целенаправленного проникновения в сферу метаочевидного.

Наверное, если бы плотность взаимно противоречащих конкурирующих теорий и стилей мышления на одну предметную область составила величину не 2-3/1, а 20-30/1 или 200-300/1, такой отказ был бы уже просто невозможен.

Названная тенденция сильно напоминает панику на тонущем корабле, когда все матросы и пассажиры, расталкивая друг друга, пытаются любой ценой выжить здесь и сейчас, т. е. стремятся найти хотя бы одну *лодку, способную к пусть непродолжительному, но плаванию (на поверхности воды)*.

Совершенно очевидно, что подобная ситуация ничего общего не имеет с последовательным метааксиоматизмом. Процессу метааксиоматизации, осознанного познания метаочевидного и метаистинного существенно больше соответствует *образ спокойного и методичного строительства глубоководного батискафа и постепенного безопасного погружения в нем на глубины со все большим давлением водной среды в надежде достичь твердого дна — абсолютной логической истины.*

Все существующие на сегодняшний день попытки преодоления периодически спонтанно возникающих «кризисов очевидного» в различных науках обречены на неудачу в силу того, что невозможно найти что-то абсолютно интерсубъективно очевидное и непротиворечивое в какой-либо абстрактной предметной области, если нет достаточно мощных метаинструментов мышления, способных помочь различным субъектам познания искусственным образом сконструировать некоторое репрезентативное множество соизмеримых между собой теоретических идеальных объектов с различными «ареалами интерсубъективности» и, путем их сравнения и взаимного совершенствования, синтезировать некий новый теоретический идеальный объект, всесторонне удовлетворяющий заранее заданным общим критериям оптимальности.

«Метод проб и ошибок», приведший за века полусознательной эволюции к созданию используемых по сей день первичных моделей рациональности (формальных логических систем и соответствующих им частных аксиоматик) здесь не годится, поскольку для этого требуются тысячелетия, которых у современного человечества (в предположении необратимости сегодняшних эволюционных тенденций) нет.

Единственным решением проблемы, на наш взгляд, является осознанное культивирование наукой предлагаемого в настоящей статье метааксиоматического метода, обладающего реальным потенциалом последовательного разрешения «парадокса бесконечного регресса».

Сущность метааксиоматического метода состоит в создании иерархии логико-математических аксиоматик, каждая следующая (нижестоящая, более фундаментальная) из которых соответствовала бы все более общим, универсальным, все менее (оче)(вид)ным и даже все менее человеческим (хотя качественно и более высоким) уровням истинности (метаистинности) и рациональности (метарациональности).

Говоря языком метафор, можно сказать, что понятие «(оче)(вид)ность» как обобщающий критерий истинности каждой из избираемых аксиом и их систем, как апелляция к некоторому достигнутому в ходе естественной интеллектуальной эволюции невыразимому интерсубъективному уровню и типу рациональности должно быть повсеместно дополнено, а в ряде новых метапредметных областей и заменено понятиями анти-, квази-, пара-, супер-, гипер-, суб(оче)(вид)ности, (оче)(род)ности, (оче)воспринимаемости, (оче) избираемости, (оче)проницаемости, (оче) ин- и (оче) дедуцируемости, (оче)-синтезируемости, (оче)проецируемости, (оче)структурируемости, (оче)конденсируемости, (оче)измеримости, (оче)созерцаемости, (оче)отчуждаемости, (оче)отстраняемости, (оче)корректируемости, (оче)верифицируемости и т. п., которые сегодня могут рассматриваться лишь как странные неологизмы, не несущие в себе какой бы то ни было семантики, но завтра будут терминами, характеризующими различные достаточно тонкие аспекты метаочевидности и метаистинности.

Чтобы продолжать оставаться «мерой всех вещей» еще сколько-нибудь длительное историческое время, то есть попросту существовать в «этом мире», современный человек должен выйти в принципиально новое метаизмерение, стать «идеально гибкой масштабной ментальной линейкой» с гораздо более точными и, одновременно, широкими умственными делениями, чем сегодня, т. е. перейти из сферы примитивно очевидного и эмпирически верифицируемого к сфере *рационального (и все более рационализируемого) откровения.*

Ответ на вопрос «как?» если и не (оче)(вид)ен, то (оче)(род)ен, (оче)воспринимаем, (оче)конденсируем и (оче)синтезируем, и на примитивном уровне уже опробован в ходе человеческой эволюции.

Известно, что на ранних фазах истории первобытного общества ни один человеческий индивид не был полноценной личностью, человеком в современном понимании. Личностью, Человеком, самодостаточным миро- и самосознанием был лишь человеческий коллектив (род, племя и т.п.) в целом. Постепенно, по мере развития языка и мышления, осознания предиката «быть личностью, человеком», то есть по мере обретения индивидуального самодостаточного миро- и самосознания, личностью, человеком стал и каждый член племени. Интуитивно и эмпирически (оче)видное для (сотен глаз) племени как целого постепенно, в процессе конденсации и формализации универсального знания, латентных логико-математических архетипов становилось (оче)видным и для (двух глаз) отдельного индивида и осознавалось как таковое.

Подобным же образом и сегодня каждый отдельно взятый человек — достаточно скромная «визуальная» и ментальная сила, даже если он — гений. Напротив, человеческое (уже — научное) сообщество в целом — несоизмеримо более высокая и мощная «визуальная» и ментальная сила, которая, будучи рассматриваемой в качестве целеустремленной самосознаваемой целостности, на полном основании может трактоваться как совокупный Сверхчеловек, Суперразум. Жестко канализированная специальными организационными формами коллективного познания и творчества (типа инновационных войн) на порождение иерархии все более и более универсальных аксиоматик мышления, концепций и критериев истинности (пусть и не имеющих сиюминутного предметного воплощения), *сфокусированная ментальная активность* совокупного Сверхчеловека с легкостью, на наш взгляд, способна преодолеть поверхностность, одномерность, квазиинтерсубъективность существующей интеллектуальной практики, (оче)сконденсировать робкие ростки новой рациональности, метааксиоматизма и создать первые формальные образцы эффективно работающих метааксиоматических систем, новую метааксиоматическую логику. Следующим шагом, как в первобытные времена, станет индивидуализация, интрасубъективизация накопленного сообществом в целом генерализированного, формализованного опыта полипарадигмального метааксиоматического мышления. Каждый ученый, используя новую логику, окажется способным генерировать многоуровневые иерархически сопряженные метааксиоматические системы, имитирующие мышление совокупного Сверхчеловека и «вертикальную интеллектуальную эволюцию» в целом.

Будучи осознанно зацикленным, этот процесс в очень скором времени (10—20 лет) может привести к такому скачку в качестве мышления и познания универсума, какого мы сегодня даже не в состоянии себе представить.

Говоря о том, что инновационная война — это метааксиоматический метод, я имею в виду сегодня лишь то, что это метааксиоматический метод для совокупного индивида, научного сообщества в целом, Сверхчеловека, т. е.

метааксиоматический метод, так сказать, «первого рода», представляющий собой живую модель «вертикальной» интеллектуальной эволюции.

Метааксиоматический метод «второго рода» (индивидуальный метааксиоматический метод) в какой-либо достаточно устойчивой и логически корректной форме возможен лишь как конечный продукт некоторой достаточно представительной серии инновационных войн, как Суперлогика, *логика откровения*.

Это не означает, однако, что хотя бы первые экспериментальные инновационные войны возможны без использования некоторых аппроксимированных моделей метааксиоматического метода «второго рода», обладающих определенными, довольно жестко задаваемыми свойствами.

