В. С. Михайлов

Смещённые оценки в теории надёжности

Киров
2022

В. С. Михайлов

Смещённые оценки в теории надёжности

Монография

Киров
2022

УДК 519.248:62 – 192
ББК 22.17
М69

Автор –
Михайлов Виктор Сергеевич

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор ***Б. В. Папков,***
д-р техн. наук, профессор ***В. А. Богатырев,***
д-р техн. наук, профессор ***А. Н. Назарычев***

М69 Михайлов, В. С. Смещённые оценки в теории надёжности [Электронный ресурс]: монография / В. С. Михайлов. – Электрон. текст. дан. (3,3 Мб). – Киров: Изд-во МЦИТО, 2022. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования: PC, Intel 1 ГГц, 512 Мб RAM, 3,3 Мб свобод. диск. пространства; CD-привод; ОС Windows XP и выше, ПО для чтения pdf-файлов. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-907623-24-8

Научное электронное издание

Целью настоящей работы является ознакомление широкого круга читателей с основными результатами получения эффективных смещённых оценок, чья эффективность доказана (или выбрана в качестве таковой на основе критерия эффективности смещенных оценок) в достаточно широком классе смещённых оценок.

Настоящая книга представляет из себя монографическую литературу по смещённому оцениванию в теории надёжности и предназначена прежде всего для инженеров, аспирантов и студентов старших курсов технических специальностей.

ISBN 978-5-907623-24-8 УДК 519.248:62 – 192
ББК 22.17

Оглавление

Предисловие

Книга разделена на части, каждую из которых можно читать независимо от других. Тем не менее именно в такой последовательности, как расположены части и главы книги, следует ее изучать.

Настоящая книга не предназначена для беглого просмотра, а требует от читателя значительного внимания. Изложение материала требует от читателя знания основ математической статистики и классической теории надежности. Книга является естественным продолжением ранее изданной монографии Михайлов В. С., Юрков Н. К. «Интегральные оценки в теории надежности. Введение и основные результаты», основанной на классической математической статистике. В настоящей книге совершена попытка отойти от классических представлений о критерии эффективности смещенных оценок, что позволило ответить на многие вопросы, связанные с неоднозначностью выбора эффективной смещенной оценки.

Книга может быть использована и для справок по эффективным смещенным оценкам показателей надежности различных планов испытаний.

Пользуясь случаем благодарю всех, кто помог своими предложениями, советами, замечаниями. Благодарю рецензентов профессора Б. В. Папкова, профессора В. А. Богатырева, профессора А. Н. Назарычева, которые внимательно прочитали рукопись книги и сделали целый ряд полезных критических замечаний, которые были учтены при редакторской обработке рукописи. Особенно благодарен профессору Борису Васильевичу Папкову, замечания которого помогли избежать явных ошибок и неточностей в изложении материала, что значительно ускорило подготовку рукописи.

Понимая, что книга не свободна от недостатков, автор с признательностью примет замечания и предложения по улучшению содержания и формы изложения материала.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проявляется повышенный интерес к смещённым статистическим оценкам среди специалистов в области прикладной теории надежности. Однако смещенное оценивание не является общепринятым среди теоретиков (чистых математиков) в области математической статистики и теории надежности. Сомнения в возможности применения смещенных оценок при решении практических задач вызваны в первую очередь тем, что они допускают смещение относительно оцениваемого параметра, что ведет к потере эффективности. В теории математики стремятся получить несмещенные оценки, которые и являются всегда эффективными оценками [1, 2]. Любой математик получив смещенную оценку стремится найти способ сделать её несмещенной и, как правило, эффективной, минимизируя её дисперсию. Однако не следует забывать, что неудач нахождения несмещенных оценок значительно больше чем удач. То незначительное количество полученных несмещенных оценок по разным причинам не в полной мере устраивают испытателей [3]. В большинстве случаев несмещенных оценок не существует и на передний план выдвигаются смещенные оценки, что подтверждается практикой. Возникает задача – научиться сравнивать смещенные оценки по их эффективности.

В математической статистике разработаны различные методы для построения точечных оценок параметров законов распределений вероятностей случайных величин: метод моментов, метод максимального правдоподобия и метод минимума расстояний [1, 2]. На практике, используя эти методы, не всегда удается построить несмещенную и эффективную оценку, если таковая существует. В общем случае правила нахождения несмещенных оценок в настоящее время не существует, и их определение требует своего рода искусства. В ряде случаев найденные несмещенные и эффективные оценки имеют весьма громоздкий вид со сложным алгоритмом вычисления [3]. Они также не всегда являются достаточно эффективными в классе всех смещенных оценок, т. е. не всегда имеют значительное преимущество перед простыми, но смещенными оценками, с точки зрения близости к оцениваемому показателю и строгой монотонности по всем своим параметрам, в том числе и по параметрам плана испытаний. Требование к строгой монотонности является следствием зависимости механизма развития процесса появления отказа в группе испытуемых изделий, от параметров плана испытаний, таких как число испытуемых изделий или времени испытаний. Существующая проблема вполне решаема с помощью интегрального оценивания, основанного на суммировании среднекадратических смещений или уклонений статистических оценок от оцениваемого параметра для всех возможных величин, принимаемых параметрами плана испытаний, т. е. суммирование проводится как по всем величинам оцениваемого параметра, так и по параметрам, от которых зависит сама оценка.

ЧАСТЬ 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

1.1. Методы построения статистических оценок

Для определенности, не нарушая общности рассуждений, будем в основном рассматривать биномиальные испытания (план типа $NБ\tau$) и испытания с ограниченным временем испытаний и восстановлением (план типа $NB\tau$), где N – число испытуемых однотипных изделий ($N = n$ – число первоначально выставленных изделий); τ – наработка (одинаковая для каждого изделия); В – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается; Б – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний не восстанавливается [4, 5]. При этом там, где это необходимо, будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределений (далее – з.р.) вероятностей случайных величин (с.в.) с параметром T_0, где последний совпадает со средней наработкой до отказа (СНДО). Тогда величина вероятности безотказной работы (ВБР) одного изделия за заданное время τ будет определяться равенством

$$P_0 = \exp\{-\tau/T_0\}\ . \qquad (1.1)$$

Заметим, что плану испытаний типа $NB\tau$ соответствует распределение Пуассона [4, 5], а плану типа $NБ\tau$ соответствует биномиальное распределение [4, 5].

Обозначим случайное число отказов через R, тогда для плана испытаний типа $NB\tau$ достаточной статистикой является число наблюденных отказов ($R = r$) [1–5]. Для плана испытаний типа $NB\tau$ случайная величина R, имеет пуассоновское распределение $L(R\le r;\Delta)$ с параметром $\Delta = N\tau/T_0$ [1, 2]. Тогда, по определению, r – реализация с.в. R. С другой стороны, R – сумма с.в. X_i, каждая из которых есть случайное число отказов одного из N изделий ($1 \le i \le N$), поставленных на испытания. Случайные величины X_i имеют пуассоновское распределение с параметром Δ/N, а их сумма определяет пуассоновское распределение $L(R\le r;\Delta)$ суммарного потока отказов [1, 2]:

$$L(R \le r; \Delta) = \sum_{i=0}^{X_1+\dots+X_N=r} e^{-\Delta}\frac{\Delta^i}{i!}. \qquad (1.2)$$

Для биномиальных испытаний (план типа NБτ) достаточной статистикой является число наблюдаемых отказов $(R = r)$ и суммарная наработка $S(R = r, \tau, s_i)$ [1–5], где R – случайное число отказов, s_i – моменты отказов, $i = 1, 2, \dots, r$. Для биномиальных испытаний с.в. R, имеет биномиальное распределение $b_N(r)$ [2, ф. 1.4.55] с параметрами N и p, $0 \le p \le 1$, т. е. с.в. R, равная числу успехов в серии из N независимых опытов, принимает целочисленные значения $0, 1, 2, \dots, N$ с вероятностями:

$$b_N(r) = C_N^r \mathrm{p}^r (1-p)^{N-r}. \quad (1.3)$$

Функция распределения $F_R(R \le r, N, p)$ биномиальной с.в. R примет вид

$$F_R(\mathrm{R} \le r, N, p) = \sum_{k=0}^{r} b_N(k). \quad (1.4)$$

Функция распределения $F_R(\mathrm{R} \le r, N, p)$ вычисляется через неполную бета-функцию $I_p(x, y)$ по формуле [2, ф. 1.4.57]:

$$F_R(r, N, p) = 1 - I_p(r+1, N-r) = I_{1-p}(N-r, r+1). \quad (1.5)$$

Вероятности $b_N(k)$ вычисляются через неполную бета-функцию $I_p(x, y)$ по формуле [2, ф. 1.4.58]:

$$b_N(k) = I_p(k, N-k+1) - I_p(k+1, N-k). \quad (1.6)$$

Заметим, что традиционная оценка параметра p биномиального з.р. $\hat{p}(R, N) = R/N$ является несмещенной и эффективной оценкой [2, пример 2.4.20]. Оценка $\hat{p}$ также является и оценкой максимального правдоподобия [2, пример 2.10.7].

Определим кратко наиболее часто встречающиеся критерии эффективности оценок [1, 2] и их отличия. В основе этих критериев лежит среднеквадратический подход сравнения оценок. Пусть T_0 не является с.в. и принадлежит множеству вещественных значений $T_0 \in G$. Для функции от параметра $\theta(T_0)$ оценка $\hat{\theta}_0(R)$ называется эффективной оценкой в классе оценок $\hat{\theta}_0 \in \Theta$, если для любой другой оценки $\hat{\theta}_0(R)$ из этого класса выполняется неравенство

$$E(\hat{\theta}_0(R) - \theta(T_0))^2 \le E(\hat{\theta}(R) - \theta(T_0))^2,$$

где E – математическое ожидание, соответствующее з.р. числа отказов для параметра $T_0 \in G$. То есть сравниваются две оценки, одна из которых после их сравнения признается эффективнее другой.

1.2. Минимаксный подход

Оценка называется минимаксной $\hat{\theta}_0(R)$, если для любой другой оценки $\hat{\theta}(R)$ неслучайного параметра $t \epsilon G$ выполняется неравенство [1, 2]:

$$\sup_{t\epsilon G} E_t(\hat{\theta}_0(R) - \theta(t))^2 \leq \sup_{t\epsilon G} E_t(\hat{\theta}(R) - \theta(t))^2. \quad (1.7)$$

Из минимаксного подхода следует, что всегда найдется вариант, когда минимаксная оценка $\hat{\theta}_0(R)$ является лучшей только в ближайшем диапазоне $t_0 \in [t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon]$ минимизации самого худшего случая уклонения от оцениваемого параметра $\theta(t)$, который составляет небольшую долю рабочего диапазона $t \in [t_1,\ t_2]$. И, в то же время, уклонения минимаксной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ могут превышать уклонения других оценок $\hat{\theta}(R)$ в более обширном рабочем диапазоне вещественных значений оцениваемого параметра $t_0 \notin [t_1,\ t_2]$ (НЕ максимального уклонения). Хотя уклонения этих оценок $\hat{\theta}(R)$ и превышают худший случай минимаксной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ в ближайшем диапазоне $t_0 \in [t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon]$ $(t_0 \notin [t_1,\ t_2])$, но зато минимаксная оценка проигрывает в другом более обширном рабочем диапазоне, где её уклонения превышают уклонения оценок $\hat{\theta}(R)$, и в этом диапазоне (НЕ максимального уклонения) минимаксная оценка $\hat{\theta}_0(R)$ теряет свою эффективность.

1.3. Байесовский подход

Суть байесовского подхода состоит в том, что неизвестный (оцениваемый) параметр T_0 (или функция от параметра $\theta(T_0)$) рассматривается как случайная величина с некоторой плотностью распределения $q(t)$, где t – реализация с.в. T_0 [1, 6]. Плотность $q(t)$ называется априорной, т. е. данной до эксперимента. Байесовский подход предполагает, что неизвестный параметр T_0 был выбран случайным образом из распределения с плотностью $q(t)$.

В соответствии с формулой Байеса плотность апостериорного (после эксперимента) распределения имеет вид [1]

$$q(t/R) = \frac{f_\Delta(r)q(t)}{f(r)}, \quad (1.8)$$

где $f(r) = \int f_\theta(r)q(t)dt$.

Само апостериорное распределение параметра $\theta(T_0)$ будем обозначать через Q_R. Тогда байесовская оценка, соответствующая априорному распределению Q с плотностью $q(t)$ имеет вид

$$\hat{\theta}_Q(R) = E(\theta(T_0)|\mathrm{R}) = \int \theta(t)q(t|\mathrm{R})dt = \int \theta(t)Q_R(dt). \qquad (1.9)$$

В силу свойств условного математического ожидания байесовская оценка минимизирует среднеквадратическое уклонение $E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2$. При сравнении байесовской оценки на множестве других оценок $\hat{\theta}(R)$ всегда выполняется неравенство

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2 \leq E(\hat{\theta}(R) - \theta(T_0))^2 =$$
$$= \int E_t(\hat{\theta}(R) - \theta(t))^2 q(t)dt. \qquad (1.10)$$

Отметим еще раз, что для байесовской оценки безусловное среднеквадратическое уклонение (см. формулу (1.10))

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2 = \int E_t(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(t))^2 q(t)dt \qquad (1.11)$$

принимает наименьшее возможное вещественное значение. Соотношение (1.9) показывает, что байесовская оценка минимизирует среднее количественное значение. Недостатком байесовского подхода является обязательное знание плотности априорного з.р. случайного параметра T_0 (см. формулы (1.8)–(1.11)). С одной стороны, эти заложенные в правило предварительные знания несут в себе однократные финансовые издержки, а с другой – позволяют минимизировать объем испытаний [6], что в рамках стабильного производства дает им конкурентные преимущества [6].

Отметим полезные связи между минимаксными и байесовскими оценками. Если существует оценка θ_1 и распределение Q такие, что при всех t выполняется неравенство

$$E(\hat{\theta}_1(R) - \theta(t))^2 \leq \int E_t(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(t))^2 q(t)dt,$$

то оценка θ_1 – минимаксная [1]. В действительности всегда выполняется равенство, и в этом случае байесовская оценка является минимаксной [1].

1.4. Классический интегральный подход в процессе поиска эффективных оценок в классе смещённых оценок

Классическое определение эффективной оценки [7]: «Оценка параметра, имеющая наименьшее математическое ожидание квадрата её отклонения от оцениваемого параметра для любого значения параметра, называется эффективной». Классическая теория математической статистики [7] замечает, что в классе всех возможных оценок параметра эффективной оценки не существует! Поэтому автор источника [7] далее пишет: «необходимо наложить некоторые ограничения на множество оценок, в котором мы ищем наилучшую эффективную оценку. Естественным сужением класса оценок является класс так называемых несмещенных оценок параметра». В этом случае эффективная оценка скалярного параметра является несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. В некоторых случаях узнать наилучшую несмещенную оценку помогают неравенства Рао – Крамера [2, 7]: если оценка эффективная, то она и наилучшая в указанном выше смысле, т. к. имеет наименьшую возможную дисперсию.

Идеальным вариантом в задачах оценивания является использование несмещенной оценки с минимальным уклонением (дисперсией), если такая оценка существует. Для этого в классе несмещенных оценок следует, с целью выявления эффективной оценки, аналитически провести доказательство выполнения неравенства Рао – Крамера для этой оценки. Следует отметить, что неравенства Рао – Крамера должно выполняться для всех значений оцениваемых параметров. Но даже для экспоненциальных семейств распределений, для которых только и существуют эффективные оценки, эффективно оценить с помощью неравенства Рао – Крамера можно лишь одну какую-то функцию от параметра. Вопрос тем более открыт для семейств распределений, не являющихся экспоненциальными. Если такое доказательство сложно провести аналитически, то следует провести вычисление суммы уклонений для всех значений оцениваемого параметра. Для эффективной несмещенной оценки сумма уклонений должна быть минимальной.

В настоящее время нет инструментов получения несмещенных оценок (если они существуют!). Например, полученная методом максимального правдоподобия (план испытаний NBT) оценка средней наработки до отказа Тср=(суммарная наработка)/(число отказов) является сильно смещенной. Такое положение дел не может устроить тех, кто занимается решением прикладных задач. Эффективными несмещенными оценками пользуются всегда, когда они существуют. Если невозможно найти эффективную несмещенную оценку в смысле среднеквадратического уклонения, то следует научиться сравнивать смещенные оценки. Подавляющее большинство задач связано с оценками, имеющими смещение [8–10].

В классе смещенных оценок следует искать оценки с минимальным смещением, а среди них – с минимальным уклонением. Именно такие оценки следует называть в классе смещенных оценок эффективными смещёнными оценками или просто эффективными [9], что не противоречит классическому определению, а лишь расширяет его. Такой процесс поиска гарантирует получение оценок с хорошими точностными характеристиками [8–10]. Заметим, что опыт построения эффективных оценок показывает, что полученная несмещенная эффективная оценка не всегда будет обладать минимальным уклонением. Скорее наоборот, всегда найдется смещенная оценка, обладающая минимальным уклонением в сравнении с несмещенной оценкой. Во всех случаях, когда существует эффективная (несмещенная) оценка, существует смещенная оценка более точная, чем эффективная, т. е. с меньшим квадратом ошибки [11, стр. 284]. Этот факт свидетельствует в пользу смещения как первичного фактора при построении критерия эффективности оценок. Для определения эффективной по смещению оценки следует провести вычисление сумм смещений и уклонений для всех значений оцениваемого параметра. Для эффективной смещенной оценки каждая из сумм должна быть минимальной. Такое определение эффективной оценки в некотором выделенном классе смещенных оценок не противоречит определению эффективной оценки в классе несмещенных оценок. Наоборот, определение эффективной оценки в классе несмещенных оценок является частым случаем определения эффективной оценки в некотором выделенном классе смещенных оценок, включающий подкласс несмещенных оценок [9].

Почему именно интегральный подход? При сравнении классическим методом, когда уклонение должно быть минимальным сразу для всех значений параметра, получаем, что одна из сравниваемых смещенных оценок будет обладать меньшим уклонением в одной части значений параметра, а другая – в оставшейся, при сравнимом смещении. Для их сравнения и требуется суммирование всех уклонений (смещений). Суммы смещений и уклонений определяют критерий эффективности [9].

Интегральный подход отработан в основном для планов испытаний типа NВτ [8 – 9, 12–17] , NБτ [9, 18–22] и плана испытаний с добавлением [9, 10, 23].

