ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать под общим заглавием «Элементы математики» полный трактат современной математической науки.

Много томов этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
1332

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR N. BOURBAKI

FASCICULE XXXII

THÉORIES SPECTRALES

CHAPITRE I. ALGÈBRES NORMÉES

CHAPITRE II. GROUPES LOCALEMENT COMPACTS COMMUTATIFS

1967

HERMANN

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
В. П. ГУРАРИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Е. А. ГОРИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1972

УДК 517 : 519.4

Книга входит в завоевавшую мировое признание энциклопедию современной математики «Элементы математики», созданную группой французских ученых, выступающих под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки. Ряд томов этой энциклопедии уже вышел в русском переводе и получил заслуженно высокую оценку советских ученых. Этот выпуск, состоящий из двух глав: «Нормированные алгебры» и «Локально компактные коммутативные группы», выгодно отличается от прочих трудов Н. Бурбаки тем, что он мало связан с другими томами трактата, в нем нет излишней общности. Книга изобилует методическими усовершенствованиями и отражает самые современные результаты. Она представляет интерес для математиков различных специальностей — от студентов до научных работников.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. $\frac{2\text{-}2\text{-}3}{6\text{-}72}$

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Советскому читателю предлагается перевод первых двух глав «Спектральной теории» Н. Бурбаки. Коротко можно сказать, что здесь собран предварительный материал для построения спектральной теории в стандартном понимании этого словосочетания, а именно, элементы гельфандовской теории коммутативных банаховых алгебр и понтрягинской теории характеров, причем последняя развивается с общих позиций функционального анализа.

Разумеется, автор свободно пользуется ссылками на другие части своего обширного трактата, и это касается не только теорем, но и терминологии, а также обозначений (которые не всегда заново объясняются). В основном имеются ссылки на тома, посвященные топологии, алгебре и интегрированию, уже переведенные на русский язык. Вместе с тем искушенному читателю следует соблюдать известную осторожность, поскольку, например, в том, что касается банаховых алгебр, терминология, используемая Н. Бурбаки, далеко не всегда совпадает с принятой и устоявшейся в нашей математической литературе. Тем не менее, мы по понятным причинам не сочли возможным сколько-нибудь серьезно изменять терминологию автора.

В целом изложение характеризуется полнотой и ясностью; в частности, это относится к применениям аппарата голоморфных функций. Из многочисленных упражнений читатель сможет получить некоторое (правда, не совсем полное) представление о современном состоянии указанных областей.

В соответствии со своими правилами (Nomina sunt odiosa), Н. Бурбаки не указывает авторов теорем и избегает ссылок на сочинения других авторов. Надо полагать, что имена, как обычно, будут названы в конце.

Е. Горин

ГЛАВА I[1])

НОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ

§ 1. Общие сведения об алгебрах

1. Алгебры с единицей

Пусть K — коммутативное тело, т. е. поле. Пусть A — алгебра над K, содержащая единичный элемент e. Пара (A, e) называется *алгеброй с единицей* над K, а алгебра A — ее *основанием*. Так как e однозначно определяется по алгебре A, то, допуская некоторую вольность речи, можно называть A алгеброй с единицей. Пусть (A, e) и (A', e') — две алгебры с единицей. *Морфизмом алгебр с единицей* из (A, e) в (A', e') называется морфизм φ из A в A', такой, что $\varphi(e) = e'$. Подалгеброй алгебры с единицей (A, e) называется пара (A', e), где A' — подалгебра A, содержащая e.

Единичный элемент часто обозначается символом 1.

Пусть A — алгебра над K. Напомним (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 1), что на векторном пространстве $\tilde{A} = K \times A$ можно определить структуру алгебры, такую, что

$$(\lambda, a)(\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab).$$

Пусть $e = (1, 0)$. Тогда пара $(\tilde{A}, e)$ называется алгеброй с единицей, *полученной из A присоединением единицы*. Если A' — какая-нибудь другая алгебра над K, $(\tilde{A}', e')$ — алгебра с единицей, полученная из A' присоединением единицы, и φ — морфизм из A в A', то существует и притом единственный морфизм алгебр с единицей из $(\tilde{A}, e)$ в $(\tilde{A}', e')$, являющийся продолжением φ.

2. Спектр элемента в алгебре с единицей

Определение 1. *Пусть A—алгебра с единицей над полем K, и пусть e — ее единица. Для каждого $x \in A$ спектром x относительно A называется множество всех $\lambda \in K$, таких, что элемент $x - \lambda e$ не является обратимым в K.*

---

[1]) Результаты глав I и II опираются на материал книг I—VI и сводку результатов книги, посвященной многообразиям (Variétés). [При ссылках на нее используется сокращение (*Var.*, R.).]

Спектр будет обозначаться $\mathrm{Sp}_A x$ или, если это не приводит к недоразумению, $\mathrm{Sp}\, x$.

Замечания. 1) Если $A=\{0\}$, то $\mathrm{Sp}\, 0=\varnothing$.

2) Для каждого $\lambda \in K$ имеем $\mathrm{Sp}(\lambda e)=\{\lambda\}$ (если $A \neq \{0\}$).

3) Для того чтобы $x \in A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \mathrm{Sp}\, x$.

4) Пусть $x \in A$ и $P \in K[X]$. Если $\lambda \in K$, то существует многочлен $P_1 \in K[X]$, такой, что $P(x)-P(\lambda)e=(x-\lambda e)P_1(x)$; следовательно, если $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$, то $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\, P(x)$; иначе говоря, $P(\mathrm{Sp}\, x) \subset \mathrm{Sp}\, P(x)$. Обратно, пусть $\mu \in \mathrm{Sp}\, P(x)$; предположим, что *$K$ алгебраически замкнуто* и $\deg P \geqslant 1$; пусть $P(X)-\mu= =\alpha(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$ — разложение многочлена $P(X)-\mu$ на множители первой степени. Имеем

$$P(x)-\mu e=\alpha(x-\lambda_1 e)\ldots(x-\lambda_n e).$$

Поэтому $\lambda_i \in \mathrm{Sp}\, x$ для некоторого i и, значит, $\mu=P(\lambda_i) \in \in P(\mathrm{Sp}\, x)$. Таким образом,

$$P(\mathrm{Sp}\, x)=\mathrm{Sp}\, P(x).$$

Это соотношение остается справедливым и в том случае, когда P — константа, если только $\mathrm{Sp}\, x \neq \varnothing$.

5) Если $x \in A$ — нильпотентный элемент, то, согласно замечанию 4, $(\mathrm{Sp}\, x)^n \subset \{0\}$ для некоторого n и, следовательно, $\mathrm{Sp}\, x=\{0\}$ (если $A \neq \{0\}$).

6) Предположим, что поле K алгебраически замкнуто. Пусть $x \in A$ и $R=P/Q \in K(X)$, где P и Q — взаимно простые многочлены. Предположим, далее, что $Q(x)$ обратим, т. е. $0 \notin Q(\mathrm{Sp}\, x)$. Тогда можно образовать $R(x)=P(x)\cdot Q(x)^{-1}= =Q(x)^{-1}\cdot P(x)$. Покажем, что если R — не константа, то справедливо равенство

$$\mathrm{Sp}(R(x))=R(\mathrm{Sp}\, x).$$

Действительно, заменяя в случае необходимости R на $R-\mu$ (где $\mu \in K$), достаточно установить эквивалентность

$$R(x) \text{ обратим } \Leftrightarrow 0 \notin R(\mathrm{Sp}\, x)$$

или

$$P(x) \text{ обратим } \Leftrightarrow 0 \notin P(\mathrm{Sp}\, x).$$

Но последнее следует из замечания 4, если P не константа, и очевидно, если P — константа, равная λ, так как $\lambda \neq 0$ в силу предположения относительно R.

7) Пусть A и B — две алгебры с единицей над K, $\varphi\colon A \to B$ — морфизм алгебр с единицей и $x \in A$. Тогда ясно, что $\mathrm{Sp}_B\, \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}_A x$.

8) Пусть A — алгебра с единицей, $\mathfrak{R}$ — ее радикал (*Алг.*, гл. VIII, § 5), φ — канонический морфизм из A в $B = A/\mathfrak{R}$. Тогда если $x \in A$, то $\operatorname{Sp}_B \varphi(x) = \operatorname{Sp}_A x$. Действительно, достаточно доказать, что если $\varphi(x)$ обратим в B, то x обратим в A. Выберем такой элемент $y \in A$, что $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(e)$. Тогда $xy \in e + \mathfrak{R}$, $yx \in e + \mathfrak{R}$. Значит, xy и yx обратимы и, следовательно, x обратим. В частности, если $x \in \mathfrak{R}$, то $\operatorname{Sp} x = \{0\}$ (при условии, что $A \neq \{0\}$).

9) Пусть (B_i) — семейство алгебр с единицей, причем $B_i = (A_i, e_i)$. Положим $A = \prod_i A_i$, $e = (e_i)$. Тогда (A, e) — алгебра с единицей, называемая произведением алгебр B_i. Если $x = (x_i) \in A$, то $\operatorname{Sp}_A x = \bigcup_i \operatorname{Sp}_{A_i} x_i$.

Примеры. 1) Пусть A — алгебра непрерывных комплексных функций на топологическом пространстве. Тогда спектр элемента $f \in A$ совпадает с *множеством значений* функции f.

2) Пусть A — алгебра с единицей конечного ранга над полем $\mathbf{C}$. Для того чтобы элемент $x \in A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы линейное преобразование $y \mapsto xy$ в A имело отличный от нуля детерминант. Поэтому спектр элемента x совпадает с множеством корней характеристического многочлена элемента x. Если A — алгебра эндоморфизмов векторного пространства V конечной размерности над полем $\mathbf{C}$, то спектр x совпадает, следовательно, с множеством *собственных значений* преобразования x. Этот результат, вообще говоря, не верен, когда $\dim V$ бесконечна (упр. 2).

Определение 2. *Пусть A — алгебра с единицей над K, и пусть $x \in A$. Для каждого $\lambda \in K - \operatorname{Sp} x$ положим*

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}.$$

Функция $\lambda \mapsto R(x, \lambda) \in A$ называется резольвентой x.

При фиксированном x значения $R(x, \lambda)$ коммутируют. Действительно, если $\lambda, \mu \in K$, то имеет место равенство

$$(\lambda e - x) - (\mu e - x) = (\lambda - \mu) e.$$

Поэтому если $\lambda, \mu \notin \operatorname{Sp} x$, то

$$(1) \qquad (\lambda - \mu) R(x, \lambda) R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda).$$

Если $x, y \in A$ и $\lambda \in K$, то

$$(\lambda e - x) - (\lambda e - y) = y - x.$$

Поэтому если $\lambda \notin \operatorname{Sp} x \cup \operatorname{Sp} y$, то

$$(2) \qquad R(y, \lambda)(y - x) R(x, \lambda) = R(y, \lambda) - R(x, \lambda).$$

3. Спектр элемента в алгебре

Пусть A — алгебра над полем K и $x \in A$. Назовем спектром элемента x относительно A спектр x относительно алгебры с единицей $\tilde{A}$, полученной из A присоединением единицы.

Спектр в этом смысле обозначается $\mathrm{Sp}'_A x$ или, если это не приводит к недоразумению, $\mathrm{Sp}' x$. Заметим, что $0 \in \mathrm{Sp}'_A x$ для любого $x \in A$.

Если φ — морфизм из A в алгебру B, то $\mathrm{Sp}'_B \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}'_A x$.

Замечания. 1) Пусть A — алгебра с единицей. Рассмотрим ее основание, обозначая его по-прежнему через A. Если $x \in A$, то

$$\mathrm{Sp}'_A x = \mathrm{Sp}_A x \cup \{0\}.$$

Действительно, пусть ε — единица алгебры A и e — единица алгебры $\tilde{A}$. Нетрудно проверить, что $(e-\varepsilon) \cdot A = A \cdot (e-\varepsilon) = 0$, т. е. что алгебра $\tilde{A}$ представляется в виде произведения A и $K(e-\varepsilon)$. Наше утверждение теперь следует из замечания 9, n° 2.

2) Из предыдущего замечания вытекает, что если B — алгебра над K и $x \in B$, то

$$\mathrm{Sp}'_B x = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}} x = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}} x \cup \{0\} = \mathrm{Sp}'_{\tilde{B}} x.$$

3) Если x принадлежит радикалу алгебры A, то $\mathrm{Sp}'_A x = \{0\}$. Это следует из замечания 8, n° 2.

Предложение 1. *Пусть A — некоторая алгебра и $x, y \in A$. Тогда*

$$\mathrm{Sp}'(xy) = \mathrm{Sp}'(yx).$$

Переходя к алгебре $\tilde{A}$, можно ограничиться тем случаем, когда A содержит единицу e. Тогда достаточно доказать, что если $\lambda \neq 0$ и если элемент $xy - \lambda e$ имеет обратный z, то элемент $yx - \lambda e$ также обратим. Имеем

$$(yx - \lambda e)(yzx - e) = y(xyz)x - yx - \lambda yzx + \lambda e =$$
$$= y(\lambda z + e)x - yx - \lambda yzx + \lambda e = \lambda e,$$

а также $(yzx - e)(yx - \lambda e) = \lambda e$. Так как $\lambda \neq 0$, то из этих равенств следует, что элемент $yx - \lambda e$ обратим.

Можно указать такую алгебру с единицей A и такие элементы $x, y \in A$, что $\mathrm{Sp}(xy) \neq \mathrm{Sp}(yx)$ (упр. 3).

4. Наполненные подалгебры

Определение 3. *Пусть A — алгебра с единицей. Подалгебра с единицей $B \subset A$ называется наполненной*[1]*), если каждый элемент из B, обратимый в A, обратим в B.*

Если B — наполненная подалгебра в A, то для каждого элемента $x \in B$ справедливо равенство $\mathrm{Sp}_B\, x = \mathrm{Sp}_A\, x$. Пересечение любого семейства наполненных подалгебр в A является снова наполненной подалгеброй в A. Следовательно, если $M \subset A$, то пересечение B всех наполненных подалгебр алгебры A, содержащих M, является наименьшей наполненной подалгеброй, содержащей M. Такая подалгебра B называется наполненной подалгеброй в A, *порожденной* множеством M. Коммутант M' множества M в A является наполненной подалгеброй в A (так как если элемент x обратим в A и коммутирует с M, то x^{-1} также коммутирует с M). Поэтому бикоммутант M'' множества M содержит B. Если элементы из M коммутируют, то алгебра M'' коммутативна и, значит, B также коммутативна.

Всякая максимальная коммутативная подалгебра в A является наполненной подалгеброй, так как она совпадает со своим коммутантом.

Пусть $x \in A$ и B — наполненная подалгебра в A, порожденная элементом x. Тогда B совпадает с множеством B_1 всех элементов вида $P(x)Q(x)^{-1}$, где $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$ и $Q(x)$ обратим в A. В самом деле, B_1 — подалгебра в A, содержащая e; если элемент $P(x)Q(x)^{-1}$ обратим в A, то и элемент $P(x)$ обратим в A и, значит, элемент $P(x)^{-1}Q(x)$, обратный к $P(x)Q(x)^{-1}$, принадлежит B_1. Таким образом, B_1 — наполненная подалгебра и $B \subset B_1$. С другой стороны, если $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$ и $Q(x)$ обратим в A, то $P(x) \in B$, $Q(x) \in B$ и, значит, $Q(x)^{-1} \in B$ и $P(x)Q(x)^{-1} \in B$. Следовательно, $B_1 \subset B$.

5. Характеры коммутативной алгебры с единицей

Определение 4. *Пусть A — коммутативная алгебра с единицей. Характером алгебры A называется морфизм алгебр с единицей из A в K.*

Множество всех характеров алгебры A обозначается через $\mathrm{X}(A)$.

Пусть A и B — две коммутативные алгебры с единицей, h — морфизм алгебр с единицей из A в B. Отображение

[1]) В теории групп в аналогичной ситуации употребляется термин *сервантная*. — *Прим. ред.*

$\chi \mapsto \chi \circ h$ из $\mathrm{X}(B)$ в $\mathrm{X}(A)$ обозначается через $\mathrm{X}(h)$. Если k — морфизм из B в коммутативную алгебру с единицей, то $\mathrm{X}(k \circ h) = \mathrm{X}(h) \circ \mathrm{X}(k)$. Если 1_A — тождественное отображение алгебры A, то $\mathrm{X}(1_A)$ — тождественное отображение множества $\mathrm{X}(A)$.

Если h — сюръективный морфизм, то $\mathrm{X}(h)$ является биекцией из $\mathrm{X}(B)$ на множество тех характеров алгебры A, которые аннулируются на ядре морфизма h.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — коммутативные алгебры с единицей и A — алгебра с единицей $A_1 \times \ldots \times A_n$. Пусть, далее, π_i — каноническое отображение из A на A_i. Тогда $\mathrm{X}(\pi_i)$ есть биекция $\mathrm{X}(A_i)$ на некоторую часть X_i в $\mathrm{X}(A)$, а именно на множество тех характеров алгебры A, которые обращаются в нуль на $\prod\limits_{j \neq i} A_j$. Ясно, что X_i попарно не пересекаются. С другой стороны, пусть $\chi \in \mathrm{X}(A)$, и пусть i — такой индекс, что $\chi(x) \neq 0$ для некоторого $x \in A_i$; для всех $j \neq i$ и всех $y \in A_j$ имеем

$$\chi(x)\chi(y) = \chi(xy) = \chi(0) = 0.$$

Следовательно, $\chi(A_j) = 0$, и поэтому характер χ аннулируется на $\prod\limits_{j \neq i} A_j$, так что $\mathrm{X}(A)$ является объединением X_i.

Пусть B — алгебра с единицей $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$. Тогда

$$\chi \mapsto (\chi \mid A_1, \ldots, \chi \mid A_n)$$

есть отображение из $\mathrm{X}(B)$ в $\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n)$, а

$$(\chi_1, \ldots, \chi_n) \mapsto \chi_1 \otimes \ldots \otimes \chi_n$$

является отображением из $\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n)$ в $\mathrm{X}(B)$. Легко проверить, что композиции этих отображений являются тождественными отображениями множества $\mathrm{X}(B)$ и множества

$$\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n).$$

Поэтому можно отождествить $\mathrm{X}(B)$ и $\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n)$.

Пусть A — коммутативная алгебра с единицей. Пусть Y — множество всех ее идеалов коразмерности 1. Для каждого $\chi \in \mathrm{X}(A)$ имеем $\operatorname{Ker} \chi \subset Y$. Отображение $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ является биекцией $\mathrm{X}(A)$ на Y. Действительно, если $\mathfrak{J} \in Y$, то существует единственный изоморфизм K-алгебры с единицей $A/\mathfrak{J}$ на K, и композиция морфизмов

$$A \to A/\mathfrak{J} \to K$$

является единственным характером алгебры A с ядром $\mathfrak{J}$.

Если $x \in A$ и $\chi \in \mathrm{X}(A)$, то $\chi(x) \in \operatorname{Sp} x$; действительно, так как $\chi(x - \chi(x)e) = 0$, то элемент $x - \chi(x)e$ не обратим.

Для каждого элемента $x \in A$ обозначим через $\mathcal{G}_A x$, или просто $\mathcal{G}x$, функцию $\chi \mapsto \chi(x)$, определенную на $\mathrm{X}(A)$, и назовем ее *преобразованием Гельфанда элемента* x. Отображение $\mathcal{G}$ есть морфизм алгебры с единицей A в алгебру с единицей A_1 функций на $\mathrm{X}(A)$ со значениями в K; это отображение называется *преобразованием Гельфанда*. Пусть B — коммутативная алгебра с единицей над полем K, B_1 — алгебра с единицей всех функций на $\mathrm{X}(B)$ со значениями в K, h — морфизм алгебр с единицей из A в B; тогда отображение $\mathrm{X}(h)\colon \mathrm{X}(B) \to \mathrm{X}(A)$ определяет морфизм алгебр с единицей $h_1\colon A_1 \to B_1$, и диаграмма

(3)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathcal{G}_A"] \arrow[d, "h"'] & A_1 \arrow[d, "h_1"] \\ B \arrow[r, "\mathcal{G}_B"'] & B_1 \end{tikzcd}$$

является коммутативной. Действительно, для каждого $x \in A$ и каждого $\chi \in \mathrm{X}(B)$ имеем

(4)
$$\mathcal{G}_B(h(x))(\chi) = \chi(h(x)) = (\mathrm{X}(h)(\chi))(x) = \\ = \mathcal{G}_A(x)(\mathrm{X}(h)(\chi)) = h_1(\mathcal{G}_A(x))(\chi).$$

Предположим теперь, что K — топологическое тело. Наделим $\mathrm{X}(A)$ топологией поточечной (простой) сходимости на A и топологическое пространство $\mathrm{X}(A)$ назовем *пространством характеров алгебры* A. Эта топология в $\mathrm{X}(A)$ является слабейшей топологией, в которой функции $\mathcal{G}_A x$ для всех $x \in A$ непрерывны. Если h — морфизм алгебр с единицей из A в B, то отображение $\mathrm{X}(h)\colon \mathrm{X}(B) \to \mathrm{X}(A)$ непрерывно. Если h — сюръективный морфизм, то образ $\mathrm{X}(h)$ — множество всех характеров алгебры A, равных нулю на ядре морфизма h, — замкнут в $\mathrm{X}(A)$; с другой стороны, топология на $\mathrm{X}(h)(\mathrm{X}(B))$, индуцированная топологией на $\mathrm{X}(B)$ с помощью отображения $\mathrm{X}(h)$, есть топология простой сходимости в A, т. е. эта топология индуцируется топологией в $\mathrm{X}(A)$; другими словами, $\mathrm{X}(h)$ является *гомеоморфизмом* пространства $\mathrm{X}(B)$ на некоторую замкнутую часть в $\mathrm{X}(A)$.

Объединяя сказанное выше, мы видим, что пространство $\mathrm{X}(A_1 \times \ldots \times A_n)$ отождествляется с топологической суммой пространств $\mathrm{X}(A_1), \ldots, \mathrm{X}(A_n)$. Точно так же, $\mathrm{X}(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$ отождествляется с топологическим произведением пространств $\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n)$.

6. Случай алгебр без единицы

Определение 5. *Пусть A — коммутативная алгебра. Характером алгебры A называется морфизм из A в K.*

Множество всех характеров алгебры A обозначим $\mathrm{X}'(A)$. Положим $\mathrm{X}(A) = \mathrm{X}'(A) - \{0\}$. Если A обладает единицей e, то $\mathrm{X}(A)$ является множеством всех характеров алгебры с единицей (A, e). Действительно, для того чтобы характер $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ был ненулевым, необходимо и достаточно, чтобы $\chi(e) = 1$.

Если h: $A \to B$ — морфизм коммутативных алгебр, то, как и выше, определяется отображение $\mathrm{X}'(h)$: $\mathrm{X}'(B) \to \mathrm{X}'(A)$, которое переводит 0 в 0. Имеем $\mathrm{X}'(k \circ h) = \mathrm{X}'(h) \circ \mathrm{X}'(k)$. Если h сюръективен, то $\mathrm{X}'(h)$ биективно отображает $\mathrm{X}'(B)$ на множество всех характеров алгебры A, обращающихся в нуль на ядре h. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — коммутативные алгебры, $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и π_i: $A \to A_i$ — канонический морфизм, тогда $\mathrm{X}'(\pi_i)$ — биекция множества $\mathrm{X}'(A_i)$ на часть X'_i множества $\mathrm{X}'(A)$, а именно на множество всех характеров алгебры A, обращающихся в нуль на $\prod\limits_{j \neq i} A_j$; как и в n° 5, мы видим, что $\mathrm{X}'(A)$ является объединением множеств X'_i. С другой стороны, $\mathrm{X}'_i \cap \mathrm{X}'_j = \{0\}$ для $i \neq j$; в частности, $\mathrm{X}'_i - \{0\}$ образуют разбиение пространства $\mathrm{X}'(A) - \{0\} = \mathrm{X}(A)$.

Для всякого $x \in A$ через $\mathcal{G}'_A x$ или просто $\mathcal{G}' x$ обозначается функция $\chi \longmapsto \chi(x)$, определенная на $\mathrm{X}'(A)$. Отображение $\mathcal{G}'$ является морфизмом из A в алгебру A_1 функций $\mathrm{X}'(A) \to K$, обращающихся в нуль в точке 0. Пусть B — коммутативная алгебра, B_1 — алгебра всех функций $\mathrm{X}'(B) \to K$, равных нулю в точке 0, h — морфизм из A в B; тогда $\mathrm{X}'(h)$ определяет морфизм h_1: $A_1 \to B_1$, такой, что $h_1 \circ \mathcal{G}'_A = \mathcal{G}'_B \circ h$. Обозначим через $\mathcal{G}_A x$ (или просто $\mathcal{G} x$) ограничение $\mathcal{G}'_A x$ на $\mathrm{X}(A)$ и назовем его *преобразованием Гельфанда элемента x*.

Пусть $\tilde{A}$ — алгебра с единицей, полученная из A присоединением единицы. Ограничение на A любого характера алгебры $\tilde{A}$ определяет характер алгебры A; обратно, каждый характер на A допускает единственное продолжение до характера $\tilde{A}$. Поэтому определена каноническая биекция из $\mathrm{X}'(A)$ в $\mathrm{X}(\tilde{A})$, позволяющая отождествить эти два множества. Таким образом, характер 0 алгебры A отождествляется с единственным характером алгебры $\tilde{A}$ — тем, ядро которого совпадает с A.

Отображение $\chi \longmapsto \operatorname{Ker} \chi$ является биекцией из $\mathrm{X}(A)$ на множество регулярных идеалов коразмерности 1 в A (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 1); действительно; с одной стороны, $\mathrm{X}(A)$ можно отождествить с множеством характеров алгебры $\tilde{A}$, не обращающихся в нуль на A; с другой стороны, отображение $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap A$ является биекцией множества максимальных идеалов в $\tilde{A}$, отличных от A, на множество максимальных регулярных идеалов в A (*Алг.*, гл. VIII, прилож., предл. 4); для завершения доказательства достаточно теперь применить сказанное в n° 5.

Если $x \in A$ и $\chi \in \mathrm{X}'(A)$, то $\chi(x) \in \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}\, x$ и, значит, $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_A x$.

Предположим теперь, что K — топологическое тело. Наделим $\mathrm{X}'(A)$ топологией простой сходимости на A; полученное таким образом топологическое пространство мы по-прежнему будем обозначать $\mathrm{X}'(A)$. Если h — морфизм из A в B, то отображение $\mathrm{X}'(h)$: $\mathrm{X}'(B) \to \mathrm{X}'(A)$ непрерывно. Если h сюръективен, то $\mathrm{X}'(h)$ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{X}'(B)$ на его образ, и этот образ замкнут в $\mathrm{X}'(A)$. Рассмотрим $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и используем те же обозначения, что и выше; $\mathrm{X}'(\pi_i)$ есть гомеоморфизм пространства $\mathrm{X}'(A_i)$ на X'_i, причем X'_i замкнуто в $\mathrm{X}'(A)$; поэтому $\mathrm{X}'_i - \{0\}$ открыто в $\mathrm{X}'(A)$. Морфизмы $\mathrm{X}'(\pi_i)$ определяют непрерывное отображение суммы S пространств $\mathrm{X}'(A_i)$ на $\mathrm{X}'(A)$; легко проверить, что образом объединения окрестностей точек $0 \in \mathrm{X}'(A_1), \ldots, 0 \in \mathrm{X}'(A_n)$ является окрестность точки $0 \in \mathrm{X}'(A)$. Все это показывает, что $\mathrm{X}'(A)$ канонически отождествляется с факторпространством суммы S. В частности, пространство $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с суммой пространств $\mathrm{X}(A_i)$.

Если $x \in A$, то функция $\mathcal{G}'_A x$ непрерывна на $\mathrm{X}'(A)$.

Каноническая биекция из $\mathrm{X}'(A)$ на $\mathrm{X}(\tilde{A})$ является гомеоморфизмом. Пусть B — алгебра с единицей над K и B' — ее основание. Тогда пространство $\mathrm{X}(B)$ отождествляется с подпространством $\mathrm{X}(B')$ в $\mathrm{X}'(B')$.

7. *Примитивные идеалы*

Пусть A — алгебра над K, E — векторное пространство над K. Назовем *представлением* алгебры A в E морфизм из A в $\mathcal{L}(E)$. Два представления π_1 и π_2 алгебры A в пространствах E_1 и E_2 называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм E_1 в E_2, преобразующий π_1 в π_2. Представление π алгебры A в E называется *неприводимым*, если $E \neq \{0\}$ и если единственными подпространствами в E, инвариантными относительно $\pi(A)$, являются $\{0\}$ и E. Предположим, что π — неприводимое ненулевое представление. Если

ξ — ненулевой элемент в E, то $\pi(A)\xi$ — инвариантное относительно $\pi(A)$ ненулевое подпространство (в противном случае $K\xi = E$ и $\pi(A) = \{0\}$); поэтому $\pi(A)\xi = E$. Следовательно, аннулятор $\mathfrak{N}$ элемента ξ в A является левым регулярным идеалом (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 2) и π эквивалентно представлению, определенному A-псевдомодулем $A/\mathfrak{N}$; так как π неприводимо, то $\mathfrak{N}$ является левым максимальным регулярным идеалом. Обратно, если $\mathfrak{N}'$ есть левый максимальный регулярный идеал в A, то представление алгебры A, определяемое A-псевдомодулем $A/\mathfrak{N}'$, является неприводимым и ненулевым.

Определение 6. *Пусть A — алгебра над K. Примитивным идеалом в A называется ядро неприводимого ненулевого представления алгебры A.*

Если A — коммутативная алгебра, то примитивные идеалы в A являются регулярными максимальными идеалами в A. Действительно, неприводимые ненулевые представления в A совпадают с точностью до эквивалентности с представлениями вида $\pi_{\mathfrak{N}}$, определенными A-псевдомодулем $A/\mathfrak{N}$ (где $\mathfrak{N}$ — максимальный регулярный идеал в A); в силу коммутативности A, ядро отображения $\pi_{\mathfrak{N}}$ совпадает с $\mathfrak{N}$.

Лемма 1. *Пусть π — неприводимое представление алгебры A в векторном пространстве E над K.*

(i) *Пусть $\mathfrak{J}$ — двусторонний идеал в A. Если $\pi(\mathfrak{J}) \neq 0$, то $\pi|\mathfrak{J}$ неприводимо.*

(ii) *Пусть $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — два двусторонних идеала в A, таких, что $\pi(\mathfrak{J}_1) \neq 0$, $\pi(\mathfrak{J}_2) \neq 0$. Тогда $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$.*

Множество тех элементов E, которые аннулируются отображениями $\pi(\mathfrak{J})$, инвариантно относительно представления $\pi(A)$ и не совпадает с E, а следовательно, это множество $\{0\}$. Поэтому если ξ — ненулевой элемент из E, то $\pi(\mathfrak{J})\xi \neq 0$; так как $\pi(\mathfrak{J})\xi$ инвариантно относительно $\pi(A)$, то $\pi(\mathfrak{J})\xi = E$ и, таким образом, утверждение (i) доказано. С другой стороны, предыдущее рассуждение показывает, что $\pi(\mathfrak{J}_2)E = E$, $\pi(\mathfrak{J}_1)\pi(\mathfrak{J}_2)E = E$; следовательно, $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — два двусторонних идеала в A, а $\mathfrak{J}$ — примитивный идеал в A. Тогда если $\mathfrak{J}$ содержит $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ (в частности, если $\mathfrak{J}$ содержит $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$), то $\mathfrak{J}$ содержит либо $\mathfrak{J}_1$, либо $\mathfrak{J}_2$.*

Пусть π — неприводимое представление с ядром $\mathfrak{J}$. Если $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_2$, то, как показывает лемма 1 (ii), $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$, откуда следует, что $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$.

Лемма 3. *Предположим, что алгебра A содержит единичный элемент. Пусть $\mathfrak{I}$ — двусторонний максимальный идеал в A. Тогда $\mathfrak{I}$ является примитивным идеалом.*

Существует левый максимальный идеал $\mathfrak{M}$ в A, содержащий $\mathfrak{I}$. Пусть π — каноническое (ненулевое, неприводимое) представление A в $A/\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{I}A \subset \mathfrak{M}$, то ядро $\mathfrak{I}'$ представления π содержит $\mathfrak{I}$; следовательно, $\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I}$ является примитивным идеалом.

Пусть $J(A)$ — множество всех примитивных идеалов в A. Для каждой части M алгебры A обозначим через $V(M)$ множество всех примитивных идеалов в A, содержащих M. Ясно, что если $\mathfrak{I}$ — двусторонний идеал в A, порожденный M, то $V(M) = V(\mathfrak{I})$; если M сводится к единственному элементу x, то вместо $V(\{x\})$ мы будем писать $V(x)$. Отображение $M \mapsto V(M)$ является монотонным (убывающим) по отношению включения. Имеем

$$V(0) = J(A), \qquad V(1) = \varnothing, \tag{5}$$

$$V\Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big) = V\Big(\sum_{i \in I} M_i\Big) = \bigcap_{i \in I} V(M_i) \tag{6}$$

для любого семейства $(M_i)_{i \in I}$ частей алгебры A. С другой стороны, согласно лемме 2,

$$V(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) = V(\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2) = V(\mathfrak{I}_1) \cup V(\mathfrak{I}_2) \tag{7}$$

для любой пары двусторонних идеалов $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ в A. Формулы (5) — (7) показывают, что части $V(M)$ в $J(A)$ являются замкнутыми в некоторой топологии на $J(A)$. Эта топология называется *топологией Джекобсона на* $J(A)$.

Пусть T — некоторая часть в $J(A)$ и $\mathfrak{k}(T)$ — пересечение всех элементов (идеалов), входящих в T. Ясно, что $\mathfrak{k}(T)$ — двусторонний идеал в A. Тогда замыкание T в $J(A)$ есть наименьшая замкнутая часть в $J(A)$, содержащая T, т. е. $V(\mathfrak{k}(T))$.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ — два различных элемента в $J(A)$. Эти элементы отделены в топологии $J(A)$.*

Действительно, пусть, например, $\mathfrak{I}_1 \not\subset \mathfrak{I}_2$. Множество всех $\mathfrak{I} \in J(A)$, содержащих $\mathfrak{I}_1$, является замкнутой частью T в $J(A)$, такой, что $\mathfrak{I}_1 \in T$, $\mathfrak{I}_2 \notin T$.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{I} \in J(A)$. Для того чтобы $\{\mathfrak{I}\}$ было замкнутым в пространстве $J(A)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{I}$ был максимальным примитивным идеалом.*

Действительно, замыкание одноэлементного множества $\{\mathfrak{I}\}$ состоит из примитивных идеалов в A, содержащих $\mathfrak{I}$.

Пусть $\widehat{A}$ — множество всех классов неприводимых ненулевых представлений алгебры A. Если каждому представлению $\pi \in \widehat{A}$ поставить в соответствие его ядро, то получится сюръективное отображение $\widehat{A} \to J(A)$. Топология в $J(A)$ определяет топологию в $\widehat{A}$, замкнутыми множествами в которой служат прообразы замкнутых множеств в $J(A)$ при отображении $\widehat{A} \to J(A)$.

Предложение 4. *Если алгебра A содержит единицу, то пространства $J(A)$ и $\widehat{A}$ квазикомпактны.*

Доказательство достаточно провести для $J(A)$. Пусть (T_j) — семейство замкнутых частей в $J(A)$ с пустым пересечением. Если бы $\sum_j \mathfrak{k}(T_j) \neq A$, то оказалось бы, что $\sum_j \mathfrak{k}(T_j)$ содержится в некотором двустороннем максимальном идеале $\mathfrak{J}$. Но $\mathfrak{J}$ — примитивный идеал (лемма 3). Поэтому $\mathfrak{J} \in T_j$ для каждого j, так как T_j замкнуто, и мы пришли к противоречию. Следовательно, $\sum_j \mathfrak{k}(T_j) = A$. Поэтому $1 = x_1 + \ldots + x_n$, где $x_1 \in \mathfrak{k}(T_{j_1}), \ldots, x_n \in \mathfrak{k}(T_{j_n})$. Следовательно, $\mathfrak{k}(T_{j_1}) + \ldots + \mathfrak{k}(T_{j_n}) = A$ и $T_{j_1} \cap \ldots \cap T_{j_n} = \varnothing$.

Предположим, что *A — коммутативная алгебра с единицей.* Топология Джекобсона на $J(A)$ является топологией, индуцированной на $J(A)$ топологией Зарисского простого спектра A (*Комм. алг.*, гл. II, § 4, n° 3, опр. 4).

Предположим, что алгебра A коммутативна, а K наделено топологией. Канонический изоморфизм K на $\mathscr{L}(K)$ позволяет отождествить элементы пространства $X(A)$ с представлениями алгебры A в векторном пространстве K. Тем самым определяется отображение $X(A)$ в $\widehat{A}$, являющееся, очевидно, инъективным. Можно, следовательно, отождествить $X(A)$ с некоторой частью пространства $\widehat{A}$.

Предложение 5. *Топология, индуцированная на $X(A)$ топологией в $\widehat{A}$, слабее исходной топологии в $X(A)$.*

Действительно, пусть T — замкнутая часть в $\widehat{A}$. Тогда T есть множество представлений $\pi \in \widehat{A}$ с ядром, содержащим некоторую часть M алгебры A. Поэтому $T \cap X(A)$ является множеством тех $\chi \in X(A)$, которые аннулируются на M, т. е. замкнутой частью $X(A)$. Предложение доказано.

В общем случае $X(A)$ не является подпространством в $\widehat{A}$ (см. § 7, упр. 6с).

§ 2. Нормированные алгебры

1. Общие сведения

Определение 1. *Нормированной комплексной алгеброй называется алгебра A над полем* $\mathbf{C}$, *снабженная нормой* $x \mapsto \| x \|$, *такой, что*

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \| \tag{1}$$

для любых $x, y \in A$. *Если пространство* A *полно по этой норме, то говорят, что* A — *банахова алгебра.*

Это определение несколько отличается от данного ранее (*Общ. топ.*, гл. IX, 2-е изд., § 3, n° 7), где требуется в отличие от (1), чтобы норма удовлетворяла условию $\| xy \| \leqslant a \| x \| \cdot \| y \|$ (a — неотрицательная постоянная). Однако мы видели (см. там же), что тогда существует эквивалентная норма, удовлетворяющая условию (1). На протяжении всей этой главы мы придерживаемся определения 1. Слово «комплексная», как правило, опускается, и всюду, где не оговорено противное, подразумевается, что основным полем служит поле $\mathbf{C}$.

Пусть A — нормированная алгебра. Каждая подалгебра в A, снабженная индуцированной нормой, является нормированной алгеброй. Если $\mathfrak{m}$ — двусторонний замкнутый идеал в A, то алгебра $A/\mathfrak{m}$, снабженная нормой

$$\| \dot{x} \| = \inf_{x \in \dot{x}} \| x \| \quad (\dot{x} \in A/\mathfrak{m}),$$

является нормированной алгеброй. Алгебра, противоположная к A, с той же нормой, а также пополнение алгебры A суть нормированные алгебры. Если $A_1, \ldots, A_n$ — нормированные алгебры, то алгебра $A_1 \times \ldots \times A_n$, снабженная нормой

$$\left\| (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \right\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| x_i \|,$$

является нормированной алгеброй.

Пусть (y_λ) — семейство элементов из A; наименьшая замкнутая подалгебра B в A, содержащая все элементы y_λ, называется замкнутой подалгеброй в A, порожденной элементами y_λ; если $B = A$, то говорят, что y_λ *топологически порождают* нормированную алгебру A, или что (y_λ) — *система топологических образующих* нормированной алгебры A.

Пусть A — нормированная алгебра. Определим норму на $\tilde{A}$, полагая $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$. Имеем

$$\|(\lambda, x)(\mu, y)\| = |\lambda\mu| + \|xy + \mu x + \lambda y\| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda||\mu| + \|x\|\|y\| + |\mu|\|x\| + |\lambda|\|y\| =$$
$$= \|(\lambda, x)\|\|(\mu, y)\|.$$

Поэтому $\tilde{A}$ превращается в нормированную алгебру, называемую *нормированной алгеброй с единицей, полученной из A присоединением единицы.*

Пусть A — нормированная алгебра. Для $x \in A$ пусть L_x и R_x — отображения $y \mapsto xy$ и $y \mapsto yx$ из A в A. Тогда $x \mapsto L_x$ (соответственно $x \mapsto R_x$) — морфизм алгебры A (соответственно, противоположной к A алгебры) в $\mathscr{L}(A)$, такой, что

$$\|L_x\| \leqslant \|x\|, \quad \|R_x\| \leqslant \|x\|. \tag{2}$$

Если A содержит единицу e, то $x = L_x e = R_x e$; следовательно,

$$\|x\| \leqslant \|L_x\| \cdot \|e\|, \quad \|x\| \leqslant \|R_x\| \cdot \|e\|. \tag{3}$$

Тогда $x \mapsto \|L_x\|$ и $x \mapsto \|R_x\|$ — нормы, эквивалентные исходной $x \mapsto \|x\|$, удовлетворяющие, кроме того, условию (1). Если к тому же $A \neq \{0\}$, иначе говоря, $e \neq 0$, то из (2) и (3) следует, что $\|e\| \geqslant 1$; очевидно, что $\|L_e\| = \|R_e\| = 1$.

2. Примеры

1) Пусть Ω — локально компактное пространство, A — алгебра комплексных функций, непрерывных на Ω и стремящихся к 0 на бесконечности, снабженная нормой

$$\|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Тогда A является коммутативной банаховой алгеброй.

2) Пусть A — алгебра функций f: $[0, 1] \to \mathbf{C}$, непрерывных вместе со своими производными до порядка n включительно, снабженная нормой

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(k)}(t)|.$$

Если $f,\ g \in A$, то

$$\|fg\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup |(fg)^{(k)}(t)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup \left| \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} f^{(s)}(t)\, g^{(k-s)}(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!\,(k-s)!} (\sup |f^{(s)}(t)|)(\sup |g^{(k-s)}(t)|) = \|f\| \cdot \|g\|.$$

Следовательно, A — коммутативная банахова алгебра с единицей.

3) Пусть G — локально компактная группа, снабженная мерой Хаара. Тогда $L^1(G)$ является банаховой алгеброй, в которой произведение определено как свертка (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, n°5, предл. 12). Если G — коммутативная группа, то эта банахова алгебра также коммутативна.

4) Возьмем в примере 3) $G = \mathbf{Z}$. Тогда $L^1(G)$ — банахова алгебра последовательностей $(c_n)_{-\infty < n < \infty}$, таких, что $\sum_n |c_n| < \infty$, относительно умножения $(c_n) * (c'_n) = (d_n)$, где $d_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p c'_{n-p}$, и нормы $\|(c_n)\| = \sum |c_n|$. Эта алгебра содержит в качестве единицы последовательность (e_n), для которой $e_n = 0$ при всех $n \neq 0$ и $e_0 = 1$. Для $x = (c_n)$ пусть $\varphi(x)$ — непрерывная на $\mathbf{U}$ функция, значение которой в точке e^{it} равно $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$. Легко проверить, что φ есть морфизм из $L^1(G)$ в алгебру A функций, непрерывных на $\mathbf{U}$, в которой умножение определено как обычное умножение. Интегрируя почленно равенство

$$\left(\sum_p c_p e^{ipt} \right) \cdot e^{-int} = (\varphi(x))(e^{it}) \cdot e^{-int},$$

получим, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi(x))(e^{it}) \cdot e^{-int}\, dt,$$

и, следовательно, морфизм φ инъективен. Алгебра A, снабженная нормой, которая индуцируется нормой в $L^1(G)$ с помощью φ, называется банаховой алгеброй абсолютно сходящихся рядов Фурье. Она содержит в качестве единицы функцию, тождественно равную 1. (См. гл. II, § 1, n°2 и 9).

5) Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$. Пусть A — алгебра функций, непрерывных на Δ и аналитических во внутренних точках Δ, снабженная нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in \Delta} |f(t)|$. Тогда A — коммутативная банахова алгебра с единицей.

6) Пусть E — банахово пространство. Пространство $\mathscr{L}(E)$ операторов в E с обычной нормой является банаховой алгеброй с единицей.

3. Спектральный радиус

Предложение 1. *Пусть A — нормированная алгебра. Последовательность $\left(\|x^n\|^{1/n}\right)$ сходится при $n \to \infty$ для каждого $x \in A$, и ее предел равен $\inf\limits_n \|x^n\|^{1/n}$.*

Положим $\alpha_n = \|x^n\|$. Если x — нильпотентный элемент, то предложение очевидно; поэтому мы можем считать, что $\alpha_n > 0$ для всех n. Имеет место неравенство $\alpha_{n+n'} \leqslant \alpha_n \alpha_{n'}$. Зафиксируем некоторое целое число $m > 0$. Для всякого целого $n \geqslant 0$ пусть $p(n)$, $q(n)$ — целые числа, такие, что $n = p(n)\, m + q(n)$, $0 \leqslant q(n) < m$. Имеет место неравенство

$$\alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_m^{p(n)/n} \alpha_{q(n)}^{1/n}.$$

Полагая в этом неравенстве $n \to \infty$, мы получим неравенство $\limsup\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_m^{1/m}$, из которого следует неравенство

$$\limsup_{n \to +\infty} \alpha_n^{1/n} \leqslant \inf_{m > 0} \alpha_m^{1/m} \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \alpha_n^{1/n},$$

доказывающее наше предложение.

Определение 2. *Для каждого элемента x нормированной алгебры число $\lim\limits_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf\limits_{n > 0} \|x^n\|^{1/n}$ называется спектральным радиусом элемента x и обозначается через $\rho(x)$.*

Ясно, что

$$\rho(x) \leqslant \|x\|, \tag{4}$$

$$\rho(x^k) = \rho(x)^k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Если $\rho(x) = \|x\|$ для всякого $x \in A$, то в силу (5) имеем $\|x^2\| = \|x\|^2$. Обратно, предположим, что $\|x^2\| = \|x\|^2$ для любого $x \in A$. Тогда $\left\|x^{2^n}\right\| = \|x\|^{2^n}$ для всех целых $n \geqslant 0$, следовательно, $\|x\| = \left\|x^{2^n}\right\|^{2^{-n}}$; полагая $n \to +\infty$, получаем, что $\|x\| = \rho(x)$.

Определение 3. *Элемент* $x \in A$ *называется квазинильпотентным, если* $\rho(x) = 0$.

Это определение можно видоизменить следующим образом: для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ числа $\|(\lambda x)^n\|$ ограничены; или еще так: для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ имеем $(\lambda x)^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание. Функция $x \mapsto \rho(x)$ на A, будучи нижней гранью непрерывных функций $x \mapsto \|x^n\|^{1/n}$, полунепрерывна сверху; вообще говоря, она может не быть непрерывной; может даже случиться (упр. 5), что последовательность нильпотентных элементов в A сходится к элементу, который не является квазинильпотентным.

4. Обратимые элементы

Предложение 2. *Пусть* A — *банахова алгебра и* x — *некоторый элемент этой алгебры. Тогда ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$, *рассматриваемый как степенной ряд от* λ, *имеет в качестве радиуса сходимости число* $1/\rho(x)$. *Если* A *содержит единицу и если* $\rho(x) < 1$, *то элемент* $1 - x$ *обратим, и обратным к нему элементом является* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Для радиуса сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$ имеет место формула

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} \|x^n\|^{1/n}} = \frac{1}{\rho(x)}.$$

Если $\rho(x) < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится абсолютно. Так как $(1-x)\sum_{n=0}^{p} x^n = \left(\sum_{n=0}^{p} x^n\right)(1-x) = 1 - x^{p+1}$, то элемент $(1-x)^{-1}$ существует и равен $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Следствие 1. *Если алгебра* A *содержит единицу, то группа обратимых элементов в* A *содержит открытый шар с центром в* 1 *радиуса* 1.

Этот факт немедленно следует из того обстоятельства, что неравенство $\|x\| < 1$ влечет за собой $\rho(x) < 1$.

Напомним (*Общ. топ.*, гл. IX, § 3, предл. 13), что группа G обратимых элементов является *открытой* частью алгебры A, что топология на G, индуцированная топологией в A, согласована со структурой группы и что топологическая группа G *полна.*

Следствие 2. *Пусть A — банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — левый (соответственно правый) регулярный максимальный идеал в A. Тогда идеал $\mathfrak{J}$ замкнут.*

Пусть $(\tilde{A}, e)$ — банахова алгебра, полученная из A присоединением единицы. Существует левый (соответственно правый) максимальный идеал $\tilde{\mathfrak{J}}$ в $\tilde{A}$, такой, что $\tilde{\mathfrak{J}} \cap A = \mathfrak{J}$ (*Алг.*, гл. VIII, прилож., предл. 4). Тогда $\tilde{\mathfrak{J}}$ не пересекается с открытым шаром с центром в e радиуса 1 (следствие 1), поэтому $\overline{\tilde{\mathfrak{J}}} \neq \tilde{A}$, и, стало быть, $\overline{\tilde{\mathfrak{J}}} = \tilde{\mathfrak{J}}$, т. е. идеал $\mathfrak{J}$ замкнут.

Следствие 3. *Радикал банаховой алгебры замкнут.*

Действительно, радикал является пересечением всех левых регулярных максимальных идеалов (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 3).

Предложение 3. *Пусть A — банахова алгебра с единицей.*

(i) *Если элемент $x \in A$ обладает левым (соответственно правым) обратным y, то каждый элемент $x' \in A$, такой, что $\| x' - x \| \leqslant \| y \|^{-1}$, обладает левым (соответственно правым) обратным.*

(ii) *Пусть (x_n) — последовательность элементов из A, обладающих левыми (соответственно правыми) обратными y_n, сходящаяся к некоторому $x \in A$. Если последовательность (y_n) ограничена, то x обратим слева (соответственно справа).*

Пусть $x, y, x' \in A$ таковы, что $yx = 1$ и $\| x' - x \| \leqslant \|y\|^{-1}$. Имеет место неравенство $\| 1 - yx' \| = \| yx - yx' \| \leqslant \| y \| \times \times \| x - x' \| < 1$, из которого следует, что yx' — обратимый элемент, и, значит, x' обратим слева. Аналогично доказывается утверждение об обратимости справа.

Пусть $x_n, y_n, x \in A$ таковы, что $y_n x_n = 1$, x_n сходится к x при $n \to \infty$ и $\| y_n \| \leqslant M < +\infty$. Для достаточно больших n имеет место неравенство $\| x_n - x \| < M^{-1} \leqslant \| y_n \|^{-1}$, поэтому (ii) следует из (i).

Определение 4. *Пусть A — нормированная алгебра, x — элемент из A, L_x и R_x — отображения $y \mapsto xy$ и $y \mapsto yx$ в A. Говорят, что x — левый (соответственно правый) топологический делитель нуля, если L_x (соответственно R_x) не является гомеоморфизмом A на $L_x(A)$ (соответственно $R_x(A)$).*

Согласно *Общ. топ.*, гл. IX, 2-е изд., § 3, теор. 1, это определение можно сформулировать следующим образом: существует последовательность (z_n) в A, такая, что $\| z_n \| = 1$ и xz_n сходится к 0 (соответственно $z_n x$ сходится к 0).

Левый (соответственно правый) делитель нуля является левым (соответственно правым) топологическим делителем нуля. Предположим, что A содержит единицу. Левый (соответственно правый) топологический делитель нуля не обратим слева (соответственно справа); в самом деле, если, например, $yx = 1$ и xz_n сходится к 0, то $z_n = y(xz_n)$ сходится к нулю, и условие $\|z_n\| = 1$ не может выполняться для всех n.

Предложение 4. *Пусть A — банахова алгебра с единицей. Если элемент x в A не обратим слева, но является пределом последовательности (x_n) обратимых слева элементов, то x — правый топологический делитель нуля.*

Пусть y_n — левый обратный к x_n. Согласно предложению 3 (ii), $\|y_n\|$ стремится к $+\infty$. Пусть $z_n = \|y_n\|^{-1} y_n$. Тогда $\|z_n\| = 1$ и $z_n x_n = \|y_n\|^{-1}$ стремится к нулю, а значит, $z_n x = z_n x_n + z_n (x - x_n)$ стремится к нулю.

Предложение 5. *Пусть A — нормированная алгебра с единицей, B — наполненная подалгебра в A. Тогда $\overline{B}$ — также наполненная подалгебра в A.*

Действительно, пусть x — элемент из $\overline{B}$, обратимый в A, и (x_n) — последовательность точек в B, стремящаяся к x. Тогда для достаточно больших n элемент x_n обратим в A и x_n^{-1} стремится к x^{-1}. Так как $x_n^{-1} \in B$, то $x^{-1} \in \overline{B}$.

Если (y_λ) — некоторое семейство элементов в A и B — наполненная подалгебра в A, порожденная этим семейством, то $\overline{B}$ есть наименьшая замкнутая наполненная подалгебра в A, содержащая все y_λ. Она называется *замкнутой наполненной подалгеброй, порожденной элементами* y_λ.

5. Спектр элемента в нормированной алгебре

Теорема 1. *Пусть A — банахова алгебра с единицей и $x \in A$.*

(i) $\mathrm{Sp}\, x$ *является компактной частью в* $\mathbf{C}$.

(ii) *Радиус наименьшего замкнутого круга в* $\mathbf{C}$ *с центром в нуле, содержащего* $\mathrm{Sp}\, x$, *равен* $\rho(x)$.

(iii) *Резольвента* $\lambda \mapsto R(\lambda, x)$ *элемента x есть голоморфная функция в области* $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}\, x$, *обращающаяся в нуль на бесконечности. Имеет место равенство*

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda, x) = (-1)^k k!\, R(\lambda, x)^{k+1}.$$

Пусть $\lambda_0 \in \mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$ и $y = x - \lambda_0$. Если $\mu \in \mathbf{C}$, причем $|\mu| < \|y^{-1}\|^{-1}$, то элемент $x - (\lambda_0 + \mu) = y - \mu = y(1 - \mu y^{-1})$ обратим, и для обратного к нему элемента, в силу предложения 2, справедливо равенство

$$(6) \qquad (x - (\lambda_0 + \mu))^{-1} = y^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n y^n.$$

Поэтому резольвента элемента x определена и голоморфна в открытом круге с центром в точке λ_0 радиуса $\|y^{-1}\|^{-1}$. Таким образом, доказано, что множество $\mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$ открыто и что резольвента элемента x голоморфна на этом множестве. Формула (1) § 1, n°2 позволяет написать равенство $\frac{d}{d\lambda} R(x, \lambda) = -R(x, \lambda)^2$, из которого с помощью индукции по k получается, что

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(x, \lambda) = (-1)^k k!\, R(\lambda, x)^{k+1}.$$

Для каждого $a \geqslant 0$ обозначим через Δ_a замкнутый круг в $\mathbf{C}$ с центром в точке 0 радиуса a. Пусть λ — не равное нулю комплексное число, такое, что $|\lambda| \rho(x) < 1$. Тогда, согласно предложению 2, элемент $x - \lambda^{-1} = \lambda^{-1}(\lambda x - 1)$ обратим и

$$(7) \qquad (\lambda^{-1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} x^n.$$

Тем самым доказано, что резольвента элемента x определена и голоморфна вне $\Delta_{\rho(x)}$ и стремится к 0 на бесконечности. Предполагая, что существует число $a \in [0, \rho(x)[$, такое, что $\operatorname{Sp} x$ содержится в Δ_a, мы видим, что функция $\lambda \mapsto (\lambda^{-1} - x)^{-1}$ определена и голоморфна при $0 < |\lambda| < a^{-1}$ и стремится к 0 при λ, стремящемся к нулю, и что, следовательно, радиус сходимости ряда (7) не меньше $a^{-1} > \rho(x)^{-1}$; но это противоречит предложению 2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть A — нормированная алгебра с единицей и $x \in A$. Если $A \neq \{0\}$, то $\operatorname{Sp} x \neq \varnothing$.*

Предположим сначала, что алгебра A полна. Если $\operatorname{Sp} x = \varnothing$, то резольвента элемента x голоморфна в $\mathbf{C}$ и равна нулю на бесконечности; следовательно, она тождественно равна нулю и, значит, $1 = x \cdot R(x, 0) = 0$ и $A = \{0\}$. В общем случае соотношение $\operatorname{Sp}_A x = \varnothing$ влечет за собой $\operatorname{Sp}_{\widehat{A}} x = \varnothing$, откуда $\widehat{A} = \{0\}$ и $A = \{0\}$.

Следствие 2 (теорема Гельфанда — Мазура). *Пусть A — нормированная алгебра над $\mathbf{C}$. Если A — тело, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$.*

Если $x \in A$, то существует $\lambda \in \mathbf{C}$, такое, что элемент $x - \lambda$ не обратим (следствие 1), откуда $x - \lambda = 0$ и $x \in \mathbf{C} \cdot 1$.

Следствие 3. *Пусть A — банахова алгебра с единицей, x — обратимый элемент в A, такой, что $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$. Тогда $\operatorname{Sp} x \subset \mathbf{U}$.*

Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$. В силу теоремы 1 (ii), имеем $\operatorname{Sp} x \subset \Delta$ и $\operatorname{Sp} x^{-1} \subset \Delta$, что и доказывает утверждение (см. § 1, n°2, замечание 6).

Следствие 4. *Пусть X — комплексное банахово пространство, $\mathscr{L}(X)$ — алгебра непрерывных эндоморфизмов X и A — ненулевая подалгебра в $\mathscr{L}(X)$, такая, что X — простой A-псевдомодуль. Тогда*

(i) *Всякий эндоморфизм пространства X (не обязательно непрерывный), перестановочный с A, есть гомотетия.*

(ii) *Если u — некоторый эндоморфизм (не обязательно непрерывный) пространства X и если $\xi_1, \ldots, \xi_n \in X$, то существует элемент $v \in A$, такой, что $v\xi_1 = u\xi_1, \ldots, v\xi_n = u\xi_n$.*

Выберем элемент $\xi_0 \in X$, такой, что $A\xi_0 \neq \{0\}$ (следовательно, $A\xi_0 = X$). Пусть B — множество эндоморфизмов пространства X, перестановочных с A. Для всякого $u \in B$ пусть A_u — множество (непустое) всех элементов $v \in A$, таких, что $v\xi_0 = u\xi_0$; положим $\|u\| = \inf \|v\|$. Ясно, что если $u, u' \in B$ и $\lambda \in \mathbf{C}$, то $\|u + u'\| \leqslant \|u\| + \|u'\|$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$. С другой стороны, пусть $\varepsilon > 0$; существуют $v, v' \in A$, такие, что $v\xi_0 = u\xi_0$, $v'\xi_0 = u'\xi_0$, $\|v\| \leqslant \|u\| + \varepsilon$, $\|v'\| \leqslant \|u'\| + \varepsilon$; тогда $vv'\xi_0 = vu'\xi_0 = u'v\xi_0 = u'u\xi_0$, откуда $\|u'u\| \leqslant \|vv'\| \leqslant (\|u\| + \varepsilon) \cdot (\|u'\| + \varepsilon)$, и окончательно

$$\|u'u\| \leqslant \|u\| \cdot \|u'\|.$$

Таким образом, B — нормированная алгебра и $1 \in B$. Так как X — простой A-псевдомодуль, то B — тело (*Алг.*, гл. VIII, § 4, n° 3, предл. 2, и прилож., n° 2). Поэтому (следствие 2) $B = \mathbf{C} \cdot 1$.

Для доказательства утверждения (ii) достаточно установить следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть A — алгебра над полем K, M — простой A-псевдомодуль, такой, что $A \cdot M \neq \{0\}$. Для всякой конечной последовательности $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов в M и каждого элемента b из бикоммутанта к M существует элемент $a \in A$, такой, что $ax_i = bx_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Анализ доказательства теоремы плотности (*Алг.*, гл. VIII, § 4, n° 2, теор. 1) показывает, что оно переносится без изменения на случай простых псевдомодулей, при условии, что справедлива приведенная там же лемма 1, т. е. частный случай сформулированной здесь леммы при $n=1$. Но множество N элементов $x \in M$, таких, что $A \cdot x = \{0\}$, является подпсевдомодулем в M, и так как оно по предположению не совпадает с M, то оно сводится к нулю; тогда для каждого $x \in M$ имеем $A \cdot x = M$ и, в частности, существует элемент $a \in A$, такой, что $ax = bx$.

Следствие 5. *Пусть A — банахова алгебра и $x \in A$. Тогда*

(i) $\mathrm{Sp}'\,x$ — *компактная часть в* $\mathbf{C}$.

(ii) *Радиус наименьшего замкнутого круга в* $\mathbf{C}$ *с центром в* 0, *содержащего* $\mathrm{Sp}'\,x$, *равен* $\rho(x)$.

(iii) *Для того чтобы элемент x был квазинильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Sp}'\,x = \{0\}$.

Утверждения (i) и (ii) выводятся путем применения теоремы 1 к банаховой алгебре, полученной из A присоединением единицы. Утверждение (iii) следует из (ii).

Замечания. 1) Для произвольного непустого компакта в $\mathbf{C}$ можно указать банахову алгебру с единицей и такой ее элемент, спектр которого в точности совпадает с этим компактом (упр. 6).

2) Пусть A — банахова алгебра с единицей и $x \in A$. В силу теоремы 1, множество $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A\,x$ является открытой частью в $\mathbf{C}$ и, следовательно, локально связно. Поэтому его компоненты связности открыты. В силу теоремы 1, по крайней мере одна из этих компонент связности содержит множество тех $\lambda \in \mathbf{C}$, для которых $|\lambda| > \rho(x)$; все остальные компоненты связности, очевидно, ограничены.

6. Спектр относительно подалгебры

Предложение 6. *Пусть A — банахова алгебра с единицей, B — замкнутая подалгебра в A, содержащая 1. Тогда для каждого $x \in A$ справедливо соотношение $\mathrm{Sp}_B\,x \supset \mathrm{Sp}_A\,x$ и граница $\mathrm{Sp}_A\,x$ содержит границу $\mathrm{Sp}_B\,x$.*

Соотношение $\mathrm{Sp}_B\,x \supset \mathrm{Sp}_A\,x$ уже доказано (§ 1, n° 2, замечание 7). Если λ — точка границы $\mathrm{Sp}_B\,x$, то существует последовательность (λ_n) точек дополнения к $\mathrm{Sp}_B\,x$, стремящаяся к λ. Тогда элементы $x - \lambda_n$ обратимы в B и стремятся к элементу $x - \lambda$, который не является обратимым в B; следовательно, $x - \lambda$ есть левый или правый (предл. 4) топологический делитель нуля в B, а значит, и в A. Поэтому

$\lambda \in \mathrm{Sp}_A x$. Так как $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathrm{Sp}_B x$, то λ не может быть внутренней точкой $\mathrm{Sp}_A x$.

Следствие. *Множество $\mathrm{Sp}_B x$ является объединением $\mathrm{Sp}_A x$ и, быть может, некоторых ограниченных компонент связности $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$.*

Пусть U — компонента связности множества $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$. Каждая точка границы $(\mathrm{Sp}_B x) \cap U$ в U является также точкой границы $\mathrm{Sp}_B x$ в $\mathbf{C}$ и, значит, точкой границы $\mathrm{Sp}_A x$ (предл. 6). Так как $U \cap \mathrm{Sp}_A x = \varnothing$, то $\mathrm{Sp}_B x \cap U$ не имеет граничных точек в U; но тогда, поскольку U связно, $\mathrm{Sp}_B x \cap U = \varnothing$ или U, чем и доказывается следствие.

Это следствие будет дополнено в § 3; см. следствия 1 и 2 предложения 9.

§ 3. Коммутативные банаховы алгебры

1. *Характеры коммутативной банаховой алгебры*

Напомним, что основным полем здесь является $\mathbf{C}$.

Теорема 1. *Если A — коммутативная банахова алгебра, то каждый характер A непрерывен и его норма $\leqslant 1$.*

Пусть $\chi \in \mathrm{X}'(A)$. Для каждого $x \in A$ имеем $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_A x$ (§ 1, n° 6); следовательно, $|\chi(x)| \leqslant \rho(x) \leqslant \|x\|$ (§ 2, следствие 5 теоремы 1), что и доказывает теорему.

Следствие. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Тогда пространство $\mathrm{X}'(A)$ компактно. Пространство $\mathrm{X}(A)$ локально компактно; оно компактно, если A содержит единицу.*

Пусть A' — банахово пространство, двойственное к A. Единичный шар A'_1 в A' слабо компактен (*Топ. вект. пр.*, гл. IV, § 5, предл. 4). В силу теоремы 1, $\mathrm{X}'(A) \subset A'_1$, и ясно, что $\mathrm{X}'(A)$ слабо замкнуто в A'. Следовательно, $\mathrm{X}'(A)$ компактно и $\mathrm{X}(A)$ локально компактно. Если A содержит единицу 1, то $\mathrm{X}(A)$ есть множество всех характеров $\chi \in \mathrm{X}'(A)$, таких, что $\chi(1) = 1$; поэтому оно замкнуто и, значит, компактно в $\mathrm{X}'(A)$.

Мы увидим (n° 2), что любое компактное пространство гомеоморфно $\mathrm{X}(A)$ для некоторой подходящей коммутативной алгебры A с единицей.

Теорема 2. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Отображение $\chi \mapsto \mathrm{Ker}\,\chi$ является биекцией $\mathrm{X}(A)$ на множество регулярных максимальных идеалов в A.*

Пусть $\mathfrak{J}$ — регулярный максимальный идеал алгебры A. Так как он замкнут (§ 2, следствие 2 предложения 2), то $A/\mathfrak{J}$ — банахова алгебра. Но так как $A/\mathfrak{J}$ — тело (*Алг.*, гл. VIII, прилож., предл. 3), то размерность $A/\mathfrak{J}$ над $\mathbf{C}$ равна 1 (§ 2, следствие 2 теоремы 1) и, значит, коразмерность $\mathfrak{J}$ в A равна 1. Утверждение теоремы следует тогда из сказанного в § 1, n° 6.

Может случиться, что коммутативная банахова алгебра A без единицы не содержит ни одного максимального идеала; тогда $X'(A)$ сводится к $\{0\}$ (см. упр. 4).