Можно с уверенностью сказать, что успех любой инновационной войны, направленной на развитие оснований человеческого мышления, невозможен без какого-либо первичного варианта общей теории метаистины, без достаточно эффективной синтетической концепции истины первого уровня, обобщающей все сколько-нибудь значимые критерии истины, известные человечеству (соответствие знания реальности, его самонепротиворечивость, верифицируемость, полезность и т. п.), и без специальных логических инструментов, обеспечивающих соизмеримость представляемого комбатантами ограниченно интерсубъективного знания. В противном случае инновационная война ничем не будет отличаться от примитивной «логомахии», т. е. в конечном счете, от «психологической войны» (в чем, собственно, и убедились в полной мере еще древние греки).

Кроме того, должна быть коренным образом изменена (по крайней мере на период проведения инновационной войны) базовая аксиологическая установка современной науки, некритически заимствованная ею из античности. «Высшее», «прогрессивное» (аксиоматическое, очевидное, конвенционально истинное и все из этого дедуцируемое) и «низшее», «регрессивное» (метааксиоматическое, метаочевидное, метаистинное, устремленное в «дурную бесконечность» метарациональности) должны просто поменяться местами в смысле научной значимости и ценности. «Первые» должны стать «последними» (и наоборот), как учит Евангелие. Без этого в сфере метааксиоматического нельзя сделать ни одного осмысленного и аксиологически значимого шага.

Не имея возможности останавливаться здесь на системообразующих логических характеристиках и базовых элементах разработанного мною к сегодняшнему дню сугубо интрасубъективного варианта метааксиоматического метода «второго рода» (общей теории метаистины), скажу лишь, что довольно длительная серия специальных мысленных экспериментов (в частности, по созданию новых, альтернативных классическим, аксиоматических систем в сфере логики и математики — «теории формальных объектов», «гармонической арифметики», «юниметрии») показала его достаточную (для первого случая) работоспособность и в интерсубъективном контексте, т. е. в качестве методологической основы для подготовки первой экспериментальной инновационной войны в произвольной предметной области, что отнюдь не закрывает дорогу для всех желающих поработать в том же направлении.

Организационный механизм инновационной войны

Инновационная война как метааксиоматический метод «первого рода», как интеллектуальная борьба множества конкретных людей и их групп наряду с вышерассмотренной логической компонентой требует еще и разработки множества дополнительных механизмов чисто организационного и коммуникативного характера.

Хотя ограничения, наложенные выше на понятие инновационной войны, и требования, предъявляемые к ней, кажутся довольно жесткими и, на первый взгляд, трудно выполнимыми, они, тем не менее, оставляют неограниченный простор для конструирования и проектирования самых различных по сложности механизмов конкретной реализации данной полисубъектной интеллектуальной технологии.

После множества экспериментов с различными понятийными аппаратами и методологическими подходами я пришел к естественному, хотя и далеко не (оче)видному, выводу, что оптимальной идейной и методологической основой для описания и реального запуска сколько-нибудь значительной по своим масштабам инновационной войны являются идеология, терминология и технология, сформированные за несколько тысячелетий вооруженной борьбы в классической теории войн и военного искусства.

Ключевой идеей здесь является близкое к отождествлению семантическое сближение понятий «театр войны» и «предметная область».

Основными недостатками общенаучного понятия «предметная область» применительно к ситуации полисубъектных полипарадигмальных споров являются: нетождественность и несоизмеримость применяемых сторонами понятийных аппаратов, критериев истинности и способов ее верификации, невозможность точного описания «боевой обстановки», т. е. «соотношения сил» и итогов «боевых действий» в каждый конкретный момент времени.

Как только стало интуитивно ясно, что предметную область произвольной науки или комплекса наук, являющуюся ареной полисубъектного межпарадигмального спора, можно и нужно рассматривать как «театр инновационной войны», проблема построения достаточно эффективного организационно-коммуникативного механизма инновационной войны оказалась вполне посильной задачей.

Была разработана синтетическая техника «инновационно-военной картографии» (ее далекие аналоги — техника военной картографии, техника «когнитивных карт» в психологии, техника контент-анализа и прикладных социологических исследований), позволяющая обеспечить высокую степень соизмеримости конкурирующих теоретических конструкций и с необходимой координатной точностью и в произвольном масштабе описать все факторы и конкретные данные, характеризующие семантическое пространство и ход инновационной войны в каждый конкретный момент времени (наличные и потенциальные «очаги интеллектуальной напряженности», силовое соотношение и расстановка группировок противоборствующих сил на каждом конкретном участке боевого противостояния, итоги инновационно-военных действий на всем театре инновационной войны).

Формирование и четкое определение понятия «театр инновационной войны (ТИВ)» (уже — «театр инновационно-военных действий (ТИВД)») сделало полностью интуитивно и операционально ясными такие технологически значимые для организации и проведения инновационной войны термины, как «потенциал инновационной войны», «инновационно-военные силы (ИВС)», «роды и виды инновационно-военных сил», «инновационно-военная операция», «инновационное сражение (бой)», «наступление (атака)», «оборона», «встречный инновационный бой», «огневая поддержка», «боевая обстановка», «обеспечение инновационно-военных действий» и т. д.

Ключевыми понятиями и нормативно-правовыми инструментами, определяющими механизм организации и управления инновационной войной в целом, являются: «конституция ИВ», «программа ИВ», «сценарий ИВ», «уставы ИВ», «регламент ИВ», «техническое задание на проведение ИВ», «технико-экономическое обоснование ИВ», «бюджет ИВ» и т. д. В названных документах с максимальной содержательной, аксиологической, логической, юридической и технологической точностью задается весь комплекс условий и ограничений, которые должны соблюдаться комбатантами и организаторами инновационной войны на всем ее протяжении.

Аналогичные управленческие документы должны составляться и каждым из множества «комбатантов», участвующих в инновационной войне, как на кампанию в целом, так и на отдельные «ИВ-операции», если данная инновационно-военная сила (научный институт, творческий коллектив, политическая партия, неформальная команда единомышленников и т.п.) всерьез претендует на победу в инновационной войне в целом или хотя бы в частном «сражении» на каком-то относительно узком участке ТИВД.

Важной особенностью рассматриваемого организационного механизма инновационной войны является наличие, наряду с традиционными (Административный совет ИВ, Научный совет ИВ, Экспертный совет ИВ и т.п.), целого ряда новых управленческих и обеспечивающих институтов и подсистем, которые никогда ранее не использовались в практике научной полемики.

Речь идет о высокоспециализированных «группах логического, семантического и онтологического контроля», призванных выявлять и устранять попытки аксиологически, логически, семантически и онтологически недобросовестной аргументации, «инновационном арбитраже», предназначенном оперативно решать спорные вопросы относительно авторства на те или иные идеи, системы приоритетов и т.п., «системе патентования инноваций», гарантирующей новизну, патентную чистоту и качество предлагаемых в данной инновационной войне идей и проектов.

Рассматриваемый механизм инновационной войны, несмотря на его кажущуюся технологическую тяжеловесность, крайне гибок и легко модифицируем в зависимости от сложности и неопределенности предметной области, глубины интеллектуального антагонизма между участниками, количества «полюсов» и «точек» интеллектуального противостояния, объема финансирования и прочих факторов.

Не стоит, по-видимому, в современных условиях говорить о том, что наиболее эффективным техническим средством для проведения инновационных войн является Интернет с его возможностями многосторонней интерактивной коммуникации и многоуровневого гипертекстового представления информации. Попытка проведения достаточно масштабной инновационной войны другими коммуникационными средствами (через традиционные каналы научной коммуникации — журналы, серийные конференции и т. п.) была бы подобна замыслу многотомного издания коллекции фотографий полотен Русского музея, выраженных в кодах Ассемблера.

Инновационная война по теме «Эволюция оснований логики и математики»

Рассматриваемая технология инновационных войн имеет столько же возможных приложений, сколько имеется стратегически значимых для человеческого существования предметных областей, однако существуют сферы, которые особенно нуждаются в подобных инструментах познания и наиболее готовы к их применению.