В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(R)$, заданного на сумме величин относительных смещений оценок $\hat{\theta}(R)$ от функции над параметром з.р. $\theta(T_0 = t)$, а именно $b/\theta(t) = \frac{E\left(\hat{\theta}(R)\right)-\theta(t)}{\theta(t)}$. В этом случае самым разумным является построение критерия выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ на множестве оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau) \epsilon\ \Theta$, основанном на суммарном квадрате относительных смещений математического ожидания исследуемых оценок $E\hat{\theta}(R, N, \tau)$ от функции над параметром $\theta(T_0)$ для всех возможных величин, принимаемых переменными параметрами T_0, N и τ.

Например, на основе изложенного для плана испытаний типа $NB\tau$ [8–9, 12–17] в качестве критерия получения эффективной оценки можно построить функционал (далее – $A(\hat{\theta})$):

$$A\left(\hat{\theta}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{b(\theta)}{\theta(T_0)}\right)^2 \partial\Delta, \tag{1.12}$$

где $\Delta = N\tau/T_0$ – параметр пуассоновского з.р., характеризующий поток отказов [1]; $T_0 = N\tau/\Delta, b(\theta) = \left\{E\hat{\theta}(R, N, \tau) - \theta(T_0)\right\}^2$ – смещение, $t \in [t_1, \ t_2]$.

Воспользовавшись свойствами пуассоновского потока с параметром Δ, определим формулу математического ожидания оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau)$ [1]:

$$E\hat{\theta}(R, N, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\theta}(k, N, \tau) e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!}. \tag{1.13}$$

Эффективная оценка $\hat{\theta}_0(R)$ должна обладать минимальной величиной функционала $A(\hat{\theta}_0)$. Из определения интегральной оценки следует, что ее выбор основан на минимизации суммы квадратов относительных усредненных смещений от оцениваемого параметра (или функции от параметра) на всем диапазоне величин, принимаемых этим параметром, и на всем диапазоне величин, которые могут принимать количество испытуемых изделий N и время испытаний τ.

Таким образом, интегральный подход учитывает все факторы, влияющие на выбор эффективной оценки. Интегральный подход наиболее интересен в случае, когда оценки $\hat{\theta}(R, N, \tau)$ принадлежат классу смещенных оценок $b \geq 0$. Эффективные оценки, полученные минимизацией функционала (формула (1.12)), будем называть интегральными эффективными смещёнными оценками или просто – эффективными оценками, когда поиск осуществляется на классе смещённых оценок, а это почти всегда так [9]. Для несмещенных оценок существует классический вариант поиска эффективных оценок – по уклонению оценки параметра от его истинной величины [1, 2].

Дополнительным критерием поиска эффективных оценок, использующим интегральный подход, является минимизация функционала ($B(\hat{\theta})$), основанного на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau)$ от функции над параметром $\theta(T_0)$ для всех возможных величин, принимаемых параметрами T_0, N и τ, а именно [9]:

$$B(\hat{\theta}) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\theta(T_0)}\right)^2 E\left\{\hat{\theta}(R, N, \tau) - \theta(T_0)\right\}^2 \partial\Delta \,. \qquad (1.14)$$

Отличие оценок, эффективных по уклонению (например, байесовские оценки ($\hat{\theta}_Q(R)$), от интегральной оценки, эффективной по смещению, выражено равенством [1]:

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2 = D\left(\hat{\theta}_Q(R)\right) + b^2,$$

где $D\left(\hat{\theta}_Q(R)\right)$ – дисперсия. То есть байесовская оценка $\hat{\theta}_Q(R)$ минимизирует среднеквадратическое уклонение за счет минимальной суммы дисперсии и квадрата смещения.

При решении задач интегрального оценивания смещённых оценок важно (первично) не минимальное рассеивание этих оценок от параметра, а минимальное смещение. Таким образом, классические оценки (несмещенные и эффективные в смысле минимизации уклонения) и интегральные оценки (эффективные в смысле минимизации смещения и уклонения) решают задачи, в основе решения которых лежит одна и та же числовая характеристика точности оценки – среднеквадратическое отклонение. Совместное решение задач минимизации смещения и уклонения осуществляет поиск эффективных оценок [9].

Рассмотрим общий случай. Из построения формул (1.12) и (1.14) следует, что для различных планов испытаний на множестве количественных значений переменных $N \epsilon [1; 10]$ и $\tau \epsilon [\tau_1;\ \tau_2]$, минимизация функционалов $A(\hat{\theta}(R, N, \tau_i))$ и $B(\hat{\theta}(R, N, \tau_i))$ даст множество частных эффективных оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau_i)$. Чтобы найти усредненную эффективную оценку, необходимо ее поиск осуществлять минимизацией расширенных функционалов следующего вида:

$$A_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big) = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10} \lim_{\delta_\tau \to 0} \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} A_{N,\tau_i}\big(\hat{\theta}\big), \tag{1.15}$$

$$B_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big) = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10} \lim_{\delta_\tau \to 0} \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} B_{N,\tau_i}\big(\hat{\theta}\big), \tag{1.16}$$

где

$$A_{N,\tau_i}\big(\hat{\theta}\big) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2}\big\{E\hat{\theta}(R, N, \tau_i) - \theta\big\}^2 \partial\theta,$$

$$B_{N,\tau_i}\big(\hat{\theta}\big) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2} E\big\{\hat{\theta}(R, N, \tau_i) - \theta\big\}^2 \partial\theta,$$

δ_τ – шаг суммирования; $I = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\delta_\tau}$ – число шагов суммирования.

Т. к. величины функционалов $A_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$ и $B_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$ с изменением объёма испытаний и границ интервала τ_1 и τ_2 могут стремиться к бесконечности, то следует ограничиваться их рабочим диапазоном. Реальное время испытаний может колебаться в пределах от 500 до 100 000 ч, а объем N от 1 до 10 изделий, в зависимости от сложности и надежности испытуемого объекта. Именно этот фиксированный интервал следует рассматривать в качестве эталона при вычислении (минимизации) функционалов $A_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$ и $B_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$.

На практике шаг суммирования δ_τ следует выбирать конечной величиной, достаточной для получения величин функционалов с приемлемой точностью. Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется [9].

Идеальным вариантом в задачах оценивания является использование несмещенной оценки с минимальным уклонением, если такая оценка существует. В противном случае следует искать оценки с минимальным смещением, а среди них – с минимальным уклонением [9, 12–23]. Такой процесс поиска гарантирует получение оценок с хорошими точностными характеристиками. Поэтому, в общем случае, не следует ориентироваться на смещенные оценки, построенные минимизацией только функционала вида $B_{10}\left(\hat{\theta}(R, N, \tau)\right)$ (см. формулу (1.16)). Заметим, что опыт построения эффективных оценок показывает, что полученная несмещенная эффективная оценка не всегда будет обладать минимальным уклонением [9, 12–23]. Скорее наоборот, всегда найдется смещённая оценка, обладающая минимальным уклонением в сравнении с несмещенной оценкой. Этот факт свидетельствует в пользу смещения как первичного фактора при построении критерия эффективности оценок.

Однако при таком определении эффективной смещённой оценки всегда найдется вариант сравниваемых оценок, когда суммарное смещение одной оценки незначительно превалирует над суммарным смещением другой оценки, и тоже самое происходит над суммарными уклонениями этих оценок, но уже в другом порядке. В такой постановке задачи формальный выбор эффективной смещённой оценки становится невозможным и имеет произвольный характер, т. е. выбор эффективной смещённой оценки принимается испытателем по интуиции. В этом случае выбор испытателя может стать неверным. Поэтому возникает задача построения критерия эффективности, на основании которого выбор эффективной смещённой оценки становится формальностью.

1.5. Построение критерия эффективности смещенных оценок

Обозначим через $A(\theta)$ суммарное смещение оценки θ от оцениваемого параметра t, а через $B(\theta)$ суммарное уклонение оценки θ от оцениваемого параметра t. Заметим, что суммирование происходит в рабочем диапазоне по всем значениям оцениваемого параметра t, так и по всем значениям параметров плана испытаний и иных параметров (например, время за которое оценивается ВБР).

Для нужд построения критерия эффективности смещенных оценок будем произвольную статистическую оценку θ характеризовать смещением и дисперсией. Обозначим через $b = E(\theta) - t$ смещение оценки θ от параметра t, где E – математическое ожидание, а через D – дисперсию оценки θ. Тогда уклонение (в среднем квадратичном смысле) некоторой оценки θ от оцениваемого параметра t выражается формулой [1, 2, 7]

$$B(\theta) = E(\theta - t)^2 = D + b^2. \tag{1}$$

Заметим, что уклонение $B(\theta)$, как характеристика эффективности, при изменении дисперсии тоже изменяется на эту величину (см. формулу (1)), т. е. ее изменение происходит без учета зависимости от конкретной величины смещения оценки. В добавок к этому заметим, что величины дисперсии и квадрата смещения не равнозначны по отношению друг к другу, т. е. отношение этих характеристик может иметь значительную величину. Например, пусть имеется группа оценок, которые по своим свойствам близки к эффективной несмещенной оценке (именно с такими оценками имеет смысл работать), т. е. $b^2 \approx 0$ и $D >> b^2$, откуда $B(\theta) \approx D$, тогда даже при значительном изменении квадрата смещения b^2 уклонение $B(\theta) \approx D$ не способно выделить эффективную смещенную оценку среди оценок с одинаковой дисперсией D.

Попытаемся связать дисперсию и квадрат смещения так, чтобы при изменении дисперсии уклонение менялось с учетом смещения. Учтем, что смещение является первичным фактором при выборе эффективной смещенной оценки. И потребуем от вновь построенной характеристики $C(\theta)$, чтобы при изменении дисперсии на величину δD для небольших смещений $b \approx 0 + \delta$, учет влияния смещения на характеристику $C(\theta)$ был незначительным, и наоборот, для больших смещений $b >> 0$, учет влияния смещения на характеристику $C(\theta)$ был значительным. И потребуем, чтобы изменение характеристики $C(\theta)$ было линейным относительно характеристик D и b^2. Этим требованиям наиболее полно подходит произведение характеристик D и b^2:

$$C(\theta) = D \cdot b^2. \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что с изменением дисперсии на величину δD характеристика $C(\theta) = (D + \delta D) \cdot b^2 = D \cdot b^2 + \delta D \cdot b^2$ изменяется на величину, которая учитывает величину квадрата смещения линейно. Верна и обратная ситуация, т. е. с изменением квадрата смещения на некоторую величину характеристика $C(\theta)$ изменяется на величину, которая учитывает величину дисперсии линейно. Фигурально выражаясь, отображением характеристики $C(\theta)$ на прямоугольные оси координат D и b^2 является прямоугольник с площадью $D \cdot b^2$. Любое незначительное изменение характеристик D и b^2 приводит к изменению площади или конфигурации прямоугольника. Т. о. при незначительных отличиях характеристик D и b^2 следует в качестве эффективной в классе смещённых оценок выбирать оценку с минимальной характеристикой $C(\theta)$ (площадью). При равенстве характеристик $C(\theta)$ (площадей) следует выбирать, в качестве эффективной в классе смещённых оценок, оценку с наименьшей величиной смещения. Напомним, что построение критерия осуществлялось только для смещенных оценок. В случае несмещенных оценок такой характеристикой (критерием) служит уклонение $B(\theta) = D + b^2 = D$ (см. формулу (1)). Заметим, что для несмещенных оценок их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон. При формулировании критерия эффективности в классе смещённых оценок следует потребовать от смещенных оценок аналогичных качеств.

Сформулируем требования к процессу выбора эффективных смещённых оценок [24, 25]:

– предлагаемые оценки должны быть строго монотонны по всем своим параметрам;

– выбираются оценки с минимальным смещением $A(\theta) = b^2$ или близкими к таковым. Если в процессе выбора из числа предложенных оценок оказалась единственная несмещенная оценка, то она и является эффективной. Для того, чтобы эта оценка оказалась эффективной в классе несмещенных оценок, необходимо доказать неравенство Рао – Крамера для этой оценки [2, 7];

– выбираются оценки, для которых выполняется неравенство $D/A>4$, т. е. оценки, для которых их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон; и исключаются оценки, для которых выполняется неравенство $A = b^2 > D$, т. е. смещение превалирует над разбросом реализаций этой оценки;

– среди оставшихся оценок выбираются оценки с минимальным смещением $A(\theta) = b^2$. В случае единственной выбранной оценки с минимальным смещением A эта оценка признаётся эффективной в классе смещенных оценок;

– в случае с равными суммарными смещениями A в качестве эффективной в классе смещенных оценок выбирается оценка с минимальной дисперсией D.

В качестве критерия эффективности в классе смещенных оценок устанавливается характеристика $C(\theta)=D\cdot b^2$ [24, 25], т. е. в основе сравнения эффективности оценок параметров надежности лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \bullet D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться обязательное соотношение $D > 4A$.

1.6. Понятие центрируемой оценки и ее определение

На практике, как уже отмечалось выше, в качестве оценок выбирается результат, полученный методами: моментов, максимального правдоподобия и минимума расстояний [1, 2]. В соответствии с определением оценка – это статистика, используемая для оценивания параметра совокупности. Статистика – это функция от выборочных значений [24]. Поэтому, когда говорят об оценке показателя надежности, то понимают, что будет предложена некоторая функция от выборочных значений, с помощью которой имеется возможность получать количественные значения, по которым оценивается истинная величина исследуемого параметра (действительное количественное значение, воспринимаемое как истинное), например, СНДО или ВБР.

Центрируемая оценка. Введем понятие центрируемой оценки на основе биномиальных испытаний: пусть оценка вероятности отказа (далее – $\hat{v}$) центрирует вероятностную функцию $P_{n\sum}(R \le r, \hat{v}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{v})$, где $P_n\,(k, \hat{v})$ – вероятность возникновения ровно $R = r$ отказов относительно предельных границ изменения ее величин [9, 15–23]. Это означает, что каждый из случайных интервалов $[0;\ \hat{v}]$ и $[\hat{v}; 1]$, чьи совместные границы равны количественным значениям этой оценки, с вероятностью 0,5 накрывают оцениваемый параметр p. Такие оценки будем называть центрируемыми (не путать с центральными оценками [2]). То есть центрируемая оценка $\hat{v}$ находится из выражения

$$P_{n\sum}(R \le r, \hat{v}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{v}) = 0{,}5.$$

Заметим, что центрируемые оценки $\hat{v}$ для некоторых планов испытаний близки к эффективным оценкам [9, 15–23]. Заметим также, что закон распределения статистики $\hat{v}$ определяется законом распределения случайной величины R, что позволяет определять доверительные границы [2].

Из определения центрируемой оценки следует, что она определяет нижнюю (верхнюю) доверительную границу (НДГ и ВДГ) случайного интервала неизвестного параметра p при довертельной вероятности $\gamma = 0{,}5$ (или уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}5$). С другой стороны, любую оценку НДГ (ВДГ) случайного интервала неизвестного параметра p можно трактовать как точечную оценку параметра p с сильным смещением вниз (вверх). Свойство этих точечных оценок – быть собственно доверительной границей – проявляется совместно с доверительной вероятностью γ. НДГ (далее – $\hat{p}_{\text{н}}$) (ВДГ (далее – $\hat{p}_{\text{в}}$)) интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ вычисляют по формулам (случай монотонного убывания) [2, 4]:

$$P_{n\sum}(R \le r, \hat{p}_{\text{н}}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{p}_{\text{н}}) = \gamma, \tag{1.17}$$

$$P_{n\sum}(R \le r, \hat{p}_{\text{в}}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{p}_{\text{в}}) = \alpha. \quad 1.18)$$

Для того чтобы решение этого уравнения существовало и было единственным, необходимо проверять монотонность $P_{n\Sigma}$ относительно переменной p для различных планов испытаний [2, 4]. В случае монотонного возрастания вероятностной функции $P_{n\Sigma}$ неизвестные параметры $\hat{p}_{\text{н}}$ и $\hat{p}_{\text{в}}$ в формулах (1.17) и (1.18) меняются местами [2].

Если полученный интервал, образованный оценками $\hat{p}_{\text{н}}$ и $\hat{p}_{\text{в}}$, свести в точку, то доверительные границы этого интервала совпадут, т. е. $\hat{p}_{\text{н}}$ станет равной $\hat{p}_{\text{в}}$. Это определит точечную оценку $\hat{v} = \hat{p}_{\text{н}} = \hat{p}_{\text{в}}$. Такой результат возможен в единственном случае, когда $\beta = \alpha = 1 - \gamma = 0{,}5$, что определяет единственность оценки $\hat{v}$.

В нашем случае центрируемая оценка $\hat{v}$ ($\beta = 0{,}5$) находится из выражения $P_{n\Sigma}(R \le r, \hat{v}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{v}) = \beta = 0{,}5$, где β уже не несет в себе смысл доверительной вероятности.

Заметим, что центрируемые оценки близки по своей эффективности к лучшим оценкам [9, 15–23] и что, несмотря на оптимистическое определение центрируемой оценки $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$, эта оценка является смещенной относительно оцениваемого параметра $L(\hat{v}(n; r; \beta = 0{,}5)) > 0$. Однако это смещение можно уменьшить, а значит, и улучшить эффективность [9, 15–23]. Для этого достаточно минимизировать функционал $L(\tilde{v}(n; r))$, варьируя величиной вероятности $\beta = 0{,}5 + x$ в выражении $P_{n\Sigma} = \beta = 0{,}5 + x$, где $x > 0$ – некоторое положительное вещественное число. Полученная таким образом оценка (далее – $\tilde{v}(\beta = 0{,}5 + x)$) уже не является центрируемой, но имеет меньшее смещение в сравнении с центрируемой оценкой $\tilde{v}(\beta = 0{,}5)$, а следовательно, от оценки $\tilde{v}(\beta = 0{,}5 + x)$ можно ожидать и большую эффективность.

Потребуем, чтобы функция $P_{n\Sigma}(R \le r, \tilde{v})$ была монотонной с ростом p, тогда уравнение $P_{n\Sigma}(R \le r, \tilde{v}) = \beta = 0{,}5 + x$ имеет единственное решение. Заметим еще раз, что вероятность β уже не несет в себе смысл доверительной вероятности и не может организовать двусторонний доверительный интервал, так как его границы «перехлестывают» друг друга во встречных направлениях. Вероятность β является маркирующим параметром, который выделяет оценку среди множества подобных по методу построения $\beta \geq 0,5$.

Кроме того, доверительная граница ($\beta \leq 0,5$) представляет собой точечную оценку с сильным смещением относительно оцениваемого параметра. С ростом доверительной вероятности β двусторонний доверительный интервал вырождается сначала в точку, а потом перестает существовать. Односторонний доверительный интервал с ростом доверительной вероятности $\beta \geq 0,5$ перестает считаться таковым, так как с большой вероятностью
$\beta > 0,5$ не накроет оцениваемый параметр. А множество оценок

$$\tilde{v}(\beta = 0,5 + x),\ 0 < x < 0,5,$$

с маркирующим параметром β, становится потенциальным носителем эффективной оценки.