Ясно, что множества $J(A)$ и $\hat{A}$ (§ 1, n° 7) можно отождествить с множеством $X(A)$. Это позволяет рассматривать на $X(A)$ и слабую топологию, и топологию Джекобсона, которая является менее сильной (§ 1, предл. 5). Когда мы будем рассматривать $X(A)$ без указания, о какой топологии идет речь, то всегда будет подразумеваться, что речь идет о слабой топологии.

2. Примеры

Предложение 1. *Пусть Ω — локально компактное пространство, A — алгебра непрерывных комплексных функций, стремящихся к 0 на бесконечности в Ω, снабженная нормой $\|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$. Для каждой замкнутой части Φ в Ω пусть $\mathfrak{J}_\Phi$ — множество всех $f \in A$, равных нулю на Φ. Тогда отображение $\Phi \mapsto \mathfrak{J}_\Phi$ является биекцией множества замкнутых частей в Ω на множество замкнутых идеалов в A.*

Ясно, что $\mathfrak{J}_\Phi$ — замкнутый идеал в A. Если $\Phi \neq \Phi'$, то существует $t \in \Phi'$, такое, что $t \notin \Phi$, и, значит, существует функция $f \in A$, равная нулю на Φ и не равная нулю в точке t. Тогда $f \in \mathfrak{J}_\Phi$ и $f \notin \mathfrak{J}_{\Phi'}$; следовательно, отображение $\Phi \mapsto \mathfrak{J}_\Phi$ инъективно. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A. Пусть Φ — множество точек $t \in \Omega$, таких, что $f(t) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{J}$. Тогда Φ — замкнутая часть в Ω и $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}_\Phi$. Предположим, что $f \in \mathfrak{J}_\Phi$, $\varepsilon > 0$ и Ψ — компактное множество точек $t \in \Omega$, таких, что $|f(t)| \geqslant \varepsilon$. Для каждого $t \in \Psi$ существует функция $f_t \in \mathfrak{J}$, такая, что $|f_t(t)| > 1$, и, значит, такая, что $|f_t(u)| > 1$ в некоторой окрестности V_t точки t. Далее, существуют $t_1, \ldots, t_n \in \Psi$, такие, что

$$\Psi \subset V_{t_1} \cup \ldots \cup V_{t_n}.$$

Тогда $g_\varepsilon = f_{t_1}\bar{f}_{t_1} + \ldots + f_{t_n}\bar{f}_{t_n} \in \mathfrak{J}$ и $g_\varepsilon > 1$ на Ψ. Имеем $f\varepsilon^{-1}g_\varepsilon(1+\varepsilon^{-1}g_\varepsilon)^{-1} \in \mathfrak{J}$, и эта функция равномерно стремится к f, когда ε стремится к нулю. Таким образом, $f \in \bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$, откуда $\mathfrak{J}_\Phi \subset \mathfrak{J}$ и, наконец, $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\Phi$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{J}$ — идеал в A. Предположим, что для каждого $t \in \Omega$ существует элемент в $\mathfrak{J}$, не равный нулю в точке t. Тогда любая комплексная непрерывная на Ω функция f с компактным носителем K принадлежит $\mathfrak{J}$. В самом деле, конструкция, с помощью которой мы построили функцию g_ε при доказательстве предыдущего утверждения, позволяет здесь доказать существование функции $g \in \mathfrak{J}$, такой, что $g \geqslant 0$ на Ω и $g > 1$ на K. Теперь можно построить $h \in A$, такую, что $f = gh$, откуда $f \in \mathfrak{J}$.

Следствие 1. *Для каждого $t \in \Omega$ обозначим через $\mathfrak{J}_t$ множество $f \in A$, равных нулю в точке t. Тогда отображение $t \mapsto \mathfrak{J}_t$ является биекцией пространства Ω на множество замкнутых максимальных идеалов в A. Эти идеалы регулярны.*

Этот результат немедленно следует из предложения 1.

Обозначим через $\dot{\Omega}$ компакт, полученный из Ω присоединением бесконечно удаленной точки ω. Тогда A отождествляется с банаховой алгеброй комплексных непрерывных функций на $\dot{\Omega}$, равных нулю в точке ω. Имеет место

Следствие 2. *Для каждого $t \in \dot{\Omega}$ обозначим через ε_t характер алгебры A, определенный с помощью равенства $\varepsilon_t(f) = f(t)$ при всех $f \in A$. Тогда отображение $t \mapsto \varepsilon_t$ является гомеоморфизмом $\dot{\Omega}$ на $X'(A)$. Слабая топология и топология Джекобсона на $X(A)$ совпадают.*

Ясно, что $t \mapsto \varepsilon_t$ — непрерывное инъективное отображение из $\dot{\Omega}$ в $X'(A)$. Оно сюръективно и, стало быть, в силу следствия 1 и теоремы 2, является гомеоморфизмом. Если F — слабо замкнутая часть в $X(A)$, то ей, в силу сказанного, соответствует замкнутая часть в Ω; следовательно, согласно предложению 1, она замкнута в топологии Джекобсона.

3. Преобразование Гельфанда

Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Напомним, что для каждого $x \in A$ через $\mathcal{G}_A x$ или $\mathcal{G}x$ обозначается функция $\chi \mapsto \chi(x)$ на $X(A)$, что $\mathcal{G}x$ называется *преобразованием Гельфанда элемента* x и что отображение $x \mapsto \mathcal{G}x$

называется *преобразованием Гельфанда*. Следовательно, по определению имеет место равенство

$$(\mathcal{G}x)(\chi) = \chi(x).$$

Примеры. 1) В примере 1, § 2, n° 2, $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с Ω (следствие 2 предложения 1), и преобразование Гельфанда соответствует тождественному отображению.

2) Аналогично, в примере 2, § 2, n° 2, $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с $[0, 1]$, а $\mathcal{G}$ — с тождественным отображением (§ 7, n° 1, пример).

3) В примере 5, § 2, n° 2, $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с Δ, а $\mathcal{G}$ — с тождественным отображением (§ 7, упр. 6).

4) Рассмотрим, как и в примере 4, § 2, n° 2, банахову алгебру A абсолютно сходящихся рядов Фурье. Для каждого $u \in \mathbf{U}$ отображение $f \mapsto f(u)$ является характером χ_u алгебры A. Если $f_0 \in A$ — тождественное отображение $\mathbf{U}$, то $\chi_u(f_0) = u$; поэтому отображение $u \mapsto \chi_u$ из $\mathbf{U}$ на $\mathrm{X}(A)$ является инъективным (и, очевидно, непрерывным). Пусть $\chi \in \mathrm{X}(A)$. Так как $\|f_0\| = \|f_0^{-1}\| = 1$, то $|\chi(f_0)| \leqslant 1$ и $|\chi(f_0)^{-1}| \leqslant 1$; поэтому $\chi(f_0) \in \mathbf{U}$ и, значит, существует $u \in \mathbf{U}$, такое, что $\chi(f_0) = \chi_u(f_0)$. Так как $\{f_0, f_0^{-1}\}$ топологически порождают всю A, то $\chi = \chi_u$. Следовательно, отображение $u \mapsto \chi_u$ является гомеоморфизмом $\mathbf{U}$ на $\mathrm{X}(A)$ и можно отождествить эти два пространства. При этом $\mathcal{G}_A$ соответствует тождественному отображению. Значит, $\mathrm{X}(L^1(\mathbf{Z}))$ отождествляется с $\mathbf{U}$, и если $(c_n) \in L^1(\mathbf{Z})$, то $\mathcal{G}_{L^1(\mathbf{Z})}((c_n))$ отождествляется с функцией $e^{it} \mapsto \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ на $\mathbf{U}$.

5) Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$, Γ — его граница, A — алгебра комплексных функций f на Γ, которые продолжаются как непрерывные функции в Δ, аналитические в $\mathring{\Delta}$, с нормой $\|f\| = \sup_{t \in \Gamma} |f(t)|$. Из принципа максимума следует, что алгебра A канонически изоморфна алгебре, рассмотренной в § 2, n° 2, пример 5. Поэтому $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с Δ, и если $f \in A$, то $\mathcal{G}f$ — непрерывное продолжение f в Δ, аналитическое в $\mathring{\Delta}$.

Предложение 2. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Функция $\mathcal{G}x$ непрерывна в каждой точке $x \in A$ и стремится к нулю на бесконечности в* $\mathrm{X}(A)$.

В § 1, n° 6 мы видели, что функция $\chi \mapsto \chi(x)$ непрерывна на $\mathrm{X}'(A)$ и равна нулю в точке 0. Так как $\mathrm{X}'(A)$ отождествляется с компактификацией Александрова пространства

$X(A)$, то для завершения доказательства остается воспользоваться следствием теоремы 1.

Предложение 3. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра и $x \in A$. Тогда*

(i) *Объединение множества значений $\mathcal{G}x$ и множества $\{0\}$ совпадает со $\mathrm{Sp}'x$.*

(ii) *Если A содержит единицу, то множество значений $\mathcal{G}x$ совпадает со $\mathrm{Sp}\,x$; в частности, для того, чтобы элемент x был обратим, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{G}x$ нигде не равнялось нулю.*

Предположим, что A содержит единицу. Уже доказано, что для каждого $\chi \in X(A)$ значение $\chi(x) \in \mathrm{Sp}\,x$. Обратно, пусть $\lambda \in \mathrm{Sp}\,x$. Тогда элемент $x - \lambda$ не обратим. Следовательно, он содержится в максимальном идеале алгебры A и, значит, существует $\chi \in X(A)$, такой, что $\chi(x-\lambda) = 0$ (теорема 2). Тем самым утверждение (ii) доказано.

Обратимся теперь к общему случаю. Множество $\mathrm{Sp}'_A x$ совпадает с множеством $\mathrm{Sp}_{\tilde{A}}\, x$ или, что то же самое, с множеством значений $\mathcal{G}_{\tilde{A}}\, x$ на $X(\tilde{A}) = X'(A)$, откуда следует (i).

Следствие. *Пусть $f(e^{it}) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ — абсолютно сходящийся ряд Фурье. Если f нигде не принимает значение 0, то f^{-1} представляется абсолютно сходящимся рядом Фурье.*

Это утверждение следует из приведенного выше примера 4 и предложения 3 (ii).

Предложение 4. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, B — алгебра непрерывных комплексных функций, стремящихся к 0 на бесконечности в $X(A)$, с нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in X(A)} |f(t)|$. Тогда*

(i) *$\mathcal{G}$ является морфизмом из A в B, таким, что $\|\mathcal{G}x\| = \rho(x) \leqslant \|x\|$.*

(ii) *Для того чтобы преобразование $\mathcal{G}$ было изометрическим, необходимо и достаточно, чтобы $\|x^2\| = \|x\|^2$ для всех $x \in A$.*

В силу § 1, n° 6, преобразование $\mathcal{G}$ является морфизмом из A в B; $\|\mathcal{G}x\| = \rho(x)$ в силу предложения 3 и следствия 5 теоремы 1 § 2.

(ii) следует из (i) и § 2, n° 3.

Предложение 5. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Следующие четыре множества совпадают:*

1) *ядро преобразования Гельфанда;*

2) *множество элементов* x, *таких, что* $\mathrm{Sp}' x = \{0\}$;

3) *множество квазинильпотентных элементов в* A;

4) *радикал алгебры* A.

Пусть $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$ — эти множества. Имеем $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ (предложение 3 (i)) и $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3$ (§ 2, следствие 5 теоремы 1). Множество $\mathfrak{N}_4$ является пересечением всех регулярных максимальных идеалов в A и, следовательно (теорема 2), пересечением ядер всех характеров в A; значит, $\mathfrak{N}_4 = \mathfrak{N}_1$.

Следствие. *Пусть* A — *банахова алгебра,* x *и* y — *два коммутирующих элемента* A. *Тогда*

(i) *имеют место неравенства* $\rho(xy) \leqslant \rho(x)\rho(y)$, $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$.

(ii) *Если элемент* y *квазинильпотентен, то* $\mathrm{Sp}' x = \mathrm{Sp}'(x+y)$; *если к тому же* A *содержит единицу, то* $\mathrm{Sp}\, x = \mathrm{Sp}(x+y)$.

Эти утверждения немедленно сводятся к случаю, когда алгебра A содержит единицу, а после рассмотрения замкнутой наполненной подалгебры в A, порожденной x и y, — к случаю, когда A коммутативна. Тогда (i) следует из предложения 3, а (ii) — из предложений 3 и 5.

Замечания. 1) Вообще говоря, $\mathscr{G}(A)$ не является ни замкнутым в B, ни всюду плотным в B (§ 7, упр. 7).

2) $\mathscr{G}(A)$ разделяет точки в $\mathrm{X}(A)$: если χ_1, χ_2 — две различные точки $\mathrm{X}(A)$, то существует элемент $x \in A$, такой, что $\chi_1(x) \neq \chi_2(x)$.

3) Если $\chi \in \mathrm{X}(A)$, то существует элемент из $\mathscr{G}(A)$, не обращающийся в нуль в точке χ.

4) Если A содержит единицу, то $\mathscr{G}(A)$ является наполненной подалгеброй алгебры непрерывных функций на $\mathrm{X}(A)$ (предложение 3 (ii)).

5) Мы увидим (§ 4, теорема 2), что $\mathscr{G}(A)$ инвариантно относительно действия голоморфных функций.

4. Морфизмы коммутативных банаховых алгебр

Предложение 6. *Пусть* A *и* B — *две коммутативные банаховы алгебры,* h — *морфизм их оснований. Тогда если* B — *алгебра без радикала, то морфизм* h *непрерывен.*

Пусть $(a, b) \in A \times B$ — точка замыкания графика G отображения h. Пусть $\chi \in \mathrm{X}'(B)$. Функция $(x, y) \mapsto \chi(h(x)) - \chi(y) = (\mathrm{X}'(h)(\chi))(x) - \chi(y)$ непрерывна на $A \times B$ и обращается в нуль на G; следовательно, она равна нулю в точке (a, b). Поэтому $\chi(h(a)) = \chi(b)$ для всякого $\chi \in \mathrm{X}'(B)$. Так как B — алгебра без радикала, то $h(a) = b$. Таким образом, график G замкнут и, значит, морфизм h непрерывен (*Топ. вект. пр.*, гл. I, § 1, след. 5, теор. 1).

Предположение о коммутативности A не является необходимым (упр. 11).

Следствие. *Любые две нормы на комплексной коммутативной алгебре без радикала, определяющие структуру банаховой алгебры, эквивалентны.*

Достаточно применить предложение 6 к тождественному отображению этой алгебры.

Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры. Согласно § 1, n° 6, если h: $A \to B$ — сюръективный морфизм, то $\mathrm{X}'(h)$ — гомеоморфизм $\mathrm{X}'(B)$ на замкнутое подпространство в $\mathrm{X}'(A)$, переводящий 0 в 0 (инъективным $\mathrm{X}'(h)$ может быть при выполнении значительно более слабого предположения, см. § 7, предл. 1 (iv)).

Пусть теперь h: $A \to B$ — инъективный морфизм. Вообще говоря, $\mathrm{X}'(h)$ не является сюръективным отображением; необходимое условие для того, чтобы отображение $\mathrm{X}'(h)$ было сюръективным, получается из следующего предложения.

Предложение 7. *Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры с единицей, h: $A \to B$ — морфизм алгебр с единицей (не обязательно непрерывный). Тогда если $\mathrm{X}(h)$ — сюръективное отображение, то $h(A)$ — наполненная подалгебра в B.*

Пусть элемент $x \in A$ таков, что $h(x)$ обратим в B. Для всякого $\chi \in \mathrm{X}(A)$ имеем $\chi = \mathrm{X}(h)(\xi)$ и $\xi \in \mathrm{X}(B)$. Поэтому $\chi(x) = \xi(h(x)) \neq 0$; следовательно, x обратим в A (предложение 3) и $h(x)$ обратим в $h(A)$.

Это необходимое условие сюръективности не является достаточным, даже в предположении, что h — изометрическое отображение (упр. 14). Однако справедливо следующее

Предложение 8. *Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры с единицей, h: $A \to B$ — инъективный морфизм алгебр с единицей (не обязательно непрерывный), a — элемент из A. Предположим, что замкнутая наполненная подалгебра в A, порожденная элементом a, совпадает с A.*

Следующие условия эквивалентны:

a) $\mathrm{X}(h)$ — *сюръективное отображение;*

b) $h(A)$ — *наполненная подалгебра в B;*

c) $\mathrm{Sp}_A\, a = \mathrm{Sp}_B\, h(a)$.

a) $\Rightarrow$ b) следует из предложения 7.

b) $\Rightarrow$ c) очевидно, так как $\mathrm{Sp}_A\, a = \mathrm{Sp}_{h(A)}\, h(a)$.

c) $\Rightarrow$ a) следует из § 1, n° 5, (4), и коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}(B) & \xrightarrow{\mathrm{X}(h)} & \mathrm{X}(A) \\ {\scriptstyle \mathscr{T}_B(h(a))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{T}_A(a)} \\ \mathrm{Sp}_B\, h(a) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Sp}_A\, a \end{array}$$

где вертикальные стрелки обозначают сюръективные отображения (предл. 3), а i — каноническую инъекцию. Утверждение c) означает, что отображение i биективно. Из нашего предположения относительно элемента a следует, что отображение $\mathrm{X}(A) \to \mathrm{Sp}_A\, a$ биективно, так как множество точек в A, на котором совпадают два характера, является замкнутой наполненной подалгеброй в A. Поэтому $\mathrm{X}(h)$ — сюръективное отображение.

5. Совместный спектр

Пусть $B = \mathbf{C}\left[(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right]$ — алгебра с единицей комплексных многочленов от семейства переменных (X_λ). Для каждого $\chi \in \mathrm{X}(B)$ имеем $(\chi(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbf{C}^\Lambda$; ясно, что отображение $\chi \longmapsto (\chi(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{X}(B)$ на произведение $\mathbf{C}^\Lambda$ пространств $\mathbf{C}$, так что можно отождествить эти два пространства.

Пусть, далее, A — коммутативная банахова алгебра с единицей, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — некоторое семейство ее элементов. Тогда существует и притом единственный морфизм h: $B \to A$, такой, что $h(X_\lambda) = x_\lambda$ для каждого λ. Отображение $\mathrm{X}(h)$: $\chi \longmapsto (\chi(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ является непрерывным отображением из $\mathrm{X}(A)$ в $\mathbf{C}^\Lambda$. Оно называется *отображением* $\mathrm{X}(A)$ *в* $\mathbf{C}^\Lambda$, *определенным семейством* (x_λ). Его образ является компактом в $\mathbf{C}^\Lambda$ и называется *совместным спектром* семейства (x_λ). Совместный спектр обозначается $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$ или $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$. Точка $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ из $\mathbf{C}^\Lambda$ принадлежит $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$ в том и только том случае, если все элементы $x_\lambda - c_\lambda$ находятся в некотором одном и том же максимальном идеале алгебры A, другими словами, если порожденный ими идеал не совпадает с A. Если семейство (x_λ) сводится к единственному элементу x, то мы снова получаем спектр $\mathrm{Sp}\, x$ (предл. 3 (ii)). Если $\Lambda' \subset \Lambda$, то $\mathrm{Sp}\left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}\right)$ является образом $\mathrm{Sp}\left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right)$ при каноническом отображении $\mathbf{C}^\Lambda$ в $\mathbf{C}^{\Lambda'}$. В частности, $\mathrm{Sp}\left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right) \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Sp}\, x_\lambda$.

Пусть z_λ $(\lambda \in \Lambda)$ — координатные функции на $\mathbf{C}^\Lambda$. Если $\chi \in \mathrm{X}(A)$, то значение $z_\lambda \circ \mathrm{X}(h)$ в точке χ есть $\chi(x_\lambda)$; следовательно, $z_\lambda \circ \mathrm{X}(h) = \mathcal{G}x_\lambda$.

Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры с единицей, φ — морфизм алгебр с единицей из A в B, (x_λ) — семейство элементов из A. Для каждого $\chi \in \mathrm{X}(B)$ имеет место равенство

$$\chi(\varphi(x_\lambda)) = (\mathrm{X}(\varphi)(\chi))(x_\lambda),$$

поэтому $\mathrm{Sp}_B((\varphi(x_\lambda))) \subset \mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}(B) & \xrightarrow{\mathrm{X}(\varphi)} & \mathrm{X}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sp}_B((\varphi(x_\lambda))) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Sp}_A((x_\lambda)) \end{array}$$

где i — каноническая инъекция, а вертикальные стрелки обозначают отображения, определенные семействами $(\varphi(x_\lambda))$ и (x_λ), коммутативна.

Предложение 9. (i) *Предположим, что наполненная подалгебра в A, порожденная семейством (x_λ), плотна в A. Тогда отображение $\mathrm{X}(A)$ в $\mathbf{C}^\Lambda$, определенное семейством (x_λ), является гомеоморфизмом $\mathrm{X}(A)$ на $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$.*

(ii) *Предположим, что подалгебра с единицей в A, порожденная семейством x_λ, плотна в A. Тогда для каждой точки $(c_\lambda) \in \mathbf{C}^\Lambda$ следующие условия эквивалентны:*

a) $(c_\lambda) \in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$;

b) $|P((c_\lambda))| \leqslant \|P((x_\lambda))\|$ *для любого* $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$;

c) $|P((c_\lambda))| \leqslant \rho(P((x_\lambda)))$ *для любого* $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$.

(i) Пусть χ, $\chi' \in \mathrm{X}(A)$. Если $\chi(x_\lambda) = \chi'(x_\lambda)$ для всех λ, то χ и χ' совпадают на наполненной подалгебре в A, порожденной семейством x_λ, и в силу непрерывности χ и χ' — на самой алгебре A. Следовательно, $\mathrm{X}(h)$ является непрерывной биекцией $\mathrm{X}(A)$ на $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$ и, стало быть, гомеоморфизмом, так как $\mathrm{X}(A)$ — компакт.

(ii) Если $(c_\lambda) \in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$ и $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$, то существует характер $\chi \in \mathrm{X}(A)$, такой, что $c_\lambda = \chi(x_\lambda)$ для всех λ, откуда $|P((c_\lambda))| = |\chi(P((x_\lambda)))| \leqslant \rho(P((x_\lambda)))$; следовательно, a) $\Rightarrow$ c); c) $\Rightarrow$ b) очевидно, так как $\rho(x) \leqslant \|x\|$. Пусть теперь в точке $(c_\lambda) \in \mathbf{C}^\Lambda$ для всех $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$ имеет место неравенство $|P((c_\lambda))| \leqslant \|P((x_\lambda))\|$. Пусть A' — подалгебра с единицей в A, порожденная семейством (x_λ). Условие $P((x_\lambda)) = 0$ влечет за собой равенство $P((c_\lambda)) = 0$; следовательно, существует морфизм ξ: $A' \to \mathbf{C}$, такой, что $\xi(x_\lambda) = c_\lambda$ для всех λ. Так как

$$|P((c_\lambda))| \leqslant \|P((x_\lambda))\|,$$

то этот морфизм продолжается по непрерывности до характера χ алгебры $\overline{A'}=A$, откуда $(c_\lambda)=(\chi(x_\lambda))\in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$.

Следствие 1. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, (x_λ) — некоторое семейство ее элементов, A' — банахова подалгебра с единицей в A, порожденная семейством (x_λ). Тогда $\mathrm{Sp}_{A'}((x_\lambda))$ является полиномиально выпуклой оболочкой* (приложение) *множества $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$.*

Действительно, согласно предложению 9, $\mathrm{Sp}_{A'}((x_\lambda))$ представляет собой множество точек $(c_\lambda)\in \mathbf{C}^\Lambda$, таких, что $|P((c_\lambda))|\leqslant \rho(P((x_\lambda)))$ для всех $P\in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$. Остается заметить, что

$$\rho(P((x_\lambda)))=\sup_{\chi\in X(A)}|\chi(P((x_\lambda)))|=\sup_{\chi\in X(A)}|P((\chi(x_\lambda)))|=\sup_{c\in \mathrm{Sp}_A((x_\lambda))}|P(c)|.$$

Следствие 2. *Пусть K — компакт в $\mathbf{C}$. Пусть K' — объединение компакта K и ограниченных связных компонент дополнения $\mathbf{C}-K$. Тогда K' является полиномиально выпуклой оболочкой K.*

Из сказанного в приложении следует, что K' содержится в этой полиномиально выпуклой оболочке. С другой стороны, множество $\mathbf{C}-K'$ является единственной неограниченной связной компонентой $\mathbf{C}-K$. Так как оно открыто и содержит внешность некоторого круга, то K' — компакт. Пусть $A=\mathscr{C}(K')$ — коммутативная банахова алгебра с единицей непрерывных комплексных функций на K' с равномерной нормой. Пусть $x\in A$ — функция $t\mapsto t$ на K'. Имеем $\mathrm{Sp}_A x=K'$; следовательно, множество $\mathbf{C}-\mathrm{Sp}_A x$ связно. Поэтому если через B обозначить замкнутую подалгебру с единицей в A, порожденную элементом x, то $\mathrm{Sp}_B x=\mathrm{Sp}_A x$ (§ 2, следствие предложения 6). Итак, в силу предложения 9 (ii), $\mathrm{Sp}_B x$ и, стало быть, K' является полиномиально выпуклым множеством.

Утверждение следствия 2 становится *неверным* при замене $\mathbf{C}$ на $\mathbf{C}^2$ (упр. 23).

Следствие 3. *Пусть K — полиномиально выпуклое подмножество в $\mathbf{C}^\Lambda$. Пусть $A=\mathscr{C}(K)$, A_1 — множество сужений на K многочленов на $\mathbf{C}^\Lambda$ и A' — замыкание A_1 в A. Пусть, далее, для каждого $z\in K$ отображение χ_z: $f\mapsto f(z)$ есть характер A'.*

(i) *Отображение ψ: $z\mapsto \chi_z$ является гомеоморфизмом K на $X(A')$.*

(ii) *Пусть $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство сужений на K координатных функций на $\mathbf{C}^\Lambda$. Пусть φ — отображение $X(A')$ в $\mathbf{C}^\Lambda$,* *определенное семейством* (z_λ). *Тогда* $\varphi \circ \psi$ *является тождественным отображением* K *и* $K = \mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda))$.

Так как z_λ топологически порождают A', то φ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{X}(A')$ на $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda))$ (предл. 9 (i)). Ясно, что $\varphi \circ \psi$ — тождественное отображение K, поэтому ψ инъективно (и, очевидно, непрерывно) и $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda)) \supset K$. В силу следствия 2 предложения 1, $\mathrm{Sp}_A((z_\lambda)) = K$. В силу следствия 1 предложения 9, $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda)) = K$, ибо множество K полиномиально выпукло. Таким образом, ψ является сюръективным отображением и, следовательно, гомеоморфизмом компакта K на $\mathrm{X}(A')$.

§ 4. Голоморфное функциональное исчисление

Всюду в этом параграфе символом A обозначается банахова алгебра с единицей.

1. Формулировка основной теоремы

Пусть E — комплексное банахово пространство и U — открытая часть в $\mathbf{C}^n$. Обозначим через $\mathcal{O}(U; E)$ комплексное векторное пространство функций, голоморфных в U, со значениями в E, снабженное топологией компактной сходимости. Пусть K — компакт в $\mathbf{C}^n$ и $\mathfrak{U}$ — убывающее фильтрующееся множество его открытых окрестностей. Если $U, U' \in \mathfrak{U}$ и $U' \subset U$, то имеется отображение сужения из $\mathcal{O}(U; E)$ в $\mathcal{O}(U'; E)$. Индуктивный предел пространств $\mathcal{O}(U; E)$ относительно этих отображений является локально выпуклым пространством и обозначается $\mathcal{O}(K; E)$; его элементы называются *ростками* функций, голоморфных в окрестности компакта K, со значениями в E; можно говорить о *значениях* такого ростка на K.

Ясно, что $\mathcal{O}(U; A)$, $\mathcal{O}(K; A)$ — алгебры с единицей и что можно, если $A \neq \{0\}$, канонически отождествить $\mathcal{O}(U; \mathbf{C})$ и $\mathcal{O}(K; \mathbf{C})$ с подалгебрами алгебр $\mathcal{O}(U; A)$ и $\mathcal{O}(K; A)$. Положим

$$\mathcal{O}(U; \mathbf{C}) = \mathcal{O}(U); \quad \mathcal{O}(K; \mathbf{C}) = \mathcal{O}(K).$$

Пусть M — некоторое множество. Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ и $m \leqslant n$, то положим $\pi_{m,n}(\mathbf{a}) = (a_1, \ldots, a_m)$. Если $a \in A^n$, то имеет место равенство

$$\pi_{m,n}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}) = \mathrm{Sp}(\pi_{m,n}(\mathbf{a})),$$

откуда возникает морфизм $\pi^*_{m,n}$: $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}(\pi_{m,n}(\mathbf{a}))) \to \mathcal{O}(\mathrm{Sp}(\mathbf{a}))$.

Обозначим через $A^{(\infty)}$ сумму множеств A^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 1. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Тогда существует и притом единственное отображение $\mathbf{a} \longmapsto \Theta_{\mathbf{a}}$, которое каждому $\mathbf{a} \in A^{(\infty)}$ ставит в соответствие непрерывный морфизм алгебр с единицей $\Theta_{\mathbf{a}}$: $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}) \to A$, обладающий следующими свойствами:*

(i) *Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и если $z_1, \ldots, z_n$ — ростки координатных функций на $\mathbf{C}^n$ в окрестности $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, то*

$$\Theta_{\mathbf{a}}(z_1) = a_1, \ \ldots, \ \Theta_{\mathbf{a}}(z_n) = a_n.$$

(ii) *Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $m \leqslant n$ и $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}(\pi_{m,n}(\mathbf{a})))$, то $\Theta_{\mathbf{a}}(\pi^*_{m,n}(f)) = \Theta_{\pi_{m,n}(\mathbf{a})}(f)$.*

Доказательству этой теоремы посвящены n° 2—6.

2. Построение некоторых дифференциальных форм

В этом пункте алгебра A предполагается коммутативной.

Говоря о бесконечно дифференцируемых функциях на открытой части в $\mathbf{C}^n$, мы будем иметь в виду соответствующую вещественную структуру. Стандартные обозначения дифференциального исчисления мы используем относительно этой структуры. Под дифференциальными формами мы всегда будем подразумевать внешние дифференциальные формы, а умножение этих форм всегда будет внешним умножением.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Существуют бесконечно дифференцируемые отображения $v_1, \ldots, v_n$ из $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ в A, такие, что для всякого $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ имеет место равенство*

$$(z_1 - a_1)\,v_1(\mathbf{z}) + \ \ldots \ + (z_n - a_n)\,v_n(\mathbf{z}) = 1.$$

1) Для каждой точки $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0n}) \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ существуют функции $u_1, \ldots, u_n$ со значениями в A, определенные и бесконечно дифференцируемые в некоторой открытой окрестности точки $\mathbf{z}_0$ и такие, что в этой окрестности $(z_1 - a_1)\,u_1(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)\,u_n(\mathbf{z}) = 1$. Действительно, заметим вначале, что существуют элементы $b_1, \ldots, b_n \in A$, такие, что $(z_{01} - a_1)\,b_1 + \ \ldots \ + (z_{0n} - a_n)\,b_n = 1$ (§ 3, n° 5). Элемент $(z_1 - a_1)\,b_1 + \ \ldots \ + (z_n - a_n)\,b_n$ обратим в A, если $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ принадлежит достаточно малой открытой окрестности точки $\mathbf{z}_0$, и теперь достаточно положить в этой окрестности

$$u_j(\mathbf{z}) = b_j \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)\,b_i \right)^{-1}.$$

2) Из предыдущего следует, что существует открытое покрытие $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ множества $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ и для каждого $\lambda \in L$ существуют функции $u_{1,\lambda}, \ldots, u_{n,\lambda}$ со значениями в A, определенные и бесконечно дифференцируемые в V_λ, такие, что $(z_1 - a_1)\,u_{1\lambda}(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)\,u_{n\lambda}(\mathbf{z}) = 1$ в V_λ. Согласно *Общ. топ.*, гл. I, 4-е изд., § 9, теор. 5, покрытие (V_λ) можно считать локально конечным. Далее, существует семейство $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ неотрицательных бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, таких, что $\mathrm{supp}(f_\lambda) \subset V_\lambda$ и $\sum\limits_{\lambda \in L} f_\lambda = 1$ в $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ (*Var.*, R.). Продолжая функцию $f_\lambda u_{i\lambda}$ нулем в $(\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}) - V_\lambda$, мы получим функцию (обозначим ее $u'_{i\lambda}$) со значениями в A, определенную и бесконечно дифференцируемую в $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. Так как для $i = 1, 2, \ldots, n$ семейство $\left(\mathrm{supp}\left(u'_{i\lambda}\right)\right)_{\lambda \in L}$ является локально конечным, то функция $v_i = \sum\limits_{\lambda \in L} u'_{i\lambda}$ бесконечно дифференцируема в $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. С другой стороны, пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. Пусть L' — конечное подмножество индексов $\lambda \in L$, таких, что $\mathbf{z} \in V_\lambda$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)\,v_i(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda \in L'} \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)\,u'_{i\lambda}(\mathbf{z}) =$$

$$= \sum_{\lambda \in L'} f_\lambda(\mathbf{z}) \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)\,u_{i\lambda}(\mathbf{z}) = \Big(\sum_{\lambda \in L'} f_\lambda(\mathbf{z})\Big) \cdot 1 = 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ *и* h — *бесконечно дифференцируемое отображение* $\mathbf{C}^n$ *в* $\mathbf{C}$, *равное* 1 *в окрестности* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. *Тогда существуют бесконечно дифференцируемые отображения* $u_1, \ldots, u_n$ *из* $\mathbf{C}^n$ *в* A, *такие, что для каждой точки* $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ *имеет место равенство*

$$(z_1 - a_1)\,u_1(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)\,u_n(\mathbf{z}) = 1 - h(\mathbf{z}). \tag{1}$$

Действительно, существуют отображения $v_1, \ldots, v_n$ из $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ в A со свойствами, указанными в лемме 1. Положим

$$u_i(\mathbf{z}) = (1 - h(\mathbf{z}))\,v_i(\mathbf{z}), \quad \text{если} \quad \mathbf{z} \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a},$$
$$u_i(\mathbf{z}) = 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{z} \in \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}.$$

Тогда функции u_i бесконечно дифференцируемы в $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ и равны нулю в окрестности $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, а следовательно, бесконечно дифференцируемы в $\mathbf{C}^n$. Равенство (1), очевидно, справедливо для $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, а для $\mathbf{z} \in \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ обе его части обращаются в нуль.

Замечание. Если $n=1$, то для $\mathbf{z}\in\mathbf{C}-\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ имеем

$$u_1(\mathbf{z})=(1-h(z))(z-a_1)^{-1}.$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{a}$, h, $u_1, \ldots, u_n$ *обладают свойствами, указанными в лемме 2. Обозначим через* ω *дифференциальную форму* $du_1\,dz_1 \ldots du_n\,dz_n$ *степени* $2n$ *на* $\mathbf{C}^n$ *с коэффициентами в* A. *Тогда*

(i) *имеет место соотношение* $\mathrm{supp}\,\omega\subset\mathrm{supp}\,h$.

(ii) *Для* $i=1, 2, \ldots, n$ *существуют дифференциальные формы* β_i *на* $\mathbf{C}^n$ *степени* $n-1$ *с коэффициентами в* A, *такие, что*

$$(z_i-a_i)\,\omega=d\,(h\beta_i\,dz_1\,\ldots\,dz_n).$$

(iii) *Существует дифференциальная форма* β *на* $\mathbf{C}^n$ *степени* $n-1$ *с коэффициентами в* A, *такая, что* $(n+1)\,h\omega-\omega=$ $=d\,(h\beta\,dz_1\,\ldots\,dz_n)$.

Дифференцируя равенство (1), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\,dz_i+\sum_{i=1}^{n}(z_i-a_i)\,du_i=-\,dh, \tag{2}$$

откуда следует, что

$$dh\,dz_i\prod_{j\neq i}(du_j\,dz_j)=-(z_i-a_i)\,\omega. \tag{3}$$

Тогда $d\left(h\left(\prod_{j\neq i}du_j\right)\right)dz_1\,\ldots\,dz_n=dh\left(\prod_{j\neq i}du_j\right)dz_1\,\ldots\,dz_n=$ $=\pm(z_i-a_i)\,\omega$, и это равенство доказывает справедливость (ii). Из (ii) получается, что

$$(1-h)\,\omega=\sum_{i=1}^{n}(z_i-a_i)\,u_i\omega=\sum_{i=1}^{n}u_i d\,(h\beta_i\,dz_1\,\ldots\,dz_n),$$

откуда $\mathrm{supp}\,(1-h)\,\omega\subset\mathrm{supp}\,h$, а это соотношение влечет за собой (i). Наконец, положим $\tau=\sum_{i=1}^{n}hu_i\,dz_i\left(\prod_{j\neq i}(du_j\,dz_j)\right)$. Тогда

$$d\tau=\sum_{i=1}^{n}u_i\,dh\,dz_i\left(\prod_{j\neq i}(du_j\,dz_j)\right)+nh\omega,$$

или, с учетом (3),

$$d\tau=-\sum_{i=1}^{n}u_i\,(z_i-a_i)\,\omega+nh\omega=-(1-h)\,\omega+nh\omega=$$
$$=(n+1)\,h\omega-\omega,$$

что и доказывает утверждение (iii).

Рассмотрим теперь, каким изменениям подвергается форма ω при некоторых модификациях $h, u_1, \ldots, u_n$ ($\mathbf{a}$ остается фиксированным). Начнем с одной простейшей модификации.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{a}, h, u_1, \ldots, u_n$ *обладают свойствами, указанными в лемме 2. Пусть k — бесконечно дифференцируемое отображение $\mathbf{C}^n$ в A, i и j — два целых числа из интервала $[1, n]$. Определим $u'_1, \ldots, u'_n, \omega'$ равенствами*

$$u'_i = u_i + (z_j - a_j)k, \quad u'_j = u_j - (z_i - a_i)k,$$
$$u'_l = u_l \quad \text{для} \quad l \neq i, j,$$
$$\omega' = du'_1\, dz_1\, du'_2\, dz_2 \ldots du'_n\, dz_n.$$

Тогда имеет место равенство $(z_1 - a_1)u'_1(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n) \times u'_n(\mathbf{z}) = 1 - h(\mathbf{z})$, и существует дифференциальная форма ψ степени $n-1$ на $\mathbf{C}^n$ с коэффициентами в A, такая, что $\operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp} h$ *и* $\omega - \omega' = d(\psi\, dz_1 \ldots dz_n)$.

Действительно,

$$du'_i\, du'_j\, dz_1 \ldots dz_n =$$
$$= (du_i + k\, dz_j + (z_j - a_j)\, dk)(du_j - k\, dz_i - (z_i - a_i)\, dk)\, dz_1 \ldots dz_n =$$
$$= (du_i\, du_j - (z_i - a_i)\, du_i\, dk - (z_j - a_j)\, du_j\, dk)\, dz_1 \ldots dz_n.$$

Следовательно,

$$du'_i\, du'_j \Big(\prod_{l \neq i, j} du'_l\Big) dz_1 \ldots dz_n - du_i\, du_j \Big(\prod_{l \neq i, j} du_l\Big) dz_1 \ldots dz_n =$$
$$= -\Big(\sum_{l=1}^{n} (z_l - a_l)\, du_l\, dk\Big)\Big(\prod_{l \neq i, j} du_l\Big) dz_1 \ldots dz_n$$

и с учетом (2) это равенство можно продолжить:

$$dh\, dk \Big(\prod_{l \neq i, j} du_l\Big) dz_1 \ldots dz_n = d\Big(h\, dk \Big(\prod_{l \neq i, j} du_l\Big) dz_1 \ldots dz_n\Big).$$

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{a}, h, u_1, \ldots, u_n$ *обладают свойствами, указанными в лемме 2. Пусть h' — бесконечно дифференцируемое отображение $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$, равное 1 в окрестности* $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$. *Пусть $u'_1, \ldots, u'_n$ — бесконечно дифференцируемые отображения $\mathbf{C}^n$ в A, такие, что для всех $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ имеет место равенство*

$$(z_1 - a_1)u'_1(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)u'_n(\mathbf{z}) = 1 - h'(\mathbf{z}).$$

Пусть $\omega' = du'_1\, dz_1 \ldots du'_n\, dz_n$. Тогда существует дифференциальная форма ψ степени $n-1$ на $\mathbf{C}^n$ с коэффициентами в A, такая, что $\operatorname{supp}\psi \subset (\operatorname{supp} h) \cup (\operatorname{supp} h')$ *и* $\omega - \omega' = d(\psi\, dz_1 \ldots dz_n)$.

Для каждого $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ положим

$$\alpha_{ij}(\mathbf{z}) = u_i'(\mathbf{z})\, u_j(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z})\, u_j'(\mathbf{z}),$$

$$\beta_i(\mathbf{z}) = u_i'(\mathbf{z})\, h(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z})\, h'(\mathbf{z}),$$

так что $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$ и $\operatorname{supp} \beta_i \subset (\operatorname{supp} h) \cup (\operatorname{supp} h')$. Имеем

$$u_i'(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}) = u_i'(\mathbf{z}) \left(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)\, u_j'(\mathbf{z}) + h(\mathbf{z}) \right) -$$

$$- u_i(\mathbf{z}) \left(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)\, u_j'(\mathbf{z}) + h'(\mathbf{z}) \right) = \sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)\, \alpha_{ij}(\mathbf{z}) + \beta_i(\mathbf{z}).$$

Положим $u_i''(\mathbf{z}) = u_i'(\mathbf{z}) - \beta_i(\mathbf{z})$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{u}'' = (u_1'', \ldots, u_n'')$. Тогда

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{u} + \sum_{i < j} \mathbf{v}_{ij},$$

где $\mathbf{v}_{ij}$ — отображения $\mathbf{C}^n$ в A^n, для которых i-я компонента равна $(z_j - a_j)\, \alpha_{ij}$, j-я компонента равна

$$(z_i - a_i)\, \alpha_{ji} = -(z_i - a_i)\, \alpha_{ij},$$

а все остальные компоненты равны нулю. В силу леммы 4, существует дифференциальная форма ψ_1 степени $n-1$ в $\mathbf{C}^n$ с коэффициентами в A, такая, что $\operatorname{supp} \psi_1 \subset \operatorname{supp} h$ и

$$\omega - du_1''\, dz_1 \ldots du_n''\, dz_n = d(\psi_1\, dz_1 \ldots dz_n).$$

С другой стороны, дифференциальная форма

$$du_1''\, dz_1 \ldots du_n''\, dz_n - \omega' =$$

$$= d(u_1' - \beta_1)\, dz_1 \ldots d(u_n' - \beta_n)\, dz_n - du_1'\, dz_1 \ldots du_n'\, dz_n$$

представляется в виде суммы форм

$$\pm\, d\beta_{i_1} \ldots d\beta_{i_p}\, du_{j_1}' \ldots du_{j_{n-p}}'\, dz_1 \ldots dz_n, \quad p \geqslant 1,$$

откуда и следует утверждение леммы.

3. Построение отображений $\Theta_{\mathbf{a}}$

В этом пункте мы предполагаем, что алгебра A коммутативна.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, U — открытая окрестность $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$. Тогда существует бесконечно дифференцируемое отображение h из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$, равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$ и такое, что $\operatorname{supp} h$ — компакт, содержащийся в U. Пусть, далее, $u_1, \ldots, u_n$ — отображения со свойствами, указанными в лемме 2.

Пусть

$$\omega = du_1\, dz_1 \ldots du_n\, dz_n.$$

Тогда $\operatorname{supp}\omega$ — компакт, содержащийся в U (лемма 3). Поэтому для каждой функции $f \in \mathcal{O}(U; A)$ можно образовать элемент вида $\int_U f\omega$, принадлежащий A. В силу леммы 5 и формулы Стокса, этот элемент зависит только от $\mathbf{a}$ и f и не зависит от выбора $h, u_1, \ldots, u_n$. Положим

$$\Theta_{\mathbf{a}}^U(f) = n!\,(2\pi i)^{-n} \int_U f\omega. \tag{4}$$

Тогда отображение $f \mapsto \Theta_{\mathbf{a}}^U(f)$ из $\mathcal{O}(U; A)$ в A является *линейным*. Это отображение, кроме того, непрерывно; действительно, используя введенные выше обозначения, мы видим, что существует постоянная $M \geqslant 0$, такая, что

$$\|\Theta_{\mathbf{a}}^U(f)\| \leqslant M \sup_{\mathbf{z}\in \operatorname{supp} h} \|f(\mathbf{z})\|.$$

С другой стороны, $\Theta_{\mathbf{a}}^U f$ зависит только от *ростка* функции f в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$. В самом деле, пусть U, U' — открытые окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ и $f \in \mathcal{O}(U; A)$, $f' \in \mathcal{O}(U'; A)$. Предположим, что f и f' совпадают в некоторой открытой окрестности $U'' \supset \operatorname{Sp}\mathbf{a}$; тогда существует бесконечно дифференцируемое отображение h из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$, равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ и такое, что $\operatorname{supp} h \subset U''$; построив ω при помощи h, мы видим, что $\int_U f\omega = \int_{U'} f'\omega$, и наше утверждение доказано.

Если $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{a}; A)$, мы положим $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta_{\mathbf{a}}^U(f)$, где f — какой-нибудь представитель ростка $\tilde{f}$. Из предыдущих рассмотрений следует, что $\Theta_{\mathbf{a}}$ — *линейное непрерывное* отображение из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{a}; A)$ в A.

4. *Простейшие свойства отображений* $\Theta_{\mathbf{a}}$

Мы по-прежнему предполагаем, что алгебра A коммутативна.

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{a} \in A^n$, P — *многочлен на* $\mathbf{C}^n$ *с коэффициентами в* A, $\tilde{P}$ — *его росток в окрестности* $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ *и*

$$\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{a}; A).$$

Тогда $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{P}\tilde{f}) = P(\mathbf{a})\,\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f})$.

Обозначим, как и раньше, через $z_1, \ldots, z_n$ координатные функции на $\mathbf{C}^n$; тогда достаточно доказать лемму для случая, когда $P = z_1^{e_1} \ldots z_n^{e_n}$, где $e_1, \ldots, e_n \in \mathbf{N}$. Индукция по $e_1 + \ldots + e_n$ позволяет ограничиться случаем, когда $P = z_i$. Пусть f — какой-нибудь представитель $\tilde{f}$, т. е. голоморфная функция в некоторой открытой окрестности $U \supset \operatorname{Sp} \mathbf{a}$. Пусть h — бесконечно дифференцируемое отображение из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$, равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$, с носителем, содержащимся в U. Используя обозначения $u_1, \ldots, u_n$, ω лемм 2 и 3, имеем

$$\Theta_{\mathbf{a}}^U(z_j f) = n!\,(2\pi i)^{-n} \int_U z_j f \omega,$$

$$a_j \Theta_{\mathbf{a}}^U(f) = n!\,(2\pi i)^{-n} \int_U a_j f \omega.$$

Используя дифференциальную форму β_i леммы 3 (ii), получим равенство

$$(z_i - a_i) f \omega = f d(h \beta_i \, dz_1 \ldots dz_n) = d(f h \beta_i \, dz_1 \ldots dz_n)$$

(так как $df \, dz_1 \ldots dz_n = 0$); следовательно, $\int_U (z_i - a_i) f \omega = 0$, что и доказывает лемму.

Напомним теперь следующие факты (*Var.*, R.).

1) Пусть V — открытая часть в $\mathbf{C}$, граница которой F — бесконечно дифференцируемое подмногообразие размерности 1 в $\mathbf{C}$. Следующие условия эквивалентны: (i) граница $\overline{V}$ совпадает с F; (ii) для каждой точки $z \in F$ существуют открытая окрестность U точки z в $\mathbf{C}$ и биективное отображение φ окрестности U на открытый единичный шар в $\mathbf{C}$, такое, что φ и φ^{-1} бесконечно дифференцируемы и справедливы соотношения

$$z \in U \cap V \Leftrightarrow \mathcal{I}\varphi(z) > 0,$$

$$z \in U \cap F \Leftrightarrow \mathcal{I}\varphi(z) = 0,$$

$$z \in U \cap (\mathbf{C} - \overline{V}) \Leftrightarrow \mathcal{I}\varphi(z) < 0.$$

2) Пусть K — компакт в $\mathbf{C}$. Существует фундаментальная система открытых относительно компактных окрестностей V компакта K, граница каждой из которых — бесконечно дифференцируемое подмногообразие размерности 1 в $\mathbf{C}$ — совпадает с границей $\overline{V}$.

3) Пусть W — относительно компактная открытая часть в $\mathbf{C}$, граница которой F — бесконечно дифференцируемое подмногообразие размерности 1 в $\mathbf{C}$ — совпадает с грани-

цей $\overline{W}$. Тогда существует и притом единственная ориентация на F, такая, что для любой дифференциальной формы τ степени 1, бесконечно дифференцируемой в некоторой открытой окрестности множества W, имеет место равенство $\int\limits_W d\tau = \int\limits_F \tau$. Компактное многообразие F, снабженное этой ориентацией, называется ориентированным краем W и обозначается $\dot{W}$.

Вернемся к отображению Θ_a и рассмотрим сначала случай, когда $n = 1$.

Лемма 7. *Пусть x — элемент A, U — открытая окрестность $\operatorname{Sp} x$ и $f \in \mathcal{O}(U; A)$. Пусть V — открытая относительно компактная окрестность $\operatorname{Sp} x$, такая, что $\overline{V} \subset U$, причем граница V — бесконечно дифференцируемое подмногообразие размерности 1 в $\mathbf{C}$ и совпадает с границей $\overline{V}$. Тогда имеет место равенство*

$$\Theta_x^U(f) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-1}\, dz.$$

Если $U = \mathbf{C}$ и $f(z) = 1$, то $\Theta_x^U(f) = 1$.

Действительно, существует бесконечно дифференцируемое отображение h: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp} x$ и имеющее компактный носитель, содержащийся в V. Далее, существует бесконечно дифференцируемое отображение u: $\mathbf{C} \to A$, такое, что $(z-x)u(z) = 1 - h(z)$ для всех $z \in \mathbf{C}$. Тогда $f\, du\, dz = d(fu\, dz)$ и $u(z) = (z-x)^{-1}$ на границе V. Поэтому

$$2i\pi\Theta_x^U(f) = \int\limits_V f\, du\, dz = \int\limits_V d(fu\, dz) = \int\limits_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-1}\, dz.$$

Предположим теперь, что $U = \mathbf{C}$ и $f(z) = 1$. Выберем в качестве окрестности V открытый шар с центром в 0 радиуса $R > \|x\|$ (так что $\operatorname{Sp} x \subset V$). Тогда в $\mathbf{C} - V$ имеет место равенство

$$(z-x)^{-1} = z^{-1}(1 - z^{-1}x)^{-1} = z^{-1} \cdot 1 + z^{-2} \cdot x + z^{-3} \cdot x^2 + \ldots .$$

Напомним (*Var.*, R.), что $\int\limits_{\dot{V}} z^n\, dz = 0$ для $n \neq -1$ и $\int\limits_{\dot{V}} z^{-1}\, dz = 2i\pi$. Следовательно, $\int\limits_{\dot{V}} (z-x)^{-1}\, dz = 2i\pi \cdot 1$.

Лемма 8. (i) *Для введенного в* n° 1 *морфизма* $\pi_{m,n}$ *имеет место равенство*

$$\Theta_{\mathbf{a}} \circ \pi^*_{m,n} = \Theta_{\pi_{m,n}(\mathbf{a})}.$$

(ii) *Если* $\tilde{1}$ — *росток функции* 1 *в окрестности* $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$, *то* $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{1}) = 1$.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Достаточно доказать (i) для $m = n - 1$. Пусть $\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, U — некоторая открытая окрестность $\operatorname{Sp}\mathbf{a}'$ в $\mathbf{C}^{n-1}$ и $f' \in \mathcal{O}(U; A)$. Пусть f — отображение вида

$$f' \otimes 1\colon (\mathbf{z}', z_n) \longmapsto f'(\mathbf{z}')$$

из $U \times \mathbf{C}$ в A; ясно, что $f \in \mathcal{O}(U \times \mathbf{C}; A)$. Существует бесконечно дифференцируемое отображение h' (соответственно h'') из $\mathbf{C}^{n-1}$ в $\mathbf{C}$ (соответственно из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$), равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}'$ (соответственно $\operatorname{Sp}a_n$), с компактным носителем, содержащимся в U (соответственно в $\mathbf{C}$). Далее, существуют бесконечно дифференцируемые отображения $u_1, \ldots, u_{n-1}$ из $\mathbf{C}^{n-1}$ в A, такие, что

$$(z_1 - a_1)\,u_1(\mathbf{z}') + \ldots + (z_{n-1} - a_{n-1})\,u_{n-1}(\mathbf{z}') = 1 - h'(\mathbf{z}')$$

для всех $\mathbf{z}' \in \mathbf{C}^{n-1}$, и бесконечно дифференцируемое отображение u_n из $\mathbf{C}$ в A, такое, что $(z_n - a_n)\,u_n(z_n) = 1 - h''(z_n)$ для всех $z_n \in \mathbf{C}$. Тогда функция $h = h' \otimes h''$ на $\mathbf{C}^n$ бесконечно дифференцируема, равна 1 в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ и имеет компактный носитель, содержащийся в $U \times \mathbf{C}$.

Для любого $\mathbf{z} = (\mathbf{z}', z_n) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$ имеем

$$(z_1 - a_1)(u_1 \otimes 1)(\mathbf{z}) + \ldots + (z_{n-1} - a_{n-1})(u_{n-1} \otimes 1)(\mathbf{z}) +$$
$$+ (z_n - a_n)(h' \otimes u_n)(\mathbf{z}) = 1 - h'(\mathbf{z}') + h'(\mathbf{z}')(1 - h''(z_n)) = 1 - h(\mathbf{z}).$$

С другой стороны, выражение $du_1\,dz_1 \ldots du_{n-1}\,dz_{n-1}\,dh'$ является дифференциальной формой степени $2(n-1)+1$ на $\mathbf{C}^{n-1}$ и, следовательно, равно нулю; поэтому

$$d(u_1 \otimes 1)\,dz_1 d(u_2 \otimes 1)\,dz_2 \ldots d(u_{n-1} \otimes 1)\,dz_{n-1} d(h' \otimes u_n)\,dz_n =$$
$$= (h' \otimes 1)\,d(u_1 \otimes 1)\,dz_1 \ldots d(u_{n-1} \otimes 1)\,dz_{n-1} d(1 \otimes u_n)\,dz_n.$$

Из определения $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f})$ следует, что

$$\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = n!\,(2i\pi)^{-n} \int\limits_{U \times \mathbf{C}} (f' \otimes 1)(h' \otimes 1)\,d(u_1 \otimes 1)\,dz_1 \ldots$$
$$\ldots d(u_{n-1} \otimes 1)\,dz_{n-1} d(1 \otimes u_n)\,dz_n =$$
$$= n!\,(2i\pi)^{-n} \left(\int\limits_{U} f'h'\,du_1\,dz_1 \ldots du_{n-1}\,dz_{n-1} \right) \left(\int\limits_{\mathbf{C}} du_n\,dz_n \right).$$

Из леммы 7 следует, что $\int\limits_C du_n dz_n = 2i\pi \cdot 1$. В силу леммы 3 (ii i)

$$n \int\limits_U f'h'\, du_1\, dz_1 \ldots du_{n-1}\, dz_{n-1} = \int\limits_U f'\, du_1\, dz_1 \ldots du_{n-1}\, dz_{n-1} = \frac{(2i\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \Theta_{a'}(\tilde{f}'),$$

следовательно,

$$\Theta_a(\tilde{f}) = n!\,(2i\pi)^{-n} \frac{(2i\pi)^{n-1}}{n!} \Theta_{a'}(\tilde{f}')\, 2i\pi = \Theta_{a'}(\tilde{f}').$$

Таким образом, (i) доказано, а (ii) следует из (i) и леммы 7.

Лемма 9. *Пусть* $\mathbf{a} \in A^n$. *Если* f — *многочлен на* $\mathbf{C}^n$ *с коэффициентами в* A, *то* $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = f(\mathbf{a})$.

Это следует из лемм 6 и 8 (ii).

Лемма 9 (а также следствие предложения 1) оправдывает следующее обозначение. Если $\mathbf{a} \in A^n$, U — открытая окрестность $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ и $f \in \mathcal{O}(U; A)$, то положим

(5) $$f(\mathbf{a}) = \Theta_{\mathbf{a}}^U(f).$$

(Это обозначение согласовано с обозначением, введенным в *Алг.*, гл. IV, если f — многочлен.) Если $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}; A)$, то положим также

(6) $$\tilde{f}(\mathbf{a}) = \Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}).$$

Предложение 1. *Пусть* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — *положительные числа,* Π — *полицилиндр в* $\mathbf{C}^n$, *определенный неравенствами* $|z_1| < \rho_1, \ldots, |z_n| < \rho_n$. *Пусть* $u = \sum c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$ — *степенной ряд с коэффициентами из* A, *сходящийся в* Π; *пусть* f — *голоморфная функция, являющаяся суммой этого ряда в* Π. *Пусть, далее, элемент* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ *таков, что* $\rho(a_1) < \rho_1, \ldots, \rho(a_n) < \rho_n$. *Тогда ряд, составленный из элементов* $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \in A$, *сходится абсолютно,* $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}) \subset \Pi$ *и*

$$f(\mathbf{a}) = \sum c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Для каждого характера χ алгебры A справедливо неравенство $|\chi(a_i)| \leqslant \rho(a_i) < \rho_i$; следовательно, $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}) \subset \Pi$. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — ограничения на Π координатных функций в $\mathbf{C}^n$. Тогда ряд из $\left(c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}\right)$ сходится в $\mathcal{O}(\Pi; A)$ к функции f. Принимая во внимание лемму 9 и непрерывность отображения $f \mapsto f(\mathbf{a})$, мы приходим к выводу, что семейство $\left(c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}\right)$ суммируемо в A и его сумма равна $f(\mathbf{a})$. Наконец, пусть λ_i таковы, что $\rho(a_i) < \lambda_i < \rho_i$. Существует постоянная $k_i \geqslant 0$, такая, что $\|a_i^n\| \leqslant k_i \lambda_i^n$ для всех n, и так как $\sum \|c_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\| \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n} < +\infty$, то семейство $\left(c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}\right)$ абсолютно суммируемо.

Следствие. *Предположим, что* $A = \mathbf{C}$. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, *так что* $\operatorname{Sp} \mathbf{a} = \{\mathbf{a}\}$. *Пусть* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\{\mathbf{a}\})$. *Тогда* $\tilde{f}(\mathbf{a})$ *в смысле равенства* (6) *совпадает со значением* $\tilde{f}$ *в* $\mathbf{a}$.

Предложение 2. *Пусть B — коммутативная банахова алгебра с единицей и λ — непрерывный морфизм алгебр с единицей из A в B. Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $b_i = \lambda(a_i)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ (*так что* $\operatorname{Sp} \mathbf{b} \subset \operatorname{Sp} \mathbf{a}$). *Пусть, далее, U — открытая окрестность* $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$ *и* $f \in \mathcal{O}(U; A)$; *имеем* $\lambda \circ f \in \mathcal{O}(U; B)$. *Тогда* $\lambda(f(\mathbf{a})) = (\lambda \circ f)(\mathbf{b})$.

Пусть $h, u_1, \dots, u_n$ обладают по отношению к $\mathbf{a}$ свойствами, указанными в леммах 2 и 3. Для всех $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n} (z_j - b_j) \lambda(u_j(\mathbf{z})) = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j) u_j(\mathbf{z})\right) = 1 - h(\mathbf{z}).$$

Следовательно,

$$(\lambda \circ f)(\mathbf{b}) = n!\,(2i\pi)^{-n} \int_U \lambda(f(\mathbf{z}))\, d(\lambda \circ u_1)\, dz_1 \dots d(\lambda \circ u_n)\, dz_n =$$

$$= n!\,(2i\pi)^{-n} \lambda\left(\int_U f(\mathbf{z})\, du_1\, dz_1 \dots du_n\, dz_n\right) = \lambda(f(\mathbf{a})).$$

Следствие 1. *Пусть* $\chi \in \mathrm{X}(A)$ *и* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$. *Тогда*

$$\chi(\tilde{f}(\mathbf{a})) = \tilde{f}(\chi(a_1), \dots, \chi(a_n)).$$

Это вытекает из предложения 2 и следствия предложения 1.

Замечание. Пусть $\mathbf{a} \in A^n$. Если A — алгебра без радикала, то отображение $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$ в A является *единственным* отображением φ из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$ в A, таким, что $\chi(\varphi(f)) = \tilde{f}(\chi(a_1), \dots, \chi(a_n))$ для всех $\chi \in \mathrm{X}(A)$.

Следствие 2. *Если* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$, *то* $\operatorname{Sp}(\tilde{f}(\mathbf{a})) = \tilde{f}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$.

Это вытекает из следствия 1 и определения совместного спектра.

Пример. Пусть $a(t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ — сумма абсолютно сходящегося ряда Фурье (§ 2, n° 2). Пусть S — множество значений a. Пусть f — голоморфная (комплексная) функция в окрестности множества S. Тогда $f \circ a$ есть сумма абсолютно сходящегося ряда Фурье. Действительно, S является спектром элемента a в алгебре A абсолютно сходящихся рядов Фурье (§ 3, n° 3, пример 4), и поэтому достаточно применить следствие 1 в случае, когда $n = 1$. Этот результат обобщает утверждение, содержащееся в следствии предложения 3, § 3.

5. Два результата о плотности

Предложение 3. *Пусть K — полиномиально выпуклый* (приложение) *компакт в $\mathbf{C}^n$ и P — множество ростков многочленов на $\mathbf{C}^n$ с коэффициентами из A в окрестности K. Тогда P плотно в $\mathcal{O}(K; A)$.*

Пусть U — открытая окрестность компакта K и $f \in \mathcal{O}(U; A)$. Существует (приложение, лемма 2) компактная окрестность $V \supset K$, которая полиномиально выпукла и содержится в U. Пусть P' (соответственно P'_0) — множество сужений на V многочленов на $\mathbf{C}^n$ с коэффициентами в A (соответственно в $\mathbf{C}$). Пусть B (соответственно B_0) — банахова алгебра, полученная в результате замыкания множества P' (соответственно P'_0) в $\mathscr{C}(V; A)$. Для доказательства утверждения достаточно проверить, что $f \mid V \in B$. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — сужения на V координатных функций в $\mathbf{C}^n$; они принадлежат B_0 и $\mathrm{Sp}_{B_0}(z_1, \ldots, z_n) = V$ в силу следствия 3 предложения 9 § 3. Так как A можно отождествить с нормированной подалгеброй в P' и, стало быть, в B, то f определяет некоторый элемент f_B в $\mathcal{O}(U; B)$; поскольку $\mathrm{Sp}_B(z_1, \ldots, z_n) \subset \subset \mathrm{Sp}_{B_0}(z_1, \ldots, z_n) \subset U$, можно образовать элемент $b = f_B(z_1, \ldots, z_n)$ в B. Пусть $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in V$ и λ — морфизм $g \mapsto g(\zeta)$ из B в A. Тогда $\lambda \circ f_B = f$. Из предложения 2 следует, что $b(\zeta) = f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Значит, $f \mid V = b \in B$.

Для $n = 1$ имеет место также следующее

Предложение 4. *Пусть K — компакт в $\mathbf{C}$ и Q — множество ростков голоморфных рациональных функций в окрестности компакта K. Тогда Q плотно в $\mathcal{O}(K)$.*

Пусть f—голоморфная функция в открытой окрестности U компакта K. Существует компактная окрестность $V \supset K$, содержащаяся в U. Пусть Q' — множество сужений на V рациональных функций на $\mathbf{C}$, непрерывных на V, а C — замыкание Q' в $\mathscr{C}(V)$. Пусть, далее, z — тождественное отображение окрестности V. Тогда C — замкнутая наполненная подалгебра в $\mathscr{C}(V)$, порожденная z. Имеет место равенство $\mathrm{Sp}_C z = \mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(V)} z = V$. Поэтому можно образовать элемент $f(z)$ в C. Согласно следствию 1 предложения 2, этот элемент в C совпадает с $f|V$. Значит, $f|V$ является равномерным пределом элементов из Q', и доказательство завершено.

6. Доказательство теоремы 1

По-прежнему алгебра A предполагается коммутативной.

Лемма 10. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ *и* $U \subset \mathbf{C}^n$ — *открытая окрестность* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. *Тогда в A существуют элементы* $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$, *такие, что проекция на* $\mathbf{C}^n$ *полиномиально выпуклой оболочки* $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$ *(которая представляет собой часть в* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$*) есть некоторая часть* U.

Пусть $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство элементов из A, содержащее семейство $(a_1, \ldots, a_n)$ и топологически порождающее A. Пусть π — каноническая проекция $\mathbf{C}^\Lambda$ на $\mathbf{C}^n$, и пусть $U' = \pi^{-1}(U)$. Тогда U' — окрестность $\mathrm{Sp}((a_\lambda))$ и $\mathrm{Sp}((a_\lambda))$ — полиномиально выпуклое множество (§ 3, предложение 9). В силу леммы 1 приложения существует конечное подмножество Λ_0 в Λ, содержащее $\{1, \ldots, n\}$ и такое, что $\mathrm{pr}_{\Lambda_0}(U')$ содержит полиномиально выпуклую оболочку S множества $\mathrm{pr}_{\Lambda_0}(\mathrm{Sp}((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})) = \mathrm{Sp}((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0})$. Следовательно, проекция S на $\mathbf{C}^n$ есть часть U.

Утверждение теоремы 1, касающееся существования, будет установлено, когда мы докажем следующее

Предложение 5. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. *Отображение* $f \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ *из* $\mathscr{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}; A)$ *в A является непрерывным морфизмом алгебр с единицей, который преобразует ростки координатных функций на* $\mathbf{C}^n$ *в окрестности* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ *в* $a_1, \ldots, a_n$.

С учетом леммы 9 достаточно доказать, что если U — открытая окрестность $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ и $f \in \mathscr{O}(U; A)$, $g \in \mathscr{O}(U; A)$, то

$$(fg)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})\, g(\mathbf{a}). \tag{7}$$

Пусть $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$ выбраны в соответствии с леммой 10. Пусть π — каноническая проекция $U \times \mathbf{C}^p$ на U. Тогда функции $f \circ \pi$, $g \circ \pi$, $(fg) \circ \pi$ голоморфны в области $U \times \mathbf{C}^p$, содержащей полиномиально выпуклую оболочку K совместного спектра $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$.