Речь идет прежде всего, как это следует из общей направленности настоящей статьи, о проблеме ускорения и гармонизации эволюции логико-математических систем и, особенно, их архетипических и метаархетипических оснований, лежащих в сфере метаочевидного, метаистинного и метарационального.

Данная проблема имеет три уровня общности.

Первый уровень (высший) соответствует предметной области, которая в настоящей статье названа сферой метаочевидного и метаистинного, сферой рационального откровения. Инновационная война по данной тематике могла бы иметь целью разрешение «парадокса бесконечного регресса», построение общей теории метаистины, развитие метааксиоматического метода, выход на актуально бесконечную иерархию уровней рациональности, которая венчается тем, что я называю абсолютной логической истиной, а другие авторы часто (всуе) именуют Богом. Иными словами, инновационная война этого уровня была бы инновационной войной по общей теории инновационных войн (или, иначе, по общей теории истины и творения).

Второй уровень общности — это сфера про(яв)ленных в ходе человеческой истории логико-математических архетипов. Речь идет о наиболее глубоко импринтированных в человеческое сознание и почти не осознаваемых архаических семантиках, лежащих в основе таких мистико-логико-математических систем, как мировые религии, шаманские практики различных народов, эзотерические учения, гадательные системы (арканы Таро, Ба Гуа, Руны, различного рода древние календари и астрологические системы) и т.д. Древние и современные абстрактные логико-математические системы типа логики Аристотеля, геометрии Евклида, теории множеств Кантора и т.д. являются лишь одним (не самым значимым) элементом этого ряда. Сфера логико-математических архетипов является пограничной между сферами метарациональности и рациональности и могла бы послужить в качестве «стартовой площадки» для устойчивого перехода к вышеназванному первому уровню общности. Целью инновационной войны по данной проблематике мог бы стать Суперсинтез различных представленных в человеческой культуре взаимно противоречащих архетипов, создание своего рода «*общей теории логико-математического поля*», рассматриваемой как плацдарм для последующего продвижения в сферу метарационального.

Третий (низший) уровень общности — это сфера аксиоматического, интуитивно очевидного, истинного. Целью инновационной войны по данной проблематике могло бы быть обобщение реального опыта эволюции аксиоматических систем разного рода, «снятие» множественной самопротиворечивости существующих аксиоматик и построение универсальной непротиворечивой (гармонической) логико-математической системы, позволяющей эффективно мысленно оперировать актуально бесконечными объектами, без чего невозможно уверенно выйти на второй уровень общности (архетипический), не говоря уже о первом (метааксиоматическом).

Более низкие уровни, очевидно, бессмысленно делать предметом инновационных войн, так как все, что можно дедуцировать из некоторой самодостаточной непротиворечивой формальной системы аксиом, может быть выведено традиционными (моно)логическими средствами соответствующими специалистами или даже ЭВМ.

С учетом наличного уровня проработанности проекта экспериментальная международная инновационная война по теме «*Эволюция оснований логики и математики*» в сети Интернет (по каждому названному уровню общности отдельно или по всем трем уровням общности вместе) могла бы начаться уже в ближайшее время. Никаких общелогических, организационных и технических проблем для этого не существует. Вопрос лишь в аксиологических ориентациях философов логики и математики и логико-математического сообщества в целом.

Не повторяя сказанного выше, остановимся на некоторых особенностях организации предлагаемой инновационной войны, чтобы показать достаточную реалистичность этого замысла.

Учитывая тот очевидный факт, что технология инновационных войн и проблематика эволюции логико-математических систем пока не относятся к числу мировых бестселлеров и наиболее популярных супершоу, первую стадию предлагаемой экспериментальной инновационной войны можно было бы провести в порядке эксперимента в русскоязычном пространстве сети Интернет силами отечественных ученых (с приглашением зарубежных участников, наблюдателей и спонсоров).

Систематически проводимые в России конференции по основаниям логики и математики показывают, что интерес к данной проблематике у российских ученых имеется.

Проблем с виртуальным информационным пространством и многосторонней коммуникацией в сети Интернет с учетом незначительности общего объема хранимых и передаваемых информационных ресурсов (до 10 Гбт) не существует. Активные участники инновационной войны, не имеющие систематического доступа к сети Интернет, могли бы передавать и получать информацию на дискетных носителях.

С учетом экспериментального характера предлагаемой инновационной войны до предела может быть упрощена и ее технология.

Сценарий проведения экспериментальной инновационной войны в русскоязычной части сети Интернет по названной проблематике может выглядеть следующим образом.

Подготовительный этап:

— создание Оргкомитета по подготовке ИВ;

— разработка содержательной Программы ИВ и пакетов организационной и нормативной документации;

— разработка документации по театру инновационной войны, включая ИВ-карты ТИВ, пакеты анкет и паспортов по проблемам эволюции оснований логики и математики;

— формирование органов управления и обеспечения ИВ;

— подбор и информирование потенциальных участников ИВ об условиях участия в ИВ и ее правилах.

I этап:

— сбор и первичная сравнительная экспертиза разработанных участниками ИВ общих проектов оптимизации эволюции оснований логики и математики, выполненных в единой структуре и по единым формальным стандартам;

— сбор и первичная сравнительная экспертиза разработанных участниками ИВ частных инновационных проектов 2—5-го уровней общности, направленных на поддержку проектов 1-го уровня;

— регистрация и патентование проектов, претендующих на статус инноваций;

— проведение комбатантами системы предварительных «боевых операций» в сети Интернет, имеющих целью укрепление собственных научных позиций и ослабление позиций противников в режиме «тезис — критика — опровержение критики» с заранее обусловленным числом итераций (до 10);

— подведение итогов I этапа ИВ.

II этап:

— уточнение «выжившими» в ходе I этапа ИВ комбатантами исходных позиций, выявление и представление ими в явном виде точек непримиримых разногласий, разработка и заполнение итоговой анкеты с контрадикторными альтернативами по наиболее существенным вопросам;

— проведение многоитерационного «генерального сражения», направленного на определение сравнительной истинности и эффективности наиболее сильных инновационных проектов, претендующих на окончательную победу в инновационной войне;

— проведение итоговых экспертиз, анкетных опросов участников инновационной войны и наблюдателей, заполнение итоговых паспортов, обсчет итоговой суммы оценочных баллов, набранных комбатантами;

— подведение итогов и обобщение опыта экспериментальной инновационной войны.

В случае успеха начинания (по завершении инновационной войны в русскоязычной части сети Интернет) в качестве второй стадии проекта могла бы быть инициирована экспериментальная международная инновационная война по той же проблематике.

Если на проведение каждой из двух названных стадий предлагаемой экспериментальной инновационной войны положить по одному году, то за два года мировое логико-математическое сообщество получило бы такой задел инноваций и «ноу хау» в построении иерархии метаоснований логики и математики, а также такой опыт стимулирования, ускорения и углубления интеллектуальной эволюции в целом, какого, действуя традиционными методами, оно не имело бы и к 3000-му году.

Остается лишь надеяться, что для созревшей еще столетия назад корректировки базовых интеллектуальных ценностей и обращения к сфере метаочевидного научному сообществу в будущем понадобится меньше времени, чем 2000 лет, уже прошедших со времен античности.

КОММЕНТАРИИ

С. Н. Бычков

Обращение автора к лексикону военного искусства способно возбудить у читателя подозрения в чрезмерной агрессивности и, возможно, даже ввергнуть его в безотчетный страх подвергнуться пусть и интеллектуальному, но все же *насилию*. Несомненно, Вадим Кармленович принимает в расчет подобные опасения, видя главную трудность организации инновационной войны не в логических, организационных и технических проблемах, а прежде всего «в аксиологических ориентациях... логико-математического сообщества...». Насколько правомерен, однако, был бы этот упрек в поклонении Аресу?

