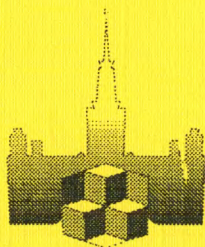


Рождественский В.В.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА
ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В МГУ



Школа имени А.Н.Колмогорова
«Самообразование»

Решение уравнений и неравенств

Теория и практика
Задачи вступительных экзаменов в МГУ

Школа имени А.Н.Колмогорова
«Самообразование»

2000

Рожественский В.В.

Решение уравнений и неравенств. Теория и практика. — М.: Школа имени А.Н.Колмогорова, «Самообразование», 2000. 96 с.

В книге описана методика решения уравнений и неравенств, называемая эквивалентными преобразованиями. Акцентируются те положения теории, недостаточное знание которых приводит к ошибкам в решении задач. Описаны приемы, позволяющие существенно сократить время решения, что крайне важно на вступительных экзаменах в ВУЗы. Приведены примеры уравнений, неравенств и систем, предлагавшихся на экзаменах в МГУ с 1977 года.

Для учителей и учащихся, готовящихся к вступительным экзаменам.

© Рожественский В. В. — 1999 г.

© Коровин И. Н. — оформление, 2000 г.

Содержание

Предисловие	5
Глава 1. Теория и примеры	7
1. Введение	7
2. Основные определения	7
3. Числа и обозначения чисел	8
4. Функции	9
5. Суперпозиции функций	10
6. Понятие монотонности числовой функции	10
7. Основные утверждения об эквивалентных переходах	12
8. Некоторые приемы, упрощающие исходную задачу	12
9. Тождества	16
10. Основные утверждения об эквивалентных переходах в результате использования тождеств	17
11. Элементарные функции	17
12. Основные определения обратных функций	18
13. Простейшие задачи	19
14. Основные типы "стандартных" задач	23
15. Обсуждение примеров решений некоторых задач	32
16. Основные рекомендации по решению уравнений и неравенств	36
17. "Нестандартные" методы решений	38
18. Примеры экзаменационных задач на "нестандартные" методы	41
19. "Стандартные" задачи, допускающие "нестандартное" решение	42
20. "Нестандартные" задачи	47
21. Некоторые наблюдения	48
Глава 2. Задачи вступительных экзаменов	51
1. Механико-математический факультет	51
2. Факультет ВМиК	56
3. Физический факультет	59
4. Химический факультет	63
5. Биологический факультет	66
6. Факультет почвоведения	70
7. Геологический факультет (отделение геофизики)	73
8. Географический факультет	77

9. Экономический факультет . (отделение планирования и кибернетики)	80
10. Факультет психологии	84
11. Институт стран Азии и Африки	89
12. Социологический факультет	90
Библиография	91

Предисловие

Многочисленные пособия для поступающих в вузы содержат обычно разбор основных тем экзаменационных задач, указывают на типичные ошибки, дают многочисленные примеры правильных решений. Однако, источники идей решения либо считаются известными из школьных курсов математики, либо излагаются очень кратко, либо (даже в лучших книгах) недостаточно акцентируются. В результате использования в экзаменационной подготовке одной или нескольких специализированных книг читатель обнаруживает (обычно уже на экзаменах), что степень их полезности оказалась ниже ожидаемой, т. к. даже разобрав большое количество задач и прочтя сопроводительный текст, он все-таки не уловил, как связаны идеи их решений (а, значит, “новую” задачу он может и не решить или довести до ответа с такими погрешностями, что ее за решенную не зачтут).

Далее мы будем обсуждать только один раздел подготовки — вопросы решения уравнений и неравенств.

В результате многолетнего опыта преподавания математики в старших классах школ, а также приема экзаменов по математике (в частности, в МГУ), автор пришел к выводу, что обучение решению уравнений и неравенств по методике, которая будет изложена ниже, позволяет качественно повысить уровень подготовленности учащихся, если только делать это достаточно долго и систематически. Наиболее тяжелым препятствием на этом пути обычно является преодоление уже сложившейся у учащихся системы стереотипов, полученных из средней школы, когда границы применимости того или иного знания неоправданно расширяются.

В предисловиях к пособиям для поступающих в вузы обычно указывается, что программа экзаменов не содержит никаких неизвестных из школьного курса вопросов, — требуется только владеть соответствующими знаниями и уметь творчески их применять. Автору хотелось бы показать, что в разделе “Уравнения и неравенства” (при правильном подходе к обучению) для творчества на экзаменах почти не остается места, т. к. все задачи решаются в некотором смысле одинаково (по единому алгоритму), а значит их решения можно записать достаточно быстро.

В среде преподавателей-профессионалов изложенная ниже методика носит название *эквивалентных преобразований*. Сразу следует отметить, что эта методика гораздо труднее для усвоения, нежели применяемая в школах методика “ОДЗ — следствия — проверка”. Возможно, по этой причине учащиеся гораздо лучше решают уравнения, чем неравенства, где решения по последней методике просто невозможны.

Данное пособие предназначено прежде всего тем преподавателям, кто хотел бы усовершенствовать свои знания по теме “Уравнения и неравенства”, а также упорным и целеустремленным учащимся.

Теория и примеры

1. Введение

Прежде чем начать выполнять какое-нибудь задание, Вы должны точно представлять, что от Вас хотят. В случае решения уравнений или неравенств Вам необходимо получить и записать ответ. Однако ответ типа "Решением уравнения

$$\sqrt{x} = 1 - x$$

являются те значения x , при которых $\sqrt{x} = 1 - x$ ", очевидно, не удовлетворяет каким-то требованиям к записи ответа. Кроме того, в случае выполнения письменной работы, от Вас требуется подробно показать, как был получен ответ. Процесс решения задачи обычно оформляется в виде цепочки уравнений (неравенств, систем, совокупностей), каждое из которых получается из предыдущего при помощи каких-то преобразований. При этом учащиеся обычно плохо представляют, какое отношение имеет каждое из полученных ими в результате тех или иных преобразований уравнение (неравенство) к данному в условии заданию. Например, распространенным заблуждением является такое: "Увидел знак радикала (квадратного корня) — возводи в квадрат, а потом проверь ОДЗ".

Дальнейшее изложение имеет целью пояснение ситуаций, складывающихся в процессе решения, выделяет то главное, за чем необходимо следить, чтобы решение задачи было верным во всех деталях.

2. Основные определения

1. Уравнением (неравенством) называется пара функций, между которыми стоит знак равенства (неравенства). (В частности, одна из функций или обе могут быть постоянными, т. е. принимать при любых значениях аргумента одно и то же значение. При этом имя аргумента в явном виде в записи постоянной функции, как правило, отсутствует.)

Областью определения левой части уравнения (или неравенства) является пересечение областей определения всех функций, входящих в левую часть (обозначим ее D_L). Аналогично D_P — область определения правой части. Естественно, решение задачи следует искать на области определения задачи

$$D_s = D_L \cap D_P.$$

2. *Решением уравнения (неравенства)* называется число, или обозначение числа, или арифметическое выражение, в которое входят числа или обозначения чисел, при подстановке которого вместо имени переменной и выполнения всех предписываемых определением функций действий получается справедливое числовое равенство (неравенство).

3. *Решить уравнение (неравенство)* — значит указать множество всех его решений в виде точек и (или) промежутков числовой оси или их объединения. При этом для записи точек (или границ промежутков) используются числа, или обозначения чисел, или арифметические выражения (если результатом какой-нибудь операции служит число, то операцию следует выполнить). Если множество решений не содержит ни одной точки, то это следует доказать.

4. *Системой уравнений, неравенств, систем, совокупностей* называется некоторое их количество (не менее двух), объединенное в записи фигурной скобкой. Решение системы — это пересечение решений всех ее составляющих.

5. *Совокупностью уравнений, неравенств, систем, совокупностей* называется некоторое их количество, объединенное квадратной скобкой. Решение совокупности — это объединение решений ее составляющих.

Уравнения, неравенства, системы, совокупности для сокращения записей будем обозначать $E_1, E_2, \dots$.

6. Запись

$$\begin{array}{c} E_1 \\ \Downarrow \\ E_2 \end{array} \quad \text{или} \quad E_1 \Rightarrow E_2$$

обозначает переход от E_1 к следствию E_2 , если известно, что множество решений E_1 включено в множество решений E_2 .

7. Запись

$$\begin{array}{c} E_1 \\ \Updownarrow \\ E_2 \end{array} \quad \text{или} \quad E_1 \Longleftrightarrow E_2$$

означает эквивалентный (равносильный) переход от E_1 к E_2 , если известно, что множества решений E_1 и E_2 совпадают.

3. Числа и обозначения чисел

Числа подразделяются на классы.

$\mathbb{N}$ — натуральные числа (1, 2, 3, ...).

$\mathbb{Z}$ — целые числа (... , -2, -1, 0, 1, 2, ...).

$\mathbb{Q}$ — рациональные числа (например, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$).

$\mathbb{R}$ — действительные числа (конечные или бесконечные десятичные дроби; записать бесконечную непериодическую дробь в виде набора цифр невозможно).

Имеют место включения:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Правила переводов $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Q} \leftrightarrow \mathbb{R}$ хорошо известны.

Заметим, что при записи иррациональных чисел приходится иметь дело не с их цифрами, а с обозначениями этих чисел. Наиболее часто встречаются обозначения в виде буквы (π , e) либо в виде результата применения к имеющемуся числу какой-либо из известных функций ($\sqrt{2}$, $\sin 1$, $\log_3 \frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$). В случае нескольких обозначений одного и того же числа предпочтение отдается более простому, а значение функций при некоторых значениях аргумента знать обязательно (например, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$).

Путаница между записями чисел в виде набора цифр со знаком и обозначениями чисел часто приводит к ошибкам. Так, например, признаком отрицательного числа служит знак минус перед набором цифр, но в обозначении отрицательного числа этот знак часто отсутствует. Точно так же присутствие знака минус перед обозначением числа не означает, что мы имеем дело с отрицательным числом.

4. Функции

Пусть заданы два множества X и Y произвольной природы и правило (или закон), по которому некоторым элементам множества X ставятся в соответствие элементы множества Y (каждому — один). Тогда говорят, что на X задана функция f со значениями в Y . Множество всех тех элементов $x \in X$, для которых закон определен (правило действует), называется областью определения функции f и обозначается D_f ($D_f \subset X$). Множество всех тех элементов из Y , которые соответствуют элементам из D_f по правилу f , называется множеством значений функции f и обозначается E_f ($E_f \subset Y$). Если элементу x из D_f поставлен в соответствие элемент y из E_f , то пишут $y = f(x)$.

В качестве примера рассмотрим X — множество всех людей, живущих на Земле, Y — множество всех цветов или оттенков цветов, имеющих название в русском языке, а правило сформулируем так: человеку ставится в соответствие название цвета его глаз. Здесь D_f — это множество людей, для которых цвет глаз не вызывает сомнений, а E_f — множество названий имеющихся цветов глаз.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество пар (x, y) , где $x \in D_f$ и $y = f(x)$:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in D_f \text{ и } y = f(x)\}.$$

Пусть теперь мы хотим построить функцию g на E_f со значениями в D_f так, чтобы элементу y из E_f соответствовал тот самый элемент x из D_f , которому элемент y был поставлен в соответствие по правилу f .

Здесь возникает затруднение.

Цело в том, что таких элементов может оказаться более одного. В подобной ситуации в множестве D_f выделяется часть E_g ($E_g \subset D_f$), чтобы

на этой части функция f осуществляла бы взаимнооднозначное соответствие между E_g и E_f . Тогда, если $x \in E_g$ и $f(x) = y$, то $g(y) = x$ и функция g построена. Она называется обратной для f ($D_g = E_f$).

Таким образом для $x \in E_g$ имеем $g(f(x)) \equiv x$ или $f(g(y)) \equiv y$ для $y \in D_g = E_f$.

Обратную для f функцию g в общем случае обозначают f^{-1} .

Когда $X = Y = \mathbb{R}$, говорят о числовой функции. В этом случае множество пар чисел $(x, y) \in \Gamma_f$ отождествляют с точками декартовой плоскости.

Поскольку, если $a \in E_g$ и $(a, b) \in \Gamma_f$, то $(b, a) \in \Gamma_{f^{-1}}$, эти графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

5. Суперпозиции функций

Суперпозицией функций f и g называется функция

$$y(x) = f(g(x)) \quad (y(x) = (f \circ g)(x)).$$

Областью определения суперпозиции является множество

$$D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f \cap E_g),$$

то есть та часть множества D_g , которая попадает в D_f при действии функции g .

6. Понятие монотонности числовой функции

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей на множестве M* ($M \subset D_f$) (*неубывающей, убывающей, невозрастающей*), если для любых точек $x_1, x_2 \in M$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$, соответственно).

Ясно, что возрастающие или убывающие на множестве M функции в различных точках x_1 и x_2 принимают различные значения.

Обозначим f, f_1, f_2 возрастающие на рассматриваемом множестве M функции ($M \subset D_f$), g, g_1, g_2 — соответственно, убывающие функции.

Имеют место утверждения:

1°. Уравнения

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0, \quad f(x) = g(x)$$

имеют на множестве M не более одного решения x_0 .

2°. Имеют место эквивалентности:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0, \\ x \in M \end{array} \right. & \iff \left\{ \begin{array}{l} x < x_0, \\ x \in M; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0, \\ x \in M \end{array} \right. & \iff \left\{ \begin{array}{l} x > x_0, \\ x \in M. \end{array} \right. \\ \text{б)} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0, \\ x \in M \end{array} \right. & \iff \left\{ \begin{array}{l} x > x_0, \\ x \in M; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} g(x) > 0, \\ x \in M \end{array} \right. & \iff \left\{ \begin{array}{l} x < x_0, \\ x \in M. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Для нестрогих неравенств имеют место аналогичные эквивалентности.

Замечание 1. Если множество M совпадает с областью определения функции, то записывать $x \in D_f$ в левой части эквивалентного перехода, естественно, не следует, но в правой это делать обязательно.

Пример 1. $\sqrt{x} + x \leq 12 \iff \begin{cases} x \leq 9, \\ x \geq 0. \end{cases}$

Поскольку в задачах, как правило, мы имеем дело с результатами арифметических операций между функциями и с суперпозициями функций, то надо иметь в виду следующие утверждения, вытекающие очевидным образом из известных свойств числовых неравенств.

а1. $f_1 + c = f_2; \quad g_1 + c = g_2$ (здесь c — константа).

а2. $f_1 \cdot c = f_2; \quad g_1 \cdot c = g_2$ ($c > 0$).

а3. $-f = g; \quad -g = f$.

а4. $f > 0 \implies \frac{1}{f} = g; \quad f < 0 \implies \frac{1}{f} = g; \quad g > 0 \implies \frac{1}{g} = f;$

$g < 0 \implies \frac{1}{g} = f.$

а5. $f_1 + f_2 = f; \quad g_1 + g_2 = g$ (следствия: $f_1 - g = f_2; \quad g_1 - f = g_2$).

а6. $\begin{cases} f_1 \geq 0, \\ f_2 \geq 0, \end{cases} \implies f_1 \cdot f_2 = f; \quad \begin{cases} g_1 \geq 0, \\ g_2 \geq 0, \end{cases} \implies g_1 \cdot g_2 = g.$

Следствия:

$$\begin{cases} f_1 \geq 0, \\ g > 0, \end{cases} \implies \frac{f_1}{g} = f_2; \quad \begin{cases} f_1 \geq 0, \\ g < 0, \end{cases} \implies \frac{f_1}{g} = f_2;$$

$$\begin{cases} f \leq 0, \\ g_1 > 0, \end{cases} \implies \frac{f}{g_1} = g_2; \quad \begin{cases} f \leq 0, \\ g_1 < 0, \end{cases} \implies \frac{f}{g_1} = g_2;$$

$$\begin{cases} g_1 \geq 0, \\ f > 0, \end{cases} \implies \frac{g_1}{f} = g_2; \quad \begin{cases} g_1 \geq 0, \\ f < 0, \end{cases} \implies \frac{g_1}{f} = g_2;$$

$$\begin{cases} g \leq 0, \\ f_1 > 0, \end{cases} \implies \frac{g}{f_1} = f_2; \quad \begin{cases} g \leq 0, \\ f_1 < 0, \end{cases} \implies \frac{g}{f_1} = f_2.$$

б1. $f_1(f_2) = f; \quad g_1(g_2) = g$; (суперпозиция двух возрастающих или двух убывающих функций возрастает).

б2. $f(g_1) = g_2; \quad g_1(f) = g_2$; (суперпозиция возрастающей и убывающей функций — в любом порядке — убывает).

Замечание 2. В тех случаях, когда мы имеем дело с разностью или отношением возрастающих (убывающих) функций, результат операции может быть каким угодно. Однако в некоторых ситуациях задачу можно привести к типу 1° или 2°.

Пример 2. а) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} > 1 \iff \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} > 1 \iff \begin{cases} x < 1, \\ x \geq 0; \end{cases}$

б) $3^x - 2^x = 1 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = \frac{1}{2^x} \iff x = 1.$

7. Основные утверждения об эквивалентных переходах

1°. Если $f(x)$ возрастает на D_f , то

$$f(g(x)) < f(h(x)) \iff \begin{cases} g(x) < h(x), \\ g(x), h(x) \in D_f. \end{cases}$$

(приведенная здесь формальная запись $g(x), h(x) \in D_f$ при записи решения задачи обычно представляется какими-то неравенствами).

2°. Если $f(x)$ убывает на D_f , то

$$f(g(x)) < f(h(x)) \iff \begin{cases} g(x) > h(x), \\ g(x), h(x) \in D_f. \end{cases}$$

3°. Если $f(x)$ возрастает или убывает на D_f , то

$$f(g(x)) = f(h(x)) \iff \begin{cases} g(x) = h(x), \\ g(x) \in D_f \text{ (или } h(x) \in D_f). \end{cases}$$

Доказательства очевидны.

Важность этих утверждений состоит в том, что мы можем упростить задачу, перейдя от сравнения значений функций к сравнению значений их аргументов. Правда, при этом возникают дополнительные ограничения на аргументы ($g, h \in D_f$).

8. Некоторые приемы, упрощающие исходную задачу

8.1. Произведение функций. Пусть $\vee$ обозначает любой знак неравенства или равенство (в случае неравенств $\wedge$ обозначает противоположный знак). Упрощающими преобразованиями задачи

$$f(x)g(x) \vee 0$$

являются следующие эквивалентности:

$$\text{П1. } f(x) \cdot g(x) = 0 \iff \begin{cases} \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D_g, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ x \in D_f. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{П2. } f(x) \cdot g(x) \geq 0 \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{П3. } f(x) \cdot g(x) \leq 0 \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \\ f(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Все неравенства можно заменить на строгие.

Замечание 3. Если в П2 или в П3 функции $f(x)$ и $g(x)$ являются многочленами, то для решения неравенств следует применить *метод интервалов*. В случае произвольных функций $f(x)$ и $g(x)$ этот метод хотя и возможен, но требует дополнительных затрат времени на изучение поведения функций вблизи их нулей и на интервалах между нулями.

Замечание 4. Используя результаты утверждений 1° и 2° из п.6, можно в ряде случаев получить существенное упрощение задачи, заменив разность значений возрастающей (убывающей) функции разностью значений ее аргументов (или наоборот).

Например,

$$\frac{\lg(x^2 - 1) - \lg x}{|x - 2| - |2x - 3|} > 0 \iff \begin{cases} \frac{x^2 - 1 - x}{(x - 2)^2 - (2x - 3)^2} > 0, \\ x > 1, \end{cases}$$

и задача приведена к виду, позволяющему применить метод интервалов, более экономный по сравнению с эквивалентностями П2 - П3.