Такое рассуждение подвело к новой постановке задачи по поиску эффективной оценки параметра p. Пусть критерием получения эффективной оценки параметра p для биномиального плана испытаний с фиксированным объёмом $N = n$ является функционал $A(\tilde{v})$, который не нарушая общности рассуждений можно представить в виде

$$A(\tilde{v}) = \int \{E\tilde{v}(\beta,R,n) - p\}^2 dp$$

И пусть $F(r;n,p) = \beta$ – вероятностная функция соответствующая этому плану испытаний, где $\beta \in [0;\ 1]$ – одно (некоторое) из множества величин, которые принимает вероятностная функция. Решая это уравнение относительно неизвестного параметра p получаем $p = F_\beta^{-1}(F_\beta(r;n,p))$, что определяет оценку $\tilde{v}(\beta,R,n)$ параметра p или $\tilde{v}(R,n) = \tilde{v}(\beta,R,n)$.

Заметим, что в силу монотонности вероятностной функции относительно переменной p (монотонно убывает) это решение существует и единственно [1, 2]. Оценки, полученные таким образом, обладают всеми свойствами вероятностной меры, определяемой как вероятностная сигма-аддитивная функция, изменяющаяся от нуля до единицы [1, 2]. Все предлагаемые оценки, в рамках биномиальных испытаний, должны в обязательном порядке подвергаться проверке на выполнение этих свойств, в противном случае невыполнение этих условий приведет к ошибочным результатам и в конечном итоге – к заблуждениям.

Тогда задача по поиску эффективной оценки параметра p принимает следующий вид

$$A(\tilde{v}(\beta,R,n)) = \int \{E\tilde{v}(\beta,R,n) - p\}^2 dp \rightarrow \inf_\beta A(\tilde{v}(\beta,R,n)),$$

с условием, что искомая оценка $\tilde{v}(\beta,R,n) = F_\beta^{-1}(F_\beta(r;n,\tilde{v}))$ – должна удовлетворять свойствам вероятностной сигма-аддитивной функции, изменяющейся от нуля до единицы.

Именно в такой постановке следует осуществлять начальный поиск эффективных оценок в классе смещённых оценок.

Варьируя переменной β получают все возможные варианты $\tilde{v}(\beta,R,n)$, удовлетворяющие вероятностной функции $F(r;n,\tilde{v}) = \beta$, а следовательно и все возможные варианты оценок параметра p для исходного биномиального плана испытаний. Неявнозаданные оценки $\tilde{v}$, определяемые только величиной β: $F(r;n,\tilde{v}) = \beta$, сужают поиск, поэтому на множестве таких оценок и следует в первую очередь искать эффективную оценку, минимизирующую функционал $A(\tilde{v})$.

При поиске эффективных оценок следует избегать оценок, которые оценивают события как достоверные или невозможные, что противоречит предположениям о случайности событий возникновения отказов. В противном случае модель отказов приобретает вид детерминированной модели, которая требует физической интерпретации, что не затрагивается в данной работе.

Выводы к разделу 1

Построение правила выбора эффекивной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ требует учёта всех возможных величин, принимаемых параметрами плана испытаний и функции распределения. К таковым в первую очередь следует отнести объём испытаний N, время испытаний τ, время s за которое учитывается вероятность отказа, а для биномиального плана – параметр p (вероятность отказа); и для экспоненциального закона распределения – параметр T_0 (СНДО). Из всех подходов поиска эффективных смещённых оценок только интегральный подход удовлетворяет всем указанным требованиям.

ЧАСТЬ 2
ПЛАН ИСПЫТАНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

2.1. Доказательство эффективности оценки средней наработки до отказа в достаточно широком классе смещенных оценок

Будем искать эффективные оценки СНДО в классе смещенных оценок представимых в виде $\hat{\theta}(R, N, \tau\ ) = N\tau\varphi(R)$, куда входит и традиционная оценка $\hat{T}_0 = N\tau/R$ [4, 25]. Учитывая, что с.в. R распределена в соответствии с пуассоновским з.р., то формула (1.15) после подстановки в нее $\hat{\theta}(R, N, \tau\ ) = N\tau\varphi(R)$ и удаления лишних членов представится с учетом формул (1.12) и (1.13) в виде задачи на минимум ($\Delta = N\tau/T_0$):

$$A(\hat{\theta}) = \int_0^\infty (\frac{1}{\mathrm{T}_0})^2 \{E\hat{\theta} - \mathrm{T}_0\}^2 \partial\Delta =$$

$$= \int_0^\infty \left\{\sum_{k=0}^\infty e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}\Delta\varphi(\mathrm{k}) - 1\right\}^2 \partial\Delta \to inf_{\hat{\theta}} A(\hat{\theta}). \qquad (2.1)$$

Поиск эффективной оценки СНДО путем минимизации функционала (см. формулу (2.1)) упрощается, если искать эффективную оценку в классе смещенных оценок, представимых в виде

$$\hat{\theta}(R, N, \tau_i) = \frac{N\tau_i}{R+1} + N\tau_i f(R),$$

тогда функционал (2.1) примет вид

$$A(\hat{\theta}) = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=0}^\infty e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}\Delta(\frac{1}{k+1} + f(k)) - 1\right\}^2 \partial\Delta. \qquad (2.2)$$

Остается минимизировать функционал $A(\hat{\theta})$ (см. формулу (2.2)). В работе [12, 9] строго математически доказано, что оценка

$$T_{01} = 2N\tau \text{ при } R = 0 \text{ и } T_{01} = \frac{N\tau}{R+1} \text{ при } R > 0 \qquad (2.3)$$

доставляет минимум функционалу $A(T_{01}) = 0{,}25$ (см. формулу (2.2)).

Приведем доказательство этого факта в сокращенном виде. Математическое ожидание оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau_i) = \frac{N\tau_i}{R+1} + N\tau_i f(R)$ в соответствии с формулой (1.13) будет иметь следующий вид:

$$E\hat{\theta}(R, N, \tau_i) = T_0(1 - e^{-\Delta}) + T_0 e^{-\Delta} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k) \Delta^k / k! \qquad (2.4)$$

Обозначим через $B = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k) \Delta^k / k!$. После подстановки (2.4) в (2.2) получаем

$$A(\hat{\theta}(R, N, \tau_i)) = \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} (B - 1)^2 \partial\Delta = B_2 - 2B_1 + 1/2, \qquad (2.5)$$

где

$$B_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(i) f(k) 0,5^{i+k+3} (i + k + 2)!/i!\,k!,$$

$$B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) 0,5^{k+2} (k + 1).$$

Докажем формулу (2.5). Воспользуемся известными формулами [26, с. 200, ф. 860.06.]:

$$(B - 1)^2 = B^2 - 2B + 1 \text{ и } \int_0^{\infty} e^{-n\Delta} \Delta^k \partial\Delta = k!/n^{k+1}.$$

Тогда интеграл в формуле (2.5) представим в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} (B - 1)^2 \partial\Delta = \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} B^2 \partial\Delta - 2 \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} B \partial\Delta + \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} \partial\Delta .$$

Заметим, что в последнем интеграле $n = 2, k = 0$, тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} \partial\Delta = 1/2.$$

Далее после подстановки $B = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k) \Delta^k / k!$ в подынтегральные выражения получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} B \partial\Delta = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k) \Delta^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} \Delta^{k+1} \partial\Delta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(k + 1)\, 0,5^{k+2} = B_1 ;$$

$$B^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^{i+1}}{i!}f(i)f(k)\frac{\Delta^{k+1}}{k!};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\Delta}B^2\partial\Delta = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(i)f(k)\int_0^{\infty} e^{-2\Delta}\frac{\Delta^{k+i+2}}{k!\,i!}\partial\Delta =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(i)f(k)\frac{0{,}5^{i+k+3}(i+k+2)!}{i!\,k!} = B_2.$$

Тем самым формула (2.5) доказана.

Определим нижнюю границу функционала (2.5), для чего представим $B_2 = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)0,5^{i+1}\sum_{k=0}^{\infty} f(k)0,5^{k+2}(k+1)(k+2)\cdots(k+i+2)/i!$
и заметим, что

$$(k+2)\cdots\frac{(k+i+2)}{i!} =$$

$$= \left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{3}+1\right)\cdots\frac{\left(\frac{k}{i+2}+1\right)}{i!}\cdot 2\cdot 3\cdots(i+1)(i+2) =$$

$$= \left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{k}{i+2}+1\right)(i+1)(i+2) \geq 2(i+1).$$

С учетом того, что $B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)0,5^{k+2}(k+1)$, получаем

$$B_2 \geq \sum_{i=0}^{\infty} f(i)0,5^{i+1}2(i+1)\sum_{k=0}^{\infty} f(k)0,5^{k+2}(k+1) = \frac{2}{0{,}5}B_1\cdot B_1 = 4{B_1}^2;$$

подставляя правую часть неравенства в (2.5), получаем

$$A\left(\hat{\theta}(R,N,\tau)\right) \geq 4{B_1}^2 - 2B_1 + 1/2.$$

Беря производную от правой части по B_1 и приравнивая ее нулю, находим нижнюю границу $A\hat{\theta}(R,N,\tau) \geq 0{,}25$.

Определим составную оценку, принадлежащую рассматриваемому классу в виде: $\hat{T}_{01} = 2N\tau$ при $R = 0$ и $\hat{T}_{01} = \frac{N\tau}{R+1}$ при $R > 0$. Из общего вида класса оценок $\hat{\theta}(R,N,\tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(R)$ следует, что $f(R) = 1$ при $R = 0$ и $f(R) = 0$ при $R > 0$. Легко заметить, что в этом случае $B_2 = 0{,}25$ и $B_1 = 0{,}25$. Подставляя полученные величины в формулу (2.5), получаем $A(\hat{T}_{01}) = 0{,}25$, т. е. оценка $\hat{T}_{01}$ доставляет функционалу $A(\hat{T}_{01})$ минимум равный 0,25.

Таким образом оценка $\hat{T}_{01}$ является эффективной в классе смещенных оценок, представимых в виде

$$\hat{\theta}(R, N, \tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(R).$$

Этот класс смещенных оценок является достаточно широким. Например, классическая оценка СНДО $\hat{T}_{02} = \frac{N\tau}{R}$ и оценка $\hat{T}_{03} = \frac{N\tau}{R+1}$ принадлежат этому классу [9, 12, 14]. Дополнительным преимуществом оценки $\hat{T}_{01}$ является возможность получения результата оценки в виде конечной величины на основании испытаний, не давших отказов.

Заметим, что для функции от параметра $\varphi(\varDelta) = 1/\varDelta$ не существует несмещенной оценки по результатам испытаний одного изделия [1]. А следовательно, для плана типа $N\text{В}\tau$ $(N = 1)$ невозможно получить несмещенную точечную оценку СНДО, поэтому смещенные точечные оценки – необходимый инструмент при оценивании СНДО.

2.2. Построение центрируемой оценки средней наработки до отказа. Построение эффективной смещённой оценки СНДО, используя классическую процедуру

Будем строить центрируемую оценку, заданную в неявном виде, используя приемы построения доверительных интервалов. Вероятностная функция $L(R \leq r; \Delta)$ убывает по $\varDelta$, и, следовательно, для построения одностороннего доверительного интервала $P(T_{0\text{н}}(\frac{1}{\Delta_\text{в}}) < T_0)$ или $P\left(T_{0\text{в}}\left(\frac{1}{\Delta_\text{н}}\right) > T_0\right)$ можно воспользоваться рекомендациями [2, ф. 2.14.14] , а именно:

$$L(r; \varDelta_\text{н}) = 1 - \alpha = \gamma \,, \tag{2.6}$$

$$L(r; \varDelta_\text{в}) = \alpha = 1 - \gamma \,, \tag{2.7}$$

где γ – доверительная вероятность; α – уровень доверия.

Решение уравнений (2.6) и (2.7) позволяет найти доверительные границы ($\varDelta_\text{н}$ и $\varDelta_\text{в}$). Доверительное оценивание позволяет определить вероятность уклонения точечной оценки параметра надежности от его истинного количественного значения [4]. Вероятность уклонения точечной оценки параметра надежности от его истинного количественного значения вместе с доверительными границами служит уровнем доверия к результатам испытаний.

Если полученный интервал ($\mathit{\Delta}_{\text{н}}$ и $\mathit{\Delta}_{\text{в}}$) свести в точку, то доверительные границы этого интервала совпадут, т. е. $\mathit{\Delta}_{\text{н}}$ станет равной $\mathit{\Delta}_{\text{в}}$. Что определит точечную оценку $\hat{\mathit{\Delta}} = \mathit{\Delta}_{\text{н}} = \mathit{\Delta}_{\text{в}}$. Такой результат возможен в единственном случае, когда $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}5$, что определяет единственность оценки $\hat{\mathit{\Delta}}$.

Воспользуемся определением функции пуассоновского распределения (см. формулу (1.2) и изучим свойства оценки $\hat{\mathit{\Delta}}$, получаемой из уравнения

$$L(r;\Delta) = \sum_{k=0}^{r} e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!} = 0{,}5 \tag{2.8}$$

или

$$\varepsilon(\Delta) = \ln(2) + \ln\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{\Delta^k}{k!}\right) - \Delta. \tag{2.9}$$

Минимизируя абсолютную величину $\varepsilon(\mathit{\Delta})$ (см. формулу (2.9)), с необходимой точностью получим искомую точечную оценку параметра Пуассона $\hat{\mathit{\Delta}} = \hat{\mathit{\Delta}}(R)$. Имея оценку $\hat{\mathit{\Delta}}$, легко получить оценку СНДО $\hat{T} = N\tau/\hat{\mathit{\Delta}}$ или оценку ВБР $\hat{P}(\tau) = e^{(-\tau/\hat{T})} = e^{\left(-\frac{\hat{\Delta}}{N}\right)}$ одного изделия. Количественные значения $\hat{\mathit{\Delta}}$ приведены в приложении А. Используя изложенное, можно найти более эффективную смещённую оценку, чем оценка $\hat{T}_{01}$. Рассмотрим класс оценок $\hat{\theta}(R,N,\tau)\epsilon\, Z$, представимых в виде $\hat{\theta}(R,N,\tau) = N\tau\varphi(R)$. И более узкий класс оценок $\hat{\theta}(R,N,\tau)\epsilon\, Y \subset Z$, представимых в виде $\hat{\theta}(R,N,\tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(R)$. Достаточно в качестве представителя взять неявно заданную оценку $\hat{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{N}\tau}{\hat{\Delta}(\mathrm{R})}$ из [15] и представить ее в следующем измененном виде:

$$\begin{cases} \bar{T} = \frac{1{,}5*N\tau}{\hat{\mathit{\Delta}}(R)}, R = 0, \\ \bar{T} = \frac{N\tau}{\hat{\mathit{\Delta}}(R)+0{,}5}, R > 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда $A(\bar{T}(R,N,\tau)) = 0{,}2344$, что меньше величины функционала для эффективной оценки $A(\hat{T}_{01}(R,N,\tau)) = 0{,}25$ [9, 12, 15]. Такое возможно потому, что оценка $\bar{T}$, заданная неявным способом, принадлежит классу оценок $\bar{T}\,\epsilon\, X$, $X \subset Z$,

$X \cap Y = 0$ – пустое множество, т. е. класс X находится вне класса Y (по построению $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \subset \mathrm{Z}$). Этим показано, что поиск эффективных оценок следует искать и в классе оценок, заданных неявно вне класса Y, которому принадлежат оценки $\hat{\theta}(\mathrm{R}, \mathrm{N}, \tau) = \frac{\mathrm{N}\tau}{\mathrm{R}+1} + \mathrm{N}\tau\mathrm{f}(\mathrm{R})$. Важно заметить, что оценки выбираемого класса, предназначенного для поиска эффективных смещённых оценок, должны соблюдать строгую монотонность относительно всех своих параметров (R, τ, n).

Полученную оценку $\bar{T}$ можно рекомендовать в качестве эффективной оценки наравне с оценкой $\hat{T}_{01}$, которая является абсолютно эффективной в классе оценок, представимых в виде $\hat{\theta}(R, N, \tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(\mathrm{R})$ [9, 12, 15].

Результаты подстановки в функционалы $A(\hat{\theta})$ и $B(\hat{\theta})$ (см. формулы (1.12) – (2.2)) оценок $\hat{T}, \bar{T}, \hat{T}_{01}, \hat{T}_{02}, \hat{T}_{03}$ приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Результаты подстановки в функционалы вида $\boldsymbol{A(\hat{\theta})}$ и $\boldsymbol{B(\hat{\theta})}$ оценок $\boldsymbol{\hat{T}, \bar{T}, T_{01}, T_{02}, T_{03}}$

Оценки	$A(\hat{\theta}(R, N, \tau))$	$B(\hat{\theta}(R, N, \tau))$
$\hat{T} = N\tau/\hat{\Delta}$	0,370	6,47
$\bar{T} = \frac{1{,}5*N\tau}{\hat{\Delta}(R)}, R = 0, \bar{T} = \frac{N\tau}{\hat{\Delta}(R)+0{,}5}, \ R > 0$	0,234	9,50
$\hat{T}_{01} = 2N\tau, \ R = 0, \hat{T}_{01} = \frac{N\tau}{R+1}, \ R > 0$	0,25	8,63
$\hat{T}_{02} = \frac{N\tau}{R}$, доопределена в нуле величиной $2N\tau$	1,437	12,84
$\hat{T}_{03} = N\tau/(R+1)$	0,5	4,64

Как показано в таблице 2.1, разброс величин оценки $\bar{T}$, обладающей минимальным смещением, шире разброса величин оценок $\hat{T}$, $\hat{T}_{01}$ и $\hat{T}_{03}$. Поэтому оценка $\hat{T}_{01}$, как более простая в сравнении с $\hat{T}$, продолжает играть свою роль эффективной смещённой оценки. Из таблицы 2.1 также следует, что оценка $\hat{T}_{03}$ является эффективной оценкой по уклонению в сравнении с предложенными оценками, однако ее сильная смещенность позволяет сомневаться в ее хороших свойствах. Наихудшими свойствами обладает классическая оценка $\hat{T}_{02}$. Из рассмотренных вариантов смещенных оценок однозначно выбрать эффективную (классическим методом) не удается. В этом случае следует выбирать оценки с минимальным смещением. Изложение в последующих разделах подтверждает эффективность выбранной стратегии, а именно: в случае со смещенными оценками наиболее эффективными являются оценки, обладающие минимальным смещением.