Мне представляется, что использование необычной для научно-философских трудов лексики вызвано отнюдь не потребностями скорейшего утверждения истинности собственных взглядов, а искренней тревогой, испытываемой в связи с неспособностью современной теоретической мысли к адекватным ответам на суровые вызовы окружающей действительности. Известные события последнего времени неизбежно породят лавину самых мрачных прогнозов в преддверии нового тысячелетия. О наличии в мире фундаментальных антагонистических противоречий не говорит сегодня только ленивый. Отработанным за многие века способом их разрешения являются, по терминологии В. К. Петросяна, «физические, экономические и психологические войны». Увы, на исходе XX века нет нужды доказывать, что они реальны не только лишь в умственных конструкциях автора работы. В этом контексте пропаганда инновационных войн как способа «разрешения фундаментальных антагонистических гносеологических или аксиологических противоречий... между различными социальными субъектами путем применения сторонами логически корректного интеллектуального насилия» выглядит не агрессией по отношению к читателю, а скорее сциентистской утопией в духе лейбницевских мечтаний о замене споров вычислениями. Если несмотря ни на какие аргументы «пацифистски настроенный читатель» уже окончательно укрепился в своем отрицательном отношении к самой *идее* статьи, то было бы уместнее, на мой взгляд, рассматривать ее не как «излишне воинственную», а как «розово-утопичную». Но в таком случае проще всего было бы продемонстрировать утопичность рассматриваемого замысла, показав невозможность фактической его реализации. Каким образом? Да просто «забросив» соответствующий текст в открытый недавно сайт по философии математики. Эта естественная для негодующего читателя реакция и была бы началом инновационной войны по самой идее инновационной войны, которую и предлагает в качестве первого шага сам автор работы. Тем самым непримиримый оппонент авторской идеи вопреки своей воле выступил бы в роли ее союзника. По указанной причине единственно возможным последовательным отрицательным ответом В. К. Петросяну могло бы быть немедленное закрытие книги на последней странице статьи с целью как можно быстрее забыть увиденное словно кошмарный сон. Что ж, и это тоже полное право читателя!

Прежде чем перейти от обсуждения аксиологических аспектов работы к логическим ее аспектам, напомню, что любимый многими Сократ совершал по отношению к Протагору, Гиппию и другим софистам не что иное, как интеллектуальное *насилие*, выставляя их в невыгодном свете перед окружающими при помощи «принудительного установления истинности одних тезисов и ложности других». Да и вся наука с ее претензией на необходимость получаемых ею выводов по сути не что иное, как символ интеллектуального насилия. Если уж в чем и можно попытаться упрекнуть автора работы, так только в том, что он распространяет идею логической обязательности умозаключений за пределы «собственно научного знания».

С целью обоснования самой возможности успешного проведения инновационных войн автор кратко излагает, по его собственному признанию, «не вполне стандартную» концепцию абсолютного объективного логоса. Так как в философии нелегко найти двух человек, придерживающихся одинаковых взглядов по фундаментальным онтологическим проблемам, то, вполне понятно, и предложенная новая концепция не может не вызвать ряд вопросов. Почему, например, обязательно обосновывать существование объективного логоса путем противопоставления последнего хаосу? Подобное обоснование являлось бы естественным для стоиков, но для их предшественника Аристотеля было бы совершенно чуждым. Впрочем, обсуждение этого и других, более специальных, вопросов увело бы нас за пределы четко очерченной тематики конференции и потому их целесообразно было бы рассмотреть в рамках первой инновационной войны, посвященной самой ее принципиальной возможности. Полагаю, что нет другого способа доказать нереальность идеи инновационных войн или, наоборот, продемонстрировать обратное, чем попытаться «победить» в подобной «войне».

С. В. Добронравов

Предложенный в статье В. К. Петросяна проект весьма оригинален и, безусловно, вызовет к себе значительный интерес научного сообщества. Тем не менее, в тексте все же имеются некоторые неясные моменты, причем не где-нибудь, а в «узловых пунктах». Поэтому было бы весьма желательно — и для самого автора, и для тех, к кому его статья обращена, — сделать дополнительные разъяснения относительно своих базовых положений. К тому же это будет практической проверкой самой концепции «инновационных войн».

Центральное понятие статьи — «инновационная война». Оно образовано при помощи двух других понятий: «интеллектуальное насилие» («акт принудительной замены в сознании противной стороны некоторой ложной позиции на противоположную ей истинную позицию») и «абсолютный объективный логос». При отсутствии хотя бы одного из этих принципов «инновационная война» становится невозможной. В самом деле, без «интеллектуального насилия» ее не будет. А откажитесь от объективности «абсолютного логоса» — и моментально борьба за истину, к которой стремятся все спорящие стороны независимо от своих взглядов, превращается в борьбу за победу — свою собственную победу независимо от того, какое положение утверждается и какова его объективная ценность. В этом случае нельзя будет говорить не только о замене в сознании противника ложной позиции на истинную, но и вообще о каких-либо изменениях в сознании в результате проведенной дискуссии: когда речь идет не о победе истины, достигаемой общими усилиями оппонентов, а исключительно о своей победе, то совершенно не важно, принял ли противник мои положения или нет; главное — разбить самого противника, морально и интеллектуально уничтожить его. Здесь все средства будут хороши: заведомо фальшивые, но психологически эффектные утверждения, дискредитация личности противника, прямые его оскорбления, — дабы выставить его в невыгодном свете. Из царства чистой логики мы попадаем в царство чистой психологии, и место интеллектуального насилия занимает насилие психологическое — «война нервов». «Инновационная война» редуцируется к «психологической войне». Само собой разумеется, что ни о какой «исчерпывающе достоверной и убедительной аргументации» в таком случае говорить уже невозможно.

Итак, все упирается в проблему существования «абсолютного логоса»: на этом понятии основываются все остальные идеи статьи. Однако надо признать, что аргументы, приводимые автором в пользу реальности такого логоса, не являются исчерпывающими. А именно, логос этот определяется как «универсальный закон упорядочения мироздания», объективность которого доказывается «очевидной организованностью» мира. Тем не менее такой аргумент следует признать недостаточным. Он не может доказывать объективность «абсолютного логоса», поскольку указанная организованность есть не какая-либо данность, а только некоторый постулат, форма нашего мышления, являющаяся условием возможности познания. Таким образом, все доказательство приобретает почти тавтологический характер, когда из *понятия* упорядоченности выводится объективное существование закона этой упорядоченности (но существует ли объективно она сама?). То, что «упорядоченность мира» есть только понятие, а не действительность, доказывается возможностью мыслить мир как не имеющий никакой организации. К примеру, первобытному человеку мир представлялся как «хаос действий», и даже если считать, что исследователи, говорящие так, заблуждались, принимая за первобытное мировоззрение некоторые собственные предположения на этот счет, то все равно это будет оставаться подтверждением самой возможности мыслить мир как хаос, а не как порядок. Юм заявлял: «Что угодно может произвести что угодно» (Соч.: В 2 т. М.,1965. Т. 1. С. 281) , и такое отрицание объективной закономерности было не случайной шуткой, а одним из выводов всех его размышлений. Итак, реальность (а не просто мыслимость) «абсолютного логоса» в рассмотренном примере не доказана и остается исключительно субъективным «предположением».