8.2. Поиск решений на множестве. Еще одним из способов упрощения задачи является представление множества M , на котором заведомо находятся все решения (например, $M = \mathbb{R}$) в виде объединения подмножеств, на каждом из которых задача эквивалентна более легкой, т. е., если в исходной задаче $\Phi_1(x) \vee \Phi_2(x)$ все решения принадлежат M и $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$, то

$$\Phi_1(x) \vee \Phi_2(x) \iff \begin{cases} \Phi_1(x) \vee \Phi_2(x), \\ x \in M_1, \\ \Phi_1(x) \vee \Phi_2(x), \\ x \in M_2, \\ \dots \\ \Phi_1(x) \vee \Phi_2(x), \\ x \in M_n. \end{cases}$$

Этот прием часто дает хорошие результаты.

Например,

$$\log_{9x^2}(6+2x-x^2) \leq \frac{1}{2} \iff \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} x < -\frac{1}{3}, \\ 0 < 6+2x-x^2 \leq -3x, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} < x < 0, \\ 6+2x-x^2 \geq -3x, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{3}, \\ 6+2x-x^2 \geq 3x, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} < x, \\ 0 < 6+2x-x^2 \leq 3x. \end{array} \right. \end{cases}$$

Отметим один важнейший случай представления множества M , содержащего все решения задачи, в виде объединения подмножеств.

Если удастся, используя особенности входящих в задачу функций, разбить M на такие части, что решение задачи на одной из этих частей даст возможность сразу найти решения на остальных, то можно считать, что "дело сделано".

Например, если все входящие в задачу функции четные, то, решив ее на множестве $x \geq 0$, можно закончить работу, дописав в ответ симметричное множество из области $x \leq 0$.

8.3. Использование ограниченности функций. Примеры:

$$a) \sin x + \sin \sqrt{2}x = 2 \iff \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin \sqrt{2}x = 1; \end{cases}$$

$$b) 2^{|x|} = 1 - x^2 \iff \begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ 1 - x^2 = 1. \end{cases}$$

8.4. Замена функции на переменную. Пример:

$$\sin x + \cos x = \sin x \cos x \iff \sin x + \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}.$$

Замена $\sin x + \cos x = y \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ приводит к системе

$$\begin{cases} y^2 - 2y - 1 = 0, \\ -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \end{cases} \iff y = 1 - \sqrt{2}.$$

Обратная замена дает

$$\sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$$

(известный тип тригонометрического уравнения).

8.5. Использование возрастания (убывания) левой и правой частей неравенства на $[a, b]$ для доказательства $f(x) > g(x)$. Основная схема: пусть $g(x_1) = f(a)$ ($x_1 = g^{-1}[f(a)]$) тогда на (a, x_1) будет

$$\begin{cases} g(x) < g(x_1), \\ f(x) > f(a) = g(x_1), \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad f(x) > g(x).$$

Далее пусть

$$x_2 = g^{-1}(f(\tilde{x}_1)),$$

где $\tilde{x}_1 \in (a, x_1)$, $\dots$, $x_n = g^{-1}(f(\tilde{x}_{n-1}))$, и если $x_n > b$, то исходное неравенство доказано.

Пример 3. (МГУ, Мехмат, 79.)
$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1 + \log_2(2+x)}{x}.$$

Решение. Умножив левую и правую части на x и вычтя единицу, получим эквивалентную совокупность

$$\begin{cases} \begin{cases} x > 0, \\ 2 - \frac{3}{2x+1} > \log_2(x+2), \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ 2 - \frac{3}{2x+1} < \log_2(x+2). \end{cases} \end{cases}$$

Обозначим

$$f(x) = 2 - \frac{3}{2x+1} \quad \text{и} \quad g(x) = \log_2(x+2)$$

(предлагаем читателю нарисовать графики).

Рассмотрим вторую систему совокупности

$$\begin{cases} x < 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

На интервале $(-\frac{1}{2}; 0)$ будет $f(x) < 0$ и $g(x) > 0$, т. е. все точки этого интервала являются решениями неравенства $f(x) < g(x)$.

На интервале $(-2; -\frac{1}{2})$ решений нет, т. к. $f(x) > 2$ и $g(x) < 2$.

Теперь рассмотрим первую систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

(заметим, что обе функции при $x > 0$ возрастают).

При $x \geq 2$ будет $g(x) \geq 2$ и $f(x) < 2$, и решений здесь нет.

При $0 < x < 1$ имеем $f(x) < 1$ и $g(x) > 1$, и здесь решений тоже нет.

Остался случай $1 \leq x < 2$. На этом полуинтервале $g(x) \geq \log_2 3$ и $f(x) < \frac{7}{5} = f(2)$.

Поскольку $2^3 < 3^2$, то $\log_2 3 > \frac{3}{2} > \frac{7}{5}$, и на этом множестве решений тоже нет.

Ответ. $(-\frac{1}{2}; 0)$. □

9. Тожества

Чтобы привести задачу к сравнению двух значений функции или к сравнению произведения с нулем, приходится применять различные тождественные преобразования.

Тождество $f(x) \equiv g(x)$ назовем абсолютным, если $D_f = D_g$ и при всех значениях x из D_f левая и правая части численно равны.

Тождество $f(x) \equiv g(x)$ назовем относительным, если $D_f \subset D_g$ и при всех значениях x из области определения этого тождества (D_f) левая и правая части численно равны.

Приведем примеры некоторых тождеств.

Абсолютные	Относительные
$(f \pm g)^2 \equiv f^2 + g^2 \pm 2fg$	$\frac{f^2 - g^2}{f - g} \equiv f + g$
$f^2 - g^2 \equiv (f - g)(f + g)$	$f - f \equiv 0$
	$\frac{f}{f} \equiv 1$
$\sqrt{x^2} \equiv x $	$(\sqrt{x})^2 \equiv x$
$a^f a^g \equiv a^{f+g}$	$\sqrt{f} \sqrt{g} \equiv \sqrt{fg}$
	$\sqrt{fg} \equiv \sqrt{ f } \sqrt{ g }$
$\log_a a^f \equiv f$	$a^{\log_a f} \equiv f$
$3 \log_a f \equiv \log_a f^3$	$2 \log_a f \equiv \log_a f^2$
$\frac{1}{2} \log_a f \equiv \log_a \sqrt{f}$	$f^{\frac{1}{3}} \equiv \sqrt[3]{f}$
$\cos 3x \equiv 4 \cos^3 x - 3 \cos x$	$\sin(\arcsin x) \equiv x$
$\operatorname{ctg} x \equiv \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$	$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \equiv \operatorname{tg} x$
$(\sin x \pm \cos x)^2 \equiv 1 \pm 2 \sin x \cos x$	$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \equiv \sin x$
$\sin^4 x + \cos^4 x \equiv 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$	$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \equiv \cos x$
	$\arccos x + \arcsin x \equiv \frac{\pi}{2}$

Здесь a — константа, a f и g — функции.

10. Основные утверждения об эквивалентных переходах в результате использования тождеств

1. Если $f(x) \equiv g(x)$ абсолютно, то $\Phi(f(x)) \vee 0 \iff \Phi(g(x)) \vee 0$.
2. Если $f(x) \equiv g(x)$ — относительное тождество и $D_f \subset D_g$, то

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi(f(x)) \vee 0 &\iff \begin{cases} \Phi(g(x)) \vee 0, \\ x \in D_f; \end{cases} \\ \text{b) } \Phi(g(x)) \vee 0 &\iff \begin{cases} \Phi(f(x)) \vee 0, \\ \begin{cases} \Phi(g(x)) \vee 0, \\ x \in D_g \setminus D_f. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Это означает, что если применена замена $f \rightarrow g$, расширяющая область определения, то следует позаботиться об исключении возможных посторонних решений проверкой $x \in D_f$.

В случае обратной замены возможна потеря решений за счет сужения области определения и об исключенных из D_g точках следует позаботиться особо.

11. Элементарные функции

1. $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) — степенная функция. Здесь $D_f = \mathbb{R}$; функция возрастает на $\mathbb{R}$ при нечетном n ; при четном n функция возрастает при $x \geq 0$ и убывает при $x \leq 0$. При четном n функция четная, а при нечетном n — нечетная.

2. $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Здесь $x \geq 0$ при четном n и $x \in \mathbb{R}$ при нечетном n ; функция возрастает на D_f .

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ — обратно пропорциональная зависимость. Здесь $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и функция убывает как при $x > 0$, так и при $x < 0$, но на D_f убывающей не является.

4. $f(x) = a^x$ — показательная функция. Здесь $D_f = \mathbb{R}$, при $a > 1$ функция возрастает, при $0 < a < 1$ убывает, при $a = 1$ функция постоянна ($f(x) = 1$) при всех x .

Следует отметить, что отрицательные числа в качестве основания степени a^x не годятся. Например,

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2, \quad \text{но} \quad (-8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^2} = 2.$$

Вообще следует знать, что функция

$$f(x) = (u(x))^{v(x)}$$

не является ни показательной, ни степенной. Ее область определения такова:

$$D_f = \{x \mid u(x) > 0 \text{ или } (u(x) = 0 \text{ и } v(x) > 0)\}.$$

5. $f(x) = \log_a x$ — логарифмическая функция. Здесь $D_f = \{x \mid x > 0\}$ и функция возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

6. $f(x) = \sin x$ — 2π -периодическая функция, возрастающая на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и обладающая симметрией $\sin x = \sin(\pi - x)$ (к тому же нечетная).

7. $f(x) = \cos x$ — 2π -периодическая функция, убывающая на $[0; \pi]$ и четная.

8. $f(x) = \operatorname{tg} x$. Здесь $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и функция π -периодическая, возрастающая на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ (к тому же нечетная).

9. $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Здесь $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и функция π -периодическая, убывающая на $(0; \pi)$ (и нечетная).

10. $f(x) = |x|$ — четная функция, возрастающая при $x \geq 0$.

12. Основные определения обратных функций

Функция	Определение обратной функции
$y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$x = \sqrt[n]{y}$ а) $\sqrt[n]{y} \geq 0$, если $n = 2k$, ($k \in \mathbb{N}$) б) $(\sqrt[n]{y})^n = y$ <i>Из б) следует, что при $n = 2k$ будет $y \geq 0$.</i>
$y = a^x$	$x = \log_a y$ $a^{\log_a y} = y$. <i>Отсюда следует, что $y > 0$.</i>
$y = \sin x$	$x = \arcsin y$ а) $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$ б) $\sin(\arcsin y) = y$. <i>Из б) следует, что $-1 \leq y \leq 1$.</i>
$y = \cos x$	$x = \arccos y$ а) $0 \leq \arccos y \leq \pi$ б) $\cos(\arccos y) = y$. <i>Из б) следует, что $-1 \leq y \leq 1$.</i>

13. Простейшие задачи

Если $f(x)$ — одна из элементарных функций, то задачи

ПП1. $f(x) \vee f(a)$ и

ПП2. $f(x) \vee c$ (где c — константа)

называются простейшими.

Решение первой из них для каждой элементарной функции будет подробно рассмотрено ниже, а вторая задача либо сводится к первой, либо не имеет решений, либо имеет очевидные решения.

Сведение задачи ПП2 к задаче ПП1 возможно в том случае, когда $c \in E_f$. Используя равенство $c = f(f^{-1}(c))$, мы получим задачу типа ПП1.

Рассмотрим теперь подробно, как записываются решения простейших задач для каждой из элементарных функций.

Уравнения	Неравенства
<i>Степенная функция $f(x) = x^n$</i>	
(а) $x^n = a^n, n$ — четное $\Leftrightarrow x = \pm a$	(а) $x^n > a^n, n$ — четное $\Leftrightarrow \begin{cases} x > a , \\ x < - a ; \end{cases}$ $x^n < a^n, n$ — четное $\Leftrightarrow - a < x < a$
$x^n = a^n, n$ — нечетное $\Leftrightarrow x = a$	$x^n > a^n, n$ — нечетное $\Leftrightarrow x > a$ $x^n < a^n, n$ — нечетное $\Leftrightarrow x < a$
(б) $x^n = c$ Если $c \in E_{x^n}$, то для приведения задачи к типу ПП.1 используется обозначение $c = (\sqrt[n]{c})^n$, в противном случае решений нет.	(б) $x^n > c$ При четном n в случае $c < 0$ решением будет все множество действительных чисел, а в случае $c \geq 0$ получаем $\begin{cases} x > \sqrt[n]{c}, \\ x < -\sqrt[n]{c} \end{cases} \quad (-\infty; -\sqrt[n]{c}) \cup (\sqrt[n]{c}; \infty).$

При нечетном n $x > \sqrt[n]{c}$.

$$x^n < c.$$

При четном n в случае $c \leq 0$ решений нет, а в случае $c > 0$ будет

$$\begin{cases} x < \sqrt[n]{c}, \\ x > -\sqrt[n]{c} \end{cases} \quad (-\sqrt[n]{c}; \sqrt[n]{c})$$

При нечетном n $x < \sqrt[n]{c}$.

Нестрогие неравенства разбираются аналогично.

Показательная функция $f(x) = a^x$

(а) $a^x = a^b$ $\Leftrightarrow x = b$, если $a \neq 1$ и x — любое число, если $a = 1$.	(а) $a^x > a^b$ Здесь при $a > 1$ будет $x > b$, а при $a < 1$ получим $x < b$. Неравенство $a^x < a^b$ разбирается аналогично.
(б) $a^x = b$ Если b входит в E_{a^+}, то для записи ответа используется обозначение $\log_a b$.	(б) $a^x > b$ Здесь при $b \leq 0$ решением будет любое число, а при $b > 0$ неравенство сводится к типу (а) в силу записи $b = a^{\log_a b}$. $a^x < b$ Это неравенство не имеет решений при $b \leq 0$, а при $b > 0$ сводится к типу (а).

Логарифмы

(а) $\log_a x = \log_a b$ $\Leftrightarrow x = b$	(а) $\log_a x > \log_a b$ Здесь при $a > 1$ будет $x > b$, а при $a < 1$ получаем систему $\begin{cases} x < b, \\ x > 0. \end{cases}$
(б) $\log_a x = b$ $\Leftrightarrow x = a^b$, т. к. имеет место равенство $b = \log_a a^b$.	(б) $\log_a x > b$ Задача сводится к предыдущей заменой $b = \log_a a^b$.

(a1) $\sin x = \sin a$ Учитывая, что синусы углов равны в двух случаях: (1) когда углы отличаются на $2\pi n$, (2) когда углы x и a дают симметричные относительно оси OY точки тригонометрического круга, то есть $\frac{x+a}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, получаем совокупность $\begin{cases} x = a + 2\pi n, \\ x = \pi - a + 2\pi n. \end{cases}$	(a) $\sin x > \sin a$ В отличие от всего предыдущего, здесь проще свести задачу (a) к типу (б) заменой $b = \sin a$.
(б1) $\sin x = a$ Эта задача не имеет решений при $a > 1$, в противном случае она сводится к типу (a1) заменой $a = \sin(\arcsin a)$. Итак, $\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n. \end{cases}$ (Запись $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ нам не кажется всегда удачной, т. к. если требуется дальнейшая работа с полученными значениями x, то все равно приходится рассматривать случаи четного и нечетного n.)	(б) $\sin x > b$ При $b \geq 1$ решений нет. При $b < -1$ решением является любое число. наконец, при $-1 \leq b < 1$ нужно использовать 1) возрастание функции $y = \sin x$ на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, и тогда заменив $b = \sin(\arcsin b)$, получаем $\arcsin b < x \leq \frac{\pi}{2}$; 2) симметрию функции относительно $x = \frac{\pi}{2}$ $\arcsin b < x < \pi - \arcsin b$; 3) 2π-периодичность функции: $\arcsin b + 2\pi n < x < \pi - \arcsin b + 2\pi n$.
(a2) $\cos x = \cos a$ Косинусы двух углов равны только в двух случаях: (1) когда углы отличаются на $2\pi n$; (2) когда углы x и a дают симметричные относительно оси OX точки тригонометрического круга. Итак, $\begin{cases} x = a + 2\pi n, \\ x = -a + 2\pi n. \end{cases}$ (б2) $\cos x = a$ При $a \leq 1$ задача сводится к типу (a2) заменой $a = \cos(\arccos a)$, а при $a > 1$ решений не имеет.	Как убедился читатель, решение задачи $\sin x > \sin a$ в общем виде (например, $\sin x > \sin 10$) — долгий и трудоемкий процесс. По этой причине задачи подобного вида встречаются на экзаменах крайне редко и только в специализированных учебных заведениях. Задачи типа (б) в чистом виде (например, $\sin x > \frac{1}{2}$) встречаются чаще, т.к. их решение намного проще и допускает понятную интерпретацию на тригонометрическом круге, а также на графике $y = \sin x$.

(a3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ Тангенсы двух углов ($\operatorname{tg} a$, естественно, определен) равны только в случае, когда углы отличаются на πn. Итак, $x = a + \pi n$. <i>Замечание.</i> В задаче $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$ ситуация несколько иная. Здесь получается система $\begin{cases} f(x) = g(x) + \pi k, \\ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \end{cases}$ (63) $\operatorname{tg} x = a$ Этот случай легко сводится к предыдущему заменой $a = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)$.	
---	--

(a4) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$ $\Leftrightarrow x = a + \pi k$ (64) $\operatorname{ctg} x = a$ $\Leftrightarrow x = \operatorname{arccctg} a + \pi k$ <i>Замечание.</i> $\operatorname{ctg}(f(x)) = \operatorname{ctg}(g(x))$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + \pi k, \\ f(x) \neq \pi k. \end{cases}$	
--	--

Модуль

(a) $f(x) = r(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = r(x), \\ f(x) = -r(x). \end{cases}$	(a) $f(x) < r(x)$ $\Leftrightarrow f^2(x) < r^2(x)$ $\Leftrightarrow (f(x) - r(x))(f(x) + r(x)) < 0.$ $f(x) > r(x)$ $\Leftrightarrow f^2(x) > r^2(x)$ $\Leftrightarrow (f(x) - r(x))(f(x) + r(x)) > 0.$
--	---

$(6) f(x) = r(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} r(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = r(x), \\ f(x) = -r(x). \end{cases} \end{cases}$	$(6) f(x) < r(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < r(x), \\ f(x) > -r(x). \end{cases}$ $ f(x) > r(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > r(x), \\ f(x) < -r(x). \end{cases}$ Замечание. Сравните традиционный подход раскрытия модуля $ f(x) > r(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) > r(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > r(x), \end{cases} \end{cases}$ с изложенным выше в задаче $ x^3 - x + 1 > x + 1.$
--	---

14. Основные типы “стандартных” задач

14.1. Неравенство дробей. Задачу

$$\frac{F_1}{G_1} \vee \frac{F_2}{G_2}$$

следует привести к виду

$$\frac{F_1 G_2 - G_1 F_2}{G_1 G_2} \vee 0.$$

Имеет место эквивалентность

$$\frac{F}{G} \vee 0 \Leftrightarrow FG \vee 0,$$

если $\vee$ обозначает строгое неравенство. Если же неравенство $\vee$ нестрогое, то

$$\frac{F}{G} \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} FG \vee 0, \\ G \neq 0. \end{cases}$$

14.2. Иррациональные уравнения. Основная эквивалентность:

$$\sqrt{f} = g \Leftrightarrow \begin{cases} g \geq 0, \\ f = g^2. \end{cases} \quad (1)$$

Замечание 5. Из второй строчки системы видно, что ее решения обязательно удовлетворяют условию $f \geq 0$.