Заметим, что величину функционала $A(\hat{\theta})$ на оценках $\hat{T}_{02} = \frac{N\tau}{R}$ (доопределена в нуле величиной $2N\tau$) и $\hat{T}_{03} = N\tau/(R+1)$ легко вычислить непосредственным взятием интеграла (см. формулу 2.1), а именно:

$$A(\hat{T}_{03}) = \int_0^\infty (\frac{1}{\mathrm{T}_0})^2 \{E\hat{T}_{03} - \mathrm{T}_0\}^2 \partial\Delta = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=0}^\infty e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!(k+1)} \Delta - 1\right\}^2 \partial\Delta.$$

Заметим, что $\sum_{k=0}^\infty \frac{\Delta^k}{k!(k+1)} \Delta = e^{-\Delta} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Delta^{k+1}}{(k+1)!} = e^{-\Delta} \sum_{k=1}^\infty \frac{\Delta^k}{k!} =$

$= e^{-\Delta}(e^\Delta - 1) = 1 - e^{-\Delta}$, тогда вырыжение для функционала можно переписать в виде

$$A(\hat{T}_{03}) = \int_0^\infty \{1 - e^{-\Delta} - 1\}^2 \partial\Delta = \int_0^\infty e^{-2\Delta} \partial\Delta.$$

Воспользуемся известной формулой [26, с. 200, ф. 860.06.]:

$$\int_0^\infty e^{-n\Delta} \Delta^k \partial\Delta = \frac{k!}{n^{k+1}}, k > 0\ .$$

И заметим, что в последнем интеграле $n = 2, k = 0$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-2\Delta} \partial\Delta = 1/2,$$

т. о. $A(\hat{T}_{03}) = 0{,}5$. Что совпадает с машинным вычислением см. табл. 2.1.

Аналогично вычисляется величина функционала $A(\hat{\theta})$ на оценке $\hat{T}_{02} = \frac{N\tau}{R}$ (доопределена в нуле величиной $2N\tau$), а именно:

$$E\hat{T}_{02} = 2N\tau e^{-\Delta} + \sum_{k=1}^\infty e^{-\Delta} \frac{\Delta^k N\tau}{k!k},$$

заметим, что $N\tau = \Delta\mathrm{T}_0$, тогда

$$E\hat{T}_{02} = 2\Delta\mathrm{T}_0 e^{-\Delta} + \sum_{k=1}^\infty e^{-\Delta} \frac{\Delta^k \Delta\mathrm{T}_0}{k!k} = \Delta\mathrm{T}_0 e^{-\Delta}(2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\Delta^k}{k!k}),$$

откуда следует, что

$$A(\hat{T}_{02}) = \int_{0}^{\infty} (\frac{1}{\mathrm{T}_0})^2 \{E\hat{T}_{02} - \mathrm{T}_0\}^2 \partial\Delta = \int_{0}^{\infty} \left\{e^{-\Delta}\left(2\Delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^{k+1}}{k!\,k}\right) - 1\right\}^2 \partial\Delta$$

$$A(\hat{T}_{02}) > \int_{0}^{\infty} \left\{e^{-\Delta}\left(2\Delta + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta^{k}}{k!}\right) - 1\right\}^2 \partial\Delta =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \{e^{-\Delta}(2\Delta + e^{\Delta} - 1 - \Delta) - 1\}^2 \partial\Delta =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \{2\Delta e^{-\Delta} + 1 - e^{-\Delta} - \Delta e^{-\Delta} - 1\}^2 \partial\Delta =$$

$$\int_{0}^{\infty} \{\Delta e^{-\Delta} - e^{-\Delta}\}^2 \partial\Delta = \int_{0}^{\infty} \Delta^2 e^{-2\Delta} \partial\Delta - 2\int_{0}^{\infty} \Delta e^{-2\Delta} \partial\Delta + \int_{0}^{\infty} e^{-2\Delta} \partial\Delta =$$

= *1/4 – 1/4 + 1/2 = 1/2.*

Т. о. оценка $\hat{T}_{02}$ проигрывает по эффективности всем предложенным оценкам (см. табл. 2.1), т.к. обладает наибольшим смещением $A(\hat{T}_{02}) > \frac{1}{2}$, что согласуется с машинным вычислением см. табл. 2.1. Можно произвести точные выкладки, после которых можно убедиться, что суммируемое смещение $A(\hat{T}_{02}) = 1{,}437$. Но из-за громоздкости эти построения не приводятся [8].

Для испытаний, не давших отказов, эффективные оценки $\bar{T}$ и $\hat{T}_{01}$ можно применять как для плана типа $N\text{В}\tau$, так и для плана типа $N\text{Б}\tau$ (Б – без восстановления).

2.3. Получение эффективной смещённой оценки СНДО с использованием критерия эффективности смещённых оценок

Из предыдущего подраздела следует, что из рассмотренных вариантов смещенных оценок СНДО однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается. Кроме того, предложенные в предыдущем подразделе оценки СНДО обладают достаточно большим смещением. Однако это смещение можно несколько уменьшить, а неоднозначность, при выборе классическим методом эффективной оценки, легко устранить использованием критерия эффективности смещенных оценок (см. подраздел 1.5).

Рассмотрим следующие оценки СНДО:

– неявно заданная оценка $T_5 = n\tau / \Delta$, где Δ – точечная оценка параметра Пуассона, полученная путем решения уравнения (2.9);

– $T_1(R = 0) = 2n\tau$, $T_1(R > 0) = n\tau / (R + 1)$;

– $T_2(R = 0) = 2n\tau$, $T_2(R > 0)= n\tau / R$;

– $T_3 = n\tau / (R + 1)$;

– $T_4(R = 0) = 6n\tau$, $T_4(R > 0) = n\tau / (R + 0{,}5)$;

– $T_6(R = 0) = 1{,}5n\tau / \Delta$, $T_6(R > 0) = n\tau / (\Delta + 0{,}5)$;

– $T_7 = n\tau / (R + 1) + n\tau e^{-(R+1)} / (R + 1)$ [8];

– $T_8 = n\tau / (R + 1) + n\tau 10^{-(R+0,5)} / (R + 0{,}5)$;

– $T_9 = n\tau / (R + \beta(R))$ при $\beta = 0{,}7$;

– $T_{10}(R = 0) = 2{,}1n\tau$, $T_{10}(R > 0) = n\tau / (R + 1{,}2)$;

– $T_{11}(R = 0) = 2{,}2n\tau$, $T_{11}(R > 0) = n\tau / (R + 1 + 1 / R)$;

– $T_{\text{В}}(R = 0) = 2{,}4n\tau + 0{,}24\tau$, $T_{\text{В}}(R > 0) = n\tau / (R + 0{,}8 + 1{,}8 / R)$;

– $T_{\text{В2}}(R = 0) = 2{,}5n\tau$, $T_{\text{В2}} = n\tau / (R + 1 + 2{,}3 – 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$,

$T_{\text{В2}}(R > 5) = n\tau / (R + 1)$.

Здесь и далее по тексту данной книги предложенные оценки являются смещенными эффективными оценками в соответствующих классах. Например, оценка $T_{10} = 2{,}1n\tau$ при $R = 0$ и $T_{10} = n\tau / (R + 1{,}2)$ при $R > 0$ является эффективной в классе оценок $T_{10} = \alpha n\tau$ при $R = 0$ и $T_{10} = n\tau / (R + \beta)$ при $R > 0$.

В основе сравнения эффективности этих оценок лежит функционал $C = A(\theta(n;R)) \bullet D(\theta(n;R))\ (T_0 = t)$ [12, 24],

где $A(\theta(n;R)) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\{E\theta(n;R) - t\}^2 d\Delta$ – нормированное суммируемое смещение (в квадрате),

$D(\theta(n;R)) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2} E\{\theta(n;R) - E\theta(n;R)\}^2 d\Delta$ – нормированная суммируемая дисперсия. В таблице 2.2 приведены результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$ [25].

Таблица 2.2

Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид функционала	A	D	D/A	$C=D\cdot A$
$T_{B2}(R = 0) = 2{,}5n\tau$, $T_{B2} = n\tau / (R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$, $T_{B2}(R > 5) = n\tau / (R + 1)$	0,188	3,931	20,82	0,742
$T_B(R = 0) = 2{,}4n\tau + 0{,}24\tau$, $T_B(R > 0) = n\tau / (R + 0{,}8 + 1{,}8 / R)$	0,200	3,83	19,14	0,767
$T_{11}(R = 0) = 2{,}2n\tau$, $T_{11}(R > 0) = n\tau / (R + 1 + 1 / R)$	0,214	3,93	18,36	0,841
$T_{10}(R = 0) = 2{,}1n\tau$, $T_{10}(R > 0) = n\tau / (R + 1{,}2)$	0,234	3,89	16,62	0,910
$T_6(R = 0) = 1{,}5n\tau / \Delta$, $T_6(R > 0) = n\tau / (\Delta + 0{,}5)$	0,234	3,98	17,00	0,931
$T_1(R = 0) = 2n\tau$, $T_1(R > 0) = n\tau / (R + 1)$	0,25	4,12	16,48	1,03
$T_8 = n\tau / (R + 1) + n\tau 10^{-(R+0{,}5)} / (R + 0{,}5)$	0,28	4,00	14,28	1,134
$T_7 = n\tau / (R + 1) + n\tau e^{-(R+1)} / (R + 1)$ [8]	0,34	4,1	12,05	1,394
$T_9 = n\tau / (R+0{,}7)$	0,364	4,43	12,17	1,61
$T_5 = n\tau / \Delta$	0,37	4,51	12,18	1,66
$T_3 = n\tau / (R + 1)$	0,500	3,72	7,44	2,30
$T_2(R = 0) = 2n\tau$, $T_2(R > 0) = n\tau / R$	1,437	7,94	5,52	11,40
$T_4(R = 0) = 6n\tau$, $T_4(R > 0) = n\tau / (R + 0{,}5)$	5,36	10,21	1,90	54,72

Из таблицы 2.2 следует, что в соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок [24], в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку T_{B2} с минимальной величиной характеристики $C = 0{,}742$ [25]. Заметим, что оценка $T_3 = n\tau / (R + 1)$, обладающая наименьшей дисперсией $D = 3{,}72$ среди предложенных оценок, в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок является одной из самых худших оценок $C = 2{,}30$.

Заметим, что в подразделе 2.1 [9, 12] приведено доказательство того факта, что в классе оценок $T_R = n\tau / (R + 1) + n\tau f(R)$ оценка $T_1 = 2n\tau$ при $R = 0$ и $T_1 = n\tau / (R + 1)$ при $R > 0$ доставляет минимум функционалу $A = 0{,}25$. Докажем, что оценка $T_9 = n\tau / (R + \beta(R))$, где $\beta(R) \neq 2$, $\beta(R) \neq 1$ и $\beta(R) \neq 0$, не принадлежит классу оценок T_R, для этого достаточно представить оценку T_9 в виде

$T_9 = n\tau(R + 2) / (R + 1)(R + \beta(R)) - n\tau / (R + 1)(R + \beta(R))$, откуда и следует утверждение.

Только три оценки из класса T_9, принадлежат классу оценок T_R, т. е. оценки вида $T_9(\beta(R) = 2)$, $T_9(\beta(R) = 1)$ и $T_9(\beta(R) = 0)$. Докажем этот факт. Для этого класс оценок $T_9(\beta(R))$ представим в виде

$$T_9(\beta(R)) = n\tau / (R + \beta(R)) = n\tau(R + 2) / (R + 1)(R + \beta(R)) - n\tau / (R + 1)(R + \beta(R)).$$

После подстановки в $T_9(\beta(R))$ величину параметра $\beta(R) = 2$ получаем

$$T_9(\beta(R) = 2) = n\tau(R + 2) / (R + 1)(R + 2) - n\tau / (R + 1)(R + 2) =$$

$$= n\tau / (R + 1) - n\tau / (R + 1)(R + 2),$$

где легко заметить, что $n\tau f(R) = - n\tau / (R + 1)(R + 2)$, т. е. оценка $T_9(\beta(R) = 2)$ принадлежит классу $T_R = n\tau / (R + 1) + n\tau f(R)$.

При $\beta(R) = 1$ оценка $T_9(\beta(R))$ принимает вид $T_9(\beta(R) = 1) = n\tau / (R + 1)$, т. е. принадлежит классу $T_R = n\tau / (R + 1) + n\tau f(R)$ при $n\tau f(R) = 0$.

При $\beta(R) = 0$ оценка $T_9(\beta(R) = 0)$ принимает вид (при $R = 0$ оценка $T_9(\beta(R=0) = 0)$ неопределена) $T_2 = n\tau / R = n\tau / (R + 1) + n\tau / R(R + 1)$ при $R > 0$, т. е. принадлежит классу $T_R = n\tau / (R + 1) + n\tau f(R)$ при $n\tau f(R) = n\tau / R(R + 1)$.

Но уже при $\beta(R) = 3$ оценка T_9 имеет вид

$T_9(\beta(R) = 3) = n\tau(R + 2) / (R + 1)(R + 3) - n\tau / (R + 1)(R + 3) =$

$= (n\tau / (R + 1))\bullet((R + 2)/(R + 3)) - 1/(R + 3)$, т. е. принимая во внимание, что $(R + 2) /(R + 3) > 1$, то можно сделать вывод, что оценка $T_9(\beta(R) = 3)$ не принадлежит классу оценок $T_R = n\tau / (R + 1) + n\tau f(R)$.

Аналогично рассуждая при $\beta(R) > 3$, приходим к выводу, что оценки вида $T_9(\beta(R) > 3)$ не принадлежат классу оценок $T_R = n\tau / (R + 1) + n\tau f(R)$.

Подобные рассуждения с тем же конечным результатом можно провести и для оценок $T_9(1<\beta(R)<2)$ и $T_9(0<\beta(R)<1)$.

Поэтому появление величин функционала $A(T_6) = 0{,}234 < 0{,}25$ на оценке T_6 и далее до $A(T_{B2}) = 0{,}188 < 0{,}25$ на оценке T_{B2} вполне оправдано [24].

2.4. Получение эффективной смещённой оценки вероятности безотказной работы классическим способом

Если оценка параметра з.р. (или функции от параметра) дополнительно зависит от некоторого параметра (далее – s), то вид преобразованных функционалов $A_{10}\big(\hat{\theta}(R,N,\tau)\big)$ и $B_{10}\big(\hat{\theta}(R,N,\tau)\big)$ (см. формулы (1.15) и (1.16)) можно представить в виде

$$A_{10}\left(\hat{\theta}(R,N,\tau,s)\right) = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10} \lim_{\delta_s\to 0}\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \lim_{\delta_\tau\to 0}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} A\big(\hat{\theta}(R,N,\tau_i,s_j)\big) \quad (2.11)$$

$$B_{10}\left(\hat{\theta}(R,N,\tau,s)\right) = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10} \lim_{\delta_s\to 0}\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \lim_{\delta_\tau\to 0}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} B\big(\hat{\theta}(R,N,\tau_i,s_j)\big), \quad (2.12)$$

где A_{10} – смещение, B_{10} – уклонение, δ_s – шаг суммирования по параметру $s \epsilon [\,s_1; s_2\,], J = (s_2 - s_1)/\delta_s$ – число шагов суммирования.

Рассмотрим оценки ВБР за временной отрезок s вида

$$\hat{P}(R,N,\tau,s) = e^{-s/\hat{T}(R,N,\tau)},$$

где $\hat{T}(R,N,\tau)$ – некоторая оценка СНДО. Время ВБР s не превышает пределов от $s_1 = 1000$ ч до $s_2 = 100000$ ч, в зависимости от сложности и надежности испытуемого объекта.

К ранее введенным для сравнения оценкам СНДО (см. таблицу 2.1) добавим следующие оценки:

$\hat{T}_{04} = 6N\tau$ при $R = 0$ и $\hat{T}_{04} = N\tau/(R + 0{,}5)$ при $R > 0$;

$\hat{T}_{\Delta} = 4N\tau/\Delta(R)$ при $R = 0$ и $\hat{T}_{\Delta} = N\tau/\Delta(R)$ при $R > 0$.

Результаты подстановки предложенных оценок ВБР (как функция от СНДО) в функционалы $A_{10}\big(\hat{P}(R,N,\tau,s)\big)$ и $B_{10}\big(\hat{P}(R,N,\tau,s)\big)$ (см. формулы (2.11) и (2.12)) приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Результаты подстановки в функционалы $A_{10}(\hat{P})$ и $B_{10}(\hat{P})$ оценок ВБР в соответствии с формулами (2.11) и (2.12)

Вид оценки ВБР	$A_{10}\left(\hat{P}(R,N,\tau,s)\right)$	$B_{10}\left(\hat{P}(R,N,\tau,s)\right)$
$P(g, T_5)$, $T_5 = n\tau/\Delta$	0,0410	0,0876
$P(g, T_\Delta)$,$T_\Delta = 4n\tau/\Delta(R)$ при $R = 0$, $T_\Delta = n\tau/\Delta(R)$ при $R > 0$	0,0157	0,1486
$P(g, T_1)$, $T_1 = 2n\tau$ при $R = 0$, $T_1 = n\tau / (R + 1)$ при $R > 0$	0,0346	0,0987
$P(g, T_2)$, $T_2 = 2n\tau$ при $R = 0$, $T_2 = n\tau / R$ при $R > 0$	0,0300	0,1066
$P(g, T_3)$, $T_3 = n\tau / (R + 1)$	0,0641	0,0740
$P(g, T_4)$, $T_4 = 6n\tau$ при $R = 0$, $T_4 = n\tau/(R+0,5)$ при $R > 0$	0,0156	0,1501

Из таблицы 2.3 следует, что оценки $\hat{P}(s,\hat{T}_\Delta)$ и $\hat{P}(s,\hat{T}_{04})$ являются эффективными смещёнными оценками из числа предложенных. Из таблицы (2.2) также следует, что смещенная и неявно заданная оценка $\hat{P}(s,T_5)$ обладает минимальным разбросом. Однако, несмотря на то, что оценка $\hat{P}(s,\hat{T}_\Delta)$ уступает ей в этом показателе, именно оценку $\hat{P}(s,\hat{T}_\Delta)$ следует считать эффективной по смещению. С другой стороны, оценка $\hat{P}(s,\hat{T}_{04})$ лишь незначительно уступает оценке $\hat{P}(s,\hat{T}_\Delta)$ и как более простая в сравнении с $\hat{P}(s,\hat{T}_\Delta)$ может также считаться эффективной оценкой. Как и в случае с оценкой СНДО (см. подраздел 2.2), из рассмотренных вариантов смещенных оценок ВБР однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается.