В силу предложения 3, существуют последовательности $(P_1, P_2, \ldots)$, $(Q_1, Q_2, \ldots)$ многочленов на $\mathbf{C}^{n+p}$ с коэффициентами из A, такие, что ростки многочленов $P_1, P_2, \ldots$ (соответственно $Q_1, Q_2, \ldots$) в окрестности компакта K стремятся к ростку функции $f \circ \pi$ (соответственно $g \circ \pi$) в окрестности K. Поэтому ростки $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots$ в окрестности K стремятся к ростку функции $(fg) \circ \pi$ в окрестности K. Из леммы 9 следует, что

$$(P_iQ_i)(a_1, \ldots, a_{n+p}) = P_i(a_1, \ldots, a_{n+p})\, Q_i(a_1, \ldots, a_{n+p}),$$

откуда в пределе получаем

$$(fg \circ \pi)(a_1, \ldots, a_{n+p}) = (f \circ \pi)(a_1, \ldots, a_{n+p})\,(g \circ \pi)(a_1, \ldots, a_{n+p}).$$

В силу леммы 8 (i) отсюда получается равенство (7).

Окончание доказательства теоремы 1.

Пусть $(\Theta_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A(\infty)}$, $(\Theta'_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A(\infty)}$ — два семейства морфизмов со свойствами, указанными в формулировке теоремы 1. Нам надлежит доказать, что они совпадают. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и U — открытая окрестность $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$. Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$. Мы знаем, что в A существуют элементы $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$, такие, что $\pi(L) \subset U$, где π — каноническая проекция $\mathbf{C}^{n+p}$ на $\mathbf{C}^n$, а L — полиномиально выпуклая оболочка спектра $\operatorname{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$. Положим $g = f \circ \pi$; пусть $\tilde{f}$ (соответственно $\tilde{g}$) — росток функции f (соответственно g) в окрестности $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$ (соответственно $\operatorname{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$); по предположению

$$\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta_{(a_1, \ldots, a_{n+p})}(\tilde{g}), \qquad \Theta'_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta'_{(a_1, \ldots, a_{n+p})}(\tilde{g}).$$

Но так как $\Theta_{(a_1, \ldots, a_{n+p})}$ и $\Theta'_{(a_1, \ldots, a_{n+p})}$ совпадают на множестве ростков многочленов $n+p$ переменных в окрестности $\operatorname{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$, то они совпадают и в точке $\tilde{g}$, поскольку росток g в окрестности множества L является пределом ростков многочленов (предл. 3).

Заметим, что предложение 3 немедленно приводит также и к следующей теореме единственности.

Предложение 6. *Пусть* $\mathbf{a} \in A^n$. *Предположим, что* $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$ *является полиномиально выпуклым. Пусть* $z_1, \ldots, z_n$ — *ростки координатных функций на* $\mathbf{C}^n$ *в окрестности* $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$. *Тогда отображение* $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ *является единственным непрерывным морфизмом* φ *алгебр с единицей из* $\mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$ *в* A, *таким, что* $\varphi(z_1) = a_1, \ldots, \varphi(z_n) = a_n$.

7. Суперпозиция в функциональном исчислении

Теорема 2. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ и $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p$ — элементы из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{a})$; пусть, далее, $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p)$. Положим $b_i = \tilde{f}_i(a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_p)$. Тогда $\operatorname{Sp}\mathbf{b}$ является образом $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ при отображении*

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\tilde{f}_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \tilde{f}_p(z_1, \ldots, z_n)).$$

Пусть $\tilde{g} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{b}; A)$. Росток суперпозиции $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{\mathbf{f}}$ является элементом множества $\mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{a}; A)$. Тогда

$$\tilde{g}(\mathbf{b}) = \tilde{h}(\mathbf{a}).$$

1) Пусть K — полиномиально выпуклая оболочка спектра $\operatorname{Sp}\mathbf{b}$. Согласно предложению 5, отображение $\tilde{g} \longmapsto (\tilde{g} \circ \tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{a})$ является непрерывным морфизмом алгебр с единицей из $\mathcal{O}(K; A)$ в A, который преобразует q-ю координатную функцию в $\tilde{f}_q(a_1, \ldots, a_n) = b_q$. Равенство $\tilde{g}(\mathbf{b}) = (\tilde{g} \circ \tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{a})$ выполняется, следовательно, в случае, когда g — многочлен, и, значит, в силу предложения 3, для всех $\tilde{g} \in \mathcal{O}(K; A)$.

2) Пусть теперь g — голоморфная функция в открытой окрестности $\Omega \supset \operatorname{Sp}\mathbf{b}$. Существуют элементы $b_{p+1}, \ldots, b_{p+q} \in A$, обладающие следующими свойствами: если L — полиномиально выпуклая оболочка спектра

$$\operatorname{Sp}(b_1, \ldots, b_{p+q}) \subset \mathbf{C}^{p+q}$$

и π — каноническая проекция $\mathbf{C}^{p+q}$ на $\mathbf{C}^p$, то $\pi(L) \subset \Omega$ (лемма 10). Пусть $f_1, \ldots, f_p$ — голоморфные функции в открытой окрестности $U \supset \operatorname{Sp}\mathbf{a}$, такие, что $(f_1, \ldots, f_p)(U) \subset \Omega$. Тогда функция $g \circ \pi$ голоморфна в области $\pi^{-1}(\Omega)$, которая является окрестностью L. Пусть π' — каноническая проекция $\mathbf{C}^{n+q}$ на $\mathbf{C}^n$. Обозначая q последних координатных функций на $\mathbf{C}^{n+q}$ через $z_{n+1}, \ldots, z_{n+q}$, имеем

$$(g \circ \pi) \circ (f_1 \circ \pi', \ldots, f_p \circ \pi', z_{n+1}, \ldots, z_{n+q}) = \\ = g \circ (f_1 \circ \pi', \ldots, f_p \circ \pi') = h \circ \pi'.$$

Эта формула и первая часть доказательства приводят к следующему равенству:

$$(g \circ \pi)((f_1 \circ \pi')(c), \ldots, z_{n+1}(c), \ldots) = (h \circ \pi')(c),$$

где $c=(a_1, \ldots, a_n, b_{p+1}, \ldots, b_{p+q})$, или, если принять во внимание лемму 8, к равенству

$$g(f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_p(a_1, \ldots, a_n))=h(a_1, \ldots, a_n).$$

Теорема доказана.

8. *Случай одной переменной*

Теорема 3. *Пусть A — банахова алгебра с единицей (не обязательно коммутативная), x — элемент A, z — росток тождественной функции в окрестности $\operatorname{Sp} x$. Тогда существует и притом единственный непрерывный морфизм φ алгебр с единицей из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp}_A x)$ в A, такой, что $\varphi(z)=x$.*

Пусть B — замкнутая наполненная подалгебра в A, порожденная элементом x. Она, очевидно, коммутативна и $\operatorname{Sp}_B x= =\operatorname{Sp}_A x$ (§ 1, n° 4). Если $f \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp}_A x)$, то можно образовать элемент $f(x)$ в B, а тогда отображение $f \mapsto f(x)$ окажется непрерывным морфизмом φ алгебр с единицей из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp}_A x)$ в B (следовательно, в A), таким, что $\varphi(z)=x$.

Пусть φ, φ' — два непрерывных морфизма алгебр с единицей из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp}_A x)$ в A, таких, что $\varphi(z)=\varphi'(z)=x$. Тогда φ и φ' совпадают на множестве ростков многочленов в окрестности $\operatorname{Sp}_A x$ и, следовательно, на множестве ростков голоморфных рациональных функций в окрестности $\operatorname{Sp}_A x$. Но эти ростки образуют всюду плотное множество в $\mathcal{O}(\operatorname{Sp}_A x)$ и, значит, $\varphi=\varphi'$.

Определение 1. *Если $f \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp}_A x)$, то элемент $\varphi(f)$, указанный в теореме 3, обозначается через $f(x)$.*

Замечание. Если алгебра A коммутативна, то это определение совпадает, в силу теоремы 1, с определением n° 4. В общем случае, как видно из доказательства теоремы 3, $f(x)$ принадлежит замкнутой наполненной подалгебре B в A, порожденной элементом x, которая коммутативна; элемент $f(x)$ в A (в смысле определения 1) совпадает с элементом $f(x)$ в B (в смысле n° 4).

Предложение 7. *Пусть A и A' — банаховы алгебры с единицей, λ — непрерывный морфизм алгебр с единицей из A в A'. Пусть $x \in A$ и $f \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp}_A x)$. Тогда $\lambda(f(x))=f(\lambda(x))$.*

Это вытекает из предложения 2 и приведенного выше замечания.

Предложение 8. *Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$, $f \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} x)$ и $y=f(x)$. Образом $\operatorname{Sp} x$ при отображе-*

нии f *является* $\operatorname{Sp} y$. *Пусть* $g \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} y)$, *так что* $h = g \circ f \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} x)$. *Тогда* $g(y) = h(x)$.

Это также вытекает из теоремы 2 и приведенного выше замечания.

Предложение 9. *Пусть* A — *банахова алгебра с единицей,* $x \in A$, U — *открытая окрестность* $\operatorname{Sp} x$ *и* $f \in \mathcal{O}(U)$. *Пусть* V — *открытая относительно компактная окрестность* $\operatorname{Sp} x$, *такая, что* $\overline{V} \subset U$. *Предположим, далее, что граница* V *является подмногообразием размерности* 1 *в* $\mathbf{R}^2$, *совпадающим с границей* $\overline{V}$. *Пусть, наконец,* $\dot{V}$ — *ориентированный край* V (n° 4). *Тогда для* $n = 0, 1, \ldots$ *имеет место равенство*

$$\frac{d^n f}{dz^n}(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-n-1} dz. \tag{8}$$

Для $n = 0$ это равенство вытекает из леммы 7 и приведенного выше замечания. Допустим теперь, что предложение справедливо для некоторого целого n. Если $z \notin \operatorname{Sp} x$, то, согласно теореме 1 (iii), § 2, имеем

$$\frac{d}{dz}\left((z-x)^{-n-1} f(z)\right) = (z-x)^{-n-1} \frac{df}{dz} - (n+1)(z-x)^{-n-2} f(z). \tag{9}$$

Применяя формулу Стокса к компактному многообразию $\dot{V}$, получим

$$\int_{\dot{V}} \frac{d}{dz}\left((z-x)^{-n-1} f(z)\right) dz = \int_{\dot{V}} d\left((z-x)^{-n-1} f(z)\right) = 0. \tag{10}$$

Равенства (9) и (10) влекут за собой равенство

$$\int_{\dot{V}} f'(z)(z-x)^{-n-1} dz = (n+1) \int_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-n-2} dz,$$

откуда, по предположению индукции (примененному к df/dz), следует, что

$$\frac{2i\pi}{n!} \frac{d^{n+1} f}{dz^{n+1}}(x) = (n+1) \int_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-n-2} dz,$$

и предложение доказано для $n+1$.

Предложение 10. *Пусть* A — *банахова алгебра с единицей,* U — *открытая часть в* $\mathbf{C}$.

(i) *Множество* Ω *элементов* $x \in A$, *таких, что* $\operatorname{Sp} x \subset U$, *открыто в* A.

(ii) *Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$. Отображение $x \mapsto f(x)$ из Ω в A является аналитическим* (*Var.*, R.) *и, в частности, непрерывным.*

Пусть $x \in \Omega$. Существует окрестность $V \supset \operatorname{Sp} x$ в $\mathbf{C}$, такая, что $\overline{V} \subset U$ и граница V является бесконечно дифференцируемым подмногообразием размерности 1 в $\mathbf{C}$, совпадающим с границей $\overline{V}$. Пусть l — длина $\dot{V}$, m — верхняя грань $|f(\lambda)|$ на $\dot{V}$ и M — верхняя грань $\|(\lambda - x)^{-1}\|$ на $\mathbf{C} - V$. Если $z \in A$ и $\|z\| \cdot M \leqslant 1/2$ и если $\lambda \in \mathbf{C} - V$, то

$$\lambda - x - z = \left(1 - z(\lambda - x)^{-1}\right)(\lambda - x)$$

и $\|z(\lambda - x)^{-1}\| \leqslant 1/2$; следовательно, элемент $\lambda - x - z$ обратим и

$$(\lambda - x - z)^{-1} = (\lambda - x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(z(\lambda - x)^{-1}\right)^n,$$

причем $\|\left(z(\lambda - x)^{-1}\right)^n\| \leqslant 2^{-n}$. Тем самым доказано, что множество Ω открыто и, кроме того, что

$$2i\pi f(x + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\dot{V}} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1}\left(z(\lambda - x)^{-1}\right)^n d\lambda.$$

Но выражение $\int_{\dot{V}} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1}\left(z(\lambda - x)^{-1}\right)^n d\lambda$ является однородным многочленом степени n по z (следовательно, аналитически зависит от z), с нормой, не превосходящей $mlM \cdot 2^{-n}$. Это доказывает аналитичность в Ω отображения $y \mapsto f(y)$.

Предложение 11. *Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$, U — открытая окрестность $\operatorname{Sp} x$, $f \in \mathcal{O}(U)$, δ — расстояние между $\operatorname{Sp} x$ и $\mathbf{C} - U$.*

(i) *Для каждого δ', такого, что $0 < \delta' < \delta$, существует постоянная $k \geqslant 0$, такая, что $\|f^{(n)}(x)\| \leqslant k\delta'^{-n} n!$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

(ii) *Если элемент $y \in A$ перестановочен с x и если $\rho(y) < \delta$, то $\operatorname{Sp}(x + y) \subset U$ и*

$$f(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

причем ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Заменяя алгебру A ее замкнутой наполненной подалгеброй, порожденной элементами x и y (при этом не меняются

$\mathrm{Sp}\,x$ и $\mathrm{Sp}(x+y)$), мы сведем задачу к случаю, когда A — коммутативная алгебра.

Пусть $\delta' \in]0, \delta[$, $\varepsilon = \delta - \delta' > 0$ и K — компактная окрестность $\mathrm{Sp}\,x$, состоящая из таких точек в $\mathbf{C}$, расстояние которых до $\mathrm{Sp}\,x$ не превосходит $\varepsilon/2$. Так как функция f голоморфна во всяком открытом круге радиуса $\delta' + \varepsilon/2$ с центром, принадлежащим K, то, в силу неравенства Коши, существует постоянная $l \geqslant 0$, такая, что

$$\sup_{z \in K} \frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leqslant l\delta'^{-n}$$

для $n = 0, 1, \ldots$. Поэтому (i) вытекает из леммы 7.

Если $\rho(y) < \delta$, то можно выбрать δ', такое, что $\rho(y) < \delta' < \delta$. Пусть V — множество точек $\mathbf{C}$, расстояние которых от $\mathrm{Sp}\,x$ не превосходит $\delta - \delta'$, и V' — открытый шар с центром в 0 радиуса δ' в $\mathbf{C}$. Пусть g — отображение $(z, z') \mapsto z + z'$ из $V \times V'$ в U. Тогда $h = f \circ g$ является отображением $(z, z') \mapsto f(z + z')$ из $V \times V'$ в $\mathbf{C}$. Так как $\mathrm{Sp}(x, y) \subset V \times V'$, то $\mathrm{Sp}(x+y) \subset U$. В силу теоремы 2, имеем $h(x, y) = f(x+y)$. Но функция h в $\mathcal{O}(V \times V')$ является суммой ряда

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} z'^n.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} y^n$$

сходится, и его сумма равна $h(x, y) = f(x+y)$. Кроме того, согласно (i), этот ряд сходится абсолютно.

9. Экспонента и логарифм

Пусть A — банахова алгебра с единицей, и пусть $x \in A$. Рассмотрим функцию $f(z) = \exp z$; из предложения 1 следует, что

$$\text{(11)} \qquad \exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Так как $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$, то

$$\|\exp x\| \leqslant \exp\|x\|,$$

и ряд (11) сходится равномерно в каждом шаре в A. Поэтому отображение $x \mapsto \exp x$ из A в A является непрерывным (см. также предложение 10). Если элемент $y \in A$ коммутирует с x, то, как следует из предложения 11,

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \exp x,$$

откуда

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y. \tag{12}$$

В частности, элемент $\exp x$ обратим и

$$(\exp x)^{-1} = \exp(-x). \tag{13}$$

Пусть Δ — множество всех $z \in \mathbf{C}$, таких, что $-\pi < \mathcal{I} z < \pi$. Пусть Δ' — множество всех $z \in \mathbf{C}$, не принадлежащих отрицательному лучу (включая точку 0) вещественной оси. Тогда отображение $\exp | \Delta$ является биекцией из Δ на Δ' (*Функ. действ. пер.*, гл. III, § 1, n° 7); обратная биекция будет обозначаться log. Если $x \in A$ и $\mathrm{Sp}\, x \subset \Delta'$, то можно образовать элемент $\log x$ в A; имеем $\mathrm{Sp}(\log x) \subset \Delta$ и в силу предложения 8

$$\exp(\log x) = x. \tag{14}$$

С другой стороны, если $y \in A$ и $\mathrm{Sp}\, y \subset \Delta$, то $\mathrm{Sp}(\exp y) \subset \Delta'$ и в силу предложения 8

$$\log(\exp y) = y. \tag{15}$$

В частности, если $u \in A$ и $\rho(u) < 1$, то $\mathrm{Sp}(1-u) \subset \Delta'$ и можно образовать $\log(1-u)$. Так как

$$\log(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

для $|z| < 1$, то, как следует из предложения 1 и теоремы 2,

$$\log(1-u) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n}. \tag{16}$$

Пусть G — группа обратимых элементов алгебры A. Если алгебра A *коммутативна*, то, как показывают формулы (12) и (13), $\exp(A)$ является подгруппой в G. Эта подгруппа содержит, в силу (14), открытый шар с центром в 1 радиуса 1 и, следовательно, является открытой (и, стало быть, замкнутой) подгруппой группы G. Кроме того, $\exp(A)$ является связной подгруппой, как непрерывный образ алгебры A, которая связна. Следовательно, $\exp(A)$ есть связная компонента единицы группы G.

10. Разбиения пространства характеров

Предложение 12. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Предположим, что пространство $\mathrm{X}(A)$ допускает разбиение на два открытых множества U_1 и U_2. Тогда существует и притом единственный идемпотент j в A, такой, что $\mathcal{G}j$ равно 1 на U_1 и 0 на U_2.*

Пространство $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с некоторой частью в $\mathbf{C}^A$ при отображении $\chi \mapsto (\chi(a))_{a \in A}$. Части U_1 и U_2 равномерного пространства $\mathbf{C}^A$ являются непересекающимися компактами; следовательно, существуют конечная часть $M \subset A$ и непересекающиеся открытые подмножества V_1, V_2 в $\mathbf{C}^M$, такие, что

$$p(U_1) \subset V_1, \quad p(U_2) \subset V_2;$$

через p обозначается каноническая проекция из $\mathbf{C}^A$ на $\mathbf{C}^M$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — различные элементы в M и $\mathbf{C}^M$ отождествлено с $\mathbf{C}^n$. Пусть функция f равна 1 на V_1 и 0 на V_2. Ясно, что $f \in \mathcal{O}(V_1 \cup V_2)$ и $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_n) \subset V_1 \cup V_2$. Поэтому можно образовать элемент $j = f(a_1, \ldots, a_n)$. Так как $f^2 = f$, то $j^2 = j$. В силу следствия 1 предложения 2, $\chi(j) = 1$, если $\chi \in U_1$, и $\chi(j) = 0$, если $\chi \in U_2$. С другой стороны, пусть r — некоторый элемент радикала алгебры A, такой, что $j + r$ — идемпотент. Равенство $(j + r)^2 = j + r$ приводится к виду $r(1 - 2j - r) = 0$. Но так как функция

$$\mathcal{G}(1 - 2j - r) = 1 - 2\mathcal{G}j$$

нигде не обращается в нуль, то элемент $1 - 2j - r$ обратим. Следовательно, $r = 0$ и единственность j доказана.

Замечание. Сохраняя обозначения предложения 12 положим

$$\mathfrak{J}_1 = jA, \quad \mathfrak{J}_2 = (1 - j)A.$$

Тогда $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ — идеалы в A и $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = A$. С другой стороны, $\mathfrak{J}_1$ (соответственно $\mathfrak{J}_2$) — множество всех $x \in A$, таких, что $jx = x$ (соответственно $(1 - j)x = x$); следовательно, $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2 = \{0\}$ и $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$—замкнутые идеалы. Алгебра A отождествляется с прямой суммой алгебр $A/\mathfrak{J}_1$ и $A/\mathfrak{J}_2$. Если отождествить $\mathrm{X}(A/\mathfrak{J}_1)$ и $\mathrm{X}(A/\mathfrak{J}_2)$ с частями пространства $\mathrm{X}(A)$ (§ 1, n° 5), то окажется, что $\mathrm{X}(A/\mathfrak{J}_1) = U_2$ и $\mathrm{X}(A/\mathfrak{J}_2) = U_1$.

Следствие. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathrm{X}(A)$ *связно*;

(ii) 1 *и* 0 — *единственные идемпотенты в* A;

(iii) *A не изоморфна прямой сумме никаких двух ненулевых банаховых алгебр.*

Предложение 13. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра без радикала. Для того чтобы A содержала единицу, необходимо и достаточно, чтобы $X(A)$ было компактным.*

Необходимость вытекает из следствия теоремы 1 § 3. Предположим, что $X(A)$ компактно. Пусть $\tilde{A}$ — банахова алгебра, полученная из A присоединением единицы; отождествим $X'(A)$ и $X(\tilde{A})$. Тогда дополнением к $X(A)$ в $X(\tilde{A})$ является единственный характер χ_0 алгебры $\tilde{A}$, обращающийся в нуль на A. В силу предложения 12, существует элемент $j \in \tilde{A}$, такой, что $\chi(j) = 1$ для всех $\chi \in X(A)$ и $\chi_0(j) = 0$. Следовательно, $j \in A$ и $\chi(jx) = \chi(x)$ для всех $x \in A$ и всех $\chi \in X(A)$ и, значит, $jx = x$, поскольку A — алгебра без радикала. Таким образом, j — единица алгебры A.

Предложение 14. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}_1$ — идеал в A, F_1 — множество всех $\chi \in X(A)$, обращающихся в нуль на $\mathfrak{J}_1$, F_2 — замкнутое в топологии Джекобсона и компактное в слабой топологии подмножество в $X(A)$, не пересекающееся с F_1. Тогда существует элемент $u \in \mathfrak{J}_1$, такой, что $\mathcal{G}u = 1$ на F_2.*

Пусть $\mathfrak{J}_2$ — пересечение ядер характеров, принадлежащих F_2. Ясно, что $A/\mathfrak{J}_2$—подалгебра без радикала. Так как F_2 замкнуто в топологии Джекобсона, то множество элементов из $X(A)$, обращающихся в нуль на $\mathfrak{J}_2$, совпадает с F_2. Поэтому множество F_2, снабженное топологией, индуцированной слабой топологией в $X(A)$, совпадает с множеством $X(A/\mathfrak{J}_2)$, снабженным слабой топологией (§ 1, n° 6). Так как F_2 слабо компактно, то $A/\mathfrak{J}_2$ содержит единицу (предложение 13). Если $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \neq A$, то факторалгебра $(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2)/\mathfrak{J}_2$ содержится в ядре некоторого ненулевого характера факторалгебры $A/\mathfrak{J}_2$ (§ 3, теор. 2), а в таком случае существовал бы ненулевой характер алгебры A, аннулирующий $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$; но тогда оказалось бы, что вопреки нашему предположению $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = A$, и существует элемент $u \in \mathfrak{J}_1$, класс которого в факторалгебре $A/\mathfrak{J}_2$ является ее единичным элементом. Тогда $\chi(u) = 1$ для всех $\chi \in F_2$. Предложение доказано.

Следствие. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, F_1 и F_2—две непересекающиеся части пространства $X(A)$, замкнутые в топологии Джекобсона. Пусть F_2 слабо компактно. Тогда существует элемент $u \in A$, такой, что $\mathcal{G}u = 1$ на F_2 и $\mathcal{G}u = 0$ на F_1.*

11. Разбиения спектра элемента алгебры

Замечание 1. Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$ и $K = \operatorname{Sp} x$. Пусть $\mathfrak{E}$ — множество частей K, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми в K. Для каждой части $H \in \mathfrak{E}$ существует и притом единственный элемент $f_H \in \mathcal{O}(K)$, равный 1 в окрестности H и 0 в окрестности $K - H$. Положим $j_H = f_H(x)$. Тогда j_H является идемпотентом в A, который называют *ассоциированным с x и H*; при этом справедливы соотношения

$$j_{H \cap H'} = j_H j_{H'} = j_{H'} j_H \quad (H, H' \in \mathfrak{E}), \tag{17}$$

$$j_{H \cup H'} = j_H + j_{H'} - j_H j_{H'} \quad (H, H' \in \mathfrak{E}), \tag{18}$$

$$j_{\varnothing} = 0, \quad j_K = 1. \tag{19}$$

Ясно, что если j — идемпотент алгебры A, то jAj есть подмножество всех элементов $x \in A$, таких, что $xj = jx = x$; оно является, следовательно, банаховой подалгеброй в A с единицей j. В частности, если $H \in \mathfrak{E}$, то через A_H обозначается банахова алгебра $j_H A j_H$ с единицей j_H. Пусть B — наполненная замкнутая подалгебра в A, порожденная элементом x. Она коммутативна; если представление вида $K = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$ является разбиением K на элементы из $\mathfrak{E}$, то равенство $1 = j_{H_1} + \ldots + j_{H_n}$ является разложением единицы на сумму попарно ортогональных идемпотентов в B, и поэтому алгебра B канонически отождествляется с произведением $B_{H_1} \times \ldots \times B_{H_n}$.

Замечание 2. Для $H \in \mathfrak{E}$ положим $x_H = x j_H = j_H x \in B_H$. Имеем $x_H = g_H(x)$, где g_H — элемент из $\mathcal{O}(K)$, определенный соотношениями $g_H(z) = z$ в окрестности H и $g_H(z) = 0$ в окрестности $K - H$ (в самом деле, $g_H(z) = f_H(z) z$). Таким образом, если $H \neq K$, то

$$\operatorname{Sp}_A x_H = H \cup \{0\}. \tag{20}$$

Если $K = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$ — разбиение множества K на элементы из $\mathfrak{E}$, то

$$x = x_{H_1} + x_{H_2} + \ldots + x_{H_n}, \tag{21}$$

$$x_{H_i} x_{H_j} = 0, \quad i \neq j. \tag{22}$$

Замечание 3. Пусть по-прежнему $H \subset \mathfrak{E}$ и $\lambda \in \mathbf{C} - H$. Пусть $h_{H,\lambda}$ — элемент из $\mathcal{O}(K)$, равный $(\lambda - z)^{-1}$ в окрестности H и 0 в окрестности $K - H$. Тогда $(\lambda f_H - g_H) h_{H,\lambda} = f_H$;

следовательно, если положить $R_H(\lambda, x) = h_{H,\lambda}(x) \in B_H$, то

(23) $$R_H(\lambda, x)(\lambda j_H - x_H) = (\lambda j_H - x_H) R_H(\lambda, x) = j_H,$$

(24) $$R_H(\lambda, x) j_{K-H} = j_{K-H} R_H(\lambda, x) = 0.$$

Предположим, что для $\lambda \in H$ элемент $\lambda j_H - x_H$ имеет обратный y в алгебре A_H; тогда элемент $\lambda - x$ обратим в A и его обратный равен $y + R_{K-H}(\lambda, x)$; но это абсурдно, стало быть, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{A_H} x_H$. Отсюда и из (23) следует, что

(25) $$\mathrm{Sp}_{A_H} x_H = H$$

и, значит, имеет место соотношение

(26) $$H \neq \varnothing \Rightarrow j_H \neq 0.$$

Формула (23) показывает, что функция $\lambda \mapsto R_H(\lambda, x)$, определенная в $\mathbf{C} - H$, является резольвентой элемента x_H относительно A_H. Если

$$K = H_1 \cup \ldots \cup H_n$$

— разбиение K на элементы из $\mathfrak{E}$, то

(27) $$R(\lambda, x) = R_{H_1}(\lambda, x) + \ldots + R_{H_n}(\lambda, x).$$

В частности, если $H \in \mathfrak{E}$, то функция $\lambda \mapsto R(\lambda, x)$ в окрестности H представляется в виде суммы $R_H(\lambda, x)$ и некоторой голоморфной функции.

Предложение 15. *Пусть μ — изолированная точка в $\mathrm{Sp}_A x$. Тогда*

(i) $$R(\lambda, x) = R_{\{\mu\}}(\lambda, x) + R_{\mathrm{Sp}_A x - \{\mu\}}(\lambda, x).$$

(ii) *Функция $\lambda \mapsto R_{\mathrm{Sp}_A x - \{\mu\}}(\lambda, x)$ голоморфна в окрестности точки μ; функция $\lambda \mapsto R_{\{\mu\}}(\lambda, x)$ голоморфна в $\mathbf{C} - \{\mu\}$.*

(iii) *Величина $\|(x-\mu)^n j_{\{\mu\}}\|^{1/n}$ стремится к 0, когда $n \to \infty$, и для каждого $\lambda \in \mathbf{C} - \{\mu\}$ имеет место равенство*

(28) $$R_{\{\mu\}}(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^{-n-1} (x-\mu)^n j_{\{\mu\}}.$$

Утверждения (i) и (ii) немедленно следуют из предыдущего. Докажем (iii). Заменяя x на $x - \mu$, мы сводим это утверждение к случаю, когда $\mu = 0$. Положим $H = \{0\} \subset \mathrm{Sp}_A x$. Тогда спектром элемента x_H в A_H является $\{0\}$ и, значит, элемент x_H квазинильпотентен, т. е. $\|x^n j_H\|^{1/n} = \|(x j_H)^n\|^{1/n}$

стремится к 0. Кроме того, в A_H для каждого $\lambda \neq 0$ имеет место равенство

$$(\lambda j_H - x_H)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x_H^n$$

(§ 2, n° 5, формула (7)), из которого следует равенство (28).

Следствие. *Пусть* μ — *изолированная точка в* $\mathrm{Sp}_A x$ *и* $p > 0$ — *целое число. Для того чтобы точка* μ *была полюсом порядка* p *резольвенты элемента* x, *необходимо и достаточно, чтобы* $(x-\mu)^{p-1} j_{\{\mu\}} \neq 0$, $(x-\mu)^p j_{\{\mu\}} = 0$.

Пример. Пусть E — комплексное банахово пространство, x — его непрерывный эндоморфизм. Рассмотрим спектр $\mathrm{Sp}\, x$ элемента x относительно банаховой алгебры с единицей $A = \mathscr{L}(E)$. Пусть H — часть $\mathrm{Sp}\, x$ одновременно открытая и замкнутая в $\mathrm{Sp}\, x$. Идемпотент j_H, ассоциированный с H и являющийся проектором на замкнутое векторное подпространство E_H в E, называют *ассоциированным* с x и H. Пусть E'_H — ядро этого проектора. Тогда E представляется в виде топологической прямой суммы подпространств E_H и E'_H, которые инвариантны относительно эндоморфизма x, коммутирующего с j_H. Алгебра A_H в данном случае является алгеброй всех эндоморфизмов E, обращающихся в нуль на E'_H, относительно которых инвариантно E_H. Пусть u — некоторый непрерывный эндоморфизм E, относительно которого инвариантны E_H и E'_H; для того чтобы элемент $u|E_H$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы uj_H был обратим в A_H, и аналогичное утверждение справедливо для $u|E'_H$. Отсюда и из (25) следует, что $\mathrm{Sp}(x|E_H) = H$ и $\mathrm{Sp}(x|E'_H) = \mathrm{Sp}\, x - H$.

Если H сводится к изолированной точке μ из $\mathrm{Sp}\, x$, то спектром элемента $x|E'_{\{\mu\}}$ является $\mathrm{Sp}\, x - \{\mu\}$ и, в частности, $(x-\mu)|E'_{\{\mu\}}$ — автоморфизм $E'_{\{\mu\}}$. С другой стороны, элемент $(x-\mu)|E_{\{\mu\}}$ квазинильпотентен. Для того чтобы точка μ была полюсом порядка $p > 0$ резольвенты элемента x, необходимо и достаточно, чтобы $(x-\mu)^{p-1}|E_{\{\mu\}} \neq 0$, $(x-\mu)^p|E_{\{\mu\}} = 0$. В этом случае $E_{\{\mu\}} = \mathrm{Ker}\,(x-\mu)^p$ и $E'_{\{\mu\}} = \mathrm{Im}\,(x-\mu)^p$.

Мы можем резюмировать некоторые из приведенных здесь результатов следующим образом.

Предложение 16. *Пусть* E — *комплексное банахово пространство,* x — *его непрерывный эндоморфизм,* μ — *изолированная точка* $\mathrm{Sp}\, x$, K — *дополнение к* $\{\mu\}$ *в* $\mathrm{Sp}\, x$.

(i) *Пусть* Γ — *ориентированный край открытого круга* Δ *с центром в точке* μ, *такого, что* $K \cap (\Gamma \cup \Delta) = \varnothing$. *Тогда*

$$j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (z - x)^{-1} \, dz$$

является идемпотентом, зависящим только от x *и* μ.

(ii) *Подпространства* $E' = \operatorname{Im} j$ *и* $E'' = \operatorname{Ker} j$ *инвариантны относительно* x, $(x-\mu)|E'$ — *квазинильпотентный элемент,* $(x-\mu)|E''$ — *автоморфизм* E''.

(iii) *Для того чтобы точка* μ *была полюсом порядка* $p>0$ *резольвенты элемента* x, *необходимо и достаточно, чтобы* $(x-\mu)^{p-1}|E' \neq 0$, $(x-\mu)^p|E' = 0$.

§ 5. Регулярные коммутативные банаховы алгебры

1. Определение и простейшие свойства

Предложение 1. *Пусть* A — *коммутативная банахова алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Слабая топология и топология Джекобсона на* $X(A)$ *совпадают.*

(ii) *Для каждого характера* $\chi \in X(A)$ *и каждой слабо замкнутой части* F *в* $X(A)$, *для которой* $\chi \notin F$, *существует элемент* $x \in A$, *такой, что* $\mathcal{G}x$ *равно* 1 *в точке* χ *и* 0 *на* F.

(iii) *Для каждого компакта* K *в слабой топологии и каждой слабо замкнутой части* F *в* $X(A)$, *такой, что* $K \cap F = \varnothing$, *существует элемент* $x \in A$, *для которого* $\mathcal{G}x$ *равно* 1 *на* K *и* 0 *на* F.

Пусть $M \subset X(A)$. Замкнутость части M в топологии Джекобсона означает, что для каждого характера $\chi \in X(A) - M$ существует элемент $x \in A$, такой, что $\mathcal{G}x$ обращается в нуль на M, но отлично от нуля в точке χ. Поэтому (i)$\Leftrightarrow$(ii). Ясно, что (iii)$\Rightarrow$(ii). Наконец, (i)$\Rightarrow$(iii) в силу следствия предложения 14, § 4.

Определение 1. *Пусть* A — *коммутативная банахова алгебра. Она называется регулярной, если для нее выполняются эквивалентные условия предложения* 1.

Замечание. Пусть $\tilde{A}$ — банахова алгебра, полученная из A присоединением единицы. Как показывает условие (ii) предложения 1, регулярность алгебры $\tilde{A}$ влечет за собой регулярность A. Предположим, что A регулярна, и покажем, что тогда и $\tilde{A}$ регулярна. Пусть F и F' — пересекающиеся слабо замкнутые (следовательно, компактные в слабой топологии) части $X(\tilde{A})$; построим элемент $x \in \tilde{A}$, такой, что

$\mathcal{G}x = 0$ на F, $\mathcal{G}x = 1$ на F'. Пусть $\chi_0 \in \mathrm{X}(\tilde{A})$ — характер, обращающийся в нуль на A. Если $\chi_0 \notin F'$, то, в силу условия (iii) предложения 1, существует элемент $x \in A$, такой, что $\mathcal{G}x = 0$ на F, $\mathcal{G}x = 1$ на F'. Если $\chi_0 \notin F$, то, аналогично, существует элемент $y \in A$, такой, что $\mathcal{G}y = 0$ на F', $\mathcal{G}y = 1$ на F; поэтому мы можем положить $x = e - y \in \tilde{A}$.

Примеры. Рассмотрим примеры § 2, n° 2. В примерах 1 (алгебра непрерывных функций на локально компактном пространстве Ω, стремящихся к 0 на бесконечности) и 2 (алгебра n раз дифференцируемых функций на $[0, 1]$) A — регулярная алгебра (см. § 3, n° 3, примеры). То же самое будет доказано (гл. II, § 3, предложение 1) и для примера 4 (алгебра $L^1(\mathbf{Z})$). В примере 5 (алгебра функций, непрерывных в круге $|z| \leqslant 1$ и аналитических в открытом круге) A не является регулярной (§ 7, упр. 6).

Предложение 2. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра с единицей. Пусть $(U_1, \ldots, U_n)$ — какое-нибудь открытое покрытие пространства $\mathrm{X}(A)$. Тогда существуют элементы $x_1, \ldots, x_n \in A$, такие, что их сумма равна 1 и $\operatorname{supp}(\mathcal{G}x_i) \subset U_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ предложение очевидно. Предположим, что оно справедливо для $n - 1$.

Существует открытое покрытие $(V_1, \ldots, V_n)$ пространства $\mathrm{X}(A)$, такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$ для каждого i. Согласно предположению индукции, существует последовательность элементов $x, x_3, x_4, \ldots, x_n \in A$, таких, что $x + x_3 + \ldots + x_n = 1$, $\operatorname{supp}(\mathcal{G}x) \subset V_1 \cup V_2$, $\operatorname{supp}(\mathcal{G}x_i) \subset V_i$ для всех $i > 2$. Положим $K = \operatorname{supp}(\mathcal{G}x)$. Пусть K_1 (соответственно K_2) — множество элементов из K, не принадлежащих V_1 (соответственно V_2). Тогда K_1 и K_2 — непересекающиеся компакты в K. Стало быть, существует элемент $y \in A$, такой, что $\mathcal{G}y = 1$ на K_1, $\mathcal{G}y = 0$ на K_2. Но тогда $\mathcal{G}(xy)$ обращается в нуль на $\mathrm{X}(A) - K$ и на K_2, следовательно, $\operatorname{supp}\mathcal{G}(xy) \subset \bar{V}_2 \subset U_2$; аналогично, $\mathcal{G}(x(1-y))$ равно нулю на $\mathrm{X}(A) - K$ и на K_1, следовательно,

$$\operatorname{supp}\mathcal{G}(x(1-y)) \subset \bar{V}_1 \subset U_1.$$

Поэтому можно положить $x_1 = x(1-y)$, $x_2 = xy$, и тогда последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ будет обладать требуемыми свойствами.

Следствие 1. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра с единицей, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, $f\colon \mathrm{X}(A) \to \mathbf{C}$ — непрерывная функция. Предположим, что для каждого $\chi \in \mathrm{X}(A)$*

существует элемент $y_\chi \in \mathfrak{J}$, *такой, что* $f = \mathcal{G}y_\chi$ *в окрестности* χ. *Тогда существует элемент* $y \in \mathfrak{J}$, *такой, что* $\mathcal{G}y = f$ *на* $X(A)$.

Так как $X(A)$ — компакт, то для него существуют конечное открытое покрытие $(U_1, \ldots, U_n)$ и элементы $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{J}$, такие, что $f = \mathcal{G}y_i$ на U_i. Существуют (предложение 2) элементы $x_1, \ldots, x_n \in A$, такие, что их сумма равна 1 и $\operatorname{supp}(\mathcal{G}x_i) \subset U_i$ для каждого i. Пусть

$$y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \mathfrak{J}.$$

Пусть, далее, $\chi \in X(A)$ и Λ — множество тех $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\chi \in U_i$. Если $i \in \Lambda$, то $\mathcal{G}y_i(\chi) = f(\chi)$; если $i \notin \Lambda$, то $\mathcal{G}x_i(\chi) = 0$, следовательно,

$$\mathcal{G}y(\chi) = \sum_{i \in \Lambda} \mathcal{G}x_i(\chi)\mathcal{G}y_i(\chi) = f(\chi) \sum_{i \in \Lambda} \mathcal{G}x_i(\chi) = \\ = f(\chi) \sum_{i=1}^{n} \mathcal{G}x_i(\chi) = f(\chi).$$

Следствие 2. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — идеал в A; f: $X'(A) \to \mathbf{C}$ — непрерывная функция. Предположим что для каждого $\chi \in X'(A)$ существует элемент $y_\chi \in \mathfrak{J}$, такой, что $f = \mathcal{G}'y_\chi$. Тогда существует элемент $y \in \mathfrak{J}$, такой, что $f = \mathcal{G}'y$ на $X'(A)$.*

Пусть $\tilde{A}$ — банахова алгебра, полученная из A присоединением единицы. Тогда $\tilde{A}$ регулярна (замечание) и $X'(A) = X(\tilde{A})$; таким образом, достаточно применить к $\tilde{A}$ и $\mathfrak{J}$ следствие 1 предложения 2.

Если $\mathfrak{J}$ — идеал коммутативной банаховой алгебры, то мы обозначим через $h(\mathfrak{J})$ множество всех характеров $\chi \in X(A)$, ядро которых содержит $\mathfrak{J}$. Другими словами, $h(\mathfrak{J})$ — это множество точек $\chi \in X(A)$, где обращаются в нуль все функции $\mathcal{G}x$ для $x \in \mathfrak{J}$; $h(\mathfrak{J})$ — часть в $X(A)$, замкнутая в топологии Джекобсона.

Предложение 3. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, K — некоторая часть $X(A)$, компактная и не пересекающаяся с $h(\mathfrak{J})$. Тогда существует элемент $u \in \mathfrak{J}$, такой, что $\mathcal{G}u = 1$ на K.*

Это утверждение является частным случаем предложения 14, § 4.

2. Гармонический синтез

Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Если M — некоторая часть в $X(A)$, то мы обозначим через $\mathfrak{k}(M)$ пересечение ядер характеров из M.

Предложение 4. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала. Пусть F — замкнутая часть в $X(A)$. Множество идеалов $\mathfrak{J}$ в A, таких, что $h(\mathfrak{J}) = F$, содержит максимальный элемент, а именно $\mathfrak{k}(F)$, и минимальный элемент, а именно множество $\mathfrak{J}$ элементов $x \in A$, для которых носитель функции $\mathcal{G}x$ компактен и не пересекается с F.*

Утверждение, касающееся максимального элемента, очевидно. Ясно, что $\mathfrak{J}$ — идеал в A и что $h(\mathfrak{J}) \supset F$. Если $\chi \in X(A) - F$, то существует компактная окрестность V точки χ, не пересекающаяся с F. Пусть, далее, элемент $x \in A$ таков, что $\mathcal{G}x$ равна 1 в точке χ и 0 вне V; тогда $x \in \mathfrak{J}$, следовательно, $\chi \notin h(\mathfrak{J})$ и, значит, $h(\mathfrak{J}) = F$. Наконец, предположим, что $\mathfrak{J}$ — идеал в A, такой, что $h(\mathfrak{J}) = F$, и покажем, что $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}$. Пусть C — компактная часть $X(A)$, не пересекающаяся с F, и x—элемент из A, такой, что $\operatorname{supp} \mathcal{G}x \subset C$. В силу предложения 3, существует элемент $u \in \mathfrak{J}$, такой, что $\mathcal{G}u = 1$ на C. Тогда $\mathcal{G}x = \mathcal{G}(ux)$ и, поскольку A — алгебра без радикала, $x = ux$ и, значит, $x \in \mathfrak{J}$. Таким образом, $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}$.

Следствие 1. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, $\mathfrak{J}$ — множество тех $x \in A$, для которых $\mathcal{G}x$ имеет компактный носитель. Предположим, что $\overline{\mathfrak{J}} = A$. Тогда каждый замкнутый идеал в A, отличный от A, содержится в некотором регулярном максимальном идеале.*

Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, который не содержится ни в одном регулярном максимальном идеале. Тогда $h(\mathfrak{J}) = \varnothing$, следовательно, $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}$ (предложение 4), откуда $\mathfrak{J} \supset \overline{\mathfrak{J}} = A$.

Следствие 2. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала. Пусть $x, y \in A$. Если носитель $\mathcal{G}x$ компактен и содержится в множестве тех точек, где $\mathcal{G}y \neq 0$, то элемент x кратен y в A.*

Пусть $\mathfrak{J} = Ay$. Тогда $h(\mathfrak{J})$ есть множество F нулей $\mathcal{G}y$. Так как носитель $\mathcal{G}x$ компактен и не пересекается с F, то $x \in \mathfrak{J}$ (предложение 4).

Определение 2. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Говорят, что A удовлетворяет условию Диткина, если для каждого $\chi \in X'(A)$ и каждого $x \in A$, такого, что $\mathcal{G}'x$ обращается в нуль в точке χ, существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ в A, такая, что $x = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n x)$ и каждая функция $\mathcal{G}'x_n$ обращается в нуль в некоторой окрестности V_n точки χ.*

С другой стороны, пусть A — коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, $x \in A$ и $\chi \in \mathrm{X}'(A)$. Говорят, что x *принадлежит идеалу* $\mathfrak{J}$ *в окрестности точки* χ, если существует элемент $y \in \mathfrak{J}$, такой, что $\mathcal{G}'y = \mathcal{G}'x$ в некоторой окрестности точки χ.

Замечание. Пусть A—коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, χ — элемент в $\mathrm{X}(A)$, такой, что $\chi \notin h(\mathfrak{J})$; тогда любой элемент $x \in A$ принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ. Действительно, согласно определению 1, существует элемент $z \in A$, такой, что $\mathcal{G}'z = 1$ в окрестности точки χ и $\mathcal{G}'z = 0$ в окрестности $h(\mathfrak{J})$; значит, $z \in \mathfrak{J}$ (предложение 4), и, следовательно, $xz \in \mathfrak{J}$ и $\mathcal{G}'(xz) = \mathcal{G}'x$ в окрестности точки χ.

Лемма 1. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, удовлетворяющая условию Диткина. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, x — некоторый элемент из $\mathfrak{k}(h(\mathfrak{J}))$. Пусть, далее, G — множество точек $\chi \in \mathrm{X}'(A)$, таких, что x принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ. Тогда $\mathrm{X}'(A) - G$ — совершенное множество* (т. е. замкнуто и не имеет изолированных точек).

Ясно, что G — открытое множество. Предположим, что $\mathrm{X}'(A) - G$ содержит изолированную точку χ_0. Мы покажем, что это предположение приводит к противоречию. Так как χ_0 — изолированная точка в $\mathrm{X}'(A) - G$, то существует окрестность U этой точки, такая, что $U - \{\chi_0\} \subset G$. Если $\chi_0 \neq 0$, то существует элемент $u \in A$, для которого $\mathcal{G}'u = 1$ в окрестности точки χ_0 и $\mathcal{G}'u = 0$ в окрестности $\mathrm{X}'(A) - U$.

Принимая во внимание замечание, мы видим, что ux принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности любой точки $\chi \neq \chi_0$ и не принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ_0. Если $\chi_0 = 0$, то существует элемент $v \in A$, такой, что $\mathcal{G}'v = 0$ в окрестности точки χ_0 и $\mathcal{G}'v = 1$ в окрестности $\mathrm{X}'(A) - U$. Снова принимая во внимание замечание, мы видим, что $x - vx$ принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности любой точки $\chi \neq \chi_0$ и не принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ_0. Итак, в каждом из рассмотренных случаев мы указали элемент $y \in A$, принадлежащий $\mathfrak{J}$ в окрестности любой точки $\mathrm{X}'(A) - \{\chi_0\}$ и такой, что $\chi_0(y) = 0$. Так как A удовлетворяет условию Диткина, то существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ в A, такая, что $x_n y$ стремится к y при $n \to \infty$ и каждая из функций $\mathcal{G}'x_n$ обращается в нуль в некоторой окрестности точки χ_0. Тогда $x_n y$ принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности любой точки из $\mathrm{X}'(A)$ и потому $x_n y \in \mathfrak{J}$ (следствие 2 предложения 2). В силу замкнутости $\mathfrak{J}$ имеем $y \in \mathfrak{J}$. Но тогда y принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ_0 и, значит,

$\chi_0 \in G$ вопреки предположению. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Предложение 5. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, удовлетворяющая условию Диткина. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал алгебры A, такой, что граница $h(\mathfrak{J})$ не содержит непустых совершенных множеств. Тогда $\mathfrak{J}$ совпадает с множеством тех элементов $x \in A$, для которых функция $\mathcal{G}x$ обращается в нуль на $h(\mathfrak{J})$. В частности, если $h(\mathfrak{J})$ сводится к одной точке χ, то $\mathfrak{J} = \operatorname{Ker} \chi$.*

Пусть $x \in \mathfrak{k}(h(\mathfrak{J}))$. Нужно доказать, что $x \in \mathfrak{J}$. Так как $\mathcal{G}'x = 0$ на $h(\mathfrak{J})$, то множество G, введенное в рассмотрение в лемме 1, очевидно, содержит внутренность множества $h(\mathfrak{J}) \cup \{0\}$. В силу замечания, предшествующего лемме 1, G содержит также множество $X(A) - h(\mathfrak{J})$. Поэтому множество $X'(A) - G$, являющееся совершенным (лемма 1), содержится в границе множества $h(\mathfrak{J}) \cup \{0\}$. Из нашего предположения относительно $h(\mathfrak{J})$ следует, что $X'(A) - G \subset \{0\}$, и поскольку $X'(A) - G$ совершенно, оно пусто. Значит, $x \in \mathfrak{J}$ (следствие 2 предложения 2).

§ 6. Инволютивные нормированные алгебры

1. *Инволютивные алгебры*

Определение 1. *Пусть A — алгебра над* **C**. *Инволюцией в A называется отображение $x \mapsto x^*$ из A в A, такое, что*

$$(x^*)^* = x, \quad (x+y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*$$

для любых x, $y \in A$ и $\lambda \in$ **C**. *Алгебра над полем* **C**, *снабженная инволюцией, называется инволютивной алгеброй.*

Обычно говорят, что элемент x^* *сопряжен* с элементом x. Подмножество в A, инвариантное относительно инволюции, называют *самосопряженным*.

Инволюция является, очевидно, изоморфизмом кольца A на противоположное кольцо A^0. Если A содержит единицу e, то $e^* = e$; алгебру (A, e) называют инволютивной алгеброй с единицей.

Примеры. 1) Пусть A — алгебра всех комплексных функций на некотором множестве. Отображение $f \mapsto \bar{f}$ является инволюцией в A.

2) Пусть H — комплексное гильбертово пространство и $A = \mathcal{L}(H)$. Отображение $x \mapsto x^*$ (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1) является инволюцией в A.

3) Пусть G — локально компактная группа. Известно (*Интегр.*, гл. VIII, § 3, предл. 2), что $\mathscr{M}^1(G)$ является банаховой алгеброй, содержащей единичный элемент ε_e. Отображение $x \mapsto x^{-1}$ из G на G преобразует каждую меру $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ в $\check{\mu} \in \mathscr{M}^1(G)$ (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 1). Обозначим через μ^* меру, комплексно сопряженную к мере $\check{\mu}$. Отображение $\mu \mapsto \check{\mu}$ является изоморфизмом банаховой алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ на банахову алгебру $\mathscr{M}^1(G^0)$. Следовательно, отображение $\mu \mapsto \mu^*$ является изометрической инволюцией в $\mathscr{M}^1(G)$. Множество A ограниченных мер, абсолютно непрерывных по мере Хаара, является замкнутой подалгеброй в $\mathscr{M}^1(G)$, инвариантной относительно инволюции (*Интегр.*, гл. VIII, § 5, n° 5). Пусть β — левоинвариантная мера Хаара на G. Снабдим $L^1(G, \beta)$ произведением $(f, g) \mapsto f *^\beta g$ и инволюцией $f \mapsto f^* = \overline{\tilde{f}} \cdot \Delta^{-1}$, где Δ — модуль (модулярная функция) G и $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$ для всех $x \in G$. Тогда отображение $f \mapsto f \cdot \beta$ есть изоморфизм инволютивной алгебры $L^1(G, \beta)$ на A. Этот изоморфиз изометричен.

Пусть A — инволютивная алгебра. Элемент $x \in A$ называют *эрмитовым*, если $x = x^*$, и *нормальным*, если $xx^* = x^*x$. (Эти определения являются обобщениями аналогичных определений, приведенных в *Алг.*, гл. IX, § 7, n° 3.) Каждый эрмитов элемент является нормальным. Множество всех эрмитовых элементов есть вещественное векторное подпространство в A. Если x и y — коммутирующие эрмитовы элементы, то $(xy)^* = y^*x^* = yx = xy$ и, следовательно, xy — эрмитов элемент. Для каждого $x \in A$ элементы x^*x и xx^* эрмитовы.

Каждый элемент $x \in A$ единственным образом представляется в виде $x_1 + ix_2$, где элементы x_1 и x_2 эрмитовы. Действительно, если положить $x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$, $x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*)$, то x_1, x_2 — эрмитовы элементы и $x = x_1 + ix_2$. Обратно, если $x = x_1 + ix_2$, где x_1 и x_2 — эрмитовы элементы, то $x^* = x_1 - ix_2$ и, следовательно, $x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$, $x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*)$. Таким образом, мы доказали существование и единственность элементов x_1 и x_2. Заметим, что

$$xx^* = x_1^2 + x_2^2 + i(x_2x_1 - x_1x_2),$$
$$x^*x = x_1^2 + x_2^2 - i(x_2x_1 - x_1x_2),$$

и, значит, элемент x нормален в том и только в том случае, когда x_1 и x_2 коммутируют.

Предположим, что алгебра A содержит единицу. Для того чтобы элемент $x \in A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы элемент x^* был обратим, и тогда $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. Поскольку $(x - \lambda)^* = x^* - \bar{\lambda}$ для всех $\lambda \in \mathbf{C}$, отсюда следует, что $\mathrm{Sp}_A x^* = \overline{\mathrm{Sp}_A x}$. Элемент $x \in A$ называют *унитарным*, если $xx^* = x^*x = 1$, т. е. если x обратим и $x = x^{*-1}$.

Пусть A — инволютивная алгебра, $\tilde{A}$ — алгебра, полученная из A присоединением единицы. На $\tilde{A}$ существует и притом единственная инволюция, являющаяся продолжением инволюции на A; эта инволюция определяется равенством $(\lambda, x)^* = (\bar{\lambda}, x^*)$ для $\lambda \in \mathbf{C}$, $x \in A$. Если $x \in A$, то $\mathrm{Sp}'_A x^* = \overline{\mathrm{Sp}'_A x}$.

Пусть A и B — две инволютивные алгебры. *Морфизмом* алгебры A в B называется отображение $\varphi \colon A \to B$, такое, что

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x), \qquad \varphi(x^*) = \varphi(x)^*$$

для любых $x, y \in A$ и $\lambda \in \mathbf{C}$. Назовем инволютивной подалгеброй в A самосопряженную подалгебру в A. Центр алгебры A является инволютивной подалгеброй. Если A_1 — самосопряженный двусторонний идеал в A, то инволюция в A позволяет определить инволюцию в факторалгебре A/A_1, и каноническое отображение A на A/A_1 является морфизмом.

Радикал инволютивной алгебры A совпадает с радикалом противоположной алгебры и, следовательно, является самосопряженным.

Пусть A — инволютивная алгебра. Если $M \subset A$ — самосопряженное подмножество, то его коммутант M' является инволютивной подалгеброй в A. Для $x \in A$ бикоммутант пары $\{x, x^*\}$ является инволютивной подалгеброй, содержащей x и x^*, и эта подалгебра коммутативна в том и только в том случае, когда элемент x нормален.

Пусть A — инволютивная алгебра, B — ее максимальная коммутативная инволютивная подалгебра. Тогда B является максимальной коммутативной подалгеброй (и, значит, наполненной, если A — алгебра с единицей). В самом деле, если элемент $x \in A$ коммутирует с B, то x^* также коммутирует с B; следовательно, если x представить в виде $x_1 + ix_2$, где x_1 и x_2 — эрмитовы элементы, то x_1 и x_2 окажутся коммутирующими с B. Но тогда подалгебра в A, порожденная B и x_1, одновременно коммутативна и инволютивна и, значит, совпадает с B, откуда следует, что $x_1 \in B$; точно так же $x_2 \in B$ и, наконец, $x \in B$.

Пусть A — инволютивная алгебра. Если f — линейная форма на A, то функция $x \mapsto \overline{f(x^*)}$ на A также является линейной формой; эта форма обозначается f^* и называется *сопряженной* с f. Имеют место равенства

$$f^{**}=f, \quad (f+f')^*=f^*+f'^*, \quad (\lambda f)^*=\bar{\lambda} f^*.$$

Говорят, что форма f *эрмитова*, если $f=f^*$. Любая линейная форма на A единственным образом представляется в виде f_1+if_2, где f_1 и f_2 — эрмитовы формы. Для того чтобы линейная форма f была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы она была вещественной на множестве A_h эрмитовых элементов алгебры A. Отображение $f \mapsto f \mid A_h$ является изоморфизмом вещественного векторного пространства эрмитовых форм на векторное пространство, двойственное к вещественному векторному пространству A_h. Если A коммутативна и χ — характер A, то χ^* также является характером A и отображение $\chi \mapsto \chi^*$ есть гомеоморфизм $X'(A)$ на $X'(A)$.

2. Инволютивные нормированные алгебры

Определение 2. *Инволютивной нормированной (соответственно банаховой) алгеброй называют нормированную (соответственно банахову) алгебру, снабженную инволюцией $x \mapsto x^*$, такой, что $\|x^*\|=\|x\|$ для всех x.*

Примеры. 1) Пусть T — локально компактное пространство, A — алгебра непрерывных комплексных функций на T, стремящихся к 0 на бесконечности, снабженная нормой $\|f\|=\sup\limits_{t \in T}|f(t)|$ и инволюцией $f \mapsto \bar{f}$. Тогда A — инволютивная банахова алгебра.

2) Инволютивная алгебра непрерывных эндоморфизмов гильбертова пространства (n° 1, пример 2), снабженная обычной нормой, является инволютивной банаховой алгеброй.

3) Инволютивная алгебра $\mathscr{M}^1(G)$ ограниченных мер на локально компактной группе (n° 1, пример 3), снабженная обычной нормой, является инволютивной банаховой алгеброй.

Пусть A — инволютивная нормированная алгебра, $\tilde{A}$ — нормированная алгебра, полученная из A присоединением единицы. Если алгебру $\tilde{A}$ снабдить инволюцией, как в n° 1, то $\tilde{A}$ станет инволютивной нормированной алгеброй.

Если A — инволютивная нормированная алгебра, то замыкание ее инволютивной подалгебры снова является инволютивной подалгеброй. Если $M \subset A$, то наименьшая инволютивная замкнутая подалгебра, содержащая M, называется инволютивной замкнутой подалгеброй, *порожденной* M; она совпадает с замыканием подалгебры, порожденной множеством $M \cup M^*$. Если M сводится к одному нормальному элементу, то она коммутативна. Факторалгебра инволютивной нормированной алгебры по самосопряженному замкнутому двустороннему идеалу, произведение конечного числа инволютивных нормированных алгебр, пополнение инволютивной нормированной алгебры и противоположная к ней алгебра являются инволютивными нормированными алгебрами с естественной инволюцией.

Если A — инволютивная нормированная алгебра, а f — непрерывная линейная форма на A, то $\| f^* \| = \| f \|$. Множество A_h эрмитовых элементов из A является вещественным нормированным векторным пространством. Пусть f — линейная непрерывная эрмитова форма на A и $g = f \mid A_h$. Тогда $\| f \| = \| g \|$. Действительно, ясно, что $\| f \| \geqslant \| g \|$; с другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x \in A$, такой, что $\| x \| \leqslant 1$ и $| f(x) | \geqslant \| f \| - \varepsilon$. Заменяя x произведением x на скаляр, равный 1 по абсолютной величине, можно считать, что $f(x) \geqslant 0$; тогда

$$\left| g\left(\frac{1}{2}(x + x^*)\right)\right| = \frac{1}{2} | f(x) + f(x^*) | = f(x) \geqslant \| f \| - \varepsilon,$$

и поскольку $\left\| \frac{1}{2}(x + x^*) \right\| \leqslant 1$, мы имеем $\| g \| \geqslant \| f \| - \varepsilon$, откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, вытекает наше утверждение. Эрмитовы непрерывные линейные формы на A можно, следовательно, отождествить с вещественными непрерывными линейными формами на A_h.

3. C^*-алгебры

Определение 3. *C^*-алгеброй называется инволютивная банахова алгебра A, такая, что* $\| x \|^2 = \| x^* x \|$ *для всех* $x \in A$.

Примеры 1 и 2 n° 2 являются примерами C^*-алгебр (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1). Напротив, алгебра примера 3 не является, вообще говоря, C^*-алгеброй.

Замечания. 1) Пусть A — банахова алгебра, снабженная инволюцией, удовлетворяющей аксиоме

$$\| x \|^2 \leqslant \| x^* x \|. \tag{1}$$

Из (1) следует, что $\| x \|^2 \leqslant \| x^* \| \| x \|$, откуда $\| x \| \leqslant \| x^* \|$, и, заменяя x на x^*, мы получаем, что $\| x \| = \| x^* \|$. Следовательно, (1) влечет за собой неравенство

$$\| x \|^2 \leqslant \| x^* x \| \leqslant \| x \|^2,$$

и, стало быть, A есть C^*-алгебра.

2) Пусть A есть C^*-алгебра. Тогда для каждого элемента $x \in A$ имеет место равенство

$$\| x \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| x x' \|.$$

В самом деле, ясно, что $\| x' \| \leqslant 1$ влечет за собой $\| x x' \| \leqslant \leqslant \| x \|$. При доказательстве неравенства $\| x \| \leqslant \sup\limits_{\| x' \| \leqslant 1} \| x x' \|$ можно считать, что $\| x \| = 1$. Тогда $\| x^* \| = 1$ и $\| x x^* \| = \| x \|^2 = 1$.

3) Пусть A есть C^*-алгебра с единицей. Имеем

$$\| 1 \|^2 = \| 1^* 1 \| = \| 1 \|.$$

Следовательно, $\| 1 \| = 1$ или 0. Если $A \neq \{0\}$, то $\| 1 \| = 1$, откуда для всех унитарных элементов u получаем $\| u \| = = \| u^* u \|^{1/2} = 1$.

4) Пусть (A_i) — семейство C^*-алгебр. Пусть A — множество всех последовательностей $(x_i) \in \prod A_i$, таких, что $\sup_i \| x_i \| < +\infty$. Если ввести на A операции

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \quad \lambda (x_i) = (\lambda x_i), \quad (x_i)\,(y_i) = (x_i y_i), \quad (x_i^*) = (x_i^*)$$

и норму $\| (x_i) \| = \sup_i \| x_i \|$, то, как нетрудно убедиться, A станет C^*-алгеброй. Она называется произведением C^*-алгебр A_i.

5) Пусть A — инволютивная нормированная алгебра. Если $\| x \|^2 = \| x^* x \|$ для всех $x \in A$, то пополнение $\hat{A}$ алгебры A есть C^*-алгебра.

Предложение 1. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, B есть C^*-алгебра, π — некоторый морфизм инволютивной алгебры A в инволютивную алгебру B. Тогда для всех $x \in A$ справедливо неравенство $\| \pi(x) \| \leqslant \| x \|$.*

Заметим, что для каждого эрмитова элемента y в B имеют место равенства $\| y^2 \| = \| y^* y \| = \| y \|^2$, откуда $\| y^{2^n} \|^{2^{-n}} = = \| y \|$ и, следовательно,

$$\rho(y) = \| y \|. \tag{2}$$

Ранее было отмечено (§ 1, n° 3), что для каждого элемента $x \in A$ мы имеем $\mathrm{Sp}'_B \pi(x) \subset \mathrm{Sp}'_A x$; стало быть,

$$\rho(\pi(x)) \leqslant \rho(x) \leqslant \| x \|$$

и, значит, с учетом (2)

$$\| \pi(x) \|^2 = \| \pi(x^* x) \| = \rho(\pi(x^* x)) \leqslant \| x^* x \| \leqslant \| x \|^2.$$

Предложение 2. *Пусть A есть C^*-алгебра, $\tilde{A}$ — инволютивная алгебра, полученная из A присоединением единицы. Тогда на алгебре $\tilde{A}$ существует и притом единственная норма, которая является продолжением нормы на A и относительно которой $\tilde{A}$ становится C^*-алгеброй.*

Единственность такой нормы вытекает из предложения 1. Если A содержит единичный элемент e, то $\tilde{A}$ представляется в виде произведения двусторонних самосопряженных идеалов A и $\mathbf{C}(\tilde{e}-e)$ (через $\tilde{e}$ обозначен единичный элемент из $\tilde{A}$). Достаточно положить для всех $x \in A$ и $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\| x + \lambda(\tilde{e}-e) \| = \sup(\|x\|, |\lambda|);$$

тогда, в силу замечания 4, алгебра $\tilde{A}$ окажется C^*-алгеброй.