Имеют место следующие эквивалентности:

$$\sqrt{f} = \sqrt{g} + c \Leftrightarrow f = g + c^2 + 2c\sqrt{g}, \quad (2)$$

в предположении, что $c > 0$, и задача сводится к (1).

$$\sqrt{f} + \sqrt{g} = c \iff f + g + 2\sqrt{f}\sqrt{g} = c^2 \iff \begin{cases} 2\sqrt{fg} = c^2 - f - g, \\ f \geq 0, \\ g \geq 0, \\ c \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

и далее действуем согласно (1).

$$\sqrt{f} + \sqrt{g} = \sqrt{h} \iff \begin{cases} f + g + 2\sqrt{fg} = h, \\ f \geq 0, \\ g \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

и т. д.

Замечание 6. Если задачу (1) – (4) можно записать в виде

$$F = c,$$

где F — возрастающая или убывающая функция, то, угадав одно решение, можно не заботиться о поиске других — их нет.

Пример 4. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

Поскольку левая часть возрастает и число 2 — решение, можно писать ответ. Аналогично можно, например, решить задачу

$$\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4.$$

Пример 5. $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 1$.

Перепишем уравнение в эквивалентном виде $\frac{5}{\sqrt{x} + \sqrt{x-5}} = 1$, и заметив, что левая часть убывает, и число 9 — корень, записываем его в ответ.

14.3. Иррациональные неравенства.

$$(a) \quad \sqrt{f} < g \iff \begin{cases} g \geq 0, \\ f < g^2, \\ f \geq 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$(6) \quad \sqrt{f} > g \iff \begin{cases} g < 0, \\ f \geq 0, \\ f > g^2. \end{cases}$$

Эквивалентность в задачах с двумя или тремя знаками квадратного корня:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{f} - \sqrt{g} > c \quad (c > 0) & \sqrt{f} - \sqrt{g} < c & (6) \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \\ f > g + c^2 + 2c\sqrt{g}; & \begin{cases} f < g + c^2 + 2c\sqrt{g}, \\ f \geq 0. \end{cases} & \end{array}$$

$$\sqrt{f} + \sqrt{g} \vee c \iff \begin{cases} f + g + 2\sqrt{fg} \vee c^2, \\ f \geq 0, \\ g \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{f} + \sqrt{g} > \sqrt{h} & & \sqrt{f} + \sqrt{g} < \sqrt{h} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{cases} f + g + 2\sqrt{fg} > h, \\ f \geq 0, \\ g \geq 0, \\ h \geq 0. \end{cases} & & \begin{cases} f + g + 2\sqrt{fg} < h, \\ f \geq 0, \\ g \geq 0. \end{cases} \end{array} \quad (8)$$

14.4. Показательная функция. Задача

$$a(u^2)^f + b(uv)^f + c(v^2)^f \vee 0$$

после деления на $(v^2)^f$ и замены $\left(\frac{u}{v}\right)^f = y > 0$ сводятся к задаче

$$\begin{cases} ay^2 + by + c \vee 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Обратная замена приводит к простейшим показательным задачам.

Пример 6. $4^{-\frac{1}{x}} - 6^{-\frac{1}{x}} < 9^{-\frac{1}{x}}$.

Замена $-\frac{1}{x} = t \neq 0$ приводит к

$$9^t + 6^t - 4^t > 0 \iff \left(\left(\frac{3}{2}\right)^t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 > 0.$$

Замена $\left(\frac{3}{2}\right)^t = y > 0$ приводит к системе

$$\begin{cases} y^2 + y - 1 > 1, \\ y > 0 \end{cases} \iff y > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Обратная замена дает

$$\left(\frac{3}{2}\right)^t > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \iff t > \log_{\frac{3}{2}} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

откуда $-\frac{1}{x} > c$, где

$$c = \log_{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Далее

$$\frac{1}{x} + c < 0 \iff \frac{cx + 1}{x} < 0 \iff \left(x + \frac{1}{c}\right)x > 0,$$

поскольку c обозначает отрицательное число.

$$\text{Ответ. } (-\infty; 0) \cup \left(-\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}}; +\infty \right).$$

14.5. Логарифмические задачи. Основные используемые эквивалентности:

$$1. \log_a f = \log_a g \iff \begin{cases} f = g, \\ f > 0; \end{cases}$$

$$2. \log_a f > \log_a g \iff \begin{cases} f > g, \\ g > 0 \end{cases} \quad \text{при } a > 1;$$

$$\log_a f > \log_a g \iff \begin{cases} f < g, \\ f > 0 \end{cases} \quad \text{при } a < 1;$$

$$3. \Phi(\log_a f + \log_a g) \vee 0 \iff \begin{cases} \Phi(\log_a (fg)) \vee 0, \\ f > 0; \end{cases}$$

$$\Phi(\log_a f - \log_a g) \vee 0 \iff \begin{cases} \Phi\left(\log_a \frac{f}{g}\right) \vee 0, \\ f > 0; \end{cases}$$

$$4. \log_g f > c \iff \begin{cases} g > 1, \\ f > g^c, \\ 0 < g < 1, \\ 0 < f < g^c \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{шесть неравенств} \\ 2+4 \end{array} \right);$$

$$5. \log_g f < c \iff \begin{cases} g > 1, \\ 0 < f < g^c, \\ 0 < g < 1, \\ f > g^c \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{шесть неравенств} \\ 3+3 \end{array} \right);$$

В случае, когда f и g — многочлены, экономнее воспользоваться эквивалентностью

$$\log_g f \vee c \iff \begin{cases} f > 0, \\ g > 0, \\ (g-1)(f-g^c) \vee 0, \end{cases}$$

и для третьего неравенства применить метод интервалов (если исходное неравенство нестрогое, то в систему следует добавить $g \neq 1$).

14.6. Тригонометрия. Отметим методы решения или упрощения следующих часто встречающихся типов уравнений:

$$1. a \cos 2x + b \cos x + c = 0 \quad (\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \cos x = y \in [-1, 1]);$$

$$a \cos 2x + b \sin x + c = 0 \quad (\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \sin x = y \in [-1, 1]);$$

2. $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \iff$
 $\iff a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = d(1 + \operatorname{tg}^2 x)$, если $a \neq d$.
 В случае $a = d$ имеем $\cos x(b \sin x + (c - a) \cos x) = 0$.

3. $a \sin x + b \cos x = c$. *Первый способ:*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iff$$

$$\iff \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. *Второй способ:*

$$a^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = c,$$

и мы имеем задачу типа (2).

4. Использование абсолютных тождеств

$$\sin^4 x + \cos^4 x \equiv 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \equiv \frac{1}{2} (\cos^2 2x + 1).$$

5. Использование абсолютных тождеств

$$(\sin x \pm \cos x)^2 \equiv 1 \pm 2 \sin x \cos x \equiv 1 \pm \sin 2x.$$

6. Использование формул тройного угла

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Полезно запомнить

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.$$

7. Использование ограниченности $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 7. $\operatorname{ctg} x - 2 \sin 2x = 1$.

$$\iff (\operatorname{ctg} x - 1)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 4 \sin x \cos x \iff$$

$$\iff (\operatorname{ctg} x - 1)(1 + \operatorname{ctg}^2 x) = 4 \operatorname{ctg} x.$$

Замена $\operatorname{ctg} x = y$ дает $(y - 1)(1 + y^2) = 4y$. Угадываем $y = -1$. Итак,

$$(y + 1)(y^2 - 2y - 1) = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = -1, \\ \operatorname{ctg} x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \operatorname{arccotg}(1 \pm \sqrt{2}) + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arccotg}(1 \pm \sqrt{2}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Другой путь:

$$\begin{aligned}\frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = 2 \sin 2x &\iff \cos x - \sin x = 2 \sin 2x \sin x \iff \\ &\iff \cos x - \sin x = \cos x - \cos 3x \iff \\ &\iff \cos 3x = \sin x \iff \cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \iff \\ &\iff 3x = \pm \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 2\pi k \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k. \end{cases}\end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. $\frac{3 - \cos 6x}{4} = \sin^4 x + \cos^4 x.$

$$\begin{aligned}\iff 3 - (4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x) &= 4 - 2(1 - \cos^2 2x) \iff \\ \iff 4 \cos^3 2x + 2 \cos^2 2x - 3 \cos 2x - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Замена $\cos 2x = y \in [-1, 1]$ приводит к

$$4y^3 + 2y^2 - 3y - 1 = 0 \iff (y + 1)(4y^2 - 2y - 1) = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} + \pi k. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$.

Другой путь:

$$\begin{aligned}3 - \cos 6x = 2(1 + \cos^2 2x) &\iff 3 - \cos 6x = 2 + 1 + \cos 4x \iff \\ \iff \cos 6x + \cos 4x = 0 &\iff \cos 5x \cos x = 0 \iff \cos 5x = 0 \iff \\ &\iff x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k.\end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9. $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x.$

$$\begin{aligned}\iff 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 4 \sin^3 x - 3 \sin x &= \cos 2x \iff \\ \iff 4(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x) - 3(\cos x + \sin x) &= \\ = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) &\iff \begin{cases} \cos x + \sin x = 0, \\ 1 - 4 \sin x \cos x = \cos x - \sin x \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ 1 + 2(\cos x - \sin x)^2 - 2 = \cos x - \sin x \end{cases} &\iff\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ \cos x - \sin x = 1, \\ \cos x - \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, 2\pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Замечание 7. Уравнение $\cos x - \sin x = 1$ можно решать так:

1. ясно, что $\cos x \geq 0$ и $\sin x \leq 0$;

2. если $1 > \cos x > 0$ и $-1 < \sin x < 0$, то

$$\begin{cases} \cos x > \cos^2 x, \\ -\sin x > \sin^2 x, \end{cases}$$

и равенство $\cos x - \sin x = 1$ невозможно;

$$3. \text{ осталось } \begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin x = 0, \\ \cos x = 0, \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

Пример 10. $\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$.

Из ограниченности косинуса следует, что все три косинуса в уравнении по модулю равны 1, но поскольку

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{и} \quad \cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1,$$

то, следовательно,

$$\cos x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 4x = 1.$$

Ответ. $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 11. $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Первый способ.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \pi k.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Второй способ.

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x \geq 0, \\ 1 + \sin 2x = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \\ \cos x + \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

Третий способ.

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right). \end{aligned}$$

Замена $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$ приводит к

$$\frac{\sqrt{3}+3}{2}y^2 - 2y + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ y = 2 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Обратная замена дает

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = 2 \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) + 2\pi k. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2 \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

Четвертый способ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi k. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

14.7. Системы алгебраических уравнений. Основные эквивалентности:

1. $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ y = h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = h(x), \\ f(x, h(x)) = 0; \end{cases}$
2. $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) + cf(x, y) = 0 \end{cases}$

Линейные системы решаются по схеме (1) последовательным исключением неизвестных.

Нелинейные системы двух следующих типов допускают упрощения:

Первый тип. Если все функции, входящие в уравнения систем, симметричны по x и y , следует попробовать замену

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$$

Стоит выучить равенства

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= u^2 - 2v, \\ x^3 + y^3 &= u^3 - 3uv, \\ x^4 + y^4 &= (u^2 - 2v)^2 - 2v^2. \end{aligned}$$

Пример 12.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

После замены получаем

$$\begin{cases} u = 5, \\ u^3 - 3uv = 35 \end{cases} \iff \begin{cases} u = 5, \\ v = 6. \end{cases}$$

Значит

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 5 - x, \\ x(5 - x) = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ. (2; 3), (3; 2).

Второй тип. Функция $f(x, y)$ называется *однородной порядка α* , если $f(kx, ky) = k^\alpha f(x, y)$.

Многочлен от двух переменных однороден, если сумма показателей у переменных x и y во всех произведениях $x^m y^n$ одна и та же, например

$$2x^5 + 3x^4y + 6x^2y^3 - y^5.$$

Положив $k = \frac{1}{y}$, получаем

$$f\left(\frac{1}{y} \cdot x, \frac{1}{y} \cdot y\right) = \frac{1}{y^\alpha} \cdot f(x, y).$$

Отсюда следует, что уравнение $f(x, y) = 0$ эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0, \\ f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = 0, \end{cases}$$

причем, если $y = 0$ не входит в область определения D_f , то мы имеем эквивалентное уравнение $f(z, 1) = 0$ ($z = \frac{x}{y}$).

Итак, в случае однородной функции число переменных можно уменьшить.

Пример 13. $\begin{cases} x^2 - xy = 2, \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 2, \\ 3(x^2 - xy) = 2(x^2 - 2xy + 3y^2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x^2 = 2, \\ x^2 = 3, \\ \begin{cases} x^2 - xy = 2, \\ 3\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y}\right) = 2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} + 3\right). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Последнее равенство после замены $z = \frac{x}{y}$ можно представить в виде $(z - 2)(z + 3) = 0$. Итак, имеем:

$$\begin{cases} x^2 - xy = 2, \\ \begin{cases} x = 2y, \\ x = -3y \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3y, \\ y^2 = \frac{1}{6} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-3}{\sqrt{6}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{6}}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ. $(2; 1), (-2; -1); \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Приведенный выше прием решения обычно называют *методом исключения константы*.

15. Обсуждение примеров решений некоторых задач

(Все пояснения относятся к результату преобразования)

1. $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x - 1)^2 = \log_2 \sqrt{(x - 4)^2}$.

⇕

Тождественная замена $\log a - \log b$ на $\log \frac{a}{b}$ хотя и расширяет область определения в общем случае, но в данной задаче этого не происходит т. к. $(x - 1)^2$ не может быть отрицательным. Тождество $\sqrt{a^2} \equiv |a|$ является абсолютным.

$$\log_2 \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \log_2 |x - 4|$$

⇕

Расширение области определения обусловлено появлением в ней точки $x = 4$, которая, однако, решением очередного уравнения очевидно не является.

Тождество $\frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} \equiv \frac{x + 1}{x - 1}$ — абсолютное.

$$\frac{x + 1}{x - 1} = |x - 4|$$

⇕

Область определения задачи расширится добавлением точки $x = 1$, которая, очевидно, решением следующего уравнения не является.

$$x + 1 = (x - 1)|x - 4|$$

⇕

Точка $x = 4$ не учитывается, т. к. была рассмотрена выше.

$$\left[\begin{cases} x > 4, \\ x + 1 = (x - 1)(x - 4), \\ x < 4, \\ x + 1 = (x - 1)(4 - x) \end{cases} \right.$$

⇕

Далее дело техники.

...

Ответ. $3 + \sqrt{6}$.

$$2. 5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x$$

⇕

Тождества $a^{2x} \equiv (a^x)^2$ и $a^2 - b^2 \equiv (a - b)(a + b)$ абсолютные.

$$(5^x - 3^x)(5^x + 3^x) = 2(5^x + 3^x)$$

⇕

Функция $5^x + 3^x$ не обращается в нуль. Исчезновение $5^x + 3^x$ не приводит к расширению области определения задачи ($x \in \mathbb{R}$).

$$5^x - 3^x = 2$$

⇕

Тождества $\frac{5^x}{3^x} \equiv \left(\frac{5}{3}\right)^x$ и $\frac{1}{3^x} \equiv 3^{-x}$ абсолютные.

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x - 2 \cdot 3^{-x} = 1$$

⇕

Поскольку левая часть является возрастающей функцией, как разность возрастающей и убывающей, то, угадав решение, можно писать ответ.

$$x = 1$$

Ответ. 1.

$$3. \sqrt{\sin x} = \cos x.$$

⇕

Стандартный переход для снятия знака квадратного корня.

$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \sin x = \cos^2 x \end{cases}$$

⇕

Тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ абсолютное и переход $a = b \iff a - b = 0$ эквивалентный.

$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

⇕

$$\sin x = y, \quad y^2 + y - 1 = 0, \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \left(\sin x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\sin x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

⇕

Поскольку $\sin x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ при любом x .

$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

⇕

$x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) — это уравнение следует понимать как совокупность бесконечного числа уравнений.

Ответ. $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$4. \sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$$

⇕

$$\sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1 - \sqrt{x}$$

 $\Leftrightarrow$

Дописывать неравенство $1 - \sqrt{x} \geq 0$ здесь не обязательно, поскольку оно следует из наличия $\sqrt{1-x}$ в левой части.

$$x - \sqrt{1-x} = (1 - \sqrt{x})^2$$

 $\Leftrightarrow$

Сокращение на x не расширит область определения задачи.

$$2\sqrt{x} = \sqrt{1-x} + 1$$

 $\Leftrightarrow$

Стандартный эквивалентный переход.

$$4x = 2 - x + 2\sqrt{1-x}$$

 $\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{1-x} = 5x - 2$$

 $\Leftrightarrow$

Стандартный эквивалентный переход.

$$\begin{cases} 4(1-x) = (5x-2)^2, \\ 5x-2 \geq 0 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$25x^2 - 16x = 0$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{16}{25}, \end{cases} \\ 5x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$x = \frac{16}{25}$$

Ответ. $\frac{16}{25}$.

$$5. \log_x \log_3(3^x - 9) < 1$$

 $\Leftrightarrow$

Область определения задачи сохранена.

$$\log_x \log_3(3^x - 9) < \log_x x$$

⇕

Переход
 $\log_x f(x) < \log_x g(x) \iff 0 < f(x) < g(x)$
 эквивалентный при $x > 1$, хотя утверждать, что
 функция $\log_x f(x)$ возрастает при $x > 1$ нельзя.

То, что в нашей задаче область определения
 входит в множество $x > 1$, следует из наличия
 $\log_3(3^x - 9)$.

$$\begin{cases} 0 < \log_3(3^x - 9), \\ \log_3(3^x - 9) < x \end{cases}$$

⇕

Тождество $x \equiv \log_3 3^x$ абсолютное.

$$\begin{cases} \log_3 1 < \log_3(3^x - 9), \\ \log_3(3^x - 9) < \log_3 3^x \end{cases}$$

⇕

$$1 < 3^x - 9 \text{ (и отсюда уже следует второе неравенство системы)}$$

⇕

$$3^{\log_3 10} = 10 < 3^x$$

⇕

Поскольку 3^x — возрастающая функция.

$$\log_3 10 < x$$

Ответ. $(\log_3 10; +\infty)$.

16. Основные рекомендации по решению уравнений и неравенств

1. Следует внимательно ознакомиться с условием задачи. Не делайте того, что в задаче не является необходимым. Так, например, задачи о поиске корней уравнения или о нахождении их количества — разные задачи.

2. Не торопитесь выписывать и, особенно, “раскрывать” область определения задачи — часто это бывает совершенно излишним. Распространенной и досадной ошибкой является пропуск отдельных точек области определения задачи. Обычно это связано с применением неверных утверждений типа “квадратный корень из числа всегда положителен”, или “нуль, умноженный на что угодно, дает нуль”.

Некоторые типы задач, в которых решения не надо проверять на ОДЗ:

$$a) \sqrt{f} = g \iff \begin{cases} g \geq 0, \\ f = g^2; \end{cases}$$

$$b) \log_c f = g \iff f = c^g;$$

$$c) \log_c f > g \iff f > c^g \quad (c > 1);$$

$$d) \log_c f < g \iff f < c^g \quad (0 < c < 1);$$

$$e) \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = c \iff 2\sqrt{(x-a)(b-x)} = c^2 - (b-a);$$

$$f) \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} > c \iff 2\sqrt{(x-a)(b-x)} > c^2 - (b-a), \quad c^2 > b-a;$$

$$g) \log_d(x-a) + \log_d(b-x) = c \iff (x-a)(b-x) = d^c;$$

$$h) \log_d(x-a) - \log_d(b-x) = c \iff \frac{x-a}{b-x} = d^c;$$

$$i) \log_d(x-a) + \log_d(b-x) > c \iff (x-a)(b-x) > d^c \quad (d > 1);$$

$$j) \log_d(x-a) - \log_d(b-x) > c \iff \frac{x-a}{b-x} > d^c \quad (d > 1).$$

3. Не путайте записи числа в виде цифр со знаком или рациональной дроби с записью, содержащей буквы, символы типа $\log$, $\sqrt{}$, $\arcsin$ и т. п.