При вычислениях функционалов $A_{10}(\hat{P}(R,N,\tau,s))$ и $B_{10}(\hat{P}(R,N,\tau,s))$ шаг суммирования по времени испытаний $\tau \epsilon [1\text{E}+3; 1\text{E}+5]$ и величине времени ВБР $s \epsilon [1\text{E}+3; 1\text{E}+5]$ производился по степеням с шагом равным единице, а именно: $1\text{E}+03, 1\text{E}+04, 1\text{E}+05$.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

В качестве эффективной оценки ВБР всегда следует использовать традиционную несмещенную оценку [4], а именно:

$$\hat{P}(R, N, \tau, s) = \left(1 - \frac{s}{N\tau}\right)^R \text{ при } \frac{s}{N\tau} < 1,$$

кроме испытаний, в процессе которых отказы обнаружены не были. В этом случае следует использовать смещенную, эффективную и неявно заданную оценку ВБР $\hat{P}(s, \hat{T}_\Delta)$. Для испытаний, не давших отказов, оценку $\hat{P}(s, \hat{T}_\Delta)$ можно применять как для плана типа NВτ, так и для плана типа NБτ. Однако оценка ВБР $\hat{P}(s, \hat{T}_{04})$ является более привлекательной, так как является простой и совсем незначительно проигрывает оценке $\hat{P}(s, \hat{T}_\Delta)$ по эффективности.

2.5. Получение эффективной смещённой оценки вероятности безотказной работы с использованием критерия эффективности смещённых оценок

Из предыдущего подраздела следует, что из рассмотренных вариантов смещенных оценок ВБР однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается. Кроме того, предложенные в предыдущем подразделе оценки ВБР обладают достаточно большим смещением. Однако это смещение можно несколько уменьшить, а неоднозначность, при выборе классическим методом эффективной оценки, легко устранить использованием критерия эффективности смещенных оценок (см. подраздел 1.5).

Введем обозначение $m=n\tau$. Рассмотрим оценки ВБР за временной отрезок g вида $\theta(m,g;R)=exp\{-g/T_i\}$, где T_i – некоторая оценка СНДО.

В основе сравнения эффективности смещённых оценок ВБР лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \bullet D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [24], где

$A(\theta) = \frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5} \frac{1}{10}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\{E\theta(n;R,m,g) - \exp(-g\Delta/m)\}^2 d\Delta$ – усредненное нормированное смещение (в квадрате),

$D(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty\frac{1}{t^2}E\{\theta(n;R,m,g)-E\theta(n;R,m,g)\}^2 d\Delta$ – усредненная нормированная дисперсия.

В таблице 2. 4 приведены результаты подстановки предложенных оценок ВБР $\theta(m,g;R)=exp\{-g/T_i\}$ в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$ (см. разделы 2.3 и 2.4).

Таблица 2.4

Результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид оценки ВБР	A	D	D/A	$C=D\cdot A\cdot 10^3$
$P(g, T_5)$, $T_5 = n\tau/\Delta$	0,0410	0,0876	2,13	35,91
$P(g, T_\Delta)$, $T_\Delta = 4n\tau/\Delta(R)$ при $R = 0$, $T_\Delta = n\tau/\Delta(R)$ при $R > 0$	0,0157	0,1486	9,46	2,333
$P(g, T_1)$, $T_1 = 2n\tau$ при $R = 0$, $T_1 = n\tau / (R + 1)$ при $R > 0$	0,0346	0,0987	2,85	3,415
$P(g, T_2)$, $T_2 = 2n\tau$ при $R = 0$, $T_2 = n\tau / R$ при $R > 0$	0,0300	0,1066	3,55	3,198
$P(g, T_3)$, $T_3 = n\tau / (R + 1)$	0,0641	0,0740	1,15	47,43
$P(g, T_4)$, $T_4 = 6n\tau$ при $R = 0$, $T_4 = n\tau/(R+0,5)$ при $R > 0$	0,0156	0,1501	9,62	2,341

Из таблицы 2. 4 следует, что оценки $P(g, T_4) = e^{-g/T_4}$ и $P(g, T_\Delta) = e^{-g/T_\Delta}$ имеют примерно одинаковые смещения. Их величины характеристики A отличаются на (0,0157 – 0,0156)•100/0,0157 = 0,63%. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку e^{-g/T_Δ} с минимальной величиной характеристики $C=2,333$.

2.6. Улучшение эффективной смещённой оценки вероятности безотказной работы с использованием критерия эффективности смещённых оценок

Представленные в подразделе 2.5 эффективные смещённые оценки всё же обладают достаточно большим смещением, которое можно значительно уменьшить. После улучшения эти оценки приобретут некоторую специализацию при их использовании. С этой целью рассмотрим следующую составную оценку [25]:

$$P_v(g;T_v(R)) = e^{-g/T_v(R>0)},$$

где $T_v(R=0) = 5{,}2\cdot n\tau$, $T_v(R>0) = n\tau\,/\,(R + 0{,}5)$.

В таблице 2.5 приведены результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$. При вычислениях функционалов $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ диапазон суммирования по времени и объёме испытаний был несколько изменен в сравнении с предыдущим материалом, поэтому величины результатов изменились, что не отразилось на сути вещей.

Таблица 2.5

Результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа NBτ

Вид оценки ВБР	A	D	D/A	$C=D\cdot A\cdot 1000$
Оценки, предложенные для плана испытаний типа NBτ в [24]				
$P_\Delta(T_\Delta) = e^{-g/T_\Delta}$, где $T_\Delta(R=0) = 4n\tau\,/\,\Delta(R)$, $T_\Delta(R>0) = n\tau\,/\,\Delta(R)$	0,01251	0,15496	12,38	1,93
$P_4(T_4) = e^{-g/T_4}$, где $T_4(R=0) = 6n\tau$, $T_4(R>0) = n\tau\,/\,(R+0{,}5)$	0,01200	0,15665	13,05	1,87
Оценка, предлагаемая для плана испытаний типа NBτ в [25]				
$P_v(g;T_v(R)) = e^{-g/T_v(R)}$, где $T_v(R=0) = 5{,}2\cdot n\tau$, $T_v(R>0) = n\tau\,/\,(R + 0{,}5)$, для любых τ и g	0,01180	0,15105	12,80	1,78
$P_{v1}(g;T_v(R)) = e^{-g/T_v(R)}$, где $T_v(R=0) = 200\cdot n\tau$, $T_v(R>0) = n\tau\,/\,(R + 0{,}5)$, для $\tau > g$	0,00232	0,19017	81,9	0,44
$P_{v2}(g;T_v(R)) = e^{-g/T_v(R)}$, где $T_v(R=0) = 18\cdot n\tau$, $T_v(R>0) = n\tau\,/\,(R + 0{,}5)$, для $\tau = g$	0,00536	0,259	48,3	1,3

Из таблицы 2.5 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $P_v(T_v)$ с минимальной величиной характеристики $C = 1{,}78$. Оцекна $P_v(T_v)$ представлена в виде трёх вариантов, каждый из которых соответствует одному из вариантов:

– τ и g – любые различные или нет величины из диапазона вычислений $[10^2;10^5]$;

– τ и g – любые различные или нет величины из диапазона вычислений $[10^2;10^5]$ при условии $\tau \geq g$;

– τ и g – любые величины из диапазона вычислений $[10^2;10^5]$ условии $\tau = g$.

Оценку P_v следует использовать при прогнозировании ВБР ($g > \tau$) или по результатам государственных испытаний, которые, как правило, проводятся за время τ меньшее чем оценочное время g. Так же оценку P_v используют, когда необходимо получить консервативную оценку параметра показателя надежности.

Оценку P_{v1} следует использовать, когда оценка ВБР производится за время меньшее чем время испытаний $g < \tau$ (как правило, по результатам длительной эксплуатации).

Оценку P_{v2} следует использовать тогда, когда оценка ВБР производится за время равное времени проведения испытаний $g = \tau$.

Оценки ВБР P_{v1} и P_{v2} сравнимы с оценками ВБР, полученные для биномиального плана, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и отражено в части 3 настоящей книги.

2.7. Получение эффективной смещённой оценки гамма-процентной наработки

В современном производстве высоконадежных, уникальных, сложных изделий стала обычной ситуация, в которой необходимо получить оценку гамма-процентного срока сохраняемости (ГПСС) или гамма-процентной наработки до отказа (ГПНДО) на основе испытаний, не давших отказы.

Под ГПНДО понимается наработка, в течение которой отказ не возникнет с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах [27]. Аналогично, под ГПСС понимается календарная продолжительность хранения изделия, в течение и после которой изделие способно выполнять требуемую функцию с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах [27]. При условии подчинения наработки до отказа экспоненциальному закону распределения с параметром T_0, величина ГПНДО (далее – t_γ) вычисляется по формуле

$$t_\gamma = -T_0 ln(\gamma).$$

С целью построения оценки ГПНДО t_γ вполне естественным будет, если в качестве оценки параметра T_0, воспользоваться традиционной оценкой средней наработки до отказа, построенной для экспоненциального распределения [4, 5]:

$$T_{02} = N\tau/R \text{ при } R > 0.$$

Однако полученная таким образом оценка ГПНДО имеет существенные недостатки, а именно:

– оценка является смещенной;

– оценка является неэффективной;

– оценка не позволяет получать количественные значения ГПНДО t_γ по результатам испытаний, не давшим отказов.

Для решения упомянутой выше задачи достаточно найти несмещенную эффективную оценку, если такая существует в классе состоятельных смещенных оценок.

В качестве инструмента при нахождении эффективной оценки будем использовать интегральные характеристики [9, 12, 17]. Аналогично [9, 12, 17] построим функционал (далее — $A(\hat{t}_\gamma)$), в основе которого лежит суммарный квадрат отклонения ожидаемой реализации оценки $\hat{t}_\gamma$ от истинного количественного значения t_γ для всех возможных величин, принимаемых параметрами T_0, N и τ:

$$A(\hat{t}_\gamma) = \int_0^\infty \frac{1}{{T_0}^2} \left\{E\hat{t}_\gamma - T_0 ln(\gamma)\right\}^2 \partial\Delta,$$

где переменная интегрирования T_0 – парметр з.р. СНДО; ${T_0}^2$ – нормирующий множитель; $\hat{t}_\gamma = -\hat{T}_0 ln(\gamma)$, а член в подынтегральном выражении равен $T_0\, ln(\gamma) = t_\gamma$.

Воспользовавшись свойствами пуассоновского потока с параметром Δ [4, 5] найдем

$$E\hat{t}_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} -\hat{T}_0 \ln(\gamma) e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!}.$$

Эффективная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$ должна обладать минимальной величиной функционала $A(\hat{t}_{\gamma 1})$.

Вынесем из-под знака интеграла $(-ln(\gamma))$, тогда функционал $A(\hat{t}_\gamma)$ примет вид

$$A(\hat{t}_\gamma) = -\ln^2(\gamma) \int_0^{\infty} \frac{1}{{T_0}^2} \{E\hat{T}_0 - T_0\}^2 \partial\Delta.$$

В соответствии с [9, 12 – 16] интеграл в формуле для функционала $A(\hat{t}_\gamma)$ принимает минимальную величину, а вместе с ним и сам функционал $A(\hat{t}_\gamma)$, если в качестве оценки параметра T_0 подставить его эффективную оценку, построенную в достаточно широком классе смещенных оценок.

Для плана испытаний типа $NB\tau$ эффективной смещённой оценкой СНДО является оценка

$T_{B2} = 2{,}5n\tau$ при $R = 0$, $T_{B2} = n\tau / (R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$, $T_{B2}(R > 5) = n\tau / (R + 1)$.

Тогда эффективная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$, построенная в достаточно широком классе оценок [12], примет вид

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) 2{,}5 n\tau \text{ при } R = 0,$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\frac{\ln(\gamma) n\tau}{(R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)} \text{ при } 1 \le R \le 5,$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) n\tau \,/\, (R + 1) \text{ при } R > 5\,. \qquad (2.13)$$

Для испытаний, не давших отказов, оценку $\hat{t}_{\gamma 1}$ можно применять и для плана типа NБτ. Полученная таким образом оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$ имеет существенные преимущества, а именно:

– оценка является эффективной в достаточно широком классе оценок [12];

– оценка позволяет получать количественное значение ГПНДО t_γ по результатам испытаний, не давшим отказов и проводимым по плану типа NБτ или NВτ.

Все сказанное в этом подразделе о нахождении эффективной оценки ГПНДО следует отнести и к эффективной оценке ГПСС.

2.8. Получение эффективной смещённой оценки остаточного гамма-процентного ресурса

Под остаточным ресурсом понимается: суммарная наработка объекта от момента контроля его технического состояния до момента достижения его предельного состояния [27]. То есть остаточный ресурс – ресурс, который исчисляется от количественного значения наработки $t_\text{н}$ в текущий момент времени. В основе понимания долговечности изделия (его ресурса) лежит понимание модели надежности [27], которая описывает закон распределения отказов. Внезапные отказы, носящие случайный характер, обычно довольно хорошо описываются экспоненциальным законом. Напротив, отказы, носящие название постепенных, во многих случаях довольно хорошо описываются нормальным законом [4]. У реального изделия часто совмещаются оба типа отказов. Изделие находится в работоспособном состоянии до первого из этих отказов. Пусть $P_1(s)$ – вероятность того, что за время s не произойдет внезапный отказ, а $P_2(s)$ – вероятность того, что за время s не произойдет постепенный отказ. В предположении, что отказы возникают независимо друг от друга и совместны, ВБР будет равна $P_0(s) = P_1(s)P_2(s)$. ВБР $P_0(s)$ имеет сложное аналитическое выражение [4], что значительно затрудняет проведение расчетов. Однако на практике в большинстве случаев на относительно коротком временном промежутке составляющей $P_2(s)$ можно пренебречь, поэтому ВБР $P_0(s) = P_1(s)$ и $P_1(s)$ имеет экспоненциальный характер по предположению.

Покажем это на примере изделий электронной техники. Электро-радиоизделия (ЭРИ) характеризуются минимальной наработкой (далее – t_{min}), величина которой находится в пределах 15–25 лет. Минимальной наработке t_{min} соответствует гамма-процентный ресурс (ГПР) ЭРИ при $\gamma = 0{,}999$, т. е. вероятность постепенного отказа ЭРИ на относительно коротком временном участке, равном минимальной наработке, близка к нулю, что соответствует пологому участку плотности нормального закона распределения. Поэтому интенсивность отказов ЭРИ на начальном пологом участке плотности нормального з.р. приближенно можно выразить формулой $\lambda_2(s) \cong \lambda_2 = const$, следовательно $P_2(s) = e^{-\lambda_2 s}$, где $\lambda_2 \ll \lambda_1$ – приближение константой интенсивности отказов на пологом участке кривой нормального закона распределения. Причем на этом пологом участке $P_2(s) > 0{,}95$ (определяет критерий соответствия выбранной экспоненциальной модели). С другой стороны, для экспоненциального закона распределения вероятность отказа высоконадежного изделия выражается формулой $P_1\,(t) = e^{-\lambda_1 s}$. Исходя из полученных приближений и равенства $P_0(s) = P_1(s)P_2(s) \cong e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} \cong e^{-\lambda_1 s}$ получаем, что на пологом временном участке ВБР определяется с хорошим приближением экспоненциальным законом. В этом случае гамма-процентная наработка до отказа совпадает с гамма-процентным ресурсом.

Все сказанное можно отнести и к более сложному изделию, состоящему из большого количества ЭРИ.

Чаще всего в качестве показателя долговечности используется гамма-процентный ресурс, и совсем редко – средний ресурс. Это объясняется тем, что за время, равное среднему ресурсу, откажет половина изделий, а с точки зрения безопасности и экономичности такая эксплуатация является неоправданной. В соответствии с [27] ГПР – суммарная наработка, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах. Аналогично определяется остаточный гамма-процентный ресурс

(ОГПР), а именно: ОГПР – суммарная наработка объекта, исчисляемая от момента контроля его технического состояния, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах.

Для невосстанавливаемых сложных изделий ГПР не превышает минимальной наработки любого ЭРИ, входящего в состав этого сложного изделия, а вероятность γ обычно задают в пределах от 0,95 до 0,999. Такой выбор величин вероятности разграничивает временной промежуток использования изделия на интервалы, где начальный интервал ограничен величиной ГПР ($\gamma\ \geq 0{,}95$). Такое разграничение позволяет считать, что в пределах этого начального интервала (15–25 лет) модель надежности невосстанавливаемых сложных изделий $P_0(s)\ =\ P_1(s)$ находится в рамках влияния экспоненциального закона. Этот факт позволяет делать прогнозы величины ГПР (ОГПР) невосстанавливаемых сложных изделий в пределах установленных ограничений (≤25 лет).

Модель надежности. На интервале [0; 25] лет, ограниченном величиной минимальной наработки ЭРИ t_{min}, наработка до отказа невосстанавливаемых сложных изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 (СНДО). Величина ВБР (далее – $P_0(s)$) за заданное время (далее – s, $s \leq t_{min}$) будет определяться равенством $P_0(s) = e^{-s/T_0}$.

Из этого выражения легко выводится расчетная формула для ГПР ($\gamma_{\text{н}} = P_0(s = t_{\text{н}})$):

$$t_{\text{н}} = -T_{01}ln(\gamma_{\text{н}}).$$

Начальную (нормированную) величину ГПР $t_{\text{н}}$ устанавливают по факту (в техническом задании).

Устанавливая (нормируя) величину вероятности ($\gamma_{\text{п}}$) для продленного ресурса (далее – $t_{\text{п}}, \gamma_{\text{п}}(t_{\text{п}}) < \gamma_{\text{н}}(t_{\text{н}})$) легко рассчитать ОГПР изделия (далее – $t_{\text{ост.}\gamma}$):

$$t_{\text{ост.}\gamma} = t_{\text{п}} - t_{\text{н}} = -T_0 \ln\big(\gamma_{\text{п}}(t_{\text{п}})\big) - \Big(-T_0 \ln\big(\gamma_{\text{н}}(t_{\text{н}})\big)\Big) =$$

$$= T_0 \ln(\gamma_{\text{н}}) - T_0 \ln(\gamma_{\text{п}}). \qquad (2.14)$$

Из формул (2.13), (2.14) легко рассчитать вероятность для ОГПР $t_{\text{ост.}\gamma}$, а именно: $\gamma = e^{-t_{\text{ост.}\gamma}/T_0}$.