Предположим теперь, что алгебра A не содержит единичного элемента. Для каждого элемента $x \in \tilde{A}$ положим $\|x\| = \|L_x\|$, где L_x — оператор умножения слева на x в алгебре A. Определенная так норма элемента $x \in A$, в силу замечания 2, совпадает с исходной нормой на A. С другой стороны, $x \mapsto \|x\|$ есть полунорма на $\tilde{A}$ и $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Эта полунорма фактически является нормой. Действительно, пусть $x = \lambda\tilde{e} - x'$ ($\lambda \in \mathbf{C}$, $x' \in A$) — элемент из $\tilde{A}$, такой, что $xy = 0$ для всех $y \in A$; покажем, что тогда $x = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то $\lambda^{-1}x'$ — левая единица в A; следовательно, $\bar{\lambda}^{-1}x^*$ — правая единица в A и, значит, A, вопреки предположению, содержит единичный элемент; стало быть, $\lambda = 0$, и тогда $\|-x'\| = 0$, т. е. $x' = 0$ и $x = 0$. Тем самым доказано, что $x \mapsto \|x\|$ есть норма. Так как A — полная алгебра коразмерности 1 в $\tilde{A}$, то алгебра $\tilde{A}$ также полна. Остается показать (замечание 1), что $\|z\|^2 \leqslant \|z^*z\|$ для всех $z \in \tilde{A}$; можно ограничиться случаем $\|z\| = 1$. Для каждого $r < 1$ существует элемент $y \in A$, такой, что $\|y\| \leqslant 1$ и $\|zy\|^2 \geqslant r$; тогда, пользуясь тем, что $zy \in A$, имеем

$$\|z^*z\| \geqslant \|y^*(z^*z)y\| = \|(zy)^*(zy)\| = \|zy\|^2 \geqslant r,$$

откуда $\|z^*z\| \geqslant 1$.

Говорят, что алгебра $\tilde{A}$, снабженная нормой, указанной в предложении 2, есть C^*-алгебра, *полученная из A присоединением единицы*. Заметим, что эта норма C^*-алгебры на $\tilde{A}$ не совпадает с рассмотренной в n° 2.

Предложение 3. *Пусть A есть C^*-алгебра.*

(i) *Если h — эрмитов элемент в A, то* $\mathrm{Sp}'h \subset \mathbf{R}$.

(ii) *Если алгебра A содержит единицу и если u — унитарный элемент из A, то* $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbf{U}$.

В силу предложения 2, при доказательстве этих двух утверждений можно алгебру A считать алгеброй с единицей (если $A \neq \{0\}$). Имеем $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$ (замечание 3), следовательно, $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbf{U}$ (§ 2, следствие 3 теор. 1). С другой стороны,

$$(\exp(ih))^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n h^n}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n h^n}{n!} = \exp(-ih),$$

и, стало быть, элемент $\exp(ih)$ — унитарный; следовательно, если $z \in \mathrm{Sp}\, h$, то $\exp(iz) \in \mathbf{U}$ и, таким образом, $z \in \mathbf{R}$.

Предложение 4. *Пусть A есть C^*-алгебра, B — ее C^*-подалгебра и $x \in B$. Тогда*

(i) $\mathrm{Sp}'_A x = \mathrm{Sp}'_B x$.

(ii) *Если A содержит единичный элемент, принадлежащий B, то B — наполненная подалгебра в A и* $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}_B x$.

Присоединение единичного элемента дает возможность из (ii) вывести (i). Докажем (ii). Если x — эрмитов элемент, то $\mathrm{Sp}_B\, x \subset \mathbf{R}$; следовательно, $\mathrm{Sp}_B\, x = \mathrm{Sp}_A\, x$ (§ 2, предл. 6). В общем случае, если элемент $x \in B$ обратим в A, то xx^* обратим в A и, стало быть, в силу сказанного, в B; значит, x обратим справа в B. Точно так же получается, что x обратим слева в B и, следовательно, x обратим в B. Поэтому B — наполненная подалгебра в A и, значит, $\mathrm{Sp}_A\, x = \mathrm{Sp}_B\, x$.

4. Коммутативные C^*-алгебры

Теорема 1. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра, B — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $\mathrm{X}(A)$, стремящихся к 0 на бесконечности. Тогда*

(i) *каждый характер алгебры A эрмитов.*

(ii) *Преобразование Гельфанда является изоморфизмом C^*-алгебры A на C^*-алгебру B.*

Если элемент $x \in A$ эрмитов, то $\mathcal{G}x$ — вещественная функция (предложение 3). Стало быть, $\mathcal{G}x^* = \overline{\mathcal{G}x}$ для всех $x \in A$, и утверждение (i) доказано. Так как функции $\mathcal{G}x$ разделяют точки пространства $\mathrm{X}(A)$ и для каждой точки в $\mathrm{X}(A)$ существует функция $\mathcal{G}x$, не обращающаяся в нуль в этой точке, то $\mathcal{G}(A)$ плотно в B (*Общ. топ.*, гл. X, 2-е изд., § 4, след. 2 предл. 7). Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathcal{G}$ — изометрическое отображение. Но

$\|\mathcal{G}y\| = \|y\|$ для эрмитовых элементов y (формула (2)), откуда для всех $x \in A$ имеем

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|\mathcal{G}(x^*x)\| = \|\overline{\mathcal{G}x} \cdot \mathcal{G}x\| = \|\mathcal{G}x\|^2.$$

Следствие. *Пусть A есть C^*-алгебра, x — нормальный элемент в A. Тогда $\|x\| = \rho(x)$.*

Так как x и x^* порождают коммутативную C^*-подалгебру в A, можно ограничиться случаем коммутативной алгебры A. Но тогда наше утверждение немедленно вытекает из теоремы 1.

5. Функциональное исчисление в C^*-алгебрах

Предложение 5. *Пусть A есть C^*-алгебра с единицей, $x \in A$ — нормальный элемент, $S = \mathrm{Sp}_A x$, A' есть C^*-алгебра с единицей непрерывных комплексных функций на S. Тогда существует и притом единственный морфизм алгебр с единицей φ инволютивной алгебры A' в инволютивную алгебру A, такой, что $\varphi(z) = x$, где z — функция $\lambda \longmapsto \lambda$ на S. Этот морфизм изометричен. Его образ есть C^*-подалгебра с единицей в A, порожденная элементом x и, стало быть, состоящая из нормальных элементов.*

Многочлены от z и $\bar{z}$ всюду плотны в A', и любой морфизм из A' в A непрерывен (предложение 1), откуда немедленно вытекает единственность морфизма φ. Пусть B есть C^*-подалгебра с единицей в A, порожденная элементом x. Она коммутативна. Отображение $\chi \longmapsto \chi(x)$ пространства $\mathrm{X}(B)$ на $\mathrm{Sp}_B x = S$ непрерывно и инъективно, так как два характера алгебры B, совпадающие в точке x, совпадают всюду (теорема 1 (i)); это отображение порождает изоморфизм ψ: $A' \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(B))$, который преобразует функцию z в функцию $\mathcal{G}_B x$. Изоморфизм

$$A' \xrightarrow{\psi} \mathscr{C}(\mathrm{X}(B)) \xrightarrow{\mathcal{G}_B^{-1}} B$$

в суперпозиции с инъекцией $B \to A$ является искомым морфизмом.

Определение 4. *Если x — нормальный элемент в A и $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A x)$, то элемент $\varphi(f)$, указанный в предложении 5, обозначается $f(x)$.*

Имеют место равенства

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{3}$$

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x), \tag{4}$$

$$\bar{f}(x) = f(x)^*, \tag{5}$$

$$\|f(x)\| = \|f\| \tag{6}$$

для $f, g \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp} x)$. Если f — сужение на S многочлена $P(\lambda, \bar{\lambda})$, то $f(x) = P(x, x^*)$ в обычном алгебраическом смысле.

В соответствии с введенными выше обозначениями

$$\operatorname{Sp}_A f(x) = \operatorname{Sp}_B f(x) = \operatorname{Sp}_{A'} f = f(S),$$

или

$$\operatorname{Sp}_A(f(x)) = f(\operatorname{Sp}_A x). \tag{7}$$

Предложение 6. *Пусть A и B суть C^*-алгебры с единицей, φ — морфизм из A в B, x — нормальный элемент в A, такой, что $\varphi(x)$ — нормальный элемент в B. Пусть, далее, $f \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp}_A x)$. Тогда сужение функции f на $\operatorname{Sp}_B \varphi(x)$* (по-прежнему обозначаемое через f) *удовлетворяет соотношению $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$.*

Отображения $f \longmapsto \varphi(f(x))$ и $f \longmapsto f(\varphi(x))$ являются морфизмами алгебр с единицей из $\mathscr{C}(\operatorname{Sp}_A x)$ в B, принимающими одинаковые значения на функциях $f(\lambda) = \lambda$ и $f(\lambda) = \bar{\lambda}$; стало быть, эти отображения совпадают всюду.

Следствие 1. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра с единицей, $x \in A$ и $f \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp} x)$. Тогда $\mathscr{G}(f(x)) = f \circ \mathscr{G}x$.*

Следствие 2. *Пусть A есть C^*-алгебра с единицей и $x \in A$. Пусть $f \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp} x)$ и $g \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp}(f(x))) = \mathscr{C}(f(\operatorname{Sp} x))$. Тогда*

$$g \circ f \in \mathscr{C}(\operatorname{Sp} x) \quad \text{и} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Отображение $g \longmapsto (g \circ f)(x)$ есть морфизм алгебр с единицей из $\mathscr{C}(\operatorname{Sp}(f(x)))$ в A, который преобразует функцию $\lambda \longmapsto \lambda$ в $f(x)$. В силу доказанной единственности (предложение 5), имеем $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Предложение 7. *Пусть A есть C^*-алгебра с единицей, $x \in A$ — нормальный элемент и $f \in \mathscr{O}(\operatorname{Sp} x)$. Приведенное выше определение функции $f(x)$ и то, которое рассматривалось в* § 4, n° 8 (*определение* 1), *эквивалентны.*

Возьмем функцию $f(x)$ в смысле определения 4. Отображение $f \longmapsto f(x)$, суженное на $\mathscr{O}(\operatorname{Sp} x)$, является непрерывным морфизмом алгебр с единицей из $\mathscr{O}(\operatorname{Sp} x)$ в A, который преобразует функцию $\lambda \longmapsto \lambda$ в x и, стало быть, является морфизмом, указанным в § 4, теор. 3.

Предложение 8. *Пусть A есть C^*-алгебра, $x \in A$ — нормальный элемент, $S = \operatorname{Sp}' x$, A' есть C^*-алгебра непрерывных функций на S, обращающихся в нуль в точке 0. Тогда существует и притом единственный морфизм φ инволютивной алгебры A' на инволютивную алгебру A, такой, что $\varphi(z) = x$,* *Этот морфизм изометричен. Его образ есть C^*-подалгебра алгебры A, порожденная элементом x, и, следовательно, состоит из нормальных элементов.*

Единственность морфизма φ немедленно следует из того, что многочлены от z и $\bar{z}$, обращающиеся в нуль в точке $z=0$, всюду плотны в A'. Существование вытекает из предложения 5 после присоединения к алгебре A единичного элемента (предложение 2).

Если $f \in A'$, то образ f под действием морфизма φ обозначается $f(x)$.

Замечание. Все результаты этого пункта без труда распространяются mutatis mutandis на морфизмы предложения 8.

Пусть x — эрмитов элемент C^*-алгебры A. Его спектр веществен. Рассмотрим следующие непрерывные функции вещественной переменной:

$$t \longmapsto f_1(t) = \sup(t, 0), \quad t \longmapsto f_2(t) = \sup(-t, 0), \quad t \longmapsto f_3(t) = |t|.$$

Положим $x^+ = f_1(x)$, $x^- = f_2(x)$, $|x| = \operatorname{abs}(x) = f_3(x)$. Так как функции f_1, f_2, f_3 вещественны, то x^+, x^- и $|x|$ — эрмитовы элементы C^*-подалгебры алгебры A, порожденной элементом x. Поскольку функции f_i неотрицательны, имеем

$$(8) \qquad \operatorname{Sp}'(x^+) \subset \mathbf{R}_+, \quad \operatorname{Sp}'(x^-) \subset \mathbf{R}_+, \quad \operatorname{Sp}'(|x|) \subset \mathbf{R}_+.$$

Из равенств $f_1(t) - f_2(t) = t$, $f_1(t) + f_2(t) = f_3(t)$, $f_1(t) f_2(t) = 0$ получаем

$$(9) \qquad x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+ x^- = x^- x^+ = 0.$$

Норма элемента $|x|$ равна норме элемента x, а нормы элементов x^+ и x^- мажорируются нормой элемента x.

Предположим, что $\operatorname{Sp}' x \subset \mathbf{R}_+$. Пусть $\alpha \in \overset{*}{\mathbf{R}}_+$ и g — сужение на $\operatorname{Sp}' x$ функции $t \longmapsto t^\alpha$. Положим $g(x) = x^\alpha$. Таким образом, x^α — эрмитов элемент C^*-подалгебры алгебры A, порожденной элементом x. Имеем $\operatorname{Sp}' x^\alpha = \mathbf{R}_+$. Для любых $\alpha, \beta \in \overset{*}{\mathbf{R}}_+$ немедленно получаются равенства

$$(10) \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Предложение 9. *Пусть x — эрмитов элемент алгебры A, такой, что $\operatorname{Sp}' x \subset \mathbf{R}_+$. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Тогда $x^{1/\alpha}$ — единственный эрмитов элемент y в A, такой, что $\operatorname{Sp}' y \subset \mathbf{R}_+$ и $y^\alpha = x$.*

Уже известно, что $\operatorname{Sp}'(x^{1/\alpha}) \subset \mathbf{R}_+$ и что $(x^{1/\alpha})^\alpha = x$. Пусть y — какой-нибудь эрмитов элемент из A, для которого $\operatorname{Sp}' y \subset \mathbf{R}_+$ и $y^\alpha = x$. Покажем, что $y = x^{1/\alpha}$. Рассматривая C^*-подалгебру в A, порожденную элементом y (C^*-подалгебру, которая содержит элемент x и, следовательно, элемент $x^{1/\alpha}$), мы можем ограничиться тем случаем, когда алгебра A коммутативна. Но тогда наше утверждение немедленно вытекает из теоремы 1.

6. C^*-алгебра, обертывающая инволютивную банахову алгебру

Лемма 1. *Пусть A — инволютивная алгебра над полем* $\mathbf{C}$ *и p — некоторая полунорма на A. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *Для любых $x, y \in A$ имеют место соотношения*

$$p(xy) \leqslant p(x)\,p(y), \quad p(x^*) = p(x) \ \text{и}\ p(x)^2 = p(x^*x).$$

(ii) *Множество $\mathfrak{N}$ элементов x, таких, что $p(x) = 0$, является самосопряженным двусторонним идеалом в A, и норма, индуцированная полунормой p в факторалгебре $A/\mathfrak{N}$, превращает последнюю в инволютивную нормированную алгебру, пополнение которой есть C^*-алгебра.*

(iii) *Существует морфизм φ инволютивной алгебры A в некоторую C^*-алгебру, такой, что $p(x) = \|\varphi(x)\|$.*

Легко видеть, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Полунорму, удовлетворяющую условиям леммы, мы будем называть *C^*-полунормой* на инволютивной алгебре A.

Предположим теперь, что A — *инволютивная банахова алгебра* и S — множество всех C^*-полунорм на A. Для всех $x \in A$ и $p \in S$ имеет место неравенство $p(x) \leqslant \|x\|$ (предложение 1). Функция $x \mapsto \|x\|_* = \sup\limits_{p \in S} p(x)$ есть C^*-полунорма на A, которая является, очевидно, самой сильной C^*-полунормой.

Определение 5. *Пусть $\mathfrak{N}$ — множество всех элементов $x \in A$, таких, что $\|x\|_* = 0$; C^*-алгебра, являющаяся пополнением факторалгебры $A/\mathfrak{N}$ по норме, индуцированной полунормой $x \mapsto \|x\|_*$, называется C^*-алгеброй, обертывающей инволютивную банахову алгебру A, и обозначается* $\operatorname{Stell}(A)$ *или* $\operatorname{St}(A)$.

Предложение 10. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, j — канонический морфизм из A в* $\operatorname{St}(A)$. *Тогда для каждого морфизма φ инволютивной алгебры A в C^*-алгебру B существует и притом единственный морфизм φ' из C^*-алгебры* $\operatorname{St}(A)$ *в C^*-алгебру B, такой, что $\varphi = \varphi' \circ j$.*

Действительно, функция $x \mapsto \|\varphi(x)\|$ есть C^*-полунорма на A. Следовательно, $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|_*$ для всех $x \in A$. Данный морфизм определяет после перехода к факторалгебре непрерывный морфизм из $A/\mathfrak{R}$ в B, который продолжается по непрерывности в $\mathrm{St}(A)$. Единственность φ' очевидна.

Ясно, что если алгебра A коммутативна (соответственно содержит единичный элемент), то алгебра $\mathrm{St}(A)$ также коммутативна (соответственно содержит единичный элемент).

Следствие. *Пусть A — коммутативная инволютивная банахова алгебра, j — канонический морфизм из A в $\mathrm{St}(A)$. Тогда отображение $\mathrm{X}(j)$ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ на подпространство H в $\mathrm{X}(A)$, состоящее из эрмитовых характеров.*

Действительно, эрмитов характер есть не что иное, как морфизм инволютивных алгебр со значениями в C^*-алгебре $\mathbf{C}$. Поэтому из предложения 10 следует, что $\mathrm{X}(j)$ есть биекция пространства $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ на H. Более того, в пространстве $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ топологии простой сходимости на $j(A)$ и на $\mathrm{St}(A)$ совпадают, так как $j(A)$ плотно в $\mathrm{St}(A)$ и пространство $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ равностепенно непрерывно. Следовательно, $\mathrm{X}(j)$ — гомеоморфизм.

Поскольку $\mathrm{X}(j)$ — гомеоморфизм, мы можем отождествить пространства $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ и H. Тогда если $x \in A$, то функция $\mathscr{G}_{\mathrm{St}(A)}(j(x))$ есть сужение на H функции $\mathscr{G}_A(x)$.

Предложение 11. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, $\mathfrak{R}$ — ее радикал. Если $x \in \mathfrak{R}$, то его канонический образ $j(x)$ в $\mathrm{St}(A)$ есть нуль.*

Действительно, так как $x^*x \in \mathfrak{R}$, то $\mathrm{Sp}'_A(x^*x) = \{0\}$ (§ 1, n° 3, замечание 3); следовательно, $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{St}(A)}(j(x)^* j(x)) = \{0\}$ и, значит, $\|j(x)^* j(x)\| = 0$ (n° 3, формула (2)), откуда $j(x) = 0$.

7. C^*-алгебра локально компактной группы

Пусть G — локально компактная группа. Пусть A — инволютивная банахова алгебра ограниченных мер на G, абсолютно непрерывных по мере Хаара. C^*-алгебру, обертывающую инволютивную банахову алгебру A, называют *C^*-алгеброй группы G* и обозначают $\mathrm{Stell}(G)$ или $\mathrm{St}(G)$. Если выбирается левая мера Хаара на G, то A канонически отождествляется с $L^1(G)$, и можно определить $\mathrm{St}(G)$ как C^*-алгебру, обертывающую инволютивную банахову алгебру $L^1(G)$.

Выберем некоторую левую меру Хаара на G. Известно (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 6), что если $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ и $f \in L^2(G)$, то и $f*\mu \in L^2(G)$. Если $\gamma(\mu)$ обозначает эндоморфизм $f \to \mu*f$ пространства $L^2(G)$, то, как известно, γ

является представлением банаховой алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ в банахову алгебру $B = \mathscr{L}(L^2(G))$ непрерывных эндоморфизмов пространства $L^2(G)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, след. предл. 6). С другой стороны, известно, что $\gamma(\check{\mu})$ — сопряженное отображение к эндоморфизму $\gamma(\mu)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, n° 3). Легко видеть, что отображение $\gamma(\mu^*)$ является *сопряженным* к отображению $\gamma(\mu)$ и что γ есть морфизм инволютивной алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ в C^*-алгебру B, называемый *левым регулярным представлением* алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ в пространстве $L^2(G)$. Согласно *Интегр.*, гл. VIII, § 4, n° 7, предл. 19, это представление *инъективно*.

Сужение на $L^1(G)$ представления γ определяет инъективный морфизм инволютивной алгебры $L^1(G)$ в алгебру B (называемый левым регулярным представлением $L^1(G)$ в $L^2(G)$), и, значит, существует морфизм $\gamma'\colon \mathrm{St}(G) \to B$, такой, что $\gamma = \gamma' \circ j$, где через j обозначено каноническое отображение $L^1(G)$ в $\mathrm{St}(G)$. Говорят, что γ' есть левое регулярное представление алгебры $\mathrm{St}(G)$ в $L^2(G)$ (это представление, вообще говоря, не инъективно). Допуская вольность в обозначениях, можно написать равенство

$$\varphi * f = \gamma'(\varphi)(f) \tag{11}$$

для $f \in L^2(G)$ и $\varphi \in \mathrm{St}(G)$. Имеем

$$\|\varphi * f\|_2 \leqslant \|\varphi\|_* \|f\|_2. \tag{12}$$

Предложение 12. *Каноническое отображение алгебры $L^1(G)$ в $\mathrm{St}(G)$ инъективно.*

Так как отображение γ инъективно, то это немедленно вытекает из равенства $\gamma = \gamma' \circ \varphi$.

Следствие. *Алгебра $L^1(G)$ является алгеброй без радикала.*

Это вытекает из предложений 11 и 12.

Итак, можно отождествить $L^1(G)$ с плотной инволютивной подалгеброй в $\mathrm{St}(G)$. Тогда каноническая инъекция алгебры $L^1(G)$ в $\mathrm{St}(G)$ непрерывна.

Предположим теперь, что группа G *унимодулярна*. Тогда можно повторить все предыдущие рассуждения, взяв в качестве исходного отображение $(f, \mu) \mapsto f * \check{\mu} = \delta(\mu)(f)$ из $L^2(G) \times \mathscr{M}^1(G)$ в $L^2(G)$. Точно так же, как и раньше, определяется $f * \varphi$ для $f \in L^2(G)$ и $\varphi \in \mathrm{St}(G)$. Но теперь для $f \in L^2(G)$ и $\varphi, \psi \in \mathrm{St}(G)$ имеет место равенство

$$(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi). \tag{13}$$

В самом деле, эта формула справедлива для $\varphi, \psi \in L^1(G)$; отображения $(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi * f) * \psi$, $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * (f * \psi)$ являются непрерывными билинейными отображениями из $\mathrm{St}(G) \times \mathrm{St}(G)$ в $L^2(G)$.

8. Положительные эндоморфизмы гильбертовых пространств

Пусть E — комплексное гильбертово пространство и $x \in \mathscr{L}(E)$. Напомним (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1), что элемент x называется *положительным*, если $(x\xi \mid \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in E$; в таком случае мы будем писать $x \geqslant 0$. Положительные элементы пространства $\mathscr{L}(E)$ эрмитовы (см. там же).

С другой стороны, под спектром элемента из пространства $\mathscr{L}(E)$ мы всегда будем понимать его спектр относительно алгебры с единицей $\mathscr{L}(E)$.

Предложение 13. *Пусть $x \in \mathscr{L}(E)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *x — положительный элемент;*

(ii) *x — эрмитов и $\operatorname{Sp} x \subset \mathbf{R}_+$;*

(iii) *существует эрмитов элемент y из $\mathscr{L}(E)$, такой, что $x = y^2$;*

(iv) *существует непрерывное линейное отображение z из E в некоторое гильбертово пространство, такое, что $x = z^*z$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): предположим, что $x \geqslant 0$. Так как элемент x при этом эрмитов, то $\operatorname{Sp} x \subset \mathbf{R}$. Покажем, что $\operatorname{Sp} x \in \mathbf{R}_+$, т. е. что элемент $\lambda + x$ обратим для всех $\lambda > 0$. Если $\xi \in E$ и $\|\xi\| = 1$, то

$$\|(\lambda + x)\xi\| \geqslant ((\lambda + x)\xi \mid \xi) \geqslant \lambda(\xi \mid \xi) = \lambda.$$

Это неравенство доказывает, что отображение $\lambda + x$ из E на $\operatorname{Im}(\lambda + x)$ биективно и взаимно непрерывно, т. е. что пространство $\operatorname{Im}(\lambda + x)$ полно и, значит, замкнуто. С другой стороны, $\operatorname{Ker}(\lambda + x)^* = \operatorname{Ker}(\lambda + x) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{Im}(\lambda + x)$ плотно в E (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1). Поэтому элемент $\lambda + x$ обратим в $\mathscr{L}(E)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): если элемент x эрмитов и $\operatorname{Sp} x \subset \mathbf{R}_+$, то можно образовать элемент $y = x^{1/2}$, и тогда $x = y^2$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): очевидно.

(iv) $\Rightarrow$ (i): если $x = z^*z$, то для всех $\xi \in E$ имеет место неравенство

$$(x\xi \mid \xi) = (z^*z\xi \mid \xi) = (z\xi \mid z\xi) \geqslant 0.$$

Следствие. *Если положительные элементы x и y коммутируют в $\mathscr{L}(E)$, то $xy \geqslant 0$.*

Действительно, $x^{1/2}$ и $y^{1/2}$ тогда тоже коммутируют и, значит,

$$xy = y^{1/2}xy^{1/2} = (x^{1/2}y^{1/2})^*(x^{1/2}y^{1/2}) \geqslant 0.$$

Напомним (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1), что для каждого эрмитова элемента x из $\mathscr{L}(E)$ определяются следующие числа:

$$m(x) = \inf_{\xi \in E,\ \|\xi\|=1} (x\xi \mid \xi), \quad M(x) = \sup_{\xi \in E,\ \|\xi\|=1} (x\xi \mid \xi).$$

Предложение 14. *Пусть x — эрмитов элемент пространства $\mathscr{L}(E)$. Тогда*

(i) *$m(x)$ и $M(x)$ — соответственно точные нижняя и верхняя грани множества* $\operatorname{Sp}(x)$.

(ii) *Если $E \neq \{0\}$, то* $\|x\| = \sup(|m(x)|, |M(x)|)$.

Пусть $\lambda \in \mathbf{R}$. Для того чтобы число λ располагалось левее множества $\operatorname{Sp} x$ на $\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Sp}(x - \lambda) \subset \mathbf{R}_+$, т. е. чтобы $x \geqslant \lambda$, иначе говоря, чтобы $m(x) \geqslant \lambda$; стало быть, $m(x)$ — точная нижняя грань $\operatorname{Sp}(x)$. Точно так же можно показать, что $M(x)$ — точная верхняя грань $\operatorname{Sp}(x)$. В силу (2), имеет место равенство $\rho(x) = \|x\|$; если $E \neq \{0\}$, то $\operatorname{Sp}(x)$ не пуст и $\rho(x) = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(x)} |\lambda|$. Следовательно, (ii) вытекает из (i).

Пусть E, F — комплексные гильбертовы пространства и $z \in \mathscr{L}(E; F)$. Так как $z^*z \in \mathscr{L}(E)$ и $z^*z \geqslant 0$, то можно образовать элемент $(z^*z)^{1/2}$, который является положительным элементом из $\mathscr{L}(E)$.

Определение 6. *Элемент $(z^*z)^{1/2}$ называется абсолютным значением z и обозначается $|z|$ или* $\operatorname{abs}(z)$.

Если $z \in \mathscr{L}(E)$ — нормальный элемент, то $|z| = f(z)$, где через f обозначено сужение на $\operatorname{Sp} z$ функции $\zeta \mapsto |\zeta|$ (действительно, $|\zeta| = (\bar{\zeta}\zeta)^{1/2}$ для всех комплексных чисел ζ). В частности, для эрмитова элемента z определение 6 вполне согласовано с определением n° 5.

Предложение 15. *Пусть $z \in \mathscr{L}(E; F)$, M — начальное подпространство для z* (т. е. (*Топ. вект. пр.*, там же) *ортогональное дополнение к* $\operatorname{Ker} z$) *и N — конечное подпространство для z* (*т. е.* $\overline{\operatorname{Im} z}$). *Тогда*

(i) $\operatorname{Ker}(\operatorname{abs}(z)) = \operatorname{Ker} z$, $\overline{\operatorname{Im}(\operatorname{abs}(z))} = M$, $\|\operatorname{abs}(z)\| = \|z\|$.

(ii) *Существует и притом единственное частично изометрическое отображение u из E в F, такое, что* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} z$ *и* $z = u(\operatorname{abs}(z))$.

(iii) *Начальное подпространство для u совпадает с M, конечное — с N.*

(iv) *Пусть z_1 — положительный элемент из $\mathscr{L}(E)$, а u_1 — частично изометрический элемент из $\mathscr{L}(E; F)$, причем* $\operatorname{Ker}(u_1) = \operatorname{Ker}(z_1)$ *и $z = u_1 z_1$; тогда* $z_1 = \operatorname{abs}(z)$ *и* $u_1 = u$.

Для любого $\xi \in E$ имеет место равенство

(14) $\quad \| z\xi \|^2 = (z^*z\xi \mid \xi) = ((\mathrm{abs}(z))^2 \xi \mid \xi) = \| (\mathrm{abs}(z)) \xi \|^2.$

Следовательно, $\mathrm{Ker}(z) = \mathrm{Ker}(\mathrm{abs}(z))$ и $\| \mathrm{abs}(z) \| = \| z \|$. Поскольку элемент $\mathrm{abs}(z)$ эрмитов, подпространство $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{abs}(z))}$ является ортогональным дополнением к подпространству $\mathrm{Ker}(\mathrm{abs}(z))$ (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1). Таким образом, (i) доказано.

Из формулы (14) следует существование изометрического отображения v из $\mathrm{Im}|z|$ в $\mathrm{Im}\,z$, такого, что $z\xi = v(\mathrm{abs}(z))\xi$ для любого $\xi \in E$. Пусть u — однозначно определенный элемент пространства $\mathscr{L}(E; F)$, который является продолжением элемента v на все E и аннулирует $\mathrm{Ker}\,z$. Тогда u обладает перечисленными в (ii) свойствами. Единственность u немедленно следует из того, что $E = \mathrm{Ker}\,z \oplus (\overline{\mathrm{Im}\,\mathrm{abs}(z)})$.

Ясно, что M — начальное подпространство для u. Его конечным подпространством является $u(M) = \overline{u(\mathrm{Im}\,\mathrm{abs}(z))} = \overline{\mathrm{Im}\,z} = N$.

Пусть z_1 и u_1 обладают свойствами (iv). Имеем

$$z^*z = z_1 u_1^* u_1 z_1;$$

$u_1^* u_1$ — ортопроектор ядра $\mathrm{Ker}\,z_1$ (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1) и, значит, образа $\overline{\mathrm{Im}\,z_1}$. Поэтому $z^*z = z_1^2$, откуда $z_1 = (z^*z)^{1/2}$ (предложение 9). Но тогда u_1 совпадает с u на $\mathrm{Im}(\mathrm{abs}(z))$ и на $\mathrm{Ker}\,z$; следовательно, $u_1 = u$.

Пару $(u, \mathrm{abs}(z))$ называют *полярным разложением* элемента z.

Предложение 16. *Пусть* $(u, |z|)$ — *полярное разложение элемента* z. *Тогда*

(i) $|z| = u^* \cdot z$;

(ii) $|z^*| = u \cdot |z| \cdot u^*$;

(iii) *полярным разложением элемента* z^* *является пара* $(u^*, |z^*|)$.

Так как u^*u — ортопроектор E на $\overline{\mathrm{Im}|z|}$, то $u^*z = u^* \cdot u|z| = |z|$, откуда следует (i). Далее,

$$z^* = |z| \cdot u^* = (u^*u \cdot |z|) \cdot u^* = u^* \cdot (u \cdot |z| u^*).$$

С другой стороны, $u|M$ и $u^*|N$ — взаимно обратные изометрии M на N и N на M, поэтому ядром отображения $u \cdot |z| \cdot u^*$ является ортогональное дополнение к N, и элемент $u \cdot |z| \cdot u^*$ положителен. Принимая во внимание предложение 15 (iv), получаем, что $(u^*, u \cdot |z| \cdot u^*)$ — полярное разложение элемента z^*. Тем самым утверждения (ii) и (iii) доказаны.

Предложение 17. *Пусть* $(u, |z|)$ — *полярное разложение элемента* z. *Для того чтобы отображение* z *было биективным, необходимо и достаточно, чтобы элемент* $|z|$ *был обратим в* $\mathscr{L}(E)$ *и чтобы отображение* u *было изоморфизмом гильбертова пространства* E *на гильбертово пространство* F.

Достаточность этого условия очевидна. С другой стороны, если отображение z биективно, то элемент z^*z, а значит, и $(z^*z)^{1/2}$ обратим в $\mathscr{L}(E)$. Кроме того, $\operatorname{Ker} z = 0$ и $\operatorname{Im} z = F$; стало быть, u — изометрическое отображение пространства E на F.

Предложение 18. *Пусть* $z \in \mathscr{L}(E)$ *и* $(u, |z|)$ — *полярное разложение элемента* z. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) z — *нормальный элемент*;

(ii) *элементы* u *и* $|z|$ *коммутируют*;

(iii) *в алгебре* $\mathscr{L}(E)$ *существует унитарный элемент* v, *коммутирующий с* $|z|$ *и такой, что* $z = v \cdot |z|$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): если элемент z нормальный, то $|z^*| = (zz^*)^{1/2} = (z^*z)^{1/2} = |z|$; следовательно, принимая во внимание предложение 16 (ii), имеем

$$|z| \cdot u = |z^*| \cdot u = u \cdot |z| \cdot u^* \cdot u = u \cdot |z|.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): если $u \cdot |z| = |z| \cdot u$, то отображение u оставляет инвариантными подпространства $\operatorname{Ker}|z|$ и $\overline{\operatorname{Im}|z|}$, ортогонально дополняющие друг друга; пусть v — элемент из $\mathscr{L}(E)$, совпадающий с u на $\overline{\operatorname{Im}|z|}$ и с тождественным отображением на $\operatorname{Ker}|z|$; тогда v — унитарный элемент, коммутирующий с $|z|$, и $z = v \cdot |z|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): при выполнении условий (iii) имеем

$$zz^* = v \cdot |z|^2 \cdot v^* = |z|^2 \cdot vv^* = |z|^2 = z^*z.$$

§ 7. Алгебры непрерывных функций на компактном пространстве

1. Подалгебры в $\mathscr{C}(\Omega)$ (Ω—компактное пространство)

Предложение 1. *Пусть* Ω — *компактное пространство,* B — *подалгебра с единицей в* $\mathscr{C}(\Omega)$. *Предположим, что алгебра* B *снабжена нормой, относительно которой она является банаховой алгеброй.*

(i) *При канонической инъекции подалгебры* B *в* $\mathscr{C}(\Omega)$ *нормы элементов из* B *могут лишь уменьшаться.*

(ii) *B — алгебра без радикала.*

(iii) *Для каждого $t \in \Omega$ пусть $\varphi(t)$ — характер $f \mapsto f(t)$ алгебры B. Тогда φ — непрерывное отображение компакта Ω в $\mathrm{X}(B)$.*

(iv) *Если алгебра B разделяет точки компакта Ω, то отображение φ есть гомеоморфизм компакта Ω на некоторую замкнутую часть в $\mathrm{X}(B)$.*

(v) *Если $\mathrm{X}(B) = \varphi(\Omega)$, то B — наполненная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$.*

(vi) *Если B — наполненная инволютивная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$, то $\mathrm{X}(B) = \varphi(\Omega)$.*

(vii) *Если B — наполненная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$ и существует элемент $a \in B$, такой, что элементы вида $f(a)$ (f — рациональная функция, не имеющая полюсов в $\mathrm{Sp}_B\, a$) всюду плотны в B, то $\mathrm{X}(B) = \varphi(\Omega)$.*

Отождествим Ω с $\mathrm{X}(\mathscr{C}(\Omega))$, а $\mathscr{G}_{\mathscr{C}(\Omega)}$ — с тождественным отображением (§ 3, n° 2). Тогда $\varphi = \mathrm{X}(h)$, где через h обозначена каноническая инъекция алгебры B в $\mathscr{C}(\Omega)$, и утверждение (iii) доказано. Для каждого элемента $f \in B$ и каждого $t \in \Omega$ имеем $(\mathscr{G}_B f)(\varphi(t)) = f(t)$, откуда следуют неравенства

$$(1) \qquad \| f \|_B \geqslant \sup |\mathscr{G}_B f| \geqslant \| f \|_{\mathscr{C}(\Omega)}$$

и, стало быть, утверждения (i) и (ii).

Если B разделяет точки в Ω, то отображение φ инъективно, и утверждение (iv) следует из того, что Ω — компакт. Утверждение (v) вытекает из предложения 7, § 3 и утверждения (vii) предложения 8 § 3. Предположим, наконец, что B — наполненная инволютивная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$. Пусть $\mathfrak{J}$ — какой-нибудь максимальный идеал в B, и пусть Φ — множество элементов $t \in \Omega$, таких, что $f(t) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{J}$. Допустим, что $\Phi = \varnothing$. Тогда существуют открытое покрытие $(V_1, \ldots, V_n)$ компакта Ω и для каждого целого $i \in [1, n]$ функция $f_i \in \mathfrak{J}$, такая, что $f_i(t) \neq 0$ для всех $t \in V_i$. Так как алгебра B инволютивна, то

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i \in \mathfrak{J}.$$

Но элемент $\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i$ обратим в $\mathscr{C}(\Omega)$ и, стало быть, в B, так как B — наполненная подалгебра. Мы пришли к противоречию. Таким образом, множество Φ содержит по крайней мере одну точку t_0. Ядро соответствующего этой точке характера алгебры B содержит $\mathfrak{J}$ и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{J}$. Поэтому каждая точка пространства $\mathrm{X}(B)$ является образом некоторой точки компакта Ω при отображении φ, Пример. Пусть $\Omega=[0,1]$, B — алгебра функций $f\colon \Omega\to\mathbf{C}$, имеющих на $[0, 1]$ непрерывные производные вплоть до порядка n, снабженная нормой, рассмотренной в примере 2 § 2. Ясно, что B — наполненная инволютивная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$, разделяющая точки Ω, следовательно, $\mathrm{X}(B)$ отождествляется с Ω.

Предложение 2. *Пусть Ω — компактное пространство, B — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$ (с индуцированной нормой), разделяющая точки Ω. Отождествим Ω с замкнутой частью пространства $\mathrm{X}(B)=\Omega'$.*

(i) *Для каждого элемента $f\in B$ функция $\mathscr{G}_B f$ является продолжением функции f на Ω' и $\|f\|=\sup|\mathscr{G}_B f|$, так что $\mathscr{G}_B$ — изометрический изоморфизм алгебры B на некоторую банахову подалгебру в $\mathscr{C}(\Omega')$.*

(ii) *Пусть B^* — множество обратимых элементов алгебры B. Для каждого характера $\chi\in\Omega'$ существует положительная мера μ с массой 1 на Ω, такая, что для каждого элемента $f\in B^*$ имеет место равенство*

$$\log|\chi(f)|=\int_\Omega \log|f(\omega)|\,d\mu(\omega).$$

(iii) *Если χ и μ удовлетворяют условиям* (ii), *то для каждого элемента $f\in B$ имеет место равенство*

$$\chi(f)=\int_\Omega f(\omega)\,d\mu(\omega).$$

(iv) *Предположим, что любой элемент из $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ является равномерным пределом вещественных частей функций из B. Тогда для любого характера $\chi\in\Omega'$ существует и притом единственная мера $\mu_\chi\geqslant 0$ на Ω, такая, что для каждой функции $f\in B$ имеет место равенство*

$$\chi(f)=\int_\Omega f(\omega)\,d\mu_\chi(\omega).$$

Кроме того, для каждой функции $f\in B$ справедливо неравенство

$$\log|\chi(f)|\leqslant\int_\Omega \log|f(\omega)|\,d\mu_\chi(\omega).$$

(Здесь удобно считать $\log 0=-\infty$. Функция $\log|f|$ ограниченна сверху, и поэтому ее интеграл либо конечен, либо равен $-\infty$.)

Утверждение (i) вытекает из неравенства (1).

Пусть $\chi \in \Omega'$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ и $f_1, \ldots, f_n \in B^*$. Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log|\chi(f_i)| \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log|f_i(\omega)|.$$

В силу непрерывности достаточно доказать это неравенство для случая, когда числа λ_i рациональны и, стало быть, после приведения их к одному и тому же знаменателю, — для случая, когда $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ для всех i. Но в этом случае неравенство может быть переписано следующим образом:

$$\log\left|\chi\left(f_1^{\lambda_1} \ldots f_n^{\lambda_n}\right)\right| \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} \log\left|\left(f_1^{\lambda_1} \ldots f_n^{\lambda_n}\right)(\omega)\right|,$$

и его справедливость вытекает из того, что $\|\chi\| = 1$.

Пусть B' — векторное подпространство в $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$, порожденное функциями вида $\log|f|$, где $f \in B^*$. Предыдущие рассуждения доказывают существование линейной формы h с нормой $\leqslant 1$ на B', такой, что $\log|\chi(f)| = h(\log|f|)$ для всех $f \in B^*$. Далее, h можно продолжить до линейной формы μ с нормой $\leqslant 1$ на все $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$; этому продолжению соответствует вещественная мера μ на Ω, такая, что $\|\mu\| \leqslant 1$. Выбирая в качестве элемента f из B^* постоянную $e\,(= \exp 1)$, получим $1 = \mu(1)$. Следовательно,

$$1 = \mu^+(1) - \mu^-(1) \leqslant \mu^+(1) + \mu^-(1) = \|\mu\| \leqslant 1$$

и, значит, $\mu = \mu^+ \geqslant 0$ и $\|\mu\| = 1$; тем самым (ii) доказано.

Предположим, что χ и μ обладают свойствами (ii). Для любого элемента $f \in B$ имеем $\exp f \in B^*$, следовательно,

$$\int_{\Omega} \mathscr{R}(f)\, d\mu = \int \log|\exp f|\, d\mu = \log|\chi(\exp f)| = $$
$$= \log|\exp \chi(f)| = \mathscr{R}\chi(f).$$

Заменяя f на if, мы видим, что $\int_{\Omega} f\, d\mu = \chi(f)$ для любого элемента $f \in B$.

Допустим теперь, что выполняются предположения (iv). Существование μ_χ вытекает из (ii) и (iii). С другой стороны, для каждой функции $f \in B$ справедливо равенство $\mu_\chi(\mathscr{R}f) = \mathscr{R}(\chi(f))$ и, поскольку $\mathscr{R}(B)$ плотно в пространстве $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$, характер χ однозначно определяет меру μ_χ. Пусть $f \in B$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in B$, такая, что

$$\mathscr{R}g - \varepsilon \leqslant \log(|f| + \varepsilon) \leqslant \mathscr{R}g + \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть $h = \exp g \in B^*$. Из (2) следует, что

$$|h|e^{-\varepsilon} \leqslant |f| + \varepsilon, \tag{3}$$

$$|f| + \varepsilon \leqslant |h|e^{\varepsilon}. \tag{4}$$

Из (4) видно, что $|fh^{-1}| \leqslant e^{\varepsilon}$ и, значит, $|\chi(fh^{-1})| \leqslant e^{\varepsilon}$. Поэтому

$$\log|\chi(f)| \leqslant \log|\chi(h)| + \varepsilon = \int_{\Omega} \log|h|\, d\mu_{\chi} + \varepsilon. \tag{5}$$

Из (3) и (5) получается неравенство

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_{\Omega} \log(|f| + \varepsilon)\, d\mu_{\chi} + 2\varepsilon, \tag{6}$$

из которого, поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, выводим, что

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_{\Omega} \log|f|\, d\mu_{\chi}.$$

Рассмотрим теперь «конкретную» реализацию объектов Ω, B, Ω', $\mathcal{G}_B$ предложения 2.

Пусть Λ — некоторое множество, Ω_1 — компактная часть $\mathbf{C}^{\Lambda}$. Обозначим через $P(\Omega_1)$ банахову подалгебру с единицей в $\mathscr{C}(\Omega_1)$, состоящую из функций на Ω_1, которые являются равномерными пределами многочленов на Ω_1. Координатные функции $z_{\lambda}|\Omega_1$ топологически порождают алгебру $P(\Omega_1)$, и $P(\Omega_1)$ разделяет точки Ω_1. Пусть Ω_1' — полиномиально выпуклая оболочка Ω_1. Так как для каждого элемента $p \in \mathbf{C}[(X_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}]$ справедливо равенство

$$\sup_{z \in \Omega_1'} |p(z)| = \sup_{z \in \Omega_1} |p(z)|,$$

то равномерно сходящиеся последовательности многочленов на Ω_1 единственным образом продолжаются до равномерно сходящихся последовательностей многочленов на Ω_1'; стало быть, существует и притом единственный изометрический изоморфизм $P(\Omega_1)$ на $P(\Omega_1')$, который для каждой координатной функции z_{λ} на $\mathbf{C}^{\Lambda}$ преобразует $z_{\lambda}|\Omega_1$ в $z_{\lambda}|\Omega_1'$. Такой изоморфизм мы будем называть каноническим. Имеет место

Предложение 3. *Пусть, в дополнение к условиям предложения 2, (x_{λ}) — семейство элементов, топологически порождающих алгебру с единицей B. Положим $A = \mathscr{C}(\Omega)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{i} & \Omega' \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} \\ \mathrm{Sp}_A((x_{\lambda})) & \xrightarrow{j} & \mathrm{Sp}_B((x_{\lambda})) \end{array}$$

где φ, φ' — *отображения, определенные семейством* (x_λ), i *и* j — *канонические инъекции. Тогда*

(i) φ *и* φ' — *гомеоморфизмы*;

(ii) $\mathrm{Sp}_B((x_\lambda))$ *является полиномиально выпуклой оболочкой* $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$;

(iii) φ *преобразует алгебру* A *в* $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A((x_\lambda)))$, *а* B — *в* $P(\mathrm{Sp}_A((x_\lambda)))$;

(iv) φ' *преобразует* $\mathscr{G}_B(B)$ *в* $P(\mathrm{Sp}_B((x_\lambda)))$;

(v) φ *и* φ' *преобразуют* $\mathscr{G}_B$ *в канонический изоморфизм из* $P(\mathrm{Sp}_A((x_\lambda)))$ *на* $P(\mathrm{Sp}_B((x_\lambda)))$.

Напомним, что φ и φ' непрерывны и сюръективны. В данной ситуации отображение φ' биективно (§ 3, предложение 9(i)), а i инъективно; стало быть, отображение φ инъективно. Поэтому φ и φ' — гомеоморфизмы. Полиномиально выпуклая оболочка компакта $\Omega_1 = \mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$ совпадает с множеством $\Omega'_1 = \mathrm{Sp}_B((x_\lambda))$ в силу следствия 1 предложения 9, § 3. Обозначим через z_λ $(\lambda \in \Lambda)$ координатные функции на $\mathbf{C}^\Lambda$. Ясно, что φ преобразует x_λ в $z_\lambda \mid \Omega_1$ и что φ' преобразует $\mathscr{G}_B x_\lambda$ в $z_\lambda \mid \Omega'_1$; следовательно, φ и φ' преобразуют B в $P(\Omega_1)$, $\mathscr{G}_B(B)$ в $P(\Omega'_1)$ и $\mathscr{G}_B$ — в канонический изоморфизм из $P(\Omega_1)$ в $P(\Omega'_1)$.

2. *Случай* $\Omega \subset \mathbf{C}^\Lambda$

Пусть Λ — некоторое множество, Ω — компактная часть $\mathbf{C}^\Lambda$. Так как $P(\Omega)$ разделяет точки компакта Ω, то последний можно отождествить с некоторой частью пространства $\mathrm{X}(P(\Omega))$. Пусть по-прежнему z_λ — координатные функции на $\mathbf{C}^\Lambda$.

Предложение 4. (i) *Отображение* $\mathrm{X}(P(\Omega))$ *на* $\mathrm{Sp}'_{P(\Omega)}((z_\lambda))$, *определенное семейством* (z_λ), *представляет собой гомеоморфизм* θ *пространства* $\mathrm{X}(P(\Omega))$ *на полиномиально выпуклую оболочку* Ω' *компакта* Ω, *тождественный на* Ω.

(ii) *Для каждой функции* $f \in P(\Omega)$ *гомеоморфизм* θ *преобразует продолжение* $\mathscr{G}_{P(\Omega)} f$ *функции* f *на* $\mathrm{X}(P(\Omega))$ *в продолжение* $\tilde{f}$ *функции* f *на* Ω'; *при этом отображение* $f \mapsto \tilde{f}$ *является каноническим изоморфизмом* $P(\Omega)$ *на* $P(\Omega')$.

Предложение 4 сводится к предложению 3, если положить $B = P(\Omega)$ и $x_\lambda = z_\lambda$ и заметить, что тогда отображение φ превращается в тождественное.

Следствие. *Если* Ω *связно, то его полиномиально выпуклая оболочка также связна.*

Если Ω связно, то единственными идемпотентами в $\mathscr{C}(\Omega)$ и, стало быть, в $P(\Omega)$ являются 0 и 1. Поэтому $\mathrm{X}(P(\Omega))$ связно (§ 4, предложение 12) и, значит, полиномиально выпуклая оболочка компакта Ω связна (предложение 4 (i)).

3. Случай $\Omega \subset \mathbf{C}$

Пусть Ω — компактная часть в $\mathbf{C}$, O_∞ — неограниченная компонента связности множества $\mathbf{C} - \Omega$, $(O_i)_{i \in I}$ — семейство ограниченных компонент связности (O_i предполагаются попарно различными). Пусть, наконец, E — некоторая часть в $\mathbf{C} - \Omega$. Обозначим через $R_E(\Omega)$ замыкание в пространстве $\mathscr{C}(\Omega)$ множества сужений $f \mid \Omega$, где f — рациональная функция, все полюсы которой расположены в E. Это замыкание есть банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$, которая разделяет точки Ω. Пусть z — тождественная функция на Ω. Тогда наполненная замкнутая подалгебра в $R_E(\Omega)$, порожденная элементом z, совпадает с $R_E(\Omega)$. Элементы из $R_E(\Omega)$ голоморфны во всех внутренних точках компакта Ω.

В частности, $R_\varnothing(\Omega) = P(\Omega)$. Положим $R_{\mathbf{C}-\Omega}(\Omega) = R(\Omega)$. Обозначим через $I(E)$ множество всех $i \in I$, таких, что $E \cap O_i = \varnothing$, а через Ω_E — множество $\Omega \cup \left(\bigcup_{i \in I(E)} O_i\right)$; множество Ω_E, будучи ограниченным и замкнутым (его дополнение в $\mathbf{C}$ открыто), компактно.

Предложение 5. (i) *Отображение сужения*

$$R_E(\Omega_E) \to R_E(\Omega)$$

является изометрическим изоморфизмом из $R_E(\Omega_E)$ *на* $R_E(\Omega)$.

(ii) $R_E(\Omega_E)$ — *наполненная подалгебра в* $\mathscr{C}(\Omega_E)$.

(iii) *Каждый характер алгебры* $R_E(\Omega_E)$ *определяется некоторой точкой из* Ω_E.

(iv) *Отображение* $\chi \mapsto \chi(z)$ *есть гомеоморфизм из* $\mathrm{X}(R_E(\Omega))$ *на* Ω_E.

(v) *Если* E' — *некоторая часть* $\mathbf{C} - \Omega$, *то следующие условия эквивалентны*:

(a) $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$; (b) $\Omega_E = \Omega_{E'}$; (c) $I(E) = I(E')$.

Ясно, что отображение сужения h из $R_E(\Omega_E)$ в $R_E(\Omega)$ является морфизмом. Поскольку граница множества Ω_E содержится в Ω, то, как следует из принципа максимума, морфизм h изометричен. Покажем, что он сюръективен. Пусть $g \in R_E(\Omega)$. Тогда существует последовательность f_n рациональных функций, все полюсы которых расположены в E, равномерно сходящаяся к функции g на Ω. Функции f_n голоморфны в Ω_E, и граница множества Ω_E содержится в Ω;

следовательно, в силу принципа максимума, последовательность f_n равномерно сходится на Ω_E к некоторой функции f из $R_E(\Omega_E)$ и $g = f \mid \Omega$. Таким образом, (i) доказано.

Пусть z_E — тождественное отображение множества Ω_E. В силу следствия предложения 6, § 2, множество $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E$ есть объединение множеств $\mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(\Omega_E)} z_E = \Omega_E$ и соответствующих компонент связности дополнения к Ω_E; если O_i — одна из них, то существует точка $\lambda \in E \cap O_i$; так как $(\lambda - z_E)^{-1} \in R_E(\Omega_E)$, то $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E$ и, стало быть, O_i не содержится в $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E$. Таким образом, $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E = \Omega_E$. В то же время, в силу (i), $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega)} z = \mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E$. Тем самым утверждение (iv) доказано, а утверждения (ii) и (iii) вытекают из предложения 8, § 3, если воспользоваться канонической инъекцией $R_E(\Omega_E)$ в $\mathscr{C}(\Omega_E)$. Докажем утверждение (v); очевидно, что (b) $\Leftrightarrow$ (c); в силу (iv), (a) $\Rightarrow$ (b). Допустим, что $\Omega_E = \Omega_{E'}$, и покажем, что $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$; так как $\Omega_E = \Omega_{E'} = \Omega_{E \cup E'}$, то можно считать, что $E \subset E'$; в силу (ii), $R_E(\Omega_E)$ — наполненная замкнутая подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega_E)$ и, стало быть, в $R_{E'}(\Omega_E)$, содержащая z_E. Поэтому

$$R_E(\Omega_E) = R_{E'}(\Omega_E)$$

и, в силу (i),

$$R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega).$$

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны*:

(a) *E имеет непустое пересечение со всеми множествами O_i.*

(b) *Отображение $\chi \mapsto \chi(z)$ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{X}(R_E(\Omega))$ на Ω.*

(c) $R_E(\Omega) = R(\Omega)$.

Пусть $E' = \mathbf{C} - \Omega$. Условия (a), (b) и (c) соответственно эквивалентны условиям $I(E) = I(E')$, $\Omega_E = \Omega_{E'}$ (в силу предложения 5 (iv)), $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$. Поэтому наше утверждение вытекает из предложения 5 (v).

Следствие 2. *Пусть для каждого $i \in I$ выбрана точка $\lambda_i \in O_i$. Пусть f — комплексная голоморфная функция в некоторой открытой окрестности Ω. Тогда $f \mid \Omega$ является равномерным пределом сужений на Ω рациональных функций, полюсы которых расположены в точках λ_i.*

Это вытекает из следствия 1 и предложения 4, § 4.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть Λ — некоторое множество, Φ — часть в $\mathbf{C}^{\Lambda}$. Ясно, что следующие условия эквивалентны:

(i) Часть Φ представляет собой множество точек $(c_{\lambda}) \in \mathbf{C}^{\Lambda}$, для которых существуют конечное или бесконечное семейство (P_i) элементов из $\mathbf{C}\left[(X_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}\right]$ и семейство (M_i) вещественных чисел, такие, что $|P_i((c_{\lambda}))| \leqslant M_i$.

(ii) Для того чтобы точка (c_{λ}) из $\mathbf{C}^{\Lambda}$ принадлежала Φ, необходимо и достаточно, чтобы $|P((c_{\lambda}))| \leqslant \sup\limits_{c \in \Phi} |P(c)|$ для всех $P \in \mathbf{C}[(X_{\lambda})]$.

Такая часть в $\mathbf{C}^{\Lambda}$ называется *полиномиально выпуклой*. Любое пересечение полиномиально выпуклых частей в $\mathbf{C}^{\Lambda}$ полиномиально выпукло. Стало быть, какова бы ни была часть Ψ в $\mathbf{C}^{\Lambda}$, существует наименьшая полиномиально выпуклая часть Φ в $\mathbf{C}^{\Lambda}$, содержащая Ψ. Говорят, что Φ — *полиномиально выпуклая оболочка* части Ψ. Она представляет собой множество всех точек $(c_{\lambda}) \in \mathbf{C}^{\Lambda}$, таких, что $|P((c_{\lambda}))| \leqslant \sup\limits_{c \in \Psi} |P(c)|$ для всех $P \in \mathbf{C}[(X_{\lambda})]$.

Если часть Ψ замкнута, то $\mathbf{C}^{\Lambda} - \Psi$ открыто и, стало быть, локально связно; поэтому каждая его компонента связности открыта. Если к тому же множество Λ конечно, то из принципа максимума следует, что каждая ограниченная связная компонента $\mathbf{C}^{\Lambda} - \Psi$ содержится в Φ.

Пусть Λ' — некоторая часть в Λ, $\Psi' = \mathrm{pr}_{\Lambda'}\Psi$ и Φ' — полиномиально выпуклая оболочка части Ψ' в $\mathbf{C}^{\Lambda'}$. Поскольку каждый элемент из $\mathbf{C}\left[(X_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda'}\right]$ отождествляется с некоторым элементом из $\mathbf{C}\left[(X_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}\right]$, справедливо соотношение $\Phi' \supset \mathrm{pr}_{\Lambda'}\Phi$.

Лемма 1. *Пусть* $\Phi \subset \mathbf{C}^{\Lambda}$ — *компактная полиномиально выпуклая часть,* Ω — *некоторая ее окрестность. Тогда существует конечная часть* Λ_0 *в* Λ, *такая, что для каждой части* Λ' *из* Λ, *содержащей* Λ_0, $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$ *содержит полиномиально выпуклую оболочку части* $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Phi)$.

Поскольку Φ — компакт, Φ содержится в произведении компактных кругов D_{λ} с центром в 0 радиусов R_{λ} $(\lambda \in \Lambda)$.

Для каждого многочлена $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$ пусть Φ_P — множество всех $d \in \mathbf{C}^\Lambda$, таких, что

$$|P(d)| \leqslant \sup_{c \in \Phi} |P(c)|.$$

Имеем

(1) $$\Phi = \left(\prod_\lambda D_\lambda\right) \cap \left(\bigcap_P \Phi_P\right) \subset \Omega.$$

Так как $\prod\limits_\lambda D_\lambda$ — компакт, то существуют многочлены $P_1, \ldots$ $\ldots, P_q \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$, такие, что

(2) $$\left(\prod_\lambda D_\lambda\right) \cap \Phi_{P_1} \cap \ldots \cap \Phi_{P_q} \subset \Omega.$$

Пусть Λ_0 — множество индексов тех переменных, которые фактически присутствуют в $P_1, \ldots, P_q$. Пусть Λ' — некоторая часть Λ, содержащая Λ_0. Пусть E — часть $\mathbf{C}^{\Lambda'}$, определенная неравенствами $|c_\lambda| \leqslant R_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda')$ и $|P_i((c_\lambda))| \leqslant \sup\limits_{c \in \Phi} |P_i(c)|$ $(i = 1, \ldots, q)$. Тогда E — полиномиально выпуклая часть. В силу (1), $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Phi) \subset E$. С другой стороны, пусть $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} \in E$; пусть, далее, $(d_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — элемент из $\mathbf{C}^\Lambda$, определенный следующим образом: $d_\lambda = c_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda'$, $d_\lambda = 0$ для $\lambda \in \Lambda - \Lambda'$; тогда, в силу (2), $(d_\lambda) \in \Omega$, стало быть, $(c_\lambda) \in \mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$. Таким образом, $E \subset \mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$, чем и завершается доказательство.

Лемма 2. *Пусть $n > 0$ — целое число и Φ — полиномиально выпуклая компактная часть в $\mathbf{C}^n$. Тогда Φ обладает фундаментальной системой полиномиально выпуклых компактных окрестностей.*

Существуют компактный полицилиндр Δ в $\mathbf{C}^n$, внутренность которого содержит Φ, и семейство $(P_i)_{i \in I}$ элементов из $\mathbf{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, таких, что Φ представляет собой множество тех точек $(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta$, для которых

$$|P_i(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant M_i$$

при всех i. Для каждой конечной части J множества I и любого $\varepsilon > 0$ пусть $\Phi_{J, \varepsilon}$ — множество всех $(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta$, таких, что $|P_i(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant M_i + \varepsilon$ для всех $i \in J$. Тогда каждое множество $\Phi_{J, \varepsilon}$ есть полиномиально выпуклая компактная окрестность части Φ и пересечение всех $\Phi_{J, \varepsilon}$ совпадает с Φ. Стало быть, $\Phi_{J, \varepsilon}$ образуют фундаментальную систему окрестностей части Φ (*Общ. топ.*, гл. I, 4-е изд., § 9, теорема 1).

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1

1) Пусть (e_1, e_2) — канонический базис в $\mathbf{R}^2$ и u — элемент алгебры $A = \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, определенный равенствами $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = -e_1$. Показать, что

$$\mathrm{Sp}_A u = \varnothing, \quad \mathrm{Sp}_A u^2 = \{-1\}.$$

2) Пусть μ — мера Лебега на $[0, 1]$, H — гильбертово пространство $L^2_{\mathbf{C}}([0, 1], \mu)$, $A = \mathscr{L}(H)$ и $x \in A$ — оператор, который преобразует функцию $f(t)$ в функцию $tf(t)$. Показать, что $\mathrm{Sp}_A x = [0, 1]$, но оператор x не имеет ни одного собственного значения.

3) a) Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ и $A = \mathscr{L}(H)$. Рассмотрим оператор $T \in \mathscr{L}(H)$, такой, что $T\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ для всех $i \geqslant 0$, и оператор $T' \in \mathscr{L}(H)$, такой, что $T'\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$ для $i \geqslant 1$ и $T'\varepsilon_0 = 0$. Показать, что $T'T = 1$, но $TT'\varepsilon_0 = 0$, так что $\mathrm{Sp}_A(T'T) \neq \mathrm{Sp}_A(TT')$.

b) Пусть A — нётерова алгебра с единицей над некоторым полем. Показать, что если $x, y \in A$, то $\mathrm{Sp}(xy) = \mathrm{Sp}(yx)$ (использовать упражнение 8 b) из *Алг.*, гл. VIII, § 2).

4) Пусть A — коммутативная алгебра над $\mathbf{C}$, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, h — каноническая инъекция $\mathfrak{J}$ в A, S — множество характеров $\chi \in \mathrm{X}'(A)$, которые аннулируют $\mathfrak{J}$.

a) Показать, что отображение $\mathrm{X}'(h)$ сюръективно.

b) Показать, что отображение $\mathrm{X}'(h) \mid (\mathrm{X}'(A) - S)$ является гомеоморфизмом из $\mathrm{X}'(A) - S$ на $\mathrm{X}(\mathfrak{J})$. (Пусть $\chi_0 \in \mathrm{X}'(A) - S$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in A$, $\varepsilon > 0$ и V — окрестность точки χ_0 в $\mathrm{X}'(A)$, определенная неравенствами $|(\chi - \chi_0)(x_i)| \leqslant \varepsilon (i = 1, \ldots, n)$. Пусть элемент $u_0 \in \mathfrak{J}$ таков, что $\chi_0(u_0) = 1$. Положим $u_i = u_0 x_i \in \mathfrak{J}$. Тогда если $|(\chi - \chi_0)(u_i)| \leqslant \delta$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, где δ достаточно мало, то $\chi \in V$.)

5) В упражнении 4 выберем $A = \mathbf{C}[X, Y]$, $\mathfrak{J} = AX$. Пространство $\mathrm{X}(A)$ отождествляется тогда с $\mathbf{C}^2$, $S - \{0\}$ — с $\{0\} \times \mathbf{C}$. Пусть U — множество точек $(\xi, \eta) \in \mathbf{C}^2$, таких, что $|\xi| < e^{-|\eta|}$. Показать, что $\mathrm{X}'(h)(U)$ не является окрестностью нуля в $\mathrm{X}'(\mathfrak{J})$. Вывести отсюда, что $\mathrm{X}'(\mathfrak{J})$ нельзя отождествить с факторпространством $\mathrm{X}'(A)$ по отношению эквивалентности, которое определяется отображением $\mathrm{X}'(h)$. (По этому поводу см. § 3, упр. 17.)

6) Предположим, что A — коммутативная алгебра над полем, $\mathfrak{J}$ — ее максимальный идеал. Показать, что либо $A^2 \subset \mathfrak{J}$ и $\dim A/\mathfrak{J} = 1$, либо $A/\mathfrak{J}$ является телом. (Применить к факторалгебре $A/\mathfrak{J}$ упражнение 3 из *Алг.*, гл. I, § 9.) В частности, если $A^2 = A$, то каждый максимальный идеал в A регулярен.

7) Пусть A — коммутативная алгебра над полем K, $x \in A$ и $\alpha \in K$. Показать, что множество характеров $\chi \in \mathrm{X}(A)$, таких, что $(\mathscr{G}x)(\chi) = \alpha$, замкнуто в топологии Джекобсона. (Это утверждение может быть сведено к случаю, когда A содержит единичный элемент, а затем к случаю $\alpha = 0$.)

¶ 8) Пусть A — некоторая алгебра, $\mathfrak{J}$ — двусторонний идеал в A, $I^{\mathfrak{J}}(A)$ — множество всех примитивных идеалов в A, которые не содержат $\mathfrak{J}$, и $\widehat{A}^{\mathfrak{J}}$ — множество всех отображений $\pi \in \widehat{A}$, таких, что $\pi(\mathfrak{J}) \neq 0$.

a) Показать, что если $\pi \in \widehat{A}^{\mathfrak{J}}$, то $\pi \mid \mathfrak{J} \in \widehat{\mathfrak{J}}$ (лемма 1 (i)). Если отображения π, $\pi' \in \widehat{A}$ таковы, что $\pi \mid \mathfrak{J}$ и $\pi' \mid \mathfrak{J}$ эквивалентны, то π и π' эквивалентны. (Можно считать, что $\pi(x) = \pi'(x)$ для всех $x \in \mathfrak{J}$. Тогда для каждого элемента $y \in A$ значения $\pi(y)$ и $\pi'(y)$ совпадают на $\sum\limits_{x \in \mathfrak{J}} \operatorname{Im} \pi(x)$, а это подпространство совпадает с пространством представления π.)

b) Показать, что если $\pi \in \widehat{\mathfrak{J}}$, то π продолжается до некоторого элемента из $\widehat{A}^{\mathfrak{J}}$. (Пусть $\mathfrak{N}$ — регулярный максимальный левый идеал в $\mathfrak{J}$. Пусть g — какая-нибудь правая единица в $\mathfrak{J}$ по модулю $\mathfrak{N}$. Предполагая, что A содержит единичный элемент, показать, что соотношение $A\mathfrak{N} + A(1-g) = A$ влечет за собой $g^2 \in \mathfrak{N}$. Стало быть, $A\mathfrak{N} + A(1-g)$ содержится в некотором максимальном левом идеале $\mathfrak{M}$ из A. Показать, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} + \mathfrak{J} = A$.)

c) Вывести из a) и b), что отображение $\mathfrak{J}' \longmapsto \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{J}$ является гомеоморфизмом $I^{\mathfrak{J}}(A)$ на $I(\mathfrak{J})$ и что отображение $\pi \to \pi \mid \mathfrak{J}$ является гомеоморфизмом $\widehat{A}^{\mathfrak{J}}$ на $\widehat{\mathfrak{J}}$.