В статье же ход мыслей автора на нем не останавливается. Он объективирует это «предположение» (не дав при этом иных доказательств его объективности) и на такой основе строит свой следующий тезис: любое наше знание, или «субъективный логос», есть некоторое отражение логоса объективного. Однако даже если считать «объективный логос» действительно объективным, то все, чем обладал и обладает на сегодняшний день человек, — только разнообразные «субъективные логосы». Как же в таком случае возможно говорить о каком-либо отражении ими «объективного логоса» да еще выстраивать их иерархию по степени точности отражения? Вопрос риторический. Ведь критерия того, что данная система мыслей воспроизводит реальное положение дел, и того, насколько точно это воспроизведение — в нашем случае самого «объективного логоса», взятого во всей своей полноте, — мы не имеем. Правда, В. К. Петросян предлагает другой критерий — эффективность знаний человека в его борьбе за существование, которая, по его мнению, свидетельствует о той или иной степени адекватности отражения. Но и такой аргумент следует признать ошибочным. А именно, успешность деятельности не может служить доказательством объективности положений, из которых исходит субъект, осуществляющий эту деятельность, поскольку успех возможен и при принятии ложных положений. Относительно этого мы имеем множество свидетельств из истории науки. Пример — теория теплорода: на ее основе производились разнообразные вычисления и эксперименты, имевшие большое научное значение, строились машины, которые работали; но при дальнейшем развитии науки эта теория оказалась ошибочной, а теплород — не существующим в природе веществом. Таким образом, объективность «абсолютного логоса» и возможность его отражения в наших знаниях нельзя доказать и практикой: «эффективность» и «истинность» не связаны друг с другом и никакая успешная деятельность не выводит человека за границы его субъективности.

Все сказанное, естественно, не означает, что «абсолютный логос» есть просто некоторая фикция: ошибочность аргументов еще не означает ошибочности самого тезиса. Однако поскольку вся концепция автора основывается на этом понятии, то для подтверждения его истинности необходимы более прочные доводы. Основной недостаток всего обоснования объективности «абсолютного логоса» заключается в том, что автор все время исходит исключительно из объекта («мир»). Но такой «объективизм» неверен уже и в пределах собственной концепции В.К.Петросяна: если логос абсолютен, то он должен включать в себя не только «объективное», но и «субъективное», причем не порознь, а в их органическом единстве. Подобное единство и следует брать за основу доказательства.

В заключение — несколько слов относительно воззрений В. К. Петросяна на аксиоматический метод. Происхождение этого метода он связывает с тем, что его изобретатели — древние греки — не пожелали продолжать regressus ad infinitum и произвольно остановились на некоторых положениях, принятых за ни к чему не сводимые далее первоосновы. В реальности все произошло несколько иначе. Исторически парадокс бесконечного регресса был реакцией на уже имеющийся аксиоматический метод, и целью создавших его скептически настроенных мыслителей была демонстрация несостоятельности такого метода. Это не что иное как отрицание аксиоматического метода, и ничего больше. Действительно, если мы не считаем истинными предъявленные нам основания всякого последующего рассуждения в данной области, если мы отвергаем их, то никто не сможет нас «интеллектуально принудить» отказаться от своего решения, так как подобная попытка делала бы данные основания следствиями других оснований, что: 1) давало бы возможность в очередной раз провести операцию отрицания (и так ad infinitum); 2) уничтожало бы само понятие основания — совершенно неразложимого «атома мысли», ни к чему другому не сводимого. Но как видно из самой формулировки парадокса, для его существования уже необходимо иметь понятие основания (иначе нет предмета отрицания), а следовательно, и аксиоматический метод. Короче говоря, указанный парадокс относится не к любому рассуждению, но только к научному, а наука в античности без аксиоматического метода невозможна. В обыденной жизни мы понятием основания не пользуемся, поскольку здесь то, что один раз было предпосылкой, в другой раз может быть следствием и ничего абсолютного или хотя бы претендующего на абсолютность из таких ситуаций извлечь нельзя. Следовательно, происхождение аксиоматического метода совершенно иное: корни его надо искать в другой области, непосредственно связанной с наукой и ее генезисом.

ОТВЕТ АВТОРА

Бычкову С. Н.

Я благодарен С. Н. Бычкову за основной вывод его комментария, что единственный способ убедиться в эффективности (или неэффективности) идеи инновационных войн — это начать инновационную войну по проблематике инновационных войн.

Несколько конкретных замечаний. Обсуждение статьи показывает, что, по-видимому, уже в самом начале первой инновационной войны (если ей суждено состояться) всем потенциальным комбатантам предстоит участвовать в гигантской, во многом хаотичной «мясорубке» по всем ключевым понятиям философии, логики и математики, предшествующей более упорядоченным («регулярным») «сражениям». Я с уважением отношусь к познаниям С. Н. Бычкова в области античной философии и математики и считаю его соратником в будущих «битвах», но никак не возьму в толк, почему, как он утверждает, для Аристотеля противопоставление Логоса (закона упорядоченности мира, мировой гармонии) и Хаоса «было бы совершенно чуждым»? Разве не Аристотель является автором идеи Ума-Перводвигателя, безусловно противоречащей идее абсолютной хаотичности мироздания? Разве не Аристотель считал закон непротиворечия онтологическим законом, что автоматически отрицает дисгармонию, самопротиворечивость как мира в целом, так и его частей? Или, может быть, Аристотель отрицал пространство и время? Может быть, говоря о Логосе (определенности, упорядоченности, гармонии) и Хаосе (неопределенности, неупорядоченности, онтологической противоречивости), мы говорим о чем-то совершенно различном, не понимая друг друга?

Что касается сделанного С. Н. Бычковым в комментарии (с позиций читателя-скептика) уподобления инновационной войны сциентистской утопии «в духе лейбницевских мечтаний о замене споров вычислениями», то оно, по моему мнению, не вполне корректно, поскольку основная идея инновационной войны состоит как раз в обратном – в *развитии классической техники диалога (полилога) до того уровня строгости и формальности, когда в массовых спорах (при полной первоначальной несоизмеримости и несовместимости позиций сторон) станет возможным строгое и доказательное рассуждение.* Т. е. речь идет не о перспективе *отрицания идеи спора* вообще, как у Лейбница, а, напротив, о становлении специальным образом организованного и формализованного многостороннего спора («инновационной войны») в качестве *единственного* адекватного средства разрешения наиболее фундаментальных гносеологических и социальных конфликтов. В этом смысле в концепции инновационных войн отрицается, скорее (в полную противоположность Лейбницу), универсальность моносубъектных «вычислений» любого рода в качестве средства познания истины.

Не вполне также согласен и с тем, что простое «вбрасывание» идеи инновационных войн в научное сообщество и возможная дискуссия по этой проблеме уже будут означать начало инновационной войны (хотя это, бесспорно, и чрезвычайно ценные подготовительные шаги). Без должной организации, без эффективной системы контроля за качеством аргументации сторон такая дискуссия может легко деградировать до уровня логомахии и примитивной софистики. Хорошей иллюстрацией последнего тезиса, по моему мнению, является вышеприведенный комментарий С. В. Добронравова к моей статье.

Добронравову С. В.

Комментарий С. В. Добронравова к моей статье довольно пространен, содержит весьма жесткие формулировки и (к тому же) составлен в форме «интеллектуального вызова». Все это заставляет дать существенно более развернутый и резкий ответ, чем я планировал.

1. В первом абзаце своего комментария С. В. Добронравов фиксирует неясность (для него) изложенной в моей статье концепции «инновационных войн» по многим узловым пунктам, просит дать разъяснения по интересующим его вопросам и предлагает рассматривать факт и процесс моего разъяснения в качестве практической проверки концепции «инновационных войн».

Я готов дать искомые разъяснения, но возражаю против того, чтобы эта небольшая полемика трактовалась как «практическая проверка самой концепции "инновационных войн"». Претензии С. В. Добронравова в этой части считаю явно завышенными.

Неадекватность комментария С. В. Добронравова видна уже из его формы. Так, если участник спора просит своего оппонента снять какие-либо неясности в исходных посылках, он, как правило, воздерживается от высказываний об ошибочности воззрений собеседника до получения искомых разъяснений, а если истец настаивает на ошибочности воззрений противной стороны, то не просит разъяснений (в силу доказанности обвинений). В комментарии же С. В. Добронравова обе эти позиции соединены самым причудливым образом, что свидетельствует либо о неуверенности комментатора в своих доводах, либо о его недостаточном знакомстве с формальной логикой.

В обоих случаях *вооружение* для инновационной войны небогатое.