Устанавливая (нормируя) величину вероятности $\gamma_{п}$ для продленного ресурса $t_{прогноз}$: $\gamma_{п}(t_{п}) = 0{,}95 = \gamma_{прогноз}(t_{прогноз})$, можно прогнозировать ОГПР изделия в соответствии с формулой (2.14), а именно:

$$t_{прогноз.ост.\gamma} = T_0 \ln(\gamma_{н}) - T_0 \ln(\gamma_{прогноз} = 0{,}95).$$

Как и в предыдущем подразделе, строится критерий выбора эффективной оценки на множестве оценок $\hat{t}_{ост.\gamma}(R, N, t)$, основанном на суммарном квадрате относительных смещений математического ожидания оценок $E\hat{t}_{ост.\gamma}(R, N, t)$ от истинного количественного значения $t_{ост.\gamma} = T_0(\ln(\gamma_{н}) - \ln(\gamma_{п}))$ для всех возможных величин, принимаемых параметрами T_0, R, N, t

$$A(\hat{t}_{ост.\gamma}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{{T_0}^2} \left\{E\hat{t}_{ост.\gamma} - T_0(\ln(\gamma_{н}) - \ln(\gamma_{п}))\right\}^2 \partial\Delta\,,$$

где переменная интегрирования T_0 – парметр з.р. СНДО; ${T_0}^2$ – нормирующий множитель; $\hat{t}_{ост.\gamma} = -\widehat{T}_0(\ln(\gamma_{н}) - \ln(\gamma_{п}))$, а член в подынтегральном выражении $T_0(\ln(\gamma_{н}) - \ln(\gamma_{п})) = t_{ост.\gamma}$;

$$E\hat{t}_{ост.\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{T}_0(\ln(\gamma_{н}) - \ln(\gamma_{п}))e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}\,.$$

Эффективная оценка ОГПР $\hat{t}_{ост.\gamma}$ должна обладать минимальной величиной функционала $A(\hat{t}_{ост.\gamma})$.

Вынесем из-под знака интеграла $(\ln(\gamma_{н}) - \ln(\gamma_{п}))$, тогда функционал $A(\hat{t}_{ост.\gamma})$ примет вид

$$A(\hat{t}_{ост.\gamma}) = (\ln(\gamma_{н}) - \ln(\gamma_{п}))^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{{T_0}^2} \left\{E\widehat{T}_0 - T_0\right\}^2 \partial\Delta\,.$$

В соответствии с [9, 12] интеграл в формуле для функционала $A(\hat{t}_{ост.\gamma})$ принимает минимальную величину (а вместе с ним и сам функционал $A(\hat{t}_{ост.\gamma})$), если в качестве оценки параметра T_0 подставить его эффективную оценку, построенную в достаточно широком классе смещенных оценок. Для плана испытаний типа $NB\tau$ эффективной смещённой оценкой СНДО является оценка

$T_{B2} = 2{,}5n\tau$ при $R = 0$, $T_{B2} = n\tau / (R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$,

$T_{B2}(R > 5) = n\tau / (R + 1)$.

Т. о. в формулу $t_\gamma = -T_0 Ln(\gamma)$ следует подставлять вместо параметра T_0 его эффективную смещённую оценку T_{B2}.

Тогда эффективная оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$, построенная в достаточно широком классе смещённых оценок [17], примет вид

$$\hat{t}_{\text{ост.}\gamma} = \begin{cases} \big(\ln(\gamma_\text{н}) - \ln(\gamma_\text{п})\big)2{,}5n\tau \ \text{ при } R = 0, \\ \big(\ln(\gamma_\text{н}) - \ln(\gamma_\text{п})\big)\cdot\dfrac{n\tau}{(R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6\text{R})} \ \text{при } 0 \le R \le 5, \\ \big(\ln(\gamma_\text{н}) - \ln(\gamma_\text{п})\big)\cdot\dfrac{n\tau}{(R+1)} \ \text{при } R > 5, \\ \gamma_\text{п} \ge 0{,}95, \gamma = \dfrac{\gamma_\text{п}}{\gamma_\text{н}}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Для испытаний, не давших отказов, оценку $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ можно применять и для плана типа $N\text{Б}\tau$. Полученная таким образом оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ имеет существенные преимущества, а именно:

– оценка является эффективной в достаточно широком классе смещённых оценок [12];

– оценка позволяет получать количественные значения ОГПР $t_{\text{ост.}\gamma}$ по результатам испытаний, не давшим отказов и проводимых по плану типа $N\text{Б}\tau$ или $N\text{В}\tau$.

Пример 2.1

В качестве показателя надежности изделия используется ГПР (ГПНДО) $t_\gamma(\gamma=0{,}95)$, которая не должна быть менее 12000 ч. По результатам испытаний 10 изделий в течение 10000 ч отказы не возникали $R = 0$. Требуется сделать прогноз ГПР(ГПНДО) $t_\gamma(\gamma=0{,}95)$, и проверку соответствия изделия требованиям к надежности.

Заметим, что в данном примере наработка 10000 ч не определяет предельное состояние изделия, как невосстанавливаемого (отказов всех изделий не было), так и восстанавливаемого. Поэтому γ=0,95 является минимальным пределом для того, чтобы при этой наработке выполнялось приближенное равенство ГПР ≈ ГПНДО, т. е. судить о ГПР по наработке, не дающей предельного состояния, при γ < 0,95 не корректно.

Непосредственно из формулы $t_\gamma = -T_0 Ln(\gamma)$, после подстановки $T_{\text{В}2}$ вместо T_0, следует, что прогнозируемая величина ГПР (ГПНДО) составит:

$T_{\text{В}2} = 2{,}5n\tau = 2{,}5\cdot 10\cdot 10000 = 250000$ ч,

$\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = -T_{B2} Ln(\gamma) = -250000 Ln(\gamma=0{,}95) = 12823$ ч.

По результатам прогнозирования величины ГПР (ГПНДО) $t_\gamma(0{,}95)$ можно сделать вывод о несоответствии изделия требованиям к ГПР (ГПНДО). Время, в течение которого откажет не более 5 % изделий, составит $\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = 12823$ ч, что соответствует требованиям к надежности изделия ($t_\gamma(0{,}95) = 12000$ ч.).

Традиционное решение примера

Традиционно для испытаний, в процессе которых отказы не возникали, оценку ГПР $\hat{t}_{\gamma н}$ оценивают по нижней доверительной границе средней наработки до отказа с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}9$ (не путать с вероятностью «гамма») при этом результат оценивают в соответствии с [25]:

$$T_{01н} = \frac{2NT}{x^2(1-\propto;2r+2)} = \frac{2\cdot10\cdot10000}{2{,}71} = 73800 \text{ ч},$$

где $x^2(1-\propto;2r+2)$ – квантиль x^2- распределения с $(2r+2)$-й степенью свободы (для плана испытаний NBτ); $r = 0$ – реализация с.в. R, $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ – уровень значимости согласно ГОСТ Р 50779.26–2007;

$\hat{t}_{\gamma н} = -\ln(\gamma)T_{01н} = -\ln(0{,}95)\cdot 73800 = 3785$ ч. Что не соответствует требованиям к надежности.

Пример 2.2

По результатам эксплуатации, в процессе которой отказы не возникали $R = 0$, группы из 10 однотипных аппаратов в течение нормативного срока работы, равного одному году (8760 ч), было принято решение продолжить эксплуатацию этих аппаратов еще в течение года с целью определения ОГПР. По результатам продолженной эксплуатации отказы обнаружены не были.

Требуется сделать оценку ОГПР аппаратов $\hat{t}_\gamma$ (и рассчитать соответствующую ей вероятность γ) и распространить сделанную оценку ОГПР на всю партию аппаратов, чьи наработки в эксплуатации не превысят нормативный срок работы. Сделать прогноз ОГПР при γ=0,95.

Решение. $T_{B2} = 2{,}5n\tau = 2{,}5\cdot10\cdot17520 = 438000$ ч,

$\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = -T_{B2}Ln(\gamma) = -438000Ln(\gamma=0{,}95) = 22466$ ч.

Тогда прогнозируемая величина ОГПР составит $\tilde{t}_{ост.\gamma}(0{,}95) = \tilde{t}_\gamma(0{,}95) - 10000 = 12466$ ч при $\gamma = Exp\{-12466/T_{B2}\} = 0{,}971$.

В соответствии с подразделом 2.6 [24, 25] делаем оценку ВБР группы аппаратуры за первичную (или продолженную) наработку, равную 8760 ч, по результатам продолженной эксплуатации, в процессе которой отказы не возникали, в течение 17520 ч, по формуле $P_{\text{В}}(T_{\text{В}}(R>0)) = e^{-g/T_{\text{В}2}(R>0)}$.

$$\gamma_{\text{н}}(t_{\text{Н}}) = e^{\left(-\frac{8760}{438000}\right)} = 0{,}980.$$

То есть первичная или продолженная наработка, равная 8760 ч, соответствует ГПР группы аппаратов при $\gamma = 98{,}0$ %.

По результатам оценки $\hat{t}_{\gamma}$ можно сделать вывод, что продолженный ОГПР группы аппаратов составил 8760 ч при $\gamma = 98{,}0$ %. То есть аппатары, чьи сроки эксплуатации достигнут 8760 ч, смогут проработать еще 8760 ч с ВБР равной 0,98, т.е при этом ожидается, что откажет не более 2,0% из их общего числа.

Пример 2.3

В отличие от примера 2.2, только девять аппаратов отработали в течение нормативного срока работы, равного одному году (8760 ч), а один (эталонный) отработал два срока. Требуется определить ОГПР этого эталонного аппарата, т. е. найти $\hat{t}_{\gamma}$ (и рассчитать соответствующую ей вероятность γ) и распространить сделанную оценку ОГПР на оставшиеся девять аппаратов, находящихся в эксплуатации с наработкой равной $t_{\text{н}} = 8760$ ч .

Решение. $T_{\text{В}2} = 2{,}5n\tau = 2{,}5 \cdot 11 \cdot 8760 = 240000$ ч,

$\tilde{t}_{\gamma}(0{,}95) = -T_{B2}Ln(\gamma) = -240000Ln(\gamma=0{,}95) = 12356$ ч.

В соответствии с подразделом 2.6 [24, 25] делаем оценку ВБР группы аппаратов за первичную или продолженную наработку, равную 8760 ч, по результатам продолженной эксплуатации, в процессе которой отказы не возникали, в течение 17520 ч, по формуле $P_{\text{В}}(T_{\text{В}}(R>0)) = e^{-g/T_{\text{В}2}(R>0)}$.

$$\gamma_{\text{н}}(t_{\text{Н}}) = e^{\left(-\frac{8760}{240000}\right)} = 0{,}964.$$

То есть первичная (или продолженная) наработка, равная 8760 ч, соответствует ГПР группы аппаратов при $\gamma = 96{,}4$ %.

По результатам оценки $\hat{t}_{\gamma}$ можно сделать вывод, что продолженный ОГПР группы аппаратов составил 8760 ч при $\gamma = 96{,}4$ %. То есть аппараты, чьи сроки эксплуатации достигнут 8760 ч, смогут проработать еще 8760 ч с ВБР равной 0,964, т.е при этом ожидается, что откажет не более 3,6% из их общего числа.

Выводы к разделу 2

Для плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением в качестве эффективных смещённых оценок следует признать:

– оценку СНДО $T_{В2} = 2{,}5n\tau$ при $R = 0$, $T_{В2} = n\tau / (R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)$ при $1 \leq R \leq 5$, $T_{В2}(R > 5) = n\tau / (R + 1)$;

– оценку для прогнозирования ВБР $P_v(T_v) = e^{-g/T_v(R)}$ за время превышающее длительность испытаний $g > \tau$,

где $T_v(R{=}0) = 5{,}2 \cdot n\tau$, $T_v(R{>}0) = n\tau / (R + 0{,}5)$, τ и g – любые различные или нет величины из диапазона вычислений $[10^2;10^5]$;

– оценку ВБР изделия, находящегося в процессе длительной эксплуатации,

$P_{v1}(T_v) = e^{-g/T_v(R)}$ за время g,

где $T_v(R{=}0) = 200 \cdot n\tau$, $T_v(R{>}0) = n\tau / (R + 0{,}5)$, τ и g – любые различные или нет величины из диапазона вычислений $[10^2;10^5]$ при условии $\tau \geq g$;

– оценку ВБР по результатам испытаний $P_{v2}(T_v) = e^{-g/T_v(R)}$ за время g, равное длительности этих испытаний,

где $T_v(R{=}0) = 18 \cdot n\tau$, $T_v(R{>}0) = n\tau / (R + 0{,}5)$,

τ и g – любые величины из диапазона вычислений $[10^2;10^5]$ при условии $\tau = g$;

– оценку гамма-процентной наработки (ресурса) $\gamma \geq 0{,}95$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) 2{,}5 n\tau \text{ при } R = 0,$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\frac{\ln(\gamma) n\tau}{(R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)} \text{ при } 1 \leq R \leq 5,$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) n\tau / (R + 1) \text{ при } R > 5 \; ;$$

– оценку остаточного гамма-процентного ресурса $\gamma_п \geq 0{,}95$

$$\hat{t}_{ост.\gamma} = \begin{cases} (\ln(\gamma_н) - \ln(\gamma_п)) 2{,}5 n\tau & \text{при } R = 0, \\ (\ln(\gamma_н) - \ln(\gamma_п)) \cdot \frac{n\tau}{(R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)} & \text{при } 0 \leq R \leq 5, \\ (\ln(\gamma_н) - \ln(\gamma_п)) \cdot \frac{n\tau}{(R + 1)} & \text{при } R > 5, \\ \gamma_п \geq 0{,}95, \gamma = \frac{\gamma_п}{\gamma_н}. & \end{cases}$$

ЧАСТЬ 3
БИНОМИАЛЬНЫЙ ПЛАН ИСПЫТАНИЙ

При проведении биномиальных испытаний на надежность исследователь сталкивается с проблемой оценки результатов испытаний, когда в процессе испытаний отказы изделий получены не были ($R{:}\, r = 0$). Тогда оценка показателя надежности по результатам испытаний либо невозможна, либо результат оценки свидетельствует о достоверном событии (вероятность безотказной работы равна единице). В этом случае исследователь традиционно в качестве оценки параметра выбирает ее нижнюю доверительную границу, что занижает надежность изделия и увеличивает риски. В этом случае вполне естественным становится желание исследователя получить такую формулу оценки, чтобы она адекватно оценивала нормируемый показатель надежности при любом исходе испытаний.

3.1. Выбор эффективной оценки вероятности безотказной работы для биномиального плана испытаний

План действий

Для испытаний, не давших отказы, оценка ВБР приобретает величину равную единице ВБР $= 1 - \hat{p}(R = 0, n) = 1$,

где $\hat{p}(R = 0, n) = R/n = 0/n = 0$ – традиционная оценка вероятности отказа для биномиального плана испытаний. То есть формально из результатов испытаний, не давших отказов, всегда следует, что изделия из оцениваемой партии $N = n$ являются безотказными. Такой вывод противоречит здравому смыслу.

Очевидно, что в процессе испытаний, не давших отказов, для исследователя желаемым является результат, сравнимый с количественными значениями требований к показателям надежности, т. е. при положительном исходе испытаний, а отсутствие отказов свидетельствует об этом, оценка как минимум должна быть равной нормируемой величине (далее – норма) показателя надежности. Этот минимум и должен определять величину желаемой оценки при испытаниях, не давших отказов, а ее вид согласно словесной формуле представляет собой составную оценку, а именно:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{\text{норма}}(R) = 1 - \text{ВБР норма}, R = 0, \\ \hat{\theta}_{\text{норма}}(R, N) = \dfrac{R}{N}, \qquad R > 0. \end{cases}$$

Для испытаний, не давших отказов, оценка $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R = 0, n)$ не зависит от объема испытаний: количества испытуемых изделий $N = n$ и времени испытаний, так как в этом случае не зависит от объема испытаний и традиционная оценка $\hat{p}(R = 0, n) = R/n = 0/n = 0$. Величина оценки $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R = 0, n)$ (испытания проведены без отказов) формируется в зависимости от величины нормируемого значения ВБР, которая всегда отлична от единицы, т. е. какое требование к ВБР – такая и оценка вне зависимости от объема испытаний. Оценку $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R, n)$ следует признать эффективной среди смещенных оценок. В принципе оценку $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R, n)$ можно сколь угодно близко приближать по своей эффективности к эффективной и несмещенной оценке $\hat{p}(R, n) = R/n$, приближая нормированную величину к единице. Чем больше нормируемая величина ВБР, тем эффективнее оценка $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R, n)$. Вычисления с шагом $\partial p = 1E - 03$ уже для $\text{ВБР}_{\text{норма}} = 0{,}999$ дают величины функционала, близкие к количественным значениям функционала на $\hat{p}(R, n) = R/n$, а именно:

$$L(\hat{\theta}_{\text{норма}}) = 1E - 07 \ \approx \ L(\hat{p}) = 6E - 33.$$

Построенная таким образом оценка $\hat{\theta}_{\text{норма}}$ позволит уйти от недостатков традиционной оценки $\hat{p}$ по результатам испытаний, в процессе которых отказы обнаружены не были. Однако свойство оценок $\hat{p}$ и $\hat{\theta}_{\text{норма}}$ не зависеть от количества испытуемых изделий $N = n$ при $R = 0$ приводит к казусу, когда необходимо определить количество испытуемых изделий. Это количество может выражаться любым числом, в том числе и единицей. Пользоваться в этом случае оценкой $\hat{\theta}_{\text{норма}}$ невозможно.

Построим оценки вероятности отказа (далее – $\hat{p}_i(R, n)$), которые адекватно зависят от количества испытуемых изделий и на их основе построим оценки ВБР и СНДО (далее – $\widehat{T}_i$). И, наоборот, на основе выбранных оценок СНДО построим оценки вероятности отказа. На оценки введем ограничения по строгой монотонности:

– для оценок вероятности отказа –

$$\hat{p}_i(R,n) < \hat{p}_i(R+1,n),\ \hat{p}_i(R,n+1) < \hat{p}_i(R,n);$$

– для СНДО – $\widehat{T}_i(R,n) > \widehat{T}_i(R+1,n), \widehat{T}_i(R,n+1) > \widehat{T}_i(R+1,n)$.

Вполне естественным становится введение ограничения на изменения величин оценок вероятности отказа от нуля до единицы. Такие ограничения позволяют резко ограничить множество оценок, на котором ведется поиск.

При выборе эффективных оценок особое место занимают оценки, заданные неявно.

3.2. Построение точечной оценки вероятности безотказной работы, заданной в неявном виде

Будем строить точечную оценку, заданную в неявном виде, используя приемы построения доверительных интервалов.

Пусть случайная величина R имеет биномиальное распределение $b_n(r)$ [2, ф. 1.4.55] с параметрами n и $p, 0 \le p \le 1$, т. е. с.в. $R = r$, равная числу успехов в серии из n независимых опытов, принимает целочисленные величины $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями: $b_n(r,p) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$.

Функция вероятности биномиального плана испытаний F_R имеет вид (см. формулу (1.4)):

$$F_R(r,N,p) = F_R(\mathrm{R} \le r,N,p) = \sum_{k=0}^{r} b_N(k,p)\,.$$

Функция F_R убывает по p, следовательно для построения одностороннего доверительного интервала $P(p_{\text{н}}) < p$ или $P(p_{\text{в}}) > p$, где $P-$ вероятность накрыть неизвестный параметр p односторонним интервалом, можно воспользоваться рекомендациями [2, ф. 2.15.37] и решить уравнения, а именно:

$$F_R(r, N, p_н) = 1 - \alpha = \gamma$$

$$\text{или } F_R(r, N, p_в) = 1 - \gamma = \alpha, \tag{3.1}$$

где γ – доверительная вероятность; α – уровень доверия.