4. Применяя тождественные замены, следите за изменением области определения.

5. Строго соблюдайте правила эквивалентных переходов при применении преобразований в стандартных ситуациях.

6. На каждом этапе решения задачи следует точно представлять, с каким типом задачи мы имеем дело. Ошибка, допущенная на любом этапе, сложном или простом, — это ошибка. “Арифметическая” ошибка может свести на нет все проявленные знания и смекалку.

7. Не бойтесь применять “нестандартные” приемы, облегчающие запись решения задачи.

8. Если Вы чувствуете, что задача “нестандартная”, исследуйте поведение входящих в нее функций. В задачах, содержащих элементы логики, не приступайте к решению до тех пор, пока ясно не представите, что от Вас требуется. Не путайте необходимые и достаточные условия.

17. “Нестандартные” методы решений

Исследование тех или иных особенностей поведения функций часто является единственным методом решения так называемых “нестандартных” задач. В таких задачах обычно существенную роль играет один из следующих четырех моментов:

- 1) область определения (ОДЗ);
- 2) монотонность;
- 3) симметрии (в частности, четность);
- 4) ограниченность

Пример 14. (МГУ, экономический.) Решите неравенство

$$\frac{\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} \geq 0.$$

Решение. Область определения левой части неравенства:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 11 > 0, \\ 2 - 5x - 3x^2 > 0 \end{cases} \iff -2 < x < 2 - \sqrt{15}.$$

Теперь заметим, что квадратный трехчлен

$$y = x^2 - 4x - 11$$

убывает при $x < 2 - \sqrt{15}$, и, значит, на интервале $(-2; 2 - \sqrt{15})$ имеем неравенство

$$x^2 - 4x - 11 < (-2)^2 - 4(-2) - 11 = 1.$$

Отсюда

$$\log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3 < 0,$$

и, поскольку

$$\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 = \log_5((x - 2)^2 + 7)^2 > 0,$$

то неравенство выполняется для всех значений x из интервала

$$(-2; 2 - \sqrt{15}).$$

Ответ. $(-2; 2 - \sqrt{15})$. □

Пример 15. (МГУ, механико-математический.) Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 - 4a \sin(\cos x) + 4a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Поскольку функции $y = x^2$ и $y = \sin(\cos x)$ — четные, то единственным решением уравнения может быть только число 0. Подставив $x = 0$ в уравнение, мы получаем равенство

$$-4a \sin 1 + 4a^2 = 0,$$

которое верно только при $a = 0$ или $a = \sin 1$. Таким образом доказано, что при всех остальных значениях параметра a уравнение имеет более одного решения или не имеет решений.

Посмотрим теперь, нет ли других решений (кроме нулевого) при этих значениях параметра a .

Подставив $a = 0$, получаем уравнение

$$x^2 = 0$$

с единственным решением.

Подставив $a = \sin 1$, получаем

$$x^2 = 4 \sin 1 (\sin(\cos x) - \sin 1).$$

Заметим, что $x^2 \geq 0$, $\sin 1 > 0$. Поскольку функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и $\cos x, 1 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то верное при всех x неравенство $\cos x \leq 1$ влечет неравенство $\sin(\cos x) - \sin 1 \leq 0$.

Таким образом мы видим, что

$$4 \sin 1 (\sin(\cos x) - \sin 1) \leq 0,$$

и, следовательно, равенство

$$x^2 = 4 \sin 1 (\sin(\cos x) - \sin 1)$$

невозможно при $x \neq 0$, т. е. $a = \sin 1$ следует записать в ответ.

Ответ. 0; $\sin 1$. □

Эта задача трудна тем, что при ее решении используются идеи трех из четырех указанных пунктов, и, кроме того, требует от абитуриента хорошего понимания понятий “необходимое” и “достаточное” условие.

Отметим еще один нестандартный прием, применение которого в ряде случаев позволяет решать задачу. Обычно его называют разложением на множители “по параметру”.

Пример 16. Решить неравенство

$$ax^3 - (a+1)^2x^2 + (2a^2 + a + 2)x - 2a > 0.$$

Решение. В этой задаче угадать корень кубического уравнения практически невозможно.

Однако, если рассматривать левую часть как квадратный трехчлен от переменной a с коэффициентами, зависящими от x , то дело представляется уже в другом свете.

Перепишав неравенство в виде

$$(2x - x^2)a^2 - (-x^3 + 2x^2 - x + 2)a + 2x - x^2 > 0,$$

можно легко заметить, что во все коэффициенты входит множитель $(x - 2)$.

Далее дело техники. □

Пример 17. Решить уравнение

$$x^2 - a = \sqrt{x + a}.$$

Решение. Действуя по стандартной схеме, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x^2 - a \geq 0, \\ (x^2 - a)^2 = x + a \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - a \geq 0, \\ x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0. \end{cases}$$

Угадать корни левой части невозможно, поэтому попробуем рассматривать ее как квадратный трехчлен по переменной a .

$$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0.$$

Вычисляем корни:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x)}}{2} = \\ &= \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{2} = \\ &= \frac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2}, \end{aligned}$$

т. е. $a_1 = x^2 + x + 1$, $a_2 = x^2 - x$, откуда следует, что

$$(a - (x^2 + x + 1))(a - (x^2 - x)) = 0.$$

Итак, исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 - a \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - x - a = 0, \\ x^2 + x + 1 - a = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Корни первого уравнения совокупности

$$x^2 - x - a = 0$$

имеют вид

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Поскольку эти корни удовлетворяют условию $x^2 - a = x$, то неравенство $x^2 - a \geq 0$ эквивалентно неравенству $x \geq 0$.

Очевидно, что больший корень удовлетворяет этому неравенству при всех $a \geq -\frac{1}{4}$, а меньший — при $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$.

Корни второго уравнения имеют вид

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}.$$

Перепишав уравнение в виде

$$x^2 - a = -x - 1,$$

мы видим, что неравенство $x^2 - a \geq 0$ эквивалентно неравенству $x + 1 \leq 0$, т. е.

$$\frac{1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2} \leq 0.$$

Ясно, что больший корень ни при каких значениях a этому неравенству не удовлетворяет, а меньший удовлетворяет при $a \geq 1$.

Подведем итоги и запишем

Ответ. При $a < -\frac{1}{4}$ исходное уравнение решений не имеет.

При $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$ существуют корни вида $\frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

При $0 < a < 1$ — один корень $\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$.

При $a \geq 1$ — корни таковы: $\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ и $\frac{-1 - \sqrt{4a-3}}{2}$.

18. Примеры экзаменационных задач на “нестандартные” методы

1. $\sin^4 x + \sin^4 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

2. $\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$.

3. $\cos(\pi\sqrt{x-4}) \cos(\pi\sqrt{x}) = 1$.

4. $\sqrt{\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\operatorname{ctg} 3x + \sin^2 x - \frac{1}{4}} = \sin \frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $\sqrt{\cos^2 2x + \left| \sin \left(2x - \frac{3}{2}\pi \right) \right|} + \frac{1}{4} = \cos \left(\frac{20}{12}\pi \right)$.

6. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$$

имеет решение.

7. Решить уравнение

$$\frac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy} = \log_{\frac{1}{3}}(9y^2 - 18y + 10) + 2.$$

8. Найти все значения a , при которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos \frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

9. Найти все значения a , при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$$

имеет единственное решение.

10. При каком значении параметра p уравнение

$$x^2 - 4|x| + 2 = p$$

имеет ровно два корня?

11. Найти все значения a , при которых неравенство

$$x^2 + 4x + 6a|x+2| + 9a^2 \leq 0$$

имеет не более одного решения.

12. Найти все значения a и b , при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

13. При каких значениях параметра a система

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1; \end{cases} \\ b) \quad & \begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad \text{имеет единственное решение?}$$

14. Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y \geq x^2 + 2a, \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

15. Найти все значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**19. “Стандартные” задачи, допускающие
“нестандартное” решение**

1. $\sqrt{12-x} = x$.
2. $\sqrt{7-x} = x - 1$.
3. $1 - \sqrt{1+5x} = x$.
4. $\sqrt{3+x} = 3 - x$.
5. $\sqrt{3x+4} = 2 - x$.
6. $x + 4 = \sqrt{-4x - 4}$.
7. $\sqrt{5x-6} + x = 4$.
8. $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$.
9. $x + \sqrt{x-1} = 3$.
10. $\sqrt{6-x} = x$.
11. $\frac{2 + \sqrt{19-2x}}{x} = 1$.
12. $6 + 4\sqrt{3-x} = 5x$.
13. $\frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1} = 1$.
14. $\frac{\sqrt{13-x^2}}{x+1} = 1$.

15. $\sqrt{37 - x^2} + 5 = x.$
16. $\sqrt{5 - x^2} = x - 1.$
17. $4 + \sqrt{26 - x^2} = x.$
18. $x^2 - x + 9 + \sqrt{x^2 - x + 9} = 12.$
19. $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42.$
20. $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x.$
21. $\sqrt{5x - 6} + x = 4.$
22. $\sqrt{x + 3} = 9 - x.$
23. $x - 5 = \sqrt{x + 1}.$
24. $x - 21 = \sqrt{2x - 7}.$
25. $\sqrt{6 + x} - \sqrt{4 - x} = 2.$
26. $\sqrt{x + 14} + \sqrt{x + 7} = 7.$
27. $\sqrt{x} + \sqrt{10 - x} = 2.$
28. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 4} = 5.$
29. $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4.$
30. $\sqrt{2x + 5} = 8 - \sqrt{x - 1}.$
31. $\sqrt{3x - 5} = 3 - \sqrt{x - 2}.$
32. $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x + 3} = 1.$
33. $\sqrt{x + 4} + \sqrt{2x + 6} = 7.$
34. $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6.$
35. $2\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} = 2.$
36. $\frac{4}{\sqrt{5x + 1}} = \sqrt{5x + 1} - 3.$
37. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 3} = 2.$
38. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x} = 1.$
39. $2\sqrt{x - 1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x - 1}}.$
40. $\sqrt{x - 7} - \frac{6}{\sqrt{x - 7}} = 1.$
41. $\sqrt{11x - 2} + 3\sqrt{x} = 6.$
42. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x - 5} - \sqrt{x - 2} = 0.$

$$43. \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3} = 0.$$

$$44. \sqrt{x+10} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4x-23}.$$

$$45. \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{9-x}.$$

$$46. \sqrt{x+18} < 2-x.$$

$$47. x > \sqrt{24-5x}.$$

$$48. \sqrt{5-2x} < 6x-1.$$

$$49. x < \sqrt{2-x}.$$

$$50. x-1 < \sqrt{7-x}.$$

$$51. \sqrt{4-x} > x+2.$$

$$52. \sqrt{3x-2} \geq \sqrt{-x+4}.$$

$$53. \sqrt{11-5x} > x-1.$$

$$54. \sqrt{x-1} < 3-x.$$

$$55. \sqrt{7+x} \geq 7-2x.$$

$$56. \sqrt{x+5} > 7-x.$$

$$57. 4^x 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}.$$

$$58. 5^x - 24 = \frac{25}{5^x}.$$

$$59. 2^{2+x} - 2^{2-x} = 15.$$

$$60. 2^{x+1} 5^x = 200.$$

$$61. 3^{2x+1} + 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$$

$$62. 2^x + 11 \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 26.$$

$$63. \frac{2^{x+1} - 10}{6} = \frac{4}{2^{x-1}}.$$

$$64. 3^{x-1} 2^{2x-2} = 12^{9-x}.$$

$$65. 9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 = 0.$$

$$66. 9^x - 8 \cdot 3^{x+1} - 81 = 0.$$

$$67. 4 \cdot 16^x - 7 \cdot 4^x - 4 = 0.$$

$$68. 4 + 2^x = 2^{2x-1}.$$

$$69. 2^{2x+1} + 2^{x+2} - 16 = 0.$$

$$70. 4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24.$$

$$71. 3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2.$$

72. $4^{2x-3} - 3 \cdot 4^{x-2} - 1 = 0$.
73. $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.
74. $4^x + 2^{x+1} = 80$.
75. $16^{x+\frac{1}{2}} = 15 \cdot 4^x + 4$.
76. $25^{-x} + 5^{-x+1} = 50$.
77. $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.
78. $2^x = 26 + 3 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}}$.
79. $25^x + 13 \cdot 10^x - 7 \cdot 2^{2x+1} = 0$.
80. $5^{2\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}+2} = 1250$.
81. $2 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 49^{3x} + 3 = 0$.
82. $9^{x-\frac{1}{2}} 2^x + 5 \cdot 3^{x-1} = 2^{1-x}$.
83. $2^{\sin x} + 4^{\sin x} = 2$.
84. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = (2\sqrt{2})^x$.
85. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.
86. $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$.
87. $15 \cdot 2^{2-2x} + 19 \cdot 2^{-x} > 2$ (наибольшее целое).
88. $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^{x-1} - 5 \leq 0$.
89. $3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1$.
90. $3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$ (наибольшее целое).
91. $5^{2x-1} + 5^{x+1} \geq 250$.
92. $5^{2x+1} > 5^x + 4$.
93. $9 \cdot 4^{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 6^{-\frac{1}{2}} < 4 \cdot 9^{-\frac{1}{2}}$.
94. $9^x - 2 \cdot 3^x < 3$.
95. $4^{\frac{1}{2}-1} - 2^{\frac{1}{2}-2} - 3 \leq 0$.
96. $4^{x-\frac{1}{2}} + 2^{x+1} - 16 \leq 0$.
97. $5 - 16^x > 4^{x+1}$.
98. $4 \cdot 3^{2k+1} + 3^k < 1$ (наибольшее целое).
99. $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$.
100. $\log_7(2^x - 1) + \log_7(2^x - 7) = 1$.

101. $\frac{1}{6} \log_2(x-2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3x-5}$.
102. $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 1$.
103. $\log_2(x-2) + \log_2(x+1) = 2$.
104. $\lg(x-4) + \lg(x-6) = \lg 8$.
105. $2 \log_4(4-x) = 4 - \log_2(-2-x)$.
106. $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$.
107. $\log_4(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(4-x) = 0$.
108. $\lg\left(x + \frac{3}{2}\right) = \lg \frac{1}{x}$.
109. $\log_2(6-x) = 2 \log_2 x$.
110. $\log_2 x = 1 + \log_2 \sqrt{8-x}$.
111. $1 + \lg(19+x) = 2 \lg(1-x)$.
112. $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$.
113. $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$.
114. $\log_5 x - \log_x 5 = \frac{3}{2}$.
115. $1 + 2 \log_{x+2} 5 = \log_5(x+2)$.
116. $\log_{0,5}(2^x - 1) = x - 1$.
117. $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4$.
118. $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.
119. $\log_3(3^x - 8) \leq 2 - x$.
120. $\log_2(x+1) < 1 - 2 \log_4 x$.
121. $\lg(x-2) + \lg(x-5) < \lg 4$.
122. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \log_2(x-1) \geq 1$.
123. $\log_2 x < \log_{\frac{1}{2}}(4x-1) - 1$.
124. $\log_5(26 - 3^x) > 2$.
125. $\log_3(13 - 4^x) > 2$.
126. $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$.
127. $\log_5(1-x) < \log_5(x+3)$.
128. $\log_{0,5}(x+0,5) + \log_{0,5} x \geq 1$.
129. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}} 5 - \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

130. $\log_{0,2}(4-x) \geq \log_{0,2} 2 - \log_{0,2}(x-1)$.
 131. $\log_2(x-6) + \log_2(x-8) > 3$.
 132. $\log_2(x+14) + 2\log_2(x+2) < 2\log_{0,5} \frac{1}{8}$.

20. "Нестандартные" задачи

1. $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = 2 - x$.
2. $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$.
3. $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1} = 3 - 5x^2$.
4. $\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.
5. $\sqrt{3x-5} = 3 - \sqrt{x-2}$.
6. $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.
7. $\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{3x+3} = 1$.
8. $\sqrt[3]{15-x} + \sqrt{3-x} = 4$.
9. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.
10. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{10x+2} = 4$.
11. $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt{x+4} = \sqrt[3]{27-x}$.
12. $\sqrt[3]{x+8} + \sqrt{2x+9} = 5$.
13. $x < \sqrt[3]{2-x}$.
14. $\sqrt[3]{11-5x} > x-1$.
15. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 6$.
16. $2^x = 3 - x$.
17. $x2^x = 8$.
18. $5^x + 12^x = 13^x$.
19. $\sin^x 1 + \cos^x 1 = 1$.
20. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.
21. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.
22. $6^x - 3^x = 3$.
23. $2^{x^3} + 2^x < 2$.
24. $\sqrt{\log_{0,1}(4-x)} \geq \log_{0,1} 2 - \log_{0,1}(x-1)$.

Одно из различий между “стандартными” и “нестандартными” задачами заключается в том, что стандартную задачу можно решить “в общем виде”, т. е. выразить ответ через произвольно заданные параметры задачи в виде комбинации стандартных символов ($\sqrt{}$, $\log$, $\sin$ и т. п.), а в нестандартной задаче этого сделать нельзя, т. е. при произвольном изменении параметров такой задачи невозможно записать ответ (сравните уравнения: $x \cdot 2^x = 8$ и $x \cdot 2^x = 7$).

Большое количество уравнений сводится к решению квадратных.

Полезно иметь в виду, что если следствием исходного уравнения является квадратное

$$af^2 + bf + c = 0$$

относительно монотонной на рассматриваемом множестве функции $f(x)$, и удастся угадать два решения исходного уравнения, то “дело сделано”.

Пример 18. $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$.

$\Rightarrow 2x+6 - 2\sqrt{(2x+6)(x+1)} + x+1 = 4 \Rightarrow (3x+3)^2 = 4(2x+6)(x+1)$,
и, поскольку $x = -1$ и $x = 15$ — корни исходного уравнения, то можно записать их в ответ.

Пример 19. $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$.

$$\Leftrightarrow x+2 = 6x-10 + 2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x-7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12-5x = 2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x-7}.$$

Нетрудно видеть, что $x = 2$ — корень уравнения, и что после второго возведения в квадрат получается уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

у которого $a \cdot c < 0$. Следовательно, второй корень квадратного уравнения отрицателен и не удовлетворяет исходному уравнению.

21. Некоторые наблюдения

1. Весной 1998 года сотрудниками факультета психологии МГУ проводилось компьютерное тестирование одиннадцатиклассников по несколькими предметам в ста городах России.

Автор этих строк принимал участие в разработке тестовых заданий по математике.

В одном из заданий следовало дать ответ на вопрос “Какое из равенств справедливо для всех действительных чисел?”

a) $\sqrt{x^2} = |x|$; b) $(\sqrt{x})^2 = x$; c) $\sqrt{x^2} = x$; d) $\sqrt{x^2} = -x$.

Результаты превзошли худшие ожидания автора. Из 658 учащихся первый вариант ответа выбрали 466 человек, второй — 96, третий — 91 и четвертый — 5 человек.

Таким образом, из 192 учащихся, ответивших неправильно, подавляющее большинство отбросило четвертый вариант по причине наличия в нем знака “минус” в правой части равенства.

2. У автора и одного из его учеников произошел характерный диалог.

Автор: Решите уравнение $\sin x = \cos x$.

$$\sin x = \cos x$$

Ученик (пишет): $\operatorname{tg} x = 1$ $\cos x \neq 0$
 $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ $\cos(\frac{\pi}{4} + \pi k) \neq 0$

Автор: Зачем Вы тут сбоку написали $\cos x \neq 0$?

Ученик: Потому что $\cos x$ стоит в знаменателе, а на нуль делить нельзя.