§ 2

1) Пусть A — алгебра непрерывных комплексных функций на $\mathbf{R}$, стремящихся к 0 на бесконечности, снабженная нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$. Показать, что тогда $\widetilde{A}$ отождествляется с алгеброй непрерывных комплексных функций, стремящихся к некоторому конечному пределу на бесконечности. Показать, что норма $\|g\| = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |g(t)|$ на $\widetilde{A}$ отлична от нормы, определенной в n° 1.

2) Пусть A — нормированная алгебра и $b = \inf\limits_{x \neq 0} (\|x^2\| / \|x\|^2)$. Показать, что тогда

$$b \leqslant \inf_{x \neq 0} (\rho(x)/\|x\|) \leqslant \sqrt{b}.$$

3) Показать, что если A — нормированная алгебра и $x, y \in A$, то $\rho(xy) = \rho(yx)$.

4) Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $(f_1, f_2, \ldots)$. Пусть A — нормированная алгебра $\mathscr{L}(H)$. Пусть, далее, отображение $x \in A$ определено равенствами $x(f_i) = 2^{-i} f_{i+1}$. Показать, что x — квазинильпотентный элемент в A, не являющийся нильпотентным.

¶ 5) Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $(f_1, f_2, \ldots)$. Определим числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ равенствами $\alpha_m = e^{-k}$, если m представляется в виде произведения 2^k на нечетное число. Определим отображение $x \in \mathscr{L}(H)$ с помощью равенств

$$x(f_m) = \alpha_m f_{m+1}.$$

Показать, что x не является квазинильпотентным. (Заметить, что

$$\|x^n\| = \sup_m (\alpha_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{m+n-1}),$$

и оценить $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2^t-1}$.) Пусть $x_k \in \mathscr{L}(H)$ определены равенствами $x_k(f_m) = 0$, если m представляется в виде произведения 2^k на нечетное число, и $x_k(f_m) = \alpha_m f_{m+1}$ в противном случае. Показать, что x_k нильпотентны и что $\| x - x_k \|$ стремится к 0.

6) Пусть K — компактная часть $\mathbf{C}$; A — банахова алгебра непрерывных функций на K, снабженная нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in K} |f(t)|$; f_0 — элемент вида $z \longmapsto z$ в A. Показать, что $\operatorname{Sp}_A f_0 = K$.

7) Пусть A — банахова алгебра с единицей. Пусть элемент $x \in A$ таков, что $\|x - 1\| < 1$. Показать, что существует элемент $y \in A$, для которого $y^2 = x$. (Использовать разложение в ряд.)

8) Пусть A — нормированная алгебра с единицей. Показать, что если $\| x^{-1} \| = \|x\|^{-1}$ для любого обратимого элемента $x \in A$, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$. (Этот результат сводится к случаю, когда алгебра A полна. Пусть расстояние от элемента $x \in A$ до множества $\mathbf{C} \cdot 1$ равно $\alpha > 0$. Если $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ таково, что элемент $x - \lambda_0$ обратим, то элемент $x - \lambda$ обратим при $|\lambda - \lambda_0| < \alpha$. Отсюда можно вывести, что спектр такого элемента x пуст.)

9) Пусть A — нормированная алгебра с единицей, в которой единственный левый топологический делитель нуля есть 0 и единственный правый топологический делитель нуля есть 0. Показать, что тогда $A = \mathbf{C} \cdot 1$. (Если $x \in A$ и λ — точка границы $\operatorname{Sp}_{\widehat{A}} x$, то $x - \lambda$ — топологический делитель нуля в $\widehat{A}$ и, стало быть, в A. Следовательно, $x = \lambda$.)

10) Пусть A — нормированная алгебра. Для каждого элемента $x \in A$ положим

$$\lambda(x) = \inf_{y \neq 0} (\|xy\|/\|y\|), \qquad \lambda'(x) = \inf_{y \neq 0} (\|yx\|/\|y\|).$$

Доказать справедливость неравенств

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \leqslant \|x - y\|, \qquad |\lambda'(x) - \lambda'(y)| \leqslant \|x - y\|,$$

$$\lambda(x)\,\lambda(y) \leqslant \lambda(xy) \leqslant \|x\|\,\lambda(y), \qquad \lambda'(x)\,\lambda'(y) \leqslant \lambda'(xy) \leqslant \lambda'(x)\,\|y\|.$$

Вывести отсюда, что множество левых (соответственно правых) топологических делителей нуля замкнуто.

11) Пусть A — банахова алгебра с единицей. Показать, что множество всех необратимых элементов в A, не являющихся топологическими делителями нуля, открыто в A.

12) Пусть X — комплексное банахово пространство, и пусть $x \in A = \mathscr{L}(X)$. Показать, что если x не обратим, то x — левый или правый топологический делитель нуля. (Последовательно рассмотреть случаи:

1°) отображение x не инъективно;

2°) $\overline{x(X)} \neq X$;

3°) x — инъективное отображение, $x(X)$ всюду плотно в X и отлично от X.) Показать, что если x — взаимно непрерывное отображение пространства X на замкнутое подпространство в X, отличное от X, или если x не инъективно отображает X на все X, то x является внутренней точкой множества необратимых элементов в A.

13) Показать, что в алгебре A из примера 5 n°2 функция z не является ни обратимым элементом, ни топологическим делителем нуля.

14) Пусть A — нормированная алгебра с единицей и $B = \mathscr{L}(A)$. Показать, что образ алгебры A при морфизме $x \longmapsto L_x$ является наполненной подалгеброй в B. (Использовать *Алг.*, гл. VIII, § 1, предл. 4.) Следовательно, если $x \in A$, то $\operatorname{Sp}_A x = \operatorname{Sp}_B L_x$.

¶ 15) Пусть A — банахова алгебра.

a) Пусть S — множество ограниченных последовательностей элементов из A с нормой $\|(x_n)\| = \sup \|x_n\|$. Пусть $\mathfrak{R}$ — можество последовательностей $(x_n) \in S$ таких, что $\|x_n\|$ стремится к нулю. Показать, что S — банахова алгебра, а $\mathfrak{R}$ — двусторонний замкнутый идеал в S. Пусть φ: $S \to S' = S/\mathfrak{R}$ — канонический морфизм. Показать, что тогда отображение $x \longmapsto \varphi(x, x, x, \ldots) = \theta(x)$ является изометрическим изоморфизмом алгебры A на некоторую подалгебру в S'. Показать далее, что каждый левый топологический делитель нуля в S' является также левым делителем нуля. Для того чтобы элемент $x \in A$ был левым топологическим делителем нуля, необходимо и достаточно, чтобы элемент $\theta(x)$ был левым делителем нуля в S'.

b) Предположим, что A содержит единичный элемент. Показать, что существуют некоторая банахова алгебра B и изометрический изоморфизм алгебры A на некоторую подалгебру в B, такие, что элемент из A необратим в том и только в том случае, если его образ в B является левым или правым делителем нуля. (Использовать a) и упражнения 12 и 14.)

16) a) Пусть A — нормированная алгебра, $\mathfrak{R}$ — ее радикал. Показать, что если $x \in \mathfrak{R}$, то x — квазинильпотентный элемент. $\left(\text{Имеем } \mathrm{Sp}'_A x = \{0\}\right.$ и тем более $\left.\mathrm{Sp}'_{\widehat{A}}\, x = \{0\}.\right)$

b) Пусть A — банахова алгебра, $\mathfrak{R}$ — ее радикал, $\mathfrak{J}$ — левый идеал в A, все элементы которого квазинильпотентны. Показать, что тогда $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{R}$. (Можно предполагать, что алгебра A содержит единичный элемент. Если $x \in \mathfrak{J}$ и $a \in A$, то $\mathrm{Sp}(ax) = \{0\}$; следовательно, элемент $1 - ax$ обратим и, значит, $x \in \mathfrak{R}$.)

17) Предположим, что A — банахова алгебра, B — алгебра над $\mathbf{C}$ без радикала, φ — морфизм из A в B. Показать, что ядро морфизма φ замкнуто. (Это ядро является пересечением регулярных максимальных левых идеалов.)

18) Пусть A — банахова алгебра, π — ненулевое неприводимое представление алгебры A в комплексном векторном пространстве X. Пусть ξ_0 — ненулевой элемент из X.

a) Показать, что аннулятор $\mathfrak{J}$ точки ξ_0 является регулярным максимальным левым идеалом алгебры A; этот идеал замкнут.

b) Показать, что отображение $x \longmapsto x\xi_0$ определяет после перехода к факторалгебре изоморфизм φ A-модуля $A/\mathfrak{J}$ на A-модуль X.

c) Показать, что изоморфизм φ банахова пространства $A/\mathfrak{J}$ на пространство X индуцирует на последнем норму, относительно которой X становится банаховым пространством, и $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in A$.

d) Показать, что если алгебра A примитивна (*Алг.*, гл. VIII, 5, упр. 5), то $A = \{0\}$ или $\mathbf{C} \cdot 1$ в зависимости от того, содержит ли A единичный элемент или нет. (Использовать предыдущие упражнения и следствие 4 теоремы 1.)

¶ 19) Пусть A — банахова алгебра и $\mathfrak{R}$ — ее радикал.

a) Показать, что если $r \in \mathfrak{R}$, то ряд

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4r)^k$$

сходится к элементу $x \in \mathfrak{R}$, такому, что $x^2 - x + r = 0$.

b) Пусть класс смежности в $A/\mathfrak{R}$, которому принадлежит элемент $u \in A$, является идемпотентом. Показать, что существует идемпотент в A, сравнимый с элементом u по модулю $\mathfrak{R}$. (Можно предполагать, что A содержит единичный элемент. Пусть $q = u - u^2 \in \mathfrak{R}$ и $x \in \mathfrak{R}$ — построенное с помощью a) решение уравнения $x^2 - x - q(1 - 4q)^{-1} = 0$. Тогда $u - (2u - 1)x$ — искомый идемпотент.)

20) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$, ζ — точка границы $\mathrm{Sp}_A x$. Показать, что резольвента элемента x не может быть продолжена до функции, непрерывной в точке ζ.

21) Пусть A — банахова алгебра с единицей, Δ — некоторая открытая часть в $\mathbf{C}$, $\lambda \longmapsto R(\lambda)$ — отображение Δ в A, такое, что

$$(1) \qquad R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda - \mu)\, R(\lambda) R(\mu)$$

при всех λ, $\mu \in \Delta$.

a) Пусть $\lambda_0 \in \Delta$. Показать, что для всех $\lambda \in \Delta$, таких, что $|\lambda - \lambda_0| \times \|R(\lambda)\| < 1$, справедливо равенство

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0)^{n+1}.$$

b) Показать, что для всех $\lambda \in \Delta$

$$(d^n/d\lambda^n)\, R(\lambda) = (-1)^n n!\, R(\lambda)^{n+1}.$$

c) Показать, что если отображение R голоморфно на бесконечности, то существуют элементы x, j, $z \in A$, такие, что $z^2 = 0$, $j^2 = j$, $zj = jz = 0$, $x \in jAj$ и для достаточно больших значений $|\lambda|$ имеет место равенство $R(\lambda) = z + jR(\lambda, x)$. (Записать $R(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n}$ при $|\lambda| > \lambda_0$ и воспользоваться тем, что для R справедливо равенство (1). Можно положить $c_0 = z$, $c_1 = j$, $c_2 = x$.)

d) Показать, что отображение R есть сужение на Δ резольвенты некоторого элемента из A в том и только в том случае, если при некотором $\lambda_0 \in \Delta$ элемент $R(\lambda_0)$ обратим.

e) Показать, что при всех $x \in A$ функция $\lambda \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n x^{n+1}$ удовлетворяет соотношению (1), если $|\lambda - \lambda_0|\, \|x\| < 1$.

¶ 22) a) Пусть B — банахова алгебра с единицей, $w \in B$, $C > 1$ и $\varepsilon > 0$. Показать, что существует $\eta > 0$, такое, что из условий $u \in B$, $\|u\| < C$, $\|uw - w\| < \eta$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/4C$ следует неравенство $\|yw - w\| < \varepsilon$, где $y = (1 - \gamma + \gamma u)^{-1}$.

b) Пусть A — банахова алгебра. Предположим, что существует постоянная C, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ существует элемент $u \in A$, для которого $\|u\| < C$, $\|ux_1 - x_1\| < \varepsilon, \ldots, \|ux_n - x_n\| < \varepsilon$. Показать, что для всякого $z \in A$ и любого $\delta > 0$ существуют элементы $x, y \in A$, такие, что $z = xy$, $y \in \overline{Az}$, $\|z - y\| < \delta$. (Можно считать, что $C > 1$. Пусть $\gamma = 1/4C$. Применяя a) к $\widetilde{A}$, определить по индукции последовательность $u_1, u_2, \ldots$ элементов в A, таких, что $\|u_n\| < C$, элементы

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma (1 - \gamma)^{k-1} u_k + (1 - \gamma)^n$$

имеют обратные t_n, и при этом $\|t_n z - t_{n-1} z\| < \delta/2^n$, $\|t_1 z - z\| < \delta/2$. Полагая $y_n = t_n z$, мы видим, что y_n стремятся к некоторому пределу $y \in A$, а x_n стремятся к элементу $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma (1 - \gamma)^{k-1} u_k$; элементы x и y обладают требуемыми свойствами.)

c) Пусть A — банахова алгебра, удовлетворяющая всем условиям из b). Пусть $(z_1, z_2, \ldots)$ — некоторая последовательность элементов из A, стремящаяся к 0. Показать, что существуют элементы $x, y_1, y_2, \ldots$ из A, такие, что $z_n = xy_n$ для всех n и y_n стремится к 0.

23) a) Пусть E — банахово пространство, f: $\mathbf{C} \to E$—целая функция и $\theta \longmapsto P(\theta) = \sum_{\mu=k}^{m} c_\mu e^{\mu i\theta}$ — тригонометрический полином ($c_k \neq 0$). Предположим, что $|P(\theta)| \cdot \| f(re^{i\theta}) \| \leqslant Mr^\alpha$ для всех $r \geqslant r_0$ (M, r_0, α — неотрицательные постоянные). Показать, что тогда функция f является полиномом степени $\leqslant \alpha$. $\Bigl($Пусть $f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu$, $J(r, p) = r^{-p} \int_0^{2\pi} P(\theta) f(re^{i\theta}) \times$ $\times e^{-(k+p)i\theta}\, d\theta$. Тогда $J(r, p)$ стремится к 0, когда r стремится к $+\infty$, а $p > \alpha$; с другой стороны, $\lim_{r \to +\infty} J(r, p) = c_k a_p$.$\Bigr)$

b) Аналогично, показать, что если α — целое число и $r^{-\alpha} |P(\theta)| \times$ $\times \| f(re^{i\theta}) \|$ стремится к 0 при $r \to +\infty$, то f — многочлен степени, меньшей α.

c) Пусть A — банахова алгебра с единицей, x — квазинильпотентный элемент A. Предположим, что для некоторого целого $n > 0$ имеем $r^{-n} |\cos^n \theta| \cdot \| (1 - \lambda x)^{-1} \| \to 0$ при $r \to +\infty$ $(\lambda = re^{i\theta})$. Показать, что тогда $x^n = 0$. (Применить b).)

¶ 24) a) Пусть E — банахово пространство, x: $\mathbf{C} - \{1\} \to E$ — целая функция от $1/(\zeta - 1)$, $x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$, $x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}$ — разложения функции x при $|\zeta| < 1$, соответственно при $|\zeta| > 1$. Допустим, что $\|a_n\| = o(n^\alpha)$, $\|b_n\| = o(n^\alpha)$, $\alpha > 0$. Показать, что тогда $x(\zeta)$ является многочленом от $1/(\zeta - 1)$ степени, меньшей $\alpha + 1$. (Пусть $\varepsilon > 0$. Для $r_\varepsilon \leqslant r = |\zeta| < 1$ имеет место неравенство $\|x(\zeta)\| \leqslant \varepsilon (1 - r)^{-1-\alpha}$, а при $1 < r \leqslant r'_\varepsilon$ — неравенство $\|x(\zeta)\| \leqslant \varepsilon \left(1 - r^{-1}\right)^{-1-\alpha}$. Полагая $1 - \zeta = \left(\omega + \frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\omega = Re^{i\theta}$, показать, что для $0 \leqslant r < 1$ и $R \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$(1 - r)^{-1} \leqslant \frac{9}{4} \frac{R}{\cos\theta},$$

а для $1 < r$ и $R \geqslant 1$

$$\left(1 - r^{-1}\right)^{-1} \leqslant \frac{9}{4} \frac{R}{\cos\theta}.$$

Положить $y(\omega) = x(\zeta)$ и показать, что $R^{-\alpha-1} |\cos\theta|^{\alpha+1} \cdot \| y(Re^{i\theta}) \|$ стремится к 0 при $R \to +\infty$ равномерно по θ. Применить затем упражнение 23 b).)

b) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $q \in A$ — некоторый квазинильпотентный элемент, $x = 1 + q$. Показать, что для выполнения равенства $q^N = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\| x^{\pm n} \| = o(n^N)$ при $n \to +\infty$. (Для доказательства достаточности показать, применяя a), что $R(\lambda, x)$ — многочлен от $1/(\lambda - 1)$ степени, не превосходящей N. С другой стороны, $R(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n (\lambda - 1)^{-n-1}$.) Вывести отсюда, что если $\mathfrak{P}$ — радикал в A и если G — некоторая подгруппа группы обратимых в A элементов, такая, что $\|x^{\pm n}\| = o(n)$ для всех $x \in G$, то сужение на G канонического отображения $A \to A/\mathfrak{P}$ инъективно.

25) a) Пусть A — нормированная алгебра, x и y — элементы из A, такие, что $xy - yx = y$. Показать, что $y^n = 0$ при $n > 2\|x\|$. (Применить формулу $xy^n - y^n x = ny^n$.)

b) Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая алгебра Ли конечной размерности над $\mathbf{C}$. Показать, что если алгебра $\mathfrak{L}$ не нильпотентна, то она содержит два ненулевых элемента x, y, таких, что $[x, y] = y$. (Воспользоваться существованием такого элемента $x \in \mathfrak{L}$, для которого $\operatorname{ad}(x)$ не нильпотентен.)

c) Пусть $\mathfrak{L}$ — вещественная или комплексная алгебра Ли конечной размерности, такая, что обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{L}$ обладает нормой, согласованной со структурой алгебры. Показать, что алгебра $\mathfrak{L}$ нильпотентна. (Применить a) и b).)

d) Пусть V — вещественное или комплексное векторное пространство конечной размерности, $\mathfrak{L}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, состоящая из нильпотентных эндоморфизмов, $x_1, \ldots, x_n$ — элементы в $\mathfrak{L}$. Пусть $\alpha > 0$. Показать, что на V существует структура гильбертова пространства, такая, что $\|x_i\| \leqslant \alpha$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

e) Пусть $\mathfrak{L}$ — вещественная или комплексная алгебра Ли конечной размерности. Пусть, далее, $\mathfrak{L}$ нильпотентна и U — ее обертывающая алгебра. Показать, что на U существует норма, согласованная со структурой алгебры. (Используя *Группы и алг. Ли*, гл. 1, § 3, упр. 5, и § 7, упр. 3, показать, что существует семейство (π_λ) представлений алгебры $\mathfrak{L}$ в пространствах V_λ конечной размерности, обладающих следующим свойством: для каждого элемента $u \in U$ существует λ, такое, что $\pi_\lambda(u) \neq 0$ и $\pi_\lambda(\mathfrak{L})$ состоит при всех λ из нильпотентных эндоморфизмов. Наделяя каждое пространство V_λ гильбертовой структурой в соответствии с d), получить в прямой сумме V гильбертовых пространств V_λ представление π алгебры $\mathfrak{L}$, состоящее из непрерывных эндоморфизмов, и тем самым обнаружить существование инъективного морфизма φ из U в $\mathscr{L}(V)$. Положить затем $\|u\| = \|\varphi(u)\|$ для всякого $u \in U$.)

f) Пусть A — нормированная алгебра с единицей, x и y — элементы из A. Показать, что если $A \neq \{0\}$, то $xy - yx \neq 1$. (Первое доказательство: имеет место равенство

$$\operatorname{Sp}'(xy) = \operatorname{Sp}'(yx);$$

если $xy = yx + 1$, то $\operatorname{Sp}(xy)$ переходит в $\operatorname{Sp}(yx)$ в результате преобразования $z \mapsto z + 1$; отсюда следует, что $\operatorname{Sp}'(xy)$ неограничен, что абсурдно. Второе доказательство: если $[x, y] = 1$, то $[xy, y] = y$, откуда, в силу a), для достаточно большого n имеем $y^n = 0$; так как $[x, y^p] = py^{p-1}$, то получается, что $y = 0$.)

26) Пусть A — нормированная алгебра и $x \in A$. Элемент x называют топологически нильпотентным, если $x^n \to 0$ при $n \to \infty$. Показать, что x топологически нильпотентен тогда и только тогда, когда $\rho(x) < 1$.

27) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Предположим, что каждый замкнутый идеал в A имеет конечный тип (т. е. представляется в виде $Ax_1 + \ldots + Ax_n$, где $x_1, \ldots, x_n \in A$).

a) Показать, что всякий идеал $\mathfrak{J}$ в A замкнут. (Имеем $\overline{\mathfrak{J}} = Ax_1 + \ldots + Ax_n$, где $x_1, \ldots, x_n \in A$. Пусть $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots)$ — последовательность элементов из $\mathfrak{J}$, сходящаяся к x_i. Для $(y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ положим

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \overline{\mathfrak{J}},$$

$$\varphi_p(y_1, \ldots, y_n) = x_{1p} y_1 + \ldots + x_{np} y_n \in \mathfrak{J}.$$

Имеем $\varphi \in \mathscr{L}(A^n, \overline{\mathfrak{J}})$, $\varphi_p \in \mathscr{L}(A^n, \overline{\mathfrak{J}})$, $\|\varphi - \varphi_p\| \to 0$ при $p \to +\infty$ и φ — сюръективное отображение. Рассматривая сопряженные отображения к φ и φ_p, заключаем, что φ_p сюръективно при достаточно больших p. Стало быть, $\mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{J}}$.)

b) Показать, что если A — алгебра без делителей нуля, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$. (Применить а) и упражнение 9.)

c) Показать, что если единственный нильпотентный элемент в A есть 0, то существует целое $n \geqslant 0$, такое, что A изоморфна $\mathbf{C}^n$. (Так как алгебра A нётерова, то $\{0\}$ является пересечением простых идеалов $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$; эти идеалы замкнуты в силу а) и $A/\mathfrak{p}_i$ изоморфны $\mathbf{C}$ в силу b).)

d) Показать, что в общем случае $\dim_{\mathbf{C}} A < +\infty$. (Пусть $\mathfrak{R}$ — множество нильпотентных элементов в A, являющееся (замкнутым) идеалом в A. Тогда, в силу с), $\dim (A/\mathfrak{R}) < +\infty$. Так как $\mathfrak{R}$ — идеал конечного типа, то $\mathfrak{R}^n = 0$ для достаточно большого n. Наконец, каждый идеал $\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1}$ является модулем конечного типа над $A/\mathfrak{R}$, следовательно, $\dim (\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1}) < +\infty$.)

28) Пусть A — алгебра с единицей над $\mathbf{C}$, наделенная локально выпуклой отделимой топологией, такой, что умножение в A раздельно непрерывно. Элемент $a \in A$ называют регулярным, если существует $r \geqslant 0$, такое, что $a - \lambda$ обратим для $|\lambda| \geqslant r$, а множество элементов вида $(a-\lambda)^{-1}$ при $|\lambda| \geqslant r$ ограничено.

a) Показать, что если элемент a регулярен, то $\lambda (a - \lambda)^{-1}$ остается ограниченным при $|\lambda| \geqslant r$.

b) Показать, что если отображение $x \mapsto x^{-1}$ определено в окрестности точки 1 и непрерывно в точке 1, то все элементы из A регулярны.

c) Пусть U_a для каждого $a \in A$ есть множество таких $\lambda \in \mathbf{C}$, что $(a - \mu)^{-1}$ существует и ограничено для всех μ из некоторой окрестности λ. Пусть $S_a = \mathbf{C} - U_a$. Показать, что S_a замкнуто, и если a — регулярный элемент в A, то S_a — непустой компакт (в предположении, что $A \neq \{0\}$).

d) Пусть $a \in A$. Показать, что функция $\lambda \mapsto (a - \lambda)^{-1}$ голоморфна в U_a.

e) Пусть $a \in A$. Доказать, что $\lambda \in U_a$ в том и только в том случае, когда элемент $a - \lambda$ имеет регулярный обратный.

f) Показать, что если все элементы в A регулярны и A есть тело, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$.

29) Пусть A — алгебра над $\mathbf{R}$, являющаяся телом и снабженная отделимой локально выпуклой топологией, относительно которой умножение в A непрерывно, а отображение $x \mapsto x^{-1}$ непрерывно в точке 1. Показать, что тогда алгебра A $\mathbf{R}$-изоморфна $\mathbf{R}$, или $\mathbf{C}$, или $\mathbf{H}$. (Если алгебра A коммутативна над $\mathbf{C}$ и существует элемент $u \in A$, такой, что $u^2 = -1$, — снабдить A структурой алгебры над $\mathbf{C}$ и применить упражнение 28 f). Если A коммутативна, но такого элемента не существует, — применить упражнение 28 f) к алгебре $A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, которая является телом. Если алгебра A не коммутативна, — рассуждать так же, как в *Комм. алг.*, гл VI, § 6, n° 4, теор. 1, третий случай.)

¶ 30) Пусть A — алгебра над $\mathbf{C}$, состоящая из сужений на $(0, 1)$ рациональных функций одной переменной с комплексными коэффициентами. Эта алгебра является телом.

a) Снабдить алгебру A топологией сходимости по мере (*Интегр.*, гл. IV, 2-е изд., § 5, n° 11). Показать, что в этой топологии отображения $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывны и отображение $x \mapsto x^{-1}$ из A^* в A также непрерывно. Эта топология в A не является локально выпуклой.

b) Для каждого $n \in \mathbf{N}^*$ определим последовательность $(w_{r, n})_{r \in \mathbf{Z}}$ равенствами $w_{-r, n} = (r + 1)^{n(r+1)}$ для $r \geqslant 1$, $w_{0, n} = 1$, $w_{s, n} = (s + 1)^{-(s+1)/n}$

для $s \geqslant 1$. Если $f \in A$, положим $p_n(f) = \sum_r w_{r,\,n} |a_r| < +\infty$, где $\sum a_r t^r$ — разложение Лорана функции $f(t)$ относительно точки 0. Показать, что тогда p_n являются полунормами, которые определяют на A метризуемую локально выпуклую топологию. Отображение $(x, y) \mapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывно в этой топологии. Отображение $x \mapsto x^{-1}$ из A^* в A не является непрерывным. Наконец, алгебра A не полна в этой топологии.

31) a) Пусть A — алгебра над $\mathbf{C}$, снабженная локально выпуклой топологией. Показать, что следующие условия эквивалентны: α) существует фундаментальная система (U_i) уравновешенных выпуклых окрестностей нуля, таких, что $U_i U_i \subset U_i$ для всех i; β) алгебра A изоморфна некоторой подалгебре произведения нормированных алгебр; γ) топология в A может быть определена с помощью семейства полунорм p_i, удовлетворяющих неравенству $p_i(xy) \leqslant p_i(x)\, p_i(y)$ при любых $x, y \in A$. Алгебру A, удовлетворяющую этим условиям, называют локально m-выпуклой. Показать, что в этом случае отображение $(x, y) \mapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывно. Если алгебра A содержит единичный элемент и G — множество всех ее обратимых элементов, то отображение $x \mapsto x^{-1}$ из G в A непрерывно.

b) Пусть A — локально m-выпуклая алгебра с единичным элементом. Показать, что спектр каждого элемента из A не пуст. Если A — тело, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$.

c) Пусть A — полная, локально m-выпуклая алгебра. Показать, что существуют фильтрующееся возрастающее упорядоченное множество I, семейство $(A_i)_{i \in I}$ банаховых алгебр и непрерывные морфизмы $\pi_{ij}\colon A_j \mapsto A_i$ для $i \leqslant j$, удовлетворяющие соотношению $\pi_{ij}\pi_{jk} = \pi_{ik}$, такие, что алгебра A изоморфна подалгебре в $\prod_i A_i$, состоящей из тех элементов (x_i), для которых $\pi_{ij}(x_j) = x_i$ при $i \leqslant j$.

d) Показать, что алгебра $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$, снабженная топологией компактной сходимости, локально m-выпукла. Показать, далее, что множество обратимых элементов из $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ плотно в $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ и не является открытым.

e) Пусть D — открытая часть в $\mathbf{C}$, A — алгебра комплексных голоморфных в D функций, снабженная топологией компактной сходимости. Показать, что тогда алгебра A локально m-выпукла. Ненулевой предел последовательности обратимых элементов из A обратим в A.

f) Показать, что алгебра всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на $(0, 1)$, снабженная топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными, является локально m-выпуклой.

g) Пусть A — алгебра (классов) комплексных функций f на $(0, 1)$, таких, что $f \in L^p((0, 1))$ для каждого $p > 1$. Показать, что алгебра A, снабженная нормой $f \mapsto \|f\|_p$ $(p > 1)$, не является локально m-выпуклой, но отображение $(x, y) \mapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывно.

§ 3

1) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — максимальный идеал в A. Показать, что возможны только два следующих случая: 1) $\mathfrak{J}$ — ядро некоторого характера алгебры A; 2) $\mathfrak{J}$ — некоторая гиперплоскость, содержащая A^2 (применить упражнение 6 к § 1). В частности, если идеал $\mathfrak{J}$ не замкнут, то $\mathfrak{J}$ — гиперплоскость, плотная в A и содержащая A^2. (Чтобы получить пример этой последней ситуации, воспользоваться упражнением 3.)

2) Пусть A — банахова алгебра всех последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ комплексных чисел, стремящихся к нулю, с нормой $\|x\| = \sup_i |\xi_i|$. Пусть

$\mathfrak{J}$ — множество всех тех последовательностей x, которые имеют лишь конечное число отличных от нуля членов. Показать, что тогда $\mathfrak{J}$ — идеал, плотный в A и не содержащийся ни в одном максимальном идеале. (Заметить, что $A^2 = A$, и применить упражнение 1.)

3) Пусть Λ — некоторое множество, $p \in [1, \infty[$ и $A = l^p(\Lambda)$ — множество всех $x = (\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\xi_\lambda \in \mathbf{C}$, для которых $\| x \|_p = \left(\sum_\lambda | \xi_\lambda |^p \right)^{1/p} < +\infty$. Показать, что A — банахова алгебра относительно сложения и обычного умножения. (Если $\| (\xi_\lambda) \|_p \leqslant 1$ и $\| (\eta_\lambda) \|_p \leqslant 1$, то

$$\sum_\lambda | \xi_\lambda \eta_\lambda |^p \leqslant \left(\sum_\lambda | \xi_\lambda |^{p^2} \right)^{1/p} \left(\sum_\lambda | \eta_\lambda |^{pq} \right)^{1/q},$$

где $1/q + 1/p = 1$, откуда следует, что $\| (\xi_\lambda \eta_\lambda) \|_p \leqslant 1$.) Показать, далее, что $A^2 \neq A$, A^2 плотно в A и множество ненулевых характеров алгебры A естественным образом отождествляется с множеством Λ, снабженным дискретной топологией. (Воспользоваться тем, что двойственным пространством к $l^p(\Lambda)$ является $l^q(\Lambda)$. Преобразование Гельфанда оказывается тогда тождественным отображением, а его образ в пространстве функций, стремящихся к 0 на бесконечности в Λ, — плотным и не замкнутым.)

4) Пусть A — банахово пространство комплексных функций, интегрируемых на $[0, 1]$ по мере Лебега. Доказать, что если положить

$$(f \cdot g)(\omega) = \int_0^\omega f(\omega - \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta$$

для $\omega \in [0, 1]$, то функция $f \cdot g$ определена почти всюду и является элементом алгебры A. (Продолжить f и g нулем на $\mathbf{R} - [0, 1]$ и применить *Интегр.*, гл. VIII, § 4, n° 5, предл. 12.) Показать, что A оказывается коммутативной банаховой алгеброй. Пусть $x \in A$ — постоянная функция, равная 1. Тогда функция x^n имеет вид

$$\omega \longmapsto \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Показать, что алгебра A порождается элементом x, что x — квазинильпотентный элемент и что алгебра A совпадает со своим радикалом. Пусть e_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — элементы из A, определенные равенствами $e_n(t) = n$ для $0 \leqslant t \leqslant 1/n$, $e_n(t) = 0$ для $t > 1/n$. Воспользоваться этой системой элементов для проверки того, что алгебра A обладает свойством, указанным в упр. 22 к § 2, в частности, что $A^2 = A$. Применяя упражнение 1, показать, что алгебра A не содержит ни одного максимального идеала (регулярного или нет, замкнутого или нет.)

5) Пусть $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ — последовательность положительных чисел, таких, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m \alpha_n$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \alpha_k^{1/k} = 0$. Пусть A — множество формальных рядов $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k \zeta^k \in \mathbf{C}[[\zeta]]$, таких, что $\| x \| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\xi_k| \alpha_k < +\infty$. Показать, что A — коммутативная банахова алгебра с единицей, порожденная элементом ζ, причем единственным максимальным идеалом в A является множество всех элементов $x \in A$ с нулевым постоянным членом в разложении по степеням ζ. (Заметить, что элемент ζ квазинильпотентен.)

6) Показать, что в алгебре $\mathbf{C}(X)$ рациональных функций над $\mathbf{C}$ множество $\{0\}$ является максимальным идеалом, но не коразмерности 1.

7) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей и $\chi \in X(A)$. Для каждого элемента $x \in A$ положим $\| x \|_\chi = |\chi(x)| + \| x - \chi(x) \|$. Показать, что $x \longmapsto \|x\|_\chi$ является нормой, что $\| xy \|_\chi \leqslant \| x \|_\chi \| y \|_\chi$, $\| e \|_\chi = 1$ и

$$\| x \| \leqslant \| x \|_\chi \leqslant 3 \| x \|, \quad \text{если} \quad \| e \| = 1.$$

8) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, такая, что $\| 1 \| = 1$. Пусть N — множество всех норм в A, эквивалентных исходной, по отношению к которым A еще остается банаховой алгеброй, а 1 имеет норму 1.

a) Пусть элемент $x_0 \in A$ таков, что $\rho(x_0) < 1$. Для каждого $x \in A$ положим

$$\| x \|' = \inf \sum_n \| a_n \|,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям x в виде $a_0 + a_1 x_0 + \ldots \ldots + a_n x_0^n$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in A)$. Показать, что норма $x \longmapsto \| x \|'$ является элементом N. (Так как $\rho(x_0) < 1$, то $\left\| x_0^n \right\| \leqslant k$ при всех n, откуда $\| x \| \leqslant k \| x \|'$.) Показать, что $\| x_0 \|' \leqslant 1$.

b) Вывести из a), что для каждого элемента $x \in A$ имеет место равенство

$$\rho(x) = \inf_{n \in N} n(x).$$

c) Показать, что если единственным элементом в N является исходная норма в A, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$. (Применить b) и упр. 7.)

9) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, D — непрерывное линейное отображение A в A, такое, что $D(ab) = (Da)b + a(Db)$ для всех $a, b \in A$.

a) Показать, что для каждого характера $\chi \in X'(A)$ и каждого $\lambda \in \mathbf{C}$ ряд $\varphi_\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^n / n!) \chi(D^n a)$ сходится; $\lambda \longmapsto \varphi_\lambda(a)$ — целая функция и отображение $a \longmapsto \varphi_\lambda(a)$ является характером алгебры A.

b) Показать, что число $\varphi_\lambda(a)$ не зависит от λ. (Заметить, что $|\varphi_\lambda(a)| \leqslant \| a \|$ в силу a).) Следовательно, $\chi(Da) = 0$.

c) Показать, что D переводит алгебру A в ее радикал. Вывести отсюда новое доказательство упр. 25 f) к § 2.

10) Пусть D — алгебра всех бесконечно дифференцируемых функций $f\colon [0, 1] \to \mathbf{C}$.

a) Пусть A — некоторая подалгебра в D, снабженная нормой, относительно которой A является банаховой алгеброй. Показать, что существует последовательность $(m_0, m_1, m_2, \ldots)$ неотрицательных чисел, таких, что для каждого $x \in A$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x^{(n)}(t) | = O(m_n).$$

(Пусть D_n — банахова алгебра функций, n раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$. В силу предложения 6, каноническая инъекция $A \to D_n$ непрерывна; пусть M_n — ее норма; если $x \in A$, то $(1/n!) \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x^{(n)}(t) | \leqslant M_n \| x \|$.)

b) Показать, что не существует никакой нормы на D, относительно которой D становится банаховой алгеброй. (Для каждой последовательности неотрицательных чисел $(m_0, m_1, \ldots)$ существует функция $f \in D$, такая, что $f^{(n)}(0) = n m_n$ при всех $n \geqslant 0$. Применить a).)

11) a) Пусть A — банахова алгебра, χ — некоторый морфизм из A в $\mathbf{C}$. Показать, что $|\chi(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in A$. (Доказательство то же, что и для теоремы 1.)

b) Доказать справедливость предложения 6 без предположения о коммутативности банаховой алгебры A.

12) Пусть A — банахова алгебра с единицей (x_n) — некоторая последовательность обратимых элементов из A, сходящаяся к элементу $x \in A$. Показать, что если последовательность $\left(\rho\left(x_n^{-1}\right)\right)$ ограничена и если $x_n x = x x_n$ при всех n, то элемент x обратим. (В силу следствия предложения 5 имеет место неравенство $\rho\left(1 - x_n^{-1}x\right) \leqslant \rho\left(x_n^{-1}\right)\rho\left(x_n - x\right)$; следовательно, элемент $x_n^{-1}x$ обратим при достаточно больших n.)

¶ 13) Пусть A — банахова алгебра $l^2(\mathbf{N})$ (упр. 3). Пусть A_0 — подалгебра, образованная теми последовательностями, в которых только конечное число членов отлично от нуля. Пусть B — прямая сумма A_0 и $\mathbf{C}$ с умножением $(f, \alpha)(g, \beta) = (fg, 0)$ для всех $f, g \in A_0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ и нормой

$$\|(f, \alpha)\| = \sup\left(\|f\|, \left|\alpha - \sum_n f(n)\right|\right).$$

Показать, что тогда $\widehat{B}$ является коммутативной банаховой алгеброй, радикал которой $\mathfrak{R}$ совпадает с $\mathbf{C}\cdot(0, 1)$, а факторалгебра $\widehat{B}/\mathfrak{R}$ изометрически изоморфна A. Пусть $\pi\colon \widehat{B} \to \widehat{B}/\mathfrak{R}$ — канонический морфизм. Показать, что не существует никакой подалгебры B_1 в $\widehat{B}$ с дополнением $\mathfrak{R}$, для которой отображение $\pi \mid B_1\colon B_1 \to \widehat{B}/\mathfrak{R} = A$ является гомеоморфизмом. (Пусть B_1 — такая подалгебра. Пусть элемент $u_k \in A$ таков, что $u_k(k) = 1$, $u_k(k') = 0$ для $k' \neq k$. Пусть, далее, $e_k \in B_1$ и $\pi(e_k) = u_k$. Показать, что $e_k \in A_0$, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k/k$ сходится в A, но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e_k/k$ не сходится в $\widehat{B}$.)

14) Пусть Ω — компактное множество в $\mathbf{C}^2$, определенное неравенством

$$\frac{1}{2} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1,$$

и пусть A — подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$, состоящая из функций, голоморфных в $\mathring{\Omega}$. Пусть U—открытое множество, определенное неравенством $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$. На основании теоремы Хартогса [1] для каждой функции $f \in A$ существует и притом единственная функция $\tilde{f} \in \mathscr{C}(\overline{U})$, голоморфная в U и совпадающая с функцией f на Ω. Показать, что каноническая инъекция из A в $\mathscr{C}(\Omega)$ есть изометрический морфизм h, а его образ является наполненной подалгеброй в $\mathscr{C}(\Omega)$, но отображение $\mathrm{X}(h)$ не сюръективно.

15) Пусть A и B — коммутативные банаховы алгебры с единицей, φ — морфизм алгебр с единицей из A в B, (x_λ) — семейство элементов из A, такое, что замкнутая наполненная подалгебра в A, порожденная этим семейством, совпадает с A. Показать, что для того, чтобы $\mathrm{X}(\varphi)$ был сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda)) = \mathrm{Sp}_B((\varphi(x_\lambda)))$. (Применить диаграмму (1), n° 5, где правая стрелка соответствует биективному отображению в силу предложения 9.)

16) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, B — банахова алгебра непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности в простран-

[1] См., например, книгу: Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, М., 1951 (переменная u предполагается там вещественной, но можно ее считать и комплексной).

стве $\mathrm{X}(A)$. Показать, что следующие условия эквивалентны: (i) A — алгебра без радикала и $\mathscr{G}(A)$ замкнуто в B; (ii) $\mathscr{G}$ является гомеоморфизмом A на $\mathscr{G}(A)$; (iii) существует постоянная $a > 0$, такая, что $\|x\|^2 \leqslant a\|x^2\|$ для всех $x \in A$.

17) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, h — каноническая инъекция из $\mathfrak{J}$ в A. Показать, что пространство $\mathrm{X}'(\mathfrak{J})$ отождествляется с факторпространством $\mathrm{X}'(A)$ по отношению эквивалентности, определяемому отображением $\mathrm{X}'(h)$. (Применить упражнение 4а) к § 1.)

18) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, x — некоторый элемент из A. Предположим, что наполненная замкнутая подалгебра в A, порожденная элементом x, совпадает с A. Тогда отображение $\chi \longmapsto \chi(x)$ позволяет отождествить $\mathrm{X}(A)$ и $\mathrm{Sp}\, x$. Пусть $\mathscr{H}$ — множество функций вида $\mathscr{G}y$ на $\mathrm{Sp}\, x$, когда y пробегает всю алгебру A. Показать, что тогда множество $\check{S}_{\mathscr{H}}(\mathrm{Sp}\, x)$ (*Интегр.*, гл. IV, 2-е изд., § 7, n° 4) является границей $\mathrm{Sp}\, x$ относительно $\mathbf{C}$. (Для проверки того, что $\check{S}_{\mathscr{H}}(\mathrm{Sp}\, x)$ содержится в этой границе, применить принцип максимума. Обратно, пусть z_0 — некоторая точка этой границы; для доказательства ее принадлежности к $\check{S}_{\mathscr{H}}(\mathrm{Sp}\, x)$ рассмотреть $(x - z_1)^{-1}$, когда z_1 достаточно близко к z_0 в $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}\, x$.)

19) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, B — замкнутая подалгебра с единицей в A, T — отображение $\chi \longmapsto \chi \mid B$ из $\mathrm{X}(A)$ в $\mathrm{X}(B)$, R — отношение эквивалентности в $\mathrm{X}(A)$, определенное отображением T. Показать, что тогда T определяет (в результате перехода к факторпространству) гомеоморфизм $\mathrm{X}(A)/R$ на $T(\mathrm{X}(A))$, и для каждой функции $f = \mathscr{G}_B(x)$ (где $x \in B$) величина $|f|$ достигает своего максимума на $T(\mathrm{X}(A))$.

20) Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$, A — множество всех $f \in \mathscr{C}(\Delta)$, голоморфных внутри Δ, A_1 — банахова подалгебра в $\mathscr{C}(\Delta)$, порожденная алгеброй A и функцией $z \longmapsto |z|$. Показать, что $\mathrm{X}(A_1)$ гомеоморфно множеству тех точек $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, для которых $x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3^2$, $0 \leqslant x_3 \leqslant 1$.

21) а) Пусть $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — некоторое семейство переменных. Для каждого формального ряда $f \in \mathbf{C}[[X_\lambda]]_{\lambda \in \Lambda}$ обозначим через $\|f\|$ сумму абсолютных значений его коэффициентов. Пусть A — множество таких $f \in \mathbf{C}[[X_\lambda]]_{\lambda \in \Lambda}$, что $\|f\| < +\infty$. Показать, что после введения обычных операций сложения и умножения A становится коммутативной банаховой алгеброй с единицей без радикала.

b) Показать, что для любой коммутативной банаховой алгебры с единицей B существует алгебра типа A и непрерывный морфизм алгебр с единицей из A на B.

22) Пусть Ω — некоторая компактная часть $\mathbf{C}^n$. Показать, что отображение

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \longmapsto (\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$$

является гомеоморфизмом компакта Ω на полиномиально выпуклую компактную часть $\mathbf{C}^{2n}$. (Пусть $A = \mathscr{C}(\Omega)$, z_i — координатные функции на $\mathbf{C}^n$. Тогда $(z_i \mid \Omega, \bar{z}_i \mid \Omega)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ есть система топологических образующих в A, а рассматриваемое отображение есть отображение из $\mathrm{X}(A) = \Omega$ в $\mathbf{C}^{2n}$, определяемое этой системой топологических образующих.)

23) Пусть $\alpha \in]0, 1[$, Ω — множество точек $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2$, таких, что $|\zeta_1| \leqslant 1$, $|\zeta_2| \leqslant 1$, Ω_α — множество точек $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2$, таких, что

$$|\zeta_1| \leqslant 1, \quad |\zeta_2| \leqslant (1 - \alpha)|\zeta_1| + \alpha.$$

a) Показать, что дополнения к Ω и Ω_α в $\mathbf{C}^2$ связны.

b) Показать, что Ω является полиномиально выпуклой оболочкой Ω_α. (Если $(\zeta_1^0, \zeta_2^0) \in \Omega$ и $P \in \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2]$, то существует число $\xi \in \mathbf{C}$, такое, что $|\xi| = 1$ и $|P(\zeta_1^0, \zeta_2^0)| \leqslant |P(\xi, \zeta_2^0)|$; но $|P(\xi, \zeta_2^0)| \leqslant \sup\limits_{(\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega_\alpha} |P(\zeta_1, \zeta_2)|$.)

24) Пусть A — коммутативная полная локально m-выпуклая алгебра с единицей.

a) Показать, что элемент x из A обратим в том и только в том случае, когда $\chi(x) \neq 0$ для всех непрерывных характеров χ алгебры A. Радикал в A является пересечением всех ядер непрерывных характеров алгебры A и, стало быть, замкнут.

b) Пусть в примере упр. 31d) к § 2 $\mathfrak{J}$ — идеал, образованный всеми f, такими, что $f(n) = 0$ для всех достаточно больших целых $n > 0$. Показать, что тогда каждый максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{J}$, является плотным и имеет бесконечную коразмерность.

§ 4

1) Пусть A — банахова алгебра с единицей, G — группа ее обратимых элементов. Показать, что

a) Подгруппа из G, порожденная $\exp A$, является связной компонентой единицы группы G.

b) Для того чтобы элемент $x \in A$ представлялся в виде $\exp y$ ($y \in A$), необходимо и достаточно, чтобы он содержался в коммутативной связной подгруппе из G.

c) Для того чтобы элемент $x \in A$ представлялся в виде $\exp y$ ($y \in A$), достаточно, чтобы 0 принадлежал неограниченной связной компоненте $\mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$.

2) Пусть A — банахова алгебра с единицей, G — группа ее обратимых элементов, G_1 — связная компонента единицы в G.

a) Пусть $x \in A$ и $n \geqslant 0$ — целое число, такое, что $x^n = e$. Показать, что $x \in G_1$. (Спектр элемента x конечен. Множество таких $\lambda \in \mathbf{C}$, что элемент $y(\lambda) = \lambda x + e - \lambda e$ обратим, имеет конечное дополнение и, следовательно, связно. Кроме того, $y(0) = e$, $y(1) = x$.)

b) Предположим, что алгебра A коммутативна. Показать, что каждый элемент из G/G_1, отличный от нейтрального, имеет бесконечный порядок. (Если $x \in G$ и $x^n \in G_1$, то $x^n = \exp y$, $y \in A$, в силу n° 9, откуда $(x \exp(-y/n))^n = e$. Применить a).)

3) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей.

a) Показать, что если j — идемпотент в A, то $\exp(2i\pi j) = 1$.

b) Пусть элемент $p \in A$ таков, что $\exp p = 1$. Показать, что тогда спектр $\operatorname{Sp} p$ (в силу предложения 8) сводится к конечному числу точек вида $2in\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Для числа $\lambda \notin \operatorname{Sp} p$ имеет место равенство

$$\int_0^1 \exp(\xi(p - \lambda 1))\, d\xi = (1 - \exp(-\lambda))(\lambda 1 - p)^{-1}.$$

Вывести отсюда, что каждая точка из $\operatorname{Sp} p$ есть простой полюс функции $R(\lambda, p)$. Применяя n° 11, показать, что $p = 2i\pi \sum\limits_{\nu=1}^{k} n_\nu j_\nu$, где $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}$, а j_ν — попарно ортогональные идемпотенты.

¶ 4) a) Пусть B — комплексное банахово пространство, e — точка из B, такая, что $\|e\| = 1$. Показать, что для каждой точки $x \in B$ существует предел

$$\lim_{\alpha > 0,\ \alpha \to 0} \alpha^{-1} (\|e + \alpha x\| - 1);$$

обозначим его через $\varphi(x)$. Пусть $\psi(x) = \sup\limits_{\varepsilon \in \mathbf{C},\ |\varepsilon| = 1} \varphi(\varepsilon x)$. Показать, далее, что ψ — полунорма, мажорируемая исходной нормой, и что $\psi(x) = \sup |f(x)|$, где f пробегает множество всех $f \in B'$ (B' — двойственное пространство к B), таких, что $\|f\| = f(e) = 1$.

b) Предположим теперь, что B — банахова алгебра, для которой e — единичный элемент. Доказать, что

$$\varphi(x) = \lim_{\alpha > 0,\ \alpha \to 0} \alpha^{-1} \log \|\exp(\alpha x)\| = \sup_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \log \|\exp(\alpha x)\|.$$

(Заметить, что $\log \|\exp(\alpha + \alpha') x\| \leqslant \log \|\exp(\alpha x)\| + \log \|\exp(\alpha' x)\|$.)

c) Применяя b), показать, что $\|\exp(\lambda x)\| \leqslant \exp(|\lambda| \psi(x))$. Интегрируя функцию $\lambda \longmapsto \lambda^{-2} \exp(\lambda x)$ по окружности $|\lambda| = \rho$, вывести, что

$$\|x\| < \rho^{-1} \exp(\rho \psi(x)),$$

откуда, полагая $\rho = \psi(x)^{-1}$, получить неравенство

$$\|x\| \leqslant e \psi(x)$$

(здесь e, разумеется, означает основание натуральных логарифмов).

d) Показать, что для каждого ненулевого элемента x из B существует функционал $f \in B$, такой, что

$$f(e) = \|f\| = 1, \qquad f(x) \neq 0.$$

(Применить a) и c).)

5) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$ и B — подалгебра в A, порожденная элементом x. Для того чтобы $\operatorname{Sp} x$ сводился к конечному числу точек, являющихся полюсами резольвенты, необходимо и достаточно, чтобы $\dim B < +\infty$. (Если $R(x, \lambda) = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i(\lambda) a_i$, где $a_i \in A$ и F_i — скалярные рациональные функции, то из разложения $R(x, \lambda)$ в окрестности точки $\lambda = \infty$ видно, что x^n являются линейными комбинациями элементов a_i. Обратно, если $\dim B < +\infty$, то существует ненулевой полином $f \in \mathbf{C}[X]$, такой, что $f(x) = 0$. Тогда $\operatorname{Sp} x$ содержится в множестве нулей f. Пусть $\lambda \in \operatorname{Sp} x$ — какой-нибудь нуль функции $f(X)$ порядка p; пусть $g(z) = f(z)(z - \lambda)^{-p}$ в окрестности точки λ и $g(z) = 1$ в окрестности $\operatorname{Sp} x - \{\lambda\}$; тогда $g(x)$ — обратимый элемент из A и $0 = f(x) e_{\{\lambda\}} = g(x)(x - \lambda e)^p e_{\{\lambda\}}$, откуда $(x - \lambda e)^p e_{\{\lambda\}} = 0$ и точка λ является полюсом резольвенты.)

6) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$, U — открытая окрестность $\operatorname{Sp} x$, содержащая только конечное число компонент связности U_i ($i \in I$), и $f \in \mathcal{O}(U)$. Показать, что для того, чтобы $f(x) = 0$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

a) для каждого i, такого, что $\operatorname{Sp} x \cap U_i$ — бесконечное множество или содержащее существенно особую точку резольвенты, $f \mid U_i = 0$;

b) каждый полюс резольвенты порядка p является нулем порядка $\geqslant p$ функции f. (По поводу необходимости этого условия см. упражнение 5).)

7) Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$. Каждой последовательности $(c_n)_{n \geqslant 0}$ комплексных чисел, такой, что $\sum_n |c_n| < +\infty$, сопоставим функцию $f(z) = \sum_n c_n z^n$, непрерывную в Δ и голоморфную в $\overset{\circ}{\Delta}$. Положим $\|f\| = \sum_n |c_n|$. Множество всех этих функций на Δ оказывается, таким образом, банаховой алгеброй A с образующей z. Показать, что $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с Δ, и если $f \in A$, а функция g голоморфна в некоторой окрестности $f(\Delta)$, то и $g \circ f \in A$.

8) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей и $x \in A$. Пусть S — некоторая часть $\mathrm{X}(A)$, замкнутая в топологии Джекобсона, и f — комплексная функция, голоморфная в некоторой окрестности $(\mathcal{G}x)(S)$. Показать, что существует элемент $y \in A$, такой, что $\mathcal{G}y = f \circ \mathcal{G}x$ на S. (Пусть $\mathfrak{J}$ — пересечение ядер всех $\chi \in S$. Использовать функциональное исчисление в $A/\mathfrak{J}$.)

9) Пусть Ω — открытая непустая часть в $\mathbf{C}$. Показать, что на пространстве $\mathcal{O}(\Omega)$ не существует нормы, относительно которой $\mathcal{O}(\Omega)$ являлось бы банаховой алгеброй. (Применяя теорему 1 § 3, показать, что функции из $\mathcal{O}(\Omega)$ были бы ограниченными.)

10) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$ и $k \geqslant 0$ — целое число.

a) Предположим, что $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{U}$ и что $\|R(\lambda, x)\| = O((1 - |\lambda|)^k)$, когда $|\lambda| \to 1$. Показать, что $\|x^n\| + O(|n|^k)$, когда $n \to \pm\infty$. (Для каждого $\delta > 1$ с помощью интеграла Коши получить неравенство

$$2\pi \|x^n\| \leqslant M \frac{\delta^n}{(\delta - 1)^k} + M \frac{\delta^{-n}}{(1 - \delta^{-1})^k},$$

где M не зависит от n и δ. Положить $\delta = n/(n - k)$ в том случае, когда $n \to +\infty$, и $\delta = n/(n + k)$, когда $n \to -\infty$.)

b) Предположим, что $\|x^n\| = O(|n|^k)$ при $n \to \pm\infty$. Показать, что $\mathrm{Sp}\, x \in \mathbf{U}$ и что $\|R(\lambda, x)\| = O\left((1 - |\lambda|)^{k+1}\right)$, когда $|\lambda| \to 1$. (Так как $\rho(x) = \rho(x^{-1}) = 1$, то $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{U}$. При $|\lambda| < 1$ справедливо равенство

$$R(\lambda, x) = -x^{-1}(1 + \lambda x^{-1} + \lambda^2 x^{-2} + \lambda^3 x^{-3} + \ldots).$$

Теперь остается оценить $\|R(\lambda, x)\|$. Аналогичным образом поступить в случае $|\lambda| > 1$.)

11) Пусть X_1 (соответственно X_2) — множество всех $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, для которых $1/2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1$ (соответственно $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1$). Пусть $X = X_1 \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbf{C}^2$. Пусть, далее, $A = \mathscr{C}(X)$ и a_1, a_2 — сужения на X координатных функций на $\mathbf{C}^2$. Показать, что совместный спектр $\mathrm{Sp}_A(z_1, z_2)$ совпадает с X. Построить два различных непрерывных морфизма алгебр с единицей из $\mathcal{O}(X)$ в A, переводящих z_1 в a_1, z_2 в a_2. (Первый морфизм строится с помощью теоремы 1. Второй получается после применения следующей теоремы: для каждой функции f, голоморфной в некоторой окрестности множества X_1, существует функция g, голоморфная в некоторой окрестности множества X_2, которая совпадает с f в некоторой окрестности X_1 (см. § 3, упр. 14).)

¶ 12) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей.

a) Для каждого конечного семейства J элементов из A пусть $S(J) \subset \mathbf{C}^J$ — совместный спектр J. Показать, что если J' содержит J, то каноническая сюръекция $\mathrm{pr}_{J, J'}$ из $\mathbf{C}^{J'}$ на $\mathbf{C}^J$ такова, что $\mathrm{pr}_{J, J'}(S(J')) = S(J)$.

Таким образом, определен инъективный морфизм $\varphi_{JJ'}$ из $\mathcal{O}(S(J))$ в $\mathcal{O}(S(J'))$. Пусть $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$ — индуктивный предел $\mathcal{O}(S(J))$ относительно $\varphi_{JJ'}$ (индексами фактически служат конечные части из $A \times \mathbf{N}$). Канонические отображения

$$\varphi_J : \mathcal{O}(S(J)) \to \mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$$

инъективны. Наделим $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$ топологией индуктивного предела, порожденной топологиями на $\mathcal{O}(\mathrm{X}(J))$. Для каждого элемента $a \in A$ координатная функция в окрестности $S(a) \subset \mathbf{C}$ определяет элемент z_a на $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$.

Непрерывная сюръекция $\mathrm{X}(A) \to S(J)$ определяет непрерывный морфизм $\mathscr{C}(S(J))$ в $\mathscr{C}(\mathrm{X}(A))$. Морфизмы $\mathcal{O}(S(J)) \to \mathscr{C}(S(J)) \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(A))$ определяют непрерывный морфизм

$$\varphi: \mathcal{O}(\mathrm{X}(A)) \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(A)).$$

Этот морфизм, вообще говоря, не инъективен.

Показать, что существует и притом единственный непрерывный морфизм алгебр с единицей φ из $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$ в A, такой, что $\varphi(z_a) = a$ для каждого элемента $a \in A$ (применить теорему 1). Суперпозиция этого морфизма с преобразованием Гельфанда совпадает с φ.

b) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, U — слабо открытая часть E и $f: U \to \mathbf{C}$ — некоторая функция. Говорят, что функция f слабо голоморфна, если для каждой точки $u \in U$ существуют слабо открытая окрестность V_u этой точки, некоторое замкнутое векторное подпространство F_u конечной коразмерности в E и голоморфная функция g_u на $p_u(V_u)$ (через p_u обозначается каноническое отображение E на E/F_u), такие, что $f \mid V_u = g_u \circ p_u$. Если K — слабо компактная часть U, то существуют некоторая слабо открытая окрестность V_K множества K в U, замкнутое векторное подпространство F_K конечной коразмерности в E и голоморфная функция g_K на $p_K(V_K)$ (через p_K обозначается каноническое отображение E на E/F_K), такие, что $f \mid V_K = g_K \circ p_K$.

Показать, что $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$ является индуктивным пределом $\mathcal{O}(S)$, где S пробегает множество слабо открытых окрестностей $\mathrm{X}(A)$ в двойственном к A пространстве и где через $\mathcal{O}(S)$ обозначается алгебра слабо голоморфных функций в S, наделенная топологией компактной сходимости.

§ 5

1) Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A. Показать, что тогда $\mathfrak{J}$ и $A/\mathfrak{J}$ являются регулярными коммутативными банаховыми алгебрами.

2) Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, $\mathfrak{J}$ — некоторый идеал в A, χ — точка в $h(\mathfrak{J})$, $\mathfrak{J}'$ — множество всех $x \in A$, таких, что $\mathscr{G}x$ имеет компактный носитель, не пересекающийся с $\{\chi\}$. Показать, что тогда $\mathfrak{J} + \mathfrak{J}'$ — наименьший идеал $\mathfrak{K}$ в A, такой, что $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{J}$ и $h(\mathfrak{K}) = \{\chi\}$.

3) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, A' — банахово пространство, двойственное к A. Для каждого элемента $x \in A$ обозначим через $\rho(x)$ линейный оператор в A', сопряженный к оператору умножения на x в A. Для $x \in A$ и $x' \in A'$ положим $x * x' = \rho(x) \cdot x'$. Векторное подпространство в A' называется инвариантным, если оно инвариантно относительно всех операторов $\rho(x)$.

Показать, что

а) Для того чтобы элемент x' из A' был пропорционален некоторому ненулевому характеру алгебры A, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $\mathbf{C}x'$ было инвариантным.

b) Отображение $V \longmapsto V^0$ является биекцией множества замкнутых идеалов в A на множество слабо замкнутых инвариантных подпространств в A'.

c) Если W — слабо замкнутое векторное подпространство, порожденное W_1 и W_2, где W_1 и W_2 — инвариантные слабо замкнутые подпространства из A', то $\sigma(W) = \sigma(W_1) \cup \sigma(W_2)$ (где через $\sigma(W)$ обозначено множество характеров, принадлежащих инвариантному векторному подпространству W в A'. (Применить b).)

d) Если W — слабо замкнутое инвариантное векторное подпространство в A', то $\sigma(W)$ совпадает с множеством всех таких $\chi \in \widehat{A}$, для которых из равенства $x * x' = 0$ при всех $x' \in W$ следует равенство $\langle x, \chi \rangle = 0$.

e) Если A содержит единичный элемент, то каждое слабо замкнутое инвариантное векторное подпространство в A' содержит по крайней мере один ненулевой характер.

Предполагая далее в этом упражнении, что A — регулярная алгебра без радикала, содержащая единичный элемент, показать, что

f) Если W — слабо замкнутое инвариантное векторное подпространство в A', а U — какая-нибудь окрестность множества $\sigma(W)$ в $\mathrm{X}(A)$, то W содержится в слабо замкнутом векторном подпространстве из A', порожденном элементами из U.

g) Если элемент $x \in A$ таков, что $\mathcal{G}x = 1$ в некоторой окрестности $\sigma(x')$, где $x' \in A'$ и $\sigma(x') = \sigma(W)$, а W — слабо замкнутое инвариантное векторное подпространство в A', порожденное элементом x', то $x * x' = x'$. (Применить f).)

h) Если $\sigma(x')$ — объединение двух непересекающихся замкнутых множеств σ_1 и σ_2, то существуют $x_1', x_2' \in A'$, такие, что $\sigma(x_1') = \sigma_1$, $\sigma(x_2') = \sigma_2$, $x' = x_1' + x_2'$. (Выбрать $x_1' = u_1 * x'$, $x_2' = u_2 * x'$, где $\mathcal{G}u_1 = 1$ (соответственно 0) в окрестности σ_1 (соответственно σ_2), $\mathcal{G}u_2 = 1$ (соответственно 0) в окрестности σ_2 (соответственно σ_1).)

4) Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, удовлетворяющая условию Диткина, $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, $x \in \mathfrak{k}(h(\mathfrak{J}))$, F — граница множества $h(Ax)$. Показать, что если $F \cap h(\mathfrak{J})$ не содержит непустых совершенных множеств, то $x \in \mathfrak{J}$ (воспроизвести доказательство предложения 5).

5) Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала. Предположим, что каждый замкнутый идеал алгебры A является пересечением регулярных максимальных идеалов. Пусть $x \in A$. Пусть F — множество нулей $\mathcal{G}'x$. Показать, что тогда элемент x является пределом при $n \to \infty$ последовательности элементов вида $u_n x$, где $u_n \in A$ и $\mathcal{G}'u_n$ равно нулю в окрестности множества F. (Пусть $\mathfrak{J}$ — множество всех элементов $y \in A$, таких, что $\mathcal{G}y$ имеет компактный носитель, не пересекающийся с F. Тогда $x \in \mathfrak{J}$. Применить предложение 4.) В частности, алгебра A удовлетворяет условию Диткина.

6) Пусть B — алгебра комплексных непрерывно дифференцируемых функций на интервале $(0, 1)$, снабженная нормой $\|f\| = \sup|f| + \sup|f'|$. Пусть A — замкнутая подалгебра в B, состоящая из тех $f \in B$, для которых $f(1/2) = 0$. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, состоящий из тех $f \in A$, для которых $f'(1/2) = 0$. Показать, что

a) Пространство $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с $(0, 1) - \{1/2\}$ и алгебра A регулярна.

b) $\mathfrak{J}$ — нерегулярный максимальный идеал алгебры A.

7) a) Пусть R — множество точек (z_1, z_2, z_3, z_4) в $\mathbf{C}^4$, таких, что

$$z_1 z_2 = 2, \quad 1 \leqslant |z_1| \leqslant 2, \quad z_3 = z_4 = 0,$$

Определим аналогично множества T_1 и T_2 с помощью следующих условий:

$$T_1:\quad z_1z_2=2,\quad |z_1|=1,\quad |z_3|\leqslant 1,\quad z_4=0,$$

$$T_2:\quad z_1z_2=2,\quad |z_1|=2,\quad |z_3|\leqslant 1,\quad z_4=z_3^2.$$

Показать, что множество $X=R\cup T_1\cup T_2$ полиномиально выпукло. (Показать, что X есть множество точек (z_1, z_2, z_3, z_4), таких, что

$$z_1z_2=2,\quad |z_1|\leqslant 2,\quad |z_2|\leqslant 2,\quad |z_3|\leqslant 1,\quad z_4\left(z_4-z_3^2\right)=0,$$

$$\left|z_4z_2^k\right|\leqslant 1 \quad \text{и} \quad \left|z_1^k\left(z_4-z_3^2\right)\right|\leqslant 1 \quad \text{для} \quad k=1, 2, \ldots .)$$

Пусть A — замкнутая подалгебра в $\mathscr{C}(X)$, порожденная сужениями на X многочленов на $\mathbf{C}^4$. Показать, что X отождествляется с $\mathrm{X}(A)$.

b) Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2\subset \mathbf{C}$ — ориентированные в положительном направлении окружности с центром в 0 радиусов 1 и 2. Пусть μ_0, μ_1, ν — меры на Γ_1, Γ_2, Γ_1, определенные с помощью форм dz/z, $-dz/z$, dz/z^2. Пусть, далее, $\mu=\mu_0+\mu_1$, так что $\mu\otimes\nu$ — мера на $(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times\Gamma_1$. Обозначим через B множество точек $z=(z_1, \ldots, z_4)\in X$, таких, что $(z_1, z_3)\in (\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times\Gamma_1$. Отображение $z\longmapsto(z_1, z_3)$ из B в $(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times\Gamma_1$ является гомеоморфизмом; обозначим его φ. Пусть ρ — мера вида $\varphi^{-1}(\mu\otimes\nu)$. Показать, что мера ρ ортогональна к алгебре A.

c) Пусть g — функция на X, равная нулю на $R\cup T_1$ и z_3 на T_2. Показать, что тогда $\int g\,d\rho\neq 0$ и, стало быть, $g\notin A$. Однако для каждого значения $z\in X$ функция g совпадает в окрестности точки z с некоторым элементом из A.