Решение уравнений (формула (3.1)) позволяет найти доверительные границы $p_н$ и $p_в$. Доверительное оценивание является дополнительным инструментом, который позволяет оценивать вероятность уклонения точечной оценки параметра надежности от его истинного количественного значения [1].

Если полученный интервал $p_н$ и $p_в$ свести в точку, то доверительные границы этого интервала совпадут, т. е. $p_н$ станет равной $p_в$, что определит точечную оценку $\hat{v} = p_н = p_в$. Такой результат возможен в единственном случае, когда $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}5$, что определяет единственность оценки $\hat{v}$.

Воспользуемся формулой (3.1), тогда неявно заданная оценка $\hat{v}$ получается из уравнения

$$F_R(r, N, p) = \sum_{k=0}^{r} b_N(k, \hat{v}) = C_N^r \hat{v}^r (1 - \hat{v})^{N-r} = 0{,}5. \tag{3.2}$$

Заметим, что функция вероятности биномиального плана испытаний F_R монотонно убывает с ростом p [1, 2, 9], а следовательно уравнение имеет единственное решение. Величины, принимаемые оценкой $\hat{v}(R, n, \alpha = 0{,}5)$ представлены в приложении Б.

3.3. Построение критерия выбора эффективности смещённой оценки для вероятности отказа (классическая процедура построения)

Критерий выбора эффективности смещённой оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок $\hat{\theta}(R, n)$ основан на суммарном квадрате смещений математического ожидания оценок $E\hat{\theta}(R, n)$ от вероятности отказа p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, n.

Для выбора эффективной смещённой оценки вероятности отказа (или ВБР) потребуется только понятие абсолютно эффективной оценки по смещению и ограничение на изменение параметра p в пределах $1 \leq p \leq 0$. Поэтому для простоты в качестве критерия получения эффективной смещённой оценки $\hat{\theta}_0(R,n)$ строится функционал (далее – $L(\hat{\theta}(R,n))$) на ограниченном множестве $n = 1, \dots, N$; [18–22] (см. также формулы (1.12)–(1.16)):

$$L\big(\hat{\theta}(R,n)\big) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\big\{E\hat{\theta}(R,n) - p\big\}^2\partial p\ . \qquad (3.3)$$

Оценка $\hat{\theta}_0(R,n)$, минимизирующая функционал $L\big(\hat{\theta}(R,n)\big)$ на заданном множестве оценок, называется эффективной смещённой оценкой в заданном множестве смещенных оценок. Среди оценок, доставляющих примерно один и тот же минимум функционалу $L\big(\hat{\theta}(R,n)\big)$, следует выбрать оценку, которая имеет минимальное уклонение в среднеквадратическом смысле (классическое определение эффективной оценки [1]). Данную оценку будем называть более эффективной в сравнении с выбранными.

Для выбора оценок, обладающих минимальным уклонением, строится функционал (далее – $M\big(\hat{\theta}(R,n)\big)$) основанный на суммировании математических ожиданий квадратов уклонений оценок $\hat{\theta}(R,n)$ от параметра p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, n [18–22] (см. также формулы (1.12)–(1.16)):

$$M\big(\hat{\theta}(R,n)\big) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1 E\big\{\hat{\theta}(R,n) - p\big\}^2\partial p. \qquad (3.4)$$

Оценку, которая доставляет нуль функционалу $L(\hat{\theta}_0(R,n)) = 0$ (несмещенная оценка) и минимум функционалу $M\left(\hat{\theta}_0(R,n)\right)$, будем называть абсолютно эффективной в классе смещённых оценок (или просто – эффективной).

Математическое ожидание $E\hat{\theta}(R,n)$ имеет вид

$$E\hat{\theta}(R,n) = \sum_{r=0}^{n}\mathrm{b}_n(r)\hat{\theta}(r,n).$$

Ограничим объем испытаний $1 \leq n \leq 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула (3.3) примет вид

$$L\big(\hat{\theta}(R,n)\big) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1\big\{E\hat{\theta}(R,n) - p\big\}^2\partial p\ .$$

А формула (3.4) примет вид

$$M\big(\hat{\theta}(R,n)\big) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_{0}^{1} E\big\{\hat{\theta}(R,n) - p\big\}^2 \partial p\,.$$

В качестве эталона сравнения оценок вероятности отказа будем рассматривать традиционную оценку $\hat{p}(R,n) = R/n$, которая является несмещенной и эффективной оценкой параметра p [2, пример 2.4.20], и неявно заданную оценку вероятности отказа для биномиального плана испытаний (далее – $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$) [9, 18]. Оценка $\hat{p}(R,n) = R/n$ также является и оценкой максимального правдоподобия [2, пример 2.10.7].

3.4. Преимущество составных оценок вероятности отказа (или ВБР) для биномиального плана

Оценки вероятности отказа $\hat{p}_i$, предлагаемые для сравнения, строятся по общей формуле:

$$\hat{p}_i(R,n) = \begin{cases} f_i(R = 0, n), R = 0\,, \\ \dfrac{R}{n}, \qquad R > 0\,, \end{cases}$$

где f_i – некоторая функция от R, n, τ, не нарушающая принцип строгой монотонности и аддитивности по случайной переменной R. Эти оценки обслуживают случай, когда распределение наработки до отказа не конкретизируется, и в этом их преимущество.

Знания о распределении параметра дает некоторое преимущество для оценок, основанных на этих знаниях. Далее предполагается, что вероятность отказа p является функцией от параметра СНДО и наработка до отказа имеет экспоненциальную зависимость распределения вероятностей. Тогда оценки параметра p можно представить через оценки СНДО:

$$\hat{p}_i(R,n,\tau) = e^{(-\tau/\hat{T}_i)},$$

где $\hat{T}_i$ – некоторые выбранные оценки СНДО.

Имея неявно заданную оценку ВБР $\hat{V} = 1 - \hat{v}$ за время, равное времени испытаний τ, легко получить оценку СНДО $\hat{T}_{\hat{v}} = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{v}(R,n,\gamma=0{,}5))}$ для биномиального плана испытаний. Аналогично, для оценки ВБР $\hat{P} = 1 - \hat{p}(R,n) = 1 - \frac{R}{n}$ оценка СНДО примет вид $\hat{T}_{\hat{p}} = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{p}(R,n))}$.

Количественные значения оценки $\hat{v}(R,n,\beta = 0{,}5)$ представлены в приложении Б.

Оценка СНДО для биномиального плана испытаний (NБτ) в соответствии с [4, с. 188] имеет вид

$$\hat{T}_2 = \frac{S(R,\tau,s_i,\mathrm{n})}{R},$$

где s_i – моменты отказов, $i = 1,2,\ldots,R > 0$; S – суммарная наработка.

Доопределим оценку $\hat{T}_2$ при $R = 0$ величиной $\hat{T}_2 = S(R,\tau,n) = n\tau$.

Чтобы уйти от деления на ноль для оценки СНДО, подобной $\hat{T}_2$, представим ее в виде

$$\hat{T}_1 = S(R,\tau,s_i,n)/(R+1)\ .$$

Будем рассматривать простой случай и сократим число переменных для оценок $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$. Для этого будем предполагать, что разброс наработок до отказа s_i происходит симметрично относительно времени испытаний $\tau/2$. Это выполнимо для высоконадежных изделий $\tau/T_0 < 0{,}1$ [4, с. 188]. Поэтому

$$S(R,\tau,n) = (n-R)\tau + R\tau/2.$$

Соответственно изложению оценки ВБР за время, равное времени испытаний τ, будут иметь вид

$$\hat{P}_1(R,\tau,\mathrm{n}) = \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_1(\mathrm{R,n,\tau})}\right) \text{ и } \hat{P}_2(R,\tau,\mathrm{n}) = \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_2(\mathrm{R,n,\tau})}\right).$$

Или оценки вероятности отказа за время, равное времени испытаний τ, будут иметь вид

$$\hat{p}_1(R,\tau,\mathrm{n}) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_1}\right) \text{ и } \hat{p}_2(R,\tau,\mathrm{n}) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_2}\right).$$

Выбранные составные оценки параметра p имеют вид

$$\hat{p}_3(R,N) = \begin{cases} \hat{v}(R=0,N,\beta=0{,}5), R=0\,, \\ \dfrac{R}{N}, \quad R>0\,. \end{cases}$$

В таблице 3.1 приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(R,n))$ и $M(\hat{\theta}(R,n))$ в соответствии с формулами (3.3) и (3.4) следующих оценок вероятности отказа: $\hat{v},\hat{p},\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3$. Вычисления проводились с шагом $\partial p = 1E-3$.

Таблица 3.1

Результаты подстановки оценок вероятности отказа для биномиального плана испытаний в функционалы $L(\hat{\theta}(R,n))$ и $M(\hat{\theta}(R,n))$

Функционалы	$\hat{v}(\beta=0{,}5)$	$\hat{p}=R/n$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{p}_3$
$L(\hat{\theta}(R,n))$	0,0175	6E-33	0,0272	0,0186	0,0113
$M(\hat{\theta}(R,n))$	0,0286	0,0488	0,0216	0,0200	0,0301

Из таблицы 3.1 следует, что составная оценка $\hat{p}_3$ по своей эффективности превосходит все предложенные оценки, но является смещенной и уступает эталонной несмещенной и эффективной оценке $\hat{p}=R/n$. Заметим, что для испытаний, не давших отказов, $R=0$ величины оценки $\hat{v}$ и составной оценки $\hat{p}_3$ совпадают, а в случае $R>0$ уже совпадают классическая оценка $\hat{p}$ и составная оценка $\hat{p}_3$. Из таблицы 3.1 следует, что оценка $\hat{p}_2$ по разбросу принимаемых величин превосходит все предложенные оценки в смысле минимального количественного значения. Однако составная оценка $\hat{p}_3$ обладает примерно равным с оценкой $\hat{p}_2$ разбросом принимаемых величин и, обладая минимальным смещением имеет преимущество. Поэтому составную оценку $\hat{p}_3$ можно принять в качестве искомой эффективной оценки среди предложенных.

Построенная составная оценка $\hat{p}_3$ позволяет уйти от казуса, когда оцениваем ситуацию как достоверное событие при отсутствии отказов на испытаниях. Для испытаний, когда отсутствуют отказы высоконадежных изделий, истина о величине оценки ВБР всегда ближе к единице чем нулю [9, 13]. Поэтому построенная составная оценка $\hat{p}_3$ позволяет сделать вывод, что по результатам испытаний, в которых отсутствуют отказы, ВБР будет не менее оценочной величины $(1-\hat{p}_3)$.

Пример 3.1

В процессе испытаний на надежность одного изделия в течение 1000 ч отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, если нормируемая величина ВБР равна 0,999.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$\hat{P}=1-R/n$	$1-\hat{p}_1$	$1-\hat{p}_2$	$1-\hat{p}_3$
0,5	1	0,368	0,368	0,5

Пример 3.2

В процессе испытаний на надежность 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, если нормируемая величина ВБР равна 0,999.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$\hat{P}=1-R/n$	$1-\hat{p}_1$	$1-\hat{p}_2$	$1-\hat{p}_3$
0,933	1	0,905	0,905	0,933

Пример 3.3

В процессе испытаний на надежность одного изделия возник отказ. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$\hat{P}=1-R/n$	$1-\hat{p}_1$	$1-\hat{p}_2$	$1-\hat{p}_3$
0	0	0,018	0,0135	0

Пример 3.4

В процессе испытаний на надежность 10 изделий возник отказ. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$\hat{P}=1-R/n$	$1-\hat{p}_1$	$1-\hat{p}_2$	$1-\hat{p}_3$
0,837	0,900	0,810	0,9	0,9

3.5. Улучшение эффективности центрируемой оценки вероятности безотказной работы

Заметим, что центрируемые оценки близки по своей эффективности к лучшим оценкам [9, 18–20] и что, несмотря на оптимистическое определение центрируемой оценки $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$, эта оценка является смещенной относительно оцениваемого параметра $L(\hat{v}(R, n, \beta = 0{,}5)) > 0$. Однако это смещение можно уменьшить, а значит, и улучшить эффективность. Для этого достаточно минимизировать функционал $L\big(\tilde{v}(n; R)\big)$, варьируя величиной вероятности $0{,}5 + x$ в выражении $F_R(\tilde{v}) = \sum_r b_n\,(r, \tilde{v}) = 0{,}5 + x$, где x – некоторое вещественное число. Полученная таким образом оценка уже не является центрируемой, но имеет меньшую величину функционала $L(\tilde{v}(n; R))$ (смещение) в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$. А следовательно, от оценки $\tilde{v}$ можно ожидать и большую эффективность.

Заметим, что функция вероятности биномиального плана испытаний F_R монотонно убывает с ростом p [2], а следовательно, уравнение
$F_R(r, \tilde{v}) = \sum_r b_n\,(r, \tilde{v}) = \beta = 0{,}5 + x$ имеет единственное решение.

Расчеты показывают, что оценке $\tilde{v}$, минимизирующей функционал $L(\tilde{v}(n; R))$, соответствует вероятность $\beta = 0{,}5 + x = 0{,}81$:

$$\sum_{k=0}^{r} {C_n}^k \tilde{v}^k (1 - \tilde{v})^{n-k} = \beta = 0{,}81.$$

В таблице 3.2 приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(n; R))$ и $M(\hat{\theta}(n; R))$ в соответствии с формулами (3.3) и (3.4) следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$:

$$\hat{p} = \frac{R}{n}, \hat{v}(\beta = 0{,}5), \tilde{v}(\beta = 0{,}81), \hat{p}_3, \tilde{p}\ [9, 20]\ \text{и}\ \bar{\bar{p}} = \frac{R+1}{n+2}\ [9, 20],$$

где

$$\tilde{p} = \begin{cases} \tilde{v}(0, n, \beta = 0{,}81), & R = 0, \\ R/n, & R > 0. \end{cases}$$

Таблица 3.2

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа для биномиального плана испытаний в функционалы $L\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$ и $M\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$

Вид функционала	$\hat{v}(\beta = 0{,}5)$	$\tilde{v}(\beta = 0{,}81)$	$\hat{p}_3$	$\tilde{p}$	$\bar{\bar{p}} = \frac{R+1}{n+2}$	$\hat{p} = \frac{R}{n}$
$L\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$	0,0175	0,0032	0,0113	0,0026	0,0104	6E-33
$M\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$	0,0286	0,0382	0,0301	0,0385	0,0166	0,0488

Количественные значения оценок $\hat{v}(R,n,\beta = 0{,}5)$ и $\tilde{v}(R,n,\beta = 0{,}81)$ представлены в приложении Б.

Вычисления величин функционалов $L\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$ и $M\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$ проводились с шагом $\partial p = 1E - 03$. А вычисления величин неявно заданных оценок $\tilde{v}$ и $\hat{v}$ проводились с точностью $(1E - 04)$.

Из таблицы 3.2 следует, что составная оценка $\tilde{p}$, построенная на основе оценки $\tilde{v}$ и классической (несмещенной) оценки $\hat{p} = R/n$, обладает минимальным смещением из всех предложенных оценок (за исключением классической оценки (несмещенной и эффективной) $\hat{p} = R/n$ (см. так же таблицу 3.1). Как и следовало ожидать, оценка $\tilde{v}(\beta = 0{,}81)$ обладает минимальным смещением в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$.

Из таблицы 3.2 также следует, что оценка $\tilde{p}$ уступает оценке $\bar{\bar{p}}$ по уклонению своих количественных значений от параметра p и соизмерима в этом качестве с остальными предложенными оценками. Поэтому оценку $\tilde{p}$ можно принять в качестве искомой оценки, эффективной среди предложенных смещённых оценок, не считая оценки $\hat{p} = R/n$. Из рассмотренных вариантов смещенных оценок вероятности отказа однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Классическая оценка биномиального плана испытаний $\hat{p} = R/n$ (несмещенная и эффективная) обладает минимальной дисперсией (разбросом принимаемых величин) среди несмещенных оценок [1, 2]. Однако всегда можно найти смещенную оценку, обладающую меньшим разбросом своих количественных значений (и это с учетом смещения) в сравнении с несмещенными оценками, что и отражено в таблице 3.2 – оценка $\bar{\bar{p}}$. Однако оценка $\hat{p} = R/n$ незначительно проигрывает по разбросу своих количественных значений среди предложенных оценок (см. таблицу 3.1).

Оценка $\bar{\bar{p}} = (R+1)/(n+2)$ приведена для сравнения (см. таблицу 3.2), так как обладает свойствами $L(\bar{\bar{p}}) = 0{,}103$, близкими по эффективности к лучшим оценкам $L\big(\tilde{v}(\beta = 0{,}81)\big) = 0{,}0032$ и $L\big(\tilde{p}(\beta = 0{,}81)\big) = 0{,}0026$, и даже превосходит некоторые из них $L\big(\hat{v}(\beta = 0{,}5)\big) = 0{,}175$ и $L\big(\hat{p}(\beta = 0{,}5)\big) = 0{,}113$. Кроме того, оценка $\bar{\bar{p}}$ обладает наименьшим разбросом своих количественных значений $M(\bar{\bar{p}}) = 0{,}0166$ в сравнении с представленными оценками, что делает её эффективной по уклонению. Однако последнее преимущество для этой оценки, как следует из разделов 3.6 и 3.7, не позволяет сделать однозначный вывод о её эффективности.

Оценка $\bar{\bar{p}}$ является байесовской оценкой и представляет тривиальный случай. Чтобы получить оценку $\bar{\bar{p}}$, следует предположить, что величина параметра p равномерно распределена в интервале [0;1]. Это допущение соответствует полному отсутствию данных о надежности изделия, т. е. максимальной неопределенности относительно интервала величин, принимаемых параметром p. Такая модель приемлема только для неоднородной продукции.