2. Основной удар С. В. Добронравов наносит по рассмотренным мною в статье понятиям: «абсолютный объективный логос», «субъективный логос», «интеллектуальное насилие» и их взаимосвязям.

Комментатор, в частности, считает, что акт «интеллектуального насилия» невозможен без доказательства существования «абсолютного объективного логоса» (из-за неминуемой, по его мнению, психологизации инновационной войны) и делегирует эту свою убежденность мне.

Спешу разочаровать С. В. Добронравова и констатировать, что ни в коей мере не разделяю его представлений по обсуждаемому вопросу. «Интеллектуальное насилие» родилось не сегодня и успешно осуществлялось на всем протяжении человеческой истории безо всяких доказательств существования «абсолютного объективного логоса». Для совершения акта «интеллектуального насилия» необходимо и достаточно в общем случае иметь исчерпывающую (с точки зрения объекта «интеллектуального насилия» — собеседника) аргументацию по дискутируемой *локальной* предметной области.

Что касается якобы неустранимой психологизации «инновационной войны» вследствие недоказанности существования «абсолютного объективного логоса», то, во-первых, это никак не связанные между собой вещи и, во-вторых, я не писал, что «инновационная война» – это война ангелов (или роботов). Я претендую только на то, что ввожу в научный и практический оборот новый типологически чистый род войн *между людьми*, в которых *доминирующей формой* применяемого насилия будет организованное *«интеллектуальное насилие»*. Совершенно очевидно, что в «инновационных войнах» (особенно на первых этапах становления этого социального института) будет много психологизма («психологического насилия») и попыток заинтересованной фальсификации истины. Поэтому вопрос — не в наличии (отсутствии) стремления участников инновационной войны одержать победу «любой ценой» и в произвольных целях, а в *качестве* «законов инновационной войны» и в способности органов управления инновационной войной (групп семантического и логического контроля, например) заставить комбатантов их уважать, выявляя и наказывая попытки верифицируемо недобросовестной аргументации.

Более гармоничная, более эволюционно ценная, более адекватная реальности (чем множество исходных) *(интер)субъективная истина* – это то, что должно и может быть *результатом* инновационной войны независимо от воли и мотивации участников, а также независимо от того, признает ли публично свое поражение проигравшая сторона.

В этом смысле «проблема существования "абсолютного логоса"» стоит не так остро, как предполагает С. В. Добронравов. К тому же даже 100-процентная доказуемость существования «абсолютного логоса», очевидно, не устранит человеческих слабостей и неадекватных эмоций. Так что не следует подменять понятия и ставить условием корректности и реализуемости идеи «инновационной войны» предварительное доказательство существования и познание абсолютной истины, а также полное искоренение всех человеческих пороков.

Далее. «Показав» *очевидную*, по его мнению, сверхценность *доказательства существования «абсолютного логоса»* для выдачи *лицензии* на право проведения инновационной войны, С. В. Добронравов в третьем абзаце своего комментария переходит в наступление. Он пытается формально-логическим путем установить факт недоказанности в моей статье тезиса о существовании абсолютного логоса, что, по его мнению, означает полное дезавуирование концепции инновационных войн.

Я уже отмечал, что никакой сверхжесткой связи между доказательством тезиса о существовании Абсолютного Логоса и возможностью достаточно успешно вести «инновационные войны» нет, но сам по себе вопрос о понятии Абсолютного Логоса достаточно интересен и я попробую несколько более подробно и четко, чем в статье, сформулировать некоторые основные пункты своей концепции Абсолютного Логоса и ответить на возражения С. В. Добронравова.

Выдвигая (вслед за тысячами философов самых различных школ и эпох) тезис о существовании Абсолютного Логоса (безо всяких других определений), я апеллирую к очевидному для любого человека (не ставящего целью «*любой ценой*» доказать обратное) *факту* организованности (упорядоченности) окружающего нас мира. С этим тезисом, насколько мне известно, всегда были солидарны и идеалисты, и материалисты. По своему логическому статусу тезис об организованности (не хаотичности) мира — не предположение, не постулат, не принцип, а *констатация факта*, подтвержденного всей историей человечества. Отрицание этого факта влечет не только отрицание всего того, что называется разумом и наукой, но и отрицание мира как такового, бытия вообще, так как оно в этом случае никак не отличимо от небытия (пространство, время, материя, движение, взаимодействие, причинность, сравнимость и т.д. становятся фикциями).

Даже древнеиндийские философы, создавая модели миров без формы («арупа») и даже без материи («нирвана»), никогда не доходили до отрицания факта организованности мироздания. Что же касается древнегреческой философской традиции, то идея абсолютного логоса (в разных вариантах) всегда присутствовала в работах величайших ее представителей. Достаточно вспомнить Закон предустановленной гармонии Гераклита.

То, что лежит в основе этой непосредственно наблюдаемой организованности мира (без чего она невозможна), я называю Абсолютным Логосом или Законом упорядоченности мира (без всяких других определений и теологических подкрасок).

В сказанном нет ни одного предположения. Тезис о существовании Абсолютного Логоса аргументирован ровно настолько, насколько аргументирован в человеческом мышлении установленный тысячелетней практикой *факт упорядоченности мира.* Все науки только тем и занимаются, что пытаются отыскивать различные законы (умопостигаемые регулярности) природы и общества, ни на секунду не усомнившись в их существовании, поскольку это непосредственно следует из всего предшествующего опыта человечества. От того, что эти законы сводятся воедино и называются Абсолютным Логосом, ничего не меняется. Фактически речь идет о реальном *логико-математическом устройстве мироздания*, адекватное восприятие и отражение которого нам в полной мере не доступно, но является нашей целью.

В сказанном нет также ничего ни нового, ни моего. Своим я считаю лишь тезис, что возможно существование и сосуществование в коллективном человеческом сознании произвольно большого числа качественно различных логико-математических систем («субъективных логосов»), неравноценных с точки зрения *точности, адекватности отображения* «абсолютного логоса». При этом я утверждаю, что с помощью метода инновационных войн в каждый конкретный отрезок времени (1—5 лет) может быть синтезирована *наилучшая среди существующих (но не среди возможных) логико-математическая система высшего уровня общности.* Этот тезис я противопоставляю как мнению философов, вообще не допускающих мысли о существовании и сосуществованиии множества равноправных конкурирующих между собой логико-математических парадигм в одной культуре и в одной эпохе, так и мнению философов, считающих невозможными подобные гармонические суперсинтезы взаимно противоречащих и/или несоизмеримых между собой гносеологических систем.

Оставив мой собственный тезис на «десерт», С. В. Добронравов начинает с отрицания всей философской и научной мысли человечества, а именно с отрицания утверждения, что *организованность мира есть установленный человечеством факт,* и считает данное явление лишь формой мышления, условным понятием. Демонстрируя далее познания в философии Канта и *«творчески»* применяя их в сходной, как ему, наверное, кажется, с критикой онтологического доказательства бытия Божия ситуации, оппонент «ловит» меня на «тавтологии»: из *понятия упорядоченности мира* у меня (якобы) выводится объективное существование *закона этой упорядоченности.*

С таким же успехом, игнорируя результаты триллионов физических и химических экспериментов, проведенных человечеством на протяжении его истории над *водой*, например, можно утверждать, что из *понятия о воде как об организованном (внутренне структурированном и законопослушном в* *поведении) элементе мира* ученый не имеет права заключать о существовании *закона ее расширяемости вследствие нагревания* (равно как и о любых других законах). Можно также подозревать воду, которая при достаточно сильном нагревании с завидным упорством (несмотря на все протесты комментатора) превращается в пар, что она просто хочет досадить С. В. Добронравову, будучи на деле совершенно свободной в выборе поведения…

Совершенно очевидно, что тезис о «законопослушности» (упорядоченности) воды здесь возникает не как следствие априорно выработанного *понятия об организованности воды*, а как следствие констатации эмпирического факта ее «законопослушности» (в частности, гарантированной расширяемости в результате нагревания).