§ 6

1) Пусть A — нормированная алгебра, наделенная непрерывной инволюцией. Если положить $\|x\|'=\sup(\|x\|, \|x^*\|)$ для каждого элемента $x\in A$, то A снова оказывается инволютивной нормированной алгеброй и новая норма эквивалентна старой.

2) Пусть A — коммутативная банахова алгебра без радикала. Показать, что каждая инволюция алгебры A непрерывна. (Применить § 3, предл. 6.)

¶ 3) Пусть A — инволютивная коммутативная банахова алгебра с единицей, все характеры которой эрмитовы. Предположим, что для каждого необратимого эрмитова элемента $x\in A$ имеет место соотношение $\left\|(x-\lambda)^{-1}\right\|=o\left(\mathscr{I}(\lambda)^{-2}\right)$ при $\lambda\to 0$ и $\mathscr{I}(\lambda)\neq 0$. Показать, что тогда каждый замкнутый идеал $\mathfrak{J}$ алгебры A есть пересечение максимальных идеалов. (Пусть φ: $A\to A/\mathfrak{J}$ — канонический морфизм. Пусть элемент $x\in A$ таков, что $\varphi(x)$ принадлежит радикалу алгебры $A/\mathfrak{J}$. Достаточно доказать, что $\varphi(x)=0$. Но этот факт сводится к случаю, когда элемент x эрмитов. Использовать упр. 23 c) к § 2.)

4) Пусть A — инволютивная коммутативная банахова алгебра с единицей. Показать, что для того, чтобы каждый ее характер был эрмитов, необходимо и достаточно, чтобы элемент $1+xx^*$ был обратим для каждого $x\in A$. (Если каждый характер алгебры A эрмитов, то $\mathscr{G}(1+xx^*)>0$ всюду на $\mathrm{X}(A)$. Если некоторый характер χ в A не эрмитов, то существует эрмитов элемент $x\in A$, такой, что $\chi(x)=i$, откуда $\chi(1+xx^*)=0$, и элемент $1+xx^*$ не обратим.)

5) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, наделенная инволюцией, такой, что $\|x^*x\|=\|x\|\cdot\|x^*\|$ для каждого элемента $x\in A$. Показать, что тогда A есть C^*-алгебра. (Так как $\|y^2\|=\|y\|^2$ для эрмитова

элемента y, то $\| y \| = \rho(y)$; замечая, что $\mathrm{Sp}' x^* = \overline{\mathrm{Sp}' x}$ для каждого $x \in A$, получаем

$$\| x^* \| \cdot \| x \| = \| x^* x \| = \rho(x^* x) \leqslant \rho(x^*) \rho(x) = \rho(x^2) \leqslant \| x \|^2,$$

откуда $\| x^* \| \leqslant \| x \|$ и $\| x^* \| = \| x \|$.)

6) Пусть A есть C^*-алгебра, N — множество ее нормальных элементов, $x \in N$, V — некоторая окрестность нуля в $\mathbf{C}$. Показать, что существует окрестность U точки x в N, такая, что для каждого элемента $y \in U$ имеют место соотношения $\mathrm{Sp}\, y \subset \mathrm{Sp}\, x + V$ и $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathrm{Sp}\, y + V$. (Применить следствие теоремы 1, предложение 3 из § 2 и предложение 10 из § 4.)

7) Пусть A — коммутативная C^*-алгебра и $x \in A$. Предположим, что C^*-подалгебра в A, порожденная элементом x, совпадает с A. Показать, что тогда $\chi \mapsto \chi(x)$ есть гомеоморфизм $\mathrm{X}'(A)$ на $\mathrm{Sp}' x$.

8) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$ и $S = \mathrm{Sp}\, x$. Предположим, что существует морфизм φ из $\mathscr{C}(S)$ в A, который переводит 1 в 1 и z в x (через z обозначено тождественное отображение S). Показать, что тогда $\|\varphi(f)\| \geqslant \| f \|$ для каждой функции $f \in \mathscr{C}(S)$. В частности, если φ непрерывен, то φ взаимно непрерывен. (Можно считать алгебру A коммутативной. Пусть $\lambda \in S$. Существует характер $\chi \in \mathrm{X}(A)$, такой, что $\lambda = \chi(x) = \chi(\varphi(z)) = (\mathrm{X}(\varphi)(\chi))(z)$. Стало быть, $\mathrm{X}(\varphi)(\chi)$ является характером $f \mapsto f(\lambda)$ алгебры $\mathscr{C}(S)$. Пусть $f \in \mathscr{C}(S)$. Согласно сказанному выше, существует характер $\chi \in \mathrm{X}(A)$, такой, что $| f |$ достигает своего максимума в точке $\mathrm{X}(\varphi)(\chi)$. Тогда $|\chi(\varphi(f))| = \| f \|$ и, значит, $\| \varphi(f) \| \geqslant \| f \|$.)

9) Пусть G — локально компактная группа. Показать, что если $\mathrm{St}(G)$ содержит единичный элемент, то группа G дискретна. (Воспользоваться тем, что в гильбертовом пространстве $L^2(G)$ тождественное отображение есть предел по норме эндоморфизмов $\gamma(f)$, где γ — левое регулярное представление и $f \in L^1(G)$.)

§ 7

1) Для каждого топологического пространства Ω обозначим через $\mathscr{B}(\Omega)$ алгебру ограниченных непрерывных комплексных функций на Ω, снабженную нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in \Omega} | f(t) |$ и инволюцией $f \mapsto \bar{f}$.

a) Показать, что $\mathscr{B}(\Omega)$ — коммутативная C^*-алгебра с единицей.

b) Для каждой точки $t \in \Omega$ и каждой функции $f \in \mathscr{B}(\Omega)$ положим $\chi_t(f) = f(t)$. Показать, что тогда $t \mapsto \chi_t$ является непрерывным отображением φ (оно называется каноническим) из Ω в $\mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$.

c) Показать, что если Ω вполне регулярно, то φ является гомеоморфизмом Ω на некоторое подпространство, плотное в $\mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$. (Для доказательства равенства $\overline{\varphi(\Omega)} = \mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$ показать, что непрерывная комплексная функция на $\mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$, равная нулю на $\varphi(\Omega)$, есть тождественный нуль.) Показать, что $\mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$ отождествляется с компактификацией Стоуна — Чеха пространства Ω (*Общ. топ.*, гл. IX, § 1, упр. 7).

d) Пусть A — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{B}(\Omega)$ и R_A — отношение эквивалентности в Ω:

$$f(t) = f(t') \quad \text{для всех} \quad f \in A.$$

Показать, что насыщение S компакта $K \subset \Omega$ по R_A замкнуто. (Пусть $t \in \bar{S}$; для каждой функции $f \in A$ и каждого $\varepsilon > 0$ пусть $V_{f,\varepsilon}$ — множество всех $t' \in \Omega$, таких, что $|f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$; если $f_1, \ldots, f_n \in A$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$, то

$$V_{f_1, \varepsilon_1} \cap \ldots \cap V_{f_n, \varepsilon_n} \cap K \neq \varnothing;$$

следовательно, $\left(\bigcap\limits_{f \in A,\, \varepsilon > 0} V_{f, \varepsilon}\right) \cap K \neq \varnothing$, откуда $t \in S$.)

e) Предположим, что пространство Ω нормально. Пусть R — отношение эквивалентности, заданное на Ω, и $A = A_R$ — подалгебра в $\mathscr{B}(\Omega)$, состоящая из функций, постоянных на классах эквивалентности по R. Показать, что $R = R_A$. (Использовать *Общ. топ.*, гл. IX, § 4, упр. 15.)

f) Предположим, что Ω — компакт. Показать, что тогда $R \longmapsto A_R$ является биективным отображением множества отношений эквивалентности, разбивающих Ω, на множество C^*-подалгебр в $\mathscr{C}(\Omega)$. (Пусть A есть C^*-подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$ и $R = R_A$. Показать, что R разбивает Ω, и применить теорему Стоуна — Вейерштрасса к алгебре функций, непрерывных на Ω/R, полученной из A переходом к факторалгебре.)

2) Пусть Ω — компакт, R — отношение эквивалентности, разбивающее Ω, B — замкнутая подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$, содержащая A_R (обозначение из упр. 1). Показать, что если $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ совпадает на каждом классе эквивалентности c с некоторым элементом g_c из B, то $f \in B$. (Пусть $\varepsilon > 0$. Существует открытая насыщенная окрестность V_c точки c, такая, что $|fg_c| \leqslant \varepsilon$ на V_c. Пусть $V_{c_1}, \ldots, V_{c_n}$ — покрытие Ω. Пусть $(u_1, \ldots, u_n)$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $(V_{c_1}, \ldots, V_{c_n})$ и состоящее из функций алгебры A_R. Тогда

$$g = u_1 g_{c_1} + \ldots + u_n g_{c_n} \in B$$

и $|f - g| \leqslant \varepsilon$ всюду на Ω.)

3) Пусть Ω — компактное пространство и A_ω, для каждой точки $\omega \in \Omega$, — коммутативная банахова алгебра, содержащая единичный элемент e_ω с нормой, равной 1. Пусть B — банахова алгебра, состоящая из $(x_\omega) \in \prod\limits_{\omega \in \Omega} A_\omega$, таких, что $\|x\| = \sup\limits_{\omega \in \Omega} \|x_\omega\| < +\infty$. Пусть C — банахова подалгебра в B, обладающая следующими свойствами:

(i) $e = (e_\omega)_{\omega \in \Omega} \in C$;

(ii) если $x = (x_\omega) \in C$ и $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, то функция $\omega \longmapsto f(\omega) x_\omega$ является элементом C;

(iii) для каждого $x = (x_\omega) \in C$ функция $\omega \longmapsto \|x_\omega\|$ полунепрерывна сверху.

Пусть X — сумма всех множеств вида $\mathrm{X}(A_\omega)$. Для каждого характера $\chi \in \mathrm{X}(A_\omega)$ пусть $\varphi(\chi)$ — характер алгебры C, определенный равенством $\varphi(\chi)((x_\omega)) = \chi(x_{\omega_0})$. Показать, что φ определяет биекцию множества X на $\mathrm{X}(C)$. (Пусть $\xi \in \mathrm{X}(C)$. Так как $\mathscr{C}(\Omega)$ можно отождествить с банаховой подалгеброй в C, то ξ определяет некоторый характер алгебры $\mathscr{C}(\Omega)$ и, стало быть, некоторую точку $\omega_0 \in \Omega$. Пусть $x = (x_\omega) \in C$ и $y = (y_\omega) \in C$, причем $x_{\omega_0} = y_{\omega_0}$; пусть $\varepsilon > 0$; имеем $\|x_\omega - y_\omega\| < \varepsilon$ в некоторой окрестности U точки ω_0; пусть функция f: $\Omega \to (0, 1)$ равна 1 в точке ω_0 и 0 вне U; тогда выполняется неравенство $\|fx - fy\| \leqslant \varepsilon$ из которого следует, что $|\xi(fx - fy)| \leqslant \varepsilon$, откуда $|\xi(x) - \xi(y)| \leqslant \varepsilon$ и, значит, $\xi(x) = \xi(y)$. Отсюда заключаем, что существует характер $\chi \in \mathrm{X}(A_{\omega_0})$, такой, что $\xi = \varphi(\chi)$.)

4) Пусть Ω — компактное пространство, такое, что банахова алгебра $\mathscr{C}(\Omega)$ оказывается порожденной некоторой последовательностью $(j_1, j_2, \ldots)$ идемпотентов. Показать, что тогда функция

$$\omega \longmapsto h(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\left(2j_n(\omega) - 1\right)$$

разделяет точки пространства Ω и, следовательно, порождает банахову алгебру $\mathscr{C}(\Omega)$.

5) Пусть A — банахова алгебра, определенная в § 2, n° 2, пример 2. Пусть $\omega \in [0, 1] = \mathrm{X}(A)$. Показать, что наименьший замкнутый идеал $\mathfrak{J}_\omega$ алгебры A, такой, что $h(\mathfrak{J}) = \{\omega\}$, совпадает с множеством всех элементов $f \in A$, для которых $f, f', \ldots, f^{(n)}$ равны нулю в точке ω. (Воспользоваться § 5, предл. 4.) Показать, далее, что если $g \in A$, то его канонический образ в факторалгебре $A/\mathfrak{J}_\omega$ имеет норму $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{|g^{(k)}(\omega)|}{k!}\right)$. Алгебра $A/\mathfrak{J}_\omega$ изоморфна алгебре $\mathbf{C}[X]/(X^{n+1})$. Единственный максимальный идеал в A, содержащий $\mathfrak{J}_\omega$, совпадает с множеством всех элементов $f \in A$, таких, что $f(\omega) = 0$.

6) Пусть Δ — круг $|\zeta| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$ и A — банахова алгебра, определенная в § 2, n° 2, пример 5.

a) Показать, что если $x \in A$, то x является пределом в A при $n \to \infty$ функций вида

$$\zeta \longmapsto x_n(\zeta) = x\left(\frac{n\zeta}{n+1}\right).$$

Но x_n является равномерным пределом многочленов, поэтому ζ — образующая алгебры A.

b) Показать, что $\mathrm{X}(A)$ канонически отождествляется с Δ. (Применить предложение 1 (vii).)

c) Пусть S — замкнутая часть в Δ. Показать, что если S содержит хотя бы одну неизолированную точку, то замыкание S в топологии Джекобсона совпадает с Δ.)

d) Пусть $x \in A$; положим $x^*(\zeta) = \overline{x(\bar{\zeta})}$. Показать, что отображение $x \longmapsto x^*$ является изометрической инволюцией алгебры A, и только те характеры в A эрмитовы относительно этой инволюции, которые определяются вещественными точками Δ.

e) Отображение $x \longmapsto x \mid \mathbf{U}$ есть изоморфизм из A на $P(\mathbf{U})$. Показать, что каждая функция из $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathbf{U})$ является равномерным пределом вещественных частей функций из $P(\mathbf{U})$.

7) Пусть A_1 (соответственно A_2) — банахова алгебра с единицей, рассмотренная в § 2, n° 2, пример 2 (соответственно 5) и $A = A_1 \times A_2$. Показать, что A — алгебра без радикала, но множество $\mathscr{G}_A(A)$ не является ни замкнутым, ни плотным в $\mathscr{C}(\mathrm{X}(A))$. (Применить упражнение 6.)

¶ 8) Пусть Ω — компактное пространство, B — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$ (относительно индуцированной нормы), разделяющая точки Ω. Можно отождествить Ω с некоторой замкнутой частью пространства $\mathrm{X}(B) = \Omega'$. Пусть B^* — множество всех обратимых элементов в B. Алгебру B называют log-*модулярной*, если множество всех функций вида $\log|f|$, где $f \in B$, плотно в $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$. (В частности, алгебра B log-модулярна, если функции вида $\mathscr{R}f$, где f пробегает B, плотны в $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$. В самом деле, $\log|e^f| = \mathscr{R}f$.) В дальнейшем предполагается, что алгебра B log-модулярна.

a) Показать, что для каждого характера $\chi \in \Omega'$ существует и притом единственная мера $\mu_\chi \geqslant 0$ на Ω, такая, что

$$\log|\chi(f)| = \int_\Omega \log|f(\omega)|\, d\mu_\chi(\omega)$$

для каждой функции $f \in B^*$, и, стало быть, такая, что $\chi(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu_\chi(\omega)$ для каждой функции $f \in B$. Имеет место неравенство

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_\Omega \log|f(\omega)|\, d\mu_\chi(\omega)$$

для каждой функции $f \in B$. Условие $\chi(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu_\chi(\omega)$ для каждой функции $f \in B$ однозначно определяет меру μ_χ.

b) Пусть $\chi \in \Omega'$. Пусть, далее, μ — положительная мера на Ω, причем $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где μ_1 — абсолютно непрерывная, а μ_2 — сингулярная компонента относительно μ_χ. Пусть $\mathfrak{J}$ — ядро χ. Показать, что тогда

$$\inf_{f \in \mathfrak{J}} \int_\Omega |1 - f|^2\, d\mu = \inf_{f \in \mathfrak{J}} \int_\Omega |1 - f|^2\, d\mu_1.$$

c) Если $\chi \in \Omega'$, h — неотрицательная функция из $\mathscr{L}^1(\mu_\chi)$, $\mathfrak{J}$ — ядро характера χ, то имеет место равенство

$$\inf_{f \in \mathfrak{J}} \int_\Omega |1 - f|^2 h\, d\mu_\chi = \exp\left(\int_\Omega (\log h)\, d\mu_\chi\right).$$

d) Обозначим через $H^p(\mu)$ замыкание канонического образа B в $L^p(\mu)$, где μ — положительная мера на Ω, $p \in [1, \infty[$. Пусть $\chi \in \Omega'$ и $\mathfrak{J}$ — ядро χ. Показать, что $L^2(\mu_\chi)$ — прямая (гильбертова) сумма пространства $H^2(\mu_\chi)$ и замыкания в $L^2(\mu_\chi)$ канонического образа множества $\overline{\mathfrak{J}}$ (состоящего из всех функций, сопряженных к функциям из $\mathfrak{J}$).

e) Пространство $H^1(\mu_\chi)$ есть множество классов $\tilde{h}$ функций $h \in \mathscr{L}^1(\mu_\chi)$, таких, что $\int_\Omega fh\, d\mu_\chi = 0$ для всех функций $f \in \mathfrak{J}$.

f) Если h — неотрицательная функция из $\mathscr{L}^1(\mu_\chi)$, то равенство $\tilde{h} = |\tilde{f}|$, где $\tilde{f} \in H^1(\mu_\chi)$ и $\int_\Omega f\, d\mu_\chi \neq 0$, имеет место в том и только в том случае, когда $\log h \in \mathscr{L}^1(\mu_\chi)$.

¶9) Пусть Ω — компактное пространство, B — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$ (относительно индуцированной нормы). Каждый элемент ω из Ω определяет характер χ_ω алгебры B. Если $\omega, \omega' \in \Omega$, то мы будем писать $\omega \sim \omega'$ в том случае, когда $\|\chi_\omega - \chi_{\omega'}\| < 2$.

a) Пусть $\omega, \omega' \in \Omega$. Показать, что если существует последовательность (f_n) элементов из B, таких, что $\|f_n\| \leqslant 1$, $|f_n(\omega)| \to 1$ при $n \to \infty$ и $\liminf\limits_{n\to\infty} |f_n(\omega) - f_n(\omega')| > 0$, то соотношение $\omega \sim \omega'$ не имеет места. (Можно считать, что $f_n(\omega) \to 1$. Рассмотрим $g_n = (f_n - \lambda_n)(1 - \lambda_n f_n)^{-1}$, где λ_n — некоторая последовательность чисел из интервала $]0, 1[$, стремящихся к 1. Имеет место неравенство $\|g_n\| \leqslant 1$. Если последовательность (λ_n) выбрать надлежащим образом, то можно добиться того, чтобы $g_n(\omega) \to 1$ и $g_n(\omega') \to -1$.)

b) Пусть R — множество вещественных частей элементов из B. Показать, что если $\omega \sim \omega'$, то существует такое число $c \in \left]0, 1\right[$, что для каждой неотрицательной функции f из R имеет место неравенство $f(\omega) \geqslant cf(\omega')$. (В противном случае существует последовательность функций $f_1, f_2, \ldots \in R$, таких, что $f_n \geqslant 0$, $f_n(\omega') = 1$ и $f_n(\omega) \to 0$ при $n \to \infty$; пусть $g_n \in B$ и $\mathscr{R} g_n = f_n$. Тогда $e^{-g_n} \in B$, $\left\| e^{-g_n} \right\| \leqslant 1$, $\left| e^{-g_n(\omega')} \right| = 1/e$, $\left| e^{-g_n(\omega)} \right| \to 1$ при $n \to \infty$, а это противоречит а).) Можно также предполагать, что $f(\omega') \geqslant cf(\omega)$ для каждой неотрицательной функции f из R. Существуют неотрицательные меры α и β на Ω, такие, что $f(\omega) - cf(\omega') = \alpha(f)$ и $f(\omega') - cf(\omega) = \beta(f)$ для $f \in R$. Положим $\mu_\omega = (1 - c^2)^{-1}(c\beta + \alpha)$, $\mu_{\omega'} = (1 - c^2)^{-1}(c\alpha + \beta)$. Показать, что $\mu_\omega(f) = f(\omega)$ и $\mu_{\omega'}(f) = f(\omega')$ для любой функции $f \in B$ и, кроме того,

$$c\mu_\omega \leqslant \mu_{\omega'}, \quad c\mu_{\omega'} \leqslant \mu_\omega.$$

c) Предположим снова, что $\omega \sim \omega'$. Показать, что если μ — положительная мера на Ω, такая, что $\mu(f) = f(\omega)$ для всех функций $f \in B$, то существует положительная мера μ' на Ω, такая, что $\mu'(f) = f(\omega')$ для всех функций $f \in B$ и $c\mu \leqslant \mu'$ для некоторого $c \in \left]0, 1\right[$. (В соответствии с обозначениями из b) положить $\mu' = \mu_{\omega'} - c\mu_\omega + c\mu$.)

d) Показать, что отношение $\omega \sim \omega'$ является отношением эквивалентности в Ω. (Применить c).)

¶10) Пусть Ω — компактное пространство, A — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$ (относительно индуцированной нормы).

a) Часть K в Ω называется антисимметрической (относительно A), если каждая функция $f \in A$, вещественная на K, постоянна на K. Показать, что каждая антисимметрическая часть содержится в некоторой максимальной антисимметрической части. Максимальная антисимметрическая часть замкнута. Множество $\mathfrak{K}$ максимальных антисимметрических частей является разбиением Ω.

b) Пусть $A^\perp$ — подпространство банахова пространства комплексных мер на Ω, ортогональное к A. Пусть μ — экстремальная точка единичного шара в $A^\perp$. Показать, что (минимальный) носитель μ антисимметричен.

c) Пусть $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Показать, что если $f \mid K \in A \mid K$ для любого $K \in \mathfrak{K}$, то $f \in A$. (Применить b) и теорему Крейна — Мильмана.) Найти на этом пути доказательство теоремы Стоуна — Вейерштрасса.

d) Часть E в Ω называется пиком (относительно A), если существует функция $f \in A$, такая, что $\|f\| = 1$ и E — множество всех тех точек $\omega \in \Omega$, для которых $f(\omega) = 1$. Тогда можно считать, что $|f(x)| < 1$ для $x \notin E$ (заменяя f на $(1 + f)/2$). Показать, что любое счетное непустое пересечение пиков есть пик, и если E_1 и E_2 — пики, то $E_1 \cup E_2$ есть пик. (Пусть f_1, $f_2 \in A$ и $f_i = 1$ на E_i, $|f_i| < 1$ на $\Omega - E_i$; пусть $g_i = \frac{1}{4}(1 - f_i)^{1/3} \in A$; тогда $1 - g_1 g_2 = 1$ на $E_1 \cup E_2$, $|1 - g_1 g_2| < 1$ на $\Omega - (E_1 \cup E_2)$.)

e) Пусть E — пересечение пиков. Пусть $\mathfrak{J}$ — множество всех функций $f \in A$, равных нулю на E. Показать, что тогда отображение $f \longmapsto f \mid E$ определяет изометрию из $A/\mathfrak{J}$ на $A \mid E$.

f) Пусть E — некоторый пик. Пусть $E' \subset E$ — некоторый пик относительно $A \mid E$. Показать, что тогда E' — пик относительно A.

g) Показать, что каждая часть $K \in \mathfrak{K}$ является пересечением пиков. (Применить d) и f).)

h) Показать, что если $K \in \mathfrak{K}$, то $A \mid K$ замкнуто в $\mathscr{C}(K)$. (Применить e) и g).)

i) Пусть R — множество вещественных частей элементов из A. Предположим, что $\Omega \in \mathfrak{K}$ и что R инвариантно относительно умножения. Показать, что Ω сводится тогда к точке. (Пусть $x_0 \in \Omega$. Для элемента $u \in R$ существует и притом единственная функция $f \in A$, такая, что $u = \mathscr{R}f$ и $f(x_0) \in \mathbf{R}$; положим $N(u) = \| f \|$. Тогда R — вещественное банахово пространство относительно N; теорема о замкнутом графике показывает, что умножение в R раздельно непрерывно и, стало быть, непрерывно. Множество $S = R + iR$ можно наделить структурой банаховой алгебры. Пусть $p \in R$ и $p(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Показать, что для каждого характера χ в S имеет место неравенство $\mathscr{R}\chi(p) > 0$, и вывести отсюда, что $\log p \in R$. Предполагая, что $\Omega \neq \{x_0\}$, можно построить функцию $f \in A$, такую, что $0 < \mathscr{R}f \leqslant 1$ на Ω, $f(x_0) \in \mathbf{R}$ и норма $\| f \|$ сколь угодно велика. Согласно сказанному выше, существует функция $V \in A$, такая, что $|V|^2 = \mathscr{R}f$. Имеет место неравенство $\| V \| \leqslant 1$, следовательно, $N(\mathscr{R}V) \leqslant 2$, но норма

$$N((\mathscr{R}V)^2) \geqslant \frac{1}{2}(\| V^2 + f \| - | \mathscr{J}V^2(x_0) |)$$

сколь угодно велика.)

j) Показать, что если R инвариантно относительно умножения, то $A = \mathscr{C}(\Omega)$. (Применить a), c), h), i).) Следовательно, если $A \neq \mathscr{C}(\Omega)$, то существует элемент $u \in R$, такой, что $u^2 \notin R$.

ГЛАВА II

КОММУТАТИВНЫЕ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

Всюду в этой главе через G обозначается коммутативная локально компактная группа, снабженная мерой Хаара; последняя будет обозначаться, если не оговорено противное, через dx. Пространства $L^p(G, dx)$ будут обозначаться $L^p(G)$.

§ 1. Преобразование Фурье

1. *Унитарные характеры коммутативной локально компактной группы*

Определение 1. *Унитарным характером группы G называется непрерывное представление G в мультипликативной группе* $\mathbf{U}$ *комплексных чисел, равных по модулю* 1.

Другими словами, унитарный характер — это непрерывная комплексная функция χ на G, такая, что

$$\chi(xy) = \chi(x)\chi(y), \quad |\chi(x)| = 1 \quad (x, y \in G).$$

Заметим, что каждое *ограниченное* непрерывное представление группы G в $\mathbf{C}^*$ является на самом деле унитарным характером.

Ясно, что произведение двух унитарных характеров, обратный к унитарному характеру, а также функция, тождественно равная 1, суть унитарные характеры. Следовательно, множество $\widehat{G}$ всех унитарных характеров группы G образует *группу* относительно умножения, причем эта группа *коммутативна*. С другой стороны, отображение $(\chi, \chi') \mapsto \chi\chi'^{-1} = \chi\bar{\chi}'$ непрерывно в топологии *компактной сходимости*, и группа $\widehat{G}$, снабженная топологией компактной сходимости, становится *топологической группой*.

Определение 2. *Топологическая группа $\widehat{G}$ называется двойственной к группе G.*

Так как группа G локально компактна, то отображение $(x, \hat{x}) \mapsto \hat{x}(x)$ *непрерывно на произведении* $G \times \widehat{G}$ (*Общ. топ.*, гл. X, 2-е изд., § 2, теор. 2).

Пусть H — гильбертово пространство размерности 1 и χ — некоторый унитарный характер группы G. Отображение, которое каждому $x \in G$ ставит в соответствие гомотетию в H с коэффициентом $\chi(x)$, является изометрическим непрерывным линейным представлением группы G в H. Обратно, каждое изометрическое непрерывное линейное представление группы G в H получается таким способом. Положим тогда для $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$

$$\chi(\mu) = \int_G \chi(x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Из предложения 11, *Интегр.*, гл. VIII, § 3, следует, что отображение $\mu \mapsto \chi(\mu)$ является ненулевым *характером* инволютивной банаховой алгебры $\mathscr{M}^1(G)$. Таким образом определяется отображение, называемое *каноническим*, группы $\widehat{G}$ в $\mathrm{X}(\mathscr{M}^1(G))$. Кроме того, имеет место равенство

$$\chi(\mu^*) = \int_G \chi(x^{-1})\, d\bar{\mu}(x) = \int_G \overline{\chi(x)}\, d\bar{\mu}(x) = \overline{\chi(\mu)}$$

и характер $\mu \mapsto \chi(\mu)$ является *эрмитовым*.

Сужение этого характера на инволютивную банахову подалгебру $L^1(G)$ дает эрмитов характер ζ_χ алгебры $L^1(G)$; для каждой функции $f \in L^1(G)$ имеет место равенство

$$\zeta_\chi(f) = \int f(x)\chi(x)\, dx. \tag{2}$$

Заметим, что $\zeta_\chi \neq 0$: если функция $f \in \mathscr{K}(G)$ стремится к мере Дирака ε_e в пространстве $\mathscr{C}'(G)$, снабженном слабой топологией (*Интегр.*, гл. VIII, § 2, следствие 1 леммы 4), то $\zeta_\chi(f)$ стремится к $\chi(\varepsilon_e) = 1 \neq 0$.

Предложение 1. *Отображение* $j: \chi \mapsto \zeta_\chi$ *есть гомеоморфизм группы* $\widehat{G}$ *на* $\mathrm{X}(L^1(G))$.

В самом деле, так как $\widehat{G}$ — ограниченная часть в $L^\infty(G)$, то инъекция $\widehat{G}$ в пространство L^∞, снабженное слабой топологией $\sigma(L^\infty, L^1)$, непрерывна. Стало быть, отображение j *непрерывно*. Если $\chi \in \widehat{G}$ и $f \in L^1(G)$, то равенство

$$\zeta_\chi(\varepsilon_x * f) = \chi(x)\zeta_\chi(f)$$

показывает (при выборе такой функции f, что $\zeta_\chi(f) \neq 0$), что j — *инъективное* отображение.

Пусть $\zeta \in \mathrm{X}(L^1(G))$ и функция $f \in L^1(G)$ такова, что $\zeta(f) \neq 0$. Для $x \in G$ положим

$$\chi(x) = \zeta(\varepsilon_x * f)/\zeta(f). \tag{3}$$

Так как отображение $x \mapsto \varepsilon_x * f$ группы G в $L^1(G)$ непрерывно (*Интегр.*, гл. VIII, § 2, предл. 8), то функция χ *непрерывна*. В то же время из неравенства

$$|\chi(x)| \leqslant \|\varepsilon_x * f\| / |\zeta(f)| = \|f\| / |\zeta(f)|$$

следует, что она *ограничена*.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — база фильтра окрестностей элемента e, состоящая из компактных окрестностей. Для каждой окрестности $V \in \mathfrak{B}$ пусть g_V — какая-нибудь положительная непрерывная функция, равная нулю вне V, с интегралом, равным 1. Известно (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 19), что

$$\varepsilon_x * f = \lim \varepsilon_x * g_V * f$$

(предел в пространстве $L^1(G)$ берется по фильтру). Так как $\zeta(\varepsilon_x * g_V * f) = \zeta(\varepsilon_x * g_V)\zeta(f)$, то

$$\chi(x) = \lim \zeta(\varepsilon_x * g_V),$$

и для каждой функции $h \in L^1(G)$

$$\zeta(\varepsilon_x * h) = \lim \zeta(\varepsilon_x * g_V * h) = (\lim \zeta(\varepsilon_x * g_V))\,\zeta(h) = \chi(x)\zeta(h).$$

Следовательно, для любых $x, y \in G$ имеет место равенство

$$\chi(xy) = \zeta(\varepsilon_x * \varepsilon_y * f)/\zeta(f) = \chi(x)\,\zeta(\varepsilon_y * f)/\zeta(f) = \chi(x)\chi(y),$$

и χ оказывается *унитарным характером* группы G. Кроме того, если $g \in L^1(G)$, то $g * f = \int (\varepsilon_x * f) g(x)\,dx$ в $L^1(G)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 1, предл. 7), откуда

$$\zeta(g)\zeta(f) = \zeta(g * f) = \int \zeta(\varepsilon_x * f)\, g(x)\, dx =$$
$$= \zeta(f) \int \chi(x)\, g(x)\, dx = \zeta_\chi(g)\,\zeta(f)$$

и, стало быть, $\zeta = \zeta_\chi$. Таким образом, отображение j *сюръективно* и, следовательно, биективно.

Наконец, множество W всех элементов $\zeta' \in \mathrm{X}(L^1(G))$, таких, что $\zeta'(f) \neq 0$, есть *открытая окрестность* точки ζ в $\mathrm{X}(L^1(G))$. Если $\zeta' \in W$, то в силу сказанного ранее

$$j^{-1}(\zeta')(x) = \zeta'(\varepsilon_x * f)/\zeta'(f).$$

Пусть K — компактная часть группы G. Множество всех функций вида $\varepsilon_x * f$ для $x \in K$ является тогда компактом в $L^1(G)$. Так как $\mathrm{X}(L^1(G))$ ограничено и, стало быть, равностепенно непрерывно в $L^{\infty}(G)$, то $\zeta'(\varepsilon_x * f)$ сходится равномерно на K к $\zeta(\varepsilon_x * f)$, когда ζ' стремится к ζ по W (*Общ. топ.*, гл. X, 2-е изд., § 2, теор. 1). Отсюда немедленно следует, что отображение j^{-1} *непрерывно*, чем и завершается доказательство.

Теперь мы будем отождествлять каждый унитарный характер χ группы G с характером $f \longmapsto \int f(x)\chi(x)\,dx$ алгебры $L^1(G)$.

Замечания. 1) Мы убедились в том, что отображение j биективно. На самом деле (это будет показано в другом выпуске) имеет место более общее утверждение о соответствии между непрерывными представлениями локально компактной группы H и непрерывными представлениями алгебры $L^1(H)$.

2) Каноническое отображение группы $\widehat{G}$ в $\mathrm{X}(\mathscr{M}^1(G))$, вообще говоря, не является сюръективным (§ 2, упр. 14).

Следствие 1. *Каждый характер алгебры $L^1(G)$ эрмитов. Каноническое отображение пространства* $\mathrm{X}(\mathrm{St}(G))$ (гл. 1, § 6, n°7) *в* $\mathrm{X}(L^1(G))$ *является гомеоморфизмом.*

Первое утверждение — прямое следствие предыдущего. Второе вытекает из первого и следствия предложения 10, гл. I, § 6.

Следствие 2. *Топологическая группа $\widehat{G}$ локально компактна.*

В дальнейшем мы будем отождествлять $\widehat{G}$, $\mathrm{X}(L^1(G))$ и $\mathrm{X}(\mathrm{St}(G))$. Через $\langle \hat{x}, x\rangle$, где $x \in G$, $\hat{x} \in \widehat{G}$, обозначим комплексное число $\hat{x}(x)$. Если $\langle \hat{x}, x\rangle = 1$, то говорят, что x и $\hat{x}$ ортогональны. Пусть A — некоторая часть G (соответственно $\widehat{G}$); множество всех элементов группы $\widehat{G}$ (соответственно G), ортогональных к A, является, очевидно, *замкнутой подгруппой* в $\widehat{G}$ (соответственно G) и называется аннулятором A; мы будем обозначать его через $A^{\perp}$.

Для $x \in G$ отображение $\hat{x} \longmapsto \langle \hat{x}, x\rangle$ есть унитарный характер $\eta(x)$ локально компактной коммутативной группы $\widehat{G}$; этот факт немедленно следует из определения умножения в $\widehat{G}$ и того обстоятельства, что отображение $(x, \hat{x}) \longmapsto \langle \hat{x}, x\rangle$ непрерывно. Мы можем, таким образом, определить отображение η группы G в ее вторую двойственную группу $\widehat{\widehat{G}}$, называемое *каноническим* отображением. Отображение η оказывается непрерывным, и для любых $x, y \in G$ имеем

$\eta(xy) = \eta(x)\eta(y)$; это следует из непрерывности отображения $(x, \hat{x}) \mapsto \langle \hat{x}, x \rangle$ и предложения 9, *Общ. топ.*, гл. X, 2-е изд., § 2. Итак, *каноническое отображение* η *из* G *в* $\hat{\hat{G}}$, *определенное равенством*

$$\langle \eta(x), \tilde{A} \rangle = \langle \tilde{A}, x \rangle \qquad (x \in G, \tilde{A} \in \hat{G}),$$

является непрерывным морфизмом группы G *в* $\hat{\hat{G}}$. Мы увидим (теорема 2, n° 5), что отображение η в действительности представляет собой *изоморфизм* группы G на $\hat{\hat{G}}$.

2. Определение преобразования Фурье

Определение 3. *Преобразованием Фурье меры* $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ *называется функция* $\mathscr{F}_G\mu = \mathscr{F}\mu$ (*обозначаемая иногда через* $\hat{\mu}$) *на* $\hat{G}$, *определенная равенством*

$$(\mathscr{F}\mu)(\hat{x}) = \int \overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, d\mu(x). \tag{4}$$

Копреобразованием Фурье меры μ *называют функцию* $\overline{\mathscr{F}}\mu$ *на* G, *определенную равенством*

$$(\overline{\mathscr{F}}\mu)(\hat{x}) = \int \langle \hat{x}, x \rangle\, d\mu(x). \tag{5}$$

Предложение 2. *Преобразование Фурье* $\mathscr{F}$ *и копреобразование Фурье* $\overline{\mathscr{F}}$ *являются морфизмами инволютивной алгебры* $\mathscr{M}^1(G)$ *в инволютивную алгебру ограниченных непрерывных функций на* $\hat{G}$.

Как мы видели в n° 1, отображение $\mu \mapsto \int \langle \hat{x}, x \rangle\, d\mu(x)$ есть эрмитов характер алгебры $\mathscr{M}^1(G)$. Отсюда немедленно следует, что $\mathscr{F}$ и $\overline{\mathscr{F}}$ — морфизмы инволютивной алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ в инволютивную алгебру комплексных функций на $\hat{G}$. Кроме того,

$$|(\mathscr{F}\mu)(\hat{x})| = \left| \int \overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, d\mu(x) \right| \leqslant \|\mu\|_1, \tag{6}$$

откуда видно, что функции $\mathscr{F}\mu$ (и, аналогично, $\overline{\mathscr{F}}\mu$) ограничены. Наконец, если $\hat{x}$ стремится к $\hat{x}_0$ в $\hat{G}$, то функция $\hat{x}$ на G стремится к $\hat{x}_0$ равномерно на каждом компакте, оставаясь ограниченной числом 1. Отсюда следует, что $(\mathscr{F}\mu)(\hat{x})$ стремится к $(\mathscr{F}\mu)(\hat{x}_0)$ для каждой ограниченной меры μ. Следовательно, $\mathscr{F}\mu$ (и, аналогично, $\overline{\mathscr{F}}\mu$) непрерывны.

Отметим следующие полезные формулы:

(7) $$(\mathcal{F}\mu)(\hat{x}) = (\overline{\mathcal{F}}\mu)(\hat{x}^{-1}) = \overline{(\overline{\mathcal{F}}\bar{\mu})(\hat{x})};$$

(8) $$\|\mathcal{F}\mu\|_\infty = \|\overline{\mathcal{F}}\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\|_1;$$

(9) $$(\mathcal{F}\varepsilon_x)(\hat{x}) = \overline{\langle \hat{x}, x\rangle},\quad (\overline{\mathcal{F}}\varepsilon_x)(\hat{x}) = \langle \hat{x}, x\rangle$$

(в частности, $\mathcal{F}\varepsilon_e = \overline{\mathcal{F}}\varepsilon_e = 1$);

(10) $$(\mathcal{F}(\varepsilon_x * \mu))(\hat{x}) = \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}(\mathcal{F}\mu)(\hat{x}),\quad (\overline{\mathcal{F}}(\varepsilon_x * \mu))(\hat{x}) = \langle \hat{x}, x\rangle(\overline{\mathcal{F}}\mu)(\hat{x});$$

(11) $$\mathcal{F}(\hat{x}\cdot\mu) = \varepsilon_{\hat{x}} * \mathcal{F}\mu,\quad \overline{\mathcal{F}}(\hat{x}\cdot\mu) = \varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \overline{\mathcal{F}}\mu.$$

Из всех этих формул не очевидны разве лишь формулы (11). Они следуют из равенств

$$(\mathcal{F}(\hat{x}\cdot\mu))(\hat{y}) = \int \overline{\langle \hat{y}, x\rangle}\langle \hat{x}, x\rangle\, d\mu(x) = \int \overline{\langle \hat{y}\hat{x}^{-1}, x\rangle}\, d\mu(x) = (\mathcal{F}\mu)(\hat{y}\hat{x}^{-1}) = (\varepsilon_{\hat{x}} * \mathcal{F}\mu)(\hat{y}).$$

Путем сужения на подалгебру $L^1(G)$ определяются преобразование Фурье и копреобразование Фурье на $L^1(G)$. Следовательно, для $f \in L^1(G)$ имеют место равенства

(12) $$(\overline{\mathcal{F}}f)(\hat{x}) = \int \overline{\langle \hat{x}, x\rangle} f(x)\, dx,\quad (\overline{\mathcal{F}}f)(\hat{x}) = \int \langle \hat{x}, x\rangle f(x)\, dx.$$

Каноническое отображение группы $\widehat{G}$ в $\mathrm{X}(L^1(G))$ является гомеоморфизмом (предл. 1), и *копреобразование Фурье, если отождествить* $\widehat{G}$ *и* $\mathrm{X}(L^1(G))$, *становится преобразованием Гельфанда*. Однако $\mathrm{X}(\mathscr{M}^1(G))$ не отождествляется с $\widehat{G}$.

Предложение 3. *Преобразование Фурье и копреобразование Фурье суть инъективные морфизмы инволютивной алгебры* $L^1(G)$ *в инволютивную алгебру* $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$ *непрерывных функций, равных нулю на бесконечности в* $\widehat{G}$.

Это утверждение вытекает из свойств преобразования Гельфанда (гл. I, § 3, предл. 2), предложения 2 и того обстоятельства, что $L^1(G)$ — алгебра без радикала.

Замечание. В отличие от преобразования Фурье на $\mathscr{M}^1(G)$, преобразование Фурье на $L^1(G)$ зависит от выбора меры Хаара dx. При замене dx мерой $a\,dx\,(a>0)$ новое преобразование Фурье функции $f\in L^1(G)$ становится равным $a\cdot\mathscr{F}f$.

Рассмотрим C^*-алгебру $\mathrm{St}(G)$ группы G и отождествим $L^1(G)$ с некоторой плотной подалгеброй в $\mathrm{St}(G)$. В силу следствия 1 предложения 1 и теоремы 1, гл. I, § 6, преобразование Фурье и копреобразование Фурье продолжаются по непрерывности до *изоморфизма* C^*-алгебры $\mathrm{St}(G)$ на $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$, обозначения $\mathscr{F}$ и $\overline{\mathscr{F}}$ сохраняются; разумеется, изоморфизм $\overline{\mathscr{F}}$ есть преобразование Гельфанда для $\mathrm{St}(G)$.

3. Теорема Планшереля

Обозначим через $A(G)$, или просто A, векторное подпространство в $L^1(G)$, порожденное функциями вида $f*g$, где f, $g\in L^1(G)\cap L^2(G)$. Так как $L^1\cap L^2$ — идеал в L^1, то A — идеал в L^1, содержащийся в $L^1\cap L^2$. Поскольку $(\hat{x}f)*(\hat{x}g)=\hat{x}(f*g)$ для $\hat{x}\in\widehat{G}$, $f\in L^1$, $g\in L^1$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 3, предл. 6), то $\hat{x}h\in A$ для всех $h\in A$.

Лемма 1. *Существует база фильтра $\mathfrak{B}$ на $A\cap\mathscr{K}(G)$, такая, что*

(i) $\varepsilon_e=\lim_{\mathfrak{B}}\varphi\,dx$ *в пространстве $\mathscr{C}'(G)$, снабженном топологией равномерной сходимости на компактных частях пространства $\mathscr{C}(G)$;*

(ii) $\lim_{\mathfrak{B}}\mathscr{F}\varphi=1$ *в топологии компактной сходимости на $\widehat{G}$ и $\|\mathscr{F}\varphi\|_\infty\leqslant 1$ для каждой функции φ, принадлежащей какому-нибудь множеству из $\mathfrak{B}$;*

(iii) $\lim_{\mathfrak{B}}\varphi*f=f$ *в пространстве $L^p(G)$ для любого $p\in[1,+\infty[$ и каждой функции $f\in L^p(G)$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{B}_0$ — база фильтра окрестностей элемента e в G, состоящая из симметричных компактных окрестностей, содержащихся в некотором фиксированном компактном множестве. Пусть $X\in\mathfrak{B}_0$ и X' — множество всех функций $\psi\in\mathscr{K}_+(G)$, таких, что $\operatorname{supp}\psi\subset X$ и $\int\psi(x)\,dx=1$; пусть X'' — множество всех элементов вида $\psi*\psi$ для $\psi\in X'$. Тогда $X''\subset A\cap\mathscr{K}(G)$, и множество $\mathfrak{B}$, состоящее из всех таких X'', является базой фильтра на $A\cap\mathscr{K}(G)$. Свойство (i) (соответственно (iii)) следует из *Интегр.*, гл. VIII, § 2, n° 7, след. 1 леммы 4 (соответственно § 4, n° 7, предл. 20). Компактная часть в $\widehat{G}$ является компактной частью в $\mathscr{C}(G)$; следовательно, (i) влечет за собой равенство $\lim_{\mathfrak{B}}\mathscr{F}\varphi=1$ в топологии компактной сходимости на $\widehat{G}$. Вторая часть утверждения (ii) очевидна.

Пусть f, $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Для каждой функции $\varphi \in \mathrm{St}(G)$ имеют место соотношения: $\varphi * f \in L^2(G)$, $\|\varphi * f\|_2 \leqslant \|\varphi\|_* \|f\|_2$ и $(\varphi * f) * g = \varphi * (f * g)$ (гл. I, § 6, n° 7, формула (13)). В силу *Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 15, $\varphi * (f * g)$ есть функция из $\mathscr{C}^0(G)$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi * (f * g)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_* \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Таким образом, для $f \in A$ и $\varphi \in \mathrm{St}(G)$ справедливо соотношение $\varphi * f \in \mathscr{C}^0(G)$ и $\varphi \mapsto (\varphi * f)(e)$ есть непрерывная линейная форма на $\mathrm{St}(G)$. Из того, что $\mathscr{F}$ — изоморфизм $\mathrm{St}(G)$ на $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$, вытекает

Лемма 2. *Для каждой функции $f \in A$ существует и притом единственная ограниченная мера μ_f на $\widehat{G}$, такая, что для любой $f \in \mathrm{St}(G)$ справедливо равенство*

$$(\varphi * f)(e) = \int_{\widehat{G}} (\mathscr{F}\varphi)\, d\mu_f. \tag{13}$$

Пусть теперь f, $g \in A$. Для любой функции $\varphi \in L^1(G)$ имеем тогда

$$(\mathscr{F}f \cdot \mu_g)(\mathscr{F}\varphi) = \int_{\widehat{G}} (\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}f)\, d\mu_g = \int \mathscr{F}(\varphi * f)\, d\mu_g = \\ = ((\varphi * f) * g)(e). \tag{14}$$

Из того что $(\varphi * f) * g = (\varphi * g) * f$ и $\mathscr{F}(L^1(G))$ плотно в $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$, применяя (14), выводим равенство

$$(\mathscr{F}f) \cdot \mu_g = (\mathscr{F}g) \cdot \mu_f \quad (f,\ g \in A). \tag{15}$$

Пусть Ω_f — открытое множество в $\widehat{G}$, состоящее из тех $\hat{x} \in \widehat{G}$, для которых $(\mathscr{F}f)(\hat{x}) \neq 0$. Пусть φ — характеристическая функция множества $\widehat{G} - \Omega_f$. Для каждой функции $g \in A$, учитывая (15) и *Интегр.*, гл. V, § 5, n° 3, теор. 1, имеем

$$\int (\mathscr{F}g)\, d(\varphi \cdot \mu_f) = \int \varphi (\mathscr{F}f)\, d\mu_g = 0.$$

В силу леммы 1, A плотно в $\mathrm{St}(A)$, следовательно, $\mathscr{F}(A)$ плотно в $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$; из этого замечания и предыдущего равенства выводим, что $\varphi \cdot \mu_f = 0$, т. е. что мера μ_f *сосредоточена на множестве* Ω_f. Пусть ν_f — мера на Ω_f плотности $(\mathscr{F}f)^{-1}$ по отношению к $\mu_f \mid \Omega_f$. В силу (15), $\nu_f \mid (\Omega_f \cap \Omega_g) = \nu_g \mid (\Omega_f \cap \Omega_g)$. Поскольку $\mathscr{F}(A)$ плотно в $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$, множества Ω_f для $f \in A$ образуют открытое покрытие $\widehat{G}$. Далее, *существует единственная мера ν на $\widehat{G}$, такая, что для каждой функции $f \in A$ имеет место равенство $\nu_f = \nu \mid \Omega_f$.*

Если $f \in A$, то

(16) $$\mu_f = (\mathcal{F} f)\, \nu.$$

Действительно, каждая из частей равенства (16) представляет собой меру, сосредоточенную на Ω_f, и сужение каждой из этих мер на Ω_f совпадает с $(\mathcal{F} f) \cdot \nu_f$. В частности, $\mathcal{F} f \in L^1(\widehat{G}, \nu)$. Напомним, что, с другой стороны, $\mathcal{F} f \in \mathscr{C}^0(\widehat{G})$. Стало быть, $\mathcal{F} f \in L^2(\widehat{G}, \nu)$.

Формула (13) может быть теперь записана следующим образом:

(17) $$(\varphi * f)(e) = \int_{\widehat{G}} (\mathcal{F} \varphi)(\mathcal{F} f)\, d\nu,$$

где $\varphi \in \mathrm{St}(G)$, $f \in A$. В частности, для f, $g \in A$

(18) $$\int_{\widehat{G}} (\mathcal{F} f)(\mathcal{F} g)\, d\nu = (f * g)(e) = \int_G f(x)\, g(x^{-1})\, dx.$$

Покажем теперь, что мера ν инвариантна относительно сдвигов на группе $\widehat{G}$. Пусть $\hat{x} \in \widehat{G}$. При замене функций f и g из A на функции $\hat{x} \cdot f$ и $\hat{x} \cdot g$ интеграл $\int_G f(x)\, g(x^{-1})\, dx$ не изменится. Поэтому, в силу (18),

$$\nu((\mathcal{F} f)(\mathcal{F} g)) = \nu((\varepsilon_{\hat{x}} * \mathcal{F} f)(\varepsilon_{\hat{x}} * \mathcal{F} g)) =$$
$$= \nu\big(\varepsilon_{\hat{x}} * ((\mathcal{F} f)(\mathcal{F} g))\big) = (\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu)((\mathcal{F} f)(\mathcal{F} g)).$$

Иначе говоря,

$$\mu_f(\mathcal{F} g) = \big(\mathcal{F} f \cdot (\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu)\big)(\mathcal{F} g).$$

Отсюда, вспоминая, что $\mathcal{F}(A)$ плотно в $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$, выводим равенство

$$\mu_f = \mathcal{F} f \cdot (\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu),$$

справедливое для каждой функции $f \in A$. Таким образом, мера $\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu$ индуцирует на Ω_f меру ν_f и, значит, $\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu = \nu$. Поэтому мера ν отличается лишь постоянным множителем от меры Хаара на $\widehat{G}$. Формула (18), которую, полагая $g = \tilde{f}$, можно привести к виду

(19) $$\int_{\widehat{G}} |\mathcal{F} f|^2\, d\nu = \int_G |f|^2\, dx,$$

показывает, что этот множитель положителен. Стало быть, *ν — некоторая мера Хаара на $\widehat{G}$*.

Определение 4. *Мера Хаара ν на $\widehat{G}$ называется ассоциированной с исходной мерой Хаара на G.*

Впредь через $d\hat{x}$ мы будем обозначать меру Хаара на $\hat{G}$, ассоциированную с мерой dx.

Замечание. Если заменить меру dx мерой $a \cdot dx$, то свертка двух элементов f, $g \in L^1(G)$ заменится выражением $af * g$, а преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ перейдет в $a\mathcal{F}f$. Поэтому μ_f не изменится, а мера ν перейдет в $a^{-1}\nu$. Стало быть, мера $dx \otimes d\hat{x}$ на $G \times \hat{G}$ не зависит от выбора меры Хаара dx.

Теорема 1 (Планшерель). *Если $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, то $\mathcal{F}f \in L^2(\hat{G})$. Отображение $f \mapsto \mathcal{F}f$ из $L^1(G) \cap L^2(G)$ в $L^2(\hat{G})$ однозначно продолжается до изометрии пространства $L^2(G)$ на $L^2(\hat{G})$ (G и $\hat{G}$ снабжены мерами dx и $d\hat{x}$).*

Для доказательства заметим, что в силу (19) сужение $\mathcal{F}$ на A представляет собой изометрию пространства $A \subset L^2(G)$ на подпространство $\mathcal{F}(A)$ в $L^2(\hat{G})$. Так как A плотно в $L^2(G)$ (лемма 1), то $\mathcal{F}$ однозначно продолжается до изометрии Φ пространства $L^2(G)$ на подпространство в $L^2(\hat{G})$. Для доказательства равенства $\Phi(L^2(G)) = L^2(\hat{G})$ достаточно показать, что $\mathcal{F}(A)$ плотно в $L^2(\hat{G})$. Пусть h — элемент из $L^2(\hat{G})$, ортогональный к $\mathcal{F}(A)$. Если f, $g \in A$, то $(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) = \mathcal{F}(f * g) \in \mathcal{F}(A)$; следовательно, функция $h \cdot (\mathcal{F}f)$ ортогональна к $\mathcal{F}g$. Поэтому $h \cdot (\mathcal{F}f)$ ортогональна к $\mathcal{F}(A)$ для любой функции $f \in A$. Но $h \cdot (\mathcal{F}f) \in L^1(\hat{G})$ и $\mathcal{F}(A)$ плотно в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$; стало быть, функция $h \cdot (\mathcal{F}f)$ локально нулевая относительно $d\hat{x}$. Поскольку множества Ω_f образуют открытое покрытие пространства $\hat{G}$, отсюда следует, что $h = 0$, чем и доказывается наше утверждение.

Пусть $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. В силу леммы 1, существует фильтр $\mathfrak{B}$ на A, сходящийся к f одновременно в $L^1(G)$ и $L^2(G)$. Имеем

$$\Phi(f) = \lim_{\mathfrak{B}, g} \Phi(g) = \lim_{\mathfrak{B}, g} \mathcal{F}g \text{ в } L^2(\hat{G})$$
$$\text{и } \mathcal{F}f = \lim_{\mathfrak{B}, g} \mathcal{F}g \quad \text{в} \quad \mathscr{C}^0(\hat{G});$$

следовательно, $\mathcal{F}g = \Phi f$, чем и завершается доказательство теоремы.

Мы будем обозначать изометрию пространства $L^2(G)$ на $L^2(\hat{G})$, указанную в теореме 1, по-прежнему через $\mathcal{F}$ и сохраним за этой изометрией название *преобразования Фурье*. Аналогичным образом, продолжение изометрии $\overline{\mathcal{F}}$ на $L^2(G)$ будет по-прежнему обозначаться $\overline{\mathcal{F}}$ и называться копреобразованием Фурье.

4. Формула обращения Фурье (предварительный случай)

Поскольку $\mathcal{F}$ — изометрия из $L^2(G)$ на $L^2(\widehat{G})$, получаем

$$(f \mid g) = (\mathcal{F}f \mid \mathcal{F}g)$$

для любых элементов f, $g \in L^2(G)$. Иначе говоря,

$$(f * \tilde{g})(e) = \int \mathcal{F}f(\hat{x}) \overline{\mathcal{F}g(\hat{x})}\, d\hat{x}. \tag{20}$$

Выбирая, в частности, f, $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$, получим

$$\mathcal{F}f \cdot \overline{\mathcal{F}g} = \mathcal{F}(f * \tilde{g}) \in L^1(\widehat{G}).$$

Предложение 4. *Если $f \in A$, то $\mathcal{F}f \in L^1(\widehat{G})$ и для всех $x \in G$*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \langle \hat{x}, x \rangle (\mathcal{F}f)(\hat{x})\, d\hat{x} \tag{21}$$

(«формула обращения Фурье»).

Действительно, формула (20) немедленно приводит к формуле (21) при $x = e$; чтобы получить общий случай, достаточно функцию f заменить функцией $\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * f$.

Если мы рассмотрим теперь вторую двойственную группу $\widehat{\widehat{G}}$ к группе G и каноническое отображение η из G в $\widehat{\widehat{G}}$, то сможем записать формулу (21) в виде

$$f = (\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f) \circ \eta \quad \text{для всех} \quad f \in A. \tag{22}$$

Замечание. Пусть $F \in L^1(\widehat{G}) \cap L^2(\widehat{G})$. Полагая $f = \overline{\mathcal{F}}F \circ \eta$, получим функцию, непрерывную и ограниченную на G. Для всех $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$ имеет место равенство

$$\int_G g(x) f(x)\, dx = \int_G g(x)\, dx \int_{\widehat{G}} \langle \hat{x}, x \rangle F(\hat{x})\, d\hat{x} = \tag{23}$$
$$= \int_{\widehat{G}} \overline{\mathcal{F}}g(\hat{x}) F(\hat{x})\, d\hat{x},$$

получающееся в результате применения теоремы Лебега — Фубини к функции $g(x) F(\hat{x}) \langle \hat{x}, x \rangle$, интегрируемой на $G \times \widehat{G}$. Далее, имеет место неравенство

$$\left| \int g(x) f(x)\, dx \right| \leqslant \| \overline{\mathcal{F}}g \|_2 \cdot \| F \|_2 = \| g \|_2 \cdot \| F \|_2,$$

из которого следует, что $f \in L^2(G)$. С другой стороны, применяя теорему 1, имеем

$$\int g(x) f(x)\, dx = \int \overline{\mathcal{F}\bar{g}(\hat{x})} \mathcal{F}f(\hat{x})\, d\hat{x} = \int \overline{\mathcal{F}}g(\hat{x}) \mathcal{F}f(\hat{x})\, d\hat{x}.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (23), мы видим, что $F = \mathcal{F}f$ в $L^2(\widehat{G})$ и что $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \circ \eta$.

Обратно, если $f \in L^2(G)$ и $\mathcal{F}f \in L^1(G)$, то можно применить предыдущее к функции $F = \mathcal{F}f$ и заключить, что f почти всюду совпадает с *непрерывной* функцией $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f) \circ \eta$. Иначе говоря, *формула* (22) *остается справедливой и для тех* $f \in L^2(G)$, *для которых* $\mathcal{F}f \in L^1(\widehat{G})$.

Предложение 5. *Банахова алгебра* $L^1(G)$ *регулярна.*

Достаточно показать, что если P — замкнутая часть $\widehat{G}$ и χ — какая-нибудь точка из $\widehat{G}$, не принадлежащая P, то существует функция $f \in L^1(G)$, такая, что функция $\mathcal{F}f$ равна нулю на P и не равна нулю в точке χ. Поскольку, в силу (11), $\mathcal{F}(\chi f) = \varepsilon_\chi * \mathcal{F}f$, можно без ограничения общности считать, что $\chi = e$, где e — нейтральный элемент в $\widehat{G}$. В таком случае существует симметричная компактная окрестность U точки e, такая, что $U^2 \cap P = \varnothing$. Пусть F_1 и F_2 — две неотрицательные непрерывные функции на $\widehat{G}$, равные нулю вне U и положительные в точке e. Функция $F_3 = F_1 * F_2$ равна нулю на множестве P, а в точке e положительна; поэтому достаточно показать, что $F_3 \in \mathcal{F}L^1(G)$. Но так как $F_i \in L^1(\widehat{G}) \cap \cap L^2(\widehat{G})$, $i = 1, 2, 3$, то можно применить приведенное выше замечание. Полагая $f_i = \overline{\mathcal{F}}F_i \circ \eta$, найдем, что $f_i \in L^2(G)$, $F_i = \mathcal{F}f_i$. Кроме того,

$$f_3 = \overline{\mathcal{F}}(F_1 * F_2) \circ \eta = (\overline{\mathcal{F}}F_1 \cdot \overline{\mathcal{F}}F_2) \circ \eta = \\ = (\overline{\mathcal{F}}F_1 \circ \eta) \cdot (\overline{\mathcal{F}}F_2 \circ \eta) = f_1 f_2,$$

откуда $f_3 \in L^1(G)$ и $F_3 = \mathcal{F}f_3 \in \mathcal{F}L^1(G)$.

5. Теорема двойственности

Теорема 2 (Понтрягин). *Пусть* $d\hat{\hat{x}}$ — *мера Хаара на* $\hat{\hat{G}}$, *ассоциированная с* $d\hat{x}$. *Каноническое отображение* η *из* G *в* $\hat{\hat{G}}$ *является изоморфизмом топологических групп, переводящим* dx *в* $d\hat{\hat{x}}$. *Если с помощью этого изоморфизма отождествить* G *и* $\hat{\hat{G}}$, *то копреобразование Фурье из* $L^2(\widehat{G})$ *на* $L^2(G)$ *и преобразование Фурье из* $L^2(G)$ *на* $L^2(\widehat{G})$ *окажутся взаимно обратными.*

Покажем сначала, что отображение η инъективно и является гомеоморфизмом G на $\eta(G)$. Для этого достаточно показать, что для каждой окрестности U элемента e в G

существует окрестность W элемента e в $\hat{\hat{G}}$, такая, что $\eta^{-1}(W) \subset U$. Пусть V — симметричная компактная окрестность элемента e в G, такая, что $V^2 \subset U$, и пусть f — ненулевая функция из $\mathcal{K}_+(G)$ с носителем, содержащимся в V. Положим $g = \tilde{f} * f$. Тогда $g \in A$, $\operatorname{supp} g \subset U$ и $g(e) > 0$. Так как топология на $\hat{\hat{G}}$ есть топология простой сходимости на $L^1(\hat{G})$ (предложение 1), то существует окрестность W элемента e в $\hat{\hat{G}}$, такая, что

$$\hat{\hat{x}} \in W \Rightarrow |\langle \mathcal{F}g, \hat{\hat{x}} \rangle - \langle \mathcal{F}g, e \rangle| < \frac{1}{2} g(e)$$

(напомним, что $\mathcal{F}g \in L^1(\hat{G})$ (предложение 4)), т. е. такая, что

$$\hat{\hat{x}} \in W \Rightarrow |(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}g)(\hat{\hat{x}}) - (\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}g)(e)| < \frac{1}{2} g(e).$$

Если $x \in \eta^{-1}(W)$, то, в силу (22),

$$|g(x) - g(e)| < \frac{1}{2} g(e),$$

откуда $g(x) \neq 0$ и $x \in U$, так как $\operatorname{supp} g \subset U$.

Далее, $\eta(G)$ — локально компактная подгруппа в $\hat{\hat{G}}$, а следовательно, замкнутая в $\hat{\hat{G}}$ (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 3, след. 2 предл. 4). Если бы существовал элемент $\chi \in \hat{\hat{G}}$, такой, что $\chi \notin \eta(G)$, то существовала бы (предложение 5) ненулевая функция $f \in L^1(\hat{G})$, такая, что $\int f(\hat{x}) \overline{\langle \hat{x}, x \rangle} \, d\hat{x} = 0$ для всех $x \in G$. Тогда, в силу теоремы Лебега — Фубини, для любой функции $u \in L^1(G)$ выполнялось бы равенство

$$\int f(\hat{x}) (\mathcal{F}u)(\hat{x}) \, d\hat{x} = \int u(x) \, dx \int f(\hat{x}) \overline{\langle \hat{x}, x \rangle} \, d\hat{x} = 0,$$

откуда следовало бы, что $f(\hat{x}) \, d\hat{x} = 0$, что абсурдно. Стало быть, $\eta(G) = \hat{\hat{G}}$. Формула (22) доказывает, что 1) $\overline{\mathcal{F}}_{\hat{G}}$ — изометрия из $L^2(\hat{G}, d\hat{x})$ на $L^2(\hat{\hat{G}}, \eta(dx))$, следовательно, $d\hat{\hat{x}} = \eta(dx)$; 2) если отождествить G и $\hat{\hat{G}}$ с помощью канонического отображения η, то $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}$ окажется тождественным отображением пространства $L^2(G)$. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем отождествлять G и $\hat{\hat{G}}$.

Пусть G, G' — локально компактные коммутативные группы и φ — отображение из $G \times G'$ в $\mathbf{U}$. Для каждого элемента $x \in G$ (соответственно $x' \in G'$) пусть α_x (соответственно $\beta_{x'}$) — функция $x' \longmapsto \varphi(x, x')$ (соответственно $x \longmapsto \varphi(x, x')$) на G' (соответственно G). Предположим, что отображение $x \longmapsto \alpha_x$ является изоморфизмом топологической группы G на топологическую группу $\widehat{G}'$. Тогда, в силу теоремы 2, отображение $x' \longmapsto \beta_{x'}$ является изоморфизмом топологической группы G' на топологическую группу $\widehat{G}$. В таком случае топологические группы G и G' называются *двойственными относительно* φ, и мы отождествляем каждую из групп G, G' с двойственной к другой.