Автор: Во-первых, на $\cos x$ разделили Вы сами, во-вторых, поскольку всем известно, что нуль нельзя подставлять в знаменатель, то именно по этой причине указывать на это не следует. Кстати, запретив косинусу равняться нулю, не потеряли ли Вы решения в исходной задаче?

Ученик: ??

Отсюда следует единственный вывод: ученик не понимает связи между двумя написанными уравнениями.

3. В 1995 году на одном из экзаменов по математике на механико-математическом факультете МГУ абитуриентам была предложена такая задача:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$\log_2(40 - 5x^2 + x^2 2^x) = x + 3?$$

Автор проверил 40 работ. В 39 из них было написано примерно следующее.

$$\text{ОДЗ: } 40 - 5x + x^2 2^x > 0.$$

$$40 - 5x^2 + x^2 2^x = 2^{x+3}$$

$$40 - 5x^2 + x^2 2^x - 8 \cdot 2^x = 0$$

$$5(8 - x^2) - 2^x(8 - x^2) = 0$$

$$(x^2 - 8)(2^x - 5) = 0$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = \log_2 5$$

Проверка

$$1) x = 2\sqrt{2}$$

$$40 - 5(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 2^{2\sqrt{2}} =$$

$$= 40 - 40 + 8 \cdot 2^{2\sqrt{2}} > 0$$

$$2) x = -2\sqrt{2}$$

$$40 - 5(-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2 2^{-2\sqrt{2}} =$$

$$= 40 - 40 + 8 \cdot 2^{-2\sqrt{2}} > 0$$

$$3) x = \log_2 5$$

$$40 - 5 \log_2^2 5 + \log_2^2 5 \cdot 2^{\log_2 5} =$$

$$= 40 - 5 \log_2^2 5 + 5 \log_2^2 5 = 40 > 0$$

Ответ. Три решения.

И только одна из 40 работ была оформлена так:

$$\log_2(40 - 5x^2 + x^2 2^x) = x + 3 \iff 40 - 5x^2 + x^2 2^x = 2^{x+3} \iff$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8)(2^x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2}, \\ x = 2\sqrt{2}, \\ x = \log_2 5. \end{cases}$$

Сравним числа $\log_2 5$ и $2\sqrt{2}$.

$$\log_2 5 \vee 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \vee 2^{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow 5^2 \vee 2^{4\sqrt{2}}.$$

Поскольку $4\sqrt{2} > 5$, то $2^{4\sqrt{2}} > 2^5 = 32 > 25$, т. е. числа $\log_2 5$ и $2\sqrt{2}$ различны.

Ответ. Три решения.

Таким образом, большинство абитуриентов посчитало, что число решений зависит от того, сколько из них входит в ОДЗ, не понимая, что в задачах данного типа все числа, удовлетворяющие уравнению

$$40 - 5x^2 + x^2 2^x = 2^{x+3},$$

входят в ОДЗ, т. к. решения этого уравнения — это те числа, при подстановке которых вместо буквы x получается справедливое числовое равенство, и справа стоит положительное число.

Задачи вступительных экзаменов

В данном разделе представлены задачи письменных вступительных экзаменов в Московский государственный университет. Во всех задачах, где условие специально не оговорено, следует решить уравнение, неравенство или систему. Нумерация задачи содержит номер задачи в варианте и год проведения экзамена.

1. Механико-математический факультет

$$1.77. x \leq 3 - \frac{1}{x-1}.$$

$$3.77. 3^{\frac{1}{2} + \log_3 \cos x} + 6^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2} + \log_3 \sin x}.$$

$$4.77. \begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

$$2.78. 4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3.$$

4.78. Найти все a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

имеет решение.

$$1.79. 1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x = 0.$$

$$3.79. \begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18}. \end{cases}$$

$$4.79. \frac{6}{2x+1} > \frac{1 + \log_2(2+x)}{x}.$$

$$1.80. (x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0.$$

$$2.80. \sin 2x = \sqrt{3} \sin x.$$

5.80. При каких a неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет одно решение?

$$1.81. \frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geq 0.$$

$$2.81. \begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2 \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

$$1.82. \log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0.$$

$$3.82. \sqrt{5 \sin x + \cos 2x} + 2 \cos x = 0.$$

$$1.83. \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

$$2.83. \log_2(\cos 2x + \cos \frac{x}{2}) + \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos \frac{x}{2}) = 0.$$

4.83. Найти такие a , чтобы система

$$\begin{cases} \left| 12\sqrt{\frac{\cos \pi y}{2}} - 5 \right| + \left| 12\sqrt{\frac{\cos \pi y}{2}} - 7 \right| + \left| 24\sqrt{\frac{\cos \pi y}{2}} + 13 \right| = \\ = 11 - \sqrt{\sin \frac{\pi(x-2y-1)}{3}}, \\ 2(x^2 + (y-a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-a)^2} - \frac{3}{4}. \end{cases}$$

имела решение.

$$1.84. x^2 + 3x + |x+3| = 0.$$

2.84. Среди корней уравнения

$$\frac{\cos 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \pi x} = 0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.

$$4.84. \begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

$$1.85. 6 \sin x - \frac{1}{6} = \sqrt{34 \sin x - \frac{35}{36}}.$$

$$2.85. \frac{1}{x+1} + \frac{2}{|x|-1} \geq \frac{2}{x-1}.$$

4.85. Из трех значений a ($-1, 2; -0, 67; -0, 66$) найти все те значения, при каждом из которых уравнение

$$(2^{a+4} + 15(x+a))(1 + 2 \cos(\pi(a + \frac{x}{2}))) = 0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 \leq x \leq 1$.

$$1.86. 2 \cos(\sqrt{x} + \pi) + 1 = 0.$$

$$3.86. \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}.$$

5.86. Найти все значения a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z) .

$$1.87. \cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$2.87. \log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2.$$

5.87. Найти все пары значений параметров a и b , для каждой из которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

$$1.88. \sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x.$$

$$2.88. \log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0.$$

6.88. Найти все a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{z^2}, \\ \cos x \cos y = -\frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \frac{2(x+y)}{(a-\pi)z}. \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

$$1.89. 4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x.$$

$$2.89. \frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2} \leq 0.$$

$$4.89. \begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

6.89. Найти наименьшее из значений x , для которых существуют числа y, z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

$$2.90. 2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^x |\sin x|.$$

$$3.90. \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \leq x.$$

4.90. Найти все a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

5.90. Найти все тройки чисел x, y, z , удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) + \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > > z^2 - 9z + 17.$$

$$1.91. \sqrt{4 \cos 2x - 2 \sin 2x} = 2 \cos x.$$

$$2.91. \frac{\log_3(1 - \frac{3}{2}x)}{\log_9(2x)} \geq 1.$$

5.91. Найти все пары чисел p и q , при которых неравенство

$$|x^2 + px + q| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

$$1.92. 7 \cdot \cos(x + \frac{\pi}{3}) + |\cos(x - \frac{\pi}{6})| = 1.$$

6.92. Найти все значения x , удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0$$

хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-1; 2]$.

$$1.93. \frac{\sqrt[3]{7}}{\log_{x-1} 17} \geq \frac{\log_{17}(x-1)}{\log_{291} 17}.$$

2.93. Найти все значения b , при каждом из которых уравнение

$$9^x + (b^2 + 6)3^x - b^2 + 16 = 0$$

не имеет решений.

$$3.93. \begin{cases} (\sin y - \cos x + 1) \left(\operatorname{tg}^2(x + \frac{\pi}{6}) + \operatorname{tg}^2(y + \frac{2\pi}{3}) \right) = 0, \\ (\cos x + \sin y)(2 + \sin 2y + \cos y) = 0. \end{cases}$$

$$1.94. \frac{4 \sin x - 2 \cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3} \cos x - 2} = 0.$$

$$2.94. \begin{cases} 2^x + 2^y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

$$3.94. \log_{2-5x} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leq \frac{1}{\log_6(6x^2 - 6x + 1)}.$$

6.94. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

1.95. $4 \cdot 3^{2k+1} + 3^k < 1$ (наибольшее целое).

$$2.95. \frac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3.$$

6.95. Найти все a из отрезка $[0; 2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x + y + z) - \sin a = 0, \\ (x + 1) \sin^2 \frac{a}{2} + y^2 \sqrt{x + a^2} \sqrt{z} + \sin \frac{3}{2}a = 0. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$$1.96. \frac{5}{\sin^2 x} - \frac{5\sqrt{5}}{\sin x} + 6 = 0.$$

$$2.96. \sqrt{17 \cdot 9^x - 4^x} \geq 3^x - 3 \cdot 2^x.$$

$$4.96. \begin{cases} \log_2 \sin x - \log_2 2y + |\log_2 \cos x - \log_2 2y| = -2, \\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2y^2} \leq 1. \end{cases}$$

6.96. При каких a уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$$

имеет ровно три различных решения?

$$1.97. (2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1) \sqrt{\lg x} = 0.$$

$$2.97. \left(1 - \frac{x}{2}\right) \log_{13-3 \cdot 2^x} 4 \leq 1.$$

5.97. Для каждого a решить уравнение

$$\left|x^4 + \frac{2a-1}{3} \cdot x^2 + \frac{2a^2+a+2}{12}\right| = \frac{a}{2} \cdot \left|x^2 + \frac{a}{3} - \frac{1}{6}\right| + \frac{a+1}{6}.$$

$$1.98. 3\sqrt{|x+1|-3} \geq \sqrt{x^2-2x-3}.$$

$$2.98. \log_{\frac{2x+2}{4x-1}}(10x^2+x-2) \leq 0.$$

$$3.98. 3 \cdot 2^{\cos x} + 3\sqrt{1-\sin^2 x} + 11 \cdot 2^{2 \cos x} - 34 \leq 0.$$

5.98. При каких значениях a система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2 \sin^2(\pi x) - 3 \sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2} \sin^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2 \left(1 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{4} - \frac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

2. Факультет ВМиК

$$1.77. 2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0.$$

$$3.77. \begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2}) \operatorname{tg} 5y = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases}$$

$$1.78. (x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$$

$$2.78. (1 + \operatorname{tg}^2 2x) \left(\sin \frac{21}{4}x \cos \frac{7}{4}x + \sin \frac{5}{4}x \cos \frac{\pi}{4} \right) = \\ = \sec^2 2x \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{5}{4}x - \sin \frac{7}{4}x \cos \frac{21}{4}x \right).$$

$$2.79. 5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}.$$

$$4.79. \cos\left(\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})\right) = 1 \text{ (целые корни).}$$

5.79. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a - x^2 - \cos \frac{11\pi x}{4}) \sqrt{8 - ax} = 0$$

имеет на отрезке $[-2; 3]$ нечетное число различных корней.

$$2.80. \sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0.$$

$$2.81. \frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{2}}(2+5x-x^2)}.$$

$$4.81. (1 + (a+2)^2) \log_3(2x - x^2) + (1 + (3a-1)^2) \log_{11} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \\ = \log_3(2x - x^2) + \log_{11} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

5.81. Найти все решения уравнения

$$|\sin(2x-1)| = \cos x,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leq 2\pi$.

$$3.82. \frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2.$$

$$2.83. \frac{1 + 2 \sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin x + \sin 2x}{2 \sin x \cos x - 1} = 1.$$

$$5.83. (x-3)(x+1) + 3(x-3) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2).$$

6.83. Найти все пары чисел (x, y) , удовлетворяющие условию

$$\sqrt{2-|y|}(5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = \\ = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5}{4}\pi^2.$$

$$2.84. 9 \cos 3x \cos 5x + 7 = 9 \cos 3x \cos x + 12 \cos 4x.$$

$$4.84. \sqrt{7 - \log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4.$$

5.84. Найти все решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^2(13 - y - z) + x(2y + 2z - 2yz - 26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0, \\ x^3 + x^2(17 - y - z) - x(2y + 2z + 2yz - 26) + y + z - 3yz - 2 = 0. \end{cases}$$

$$1.85. \begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x 3^y = 12. \end{cases}$$

$$3.85. 4 - \cos(2\pi(13x + 9)^2) = 5 \sin(\pi(13x + 9)^2).$$

$$4.85. \frac{2 \log_{1-3|x|}(42x^2 - 14|x| + 1)}{\log_{1-3|x|}\left(x - \frac{5}{6}\right)^2} \leq 1.$$

5.85. Найти все тройки чисел (x, y, z) , удовлетворяющие равенству

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17} + \\ & + \sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 4} = 0. \end{aligned}$$

$$1.86. \log_3(x + 2) + \log_3(x - 4) - 1 \leq 0.$$

$$5.86. \sin 3x - 2 \sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2 \cos x.$$

$$1.87. \begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = (\sqrt{x} + 1)y. \end{cases}$$

2.87. Существуют ли действительные a , при которых

$$a^2 - 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

$$3.87. \log_{(x+1)^2} 8 + 3 \log_4(x + 1) \geq 9\frac{1}{4}.$$

$$4.87. (2 + 3 \cos 2x)(\sqrt{2 \cos 2x + 3 \sin x + 3} - 2 \sin x + 1) = 0.$$

$$2.88. \cos 7x + \cos x = 2 \cos 3x(\sin 2x - 1).$$

$$4.88. 8^x \geq 6 \cdot 9^{|x-1|}.$$

5.88. Найти все a , при каждом из которых уравнение

$$\left((2x + a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2 + x) \lg a\right) \cdot \lg \left(\frac{36a - 9a^2}{35}\right) = 0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит (-1) .

$$2.89. 8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 33.$$

$$4.89. 1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3} \log |\cos x| \left(\frac{1+2\sqrt{3} |\sin x|}{8(1-2 \cos^2 x)} \right)}.$$

5.89. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a} \right) - \\ - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

$$1.90. \log_{x^2+4} 8 < 1.$$

$$3.90. 3 \cdot 64^{2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4})} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

$$4.90. \sqrt{9v^2 - 48v - 21} + \sqrt{9v^2 - 15v - 15} \leq |3v - 6|.$$

6.90. Найти все a , при которых для любого b неравенство

$$\left| \log_6 \left(\frac{x}{36} \right) + \left(\frac{10a + 3b + 31}{5} \right) x^2 - 9b^2 - 9b - 1 \right| \leq \\ \leq \log_6 \left(\frac{36}{x} \right) + \left(\frac{10a + 3b + 41}{5} \right) x^2 - (6b + 2)x + 9b^2 + 15b + 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$$1.91. \sqrt{x+4} + x - 2 = 0.$$

$$2.91. \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \sin x \right) = 1.$$

$$3.91. 49^{\log_* 5} - 7^{\log_* 5} - 2 \geq 0.$$

$$2.92. \sqrt{1 + \cos 4x} \sin x = 2 \sin \frac{\pi}{4}.$$

$$3.92. \log_2(11 - x) + \log_2(x + 1) \leq \log_2((x + 1)(x^2 + 5x - 5)).$$

6.92. Найти все a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2 - ax) - \frac{\pi}{2} < \sin(x^2 - ax) + \cos(2x^2 - 2ax + \frac{\pi}{4})$$

выполняется для всех x из отрезка $[\pi; 2\pi]$

$$1.93. \log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}+1}-\sqrt{3}}(4x - x^2 - 2) \geq 0.$$

$$2.93. \left\{ \sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2 \cos^2 x} - \sqrt{3} \sin 2x, 0 \leq x \leq \pi. \right.$$

$$3.93. |3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leq 3^x + 4x - x^2 - 7.$$

$$1.94. 12 \sin 5x = \cos 10x + 7.$$

$$2.94. \sqrt{x-3} \leq 3 - |x-6|.$$

3.94. Найти все отрицательные u , при которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{\log_3 \cos u} + \frac{1}{\log_3 \left(\frac{\cos u}{3}\right)} \geq 0.$$

$$2.95. \begin{cases} x + 3xy + y = 3 + 10\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 11. \end{cases}$$

$$4.95. \log_{\cos x} \cos^2 x \geq \log_{\cos x - \frac{1}{2}} (\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4}).$$

$$3.96. 25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0.$$

$$4.96. \arccos(3x) + \arcsin(x+1) \leq \frac{7\pi}{6}.$$

$$5.96. \begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \\ + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

$$2.97. \log_{\frac{1}{1-x^2}} 2 < \log_{2x^2} \frac{1}{2}.$$

$$3.97. 3 + |\sin x - 3 \cos x| = 3 \sin x + \cos x.$$

$$4.97. \begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^x + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$$

6.97. Найти все a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^3 + 24x^2 + 118x + 7} = 5\sqrt{7x - x^2} + \sqrt{a^2 - 11a + 18}$$

имеет единственное решение.

3. Физический факультет

$$1.77. \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

$$2.77. \begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3, \\ x > y. \end{cases}$$

$$3.77. \log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2.$$

$$1.78. 2 \sin x + 3 \sin 2x = 0.$$

$$3.78. \frac{2}{x+2} < \frac{1}{x-3}.$$

$$4.78. \log_3(3^x - 8) = 2 - x.$$

$$1.79. \cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x.$$

$$3.79. \begin{cases} 3^x 2^y = \frac{1}{9}, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

$$4.79. \sqrt{x^2 + 5x + 4} > x + 2.$$

$$1.80. \sin x \cos \frac{\pi}{8} + \cos x \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$2.80. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + x = -1, \\ \frac{x}{x+y} = -2. \end{cases}$$

$$3.80. 3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0.$$

$$4.80. 2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1.81. \sin(x - 60^\circ) + 2 \cos(x + 30^\circ) = 0.$$

2.81. Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$3.81. \frac{9}{2^{x-2}} = \frac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}.$$

$$4.81. 5^{\log_5 \frac{2}{x+2}} < 1.$$

$$1.82. \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = 0.$$

$$2.82. \begin{cases} 10x - 15a = 13 - 5ax + 2a, \\ x > 2. \end{cases}$$

$$4.82. 5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2}).$$

$$1.83. \sin 3x + \sin 5x = \sin 4x.$$

$$2.83. |5x^2 - 3| = 2.$$

$$3.83. \frac{3}{2} \log_4 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2} \log_2 x > 1.$$

$$1.84. \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{2 - \sin x} = 0.$$

$$2.84. 4 \log_{25} 5x = 5 - \log_5^2 x.$$

$$3.84. 2^{x+3} - x^3 2^x \leq 16 - 2x^3.$$

$$4.84. \begin{cases} 2|x - a| + a - 4 + x = 0, \\ 0 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$1.85. 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos 2x.$$

$$2.85. \sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x.$$

$$3.85. \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 9x < 3.$$

$$4.85. 4^x - 2a(a + 1)2^{x-1} + a^3 = 0.$$

$$1.86. \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x.$$

$$2.86. x - 1 > \frac{4x}{3-x}.$$

$$3.86. \begin{cases} 3^y = x, \\ 2 \sin x + \sin 2x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}. \end{cases}$$

$$4.86. x \log_2 x^2 + 1 = 2x + 2 \log_4 x.$$

$$1.87. \frac{1}{2x} \geq \frac{1}{1-x}.$$

$$2.87. 4^{\sin x} + 2^{5-2 \sin x} = 18.$$

$$1.88. \cos 2x + 8 \sin x = 3.$$

$$3.88. \sqrt{4-6x-x^2} = x+4.$$

5.88. Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$1.89. \sin 5x - \sin x = \sqrt{8} \cos 3x.$$

$$3.89. \log_2(x+4) + 2 \log_2 \sqrt{x} = 5.$$

5.89. Найти все значения m , при каждом из которых уравнение

$$(2x)^2 - 4x(m \cdot 3^m)^{\frac{1}{2}} + 3^{m+1} + m - 3 = 0$$

имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях m .