Аналогично и в случае с Абсолютным Логосом. Существование Абсолютного Логоса как Закона (целостной системы логико-математических законов) упорядоченности мира всегда выводилось философами и вообще учеными (*не ставившими своей задачей доказательство бытия Божия, что является совершенно другой, гораздо более сложной гносеологической проблемой*) не из его *понятия* и даже не из *понятия упорядоченности мира*, а из эмпирически наблюдаемого и перманентно экспериментально подтверждаемого *синтетического факта (системы фактов) упорядоченности мира, закрепленного (хотя и по-разному) во всех логических, математических и лингвистических системах («субъективных логосах») человечества.*

Напротив, в комментарии С. В. Добронравова мы имеем дело с давно известным приемом из арсенала софистов, который в логике называется подменой понятия (и как следствие, тезиса). Ниже будет показано, что этот нехитрый прием применяется С. В. Добронравовым настолько часто, что возникают сомнения либо в добросовестности мотивации комментатора, либо в его знакомстве с азами формальной логики.

Любопытно, что С. В. Добронравов пытается даже позитивно аргументировать в пользу возможности «мыслить мир как не имеющий никакой организации». Более того, он считает, что сама эта возможность — опровержение идеи Абсолютного Логоса. Им приводятся следующие «контрпримеры»: 1) с его точки зрения, первобытный человек видел мир как «хаос действий»; 2) Юм заявлял: «Что угодно может произвести что угодно» (Соч.: В 2 т. М., 1965. Т. 1. С. 281.)

На мой взгляд, в обоих случаях комментатор просто спутал два вида хаоса: 1) хаос как «беспорядок на кухне» (или что-то в этом духе) и 2) хаос как абсолютная неустойчивость, абсолютная онтологическая самопротиворечивость мира, отсутствие каких-либо различий и сходств, связей, причин и т. д.

Так вот, хаос (магико-энергетическое видение мира) дикарей никакого отношения не имеет к абсолютному хаосу, о котором идет речь в нашем случае. Да, мир первобытного человека, равно как и мир индейцев К. Кастанеды — это очень *непривычные* для классической науки (и даже просто нормального человеческого восприятия действительности) миры, но это — в высшей степени (хотя и по-другому) *упорядоченные миры*. Таким образом, приводя пример с первобытными людьми, С. В. Добронравов осознанно или неосознанно осуществляет очередную подмену понятия, а соответственно, и тезиса.

Аналогично и с Юмом. Утверждая: «Что угодно может произвести что угодно», Юм признает, по крайней мере, что в том странном мире, о котором он говорит, существует причинная связь (в частности, отношение продуцент — продукт), а это уже не абсолютный хаос. Кроме того, вышепроцитированный тезис Юма неверен в смысле адекватности реальности. В противном случае, неплохо бы Юму (или С. В. Добронравову) «произвести» (для начала) этот самый мир (в соответствии с собственным тезисом) и дать всем страждущим максимально рентабельным способом «произвести» в нем все, что им нужно для безбедной жизни.

Так что с примерами абсолютно хаотических миров у С. В. Добронравова серьезные проблемы (как логические, так и семантические). Не так-то просто помыслить абсолютно хаотический мир, если это вообще возможно на человеческом уровне эволюции.

В начале четвертого абзаца С. В. Добронравов переходит, наконец, к критике моих собственных тезисов и задает, как ему кажется, риторический вопрос: как можно говорить об отражении «субъективными логосами» «логоса объективного», «да еще выстраивать их иерархию по степени точности отражения» в условиях отсутствия всеобщего критерия истины?

Ответ состоит в следующем. Я утверждаю, что основное, чем отличаются друг от друга различные «*субъективные логосы*», имеющие тождественную предметную область, — это их сравнительная *«гносеологическая сила»*. В науке уже давно совершенно правомерно говорят об объяснительной, предсказательной, эвристической и прочих силах (мощностях) тех или иных инструментов познания. Я считаю, что давно пора обобщить все эти термины (и многие другие, еще не включенные в классический арсенал науки) в понятии *«гносеологической силы»* того или иного «субъективного логоса» (логической системы, научной теории и т.д.) или (что то же самое) в понятии *«качества способа отражения (рационализации) действительности»*.

Подробно говорить о механизме такой интеграции я здесь не буду, поскольку это сделало бы объем моего ответа С. В. Добронравову выходящим за все рамки дозволенного. Скажу лишь, что мною уже разработаны некоторые подходы и методики, позволяющие научному сообществу как целому (или участникам конкретных инновационных войн) делать достаточно адекватные сравнительные оценки «гносеологической силы» различных конкурирующих между собой «субъективных логосов», и я, по мере возможности, буду их публиковать. Кроме того, предполагается, что разработанные мною (или кем-то еще) системы индексирования и интеграции различных критериев гносеологической силы и сравнительной оценки тех или иных конкурирующих между собой инструментов познания должны апробироваться и развиваться в ходе конкретных инновационных войн. Их верификация должна осуществляться как на эмпирическом, так и на общегносеологическом уровнях. Какого-то особого доказательства существования Абсолютного Логоса для этого (по замыслу) не требуется.

Далее. С. В. Добронравову активно не нравится высказанная мною идея о необходимости и возможности верификации истинности «субъективных логосов» высшего уровня общности и их сравнительной значимости по критерию эволюционной эффективности. Он считает, что «успех возможен и при принятии ложных положений». При этом оппонент опять подменяет понятия и, кроме того, контрадикторным образом противопоставляет то, что не требует такого противопоставления и вполне может быть гармонизировано. В частности, он приводит пример с теплородом, теория которого, по его мнению, была успешна в смысле практической эффективности, но не соответствовала действительности.

Во-первых (хотя это и не главное), насчет теплорода, то бишь флогистона, — «еще не вечер». Науке свойственно со временем изменять взгляды и возвращаться к давно забытым идеям. Во-вторых (и это главное), пример с теплородом, даже если принять его как правомерный в содержательном смысле, никакого отношения не имеет к предлагаемому мною глобальному эволюционному критерию истинности в силу того, что *принятие или непринятие теории теплорода научным сообществом никогда не было критическим фактором для человеческой эволюции в целом.*

Предлагая критерий *эволюционной эффективности* наиболее фундаментального для некоторой эпохи субъективного логоса в качестве главного критерия его истинности, я веду речь о *прямой зависимости между способностью рода человеческого (или произвольно взятой локальной цивилизации) к выживанию и развитию и экзистенциальной (эволюционной) эффективностью доминирующей гносеологической (уже — логико-математической) системы.*

Даже если какая-либо эволюционно значимая логическая система или гносеологическая доктрина в каком-то смысле ложна в аспекте соответствия действительности (постулирует существование несуществующих в природе объектов или что-то в этом духе), но зато эффективно способствует тому, чтобы использующая ее цивилизация выжила в какой-то критический для себя момент, она, очевидно, ценнее (истиннее, гносеологически сильнее) для данной цивилизации, чем любая другая более истинная (в корреспондентском смысле), но менее плодотворная в экзистенциальном (эволюционном) плане гносеологическая суперпарадигма.

Какая цивилизация осознанно предпочтет чуть более истинную в корреспондентском смысле гносеологическую доктрину, ведущую к ускоренной гибели из-за своей эвристической слабости и контрпродуктивности, доктрине чуть менее адекватной реальности, чем первая, но ведущей к выживанию и процветанию? (Тем более, что, выжив и развившись, цивилизация всегда может впоследствии подправить свои гносеологические воззрения на предмет повышения степени их адекватности действительности). Вопрос (как нынче модно говорить) *риторический*.