6. Непосредственные следствия теоремы двойственности

Теорема Понтрягина показывает, что топологические группы G и $\widehat{G}$ играют симметричные роли и что относительно пространств L^2 преобразование Фурье и копреобразование Фурье взаимно обратны. Кроме того, имеется естественное соответствие между преобразованиями Фурье на G и $\widehat{G}$.

Предложение 6. *Пусть* $\alpha \in \mathscr{M}^1(G)$ *и* $\beta \in \mathscr{M}^1(\widehat{G})$. *Тогда имеют место равенства*:

$$\int_G \mathscr{F}\beta(x)\,d\alpha(x) = \int_{\widehat{G}} \mathscr{F}\alpha(\hat{x})\,d\beta(\hat{x}), \tag{24}$$

$$\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}\beta \cdot \alpha) = \beta * \mathscr{F}\alpha. \tag{25}$$

Докажем равенство (24). Имеем

$$\int_G \mathscr{F}\beta(x)\,d\alpha(x) = \int_G d\alpha(x) \int_{\widehat{G}} \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\,d\beta(\hat{x}).$$

Из этого равенства немедленно вытекает (24), если воспользоваться тем, что функция $\overline{\langle \hat{x}, x\rangle}$ интегрируема на $G \times \widehat{G}$ по мере $\alpha \otimes \beta$, и применить теорему Фубини.

Докажем равенство (25). Пусть $\hat{x} \in \widehat{G}$. Имеем

$$(\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}\beta \cdot \alpha))(\hat{x}) = \int_G \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\,\overline{\mathscr{F}}\beta(x)\,d\alpha(x) =$$

$$= \int_G \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\,d\alpha(x) \int_{\widehat{G}} \langle \hat{y}, x\rangle\,d\beta(\hat{y}).$$

В этом случае функция $\overline{\langle \hat{x}\hat{y}^{-1}, x\rangle}$ также интегрируема на $G \times \hat{G}$ по мере $\alpha \otimes \beta$, и теорема Лебега — Фубини дает

$$(\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\beta\cdot\alpha))(\hat{x}) = \int_{\hat{G}} d\beta(\hat{y}) \int_{G} \overline{\langle \hat{x}\hat{y}^{-1}, x\rangle}\, d\alpha(x) =$$
$$= \int_{\hat{G}} \mathcal{F}\alpha(\hat{x}\hat{y}^{-1})\, d\beta(\hat{y}) = (\beta * \mathcal{F}\alpha)(\hat{x}).$$

Следствие. *Отображение $\mathcal{F}$ инъективно на $\mathcal{M}^1(G)$.*

Действительно, если $\mathcal{F}\alpha = 0$, то для любой функции $f \in L^1(\hat{G})$ выполняется равенство $\alpha(\mathcal{F}f) = 0$. Остается заметить, что $\mathcal{F}(L^1(\hat{G}))$ плотно в $\mathscr{C}^0(G)$.

Существует много других функциональных пространств на G и $\hat{G}$ (помимо простр анств L^2), для которых $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ — взаимно обратные изоморфизмы. Например, имеет место

Теорема 3. *Пусть $B(G)$ — множество функций $f \in L^1(G)$, таких, что $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})$. Тогда $\mathcal{F} \mid B(G)$ — биекция из $B(G)$ на $B(\hat{G})$ и обратная к ней биекция есть $\overline{\mathcal{F}} \mid B(\hat{G})$.*

Пусть $f \in B(G)$. Тогда $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G}) \cap \mathscr{C}^0(\hat{G}) \subset L_1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$. Положим $f' = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \in L^2(G)$. Для каждой функции $g \in \mathcal{K}(\hat{G})$ имеем

$$\langle f', \mathcal{F}g\rangle = (\mathcal{F}g \mid \bar{f}') = (g \mid \overline{\mathcal{F}}\bar{f}') = \langle \mathcal{F}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{F}g\rangle.$$

Отсюда следует, что $f' = f \in L^1(G)$ и $\mathcal{F}f \in B(\hat{G})$. В то же время, как легко видеть, $(\overline{\mathcal{F}} \mid B(\hat{G})) \circ (\mathcal{F} \mid B(G))$ — тождественное отображение множества $B(G)$. Меняя ролями G и $\hat{G}$, завершаем доказательство теоремы.

Замечание 1. Справедливо соотношение

$$(f \in L^1(G) \text{ и } \mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})) \Leftrightarrow f \in L^1(G) \cap \mathcal{F}(L^1(\hat{G})).$$

Действительно, из теоремы 3 следует, что

$$(f \in L^1(G) \text{ и } \mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})) \Rightarrow f \in L^1(G) \cap \mathcal{F}(L^1(\hat{G})).$$

Обратно, если $f \in L^1(G)$ и $f = \mathcal{F}g$, где $g \in L^1(\hat{G})$, то $g \in B(\hat{G})$ и, значит, $f \in B(G)$ в силу теоремы 3.

Замечание 2. Множество $B(G)$ является алгеброй и относительно умножения, и относительно операции свертки. В самом деле, если $f, g \in B(G)$, то $f * g \in L^1(G)$ и $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)\cdot(\mathcal{F}g) \in L^1(\hat{G})$, поскольку, например, $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})$ и $\mathcal{F}g \in \mathscr{C}^0(\hat{G})$. Стало быть, $f * g \in B(G)$. С другой стороны,

$fg \in L^1(G)$, так как $f \in L^1(G)$, а $g \in \mathscr{C}^0(G)$; кроме того, $f = \mathscr{F}f'$ и $g = \mathscr{F}g'$, где $f', g' \in B(\widehat{G})$; следовательно, $fg = \mathscr{F}(f' * g')$ и, значит, $fg \in B(G)$.

Отметим также, что $\mathscr{F}$ переводит свертку в произведение (и обратно) в $B(G)$ и $B(\widehat{G})$.

Впрочем, формула $\mathscr{F}(fg) = (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$ справедлива и в других случаях, а не только когда $f, g \in B(G)$. Например, имеет место

Предложение 7. *Если $f, g \in L^2(G)$, то $\mathscr{F}(fg) = (\mathscr{F}f)*(\mathscr{F}g)$.*

Это равенство справедливо, если $f, g \in B(G)$ (замечание 2) и, в частности, если $f, g \in A(G)$. Поскольку $A(G)$ плотно в $L^2(G)$ (лемма 1 (iii)), достаточно показать, что левая и правая части предполагаемого равенства суть непрерывные функции от $(f, g) \in L^2(G) \times L^2(G)$ со значениями в $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$. Но отображение $(f, g) \mapsto \mathscr{F}(fg)$ есть суперпозиция отображения $(f, g) \mapsto fg$ из $L^2(G) \times L^2(G)$ в $L^1(G)$ с отображением $h \mapsto \mathscr{F}h$ из $L^1(G)$ в $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$; отображение $(f, g) \mapsto (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$ является суперпозицией отображения $(f, g) \mapsto (\mathscr{F}f, \mathscr{F}g)$ из $L^2(G) \times L^2(G)$ в $L^2(\widehat{G}) \times L^2(\widehat{G})$ с отображением $(h, h') \mapsto h * h'$ из $L^2(\widehat{G}) \times L^2(\widehat{G})$ в $\mathscr{C}^0(\widehat{G})$; остается принять во внимание то обстоятельство, что все эти отображения непрерывны.

7. Функториальные свойства двойственности

Пусть G, H — локально компактные коммутативные группы и $\varphi\colon G \to H$ — морфизм топологических групп. Если $\hat{x} \in \widehat{H}$, то $\hat{x} \circ \varphi$ является характером группы G, который обозначается через $\hat{\varphi}(\hat{x})$. Это обозначение соответствует формуле

$$\langle \hat{x}, \varphi(y) \rangle = \langle \hat{\varphi}(\hat{x}), y \rangle,$$

справедливой для любых $\hat{x} \in \widehat{H}$ и $y \in G$. Отсюда видно, что $\hat{\varphi}$ представляет собой морфизм топологической группы $\widehat{H}$ в топологическую группу $\widehat{G}$; морфизм $\hat{\varphi}$ называют *двойственным* к морфизму φ.

Если $\varphi'\colon H \to K$ — морфизм топологических групп, то, как следует из приведенной выше формулы, $(\varphi' \circ \varphi)^{\wedge} = \hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}'$. Если φ — тождественное отображение группы G, то $\hat{\varphi}$ — тождественное отображение группы $\widehat{G}$.

Эта формула показывает также, что $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$ (достаточно канонически отождествить G с $\hat{\hat{G}}$, H с $\hat{\hat{H}}$).

Теорема 4. *Пусть G' — замкнутая подгруппа в G, G'' — факторгруппа G/G', i — каноническая инъекция G' в G, p — каноническая сюръекция G на G''*:

$$G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'',$$

$$\widehat{G}' \xleftarrow{\hat{i}} \widehat{G} \xleftarrow{\hat{p}} \widehat{G}''.$$

Тогда отображение $\hat{p}$ является изоморфизмом $\widehat{G}''$ на $G'^{\perp}$, а отображение $\hat{i}$ — точным морфизмом $\widehat{G}$ на $\widehat{G}'$ с ядром $G'^{\perp}$.

1) Ясно, что $\hat{p}(\widehat{G}'')$ есть множество унитарных характеров группы G, равных нулю на G', т. е. множество $G'^{\perp}$. Если элемент $\hat{x}'' \in \widehat{G}''$ таков, что $\hat{p}(\hat{x}'') = e$, то для всех $x \in G$ имеет место равенство $1 = \langle x, \hat{p}(\hat{x}'')\rangle = \langle p(x), \hat{x}''\rangle$, из которого следует, что $\hat{x}'' = e$. Поэтому отображение $\hat{p}$ инъективно. С другой стороны, пусть U — некоторая окрестность элемента e в $\widehat{G}''$. Существуют компактная часть K'' в G'' и число $\varepsilon > 0$, такие, что

$$(\hat{x}'' \in \widehat{G}'' \text{ и } |\langle \hat{x}'', x''\rangle - 1| \leqslant \varepsilon \text{ для всех } x'' \in K'') \Rightarrow \hat{x}'' \in U.$$

В силу *Общ. топ.*, гл. I, 4-е изд., § 10, n° 4, предл. 10, существует компактная часть K в G, такая, что $p(K) = K''$. Тогда

$$(\hat{x}'' \in \widehat{G}'' \text{ и } |\langle \hat{p}(\hat{x}''), x\rangle - 1| \leqslant \varepsilon \text{ для всех } x \in K) \Rightarrow \hat{x}'' \in U.$$

Иначе говоря, существует окрестность V элемента e в $\widehat{G}$, такая, что

$$(\hat{x}'' \in \widehat{G}'' \text{ и } \hat{p}(\hat{x}'') \in V) \Rightarrow \hat{x}'' \in U.$$

Таким образом, $\hat{p}$ является изоморфизмом $\widehat{G}''$ на $G'^{\perp}$.

2) Ясно, что ядро отображения $\hat{i}$ совпадает с $G'^{\perp}$. Пусть L — двойственная группа к группе $\widehat{G}/\hat{i}^{-1}(e)$, так что $\widehat{G}/\hat{i}^{-1}(e) = \widehat{L}$. Существует морфизм ψ: $L \to G$ топологических групп, такой, что $\hat{\psi}$ — каноническая сюръекция из $\widehat{G}$ на $\widehat{L}$:

$$G' \xrightarrow{\eta} L \xrightarrow{\psi} G,$$

$$\widehat{G}' \xleftarrow{\hat{\eta}} \widehat{L} \xleftarrow{\hat{\psi}} \widehat{G}.$$

С другой стороны, отображение $\hat{i}$ может быть представлено в виде $\hat{\eta} \circ \hat{\psi}$, где η: $G' \to L$ — некоторый морфизм топологических групп. Так как $\psi \circ \eta = i$, то $\psi(L) \supset G'$. Из равенства

$$(\hat{\psi} \circ \hat{p})(\widehat{G}'') = \{e\}$$

следует, что $(p \circ \psi)(L) = \{e\}$ и, значит, $\psi(L) \subset G'$. Таким образом, $\psi(L) = G'$. Согласно первой части доказательства, ψ — изоморфизм L на G'. Стало быть, η — изоморфизм G' на L, $\hat{\eta}$ — изоморфизм $\widehat{L}$ на $\widehat{G}'$, а $\hat{i}$ — точный морфизм $\widehat{G}$ на $\widehat{G}'$ с ядром $G'^{\perp}$.

Следствие 1. *Пусть G' — некоторая подгруппа в G. Тогда $(G'^{\perp})^{\perp} = \overline{G}'$.*

Предположим сначала, что подгруппа G' замкнута, и используем обозначения теоремы 4. Тогда $\hat{i}$ есть точный морфизм $\widehat{G}$ на $\widehat{G}'$ с ядром $G'^{\perp}$ и, стало быть, $\hat{\hat{i}}$ — изоморфизм $\hat{\hat{G}}'$ на $(G'^{\perp})^{\perp}$. Если отождествить G' с $\hat{\hat{G}}'$, G с $\hat{\hat{G}}$ и i с $\hat{\hat{i}}$, то морфизм i окажется изоморфизмом G' на $(G'^{\perp})^{\perp}$, откуда $G' = (G'^{\perp})^{\perp}$. В общем случае имеем

$$\overline{G'} \subset (G'^{\perp})^{\perp} = (\overline{G'}^{\perp})^{\perp} = \overline{G'}.$$

Следствие 2. *Пусть (H_i) — семейство замкнутых подгрупп в G. Тогда аннулятор замкнутой подгруппы, порожденной подгруппами H_i, совпадает с $\bigcap_i H_i^{\perp}$. Аннулятор пересечения $\bigcap_i H_i$ является замкнутой подгруппой, порожденной подгруппами $H_i^{\perp}$.*

Первое утверждение очевидно. Второе получается (с учетом следствия 1) заменой G на $\widehat{G}$.

Следствие 3. *Пусть φ: $G \to H$ — морфизм топологических групп. Для того чтобы φ был точным сюръективным морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\varphi}$ был точным инъективным морфизмом.*

Если φ — сюръективный точный морфизм, то $\hat{\varphi}$ — инъективный точный морфизм (теорема 4). Если же $\hat{\varphi}$ — инъективный точный морфизм, то φ является изоморфизмом G на некоторую локально компактную и, стало быть, замкнутую подгруппу в H; следовательно, φ — сюръективный точный морфизм (теорема 4).

Следствие 4. *Пусть φ: $G \to H$ — морфизм топологических групп. Для того чтобы φ был точным морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\varphi}$ был точным морфизмом.*

Это немедленно вытекает из следствия 3 и канонического разложения точного морфизма.

Следствие 5. *Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — локально компактные коммутативные группы и λ_i — каноническая инъекция G_i*

в группу $G = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} G_j$. *Тогда отображение* $(\hat{\lambda}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ *из* $\widehat{G}$ *в* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \widehat{G}_j$ *является изоморфизмом.*

Для $n = 2$ это следует из теоремы 4. Чтобы доказать общее утверждение, достаточно провести индукцию по n.

Следствие 6. *Пусть* $\varphi: G \to H$ — *морфизм топологических групп. Тогда подгруппа* $\overline{\operatorname{Im}\varphi}$ *в* H *и подгруппа* $\operatorname{Ker}\hat{\varphi}$ *в* $\widehat{H}$ *взаимно ортогональны. В частности, для того чтобы морфизм* $\hat{\varphi}$ *был инъективным, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{Im}\varphi$ *был плотным в* H.

Пусть $\hat{y} \in \widehat{H}$. Для того чтобы $\hat{y} \in \operatorname{Ker}\hat{\varphi}$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle \hat{\varphi}(\hat{y}), x \rangle = 1$ для всех $x \in G$, т. е. чтобы $\langle \hat{y}, \varphi(x) \rangle = 1$ для всех $x \in G$, иначе говоря, чтобы $\hat{y} \in (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp} = (\overline{\operatorname{Im}\varphi})^{\perp}$. Поэтому $\operatorname{Ker}\hat{\varphi} = (\overline{\operatorname{Im}\varphi})^{\perp}$, а в силу следствия 1, $\overline{\operatorname{Im}\varphi} = (\operatorname{Ker}\hat{\varphi})^{\perp}$.

Следствие 7. *Пусть* $k \in \mathbf{Z}$. *Пусть* $G^{(k)}$ *и* $G_{(k)}$ — *образ и ядро морфизма* $x \mapsto x^k$ *из* G *в* G. *Тогда* $G_{(k)}$ *и замыкание подгруппы* $\widehat{G}^{(k)}$ *взаимно ортогональны.*

Действительно, морфизмы $x \mapsto x^k$ из G в G и $\hat{x} \mapsto \hat{x}^k$ из $\widehat{G}$ в $\widehat{G}$ двойственны друг другу.

Коммутативную группу C называют *делимой*[1]), если для каждого элемента $x \in C$ и каждого числа $k \in \mathbf{Z}$ существует элемент $y \in C$, такой, что $y^k = x$.

Следствие 8. (i) *Если группа* G *делима, то* $\widehat{G}$ — *группа без кручения (т. е. не имеет элементов конечного порядка).*

(ii) *Если* $\widehat{G}$ — *группа без кручения и* $k \in \mathbf{Z}$, *то множество элементов* x^k *(где* x *пробегает* G*) плотно в* G.

(iii) *Пусть* G *дискретна или компактна. Для того чтобы* G *была делимой, необходимо и достаточно, чтобы* $\widehat{G}$ *не имела кручения.*

Утверждения (i) и (ii) вытекают из следствия 7. Если группа G дискретна или компактна, то образ морфизма $x \mapsto x^k$ из G в G замкнут и (iii) вытекает из (i) и (ii).

8. Формула Пуассона

Предложение 8. *Пусть* H — *замкнутая подгруппа в* G, α — *мера Хаара на* H, β — *мера Хаара на* G *и* $\gamma = \beta/\alpha$ — *соот-*

---

[1]) Употребляется также термин *полная*. — *Прим. ред.*

ветствующая мера Хаара на G/H. Отождествим $(G/H)^\wedge$ с $H^\perp$ и обозначим через $\hat\gamma$ меру Хаара на $H^\perp$, ассоциированную с γ. Пусть $f \in L^1(G)$. Предположим, что сужение на $H^\perp$ непрерывной функции $\mathcal{F}f$ интегрируемо (по мере $\hat\gamma$). Тогда для почти всех $x \in G$ функция $h \mapsto f(xh)$ на H является α-интегрируемой и справедливо равенство

$$\int_H f(xh)\,d\alpha(h) = \int_{H^\perp} \langle k, x\rangle (\mathcal{F}f)(k)\,d\hat\gamma(k).$$

Известно (*Интегр.*, гл. VII, § 2, предл. 5), что для почти всех $x \in G$ функция $h \mapsto f(xh)$ является α-интегрируемой на H и что функция $\dot x \mapsto F(\dot x) = \int_H f(xh)\,d\alpha(h)$, определенная почти всюду на G/H, γ-интегрируема (через $\dot x$ обозначается канонический образ элемента x в G/H). Преобразование Фурье функции F, рассматриваемое как функция на $H^\perp$, задается равенством

$$(\mathcal{F}F)(k) = \int_{G/H} \overline{\langle k, \dot x\rangle}\,d\gamma(\dot x) \int_H f(xh)\,d\alpha(h) = \tag{26}$$

$$= \int_G \overline{\langle k, x\rangle} f(x)\,d\beta(x) = (\mathcal{F}f)(k).$$

В силу нашего предположения относительно функции f, получаем, следовательно, $\mathcal{F}F \in L^1\big((G/H)^\wedge\big)$. Стало быть, функция F почти всюду совпадает с функцией $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}F)$ (теорема 3), т. е. почти всюду на G/H имеет место равенство

$$F(\dot x) = \int_{H^\perp} \langle k, x\rangle (\mathcal{F}F)(k)\,d\hat\gamma(k).$$

Принимая во внимание (26), получаем наше утверждение.

Следствие. *Сохраним обозначения H, α, β, γ, $\hat\gamma$ предложения 8. Пусть $f \in L^1(G)$. Предположим, что*

1) *сужение функции $\mathcal{F}f$ на $H^\perp$ интегрируемо;*
2) *для всех $x \in G$ функция $h \mapsto f(xh)$ на H интегрируема;*
3) $\int_H f(xh)\,d\alpha(h)$ *— непрерывная функция от x.*

Тогда имеет место равенство (формула Пуассона)

$$\int_H f(h)\,d\alpha(h) = \int_{H^\perp} (\mathcal{F}f)(k)\,d\hat\gamma(k). \tag{27}$$

Действительно, используя введенные выше обозначения, мы видим, что функции F и $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}F)$ совпадают почти всюду и непрерывны; стало быть, они совпадают всюду и, в частности, в точке e, откуда и получается (27).

Замечание. Мы увидим в дальнейшем, когда распространим преобразование Фурье на распределения, что формула (27) выражает то обстоятельство, что преобразование Фурье меры Хаара α в H совпадает с мерой Хаара $\hat{\gamma}$ в $H^{\perp}$.

Предложение 9. *Сохраним обозначения* α, β, γ, H *предложения* 8. *Пусть* $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ *и* $\hat{\gamma}$ — *ассоциированные меры Хаара на* $\hat{H}=\hat{G}/H^{\perp}$, $\hat{G}$ *и* $(G/H)^{\wedge}=H^{\perp}$. *Тогда* $\hat{\alpha}=\hat{\beta}/\hat{\gamma}$.

Пусть $f\in\mathscr{K}(G)$. Для $x\in G$ и $y\in\hat{G}$ положим

$$\varphi(x,\ y)=\int\limits_{H} f(xh)\langle y,\ h\rangle\, d\alpha(h).$$

Следующие факты очевидны: a) функция $\varphi(x,\ y)$ при фиксированном x зависит только от класса $\dot{y}$ элемента y в $\hat{G}/H^{\perp}$; b) функция $\langle y,\ x\rangle\varphi(x,\ y)$ при фиксированном y зависит только от класса $\dot{x}$ элемента x в G/H; c) функция φ непрерывна на $G\times\hat{G}$.

Функция $\dot{y}\longmapsto\varphi(x,\ y)$ есть копреобразование Фурье функции $h\longmapsto f(xh)$ на H, следовательно,

$$\int\limits_{\hat{G}/H^{\perp}}|\varphi(x,\ y)|^2\, d\hat{\alpha}(\dot{y})=\int\limits_{H}|f(xh)|^2\, d\alpha(h). \tag{28}$$

Копреобразованием Фурье непрерывной функции $\dot{x}\longmapsto\langle y,\ x\rangle\varphi(x,\ y)$ с компактным носителем на G/H является следующая функция на $H^{\perp}$:

$$\begin{aligned} k\longmapsto &\int\limits_{G/H}\langle k,\ \dot{x}\rangle\langle y,\ x\rangle\varphi(x,\ y)\, d\gamma(\dot{x})=\\ &=\int\limits_{G/H} d\gamma(\dot{x})\int\limits_{H}\langle yk,\ xh\rangle f(xh)\, d\alpha(h)=\\ &=\int\limits_{G/H} d\gamma(\dot{x})\int\limits_{H}\langle yk,\ x\rangle f(x)\, d\alpha(h)=\\ &=\int\limits_{G}\langle yk,\ x\rangle f(x)\, d\beta(x)=\overline{\mathscr{F}}f(yk).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{G/H}|\varphi(x,\ y)|^2\, d\gamma(\dot{x})=\int\limits_{H^{\perp}}|\overline{\mathscr{F}}f(yk)|^2\, d\hat{\gamma}(k). \tag{29}$$

Из (28) и (29) выводим цепочку равенств

$$\int\limits_{\widehat{G}} |(\overline{\mathcal{F}}f)(y)|^2 \, d\hat{\beta}(y) = \int\limits_{G} |f(x)|^2 \, d\beta(x) =$$

$$= \int\limits_{G/H} d\gamma(\dot{x}) \int\limits_{H} |f(xh)|^2 \, d\alpha(h) =$$

$$= \int\limits_{G/H} d\gamma(\dot{x}) \int\limits_{\widehat{G}/H^{\perp}} |\varphi(x, y)|^2 \, d\hat{\alpha}(\dot{y}) =$$

$$= \int\limits_{\widehat{G}/H^{\perp}} d\hat{\alpha}(\dot{y}) \int\limits_{G/H} |\varphi(x, y)|^2 \, d\gamma(\dot{x}) =$$

$$= \int\limits_{\widehat{G}/H^{\perp}} d\hat{\alpha}(\dot{y}) \int\limits_{H^{\perp}} |(\overline{\mathcal{F}}f)(yk)|^2 \, d\hat{\gamma}(k).$$

Выбирая $f \neq 0$, получаем отсюда, что $\hat{\alpha} = \hat{\beta}/\hat{\gamma}$.

9. *Примеры двойственности*

Предложение 10. *Если группа G конечна, то $\widehat{G}$ изоморфна (вообще говоря, не канонически) группе G.*

Пусть $x \in G$, $\hat{x} \in \widehat{G}$ и $n = \operatorname{Card} G$. Имеем $\langle \hat{x}, x \rangle^n = 1$. Характер группы G является в таком случае гомоморфизмом G в группу корней из 1 в $\mathbf{C}$. Наше утверждение следует тогда из *Алг.*, гл. VII, 2-е изд., § 4, n° 8, предл. 8 и пример.

Предложение 11. *Для того чтобы группа $\widehat{G}$ была компактной, необходимо и достаточно, чтобы группа G была дискретной. Нормированные меры Хаара* (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 3) *на G и $\widehat{G}$ являются тогда ассоциированными.*

Предположим, что группа G компактна. Тогда существует окрестность V элемента e в $\widehat{G}$, обладающая следующими свойствами: если $\chi \in V$, то $|\chi(x) - 1| \leqslant 1$ для любого элемента $x \in G$, следовательно, $|\chi(x)^n - 1| \leqslant 1$ для любого $x \in G$ и любого $n \in \mathbf{Z}$; стало быть, $\chi(x) = 1$ для любого $x \in G$ и, значит, $V = \{e\}$. Тем самым доказано, что группа $\widehat{G}$ дискретна. Итак, если $\widehat{G}$ — компактная группа, то G — дискретная группа.

Предположим, что G — дискретная группа. Снабдим группу G нормированной мерой Хаара α, которая приписывает каждой точке массу, равную 1. Пусть f — характеристическая функция элемента e на G. Тогда $\mathcal{F}f = 1$ на $\widehat{G}$ и $\mathcal{F}f$ стремится к нулю на бесконечности, следовательно, $\widehat{G}$

компактна. С другой стороны, по отношению к ассоциированной с α мере Хаара $\hat{\alpha}$ функция $\mathcal{F}f$ имеет интеграл, равный 1. Поэтому $\hat{\alpha}(\widehat{G})=1$ и, значит, $\hat{\alpha}$ — нормированная мера Хаара на $\widehat{G}$.

Замечание. Отметим, что для конечной группы G, состоящей из n элементов, понятие нормированной меры Хаара двусмысленно. В этом случае, как указано в предложении 11, если α — мера Хаара на G, которая приписывает каждой точке массу, равную 1, то ассоциированная с ней мера Хаара $\hat{\alpha}$ на $\widehat{G}$ приписывает каждой точке массу, равную $1/n$.

Следствие 1. *Пусть H — замкнутая подгруппа в G. Для того чтобы эта подгруппа была компактной, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $H^{\perp}$ была открытой в $\widehat{G}$.*

Действительно, то, что подгруппа $H^{\perp}$ открыта, равносильно тому, что $G/H^{\perp}$ дискретна, а $G/H^{\perp}$ изоморфна $\widehat{H}$.

Следствие 2. *Пусть $(H_\alpha)_{\alpha\in I}$ — убывающее фильтрующееся семейство компактных подгрупп в G. Для того чтобы группа G отождествлялась с проективным пределом подгрупп G/H_α, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$ представлялась в виде объединения открытых подгрупп $H_\alpha^{\perp}$ (изоморфных $(G/H_\alpha)^\wedge$).*

То, что группа G отождествляется с проективным пределом подгрупп G/H_α, равносильно тому, что $\bigcap\limits_\alpha H_\alpha=\{e\}$ (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 7, предл. 2), т. е. тому, что $\bigcup\limits_\alpha H_\alpha^{\perp}$ плотно в $\widehat{G}$ (следствие 2 теоремы 4). Но $\bigcup\limits_\alpha H_\alpha^{\perp}$ — открытая и, стало быть, замкнутая подгруппа в $\widehat{G}$.

Следствие 3. *Группа, двойственная к произведению компактных групп H_α, отождествляется с прямой суммой дискретных групп $\widehat{H}_\alpha$.*

Это утверждение представляет собой частный случай следствия 2.

Предложение 12. *Пусть K — локально компактное недискретное тело (не обязательно коммутативное). Выберем в качестве G аддитивную группу K. Пусть χ — фиксированный унитарный характер в G, отличный от 1. Для $x, y\in G$ положим $\varphi(x, y)=\chi(xy)$. Тогда группа G двойственна себе относительно φ.*

Для $x, y \in G$ положим $\chi_y(x) = \chi(xy)$. Непосредственно видно, что $\chi_y \in \widehat{G}$ и что отображение θ: $y \longmapsto \chi_y$ есть инъективный гомоморфизм из G в $\widehat{G}$. Кроме того, отображение θ непрерывно, так как отображение $(x, y) \longmapsto \chi_y(x)$ из $G \times G$ в $\mathbf{C}$ непрерывно, и $\theta(G)$ плотно в $\widehat{G}$, так как равенство $\chi_y(x) = 1$ для всех $y \in G$ влечет за собой $x = 0$. Пусть $z \longmapsto |z|$ — абсолютное значение, определяющее топологию в K (*Комм. алг.*, гл. VI, § 9, n° 1, предл. 1), и пусть элемент $x_0 \in K$ таков, что $\chi(x_0) \neq 1$. Пусть $M > 0$. Если для $|x| \leqslant M$ выполняется неравенство $|\chi_y(x) - 1| \leqslant |\chi(x_0) - 1|$, то $|y^{-1}x_0| > M$, т. е. $|y| < M^{-1}|x_0|$. Отсюда заключаем, что отображение $y \longmapsto \chi_y$ является гомеоморфизмом группы G на $\theta(G)$; следовательно, $\theta(G)$ локально компактна и потому замкнута в $\widehat{G}$, и, значит, $\theta(G) = \widehat{G}$.

Следствие 1. (i) *Группа $\mathbf{R}$ двойственна себе относительно отображения $(x, y) \longmapsto \exp(2\pi ixy)$. Группа $\widehat{\mathbf{R}}$, таким образом, отождествляется с $\mathbf{R}$, а мера Лебега ассоциирована сама с собой.*

(ii) *Группы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{T}$ являются двойственными друг другу относительно отображения $(n, \dot{t}) \longmapsto \exp(2i\pi nt)$ (где через $\dot{t}$ обозначен канонический образ в $\mathbf{T}$ вещественного числа t).*

Группа $\mathbf{R}$ двойственна себе относительно отображения $(x, y) \longmapsto \exp(2i\pi xy)$ (предложение 12). Отождествим $\widehat{\mathbf{R}}$ с $\mathbf{R}$. Аннулятор подгруппы $\mathbf{Z}$ в $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ совпадает тогда с $\mathbf{Z}$ и (ii) следует из теоремы 4. Пусть α (соответственно γ) — нормированная мера Хаара на $\mathbf{Z}$ (соответственно $\mathbf{T}$). Если через β обозначить меру Лебега на $\mathbf{R}$, то $\gamma = \beta/\alpha$. Мера Хаара $\hat{\alpha}$ (соответственно $\hat{\gamma}$) на $\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}$ (соответственно $\widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{Z}$), ассоциированная с α (соответственно γ), является нормированной мерой Хаара на $\mathbf{T}$ (соответственно $\mathbf{Z}$) (предложение 11). В силу предложения 9, мера Хаара на $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, ассоциированная с β, совпадает с β.

Замечание 1. Вернемся, в частности, к определению пространства $\mathrm{X}(L^1(\mathbf{Z}))$, данному в гл. I, § 3, n° 3, пример 4. Если не оговорено противное, мы впредь будем отождествлять $\widehat{\mathbf{R}}$ с $\mathbf{R}$ в соответствии со следствием 1 (i).

Следствие 2. *Пусть f — комплексная функция, интегрируемая на $\mathbf{R}$. Предположим, что для каждого $x \in \mathbf{R}$ имеет место неравенство $\sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} |f(x+n)| < +\infty$ и что функция $x \longmapsto$*

$\mapsto \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x+n)$ *непрерывна. Предположим также, что*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |(\mathcal{F} f)(n)| < +\infty.$$

Тогда

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (\mathcal{F} f)(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n).$$

Это равенство представляет собой частный случай следствия предложения 8.

Следствие 3. *Группа* $\mathbf{R}^n$ *двойственна себе относительно отображения* $((x_i), (y_j)) \mapsto \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)$. *Группа* $(\mathbf{R}^n)\hat{}$, *таким образом, отождествляется с* $\mathbf{R}^n$, *а мера Лебега ассоциирована сама с собой.*

Это утверждение вытекает из следствия 1 (i).

Замечание 2. Если задана некоторая подгруппа H в $\mathbf{R}^n$, то ей соответствует ортогональная подгруппа $H^{\perp}$ в $(\mathbf{R}^n)\hat{} = \mathbf{R}^n$, которая есть не что иное, как подгруппа, *ассоциированная* с H в смысле определения *Общ. топ.*, гл. VII, § 1, n° 3.

Пусть p — простое число. Для каждого числа $x \in \mathbf{Q}_p$ существует и притом единственное число $\lambda(x) \in \mathbf{Q}$ вида q/p^{ν}, где $0 \leqslant q < p^{\nu}$, такое, что $\lambda(x) - x \in \mathbf{Z}_p$ (*Алг.*, гл. VII, § 2, n° 2, теор. 2); положим $q/p^{\nu} = \lambda(x)$. Ясно, что $\lambda(x + x') \equiv \lambda(x) + \lambda(x') \pmod{\mathbf{Z}}$ и что функция λ локально постоянна на $\mathbf{Q}_p$. Поэтому функция $x \mapsto \exp(2\pi i \lambda(x))$ является унитарным характером группы $\mathbf{Q}_p$. Его ядро совпадает с $\mathbf{Z}_p$.

Следствие 4. (i) *Группа* $\mathbf{Q}_p$ *двойственна себе относительно отображения* $(x, y) \mapsto \exp(2i\pi\lambda(xy))$. *Группа* $\widehat{\mathbf{Q}}_p$, *таким образом, отождествляется с* $\mathbf{Q}_p$, *нормированная мера Хаара на* $\mathbf{Q}_p$ (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 6, пример) *ассоциирована сама с собой.*

(ii) *Группы* $\mathbf{Z}_p$ *и* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ *двойственны друг другу относительно отображения* $(z, \dot{t}) \mapsto \exp(2i\pi\lambda(zt))$, *где через* $\dot{t}$ *обозначен канонический образ в* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ *p-адического числа* t.

Доказательство буквально повторяет доказательство следствия 1.

§ 2. Структура коммутативных локально компактных групп

1. Группы, порожденные компактными частями

Лемма 1. *Пусть H — локально компактная группа и φ — непрерывный морфизм из* $\mathbf{R}$ (*соответственно* $\mathbf{Z}$) *в H. Если φ не является изоморфизмом* (*топологическим*) *из* $\mathbf{R}$ (*соответственно* $\mathbf{Z}$) *на некоторую подгруппу в H, то $\varphi(\mathbf{R})$* (*соответственно $\varphi(\mathbf{Z})$*) *— относительно компактное множество.*

Пусть I — образ морфизма φ. Поскольку можно заменить H на $\overline{I}$, мы будем предполагать, что I плотно в H. Предположим, далее, что существуют окрестность V элемента e в H и целое $M > 0$, такие, что для каждого $t > M$ из $\mathbf{R}$ (соответственно из $\mathbf{Z}$) $\varphi(t) \notin V$. Тогда φ — инъективный морфизм, сужение φ на $[-M, M]$ является гомеоморфизмом и сужение φ^{-1} на $V \cap I$ непрерывно; следовательно, φ есть топологический изоморфизм из $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{Z}$) на I.

Предположим, что φ не является топологическим изоморфизмом из $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{Z}$) на I. Пусть W — какая-нибудь относительно компактная открытая окрестность элемента e в H и V — симметричная окрестность элемента e, такая, что $V^2 \subset W$. Для каждого элемента $x \in H = \overline{I}$ существует число $s \in \mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{Z}$), такое, что $x \in \varphi(s)V$. Согласно предыдущему абзацу, существует число $t \in \mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{Z}$), такое, что $|t| > s$ и $\varphi(t) \in V$. Имеем $x \in \in \varphi(t+s)\varphi(t)^{-1}V \subset \varphi(t+s)W$, $t+s > 0$. Далее, открытые множества $\varphi(u)W$ для $u > 0$ образуют открытое покрытие H. Существуют строго положительные числа $u_1, \ldots, u_n$, такие, что $\overline{W} \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(u_i)W$. Пусть T — наибольшее из чисел u_i. Пусть $x \in H$ и $s = \inf\{t \mid t \geqslant 0, \varphi(t) \in \overline{W}x\}$. Тогда $\varphi(s)x^{-1} \in \overline{W}$, и существует такой номер i, что $\varphi(s)x^{-1} \in \varphi(u_i)W$ и, значит, $\varphi(s-u_i) \in \overline{W}x$. Выбор числа s обеспечивает неравенство $s - u_i < 0$, откуда следует, что $s \leqslant T$. Таким образом, $H = \varphi([0, T])\overline{W}$ — компакт.

Лемма 2. *Если группа G порождается компактной окрестностью V элемента e, то существует дискретная подгруппа D в G, изоморфная группе $\mathbf{Z}^n$ и такая, что фактор-группа G/D компактна.*

Так как V^2 — компакт, то существуют элементы $x_1, \ldots, x_k \in G$, такие, что $V^2 \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} x_iV$. Пусть D_0 — подгруппа, порожденная этими элементами. Имеем $V^2 \subset D_0V$, откуда по индукции получаем, что $V^n \subset D_0V$ и, кроме того, $G = D_0V$. Пусть тогда J — часть множества $\{1, \ldots, k\}$, такая, что подгруппа D, порожденная элементами x_i $(i \in J)$, топологически изоморфна $\mathbf{Z}^{\operatorname{Card} J}$, причем J — максимальная из частей, обладающих таким свойством. Покажем, что G/D компактна. Пусть p — каноническая сюръекция G на G/D. Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, k\} - J$. Если подгруппа H_i в G/D, порожденная элементами $p(x_i)$, топологически изоморфна $\mathbf{Z}$, то подгруппа в G, порожденная D и x_i, дискретна, и отображение $(d, n) \mapsto dx_i^n$ является изоморфизмом $D \times \mathbf{Z}$ на эту подгруппу, что противоречит максимальности J. Из леммы 1, следовательно, вытекает, что $\overline{H}_i$ — компакт. Поэтому $G/D = \left(\prod_{i \notin J} \overline{H}_i\right) p(V)$ — компакт.

Предложение 1. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *G порождена компактной окрестностью элемента e*;

(ii) *G представляется в виде прямого произведения групп $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{Z}^q$ при некоторых p и q и некоторой компактной группы*;

(iii) *$\widehat{G}$ локально изоморфна группе $\mathbf{R}^n$ при некотором n*;

(iv) *$\widehat{G}$ представляется в виде прямого произведения групп $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{T}^q$ при некоторых p и q и некоторой дискретной группы.*

(i)$\Rightarrow$(iii): если группа G обладает свойством (i), то существует подгруппа D в G, изоморфная $\mathbf{Z}^n$ и такая, что G/D — компакт (лемма 2). Тогда $D^{\perp}$ — дискретная группа, следовательно, $\widehat{G}$ локально изоморфна $\widehat{G}/D^{\perp}$, т. е. $\widehat{D}$, а значит, $\mathbf{T}^n$ и, стало быть, $\mathbf{R}^n$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): если $\widehat{G}$ локально изоморфна $\mathbf{R}^n$, то связная компонента единицы $(\widehat{G})_0$ в $\widehat{G}$ является открытой подгруппой, изоморфной $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^{n-p}$ (*Общ. топ.*, гл. VII, § 2, теор. 1), и, следовательно, делимой группой. Для завершения доказательства предложения 1 нам понадобится

Лемма 3. *Пусть A и B — коммутативные группы, C — подгруппа в B и φ — морфизм из C в A. Если группа A делима, то существует морфизм из B в A, являющийся продолжением морфизма φ.*

(Другими словами, делимые группы инъективны в категории коммутативных групп; см. *Алг.*, гл. VII, 2-е изд., § 2, упр. 3.)

Пусть $\mathfrak{E}$ — множество пар (X, f), где X — подгруппа в B, содержащая C, и f — морфизм из X в A, являющийся продолжением φ. Упорядочим множество $\mathfrak{E}$ с помощью отношения: «$X \subset X'$ и f' есть продолжение f». Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{C}$ индуктивно. Пусть (X, f) — максимальный элемент в $\mathfrak{C}$. Если $X \neq B$, возьмем какой-нибудь элемент x из $B - X$ и образуем подгруппу X', порожденную X и x. Если $x^n \notin X$ при любом $n \neq 0$, то можно продолжить f на X', выбирая в качестве $f(x)$ произвольный элемент из A. В противном случае пусть n — наименьшее целое положительное число, такое, что $x^n \in X$. Поскольку группа A делима, существует элемент $y \in A$, такой, что $y^n = f(x^n)$, и можно продолжить f на X', полагая $f(x) = y$. В каждом из этих двух случаев элемент (X, f) не будет максимальным в $\mathfrak{C}$. Следовательно, $X = B$, и лемма доказана.

Применим лемму 3 к тождественному отображению из $C = (\widehat{G})_0$ в $A = (\widehat{G})_0$, $B = \widehat{G}$. Получается проектор π из $\widehat{G}$ на $\widehat{G}_0$, который непрерывен, так как непрерывно его сужение на открытую подгруппу $\widehat{G}_0$. Следовательно, $\widehat{G}$ представляется в виде прямого произведения группы $\widehat{G}_0$ и дискретной подгруппы $\pi^{-1}(e)$. Импликации (iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидны. Предложение 1 доказано.

Следствие 1. *Предположим, что группа G порождена компактной окрестностью элемента e. Тогда G содержит наибольшую компактную подгруппу K, и G изоморфна $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$.*

В силу предложения 1 группа G отождествляется с группой $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$, где K — некоторая компактная группа. Пусть p — каноническая сюръекция G на $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q$. Если K' — какая-нибудь компактная подгруппа в G, то $p(K')$ — компактная подгруппа в $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q$, сводящаяся, следовательно, к нейтральному элементу. Поэтому $K' \subset K$ и, значит, K — наибольшая компактная подгруппа в G.

Замечание 1. В разложении $G = \mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$, указанном в предложении 1 (ii), подгруппа K определяется однозначно как наибольшая компактная подгруппа в G, и подгруппа $\mathbf{R}^p \times K$ также определяется однозначно, поскольку $\mathbf{R}^p$ есть связная компонента единицы в G/K. Принимая во внимание *Общ. топ.*, гл. VII, § 2, предл. 1, мы видим, что и целое число p определяется однозначно. Наконец, поскольку $G/(\mathbf{R}^p \times K)$ изоморфна $\mathbf{Z}^q$, целое число q определяется однозначно. В силу двойственности, в разложении

$$\widehat{G} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times D,$$

указанном в предложении 1 (iv), подгруппы $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$, D и целые числа p и q определяются однозначно.

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *G и $\widehat{G}$ порождены компактными окрестностями элемента e;*

(ii) *G локально изоморфна группе* $\mathbf{R}^m$, а *$\widehat{G}$ — группе* $\mathbf{R}^n$;

(iii) *G изоморфна произведению* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$, *где Φ — конечная группа;*

(iv) *G изоморфна произведению* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times \mathbf{T}^r \times \Phi$, *где Φ — конечная группа.*

В силу предложения 1, (i)$\Leftrightarrow$(ii); кроме того, очевидно, что (iii)$\Leftrightarrow$(iv) и (iii)$\Rightarrow$(i). Если справедливо (i), то $G = \mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^r \times D$, где D — дискретная группа, порожденная некоторой компактной частью; но тогда D — группа конечного типа и, стало быть, имеет вид $\mathbf{Z}^q \times \Phi$, где Φ — конечная группа (*Алг.*, гл. VII, § 4, n° 6, теор. 3).

Замечание 2. В соответствии с обозначениями следствия 2 отождествим группу G с $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$; $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$ есть связная компонента единицы в G, $\mathbf{T}^q \times \Phi$ — ее максимальная компактная подгруппа, $\mathbf{T}^q$ — связная компонента единицы максимальной компактной подгруппы; целые числа p, q, r определяются однозначно группой G, согласно замечанию 1, а группа Φ определяется группой G с точностью до изоморфизма.

Предложение 2. *Предположим, что G компактна. Тогда существует убывающее фильтрирующееся семейство замкнутых подгрупп H_α в G, такое, что* 1) *G отождествляется с проективным пределом факторгрупп G/H_α;* 2) *каждая факторгруппа G/H_α изоморфна некоторой группе* $\mathbf{T}^q \times \Phi$, *где Φ — конечная группа.*

Действительно, поскольку группа $\widehat{G}$ дискретна, она является объединением возрастающего фильтрирующегося семейства подгрупп D_α конечного типа. Положим $H_\alpha = D_\alpha^{\perp}$. Тогда G отождествляется с проективным пределом факторгрупп G/H_α (§ 1, следствие 2 предложения 11). С другой стороны, D_α изоморфна группе $\mathbf{Z}^q \times \Phi$, где Φ — конечная группа, стало быть, G/H_α изоморфна $\mathbf{T}^q \times \Phi$.

2. Общий случай

Предложение 3. (i) *Каждая локально компактная коммутативная группа представляется в виде прямого произведения подгруппы, изоморфной некоторой группе* $\mathbf{R}^n$, *и подгруппы, обладающей компактной открытой подгруппой.*

(ii) *Каждая локально компактная коммутативная группа есть объединение возрастающего фильтрующегося семейства* *открытых подгрупп, которые являются проективными пределами групп, изоморфных группам вида* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$, *где* Φ — *конечная группа.*

Утверждение (ii) вытекает из предложений 1 и 2, ибо G есть объединение возрастающего фильтрующегося семейства открытых подгрупп, порожденных компактными окрестностями элемента e.

Пусть, с другой стороны, H — одна из этих подгрупп. Тогда H представляется в виде $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$, где K — компакт (предложение 1). Каноническая сюръекция H на делимую группу $\mathbf{R}^p$ продолжается (лемма 3) до непрерывного проектора π из G на $\mathbf{R}^p$. Стало быть, G — прямое произведение $\mathbf{R}^p$ и ядра L проектора π, и $\mathbf{Z}^q \times K$ — открытая подгруппа в L. Следовательно, L/K — дискретная подгруппа.

Предложение 4. (i) *Пусть* B — *множество всех элементов из* G, *которые порождают относительно компактную подгруппу в* G. *Тогда* B *есть замкнутая подгруппа в* G.

(ii) *Пусть* C — *связная компонента единицы в* $\widehat{G}$. *Тогда* $B^{\perp} = C$.

Так как произведение двух компактных частей из G есть компакт, то B — подгруппа. Заметим, что каждый элемент из G принадлежит некоторой открытой подгруппе, порожденной компактной окрестностью элемента e. Поэтому доказательство того, что каждый элемент из $\overline{B}$ принадлежит B, сводится (предложение 1) к случаю, когда $G = \mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$, где K — компактная группа. Но в этом случае ясно, что $B = K$.

Докажем (ii). Предложение 3 (i) позволяет ограничиться случаем, когда G содержит компактную открытую подгруппу H. Тогда $H^{\perp}$ — компактная открытая подгруппа в $\widehat{G}$. Стало быть, C — связная компонента единицы в $H^{\perp}$. С другой стороны, $B \supset H$ и B/H есть множество всех элементов из G/H, которые порождают относительно компактную подгруппу в G/H. Поскольку $H^{\perp}$ отождествляется с $(G/H)^{\wedge}$, можно ограничиться случаем, когда группа G дискретна и, стало быть, $\widehat{G}$ компактна. Но тогда C есть пересечение открытых подгрупп в $\widehat{G}$ (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 4, n° 6, предл. 14); замкнутая подгруппа в $\widehat{G}$ открыта в том и только в том случае, если она имеет конечный индекс (или если ее аннулятор конечен); следствие 2 теоремы 4, § 1 показывает, что $C^{\perp}$ представляется в виде объединения конечных подгрупп из C, т. е. совпадает с B.

Следствие 1. *Предположим, что группа G компактна. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *G — связная группа*;

(ii) *$\widehat{G}$ — группа без кручения*;

(iii) *G делима.*

Это вытекает из предложения 4 и следствия 8 теоремы 4, § 1.

Следствие 2. *Предположим, что G компактна. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *G вполне несвязна*;

(ii) *$\widehat{G}$ состоит из элементов конечного порядка.*

Это утверждение — частный случай предложения 4.

Следствие 3. *Если группа G связна, то она делима.*

Действительно, G изоморфна некоторой группе $\mathbf{R}^n \times K$, где K — компактная связная группа (предложение 1). Поэтому достаточно применить следствие 1.

§ 3. Гармонический синтез в пространствах $L^1(G)$, $L^2(G)$, $L^\infty(G)$

1. Гармонический синтез в $L^1(G)$

В силу предложения 5, § 1, *банахова алгебра $L^1(G)$ регулярна.*

Согласно § 5, гл. I, это обстоятельство влечет за собой ряд следствий, которые мы здесь приведем в форме замечаний.

1) Если F — замкнутая часть $\widehat{G}$ и K — компактная часть $\widehat{G}$, такие, что $F \cap K = \varnothing$, то существует функция $f \in L^1(G)$, такая, что $\mathcal{F}f$ равно 0 на F и 1 на K (гл. I, § 5, предл. 1).

2) Для каждого идеала $\mathfrak{I}$ в $L^1(G)$ обозначим через $h(\mathfrak{I})$ множество точек из $\widehat{G}$, в которых обращаются в нуль преобразования Фурье всех функций из $\mathfrak{I}$; это множество замкнуто. Для каждой части M из $\widehat{G}$ пусть $\mathfrak{k}(M)$ — идеал в $L^1(G)$, состоящий из всех функций, преобразование Фурье которых обращается в нуль на M; этот идеал замкнут. Введя эти обозначения, предположим, что M — замкнутая часть $\widehat{G}$. Тогда множество всех идеалов $\mathfrak{I}$ в $L^1(G)$, таких, что $h(\mathfrak{I}) = M$, содержит наибольший элемент, а именно $\mathfrak{k}(M)$, и наименьший элемент, а именно множество всех функций $f \in L^1(G)$, пре-

образование Фурье которых имеет компактный носитель, не пересекающийся с M (гл. I, § 5, предл. 4).

3) Пусть $\mathfrak{J}$ — некоторый идеал в $L^1(G)$ и $g\colon \widehat{G} \to \mathbf{C}$ — непрерывная функция. Предположим, что для каждой точки $\chi \in \widehat{G}$ существует функция $f_\chi \in \mathfrak{J}$, такая, что функция g равна $\mathcal{F}(f_\chi)$ в некоторой окрестности χ. Предположим, далее, что существует функция $f_\infty \in \mathfrak{J}$, такая, что g равна $\mathcal{F}(f_\infty)$ в дополнении к некоторой компактной части $\widehat{G}$ (условие, которое тривиально выполняется, если G дискретна). Тогда существует функция $f \in \mathfrak{J}$, такая, что $g = \mathcal{F}f$ (гл. I, § 5, след. 2 предл. 2).

Лемма 1. *Множество всех функций из $L^1(G)$, преобразование Фурье которых имеет компактный носитель, является плотным подпространством в $L^1(G)$.*

Поскольку $\mathcal{K}(\widehat{G})$ плотно в $L^2(\widehat{G})$, подпространство V в $L^2(G)$, состоящее из всех тех $f \in L^2(G)$, для которых $\mathcal{F}f \in \mathcal{K}(\widehat{G})$, плотно в $L^2(G)$. Пусть теперь $g \in L^1(G)$. Тогда существуют g_1 и $g_2 \in L^2(G)$, такие, что $g = g_1 g_2$ (можно, например, положить $g_1 = |g|^{1/2}$ и подобрать g_2 соответствующим образом). Стало быть, функция g является пределом в $L^1(G)$ функций вида $g_1' g_2'$, где $g_1' \in V$, $g_2' \in V$. Остается заметить, что $\mathcal{F}(g_1' g_2') = (\mathcal{F}g_1') * (\mathcal{F}g_2')$ (§ 1, предложение 7) и $(\mathcal{F}g_1') * (\mathcal{F}g_2') \in \mathcal{K}(\widehat{G})$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$ и $f \in L^1(G)$. Тогда если $\mathcal{F}f$ обращается в нуль в некоторой окрестности $h(\mathfrak{J})$ (см. выше замечание 2), то $f \in \mathfrak{J}$.*

Пусть $\varepsilon > 0$. Существует функция $g \in L^1(G)$, такая, что $\|f - f * g\|_1 < \varepsilon$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 20). В силу леммы 1, можно считать, что $\mathcal{F}g$ имеет компактный носитель. Тогда $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ имеет компактный носитель, не пересекающийся с $h(\mathfrak{J})$, стало быть, $f * g \in \mathfrak{J}$ (замечание 2). Так как ε можно выбрать сколь угодно малым, то $f \in \overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$, отличный от $L^1(G)$. Тогда существует точка $\chi \in \widehat{G}$, такая, что $(\mathcal{F}f)(\chi) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{J}$.*

В силу леммы 1 и следствия 1 предложения 4 гл. I, § 5, $\mathfrak{J}$ содержится в некотором регулярном максимальном идеале алгебры $L^1(G)$, т. е. в ядре некоторого характера этой алгебры.

7 Зак. 1236

Следствие 1. *Пусть* $f \in L^1(G)$. *Тогда если* $\mathscr{F}f$ *нигде не обращается в нуль, то функции вида* $f * \varepsilon_x$, *где* x *пробегает* G, *образуют тотальное множество в* $L^1(G)$.

Пусть V — замкнутое векторное подпространство в $L^1(G)$, порожденное функциями вида $f * \varepsilon_x$. В силу *Интегр.*, гл. VIII, § 4, след. предл. 20, подпространство V является замкнутым идеалом в $L^1(G)$. Из теоремы 1 тогда следует, что $V = L^1(G)$.

Пусть g — комплексная функция на G, Φ — фильтр на G. Назовем функцию g *слабо осциллирующей* по Φ, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют множество $M \in \Phi$ и окрестность V элемента e в G, такие, что

$$(x \in M \text{ и } y \in V) \Rightarrow |g(xy) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Следствие 2. *Пусть* Φ — *фильтр на* G, *инвариантный относительно сдвигов. Пусть, далее, функция* $f \in L^1(G)$ *такова, что* $\mathscr{F}f$ *нигде не обращается в нуль и* $\int_G f(x)\,dx = 1$. *Пусть, наконец,* $g \in L^\infty(G)$. *Предположим, что* $f * g$ *имеет конечный предел* α *по* Φ. *Тогда*

(i) *Для каждой функции* $f' \in L^1(G)$, *такой, что* $\int_G f'(x)\,dx = 1$, $f' * g$ *стремится к* α *по* Φ.

(ii) *Если дополнительно предположить, что* g — *слабо осциллирующая функция по* Φ, *то* g *стремится к* α *по* Φ.

Заменяя g функцией $g - \alpha$, можно свести утверждение к случаю $\alpha = 0$.

Пусть $\mathfrak{J}$ — множество всех функций $f' \in L^1(G)$, таких, что $f' * g$ стремится к 0 по Φ. Ясно, что $\mathfrak{J}$ — векторное подпространство в $L^1(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Неравенство $\|h * h'\|_\infty \leqslant \|h\|_1 \|h'\|_\infty$ для $h \in L^1(G)$, $h' \in L^\infty(G)$ показывает, что $\mathfrak{J}$ — замкнутое подпространство. Стало быть, $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$. Так как по предположению $f \in \mathfrak{J}$, то, в силу теоремы 1, $\mathfrak{J} = L^1(G)$. Тем самым (i) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения (ii). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $M \in \Phi$ и компактная окрестность V элемента e, такие, что

$$(x \in M \text{ и } y \in V) \Rightarrow |g(y^{-1}x) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть h — характеристическая функция окрестности V и μ — мера V. В силу (i), $h * g$ стремится к 0 по Φ. Справедливо равенство

$$\frac{1}{\mu}(h * g)(z) = \frac{1}{\mu}\int_V g(x^{-1}z)\,dx = g(z) + \frac{1}{\mu}\int_V (g(x^{-1}z) - g(z))\,dx.$$

Если $z \in M$ и $x \in V$, то $|g(x^{-1}z) - g(z)| \leqslant \varepsilon$. Стало быть,

$$z \in M \Rightarrow \left| \frac{1}{\mu}(h * g)(z) - g(z) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\limsup_\Phi |g| \leqslant \varepsilon$. Ввиду произвольности ε получаем утверждение (ii).

Пример. Пусть $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ — степенной ряд с комплексными коэффициентами и A — постоянная, такая, что $n|a_n| \leqslant A$ для всех n. Для $z \in \mathbf{C}$ и $|z| < 1$ пусть $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$. Допустим, что $f(x)$ стремится к некоторому конечному числу l, когда x стремится к 1, принимая вещественные значения, меньшие 1. Тогда *ряд* $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ *сходится и его сумма равна* l.

При переходе к группе $\mathbf{R}_+^*$ мы сможем интерпретировать функцию $\xi \mapsto f(e^{-\xi})$, где $\xi \in \mathbf{R}_+^*$, как некоторую свертку. Для $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ положим

$$g(\lambda) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant \lambda} a_n.$$

Если $0 < \lambda \leqslant \lambda'$, то, обозначая через $[\lambda]$ целую часть λ, имеем

$$(1) \qquad \begin{aligned} |g(\lambda') - g(\lambda)| &= \left| \sum_{\lambda < n \leqslant \lambda'} a_n \right| \leqslant \\ &\leqslant |a_{[\lambda+1]}| + \left| \sum_{\lambda+1 < n \leqslant \lambda'} a_n \right| \leqslant \\ &\leqslant |a_{[\lambda+1]}| + A \int_\lambda^{\lambda'} \frac{dt}{t} = \\ &= |a_{[\lambda+1]}| + A \log \frac{\lambda'}{\lambda}. \end{aligned}$$

Эта формула показывает, что $g(\lambda)$ — слабо осциллирующая функция, когда $\lambda \to +\infty$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} &a_0(1 - z) + (a_0 + a_1)(z - z^2) + (a_0 + a_1 + a_2)(z^2 - z^3) + \ldots + \\ &\quad + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(z^n - z^{n+1}) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + \\ &\quad + a_n z^n - z^{n+1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n). \end{aligned}$$

Из неравенства

$$|z^{n+1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)| \leqslant A |z|^{n+1} \log n$$

следует, что $z^{n+1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ стремится к 0, когда $n \to +\infty$, а $|z| < 1$. Таким образом, для $0 < x < 1$

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(x^n - x^{n+1}).$$

Этот ряд сходится; стало быть, для $\xi \in \mathbf{R}_+^*$

$$(2)\qquad f(e^{-\xi}) = \sum_{n \geqslant 0} \int\limits_{n\xi}^{(n+1)\xi} g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}\, dx.$$

Функция $x \mapsto g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}$ в силу (1) интегрируема. Заметим сначала, что

$$\left| f(e^{-\xi}) - g\left(\frac{1}{\xi}\right) \right| = \left| \int\limits_0^\infty \left(g\left(\frac{x}{\xi}\right) - g\left(\frac{1}{\xi}\right) \right) e^{-x}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty A(1 + |\log x|) e^{-x}\, dx < +\infty,$$

и, стало быть, $g \in L^\infty(\mathbf{R}_+^*)$.

Наша задача свелась к доказательству равенства $\lim\limits_{\lambda \to 0,\ \lambda > 0} g(1/\lambda) = l$. Но в силу (2), *функция* $\xi \mapsto f(e^{-\xi})$ *на группе* $\mathbf{R}_+^*$ (функция, которая стремится к l, когда $\xi \to 0$) *представляется в виде свертки* g *и функции* $x \mapsto xe^{-x}$ (если взять в качестве меры Хаара на $\mathbf{R}_+^*$ меру dx/x). Ясно, что эта последняя функция принадлежит $L^1(\mathbf{R}_+^*)$ и ее интеграл равен 1. Согласно следствию 2, достаточно доказать, что ее преобразование Фурье нигде не обращается в нуль. Так как $x \mapsto \log x$ есть изоморфизм из $\mathbf{R}_+^*$ на $\mathbf{R}$, то каждый характер группы $\mathbf{R}_+^*$ имеет вид $x \mapsto e^{iy \log x} = x^{iy}$, где $y \in \mathbf{R}$. Таким образом, все свелось к доказательству того, что

$$\int\limits_0^\infty xe^{-x} x^{iy}\, dx/x \neq 0,$$

т. е. того, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} x^{iy}\, dx \neq 0.$$

Но хорошо известно (*Функц. действ. пер.*, гл. VII, § 2, n° 1), что функция $z \mapsto \Gamma(z)$ голоморфна и не обращается в нуль, когда $\mathcal{R}z > 0$. В силу предложения 3, § 1, там же, $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ для положительных вещественных z и, стало быть, для $\mathcal{R}z>0$ после аналитического продолжения (см. *Var.*, R.); следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{iy}dx=\Gamma(1+iy)\neq 0.$$

Лемма 2. *Пусть K — компактная часть G и $\eta>0$. Тогда существует функция $j\in L^1(G)$, обладающая такими свойствами:*

1) $\|j\|_1\leqslant 2$;

2) $\mathcal{F}j=1$ *в окрестности нейтрального элемента группы* $\widehat{G}$;

3) $\|j-j*\varepsilon_x\|_1\leqslant\eta$ *для всех* $x\in K$.

Существует окрестность U элемента e в $\widehat{G}$, такая, что

$$\hat{x}\in U\Rightarrow|1-\langle x,\hat{x}\rangle|\leqslant\eta/4\quad\text{для всех}\quad x\in K.$$

Уменьшая, если понадобится, окрестность U, можно считать ее открытой, симметричной и интегрируемой относительно меры Хаара m на $\widehat{G}$, ассоциированной с мерой dx. Далее, существует симметричная компактная окрестность V элемента e в $\widehat{G}$, такая, что $V\subset U$ и $m(U)\leqslant 2m(V)$. Характеристические функции окрестностей U и V можно записать в виде $\mathcal{F}u$ и $\mathcal{F}v$, где $u\in L^2(G)$, $v\in L^2(G)$. Мы покажем, что функция $j=m(V)^{-1}uv$, принадлежащая $L^1(G)$, обладает нужными свойствами.

1) Имеем

$$\|j\|_1\leqslant m(V)^{-1}\|u\|_2\|v\|_2=m(V)^{-1}\|\mathcal{F}u\|_2\|\mathcal{F}v\|_2=$$
$$=m(V)^{-1}m(U)^{1/2}m(V)^{1/2}\leqslant\sqrt{2}.$$

2) Существует окрестность W элемента e в $\widehat{G}$, такая, что $VW\subset U$ (*Общ. топ.*, гл. II, § 4, предл. 4). Для $\hat{x}\in W$ имеем, в силу предложения 7, § 1,

$$(\mathcal{F}j)(\hat{x})=m(V)^{-1}(\mathcal{F}u*\mathcal{F}v)(\hat{x})=$$
$$=m(V)^{-1}\int_{\widehat{G}}(\mathcal{F}u)(\hat{y})(\mathcal{F}v)(\hat{y}^{-1}\hat{x})\,dm(\hat{y}).$$

Но условие $(\mathcal{F}v)(\hat{y}^{-1}\hat{x})\neq 0$ влечет за собой $\hat{y}^{-1}\hat{x}\in V$, следовательно, $\hat{y}\in V^{-1}\hat{x}\subset VW\subset U$ и, стало быть, $(\mathcal{F}u)(\hat{y})=1$. Поэтому

$$(\mathcal{F}j)(\hat{x})=m(V)^{-1}\int_{\widehat{G}}(\mathcal{F}v)(\hat{y}^{-1}\hat{x})\,dm(\hat{y})=$$
$$=m(V)^{-1}\int_{\widehat{G}}(\mathcal{F}v)(\hat{y})\,dm(\hat{y})=1.$$

3) Если $x \in K$, то

$$\| u - u * \varepsilon_x \|_2^2 = \int_{\widehat{G}} |(\mathcal{F} u)(\hat{x})(1 - \overline{\langle x, \hat{x} \rangle})|^2 \, dm(\hat{x}) \leqslant m(U)(\eta/4)^2$$

и, аналогично, $\| v - v * \varepsilon_x \|_2^2 \leqslant m(V)(\eta/4)^2$; следовательно,

$$\begin{aligned} \| j - j * \varepsilon_x \|_1 &= m(V)^{-1} \| u(v - v * \varepsilon_x) + (v * \varepsilon_x)(u - u * \varepsilon_x) \|_1 \leqslant \\ &\leqslant m(V)^{-1} \left(\| u \|_2 \, m(V)^{1/2} \frac{\eta}{4} + \| v \|_2 \, m(U)^{1/2} \frac{\eta}{4} \right) \leqslant \\ &\leqslant 2m(V)^{-1} m(U)^{1/2} m(V)^{1/2} \frac{\eta}{4} = \\ &= m(U)^{1/2} m(V)^{-1/2} \frac{\eta}{2} < \eta. \end{aligned}$$

Предложение 2. *Алгебра* $L^1(G)$ *удовлетворяет условию Диткина* (гл. I, § 5, n° 2, опр. 2).