$$1.90. x^2 - 6|x| - 2 = 0.$$

$$3.90. \sin x \sin 5x = \cos 4x.$$

$$1.91. 8 - 7 \sin 2x = 12 \sin^2 x.$$

$$3.91. \log_{49}(x+3) - \log_7(x+2) < 0.$$

5.91. При каких a ?

$$\begin{cases} 3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0, \\ |x| < 1. \end{cases}$$

$$1.92. 8x - 1 < 4x^2.$$

$$2.92. 5 - 3 \cos 2x = 8 \sin x.$$

$$3.92. 2 \log_2 x^3 - 1 = \frac{1}{2} \log_2 x.$$

$$1.93. \frac{2x-1}{2^x-1} < 0.$$

$$2.93. \cos 5x = \cos(5+x).$$

$$3.93. \sqrt{\log_2 x} = 2 \log_2 \sqrt{x} - 1.$$

$$5.93. \frac{|x+3|+x}{x+2} > 1.$$

7.93. Уравнение

$$ax^2 + bx + 2 = 0,$$

где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Решить уравнение

$$ax^4 + bx^2 + 2 = 0.$$

$$1.94. \frac{2x-1}{\log_2 x} < 0.$$

$$2.94. 5 \cos x + 2 \sin x = 3.$$

$$3.94. 5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 26.$$

$$5.94. \log_{\frac{2}{3}}(4x) + \log_2 \left(\frac{x^2}{8} \right) = 8.$$

7.94. Найти все a , для каждого из которых система

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x .

$$1.95. \sin 7x - \sin x = \cos 4x.$$

$$2.95. 9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 = 0.$$

$$3.95. 2|x+1| = 2-x.$$

$$5.95. 4^{\log_2 x} + x^2 < 8.$$

$$7.95. 3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}.$$

$$1.96. \cos 3x - \sin \left(7x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos 5x.$$

$$2.96. \frac{x-2}{x\sqrt{6+x-x^2}} > 0.$$

$$3.96. 5^{\frac{x}{2}} - 5^{2-\frac{3x}{2}} = 24 \cdot 5^{-\frac{x}{2}}.$$

$$5.96. \begin{cases} \log_2(2x^2 - y^2) = 2, \\ 6 \log_8(-x) + \log_2 y^2 = 4. \end{cases}$$

8.96. Для каждого a найти число решений уравнения

$$a \operatorname{tg} x + \cos 2x = 1,$$

принадлежащих промежутку $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$1.97. \cos 6x + 4 \cos 2x = 0.$$

$$2.97. 7 \cdot \frac{4^{x-2}}{4^x - 3 \cdot 5^x} = 1 + 3 \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^x.$$

$$3.97. \sqrt{\log_5(x+2)} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{x+2}.$$

$$5.97. \begin{cases} y + |x + 1| = 1, \\ |y - x| = 5. \end{cases}$$

$$7.97. a - 2 < (a - 1)\sqrt{x + 1}.$$

4. Химический факультет

$$2.77. \begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2. \end{cases}$$

$$3.77. \log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2.$$

$$5.77. \begin{cases} 2 - \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 4 \cos^2 3x, \\ \cos(2x - \frac{\pi}{4}) > 0. \end{cases}$$

$$1.78. \sin 2x + \sin 6x = 3 \cos^2 2x.$$

$$3.78. \sqrt{3(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}.$$

$$5.78. \begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

$$1.79. \sin 2x = 1 + \sqrt{2} \cos x + \cos 2x.$$

$$2.79. \sqrt{x + 3} > x + 1.$$

$$5.79. \begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \cdot \sin x}{1 + 3y} \right|, \\ (6y^2 + 2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1, \\ |y| \leq 1. \end{cases}$$

$$1.80. \log_7 \frac{x+3}{21} = \log_7 \frac{2}{3x-6}.$$

$$2.80. 2 \cos^2 3x - \cos 3x = 0.$$

$$3.80. \frac{x+7}{x-2} > x - 1.$$

5.80. Найти все a , при каждом из которых число решений уравнения

$$3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$$

не превосходит числа решений уравнения

$$x + (3a - 2)^2 3^x = (8^a - 4) \log_3 (3^a - \frac{1}{2}) - 3x^3.$$

$$1.81. \frac{30x-9}{x-2} \geq 25(x+2).$$

$$2.81. 2 \cos 2x + \cos^2 \frac{x}{2} - 10 \cos(\frac{5x}{2} - x) + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \cos x$$

5.81. Найти все a , при каждом из которых неравенство

$$(a^3 + (1 - \sqrt{2})a^2 - (3 + \sqrt{2})a + 3\sqrt{2}) \cdot x^2 + 2(a^2 - 2)x + a > -\sqrt{2}$$

выполняется для любого $x > 0$.

1.82. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$.

2.82. $\log_2 \frac{x}{x-1} \leq -1$.

3.82. $(\sqrt{2} + 1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2} - 1)^{-x}$.

5.82. Найти все p , при каждом из которых уравнение

$$(x-p)^2 \cdot (p(x-p)^2 - p - 1) = -1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

1.83. $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 4 \sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$.

2.83. $(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1) \cdot \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \cdot (\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1) \leq 0$.

4.83. $\log_2(x^2 + 3) + \log_{\frac{1}{2}} 5 = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - \log_2(x + 1)$.

5.83. Найти все целые n , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = 8xy + (4n+2)x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

имеет решения. При найденных n решить систему.

1.84. $\frac{\sqrt{x - \frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \geq 0$.

5.84. Найти все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |a-2| \cdot |x+a-4| + \left(\frac{a^2 - 4a + 3}{|a-2|} - |a-2| \right) \cdot |x-2| + \\ + \frac{1}{2} \cdot |a-2| \cdot |x-a| \leq 1 \end{aligned}$$

выполняется ровно для двух различных значений x .

1.85. $4(\sin 4x - \sin 2x) = \sin x(4 \cos^2 3x + 3)$.

2.85. $7^{x-\frac{1}{2}x^2} < 7^{1-x}(\sqrt[3]{7})^{x^3} + 6$.

5.85. $\begin{cases} |x-y| - \log_2^2(|x|+y+1) + 6 = 0, \\ (x-y)^2 - 6(x-y) \log_2(|x|+y+1) + 5 \log_2^2(|x|+y+1) = 0. \end{cases}$

1.86. $\log_2(x-3) = 1 - \log_2(x-2)$.

5.86. Найти все a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

1.87. $(1 + 2 \sin x) \sin x = \sin 2x + \cos x$.

$$2.87. 4 \log_2 x + \log_2 \frac{x^2}{8(x-1)} \leq 4 - \log_2(x-1) - \log_2^2 x.$$

5.87. Найти все p , при каждом из которых множество решений неравенства

$$(p-x)^2(p+x-2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

$$1.88. \log_5(x-8)^2 = 2 + 2 \log_5(x-2).$$

$$2.88. \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}} \cos x - 1} + \sin x = 0.$$

5.88. Найти все значения a , при каждом из которых равносильны системы

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

$$1.89. \frac{3x}{x-1} > 2.$$

$$3.89. \log_2(3 \sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0.$$

$$5.89. (2x+1)(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}) + 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = 0.$$

$$1.90. 4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64.$$

$$2.90. 2 \sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{5}{4} - 2 \cos 2x.$$

$$2.91. \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} > \left(\frac{1}{4}\right)^{|x+1|}.$$

$$3.91. \begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$

$$4.91. \cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x \cos 8x.$$

$$1.92. x + \log_2(2^x - 31) = 5.$$

$$2.92. \sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}.$$

5.92. Найти все a , при каждом из которых уравнение

$$5|x-3a| + |x-a^2| + 4x = a$$

а) имеет бесконечное множество решений; б) не имеет решений.

$$1.93. \frac{4}{(x-1)^2} \geq 1.$$

$$2.93. (\log_2 x)^2 + 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0.$$

$$3.93. \cos x = 1 + \cos 2x.$$

5.93. Найти число решений уравнения

$$2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2.$$

1.94. $\log_5(x+1) + \log_5(x+5) = 1.$

2.94. $2x > |x| + 1.$

3.94. $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$

5.94.
$$\begin{cases} x^2 + 2x \sin y + 1 = 0, \\ 8|x|y(x^2 + y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{cases}$$

1.95. $\frac{3x}{x^2 + 2} \geq 1.$

2.95. $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1.$

3.95. $\cos 2x = 2(\cos x + \sin x).$

5.95.
$$\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \leq 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

1.96. $\cos 4x + \sin x \sin 3x = 0.$

2.96. $\sqrt{x+5} > 7-x.$

3.96.
$$\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$$

5.96. $|1 + \cos(\pi\sqrt{x})| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45.$

1.97. $\sqrt{3x^2 - 25x + 51} = 7 - 2x.$

2.97. $(\sqrt{2} + 1)^x + 1 < 2(\sqrt{2} - 1)^x.$

3.97. $8 \cos 2x + 16 \cos x + 7 = 0.$

5. Биологический факультет

1.77. $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4.$

4.77.
$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6} \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = \\ = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

5.77. Найти все те значения параметра S , при каждом из которых корни уравнений

$$x^2 + \frac{3x}{S} + 2S = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{12x}{S} - S = 0$$

не перемежаются, т. е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

1.78. $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}.$

$$4.78. 9\sqrt{x^2-3} + 3 < 3\sqrt{x^2-3} - 1 \cdot 28.$$

5.78. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x|x + 2a| + 1 - a = 0$$

имеет единственное решение.

$$1.79. \cos 3x = 1 - \sqrt{3} \sin 3x.$$

$$4.79. \log_{x+1}(x^2 + x - 6^2) \geq 4.$$

5.79. Найти все пары x, y , удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + 1)(1 + \cos(xy) \sin(xy)) = (\sqrt{3} + 1) \sin^2(xy) + \cos(2xy), \\ x^2 y^2 - y^2 + 1 = 0, \\ \frac{1}{x^2} + y^2 \leq 6. \end{cases}$$

$$1.80. 1 + 2 \cos 3x \cos x - \cos 2x = 0.$$

$$2.80. 2(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 \frac{x}{4} - 11 = 0.$$

$$3.80. \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$$

5.80. Найти все те решения уравнения

$$3 \sin^3 x - 3 \cos^2 x + 7 \sin x - \cos 2x + 1 = 0,$$

которые являются также решениями уравнения

$$\cos^2 x + 3 \cos x \sin 2x - 8 \sin x = 0.$$

$$1.81. 3 \log_8(x - 2) = \log_2 \sqrt{2x - 1}.$$

$$2.81. \cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi).$$

$$4.81. (2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x - \log_2(x+6)} > 1.$$

$$1.82. \log_{\frac{1}{2}}(1 + x - \sqrt{x^2 - 4}) \leq 0.$$

$$2.82. \sin^2 x + \cos^2 3x = 1.$$

$$1.83. 4 \cos^3 x + 3\sqrt{2} \sin 2x = 8 \cos x.$$

$$2.83. (x-4)^2 \log_4(x-1) - 2 \log_4(x-1)^2 = (x-4)^2 \log_{(x-1)} 4 - 2 \log_{(x-1)} 16.$$

$$3.83. 8 + 6 \cdot |3 - \sqrt{x+5}| > x.$$

5.83. Найти все значения параметра b , при каждом из которых оба неравенства

$$2b \cos 2(x - y) + 8b^2 \cos(x - y) + 8b^2(b + 1) + 5b < 0$$

$$x^2 + y^2 + 1 > 2bx + 2y + b - b^2$$

выполняются при любых x и y .

$$1.84. \frac{x}{1-x} < x - 6.$$

$$2.84. \cos 2x + 2 \cos x + 7 = 2 \sin \left(\frac{7\pi}{2} + x \right) + 4 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$3.84. \sqrt{4 + 2 \log_2 \left(1 - \frac{8x}{(2x+1)^2} \right)} = \log_2 \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right) + 2 \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$5.84. \begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin(5\pi x) - \sqrt{x(x-6)} + 13 \cdot \cos \left(\pi \left(y^2 + 2x + \frac{1}{2} \right) \right) + \\ \quad + \sin \left(\pi(2y^2 - x) \right) = 0. \end{cases}$$

$$1.85. \frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x+3)} = 3.$$

$$2.85. \{ 5 \cos 2x + 7 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 1 = 0, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}.$$

$$3.85. \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) + 6.$$

5.85. Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1?$$

1.86. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} = 0.$$

$$2.86. 3^x < 1 + 12 \cdot 3^{-x}.$$

5.86. Найти все a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$$1.87. 7 \sin \left(2x - \frac{5}{2}\pi \right) + 9 \cos x + 1 = 0.$$

$$3.87. \frac{3 \log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2 \log_{0,5} x + 1.$$

5.87. Найти все a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0, \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1.88. $8 \cos \frac{3x}{4} \cos \frac{x}{4} - 6 \cos x + 1 = 0$ (наименьший положительный корень).

$$2.88. 3 \log_{\sqrt{5}} 2 + \log_{\sqrt{5}} \left(2^{x^2-1} - \frac{1}{8} \right) < \log_{\sqrt{5}} 7.$$

$$5.88. \begin{cases} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi(2x-y-2)}{6} \right) (\sqrt{3-x^2-y^2+2x}-3) = 0 \\ 3 \cos \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi(2x-y)}{6} = \sqrt{3} \cos \frac{\pi(2x-y)}{6}. \end{cases}$$

$$1.89. \log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}}(1+x) = 0.$$

$$3.89. \sin x(3 \sin 2x \sin^3 x + 12 \sin 2x \sin x - 16 \cos x) + 2 \sin 4x = 0.$$

$$1.90. 3 \cos 2x = 4 - 11 \cos x.$$

$$2.90. 9^{2x+0,5} - 10 \cdot 27^{\frac{2}{3}x} > \frac{11}{3}.$$

5.90. Найти все значения a, b, x, y, z , при которых выполняются соотношения

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{tg}(bz) \sin^2(xy) + \cos(2xy) \leq (\cos x + \sin(ay)) |\sin(2xy)|, \\ 2 + 2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)} \cdot \cos(b(y+x)) + \cos(2b(y+x)) = 0. \end{cases}$$

$$1.91. 4\sqrt{x+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}} + 20 = 0.$$

$$2.91. \sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1.$$

5.91. Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} z \cos(x-y) + (2+xy) \sin(x+y) - z = 0, \\ z^2 + (y-1)^2 + x^2 = a + 2x, \\ (x+y+a \sin^2 z)((1-a) \ln(1-xy) + 1) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$1.92. 1 - 4 \sin^2 \left(5x - \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

$$2.92. \log_5 \left(\frac{x-9}{x-5} \right) + \log_5(x^2 - 17x + 60) = 1 + \log_5 2.$$

$$4.92. \begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171, \\ m^2 + n^2 > 252 + 14n + m^2, \\ 30m - n^2 \end{cases} \quad (\text{целочисленные пары}).$$

$$1.93. \cos 4x + 4 \cos x - 3 = 0.$$

$$2.93. \log_2(9^x + 2 \cdot 3^x - 5) = 1 + 2 \log_4(3^{x+1} - 4).$$

$$3.93. 5\sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{7x-1}{x}.$$

$$6.93. \begin{cases} y+2 = (3-x)^3, \\ (2x-y)(y+2) = 9+4y, \\ x^2+z^2 = 4x, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

$$1.94. \begin{cases} x+2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

$$3.94. \begin{cases} 3 \operatorname{tg}^2 \left(\pi x - \frac{\pi}{8} \right) = 1, \\ \frac{3}{2} < x < 3. \end{cases}$$

5.94. Найти все значения x , при которых неравенство

$$(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + (33 - 13a) > 0$$

выполняется для всех a , удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

$$1.95. 4(\log_4 x)^2 = \log_2 \frac{x^5}{16}.$$

$$2.95. |x - 1| + |2x - 3| = 2.$$

$$3.95. \begin{cases} \sin 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \\ 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

6.95. Найти все a , при которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos \frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

$$1.96. \sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0.$$

$$2.96. (x - 7)^2 - |x - 7| = 30.$$

$$3.96. 1 + \log_{\frac{1}{2}} (\log_3(4 - x)) > 0.$$

5.96. Найти все пары натуральных чисел t и s , удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 2t + 47 < 22s - 2s^2, \\ 4s \geq 7t + 14. \end{cases}$$

$$1.97. \log_3 x + \log_3(x + 1) = 1.$$

$$2.97. \sin 2x - \sin 4x = (\cos 2x + 1) \cos 3x.$$

$$3.97. \sqrt{|1 - 8x| - 2} \leq x + 1.$$

$$6.97. \begin{cases} \frac{1}{20} \left(\frac{x^2}{\sin x} \right)^2 - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sin x}} + 1 < 0, \\ \frac{(x - \frac{\pi}{3})^2}{x^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\pi}{24} \left(\frac{5\pi}{6} - x \right), \\ x^2 - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{5}{4} < 0. \end{cases}$$

6. Факультет почвоведения

$$1.77. 2\sqrt{x + 5} = x + 2.$$

$$2.77. 2 \lg \left(x + \frac{1}{2} \right) - \lg(x - 1) = \lg \left(x + \frac{5}{2} \right) + \lg 2.$$

$$3.77. |\sin x| = \sin x + 2 \cos x.$$

$$1.78. \cos x = \cos 3x + 2 \sin 2x.$$

$$2.78. \log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 \geq 0.$$

$$5.78. \sqrt{x}(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18.$$

$$1.79. 2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1.$$

$$2.79. \frac{1}{\log_3(x^2 - 7x + 12)} < \frac{1}{\log_3 20}.$$

$$3.79. \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x = (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x + 1.$$

$$5.79. \begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

$$1.80. \begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$$

$$2.80. 2 - \cos 2x + 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$4.80. (4x^2 - 16x + 7) \log_2(x - 3) > 0.$$

$$2.81. 2(\lg x)^2 + (1 - \sqrt{2}) \lg x^2 = 2\sqrt{2}.$$

$$3.81. \sqrt{4x - 8} \geq x - 5.$$

$$5.81. \frac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2} \cdot \cos^2 \frac{x-y}{2} + \sin^2 \frac{x-y}{2}.$$

$$2.82. \sqrt{2 - 3 \cos 2x} = \sqrt{\sin x}.$$

$$3.82. x^4 - 10x^2 + 16 \geq 0.$$

$$2.83. \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = 1.$$

$$3.83. \begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32. \end{cases}$$

5.83. Найти все значения параметра α из интервала $(2; 5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[2; 3]$, удовлетворяющее уравнению

$$\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$2.84. 2 \sin^2 x = 1 + \sqrt{3} + \cos 2x.$$

$$3.84. \log_2 \left| 1 + \frac{1}{x} \right| > 1.$$

5.84. Найти все a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$$

имеет решение.

$$1.85. \begin{cases} 2x + 2^y = -1, \\ -20x + 3 \cdot 5 \cdot 2^{y+1} = 146. \end{cases}$$

$$2.85. \lg(x+4) = -2 \lg \frac{1}{2-x}.$$

$$3.85. \begin{cases} (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0. \end{cases}$$

$$1.86. 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cos x.$$

$$2.86. \log_3(1-2x) \geq \log_3(5x-2).$$

$$1.87. 5 \sin 2x = \sin 9x - \sin 5x.$$

$$2.87. \sqrt{2x+3} \geq x.$$

$$1.88. 3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 0.$$

$$3.88. 3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$$

5.88. Найти все p , при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leq 3 \sin y - 4 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$1.89. \sin 2x \cos 2x - \sin x \cos x = 0.$$

$$3.89. \log_{x+2}(2x^2 + x) \leq 2.$$

$$5.89. (x^2 - 4x + 3) \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\cos^2 \pi x + \cos x + 2 \sin^2 \frac{x}{2}) \geq 2.$$

$$1.90. 2 - 3^{x-2} = 3^{x-1}.$$

$$6.90. \log_2(2-3x) > 4x+1.$$

$$1.91. 25^x + 24 \cdot 5^{x-1} - 1 = 0.$$

$$3.91. \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = |\cos x|.$$

$$1.92. 2(\sin 6x - \sin 4x \sin 2x) = \cos 6x + \cos 2x.$$

$$3.92. \frac{4^x - 2^{x+2} + 3}{2^{\frac{x}{2}} - 1} + 2^{\frac{x}{2}} + 1 = 0.$$

5.92. При каких значениях a все числа из отрезка $-1 \leq x \leq 3$ удовлетворяют неравенству

$$2ax + 2\sqrt{2x+3} - 2x + 3a - 5 < 0?$$

$$2.93. \sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0.$$

$$3.93. \log_{9x^2+1} 37 > 1.$$

5.93. Найти все a , при которых неравенство

$$x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} < 7a - 1$$

не имеет положительных решений x .

$$1.94. \sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$2.94. \begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$$

$$3.94. \lg(x+5) \geq -2 \lg \frac{1}{3-x}.$$

4.94. Найти все a и b , при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \leq 1, \\ x^2 + ax + 1 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$2.95. 5^{2x} = 115 \cdot 5^{x-1} + 50.$$

$$3.95. 4x + 7 \leq \frac{2}{x}.$$

5.95. Найти все b , при которых система

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два решения.

$$2.96. 3x^4 + 4 < 13x^2.$$

$$3.96. x^{2 \log_4 x} = \frac{8}{x^2}.$$

$$4.96. \begin{cases} \sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x}, \\ -2\pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

6.96. Определить, при каких a решения неравенства $\sqrt{x+a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

$$1.97. x = \sqrt{8x+9}.$$

$$2.97. \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3x) < \log_{\frac{1}{2}}(5x - 1).$$

$$3.97. 2 \sin^2 x - \frac{|\sin x|}{\cos x} = 0.$$

$$6.97. \sqrt{a^2 - x^2} \geq a + 1.$$

7. Геологический факультет (отделение геофизики)

$$2.77. x^2 - |5x - 3| - x < 2.$$

$$3.77. \sin^2(2 + 3x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \cos^2(2 - 5x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right).$$

5.77. Найти все k , при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств

$$x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 + 2k \text{ и } x^2 + 2kx \leq 3k^2 - 8k + 4.$$

$$1.78. -5 \cos 4x = 2 \cos^2 x + 1.$$

$$2.78. |5x - 13| - |6 - 5x| = 7.$$

$$3.78. \log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \leq 0.$$

$$1.79. \frac{x}{2a - x} = 3.$$

$$2.79. 1 + \lg(1 + x^2 - 2x) - \lg(1 + x^2) = 2 \lg(1 - x).$$

3.79. Найти все a , при каждом из которых уравнение

$$5 \sin x + 2 \cos x = a$$

имеет решение.