Соответственно, в предлагаемой мною *гармонической концепции истины* (а я никогда не говорил, что придерживаюсь корреспондентской теории истины в аристотелевском варианте) вторая гносеологическая доктрина (более эвристичная и эффективная в экзистенциальном смысле) будет иметь существенно более высокий ранг интегральной истинности (гносеологической силы), чем первая (более адекватная действительности).

Это — что касается семантической и логической неадекватности конкретного «контрпримера» с теплородом, приведенного С. В. Добронравовым.

Если же говорить в общем случае (независимо от того, является та или иная гносеологическая доктрина или научная теория эволюционно сверхзначимой или нет), то (по замыслу) *весовые коэффициенты* тех или иных *частных критериев истинности*, учитываемых при оценке *интегральной истинности (гносеологической силы)* того или иного инструмента познания в ходе инновационной войны (уровень адекватности реальности, уровень полезности, уровень аксиологической значимости, уровень строгости и определенности, уровень непротиворечивости и т.п.), определяются самим научным сообществом до начала инновационной войны, вводятся в систему ее законов и являются основаниями для подведения окончательных итогов интеллектуальных баталий. Т. е. в большинстве случаев нет никакой необходимости жестко противопоставлять друг другу различные существующие и возможные критерии истинности субъективных логосов. *В гармонической концепции истины они являются взаимно дополнительными.* Просто до начала каждой конкретной инновационной войны научным сообществом избирается наиболее оптимальный, по средневзвешенному общему мнению, интегральный индекс, конфигуратор наличных частных критериев истинности, обобщающий и гармонизирующий все возможные научные интересы и ценности.

Содержание пятого абзаца комментария С. В. Добронравова сводится к снисходительному похлопыванию незадачливого автора по плечу в связи с *очевидной ошибочностью его аргументов*, не исключающей, правда, возможной истинности самого тезиса об «абсолютном логосе», и к обнаружению того дополнительного ко всем уже ранее выявленным недостаткам комментируемой статьи факта, что «автор все время исходит исключительно из объекта ("мир")» и не догадался по эксклюзивной ментальной немощи своей подключить к рассмотрению еще и «субъективный фактор». С. В. Добронравов далее по-отечески наставляет, что вот это-то нераспознанное непонятливым автором *единство объективного и субъективного* и «следует брать за основу доказательства». Спасибо за совет, но все же порекомендовал бы комментатору впредь повнимательнее читать и стараться вникнуть в то, что он берется комментировать.

3. В заключение (6-й абзац комментария) С. В. Добронравов разъясняет научному сообществу ошибочность «воззрений В. К. Петросяна на аксиоматический метод».

Опровержение «воззрений В. К. Петросяна» начинается, по установившемуся обычаю, с их подмены. В частности, С. В. Добронравов с пафосом, достойным лучшего применения, приписывает мне тезис, что «парадокс бесконечного регресса» возник исторически раньше аксиоматического метода, и тут же (с видимым удовольствием) его опровергает.

На самом же деле я ничего подобного не писал.

Считая, что в известном «парадоксе бесконечного регресса» апостериори предельно ясно и лаконично выражена квинтэссенция всех гносеологических проблем античности, связанных с понятием истины и способами ее получения и обоснования, я использовал данный парадокс, чтобы наиболее точным и логически компактным способом эксплицировать сущность общего гносеологического кризиса древнегреческой науки.

Я написал в статье, что «парадокс бесконечного регресса» был впервые сформулирован в явном виде Секстом Эмпириком. Сказав это, я считал, что сказал достаточно, чтобы последующие высказывания понимались не в буквальном конкретно-историческом ключе, а по существу. Совершенно очевидно, что Секст Эмпирик, живший (по классической хронологии) на рубеже II и III веков нашей эры, не мог сформулировать данный парадокс раньше, чем возник аксиоматический метод, поскольку уже Аристотель (384—322 до н. э.) активно (и в близком к современному смысле) использовал слово «аксиома» в своих трудах. Считая, что делаю доклад (пишу статью) для научного сообщества, я не предполагал, что кто-то из участников конференции (а тем более комментатор) поймет мою мысль столь прямолинейно.

В изложенной мною реконструкции поднимается совершенно другая проблема, не имеющая никакого отношения к выяснению факта конкретно-исторической первичности (или вторичности) чего бы то ни было (тем более, что в будущем, скорее всего, нам предстоит серьезное переосмысление всей хронологии античного мира). В статье меня интересовала только причина отказа древних греков от возможного метааксиоматического (диа- и полилогического) пути интеллектуальной эволюции и выбора ими аксиоматического метода (и — шире — монологических систем мышления) в качестве доминирующего инструмента научного познания.

Я утверждал и утверждаю, что аксиоматический метод не мог быть создан и избран в качестве доминирующего инструмента научного познания без более или менее осознанного вынужденного отказа значительной части научного сообщества античности от метааксиоматического (или, что то же самое, от диа- и полилогического) пути интеллектуальной эволюции, воспринимавшегося древними греками как путь в «дурную бесконечность» и имевшего (начиная с Аристотеля) низший аксиологический ранг. При этом, разумеется, никаких специальных исследований «парадокса бесконечного регресса» в классической формулировке, данной Секстом Эмпириком на много веков позднее, древними греками не производилось, но его проблематика, тесно связанная с теорией и техникой диалога, спора и коммуникации вообще, была им, безусловно, хорошо известна и в той или иной форме присутствовала в работах всех крупных античных философов, включая Платона и Аристотеля. (Надеюсь, никто не станет утверждать, что древнегреческий диалог и его «вечная спутница» софистика родились исторически позже аксиоматического метода).

Другими словами, в моей статье речь идет о том, что очевидная гносеологическая ограниченность аксиоматического метода, делающая те или иные высказывания сторонников какой-либо теории истинными только в рамках этой теории (и не более того), показалась древним грекам, по-видимому, меньшим злом, чем чреватая перманентным межсубъектным, логическим и содержательным антагонизмом диалоговая, полилогическая, метааксиоматическая культура мышления, требующая (для своей минимальной работоспособности) непрерывного согласования воззрений множества сторон коммуникационного акта, создания непротиворечивой иерархии оснований суждений и критериев их истинности, а также встроенной в механизм диалога и коммуникации мощной системы контроля за логической и семантической корректностью выдвигаемых сторонами тезисов.

В этом смысле именно неудачи древних греков в создании эффективной общей теории диалога (полилога), их скепсис в отношении перспектив разработки универсальной системы критериев истинности, приемлемой для всех сторон научной коммуникации одновременно, невозможность полного преодоления софистических уловок в спорах (т. е. в конечном счете неспособность разрешить гносеологические противоречия, наиболее точно определенные «*парадоксом бесконечного регресса*», — независимо от времени его появления в явном виде) и *были причинами создания и дальнейшего культивирования классического аксиоматического метода*, весьма уязвимого как универсальный инструмент познания, но позволяющего наладить непротиворечивый коммуникативный процесс и устойчивый обмен информацией в избранной предметной области.

В заключение хотелось бы выразить надежду, что другие участники конференции восприняли мою статью более адекватно.

Научное издание

СТИЛИ В МАТЕМАТИКЕ
социокультурная философия математики

Под ред. *А. Г. Барабашева*
Редактор *Т. А. Токарева*

Издательс тво Русского Христианского гуманитарного института
190068, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 15.
Лицензия ЛР № 071122 от 04. 01. 95

По вопросам оптовых закупок обращаться по адресу: Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 15. Издательство Русского Христианского гуманитарного института. Тел/Факс: (812) 311-30-75. Представительство в Москве: книжный салон «Летний Сад»: Москва, ул. Большая Никитская, 46. Тел./факс: (095) 290-06-88.

Сдано в набор 01. 05. 99. Подписано в печать 25. 11. 99.
Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Гарнитура тип Таймс. Печать офсетная.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 34.5.
Тираж 1000 экз. Зак. № 3711

Отпечатано с готовых иапозитивов
в Академической типографии «Наука» РАН
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия, 12.