Пусть функция $f \in L^1(G)$ такова, что $\| f \|_1 = 1$. Пусть χ — характер $L^1(G)$; рассмотрим отдельно случаи, когда характер χ нулевой и ненулевой. Если χ — нулевой характер, то достаточно проверить, что существует последовательность $(g_1, g_2, \ldots)$ в $L^1(G)$, такая, что $\| f - g_n * f \|_1$ стремится к 0 и $\mathcal{F} g_n$ обращаются в 0 вне некоторой компактной части в $\widehat{G}$, а это следует непосредственно из леммы 1. Теперь предположим, что $\chi \in \widehat{G}$ и $(\mathcal{F} f)(\chi) = 0$. Нужно доказать существование последовательности $(f_1, f_2, \ldots)$ в $L^1(G)$, такой, что $\| f - f * f_n \|_1$ стремится к 0 и $\mathcal{F} f_n$ обращаются в 0 в некоторой окрестности точки χ. С помощью сдвигов в $\widehat{G}$ этот случай сводится к тому, когда $\chi = e$. Существуют функция $u_n \in L^1(G)$, такая, что $\| u_n \|_1 = 1$ и

$$\| f - f * u_n \|_1 \leqslant 1/n,$$

и компакт K_n в G, такой, что $\int_{G - K_n} |f(x)| \, dx \leqslant 1/n$. В силу леммы 2 существует функция $j_n \in L^1(G)$, такая, что $\| j_n \|_1 \leqslant 2$, $\mathcal{F} j_n = 1$ в некоторой окрестности элемента e и $\| j_n - j_n * \varepsilon_x \|_1 \leqslant 1/n$ для всех $x \in K_n$. Положим $f_n = u_n - j_n * u_n$ и покажем, что последовательность (f_n) обладает требуемыми свойствами. Ясно, что

$$\mathcal{F} f_n = \mathcal{F} u_n - (\mathcal{F} j_n)(\mathcal{F} u_n)$$

обращается в нуль в некоторой окрестности элемента e. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \| f * f_n - f \|_1 &\leqslant \| f * u_n - f \|_1 + \| f * j_n \|_1 \| u_n \|_1 \leqslant \\ &\leqslant 1/n + \| f * j_n \|_1. \end{aligned}$$

Но для почти всех $y \in G$ мы имеем

$$(f * j_n)(y) = \int_G f(x)\, j_n(x^{-1}y)\, dx = \int_G f(x)\,(j_n(x^{-1}y) - j_n(y))\, dx,$$

потому что $0 = (\mathscr{F} f)(e) = \int_G f(x)\, dx$; отсюда

$$\| f * j_n \|_1 \leqslant \int_G | f(x) | \, \| j_n * \varepsilon_x - j_n \|_1 \, dx =$$

$$= \int_{K_n} | f(x) | \, \| j_n * \varepsilon_x - j_n \|_1 \, dx + \int_{G - K_n} | f(x) | \, \| j_n * \varepsilon_x - j_n \|_1 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \int_{K_n} | f(x) | \, dx + 4 \int_{G - K_n} | f(x) | \, dx \leqslant \frac{1}{n} + \frac{4}{n} = \frac{5}{n}.$$

Окончательно $\| f * f_n - f \|_1 \leqslant 6/n$, чем и завершается доказательство предложения.

Применяя предложение 5 § 5 гл. I, получим теперь следующий результат:

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$, такой, что граница множества $h(\mathfrak{J})$ (замечание 2) не содержит непустых совершенных множеств. Тогда $\mathfrak{J}$ совпадает с множеством всех функций $f \in L^1(G)$, таких, что $\mathscr{F} f$ обращается в нуль на $h(\mathfrak{J})$.*

Напротив, для произвольного замкнутого идеала в $L^1(G)$ заключение теоремы 2 неверно (см. упр. 9). Более того, можно показать, что если G не компактна, то существует замкнутый идеал в $L^1(G)$, который не является самосопряженным [1]).

Следствие. *Если замкнутый идеал $\mathfrak{J}$ в $L^1(G)$ содержится в единственном регулярном максимальном идеале, то сам идеал $\mathfrak{J}$ является регулярным максимальным.*

2. Гармонический синтез в $L^\infty(G)$

В этом пункте мы будем отождествлять пространство $L^\infty(G)$ с двойственным к $L^1(G)$, снабдив его слабой топологией $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$.

Отображение $W \to W^0$ есть биекция множества слабо замкнутых векторных подпространств в $L^\infty(G)$ на множество замкнутых векторных подпространств в $L^1(G)$.

С другой стороны, если $f \in L^1(G)$ и $x \in G$, то сопряженным к эндоморфизму $g \to f * g$ (соответственно $g \to \varepsilon_x * g$) бана-

[1]) См., например, Rudin W., Fourier analysis on groups, Interscience tracts in pure and applied mathematics, теорема 7.7.1.

хова пространства $L^1(G)$ является эндоморфизм $g' \mapsto \check{f} * g'$ (соответственно $g' \mapsto \varepsilon_{x^{-1}} * g'$) банахова пространства $L^\infty(G)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, n° 3, пример 6). Для того чтобы замкнутое векторное подпространство в $L^1(G)$ было идеалом в $L^1(G)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было инвариантным относительно сдвигов на G. Стало быть, *для того чтобы слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$ было инвариантным относительно свертки с элементами из $L^1(G)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было инвариантным относительно сдвигов на G.*

Пусть U — слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$. Предположим, что U (а значит, U^0) инвариантно относительно сдвигов на G. Пусть $f \in L^1(G)$. Для каждой функции $g \in L^\infty(G)$ имеем $(\check{f} * g)(x) = \langle \varepsilon_x * f, g \rangle$. Стало быть, *для того чтобы функция f принадлежала U^0, необходимо и достаточно, чтобы $\check{f} * g = 0$ для всех $g \in U$.*

Если W — векторное подпространство в $L^\infty(G)$, слабо замкнутое и инвариантное относительно сдвигов, то мы обозначим через $A(W)$ множество всех $\chi \in \widehat{G}$, принадлежащих W; это множество является замкнутой частью в $\widehat{G}$. Если F — замкнутая часть в $\widehat{G}$, то мы обозначим через $V(F)$ слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$, порожденное элементами из F; поскольку каждый сдвиг на G переводит любой характер в пропорциональную ему функцию, $V(F)$ инвариантно относительно сдвигов. Применяя обозначения h и $\mathfrak{k}$, введенные в замечании 2, n° 1, получаем, что

$$A(W) = (h(W^0))^{-1}, \tag{3}$$

$$V(F) = (\mathfrak{k}(F^{-1}))^0. \tag{4}$$

Из соотношений $h(\mathfrak{k}(F)) = F$, $\mathfrak{k}(h(I)) \supset I$ следует, что

$$A(V(F)) = F, \tag{5}$$

$$V(A(W)) \subset W. \tag{6}$$

Предложение 3. *Пусть W — ненулевое слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Тогда W содержит по крайней мере один характер группы G.*

Действительно, $W^0 \neq L^1(G)$ и, стало быть, $h(W^0) \neq \varnothing$ (теорема 1); следовательно, $A(W) \neq \varnothing$ (формула (3)).

Предложение 4. *Пусть W — слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Тогда*

(i) *Для любой окрестности U множества $A(W)$ в $\widehat{G}$ каждая функция из W является слабым пределом линейных комбинаций характеров, принадлежащих U.*

(ii) *Если граница множества $A(W)$ не содержит непустых совершенных множеств, то каждая функция из W является слабым пределом линейных комбинаций характеров, принадлежащих W.*

Для доказательства утверждения (i) достаточно доказать следующее: пусть f — функция из $L^1(G)$, ортогональная к элементам из U; тогда f ортогональна к W. Но $\mathcal{F}f$ обращается в нуль на множестве U^{-1}, которое является окрестностью $h(W^0)$ (формула (3)); стало быть, $f \in W^0$ (предложение 1). Утверждение (ii) устанавливается аналогично с применением теоремы 2 вместо предложения 1.

Пусть W — слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Отыскание характеров, принадлежащих W, иногда называют «гармоническим анализом» в W. Предложение 4 выражает то обстоятельство, что можно в некотором смысле восстановить элементы из W с помощью вышеупомянутых характеров, или, как говорят, осуществить «гармонический синтез» в W. В более широком смысле решение проблем, аналогичных или эквивалентных рассмотренным в n° 1 и 3, также называют «гармоническим синтезом».

3. Гармонический синтез в $L^2(G)$

Лемма 3. *Пусть X — локально компактное пространство, μ — некоторая неотрицательная мера на X. Для каждой функции $f \in L^\infty(X, \mu)$ пусть V_f — отображение $\psi \to \psi f$ пространства $L^2(X, \mu)$ в себя. Пусть T — непрерывный эндоморфизм гильбертова пространства $L^2(X, \mu)$, коммутирующий с V_f для каждой функции $f \in \mathcal{K}(X)$. Тогда существует функция $g \in L^\infty(X, \mu)$, такая, что $T = V_g$.*

1) Пусть $f \in L^\infty(X, \mu)$; покажем, что T коммутирует с V_f. Для любых $g, h \in L^2(X, \mu)$ имеем

$$(TV_f g \mid h) - (V_f Tg \mid h) = (fg \mid T^*h) - (f(Tg) \mid h) =$$
$$= \int f(x)\, g(x)\, \overline{(T^*h)}(x)\, d\mu(x) -$$
$$- \int f(x)\,(Tg)(x)\, \bar{h}(x)\, d\mu(x).$$

Но

$$g \cdot \overline{(T^*h)} \in L^1(X, \mu) \quad \text{и} \quad (Tg) \cdot \bar{h} \in L^1(X, \mu);$$

стало быть, $(TV_f g \mid h) - (V_f Tg \mid h)$ — непрерывная функция от элемента f в топологии $\sigma(L^\infty(X, \mu), L^1(X, \mu))$; по предположению эта функция равна нулю для всех $f \in \mathcal{K}(X)$, следовательно, она тождественно равна нулю. Тем самым доказано, что $TV_f = V_f T$.

2) Пусть Y — некоторая μ-измеримая часть X, φ_Y — ее характеристическая функция, H_Y — подпространство в $L^2(X, \mu)$, состоящее из функций, равных нулю на $X - Y$. Тогда, в силу 1), T коммутирует с V_{φ_Y} и $V_{\varphi_{X-Y}}$, т. е. оставляет инвариантными подпространства H_Y и H_{X-Y}. Обозначим через T_Y сужение T на H_Y.

3) Предположим, что X — компакт. Тогда $1 \in L^2(X, \mu)$. Положим $g = T(1) \in L^2(X, \mu)$. Пусть Y — множество всех таких $x \in X$, что $|g(x)| > \|T\|$. В силу 2), имеет место равенство $T(\varphi_Y \cdot 1) = \varphi_Y \cdot T(1) = \varphi_Y g$, следовательно,

$$\int_Y |g(x)|^2 d\mu(x) \leqslant \|T\|^2 \int_Y d\mu(x).$$

Стало быть, множество Y является μ-пренебрежимым. Таким образом, $|g| \leqslant \|T\|$ почти всюду. С другой стороны, для каждой функции $f \in \mathcal{K}(X)$ имеем

$$T(f) = T(V_f 1) = V_f(T1) = V_f g = fg = V_g f,$$

откуда $T = V_g$.

4) Перейдем к общему случаю. Существует локально счетное семейство (X_α) попарно непересекающихся компактных частей в X, таких, что $X - \bigcup_\alpha X_\alpha$ — локально пренебрежимое множество (*Интегр.*, гл. IV, 2-е изд., § 5, n° 9, предл. 14). Применим 3) к каждому T_{K_α}. Тогда существует функция g_α, измеримая на K_α, такая, что $|g_\alpha| \leqslant \|T\|$ на K_α и $T_{K_\alpha} f = g_\alpha f$ для $f \in H_{K_\alpha}$. Пусть g — функция на X, равная g_α на K_α для каждого α и 0 на $X - \bigcup_\alpha K_\alpha$. Тогда g — элемент из $L^\infty(X, \mu)$. Операторы V_g и T совпадают на каждом H_{K_α} и потому на $L^2(X, \mu)$.

Предложение 5. (i) *Пусть M — измеримая часть $\widehat{G}$ (относительно меры Хаара). Тогда множество всех таких $f \in L^2(G)$, что $\mathcal{F} f$ обращается в нуль почти всюду на M, является замкнутым векторным подпространством E_M в $L^2(G)$, инвариантным относительно сдвигов.*

(ii) *Пусть M и M' — измеримые части в $\widehat{G}$. Для того чтобы $E_M = E_{M'}$, необходимо и достаточно, чтобы M и M' совпадали с точностью до локально пренебрежимого множества.*

(iii) *Всякое замкнутое векторное подпространство в* $L^2(G)$, *инвариантное относительно сдвигов, совпадает с* E_M *при некотором* M.

Утверждение (i) немедленно следует из теоремы Планшереля.

Если M и M' совпадают с точностью до локально пренебрежимого множества, то ясно, что $E_M = E_{M'}$. Если же M и M' не обладают этим свойством, то существует, например, компактное множество K, не пренебрежимое и такое, что $K \subset M$, $K \subset \hat{G} - M'$; пусть φ_K — его характеристическая функция. Поскольку $\varphi_K \in L^2(\hat{G})$, существует функция $f \in L^2(G)$, такая, что $\mathcal{F}f = \varphi_K$. Тогда $f \in E_{M'}$, $f \notin E_M$ и, стало быть, $E_M \neq E_{M'}$. Тем самым (ii) доказано.

Пусть, наконец, E — замкнутое векторное подпространство в $L^2(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Тогда для каждой функции $f \in L^1(G)$ подпространство E и ортогональное дополнение к E в $L^2(G)$ инвариантны относительно эндоморфизма $\varphi \longmapsto f * \varphi$ в $L^2(G)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 6 (iii)); стало быть, ортогональный проектор P_E на E коммутирует с этим эндоморфизмом. Выберем в качестве f преобразование Фурье функции вида $g_1 * g_2$, где $g_1, g_2 \in \mathcal{K}(\hat{G}_2)$. Принимая во внимание предложение 7 § 1, мы видим, что эндоморфизм $\mathcal{F}P_E\mathcal{F}^{-1}$ пространства $L^2(\hat{G})$ (где $\mathcal{F} = \mathcal{F}_G$) коммутирует с оператором умножения на $g_1 * g_2$. Для каждой функции $g \in L^\infty(\hat{G})$ обозначим через V_g эндоморфизм $\psi \longmapsto g\psi$ пространства $L^2(\hat{G})$. По непрерывности из предшествующего результата следует, что $\mathcal{F}P_E\mathcal{F}^{-1}$ коммутирует с V_g для $g \in \mathcal{K}(G)$. В силу леммы 3, $\mathcal{F}P_E\mathcal{F}^{-1}$ имеет вид V_h с некоторой функцией $h \in L^\infty(\hat{G})$. Так как $P_E = P_E^* = P_E^2$, то $V_h = V_h^* = V_h^2$ и, стало быть, $h = \bar{h} = h^2$, так что h — характеристическая функция некоторого измеримого множества M. Если $f \in L^2(G)$, то

$$f \in E \Leftrightarrow P_E f = f \Leftrightarrow V_h \mathcal{F} f = \mathcal{F} f \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{F} f \text{ обращается в нуль почти всюду на } \hat{G} - M \Leftrightarrow f \in E_{\hat{G} - M},$$

откуда следует утверждение (iii).

УПРАЖНЕНИЯ

Во всех упражнениях главы II через G обозначается, если не оговорено противное, коммутативная локально компактная группа.

§ 1

1) Пусть $G = \mathbf{R}$.

a) Пусть ω, p, $q \in \mathbf{R}$ и $p \leqslant q$. Положим $f(x) = e^{i\omega x}$ для $p \leqslant x \leqslant q$, $f(x) = 0$ для $x > q$ или $x < p$. Тогда

$$(\mathcal{F}f)(y) = i\,\frac{e^{ip(\omega-2\pi y)} - e^{iq(\omega-2\pi y)}}{\omega - 2\pi y}.$$

b) Пусть $\omega \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$. Положим $f(x) = e^{(-\beta+i\omega)x}$ для $x \geqslant 0$, $f(x) = 0$ для $x < 0$. Тогда

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{i}{\omega - 2\pi y + i\beta}.$$

c) Пусть $a > 0$. Положим $f(x) = \frac{1}{a} e^{-a|x|}$. Тогда

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{2}{4\pi^2 y^2 + a^2}.$$

d) Положим $f(x) = e^{-x^2/2}$. Тогда

$$(\mathcal{F}f)(y) = \sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2 y^2}.$$

(Полагая $g(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 - iyx}\,dx$, убедиться в справедливости равенства $g'(y) = -yg(y)$, после чего применить формулу $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ из *Функц. действ. пер.*, гл. VII, § 1, n° 3.)

¶ 2) a) Показать, что функции $t \mapsto t^n e^{-\pi t^2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ образуют тотальное множество в $L^2(\mathbf{R})$. (Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$ — ортогональная функция к каждой из функций $t^n e^{-\pi t^2}$. Полагая

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t z}\,dt, \qquad z \in \mathbf{C},$$

показать, что F — целая функция, все производные которой в точке 0 равны нулю. Вывести отсюда, что $\mathcal{F}\left(fe^{-\pi t^2}\right) = 0$.)

b) Пусть $k \in \mathbf{N}$, $P \in \mathbf{C}[t]$, α — старший коэффициент P. Показать, что тогда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} ((d^k/dt^k)\, e^{-2\pi t^2})\, P(t)\, dt$ равен 0, если $\deg P < k$, и $(-1)^k k!\, 2^{-1/2} \alpha$, если $\deg P = k$.

c) Имеет место равенство $(d^k/dt^k)(e^{-2\pi t^2}) = P_k(t)\, e^{-2\pi t^2}$, где P_k — многочлен степени k со старшим коэффициентом $(-1)^k 2^{2k} \pi^k$.

d) Для $m \in \mathbf{N}$ и $t \in \mathbf{R}$ положим

$$\mathscr{H}_m(t) = (-1)^m (m!)^{-1/2} 2^{(1/4)-m} \pi^{-m/2} e^{2\pi t^2} \frac{d^m}{dt^m}(e^{-2\pi t^2});$$

$\mathscr{H}_m$ называются функциями Эрмита. Показать, что они образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$. (Применить a), b), c).)

e) Показать, что $\mathscr{F}(\mathscr{H}_m) = (-i)^m \mathscr{H}_m$.

3) a) Пусть $\alpha > 0$, $h > 0$ и $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — функция, равная нулю вне $]-\alpha, \alpha[$, линейная на $[-\alpha, 0]$ и $[0, \alpha]$ и равная h в точке 0. Показать, что тогда

$$(\mathscr{F} f)(t) = \frac{h}{\alpha\pi^2} \frac{\sin^2 \pi\alpha t}{t^2}.$$

b) Пусть

$$g(x) = \sum_{n=-N}^{N} f(x+n).$$

Тогда

$$(\mathscr{F} g)(t) = \frac{h}{\alpha\pi^2} \frac{\sin^2 \pi\alpha t}{t^2} \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}.$$

c) Для заданных последовательностей (h_i), (α_i), (N_i) пусть g_i (при каждом i) — функция, полученная, как в b). Пусть $\sum\limits_i h_i < +\infty$, так что $\sum\limits_i g_i$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции g. Показать, что если $\sum\limits_i h_i \alpha_i N_i < +\infty$, $\sum\limits_i \frac{h_i}{\alpha_i} \log N_i < +\infty$ и $\sum\limits_i h_i N_i = +\infty$ (например, если $h_i = 1/i^2$, $\alpha_i = 1/\sqrt{i}$, $N_i = i$), то функции g и $\mathscr{F} g$ интегрируемы, но $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = +\infty$.

4) a) Пусть G G_1 — локально компактные коммутативные группы, $\varphi\colon G \to G_1$ — непрерывный морфизм, $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ и $\mu_1 = \varphi(\mu)$. Показать, что тогда $\mathscr{F}\mu_1 = \mathscr{F}\mu \circ \widehat{\varphi}$.

b) Пусть σ — автоморфизм группы G, Δ — его модуль, $f \in L^1(G)$ и $f' = f \circ \sigma$. Показать, что тогда $(\mathscr{F} f')(\hat{x}) = \Delta(\sigma)^{-1} (\mathscr{F} f)(\hat{\sigma}^{-1}\hat{x})$.

5) Пусть $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$. Предположим, что $\mathscr{F}\mu \in L^1(\widehat{G})$. Показать, что существует $f \in L^1(G)$, такая, что $d\mu(x) = f(x)\, dx$. (Воспользоваться фильтром $\mathfrak{B}$ из леммы 1. Тогда $\varphi * \mu$ стремится слабо к μ по $\mathfrak{B}$ и $\mathscr{F}(\varphi * \mu) = (\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}\mu)$ стремится к $\mathscr{F}\mu$ в $L^1(\widehat{G})$, а, стало быть, $\varphi * \mu = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(\varphi * \mu))$ стремится к $\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}\mu)$ в $\mathscr{C}^0(G)$. Следовательно, $d\mu(x) = (\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mu)(x)\, dx$.)

6) Пусть H — подгруппа в G и $\mu \in \mathscr{M}^1(\widehat{G})$. Показать, что для инвариантности $\mathscr{F}\mu$ относительно сдвигов, определяемых элементами из H, необходимо и достаточно, чтобы носитель μ содержался в $H^{\perp}$.

7) Пусть $f \in L^1(G)$. Пусть F — голоморфная функция, определенная в открытой части U в $\mathbf{C}$ и обладающая следующими свойствами: α) U содержит множество значений $\mathscr{F} f$; β) если G не дискретна, то $0 \in U$ и $F(0) = 0$. Показать, что тогда существует функция $g \in L^1(G)$, такая, что $F \circ (\mathscr{F} f) = \mathscr{F} g$. (Применить голоморфное функциональное исчисление в алгебре, полученной из $L^1(G)$ присоединением единицы.)

8) Пусть $p \in ⟧1, 2⟧$ и $p' \in ⟦2, +\infty⟦$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$. Показать, что $\| \mathscr{F} f \|_{p'} \leqslant \| f \|_p$. (Это неравенство известно для $p = 1$ и $p = 2$. В общем случае применить неравенство М. Рисса (*Интегр.*, гл. IV, 2-е изд., § 6, упр. 18).) Вывести отсюда, что отображение $\mathscr{F} \mid \mathscr{K}(G)$ продолжается до непрерывного линейного отображения из $L^p(G)$ в $L^{p'}(\widehat{G})$, совпадающее с преобразованием Фурье на $L^p(G) \cap L^1(G)$ и на $L^p(G) \cap L^2(G)$.

¶ 9) Пусть G — локально компактная группа (не обязательно коммутативная), снабженная левой мерой Хаара.

a) Показать, что если $f \in L^1(G)$, то существуют $f_1, f_2 \in L^1(G)$, такие, что $f_1 * f_2 = f$. (Воспользоваться упражнением 22 b) гл. I, § 2.)

b) Пусть $f_1, f_2 \in L^1(G)$ и $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$. Показать, что $f_1 * f_2$ совпадает почти всюду с функцией, полунепрерывной снизу. (Рассматривать f_1 как предел в смысле простой сходимости возрастающей последовательности неотрицательных функций из $L^\infty(G)$.)

c) Положим, $G = \mathbf{R}$. Для каждого открытого интервала $I = ⟧a, b⟦$ положим $A(I) = ⟧a, a + (b-a)/6⟦$, $A'(I) = ⟧a + 5(b-a)/6, b⟦$. Пусть $I'_0 = ⟧0, 1⟦$, $I_1 = A(I'_0)$, $I'_1 = A'(I'_0)$, $I_2 = A(I'_1)$, $I'_2 = A'(I'_1)$, $\ldots$, $I_n = A(I'_{n-1})$, $I'_n = A'(I'_{n-1})$, $\ldots$. Пусть, далее, $F = I_1 \cup I_2 \cup \ldots$. Показать, что не существует таких двух частей F_1 и F_2 из $\mathbf{R}$, что $F_1 + F_2 = F$. Показать, далее, что если f — непрерывная неотрицательная функция на $\mathbf{R}$, такая, что $F = \{x \mid f(x) > 0\}$, то не существует ни одной пары функций $f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{R})$, таких, что $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$ и $f = f_1 * f_2$. (Предположим, что такое равенство имеет место. Пусть E_i — множество всех $x \in \mathbf{R}$, таких, что $f_i(x) > 0$. Пусть F_i — множество точек плотности E_1 (*Интегр.*, гл. V, § 6, упр. 15). Показать, что $F = F_1 + F_2$.)

10) Пусть $k \in \mathbf{Z}$. Показать, что следующие условия эквивалентны: α) отображение $x \longmapsto x^k$ из G в G инъективно; β) отображение $\hat{x} \longmapsto \hat{x}^k$ из $\widehat{G}$ в $\widehat{G}$ сюръективно.

11) Пусть $(G_i)_{i \in I}$ — семейство локально компактных коммутативных групп. Для каждого $i \in I$ пусть H_i — компактная открытая подгруппа в G_i. Пусть G — локальное прямое произведение G_i относительно H_i (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 2, упр. 26). Для каждого $\chi \in \widehat{G}$ пусть χ_i — сужение χ на G_i. Показать, что $\chi \longmapsto (\chi_i)_{i \in I}$ есть изоморфизм топологической группы $\widehat{G}$ на локальное прямое произведение $\widehat{G}_i$ относительно $H_i^{\perp}$.

12) Пусть G_d есть группа G, снабженная дискретной топологией, и χ — унитарный характер G_d. Показать, что при любом выборе $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n \in G$ и $\varepsilon > 0$ существует элемент $\hat{x} \in \widehat{G}$, такой, что $|\hat{x}(x_i) - \chi(x_i)| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Каноническая инъекция из G_d в G имеет в качестве двойственной морфизм из $\widehat{G}$ в $(G_d)^\wedge$, образ которого плотен в силу следствия 6 теоремы 4.)

13) a) Показать, что $L^1(G)$ — замкнутый идеал в $\mathscr{M}^1(G)$ и, следовательно, $\widehat{G}$ отождествляется с некоторой открытой частью в $\mathrm{X}(\mathscr{M}^1(G))$. (См. гл. I, § 3, упр. 17.)

b) Если $\mathscr{M}_d(G)$ (соответственно $\mathscr{M}_a(G)$) — множество рассеянных (соответственно атомических) мер $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, то $\mathscr{M}_d(G)$ — замкнутый идеал в $\mathscr{M}^1(G)$, а $\mathscr{M}_a(G)$ — замкнутая подалгебра в $\mathscr{M}^1(G)$.

¶14) Пусть $E \subset G$. Говорят, что множество E *независимо*, если для любой системы $x_1, \ldots, x_k$ попарно различных элементов из E и целых чисел $n_1, \ldots, n_k$ из равенства $x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} = e$ следует, что $x_1^{n_1} = \ldots = x_k^{n_k} = e$. Множество E называют *множеством Кронекера*, если любая непрерывная комплексная функция на E, равная по абсолютной величине 1, является равномерным пределом на E унитарных характеров группы G. Пусть $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$. Говорят, что E — множество *типа* K_q, если каждое непрерывное отображение E в множество корней q-й степени из единицы совпадает на E с некоторым унитарным характером группы G.

a) Пусть P — компактное множество Кронекера. Показать, что если мера $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ сосредоточена на P, то $\sup |\mathscr{F}\mu| = \|\mu\|$. Вывести отсюда, что каждая непрерывная комплексная функция на P представляется в виде $\mathscr{F}f \mid P$, где $f \in L^1(\widehat{G})$.

b) Пусть $E \subset G$ — конечное независимое множество, и пусть f — комплексная функция, равная по абсолютной величине 1 на E. Предположим, что для элемента $x \in E$ порядка q имеет место равенство $f(x)^q = 1$. Показать, что тогда функция f является равномерным пределом на E унитарных характеров группы G. (Применить упр. 12.)

c) Показать, что каждое множество Кронекера независимо и содержит только элементы бесконечного порядка.

d) Показать, что каждое множество типа K_q в $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ независимо.

e) Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — непустые открытые непересекающиеся части G. Показать, что если любая окрестность элемента e в G содержит элементы бесконечного порядка, то существуют $x_i \in V_i$, такие, что $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — множество Кронекера. Если $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, то существуют $x_i \in V_i$, такие, что $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — множество типа K_q.

f) Пусть $E \subset G$ — независимое компактное множество, $F = E \cup E^{-1}$ и $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ — рассеянная мера, сосредоточенная на F. Показать, что тогда меры $\varepsilon_e, \mu, \mu^2, \mu^3, \ldots$ попарно независимы (здесь $\mu^n = \mu * \mu^{n-1}$). (Показать, что если $m < n$, то множество элементов $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G^n$, таких, что $x_1 x_2 \ldots x_n \in F^m$, пренебрежимо относительно меры $\mu \otimes \mu \otimes \ldots \otimes \mu$.) Вывести, в предположении, что $\mu \geqslant 0$, равенство

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \mu^k \right\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \, \|\mu\|^k,$$

справедливое для любого набора комплексных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

g) Пусть $E \subset G$ — независимое компактное множество, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — рассеянные неотрицательные меры единичной массы, сосредоточенные на непересекающихся частях $E_1, \ldots, E_r$ из E. Пусть, далее, $z_1, \ldots, z_r \in \mathbf{C}$ и $|z_i| \leqslant 1$ для всех i. Показать, что существует характер χ алгебры $\mathscr{M}^1(G)$, такой, что $\chi(\mu_i) = z_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. (Показать сначала, рассуждая так же, как в f), что если $(n_1, \ldots, n_r) \neq (m_1, \ldots, m_r)$, то меры $\mu_1^{m_1} * \ldots * \mu_r^{m_r}$ и $\mu_1^{n_1} * \ldots * \mu_r^{n_r}$ независимы. Затем, предполагая, что $|z_i| = 1$ для всех i, показать, что спектральный радиус элемента $\varepsilon_e + \bar{z}_1\mu_1 + \ldots + \bar{z}_r\mu_r$ равен $r + 1$ и, стало быть, существует характер χ алгебры $\mathscr{M}^1(G)$, такой, что $\chi(\varepsilon_e + \bar{z}_1\mu_1 + \ldots + \bar{z}_r\mu_r) = r + 1$; это и есть искомый характер для случая $|z_i| = 1$. В общем случае записать $z_i = \frac{1}{2}(z_i' + z_i'')$, где $|z_i'| =$

$=|z_i''|=1$, и $\mu_i=\frac{1}{2}(\mu_i'+\mu_i'')$, так чтобы для мер $\mu_1', \mu_1'', \ldots, \mu_r', \mu_r''$ оставались справедливыми все те предположения, которые выполнялись для мер $\mu_1, \ldots, \mu_r$.) Обозначая через $\mathscr{M}_d(E)$ банахово пространство рассеянных мер, сосредоточенных на E, вывести отсюда, что каждая непрерывная линейная форма с нормой, не превосходящей 1 на $\mathscr{M}_d(E)$, продолжается до характера алгебры $\mathscr{M}^1(G)$.

15) Пусть $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, таких, что произведение любой производной функции f на любой многочлен ограничено. Тогда $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \subset L^1(\mathbf{R}^n)$ и преобразование Фурье $\mathscr{F} \mid \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ является автоморфизмом множества $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Показать, что если $x_1, \ldots, x_n$ — координатные функции на $\mathbf{R}^n$ и если $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, то $(\partial/\partial x_j)(\mathscr{F}f) = -2i\pi\mathscr{F}(x_jf)$.

¶16) Пусть H — замкнутая подгруппа в G, g — элемент из $L^1(G)$, такой, что $\mathscr{F}g$ обращается в нуль на $H^\perp$, и пусть $\varepsilon>0$. Показать, что существует мера $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, сосредоточенная на H и такая, что $\|\mu\| \leqslant 2$, $\|g*\mu\| \leqslant \varepsilon$ и $\mathscr{F}\mu=1$ в некоторой окрестности $H^\perp$.

§ 2

1) а) Для того чтобы группа G имела счетную базу, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$ имела счетную базу. (Если G имеет счетную базу, то $L^1(G)$, а стало быть, $\mathrm{X}(L^1(G))$ имеет счетную базу.)

b) Для того чтобы группа G была счетной на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$ содержала открытую подгруппу со счетной базой или чтобы $\widehat{G}$ была метризуемой. (Воспользоваться предложением 3.)

c) Для того чтобы компактная группа G была метризуемой, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$ была счетной или чтобы G была изоморфна некоторой замкнутой подгруппе в $\mathbf{T}^{\mathbf{N}}$. (Счетная дискретная группа является факторгруппой группы $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$.)

2) а) Каждая бесконечная коммутативная группа Γ допускает некоторую счетную бесконечную факторгруппу. (Вложить счетную бесконечную подгруппу $\Delta \subset \Gamma$ в некоторую счетную делимую группу Δ' и применить *Алг.*, гл. II, 3-е изд., § 2, упр. 14; затем продолжить на Γ тождественный морфизм из Δ в Δ'.)

b) Каждая бесконечная компактная коммутативная группа содержит метризуемую бесконечную замкнутую подгруппу. (Применить а).)

3) а) Пусть K — компактная группа, E_n — множество ее элементов порядка n. Показать, что если $K \neq E_n$ при любом n, то множество элементов из K бесконечного порядка плотно в K. (Если E_n имеет непустую внутренность, то $E_m = K$ для некоторого целого $m \geqslant n$.)

b) Пусть Γ — коммутативная дискретная группа, порядки элементов которой не ограничены. Показать, что тогда Γ допускает счетную факторгруппу, обладающую тем же свойством. (Привлечь те же соображения, что и при решении упр. 2 а).)

c) Показать, что если каждая окрестность элемента e в G содержит элемент бесконечного порядка, то G содержит метризуемую замкнутую подгруппу, обладающую тем же свойством. (Свести общий случай к случаю, когда G — компактная группа, и применить а) и b).) В противном случае и если группа G не дискретна, то существует целое число $q>1$, такое, что группа G содержит замкнутую подгруппу, изоморфную группе $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$. (Применить *Алг.*, гл. VII, § 2, упр. 4 с).)

4) Показать, что если группа G компактна, а $\widehat{G}$ содержит элемент бесконечного порядка, то существует нетривиальный непрерывный мор-

физм из $\mathbf{R}$ в G. (Поскольку $\mathbf{R}$ — делимая группа, существует нетривиальный морфизм из $\widehat{G}$ в $\mathbf{R}$.)

5) Пусть p — простое число. Показать, что группа $\mathbf{Q}_p$ не представляется в виде произведения компактной и дискретной групп. (Всякая компактная подгруппа в $\mathbf{Q}_p$ имеет вид $p^n\mathbf{Z}_p$ с некоторым $n \in \mathbf{Z}$.)

6) Показать, что если G — группа, состоящая из элементов конечного порядка, то G и $\widehat{G}$ вполне несвязны. (Группа $\widehat{G}$ вполне несвязна в силу следствия 2 предложения 4. Доказательство того, что группа G вполне несвязна, свести с помощью предложения 3 к случаю, когда G компактна. Показать затем, что все элементы $\widehat{G}$ имеют конечный порядок.)

7) Элемент $x \in G$ будем называть элементом бесконечной высоты, если для любого $n \in \mathbf{Z}$ существует элемент $y \in G$, такой, что $y^n = x$. Показать, что если G компактна, то множество элементов бесконечной высоты является связной компонентой единицы группы G.

¶8) Показать, что следующие условия эквивалентны: α) G — локально связная группа; β) G изоморфна группе $\mathbf{R}^n \times E \times \widehat{D}$, где E и D дискретны и каждая подгруппа конечного ранга в D свободна.

9) a) Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ — некоторая последовательность целых чисел > 1. Снабдим группу $\mathbf{Z}$ структурой топологического кольца, для которой множества $\mathbf{Z}a_0a_1 \ldots a_n$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Обозначим через $\Delta_\mathbf{a}$ пополнение этого кольца. Показать, что $\Delta_\mathbf{a}$ — вполне несвязный метризуемый компакт. Показать далее, что если p — простое число и $a_i = p$ при всех i, то $\Delta_\mathbf{a} = \mathbf{Z}_p$.

b) Обозначим через $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^\infty)$ мультипликативную группу комплексных чисел вида $\exp(2i\pi l/(a_0a_1 \ldots a_r))$ $(l \in \mathbf{Z},\ r \in \mathbf{N})$, снабженную дискретной топологией. Показать, что отображение $\chi \longmapsto \chi(1)$ является изоморфизмом из $(\Delta_\mathbf{a})^\wedge$ на $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^\infty)$.

c) Пусть B — подгруппа в $\mathbf{R} \times \Delta_\mathbf{a}$, состоящая из элементов вида (n, n), где $n \in \mathbf{Z}$; она дискретна. Положим $\Sigma_\mathbf{a} = (\mathbf{R} \times \Delta_\mathbf{a})/B$. Показать, что $\Sigma_\mathbf{a}$ — связная метризуемая компактная группа. (Заметить, что канонический образ $\mathbf{R}$ в $\Sigma_\mathbf{a}$ плотен, и воспользоваться леммой 1.)

d) Пусть $\Gamma_\mathbf{a}$ — аддитивная подгруппа дискретной группы $\mathbf{Q}$, состоящая из всех рациональных чисел вида $l/(a_0a_1 \ldots a_r)$ $(l \in \mathbf{Z},\ r \in \mathbf{N})$. Если $\chi \in (\Sigma_\mathbf{a})^\wedge$, то χ определяет унитарный характер группы $\mathbf{R} \times \Delta_\mathbf{a}$ и, стало быть, унитарный характер на $\mathbf{R}$, имеющий вид $x \longmapsto \exp(2i\pi\alpha_\chi x)$, где $\alpha_\chi \in \mathbf{R}$. Показать, что отображение $\chi \longmapsto \alpha_\chi$ является изоморфизмом группы $(\Sigma_\mathbf{a})^\wedge$ на $\Gamma_\mathbf{a}$.

e) Показать, что группа $\widehat{\mathbf{Q}}$ канонически изоморфна группе $\Sigma_\mathbf{a}$ при $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 5, \ldots)$.

f) Пусть $\mathbf{R}_d$ — группа $\mathbf{R}$, снабженная дискретной топологией. Показать, что $(\mathbf{R}_d)^\wedge$ изоморфна группе $(\Sigma_\mathbf{a})^\mathfrak{c}$, где $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 5, \ldots)$, $\mathfrak{c}$ — мощность континуума. (Рассмотреть базис $\mathbf{R}$ над $\mathbf{Q}$.)

¶10) Топологическая группа называется *монотетической*, если существует элемент этой группы, степени которого плотны в ней, и *соленоидальной*, если существует непрерывный морфизм из $\mathbf{R}$ в эту группу, образ которого плотен.

a) Показать, что $\Delta_\mathbf{a}$ (сохраняются обозначения упражнения 9) — монотетическая группа и что каждая вполне несвязная монотетическая компактная группа топологически изоморфна группе $\Delta_\mathbf{a}$ при некотором $\mathbf{a}$.

b) Предположим, что G компактна. Показать, что для того, чтобы группа G была монотетической, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$

была изоморфна некоторой подгруппе в $\mathbf{T}$, снабженной дискретной топологией.

c) Предположим, что G компактна. Показать, что следующие условия эквивалентны: α) группа G соленоидальна; β) группа $\widehat{G}$ изоморфна некоторой подгруппе в $\mathbf{R}$, снабженной дискретной топологией; γ) $\widehat{G}$ — группа без кручения и $\operatorname{Card}\widehat{G} \leqslant \mathfrak{c}$ (мощность континуума); δ) G — факторгруппа группы $(\Sigma_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{c}}$, где $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 5, \ldots)$.

d) Показать, что если G — компактная соленоидальная группа, то G — монотетическая группа.

11) Обозначим через $L(G)$ множество непрерывных представлений группы G в $\mathbf{R}$. Назовем *однопараметрической подгруппой* в G образ непрерывного морфизма из $\mathbf{R}$ в G.

a) Показать, что следующие условия эквивалентны: α) G представляется в виде объединения однопараметрических подгрупп; β) каждый морфизм из $\mathbf{Z}$ в G продолжается до непрерывного морфизма из $\mathbf{R}$ в G; γ) каждый непрерывный морфизм из $\widehat{G}$ в $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ порождается путем перехода к факторгруппе некоторым элементом из $L(\widehat{G})$; δ) каждый унитарный характер группы $\widehat{G}$ имеет вид $e^{i\lambda}$, где $\lambda \in L(\widehat{G})$.

b) Если группа G имеет счетную базу, то условия, перечисленные в a), эквивалентны следующему: ε) $G = \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$, где I — счетное множество.

c) Объединение однопараметрических подгрупп в G является плотной подгруппой в связной компоненте единицы группы G. (Применить упр. 4.)

d) Если $t \longmapsto \chi_t$ — непрерывное отображение интервала $(0, 1)$ в $\widehat{G}$, такое, что $\chi_0 = e$, то существует отображение $t \longmapsto \lambda_t$ из $(0, 1)$ в $L(G)$, такое, что α) $\lambda_t(x)$ для каждого элемента $x \in G$ непрерывно зависит от t; β) $\chi_t = \exp(2i\pi\lambda_t)$; γ) $\lambda_0 = 0$.

e) Объединение однопараметрических подгрупп в G является также объединением дуг из G, содержащих e (*дуга* из G определяется как образ непрерывного отображения из $(0, 1)$ в G). (Применить d).)

12) Сохраним обозначение $L(G)$ из упражнения 11.

a) Пусть H — замкнутая подгруппа в G. Показать, что каждый элемент из $L(H)$ продолжается до элемента из $L(G)$. (Свести эту задачу сначала к случаю, когда $G = \mathbf{R}^n \times D$, где D — дискретная группа, затем к случаю, когда исходный элемент из $L(H)$ тривиален на $\mathbf{R}^n$, и, наконец, к случаю, когда группа G дискретна. Воспользоваться тем, что группа $\mathbf{R}$ делима.)

b) Показать, что каждый непрерывный морфизм из H в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$ (I — произвольное множество) продолжается до непрерывного морфизма из G в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$. (Применить a) и теорему 4 § 1.)

c) Обратно, пусть A — локально компактная коммутативная группа. Допустим, что для любой локально компактной коммутативной группы G и любой замкнутой подгруппы H в G каждый непрерывный морфизм φ из H в A продолжается до непрерывного морфизма из G в A. Показать, что тогда существуют такие число n и множество I, что группа A изоморфна $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$. (Полагая $G = \mathbf{R}$ и $H = \mathbf{Z}$, показать, что группа A связна и, следовательно, представляется в виде $\mathbf{R}^n \times \widehat{D}$, где D — дискретная группа. Показать, что D — проективный и, стало быть, свободный $\mathbf{Z}$-модуль.)

13) Пусть C — компактная часть G и $\varepsilon > 0$.

a) Пусть α — мера Хаара на G. Показать, что существует компактная часть D в G, такая, что $\alpha(CD) \leqslant (1 + \varepsilon)\,\alpha(D)$. (Случай, когда $G = \mathbf{R}^n$, тривиален; задачу можно свести к случаю, когда G содержит компактную открытую подгруппу H, такую, что C является насыщенной по H;

поэтому можно ограничиться случаем дискретной группы G; затем можно предположить, что G — группа конечного типа и, наконец, что $G = \mathbf{Z}^p$.)

b) Показать, что существует функция $k \in L^1(\widehat{G})$, такая, что $\mathcal{F} k \in \mathcal{K}(G)$, $(\mathcal{F} k)(x) = 1$ для $x \in C$ и $\| k_1 \| \leqslant 1 + \varepsilon$. (Выбрать функцию k в виде $\lambda f g$, где λ — постоянная, а преобразования Фурье функций $f, g \in L^2(\widehat{G})$ являются характеристическими функциями надлежащим образом выбранных множеств, и применить a).)

¶14) a) Предположим, что каждая окрестность элемента e в G содержит элемент бесконечного порядка. Показать, что существуют вполне несвязная совершенная метрическая компактная часть P в G, являющаяся множеством Кронекера, и ненулевая рассеянная мера, сосредоточенная на P. (Свести задачу к случаю, когда группа G метризуема, и применить упр. 3 c). Воспроизвести далее конструкцию из *Общ. топ.*, гл. IX, 2-е изд., § 6, лемма 3, и, кроме того, воспользоваться упр. 14 e) к § 1.)

b) Показать, что если $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, то существуют вполне несвязная совершенная компактная часть P в G типа K_q и ненулевая рассеянная мера, сосредоточенная на P.

c) Предположим, что группа G не дискретна. Показать, что существуют: α) элемент τ из $\mathcal{M}^1(G)$, такой, что $\sup |\mathcal{F}\tau|$ строго мажорируется спектральным радиусом элемента τ; β) необратимый элемент τ' из $\mathcal{M}^1(G)$, такой, что $\mathcal{F}\tau' \geqslant 1$ всюду на $\widehat{G}$; γ) не эрмитов характер на $\mathcal{M}^1(G)$. (Использовать a), b), упр. 3 c) и упр. 14 f) к § 1.)

d) Вывести из c), что группа $\widehat{G}$, открытая в $\mathrm{X}(\mathcal{M}^1(G))$, не плотна в $\mathrm{X}(\mathcal{M}^1(G))$.

§ 3

1) Пусть F — замкнутая часть в $\widehat{G}$ и K — компактная часть в $\widehat{G}$, такие, что $F \cap K = \varnothing$. Показать, что существует непрерывная функция $g \in L^1(G)$, такая, что $\mathcal{F} g$ равно 0 на F и 1 на K. (Рассмотреть свертку функции f из n° 1, замечание 1, с преобразованием Фурье некоторой функции вида $h * h'$, где $h, h' \in \mathcal{K}(\widehat{G})$, и $h * h' = 1$ на K.)

2) Пусть g — комплексная функция, определенная на $]0, +\infty[$, интегрируемая по мере Лебега. Предположим, что $\int_0^\infty g(t)\,dt = 1$ и что $\int_0^\infty g(t)\, t^{ix}\,dt \neq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Пусть f — измеримая и ограниченная комплексная функция на $]0, +\infty[$, такая, что $\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt$ стремится к конечному пределу l, когда x стремится к $+\infty$.

a) Показать, что для каждой комплексной функции h, определенной на $]0, +\infty[$, интегрируемой по мере Лебега и имеющей равный 1 интеграл,

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} h\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt$$

стремится к l, когда x стремится $+\infty$. В частности,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

стремится к l при $x \to +\infty$. (Полагая $g_1(t) = tg(t)$, $h_1(t) = th(t)$, убедиться в том, что $g_1 \in L^1(\mathbf{R}_+^*)$; $\mathcal{F}g_1$ нигде не обращается в нуль и $\check{g}_1 * f$ стремится к l, стало быть, $h_1 * f$ стремится к l.)

b) Показать, что если функция $f(t)$ является слабо осциллирующей на $\mathbf{R}_+^*$, когда t стремится к $+\infty$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$.

3) Пусть $f \in L^\infty(]0, \infty[)$ и $k \in \mathbf{R}_+^*$. Показать, что если

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t/x} f(t)\,dt$$

стремится к l при $x \to +\infty$, то

$$\frac{k}{x^k}\int_0^x (x-t)^{k-1} f(t)\,dt$$

стремится к l при $x \to +\infty$. (Рассмотреть функции $g(t) = e^{-t}$ и $h(t) = k(1-t)^{k-1}$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $h(t) = 0$ для $t > 1$.)

4) Пусть f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и g: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ — две функции. Допустим, что $f \in L^\infty(\mathbf{R})$, $g \in L^1(\mathbf{R})$, интеграл g равен 1 и $\mathcal{F}g$ нигде не обращается в нуль. Предположим, далее, что f — медленно убывающая функция, т. е.

$$\liminf\,(f(y) - f(x)) \geqslant 0$$

при $x \to +\infty$, $y > x$ и $y - x \to 0$. Показать, что если $(g * f)(x)$ стремится к l при $x \to +\infty$, то $f(x) \to l$ при $x \to +\infty$.

5) Пусть g: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ — непрерывная функция, такая, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{n \leqslant t \leqslant n+1} |g(t)| < +\infty.$$

Ясно, что $g \in L^1(\mathbf{R})$. Предположим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 1$ и $\mathcal{F}g$ нигде не обращается в нуль. Пусть, далее, μ — комплексная мера на $\mathbf{R}$, такая, что $|\mu|(]x, x+1[)$ остается ограниченной, когда x пробегает $\mathbf{R}$. Показать, что если $(g * \mu)(x)$ стремится к l при $x \to +\infty$, то для любой непрерывной функции h: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, такой, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{n \leqslant t \leqslant n+1} |h(t)| < +\infty$$

и интеграл h равен 1, $(h * \mu)(x)$ стремится к l, когда x стремится к $+\infty$. (Показать, что функция $h * \mu$ является слабо осциллирующей и что $(g * (h * \mu))(x)$ стремится к l, когда x стремится к $+\infty$.)

6) Пусть g — некоторая функция, для которой выполняются предположения упражнения 2. Предположим дополнительно, что $g \geqslant 0$ и

$\liminf\limits_{x\to 0} g(x) > 0$. Пусть, далее, f — измеримая вещественная ограниченная снизу функция на интервале $]0, +\infty[$. Показать, что если интеграл

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt$$

стремится к l, когда x стремится к $+\infty$, то

$$\sigma(x) = \frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)\,dt$$

стремится к l, когда x стремится к $+\infty$. (Показать, что функция σ ограничена при $x \geqslant 1$, затем, что σ — медленно убывающая функция и, наконец, что

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) \sigma(t)\,dt$$

стремится к l, когда x стремится к $+\infty$.)

¶7) a) На последовательности $\{1, 2, 3, \ldots\}$ определяется так называемая *функция Мёбиуса* μ следующим образом: $\mu(n) = (-1)^k$, если n разлагается в произведение k простых попарно различных множителей (в частности, $\mu(1) = 1$), и $\mu(n) = 0$ в противном случае. Для $x > 0$ положим $M(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} \mu(n)$ и $f(x) = x^{-1}M(x)$. Показать, что тогда функция f ограничена и $f(y) - f(x) = O((y-x)/x)$, так что f — слабо осциллирующая функция на группе $\mathbf{R}_+^*$.

b) Для $x > 0$ пусть $[x]$ — целая часть x. Положим $g_0(t) = [t^{-1}]$ и $g(t) = 2g_0(t) - ag_0(at) - bg_0(bt)$ $(a, b \in \mathbf{R}_+^*)$. Тогда $g(t)$ — ограниченная функция в окрестности точки 0, равная нулю для достаточно больших t; стало быть, g — интегрируемая по мере Лебега функция на интервале $]0, +\infty[$. Показать, что если $s \in \mathbf{C}$ и $\mathscr{R}s > 0$, то

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,t^s\,dt = (2 - a^{-s} - b^{-s})\,\frac{\zeta(1+s)}{1+s},$$

где $\zeta(1+s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(1+s)}$. Допуская, что

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

продолжается на всю комплексную плоскость как целая функция и что функция $\zeta(s)$ также продолжается, нигде не обращаясь в нуль на прямой $\mathscr{R}s = 1$ [1]), вывести, что

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,t^{ix}\,dt \neq 0$$

---

[1]) См., например, Valiron G., Théorie des fonctions, t. I, Paris, 1942, pp. 505—510.

для всех $x \in \mathbf{R}$.

c) Показать, что $\int\limits_0^{+\infty} g(t/x) f(t)\,dt = o(x)$, когда $x \to +\infty$. Вывести, что $M(x) = o(x)$, когда $x \to +\infty$.

8) Пусть φ: $[0, +\infty[\to \mathbf{R}$ — монотонно возрастающая неотрицательная функция, такая, что функция $t \mapsto e^{-\sigma t}\varphi(t)$ интегрируема по мере Лебега, когда $\sigma > 1$. Для каждого числа $s \in \mathbf{C}$, такого, что $\mathcal{R}s > 1$, положим $f(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st}\varphi(t)\,dt$. Предположим, что существует число $A \in \mathbf{C}$, обладающее следующим свойством: когда σ стремится к 1, оставаясь > 1, функция

$$\tau \mapsto f(\sigma + i\tau) - \frac{A}{\sigma + i\tau - 1} \qquad (\tau \in \mathbf{R})$$

равномерно стремится на каждой компактной части $\mathbf{R}$ к некоторой функции g. Показать, что тогда

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t)\, e^{-t} = A.$$

(Положим $a(t) = e^{-t}\varphi(t)$ для $t > 0$, $a(t) = 0$ для $t \leqslant 0$, $A(t) = A$ для $t > 0$, $A(t) = 0$ для $t \leqslant 0$. Пусть $\lambda > 0$. Положим, далее,

$$k_\lambda(t) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin 2\lambda t}{2\lambda t}\right)^2,$$

$$K_\lambda(t) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{t}{2\lambda}\right|, & \text{если} \quad |t| \leqslant 2\lambda, \\ 0, & \text{если} \quad |t| > 2\lambda. \end{cases}$$

Используя упр. 1 к § 1, теорему Лебега — Фубини и теорему Планшереля, показать, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_\lambda(x - t)(a(t) - A(t))\, e^{-\varepsilon t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2\lambda}^{2\lambda} K_\lambda(y)\, e^{-ixy} g(y)\, dy,$$

и вывести равенство

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_\lambda(x - t)\, a(t)\, dt = A.$$

Доказать затем, что a — ограниченная и медленно убывающая функция. Наконец, применить упр. 4 или получить результат непосредственно.)

9) Пусть $\mathfrak{J}$ — множество всех $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ (§ 1, упр. 15), таких, что $\mathcal{F}f$ аннулирует сферу $\mathbf{S}_2$. Пусть, далее $\mathfrak{I}$ — множество всех $f \in \mathfrak{J}$, таких, что $(\partial/\partial y_1)(\mathcal{F}f)$ аннулирует $\mathbf{S}_2$. Пусть, наконец, $\overline{\mathfrak{I}}, \overline{\mathfrak{J}}$ — замыкания $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$ в $L^1(\mathbf{R}^3)$. Показать, что тогда $h(\overline{\mathfrak{I}}) = h(\overline{\mathfrak{J}}) = \mathbf{S}_2$, но $\overline{\mathfrak{I}} \neq \overline{\mathfrak{J}}$. (Пусть μ — положительная мера единичной массы на $\mathbf{S}_2$, инвариантная относительно

ортогональной группы в $\mathbf{R}^3$. Показать, что $(\mathcal{F}\mu)(y_1, y_2, y_3) = (\sin 2\pi r)/2\pi r$, где $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. Вывести отсюда, что функция f на $\mathbf{R}^3$, определенная равенством

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1(\mathcal{F}\mu)(y_1, y_2, y_3),$$

является элементом из $L^\infty(\mathbf{R}^3)$, ортогональным к $\mathfrak{J}$, но не ортогональным к $\mathfrak{J}_1$.)

10) Назовем *С-множеством* в $\widehat{G}$ замкнутую часть E в $\widehat{G}$, обладающую следующими свойствами: если $f \in L^1(G)$ и $\mathcal{F}f$ аннулирует E, то для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in L^1(G)$, такая, что $\|f - f * g\| < \varepsilon$ и $\operatorname{supp}(\mathcal{F}g)$ — компактное множество, не пересекающееся с E. Показать, что

a) Если E есть C-множество в $\widehat{G}$, то существует единственный замкнутый идеал $\mathfrak{J}$ в $L^1(G)$, для которого $h(\mathfrak{J}) = E$.

b) Любая точка из $\widehat{G}$ является C-множеством.

c) Объединение двух C-множеств есть C-множество.

d) Любое множество, полученное сдвигом C-множества, само является C-множеством.

e) Если H — замкнутая подгруппа в $\widehat{G}$, E — замкнутая часть в H, такая, что ее граница E' относительно H является C-множеством относительно $\widehat{G}$, то E является C-множеством относительно $\widehat{G}$. (Использовать упр. 16 к § 1.)

f) Пересечение E в $\mathbf{R}^n$ конечного числа замкнутых полупространств есть C-множество. (Провести индукцию по размерности аффинного подпространства, порожденного E, и применить b), c), d), e).)

11) Пусть E — замкнутая часть в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что существует внутренняя точка p множества E, такая, что любая прямая, проходящая через p, пересекает границу множества E не более чем в двух точках. Показать, что тогда существует единственный замкнутый идеал $\mathfrak{J}$ в $L^1(\mathbf{R}^n)$, такой, что $\mathcal{F}f$ аннулирует E. (Представить функцию f как предел в $L^1(\mathbf{R}^n)$ функций, полученных из f с помощью гомотетий с центром в точке p.)

¶ 12) Обозначим через α меру Хаара группы G, а через $\mathfrak{B}$ — фильтр окрестностей элемента e в $\widehat{G}$.

a) Пусть U — интегрируемая открытая окрестность элемента e в G. Показать, что существует неотрицательная функция $a \in L^1(G)$ с интегралом, равным 1, обращающаяся в нуль вне U, такая, что $\mathcal{F}a \in L^1(\widehat{G})$ и $\int\limits_G a(x)^2\,dx \leqslant 2/\alpha(U)$. (Пусть V — компактная окрестность элемента e, такая, что $V \subset U$, $\alpha(U) < \sqrt{2}\,\alpha(V)$; пусть, далее, W — симметричная компактная окрестность элемента e, такая, что $VW^2 \subset U$; функция a ищется в виде $a = \lambda f * g$, где λ — положительная постоянная, а f, g — характеристические функции окрестностей VW и W.)

b) Пусть $f \in L^\infty(G)$. Обозначим через $A(f)$ множество элементов из $\widehat{G}$, принадлежащих слабо замкнутому инвариантному относительно сдвигов подпространству в $L^\infty(G)$, порожденному функцией f. Показать, что если $f, g \in L^\infty(G)$, то

$$A(fg) \subset \overline{A(f)\,A(g)}.$$

(Пусть U — какая-нибудь окрестность элемента e. Показать, что функция fg является слабым пределом линейных комбинаций элементов из $\widehat{G}$, принадлежащих множеству $A(f)\,U A(g)\,U$.)

c) Пусть $g \in L^{\infty}(G)$, K — компактная часть $\widehat{G}$, f — функция из $L^1(G)$, такая, что $\mathcal{F}f$ обращается в нуль на $A = A(g)$ и вне K. Для каждой окрестности $V \in \mathfrak{B}$ пусть $\omega(V)$ — верхняя грань множества значений $|\mathcal{F}f|$ на AV. Показать, что если

$$\liminf_{\mathfrak{B}} \omega(V)^2 \alpha(V)^{-1} \alpha((AV - A) \cap K) = 0,$$

то $\langle f, g \rangle = 0$. (Пусть $\varepsilon > 0$. Существует компактная часть H в G, такая, что $\int\limits_{G - H} |f| \, dx \leqslant \varepsilon$. Далее, существует открытая окрестность U элемента e в $\widehat{G}$, такая, что $|\langle x, \hat{x} \rangle - 1| \leqslant \varepsilon$ при $x \in H$, $\hat{x} \in U$. Применяя a) к $\widehat{G}$ и U, получим функцию $a \in L^1(\widehat{G})$. Пусть $b = \mathcal{F}a \in L^1(G)$. Используя b), показать, что $\mathcal{F}(bg)$ обращается в нуль вне AU. С другой стороны,

$$\left| \int fg \, dx - \int fgb \, dx \right| \leqslant \varepsilon (\| f \|_1 + 2) \| g \|_{\infty},$$

и поскольку f, $gb \in L^2(G)$, имеем

$$\left| \int fgb \, dx \right| = \left| \int (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}(gb)) \, d\hat{x} \right| = \left| \int\limits_{(AU - A) \cap K} (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}(gb)) \, d\hat{x} \right|.$$

Правая часть последнего равенства мажорируется выражением

$$2 \| g \|_{\infty} \alpha(U)^{-1/2} \omega(U) \alpha((AU - A) \cap K)^{1/2}).$$

d) Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$, $A = h(\mathfrak{J})$, f — функция из $L^1(G)$, такая, что $\mathcal{F}f$ аннулирует A, S — множество всех точек, в которых обращается в нуль $\mathcal{F}f$, S' — граница S, B — максимальное совершенное множество, содержащееся в $S' \cap A$. Для $V \in \mathfrak{B}$ пусть $\omega(V)$ — верхняя грань множества значений $|\mathcal{F}f|$ в AV. Предположим, наконец, что каждая точка из B обладает окрестностью K в $\widehat{G}$, такой, что

$$\liminf_{\mathfrak{B}} \omega(V)^2 \alpha(V)^{-1} \alpha((AV - A) \cap K) = 0.$$

Показать, что тогда $f \in \mathfrak{J}$. (Воспользоваться тем, что алгебра $L^1(G)$ удовлетворяет условию Диткина, и рассуждать так же, как в предл. 5, § 1, гл. I. Пусть $\widehat{G} \cup \{\infty\}$ — компактификация Александрова пространства $\widehat{G}$, и пусть N — множество всех характеров $\chi \in \widehat{G} \cup \{\infty\}$, таких, что $\mathcal{F}f$ не принадлежит $\mathcal{F}\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ. Показать сначала, что $N \subset B \cup \{\infty\}$. Затем, используя c), показать, что $N \subset \{\infty\}$. Наконец, показать, что $N = \varnothing$.)

e) Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(\mathbf{R}^n)$, $A = h(\mathfrak{J})$, f — функция из $L^1(\mathbf{R}^n)$, такая, что $\mathcal{F}f$ обращается в нуль на A. Для $h > 0$ обозначим через A_h множество всех точек из $\mathbf{R}^n$, внешних по отношению к A и расположенных от A на расстоянии, не превосходящем h. Положим $\omega(h) = \sup\limits_{x \in A_h} |(\mathcal{F}f)(x)|$. Показать, что если $\liminf\limits_{h \to 0} \omega(h)^2 h^{-n} \alpha(A_h) = 0$, то $f \in \mathfrak{J}$. (Применить d).)

f) Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$, $\alpha \in \,]0, 1[$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^{\alpha} |f(y)| \, dy < +\infty$. Показать, что тогда существует постоянная k, такая, что $|(\mathcal{F}f)(x+h) - (\mathcal{F}f)(x)| \leqslant$

$\leqslant kh^{\alpha}$. (Показать, что для любого наперед заданного числа $N > 0$ имеет место неравенство

$$|(\mathscr{F}f)(x+h) - (\mathscr{F}f)(x)| \leqslant 2\pi h \int_{-N}^{N} |yf(y)|\,dy + 2 \int_{|y| \geqslant N} |f(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi h N^{1-\alpha} \int_{-N}^{N} |y^{\alpha} f(y)|\,dy + 2N^{-\alpha} \int_{|y| \geqslant N} |y^{\alpha} f(y)|\,dy,$$

и затем выбрать $N = |h|^{-1}$.)

g) Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(\mathbf{R})$, f — функция из $L^1(\mathbf{R})$, такая, что $\mathscr{F}f$ обращается в нуль на $h(\mathfrak{J})$. Показать, что если $\int_{-\infty}^{\infty} |y^{1/2} f(y)|\,dy < +\infty$, то $f \in \mathfrak{J}$. (Применить e) и f).)

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Цифры после определяемого символа означают соответственно номер главы, параграфа и пункта (или упражнения).

$\widetilde{A}$ (A — алгебра над коммутативным полем): I, 1, 1.
$\mathrm{Sp}_A x$, $\mathrm{Sp}\, x$ (x—элемент алгебры A с единицей): I, 1, 2.
$R(x, \lambda)$ (x — элемент алгебры с единицей): I, 1, 2.
$\mathrm{Sp}'_A x$, $\mathrm{Sp}' x$ (x — элемент некоторой алгебры A): I, 1, 3.
$\mathrm{X}(A)$, $\mathrm{X}(h)$ (A — коммутативная алгебра с единицей, h — морфизм коммутативных алгебр с единицей): I, 1, 5.
$\mathscr{G}_A(x)$, $\mathscr{G}(x)$ (x — элемент коммутативной алгебры с единицей): I, 1, 5.
$\mathrm{X}'(A)$, $\mathrm{X}'(h)$, $\mathrm{X}(A)$ (A — коммутативная алгебра, h — морфизм коммутативных алгебр): I, 1, 6.
$\mathscr{G}'_A(x)$, $\mathscr{G}'(x)$, $\mathscr{G}_A(x)$, $\mathscr{G}(x)$ (x — элемент коммутативной алгебры A): I, 1, 6.
$J(A)$ (A — алгебра): I, 1, 7.
$V(M)$ (M — часть некоторой алгебры): I, 1, 7.
$\mathfrak{k}(T)$ (T — часть $J(A)$): I, 1, 7.
$\widehat{A}$ (A — алгебра): I, 1, 7.
L_x, R_x (x — элемент нормированной алгебры): I, 2, 1.
$\rho(x)$ (x — элемент нормированной алгебры): I, 2, 3.
$\mathcal{O}(U; E)$, $\mathcal{O}(K; E)$, $\mathcal{O}(U)$, $\mathcal{O}(K)$ (U — открытое подмножество пространства $\mathbf{C}^n$, K — компакт в $\mathbf{C}^n$, E — комплексное банахово пространство): I, 4, 1.
$A^{(\infty)}$ (A—банахова алгебра с единицей, коммутативная): I, 4, 1.
$\Theta_{\mathbf{a}}$ ($\mathbf{a}$ — элемент из $A^{(\infty)}$): I, 4, 1.
$\tilde{f}(\mathbf{a})$ ($\mathbf{a}$ — элемент из A^n, $\tilde{f}$ — элемент из $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}; A)$): I, 4, 4.
$\tilde{f}(x)$ (x — элемент банаховой, не обязательно коммутативной, алгебры, f — элемент из $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$): I, 4, 1.
$\exp x$, $\log x$ (x — элемент банаховой алгебры с единицей): I, 4, 9.
$R_H(\lambda, x)$ (H — открыто-замкнутое подмножество в $\mathrm{Sp}\, x$): I, 4, 11.
$h(\mathfrak{J})$ ($\mathfrak{J}$ — идеал коммутативной банаховой алгебры): I, 5, 1.
$\mathfrak{k}(M)$ (M — часть в $\mathrm{X}(A)$, где A — коммутативная банахова алгебра): I, 5, 2.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Цифры после определяемого термина означают соответственно номер главы, параграфа и пункта (или упражнения).

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:
Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2. Издательство «Мир».

Н. Бурбаки

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Редактор *Н. И. Плужникова* Художник *А. Г. Антонова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов* Технический редактор *Л. П. Бирюкова*
Корректор *Л. Д. Панова*

Сдано в набор 13/VIII 1971 г. Подписано к печати 8/II 1972 г. Бумага № 2 $60\times90^{1}/_{16}=5{,}75$ бум. л. 11,50 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 10,51. Изд. № 1/6337. Цена 78 коп. Зак. 1236

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29

Н. БУРБАКИ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Первая часть

Книга I. Теория множеств
Книга II. Алгебра
Книга III. Общая топология
Книга IV. Функции действительного переменного
Книга V. Топологические векторные пространства
Книга VI. Интегрирование

Вторая часть

Книга (без номера). Группы и алгебры Ли
Книга (без номера). Коммутативная алгебра
Книга (без номера). Спектральная теория

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

78 коп.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

БУРБАКИ