6.79. Найти все неотрицательные числа x , при каждом из которых из неравенств

$$abx \geq 4a + 7b + x, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

следует неравенство $ab \geq 5$.

$$1.80. 7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4.$$

$$2.80. \frac{2 - 3 \sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$$

$$3.80. x^2 + 4 \cdot |x - 3| - 7x + 11 = 0.$$

$$1.81. x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0.$$

$$2.81. 3 \log_3 x - \log_9 x = 5.$$

$$4.81. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

$$6.81. \sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

$$2.82. \frac{2x + 5}{|x + 1|} \geq 1.$$

$$3.82. 9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}.$$

$$4.82. \frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1.$$

$$1.83. (x + 1)\sqrt{16x + 17} = (x + 1)(8x - 23).$$

$$3.83. \log_{\sin \frac{\pi}{3}}(x^2 - 3x + 2) \geq 2.$$

$$4.83. \begin{cases} 3 \sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$1.84. 3 \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0.$$

$$2.84. \sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2.$$

$$2.85. \frac{|x-2|}{|x-1|-1} \geq 1.$$

$$4.85. 3 \sin x + 5 \cos x = \sqrt{17}.$$

$$5.85. \sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

$$1.86. \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x.$$

$$3.86. \frac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3.$$

5.86. Для каждой пары положительных чисел a и b найти решение неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} \geq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{b} \right|.$$

6.86. При каждом $p \leq 9$ найти все решения уравнения

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15} \sin x - \frac{3\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{7} \sin^2 x + \frac{3\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{7} \cos 2x\right) = \\ = 6 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{15} \sin x + \frac{2\pi}{5}\right) - p \end{aligned}$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

$$2.87. 4 \sin^2 x + 4 \cos x = 1.$$

$$3.87. \frac{1}{1-x} \geq -3.$$

$$4.87. \begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$$

$$1.88. (x-2) \left(|x| + \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.$$

$$2.88. (x^2 + 8x + 15)\sqrt{x+4} \geq 0.$$

$$3.88. (2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}(18x) + 1) = 0.$$

6.88. Найти все значения a , при каждом из которых область значений функции

$$y = \frac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1; 2]$.

$$2.89. x \leq \frac{2}{x-1}.$$

$$3.89. \frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x \quad \left(x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]\right).$$

6.89. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a^2 - 6a + 9)(2 + 2 \sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)(1 + \sin x) + a + 3 = 0$$

не имеет решений.

1.90. $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1.$

3.90. $\operatorname{tg} x(1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3}.$

4.90. $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{x^7}) + 2}{\log_9 x^6} \geq \frac{5}{\log_x 3} + 2.$

5.90. Найти все пары a и b , при которых уравнение

$$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + x^2 + 9 = 6x$$

имеет хотя бы одно решение x .

1.91. $\sin 7x \cos x = \sin 6x.$

2.91. $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0.$

3.91. $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{2}{4-\sqrt{x}}.$

4.91. $3^{2(\log_5 x)^2} + 1 = 4 \cdot 3^{(\log_5 x)^2}.$

6.91. $|x+2| + a|x-4| = 6.$

2.92. $\sqrt{5-8x} + 2x \leq 1.$

3.92. $|\log_7 3 \cdot \log_3 x^4 - 7 \log_x x^2| = 4 \log_x 49.$

4.92. $4 \cos x \cos 3x - 10 \cos^2 x - 16 \sin x \sin 3x = 4 \sin^2 x + 3.$

6.92. (Все тройки (x, y, z)).

$$\sqrt{64 - 3x^2 - xz + 1 + y^2 + 2y \sin(\pi z)} = (xz - 73)(\cos(\pi x) \cdot \cos(2\pi z))^2.$$

2.93. $\sqrt{1 - \cos^2 x} + 6 \cos 2x = 0.$

4.93. $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{5}(x^2) \geq \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{5} \sqrt{2x+3}.$

3.94. $y^2 + 2\sqrt{y^2 + 3y - 4} - 4 + 3y = 0.$

4.94. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0.$

5.94. $\sqrt{4x - 3 - x^2} \neq 0.$

6.94. $4 \cos x - \sin 2x > 0.$

1.95. $\sqrt{5x-6} + x = 4.$

2.95. $x^2 - 6 \geq |x|.$

$$3.95. \begin{cases} x^3 \sqrt{x-y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$$

$$4.95. \frac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leq 0.$$

$$5.95. (2\sqrt{3} \sin(\pi x + 3\pi) - \operatorname{tg}(\pi x - \frac{\pi}{2})) \log_2(4 - x^2) = 0.$$

$$8.95. \text{Найти все } a, \text{ при каждом из которых неравенство} \\ 9^x < 20 \cdot 3^x + a$$

не имеет ни одного целочисленного решения.

$$1.96. \sqrt{3x-5} = x - 11.$$

$$3.96. \frac{\cos 10x - \cos 8x}{2x^2 + \pi x - \pi^2} = \frac{\cos 6x - \cos 4x}{2x^2 + \pi x - x^2} \quad (x \in (0; \pi)).$$

$$4.96. \frac{1}{\log_9(-27x)} > \frac{1}{\log_3(-x)}.$$

$$5.96. \begin{cases} x^2 - xy = 20y, \\ 5xy - 5y^2 = 4x. \end{cases}$$

$$8.96. \text{Найти все } a, \text{ при которых для любого } b \text{ уравнение} \\ \cos(b + ab + bx) + 2 \cos b^2 x = 3a^2$$

имеет хотя бы одно решение.

$$1.97. \sqrt{6}(x^2 + 2) + 2x\sqrt{5} = \sqrt[3]{35}(x^2 - 2) + 2x\sqrt{7} \text{ (число решений).}$$

$$2.97. 3 \cos 8x = 14(\sin 2x - \cos 2x)^2 - 3.$$

$$3.97. 30 > \frac{x}{60 - \sqrt{x}}.$$

$$5.97. 17^{\log_{17} \log_3 x} < 3^{\log_{17} \log_{17} x}$$

$$7.97. |x + y - 3xy + 13| + |x^2 y + xy^2 - 30| = 0.$$

$$8.97. \text{Найти все } a, \text{ при каждом из которых уравнения}$$

$$(2x - 1)a^2 - (x^2 - x + 1)a - (x^3 - 4x^2 + 3) = 0 \text{ и}$$

$$(5 - 3x)a^2 + (5x^2 - 5x - 2)a - (2x^3 - 8x^2 + 6) = 0$$

не имеют общего решения.

8. Географический факультет

$$1.77. 2|x + 1| > x + 4.$$

$$3.77. 4^x - 2^{x+1} = 3.$$

$$5.77. 2 \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cos^2 2x}.$$

$$2.78. \cos x - 2 \cos 3x + \cos 5x = 0.$$

$$4.78. \sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 - 4x + 2).$$

5.78. Найти все значения параметра a , для каждого из которых существует только одно значение x , удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0. \end{cases}$$

$$1.79. 4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_9 27} = 0.$$

$$2.79. \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$5.79. \left\{ \cos \frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0, -\frac{21}{5} < x < 0. \right.$$

$$2.80. \log_{x-1} 3 = 2.$$

$$4.80. \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8} \cos 2x - \frac{1}{2}.$$

$$5.80. \begin{cases} |y + \frac{1}{x}| + |\frac{13}{6} + x - y| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x} \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36}, \\ x < 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

$$1.81. \log_3(2x+1) = 2 \log_{2x+1} 3 + 1.$$

$$2.81. 2 \cos x + 3 \cos 2x = 3.$$

$$5.81. \begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

$$1.82. \sqrt{2x^2 + 8x + 7} - x = 2.$$

$$2.82. \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

$$4.82. \begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$$

$$1.83. \cos^2 2x - 5 \sin^2 x + 1 = 0.$$

$$2.83. \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 3) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x+1} + 1} + 1.$$

$$4.83. \begin{cases} 2^{|x^2 - 2x - 3| - \log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8. \end{cases}$$

$$1.84. 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos 2x = \sin \frac{\pi}{2}.$$

$$3.84. \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 18) - 2 \log_{\frac{1}{2}}(x-4) < 0.$$

5.84. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(ax+1) + 13x - a(1+y) = 0, \\ x - xy + |2+y| = 0 \end{cases}$$

имеет решения.

1.85. $3 \cos x - \cos 2x = 1.$

2.85. $\log_{3x-1} 2x > 1.$

1.86. $\frac{x-3}{x^2+2x-5} > \frac{1}{2}.$

2.86. $\log_x \sqrt{3} - \log_{x^2} 27 = \frac{1}{2}.$

1.87. $7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3.$

2.87. $y^2 + 3|y| < 10.$

4.87. $\{\sin(2x+y) = 0, \cos(x+y) = 1, -\pi \leq x \leq \pi, -2\pi \leq y \leq -\pi.$

2.88. $3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1.$

5.88. Доказать, что при каждом $x > 0$ выполнено неравенство
$$x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \sin x > 0.$$

1.89. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right).$

3.89. $\log_{10-x^2} \left(\frac{16}{5}x - x^2\right) < 1.$

1.90. $\cos^2 6x - \sin^2 x - 1 = 0.$

3.90. $\frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1.$

5.90. Найти все значения параметра a , при которых уравнение
$$(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$$

имеет два различных положительных корня.

1.91. $2 \cos^2 x - 7 \cos x = 2 \sin^2 x.$

2.91. $\frac{1}{4} \log_2(x-2) - \frac{1}{2} \leq \log_4 \sqrt{x-5}.$

5.91. Найти все действительные значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \leq a^2.$

1.92. $\cos 2x + \sin x = 1.$

3.92. $(\log_x 2 - 1) \log_2(2x) \leq \frac{3}{2}.$

5.92. Найти все значения параметра c , при которых уравнение

$$|x^2 - 1| + |x^2 - x - 2| = x^2 - 3x + c$$

имеет ровно три различных решения.

$$1.93. \sqrt{13 - 2x} = 5 - x.$$

$$2.93. \sin x = \cos^2 x + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} \right).$$

5.93. При каких значениях a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a - 5)x^2 + (a + 2)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

$$1.94. \sin 2x = \sqrt{2} \sin x.$$

$$3.94. \log_x (2 - x - x^2) > 0.$$

5.94. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

$$1.95. 2 \cos(\pi(x - 1)) = \sqrt{3}.$$

$$3.95. \sqrt{2 - x^2} = |x| - 1.$$

$$1.96. \sqrt{28 + 6x} - x = 2.$$

$$3.96. \log_{(-\sin x)} (\cos^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x + 1) = 0.$$

$$1.97. \frac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2.$$

2.97. $\cos(\pi(x^2 - x + 1)) = \cos(\pi(x - 1))$ (наибольший отрицательный корень).

$$3.97. \log_{|\sin \frac{\pi x}{4}|} (9^x - 3^{x+3} + 30) = \log_{|\sin \frac{\pi x}{4}|} (3^x + 3).$$

4.97. Найти все значения параметра b , при каждом из которых система

$$\begin{cases} by^2 + 4by - 2x + 7b + 4 \leq 0, \\ bx^2 - 2y - 2bx + 4b - 2 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

9. Экономический факультет (отделение планирования и кибернетики)

$$1.77. \frac{\cos x}{(x + \frac{3}{2})^2} = |\cos x|.$$

$$3.77. \begin{cases} y^{1 - \frac{2}{3} \log_x y} = x^{\frac{2}{3}}, \\ 1 + \log_x (1 - \frac{3y}{x}) = \log_x 4. \end{cases}$$

4.77. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_3(9^x + 9a^3) = x$$

имеет два решения.

$$1.78. \begin{cases} |x^2 + x - 1| = 2x - 1, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

$$3.78. 3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{75x}{4} - \frac{11}{x} \right).$$

5.78. Найти все a , при каждом из которых неравенство

$$a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a \cos x > 2$$

выполняется для любого числа x .

$$1.79. \begin{cases} 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

$$4.79. \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5. \end{cases}$$

$$5.79. \frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0.$$

$$1.80. \log_5(26 - 3^x) > 2.$$

$$3.80. \begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

$$4.80. \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}.$$

Задачи 1981-1982 гг. — см. географический факультет

$$1.83. x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42.$$

$$2.83. \sqrt{4 - x^2}(\sin 2\pi x - 3 \cos \pi x) = 0.$$

$$3.83. \log_2(x^2 - 2) < \log_3\left(\frac{3}{2}|x| - 1\right).$$

6.83. Для каждого неотрицательного a решить неравенство

$$a^3 x^4 + 6a^2 x^2 - x + 9a + 3 \geq 0.$$

$$1.84. \log_8 \frac{6x - 1}{2x^2 + 3} \geq 0.$$

$$3.84. 3 - 12 \sin^2 x - 2 \cos 4x = -\frac{5}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$1.85. \sqrt{\sin x} = \sqrt{1 - 2 \sin^2 x}.$$

$$2.85. x \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3} - x\right) \geq |x|.$$

5.85. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

1.86. $2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}$.

2.86. $\begin{cases} 6 \sin x + 7 \log_y 3 = -10, \\ -5 \sin x + 2 \log_y 3 = 0, 5. \end{cases}$

3.86. $(8x^2 - 6x + 1)\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \geq 0$.

1.87. $(2 \sin x - 1)\sqrt{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$.

3.87. $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leq 2$.

4.87. $\frac{1}{2} \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3$.

6.87. Найти все a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot |x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2.88. $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x - 1 = 2 \cos x$.

3.88. $\frac{\sqrt{x^2 + x + 6} + 3x + 13}{x + 5} > 1$.

6.88. Найти все a , при каждом из которых любой корень уравнения

$$a(2a - 1) \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

является корнем уравнения

$$\log_{\frac{1}{2}}(3 \operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3 \operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1.$$

3.89. $||3 - x| - x + 1| + x = 6$.

4.89. $\begin{cases} \operatorname{tg}(4 \sin x) = \sqrt{3}, \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

6.89. (Целые решения)

$$9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0.$$

2.90. $5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |5x + 3|$.

$$5.90. \begin{cases} \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2(\frac{3}{2}\pi x)} \cdot \sin \pi x - \cos \pi x = 2, \\ -3 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

6.90. Найти все a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x - 5 = a - 2y + y^2, \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$1.91. \sin(3\pi \cdot 2^x) = \cos(\pi \cdot 2^x) - \sin(\pi \cdot 2^x).$$

$$2.91. \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{|-x+1| + |x+1|}{2x+1} \geq 0.$$

6.91. Указать все q , при которых уравнение

$$\sin^2 x + (q-2)^2 \sin x + q(q-2)(q-3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня.

$$2.92. (4^{x-1} + 4^{1-x} - 2)^{-1} \cdot (x^2 - 5x + 4)\sqrt{7-x} \leq 0.$$

6.92. Указать все q , при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2 - 5(x-1) + 3(|x-q| - q) \leq 0$ максимально.

$$1.93. \log_{7^x-6} 25 < 2.$$

$$2.93. \frac{\sin 3x}{\cos(x - \frac{\pi}{6})} = 1.$$

$$3.93. 3\sqrt{x+2} \leq 6 - |x-2|.$$

1.94. целочисленные решения

$$\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \leq 5. \end{cases}$$

$$3.94. \log_3((x+10)\cos x) = \log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right).$$

$$1.95. 2x - 5 < \sqrt{x^2 - x - 6}.$$

$$2.95. 2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x} \left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0.$$

5.95. Найти все $x \in [-3; 1]$, для которых неравенство

$$x(\pi(x+1) - 4 \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11)) > 0$$

выполняется при любых целых m .

6.95. Найти наименьшее значение выражения $a^2 + (b-1)^2$ среди тех a и b , для которых уравнение

$$||x-4| - 2| - ax + 4x - b = 0$$

имеет ровно три различных корня. Указать, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

$$1.96. \begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$$

$$2.96. \frac{\log_7(19 - 16|x|) - \log_{49}(1 - 4x)^2}{3 - 4x - |4x - 3|} \leq 0.$$

$$3.96. (\operatorname{tg}(\frac{19\pi}{3}) - \operatorname{tg} x) \sqrt{6 \cos \frac{15\pi}{4} \cos \frac{x}{2} - \cos x - 3} = 0.$$

$$1.97. \begin{cases} \left| \sin \frac{\pi(x+y)}{4} \right| + \left| 1 - \sin \frac{\pi(x-y)}{4} \right| = 0, \\ \sqrt{4 - |x| - |y + 2|} = \sqrt{4 - |x| - |y + 2|}. \end{cases}$$

$$2.97. \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1.$$

10. Факультет психологии

$$1.77. 3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \cos^2 x = 1.$$

$$2.77. \begin{cases} (1 + 2 \log_{|xy|} 2) \log_{x+y} |xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$5.77. a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x \cdot a > 0.$$

$$1.78. \left(\log_3 \frac{3}{x}\right) \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}.$$

4.78. Найти множество пар (a, b) , для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

$$1.79. \sqrt{3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2}) \cos x} = 4 \cos x - \sqrt{3}.$$

$$2.79. \begin{cases} 2 \log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6, \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1. \end{cases}$$

$$3.79. \frac{3}{|x + 3| - 1} \geq |x + 2|.$$

5.79. Найти все тройки целых чисел (u, v, w) такие, что

$$3(u - 3)^2 + 6v^2 + 2w^2 + 3v^2w^2 = 33.$$

$$1.80. (\sqrt{3})^{\operatorname{tg} 2x} - \frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} 2x}} = 0.$$

$$2.80. \begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$$

$$4.80. \log_{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2}) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq 1.$$

5.80. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство

$$2(2p - 1)^4 + 1 + (1 - 2(2p - 1)^4) \sin 2t \geq 0,$$

и найти все пары чисел (p, t) , для которых это неравенство превращается в равенство.

$$1.81. \begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0 \end{cases}$$

3.81. Найти все решения уравнения

$$\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2},$$

удовлетворяющие условию $0, 4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$.

$$4.81. \frac{4}{3} (\log_3(5x - 6)^3)^2 - (\log_3(5x - 6)^3) \log_3 x^6 = -6 (\log_3 \frac{1}{x})^2.$$

5.81. Найти все a , при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена

$$4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$$

на отрезке $0 \leq x \leq 2$ равно 3.

$$1.82. \frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}.$$

$$2.82. \begin{cases} 2x + y = x^2 + y^2 - 12, \\ 2^{x-2y} = 256. \end{cases}$$

$$3.82. 2 \sin x - \sqrt[3]{3} = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \sqrt{\sin x}.$$

$$6.82. \log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

$$1.83. \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9.$$

$$2.83. \frac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1 - x} < 1.$$

5.83. Найти все a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2 \cos x + a \sin y = 1, \\ \log_x \sin y = (\log_x a) \log_a (2 - 3 \cos x), \\ \log_a z + \log_a \left(\frac{1}{2a} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. При каждом таком a найти все решения.

$$3.84. 2(\cos x - 1) \sin 2x = 3 \sin x.$$

$$7.84. \begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} < 2, \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

$$1.85. 2 \cos^2 x - \sin x = 1.$$

$$2.85. 4 \cdot 4^x < 7 \cdot 2^x + 2.$$

6.85. Найти все a , при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y , удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} -15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7, \\ x < y, \\ 2a^2x + 3ay < 0. \end{cases}$$

$$2.86. \sqrt{35 - 5x} = 9 - 2x.$$

$$3.86. \frac{6 - \lg(x^4)}{3 + 2 \lg(x^2)} < 2.$$

$$2.87. \log_2(x^2 - 2x - 1) - \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

$$4.87. \sqrt{\frac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} - \cos 3x}.$$

6.87. Доказать, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2 - 1}.$$

$$1.88. 1 - \sin \frac{x}{2} = \cos x.$$

$$2.88. 32^3(x^3 - 8) = 8^{19(2x - x^2)}.$$

$$3.88. 2x - 11 < 2\sqrt{36 - x^2}.$$

6.88. Найти наибольшее значение параметра a , при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt[3]{a^3} \cdot \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right|$$

имеет хотя бы одно решение.

$$1.89. x + 2 < \frac{1}{x+4}.$$

$$2.89. \left| \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{5} \right| = 5 \cos x + 1.$$

$$3.89. \begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0, 2)^3 + y = 1. \end{cases}$$

$$5.89. x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0.$$

$$1.90. 4 \sin^2 \left(2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right) - 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cos(2x - \pi) + \sqrt{15} - 4 = 0.$$

$$2.90. \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{3}.$$

$$3.90. \left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{8} - \frac{15}{88-32x}\right)^2 \leq 1.$$

5.90. Считая известным, что при любом $a > 0$ уравнение

$$2x^3 + x^2 - x - a - 1 = 0$$

имеет единственный положительный корень x_0 (зависящий от a), найти все $a > 0$, при которых

$$12x_0^3 - 7x_0 > 6a + 1.$$

$$1.91. \lg(x+4) > -2 \lg \frac{1}{2-x}.$$

$$2.91. (\cos x - 1) \left(\sin x - \frac{1}{2} \cos 2x - 1\right) = \sin^2 x.$$

$$3.91. \begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y2^y + 2^y \log_3 x = 4. \end{cases}$$

5.91. При $a \geq \frac{1}{2\pi}$ найти все корни уравнения

$$\cos \left(\frac{2x + a}{2x^2 + 2ax + \frac{5}{2}a^2} \right) = \cos \left(\frac{2x - a}{2x^2 - 2ax + \frac{5}{2}a^2} \right).$$

$$1.92. 2 \sin 2\pi x \geq \sqrt{2} \sin 4\pi x + 3 \cos 2\pi x + \sqrt{32}.$$

$$2.92. \begin{cases} 2^{x+y} \cdot 3^y \cdot 6^{x+y} \cdot 9^x = 144, \\ \log_{0,2x+0,1y}(27^x \cdot 9^y + 4^{x+y}) \log_5(0,2x+0,1y) = 2. \end{cases}$$

4.92. При каких значениях параметров a и b можно найти два различных вещественных корня уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 7x = a,$$

которые будут также корнями уравнения

$$x^3 - 8x + b = 0?$$

$$1.93. 3^{\frac{x+2}{x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{x-4}}.$$

$$2.93. \sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$3.93. \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}, \\ -2\pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

5.93. Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена

$$(a-1)x^2 - (2a+1)x + 2 + 5a.$$

1) Найти все a , при которых $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$.

2) Найти все b , для каждого из которых величина $(x_1 - b)(x_2 - b)$ принимает постоянное значение при всех a , при которых она определена.

2.94. Известно, что $x = 1, y = -1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{1111\pi}{6} \right), \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найти все решения данной системы.

1.95. $|2x - 15| = 22 - |2x + 7|.$

2.95. $\frac{\sqrt{(x-5)(x+5)}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geq 0.$

3.95. $\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2 + \cos x} = 0.$

5.95. Найти все a , при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$$

имеет единственное решение.

1.96. $\sqrt{2x^2 - 21x + 4} = 2 - 11x.$

2.96. $2 < \log_3(x-3)^4 \leq 8.$

5.96. Пусть t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения

$$t^2 - (5b - 2)^2 t - 3b^2 - 7b + 1 = 0.$$

Найти все значения b , при каждом из которых для любого значения a функция

$$f(x) = \cos(ax) \cdot \cos((t_1^3 + t_2^3)\pi x)$$

является периодической.

1.97. $3 \cos^2 x + 4 \sin x = 9.$

2.97. $\sqrt{t+3} > 5 - 2t.$

4.97. При каких значениях p уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

6.97. Найти все значения параметров a и b , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , удовлетворяющих условию

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

11. Институт стран Азии и Африки

1.91. $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$.

3.91. $\cos^2(45^\circ + x) = \cos^2(45^\circ - x) + \sqrt{5} \cos x$.

5.91. $\log_{\log_{\frac{1}{2}} x}(\log_{\frac{1}{2}} x) > 0$.

6.91. При каких a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

1.92. $2^{x+5} + 2^3 \cdot 2^{x-1} - 2^2 = 0$.

2.92. $3 \sin^2 x - 3 \cos 2x - 12 \sin x + 7 = 0$.

3.92. $\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \leq 1$.

5.92. $\log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5(x^2 - 9) < 0$.

6.92. При каких a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

1.93. $\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 8}}{3 - x} \geq 1$.

4.93. $\log_x(3x - 2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x - 2) + 4 \log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}$.

5.93. $\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0$.

6.93. Найти все a , при каждом из которых неравенство

$$x^2 + 2|x - a| \geq a^2$$

справедливо для всех x .

2.94. $2^{x \log_2 7} \cdot 7^{x^2 + x} = 1$.

4.94. $2 \sin x - 1 \leq \sqrt{6 \sin^2 x - 6 \sin x - 12}$.

5.94. $|x - 4^{1+\sqrt{3-x}}| \leq \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}$.

6.94. Найти все a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$$

имеет решение.

2.95. $\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_2(x - 1) \log_2(x - 3) = 1$.

$$5.95. \sqrt{4x - x^2} - 3(\sqrt{2} \cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) \geq 0.$$

6.95. Найти все a , при которых неравенство

$$x^2 + 4x + 6a \cdot |x + 2| + 9a^2 \leq 0$$

имеет не более одного решения.

$$1.96. 3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^{x+1} - 5 \leq 0.$$

$$4.96. \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+2} - x + 4) \geq -1 + \log_{\frac{1}{2}} 3.$$

6.96. При каких a неравенство

$$\log_{\frac{2a-15}{5}} \left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x + a - 5}{5} \right) > 0$$

выполняется для всех x ?

$$1.97. \sqrt{3}(x+2) - \sqrt{9+2x} = 0.$$

$$2.97. 4|x+1| - 1 = 3|2x+5| - 2|x+5|.$$

$$3.97. 5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 = 0.$$

$$4.97. \log_{\frac{1}{2}} |x-2| - \log_{2-x} 3 \leq 2.$$

$$7.97. 3xy + 14x + 17y + 71 = 0 \text{ (пары целочисленных решений).}$$

12. Социологический факультет

$$1.97. \frac{x^2 + 1}{x} < \frac{1}{x} - 1.$$

$$3.97. \sqrt{-3x+3} = x-1.$$

$$5.97. \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |\sqrt{2x}-1| = \sqrt{2x}-1. \end{cases}$$

6.97. Найти все неотрицательные a , при каждом из которых уравнение

$$\sin 2a \sin^2 ax + 1 = (1 + \sin 2a) \sin ax$$

имеет ровно 4 решения на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Библиография

- [1] В. М. Говоров, П. Т. Дыбов, Н. В. Мирошин, С. Ф. Смирнова *Сборник конкурсных задач по математике*. – М.: Наука, 1986.
- [2] Ю. В. Нестеренко, С. В. Олейник, М. К. Потапов *Задачи вступительных экзаменов по математике*. – М.: Наука, 1986.
- [3] Ю. В. Нестеренко, С. В. Олейник, М. К. Потапов *Задачи вступительных экзаменов по математике. Учебное пособие*. – М.: Факториал, 1995.
- [4] И. И. Мельников, И. Н. Сергеев *Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах*. – М.: МП Азбука, 1994.
- [5] И. И. Мельников, С. Н. Олехник, И. Н. Сергеев *Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями (1993–1997) Изд. 3-е, испр. и доп.* – М.: Издат. отдел УНЦ ДО МГУ, 1998.
- [6] В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко *Задачи по математике. Уравнения и неравенства*. – М.: Наука, 1988.
- [7] С. Н. Олехник, М. К. Потапов *Сборник задач по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям*. – М.: Издат. отдел УНЦ ДО МГУ, 1996.
- [8] В. В. Рождественский, Е. В. Панкратьев, И. И. Мельников, В. В. Вавилов *Математический тренинг. Арифметика, алгебра, тригонометрия и анализ*. М.: Издат. отдел УНЦ ДО МГУ, 1997.
- [9] Е. В. Якушева, А. В. Попов, А. Г. Якушев *2000 задач и упражнений по математике. Для школьников и абитуриентов*. – М.: 1 Федеративная книготорговая компания, 1998.
- [10] *3000 конкурсных задач по математике*. – М.: Рольф, 1997.
- [11] А. Б. Будаков, Б. М. Щедрин *Элементарная математика. Руководство для поступающих в МГУ*. – М.: Издат. отдел УНЦ ДО МГУ, 1996.
- [12] Ю. П. Соловьев *Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Части 1, 2, 3*. – М.: Издательство СУНЦ МГУ, 1998.
- [13] *Материалы вступительных экзаменов. Задачи по математике и физике*. Под редакцией Н.Х. Розова и А.Л. Стасенко. – М.: Бюро Квантум, 1993.

Валерий Викторович РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

Решение
уравнений и неравенств
Теория и практика
Задачи вступительных экзаменов в МГУ

Художественный и технический редактор
И.Н.Коровин

Св. 015159

Подписано к печати 06.05.2000.

Тираж 1000.

Заказ 3692—00

Школа имени А. Н. Колмогорова
121357, Москва, ул. Кременчугская, 11
тел. (095) 449-33-64
e-mail: adm@aesclmsu.ru

“Самообразование”
125499, Москва, а/я 28

Отпечатано с готовых диапозитивов в 1 2 ЦТ МО

*Предлагаем Вашему вниманию другие книги,
изданные Школой имени А. Н. Колмогорова
совместно с журналом "Самообразование"*

Варианты вступительных экзаменов в Школу имени А. Н. Колмогорова

Составители

Алфутова Н. Б., Загорский В. В.,
Корнеева Т. П., Смуров М. В.,
Устинов А. В.

В брошюре приведены
варианты вступительных экзаменов по математике, физике и химии
в Школу имени А. Н. Колмогорова,
которые проводились в 1995-1999 годах.

Большая часть задач по математике
сопровождается подробными решениями,
к остальным задачам даны ответы и указания.

С полными решениями разобраны
варианты заочных и устных экзаменов по физике.

Задачи по химии сопровождаются
ответами или решениями.

Также в книгу вошли задания
заочного тура 1999-2000 учебного года.

Для школьников, преподавателей математики и физики,
руководителей кружков.

Книгу можно заказать
по тел. (095) 449-33-64
или по электронной почте (e-mail):
adm@aesc.msu.ru

Пиркулиев Н. Ш.

Олимпиадные задачи по химии

Типы задач и методы их решения

В пособии рассматриваются общие подходы к решению некоторых типов задач повышенной сложности по химии, в том числе и олимпиадных, дается их классификация.

К некоторым задачам даны развернутые решения с объяснениями хода решения.

Этот сборник, содержащий, в основном, нестандартные задачи, будет способствовать выработке у школьников химического мышления, интуиции и устойчивого интереса к химии.

Сборник адресован, прежде всего, учителям химии средних заведений для углубленного преподавания предмета и учащимся для подготовки к участию в олимпиадах по химии и к вступительным экзаменам в вузы.

Загорский В. В.

Огни потешные

Фейерверк: история, теория, практика

Эта книжка написана на основе статей, вышедших в журнале "Химия и жизнь" (1993, 6, 9-11; 1994, 1-6; 1996, 4-6) и "Химия и жизнь - XXI век" (1996, 1).

Статьи под общим названием "Взрываться лучше теоретически" выходили сначала в разделе "Юный химик" и предназначались прежде всего для интересующихся химией школьников. Им и адресовано данное пособие для начинающих мастеров "огненного искусства".

Книги можно заказать
по тел. (095) 449-33-64
или по электронной почте (e-mail):
adm@aesc.msu.ru

Дубровский В. Н., Скопенков А. Б., Спивак А. В.

Математика, 10 класс

Материалы Летней физико-математической школы

В брошюре представлены материалы по математике Летней школы Специализированного учебно-научного центра МГУ для поступающих в 10-й класс.

Эта школа преследует две основные цели.

Во-первых, произвести окончательный отбор учащихся в Школу имени А. Н. Колмогорова.

Во-вторых, сгладить достаточно заметный разброс в их уровне подготовки, сообщить им запас знаний, необходимый для успешного начала учебного года.

Поэтому в программу Летней школы включены и "теоретические" темы, новые для большинства учащихся, и методы решения определенных типов задач, рутинные упражнения и задачи повышенной трудности.

Стержнем программы является идея отображения, иллюстрируемая на примере отображений конечных множеств (комбинаторика), вещественных функций (графики), параллельной проекции.

Все нужные определения приводятся в тексте; задачи сгруппированы по изучаемым понятиям или методам. Это позволяет использовать книгу для самостоятельной работы. Но в первую очередь она предназначена преподавателям для проведения сравнительно коротких циклов занятий с интересующимися математикой учениками.

Книгу можно заказать
по тел. (095) 449-33-64
или по электронной почте (e-mail):
adm@aescl.msu.ru

Дубровский В. Н.

Прямые и плоскости в пространстве

Лекции и задачи

Брошюра основана на материалах лекций и семинарских занятий, проводимых во втором полугодии 10 класса в школе имени А. Н. Колмогорова, и посвящена началам стереометрии:

аксиомам соединения и их простейшим следствиям — теоремам о расположении прямых и плоскостей и параллельности.

Во второй части рассматриваются некоторые методы решения аффинных задач стереометрии, включая задачи на изображение, построение сечений, вычисление отношений параллельных отрезков.

Книгу можно заказать

по тел. (095) 449-33-64

или по электронной почте (e-mail):

adm@aesc.msu.ru

Колосов В. А.

Введение в алгебру

Книга представляет собой введение в современные алгебру, комбинаторику и теорию чисел, написанное в духе “конкретной математики”.

Может служить учебником алгебры для старших классов школ с углубленным изучением математики.

Кроме того, она является учебным пособием по курсу алгебры для математических специальностей вузов.

В книге изложена теория цепных дробей, резольвент уравнений, Гауссовых сумм, начала теории полей алгебраических чисел.

Рассматриваются построения циркулем и линейкой и решение уравнений в радикалах.

Предварительный заказ на книгу можно сделать

по тел. (095) 449-33-64

или по электронной почте (e-mail):

adm@aesc.msu.ru

Вышли из печати
и готовятся к изданию следующие книги:

МАТЕМАТИКА

- Спецкурсы по математике. *В.В.Вавилов, В.А.Бахтина.*
Радикалы правые, левые и нейтральные. *В.В.Вавилов.*
Изобретатель криволинейных координат. *В.В.Вавилов.*
Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ.
Ю.П.Соловьев.
Математика. 10 класс. (Материалы Летней физико-математической школы.)
В.Н.Дубровский, А.Б.Скопцов, А.В.Спивак.
Прямые и плоскости в пространстве. Лекции и задачи. *В.Н.Дубровский.*
Математический анализ. Курс лекций. *В.И.Гаврилов.*
По следам теоремы Пифагора. *В.В.Вавилов.*
Введение в алгебру. *В.А.Колосов.*
Кучка закручек. Сборник задач по алгебре. *Н.Б.Алфутова, А.В.Устинов.*

ФИЗИКА

- Общая физика. Курс лекций. *С.П.Крюков.*
Основы электродинамики. *Ю.Г.Павленко.*
Сборник задач по физике. *Т.П.Корнеева.*
Молекулярная физика. Термодинамика. Механика сплошных сред.
Ю.Г.Павленко, А.И.Торопова.
Обработка результатов физического эксперимента. *С.Н.Сергеев.*
Вопросы термодинамики. Методические указания. *В.В.Родин.*
Магнитный резонанс и динамика молекул.
Методические указания к спецкурсу. *В.В.Родин.*

ХИМИЯ

- Общая и неорганическая химия. *Ю.М.Корнев, В.П.Овчаренко.*
Органическая химия. *Е.А.Менделеева, Н.И.Морозова.*
Практикум по неорганической химии.
Ю.М.Корнев, Н.И.Морозова, А.И.Жиров.
Олимпиадные задачи по химии. *Н.Ш.Пиркулиев.*
Химия в вопросах и ответах. Курс для физико-математических школ.
А.М.Галин.
Огни потешные. Фейерверк: история, теория, практика. *В.В.Загорский.*

ИСТОРИЯ

- История Древней Греции. *Т.А.Бобровникова.*
Полибий из Мегалополя. *Т.А.Бобровникова.*

ИНФОРМАТИКА

- Turbo Pascal в школе. Сборник задач. *Е.В.Андреева, И.Н.Фалина.*

СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Программа основных и аннотация специальных курсов.
Три кубика. Сборник школьного фольклора. Составитель *И.Н.Коровин.*
Варианты вступительных экзаменов в Школу имени А.Н.Коллмогорова.
Составители *Н.Б.Алфутова, В.В.Загорский, Т.П.Корнеева, М.В.Смуров,*
А.В.Устинов.