Априорная плотность равномерного з.р. параметра p на отрезке $p = t \in [t_1, t_2]$ имеет вид

$$q(\mathrm{t}) = \frac{1}{t_2 - t_1}. \tag{3.5}$$

В соответствии с формулами (1.8) и (1.9) плотность совместного распределения случайных величин параметра p и числа отказов R для биномиальных испытаний выражается формулой ($t_2 = 1, t_1 = 0$) [2, стр. 54]:

$$f(R = r, p = t\,) = f(r|p = t\,)q(t) = (t_2 - t_1)^{-1}C_n^r t^r(1-t)^{n-r}.$$

Тогда в соответствии с формулой (1.9) имеем

$$f(r) = \int f(r|p = t\,)q(t)\partial t\ = (t_2 - t_1)^{-1}\int_0^1 C_n^r t^r(1-t)^{n-r}\partial t.$$

Условная плотность апостериорного распределения для биномиального плана испытаний примет вид

$$q(t|R = r) = \frac{f(r|p = t)q(t)}{f(r)} = \frac{t^r(1-t)^{n-r}}{\int_0^1 C_n^r t^r(1-t)^{n-r}\partial t}.$$

Учтем, что $\int_0^1 C_n^r t^r(1-t)^{n-r}\partial t = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}{\Gamma(n+2)}$ [2, ф. 1.4.35], тогда условная плотность апостериорного распределения с.в. p для биномиального плана испытаний $q(p = t|R = r)$ подобна плотности бета-распределения $f_p(t, a, b)$ с параметрами $p = t, a = r + 1, b = n - r + 1$, а именно [2, ф. 1.4.31]:

$$q(t|R = r) = f_p(t, r + 1, n - r + 1) == \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}t^r(1-t)^{n-r}\,.$$

Для бета-распределения с параметрами $a = r + 1, b = n - r + 1$ математическое ожидание случайной величины p выражается через параметры a и b по формуле [2, ф. 1.4.37]:

$$E(p) = a/(a + b) = (r + 1)/(n + 2).$$

Заметим, что $E(p)$ является усреднением количественных значений случайной величины p, что может служить ее апостериорной оценкой по результатам испытаний при $R = r$, а именно:

$$\bar{\bar{p}}(R, n) = (R + 1)/(n + 2).$$

В случае байесовского оценивания оценка $\bar{\bar{p}}(R, n) = (R + 1)/(n + 2)$ является тривиальной. Однако в случае полного отсутствия априорных данных о надежности изделий оценка $\bar{\bar{p}}(R,n)$ является хорошим инструментом исследователя неоднородной продукции. Однако, несмотря на свою простоту и близость к эффективным смещённым оценкам, пользоваться оценкой $\bar{\bar{p}}(R,n)$ при исследовании однородной продукции по результатам испытаний, проводимых по схеме Бернулли (плану биномиальных испытаний), не следует (см. разделы 3.6, 3.7 и 4).

Пример 3.5

В процессе испытаний на надежность по биномиальному плану одного изделия в течение назначенного времени отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$1-\tilde{v}$	$1-\hat{p}_3$	$1-\tilde{p}$
0,5	0,81	0,5	0,81

Пример 3.6

В рамках примера 3.5 в процессе испытаний на надежность 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$1-\tilde{v}$	$1-\hat{p}_3$	$1-\tilde{p}$
0,933	0,974	0,933	0,974

Рассмотрим эффективную (в классе смещённых оценок) точечную оценку ВБР за время s, равное времени испытаний τ, полученную для плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем в соответствии с критерием эффективности интегральных оценок [9, 14, 15], а именно:

$\hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{(-t/6N\tau)}$ при $R = 0$ и $\hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{(-t*(R+0,5)/N\tau)}$ при $R > 0$.

Оценка ВБР $\hat{P}_{NB\tau}(t)$ (s) является эффективной по критерию интегральных смещённых оценок [9, 14, 15].

Исходя из логики построения биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний, оценки $\hat{P}_{NB\tau}(t)$ и $1-\tilde{v}$ должны быть приблизительно равными для испытаний, не давших отказов.

Пример 3.7

В рамках примера 3.5 в процессе испытаний на надежность ряда из $1, \dots, 10$ изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещённые оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний.

Результаты расчета:

n	$1-\tilde{v}$, $\beta = 0{,}81$	$\hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{\left(-\frac{t}{6N\tau}\right)}$, $t=\tau$	$1-\bar{\bar{p}} = \dfrac{R+1}{n+2}$	$1-\hat{v}$, $\beta = 0{,}5$
1	0,810	0,846	0,667	0,500
2	0,900	0,920	0,750	0,707
3	0,932	0,946	0,800	0,794
4	0,949	0,959	0,833	0,841
5	0,959	0,967	0,857	0,871
6	0,965	0,973	0,875	0,891
7	0,970	0,976	0,889	0,906
8	0,974	0,979	0,900	0,917
9	0,977	0,982	0,909	0,926
10	0,979	0,983	0,917	0,933

Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

3.6. Получение эффективной смещённой оценки ВБР для биномиального плана с использованием критерия эффективности смещённых оценок

Из предыдущего подраздела следует, что из рассмотренных вариантов смещенных оценок вероятности отказа однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается. Кроме того, предложенные в предыдущем подразделе оценки вероятности отказа обладают достаточно большим смещением. Однако это смещение можно несколько уменьшить, а неоднозначность, при выборе классическим методом эффективной оценки, легко устранить использованием критерия эффективности смещенных оценок (см. подраздел 1.5). Здесь и далее воспользуемся результатами работ [24]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний n изделий. Ограничим объем испытаний $0 < n \le 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула усредненного суммируемого смещения примет вид

$$A(\theta(n;R)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 (E\theta(n;R) - p)^2\,dp.$$

Формула для усредненной суммируемой дисперсии имеет вид

$$D(\theta(n;R)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 E(\theta(n;R) - E\theta(n;R))^2\,dp.$$

В таблице 3.3 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ следующих оценок вероятности отказа: v, w, $p_0 = n / R$, p_1, p_2, p_3 [24] и $u = (R + 1)/(n + 2)$, где

$$p_1 = v(0{,}5;n),\ R = 0 \text{ и } p_1 = n / R,\ R > 0;$$

$$p_2 = w(0{,}81;n),\ R = 0 \text{ и } p_2 = n / R,\ R > 0;$$

$$p_3 = w(0{,}81;n),\ R = 0 \text{ и } p_3 = u,\ R > 0.$$

Вычисления функционалов $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ проводились с шагом $\partial p = 10^{-3}$. А вычисления неявно заданных оценок w и v проводились с точностью 10^{-4}.

Таблица 3.3

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Оценка	A	D	D / A	$C = D \cdot A \cdot 10^4$
$v(\gamma = 0,5)$	0,0176	0,0270	1,53	4,752
$w(\gamma = 0,81)$	0,0037	0,0402	10,86	1,4874
$p_1(\gamma = 0,5)$	0,0113	0,0288	2,54	3,2544
$P_2(\gamma = 0,81)$	0,0015	0,0401	26,73	0,6015
$P_3(\gamma = 0,81)$	0,0070	0,0226	3,22	1,595
$u = (R + 1)/(n + 2)$	0,0104	0,0162	1,55	1,6848
$p_0 = n / R$	0	0,0488	∞	0

Здесь и далее при построении таблицы использовался вариант вычисления характеристики $C = D \cdot A$, когда вычисление функционалов A и D осуществлялось для каждого значения параметров n и p с последующим их раздельным суммированием, и уже на основе полученных суммарных значений A и D вычислялась характеристика $C = D \cdot A$.

Заметим, что вычисление характеристики C напрямую как функционала

$$C(\theta(n;R)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 E\{\theta(n;R) - E\theta(n;R)\}^2 \cdot \{E\theta(n;R) - p\}^2 dp$$

сталкивается с большими вычислительными трудностями, связанными с ограниченной величиной характеристики разрядной сетки электронно-вычислительной машины, что в процессе вычисления приводит к обнулению значимых величин для суммирования. Что, в последующем итоге, и отражается на конечном результате.

Несмещенную оценку $p_0 = n / R$, приведенную для сравнения, из рассмотрения в качестве эффективной в классе смещённых оценок исключаем, хотя именно она является эффективной.

Из таблицы 3.3 следует, что из рассмотрения необходимо исключить оценки v, p_1, p_3, u, для которых не выполняется неравенство $D / A > 4$. Тогда из таблицы 3.3 также следует, что минимальными и соизмеримыми смещениями обладают оценки w и p_2. Их величины отличаются на максимальные (0,0037 – 0,0015)·100 / 0,0037 = 59%. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок в качестве эффективной следует однозначно считать оценку p_2. Из построения следует, что построенный критерий на основе характеристики $C = D{\cdot}A$ однозначно определяет эффективную смещённую оценку, без проведения предыдущих в абзаце большинства рассуждений.

Предложенные оценки v, w, p_1, p_2 для биномиального плана испытаний имеют смещение, которое можно уменьшить, при этом вид оценок несколько изменится, а именно:

$$\hat{}v = v(0{,}5;n,R) - 0{,}4 / ((R + 1)n);$$

$$\hat{}w = w(0{,}81;n,R) - 0{,}1/((R+1)n);$$

$$p_{10}(R = 0) = \hat{}v(0{,}5;n),\ p_{10}(R > 0) = n / R;$$

$$p_{20}(R = 0) = \hat{}w(0{,}81;n),\ p_{20}(R > 0) = n / R.$$

В таблице 3.4 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ следующих оценок вероятности отказа: ^v, ^w, p_{10}, p_{20}.

Таблица 3.4

Результаты подстановки оценок вероятности отказа ^v, ^w, p_{10}, p_{20} в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Оценка	A	D	D / A	$C = D{\cdot}A{\cdot}10^4$
^$v(\gamma = 0{,}5)$	0,0034	0,0356	10,47	1,210
^w$(\gamma = 0{,}81)$	0,0030	0,0427	14,23	1,280
$p_{10}(\gamma = 0{,}5)$	0,000680	0,0425	62,5	0,289
$P_{20}(\gamma = 0{,}81)$	0,000355	0,0443	124,7	0,157

Из таблицы 3.4 следует, что для всех предложенных оценок выполняется неравенство $D / A > 4$. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок в качестве эффективной следует однозначно считать оценку p_{20}.

3.7. Улучшение эффективной смещённой оценки ВБР для биномиального плана с использованием критерия эффективности смещённых оценок

Улучшение эффективности смещённых оценок различных планов испытаний однородной продукции [4] основано на использовании критерия эффективности смещённых оценок $C(\theta) = A(\theta) \bullet D(\theta)$ [24, 25].

Заметим, что оценки вероятности безотказной работы (вероятности отказа), предлагаемые для сравнения в соответствии с критерием эффективности смещённых оценок, должны быть: строго монотонны по всем своим параметрам, строго больше нуля и строго меньше единицы, что соответствует случайной модели отказа изделий. Оценки, которые при $R = 0$ и любом объеме n реализуются константой $\theta(R,n)$ = Constant (например, нулем или единицей) не соответствуют случайной модели отказа изделий и, как не имеющие физической интерпретации, вызывают большие сомнения в своей эффективности при нулевом исходе. В качестве предлагаемых оценок следует использовать составные оценки состоящие из двух частей: первая часть соответствует $R = 0$, вторая часть – $R > 0$. Именно такие составные оценки, как правило, в своем классе доставляют функционалу $A(\theta)$ минимум. В качестве примера можно привести эффективную смещённую оценку средней наработки до отказа для плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением отказавших изделий (NBτ), где N – число испытуемых изделий, B – признак восстановления изделий, τ – время испытаний [1]: $^{\approx}T\text{ср}(R{=}0) = 2N\tau$, $^{\approx}T\text{ср}(R{>}0) = N\tau/(R + 1)$ [12]. Оценка $^{\approx}T\text{ср}$ в классе смещённых оценок вида $^{\approx}\theta(N, R, \tau) = N\tau / (R + 1) + N\tau f(R)$, где $f(R)$ – произвольная функция, доставляет функционалу $A(\theta)$ минимум $A(\theta) = 0{,}25$. А, следовательно, оценка $^{\approx}T\text{ср}$ в этом классе смещённых оценок является эффективной. Дальнейшее улучшение свойств оценок эффективных в данном классе смещённых оценок приводит к расширению класса, например, $^{\wedge}\theta(N, R, \tau) = N\tau / (R + \beta(R))$ [24]. Легко доказать, что класс смещённых оценок $^{\wedge}\theta(N, R, \tau)$ не принадлежит классу $^{\approx}\theta(N, R, \tau)$ [24].

В [24] приведены оценки параметра p плана биномиальных испытаний:

$$\hat{w} = w(\beta=0{,}81;n,R) - 0{,}1 / ((R+1)n);$$

$$p_{20} = \hat{w}(\beta=0{,}81;n),\ R = 0 \text{ и } p_{20} = R / n\ ,\ R > 0,$$

имеющие меньшее смещение в сравнении с оценками v, w.

Однако можно получить более эффективные смещённые оценки. С этой целью рассмотрим следующие составные оценки, а именно:

$$\tilde{w}(R=0) = w(\beta=0{,}993;n,R),\ \tilde{w}(R>0) = w(\beta=0{,}75;n,R);$$

$$\tilde{p}_{20}(R=0) = \tilde{w},\ \tilde{p}_{20}(R>0) = R / n\ ;$$

$$\tilde{v}(\beta,R=0) = w(\beta = 0{,}9999;n,R),\ \tilde{v}(\beta,R>0) = w(\beta = 0{,}68;n,R);$$

$$\tilde{p}_{\tau}(g=\tau;T_p(R,\tau,n)) = 1 - Exp(-g=\tau / T_p),$$

где $g=\tau$ – время, за которое рассматривают вероятность, τ – время испытаний,

$T_p(R=0) = 60\cdot n\tau$, $T_p(R>0) = (n\tau - R\tau/2)/(R+0{,}4)$.

В таблице 3.5 приведены результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$для биномиального плана испытаний. Вычисления функционалов $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ проводились с шагом $\partial p = 10^{-3}$. А вычисления неявно заданных оценок w и v проводились с точностью равной 10^{-4}. Расчеты функционалов проводились до третьей значащей цыфры.

Здесь и далее при построении таблиц использовался вариант вычисления характеристики $C = D\cdot A$, когда вычисление функционалов A и D осуществлялось для каждого значения параметров n и p с последующим их раздельным суммированием, и уже на основе полученных суммарных значений A и D вычислялась характеристика $C = D\cdot A$. При построении предложенных смещённых оценок учитывалось, что их вторая часть близка к несмещённой оценке $p_0 = (R>0)\ / n$. Близость второй части предложенных составных оценок к классической, несмещенной и эффективной оценке $p_0 = R / n$ гарантирует их эффективность в классе смещённых оценок, что и отражено в таблице 3.5. При вычислении функционалов $A(\tilde{p}_{\tau})$ и $B(\tilde{p}_{\tau})$ учитывалось дополнительно ещё одно усреднение (суммирование) по времени ($g = \tau$), за которое рассматривают вероятность ($\tilde{p}_{\tau}(g=\tau;T_p(R,\tau,n))$) и одновременно проводят испытание.

Таблица 3.5

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки	A	D	D / A	$C = D{\cdot}A{\cdot}10000$
Оценки, предложенные для биномиального плана испытаний в [24]				
$\hat{}w = w(\beta{=}0{,}81;n,R) – 0{,}1 / ((R{+}1)n)$	0,00303	0,0427	14,23	1,293
$\tilde{\tilde{}}p_2(R{=}0) = \tilde{\tilde{}}w$, $\tilde{\tilde{}}p_2(R{>}0) = R\ / n$	0,000355	0,0443	124,7	0,157
Оценки, предлагаемые для биномиального плана испытаний в [25]				
$\tilde{\tilde{}}w(R{=}0) = w(\beta{=}0{,}993;n,R)$, $\tilde{\tilde{}}w(R{>}0) = w(\beta{=}0{,}75;n,R)$	0,000731	0,0480	65,6	0,035
$\tilde{\tilde{}}v(R{=}0) = w(\beta = 0{,}9999;n,R)$, $\tilde{\tilde{}}v(R{>}0) = w(\beta = 0{,}68;n,R)$	0,000159	0,0483	303,6	0,0768
$\tilde{\tilde{}}p_\tau(g{=}\tau;T_p(R,\tau,n)) = 1 – Exp(–g{=}\tau / T_p)$, где $T_p(R{=}0) = 60n\tau$, $T_p(R{>}0) = (n\tau – R\tau/2)/(R{+}0{,}4)$	0,00180	0,0407	22,63	0,732
$\tilde{\tilde{}}p_{20}(R{=}0) = \tilde{\tilde{}}w$, $\tilde{\tilde{}}p_{20}(R{>}0) = R\ / n$	2E-06	0,0484	1E+04	0,00097
$p_0 = R / n$ – классическая оценка (эффективная и несмещенная)	0	0,0488	∞	0

Из таблицы 3.5 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок эффективной среди предложенных является составная оценка $\tilde{\tilde{}}p_{20}$ с минимальной величиной характеристики C = 0,00097. Несмещенную оценку $p_0 = R / n$, приведенную для сравнения, из рассмотрения в качестве эффективной среди предложенных смещённых оценок исключаем, хотя именно она является абсолютно эффективной, однако её свойство (в случае R = 0 при любом $n > 0$) реализоваться нулем не соответствует случайной модели отказа изделий и, как не имеющая физической интерпретации, вызывает большие сомнения в своей эффективности при нулевом исходе.

Заметим, что все предлагаемые оценки θ должны пройти проверку на строгую монотонность при любом объеме и количестве отказов (для вероятности отказа) на выполнение $\theta(R + 1, n) > \theta(R, n)$, $\theta(R, n + 1) < \theta(R, n)$. В противном случае оценки непрошедшие проверку на строгую монотонность должны отвергаться, например, классическая оценка $p_0 = R / n$ в части событий “R = 0”. Аналогично, оценка ВБР 1 – $\tilde{\tilde{}}v(R{=}0)$ в части событий “R = 0” при изменении n от 1 до 10 меняет свою величину от 0,9999 до 0,99999. Такое отличие величин ВБР (в пятом знаке после запятой в указанном диапазоне переменной n) для практики можно считать неразличимым, т. е. величину оценки ВБР $1 – \tilde{v}(R=0)$ в части событий “$R = 0$” при изменении n от 1 до 10 с хорошим приближением можно считать постоянной и равной 0,9999, поэтому оценка $\tilde{v}(\beta,R,n)$, как и классическая оценка $p_0 = R / n$, должна быть отвергнута. Кроме того для любого варианта составной оценки $\tilde{v}(\beta,R=0,n) = w(\beta,R=0,n)$ и $\tilde{v}(\beta,R>0,n) = w(\beta=0{,}68,R>0,n)$, служащей для подстановки в функционалы $A(\tilde{v})$ и $D(\tilde{v})$, где β в первом члене варианта этой составной оценки при $R = 0$ варьируется от *0,9999 до 0,99999,* величина функционала *A (*суммарного смещения*)* уменьшается на величину меньше чем *0,001%.* Такое изменение функционала *A* можно считать несущественным, что подтверждает сделанные выводы.

*А*налогично – для составной оценки

$\tilde{p}_\tau(g=\tau;T_p(R,\tau,n)) = 1 – Exp(– (g=\tau) / T_p(R,n,\tau))$, где $T_p(R=0) = xn\tau$, $T_p(R>0) = (n\tau – R\tau/2)/(R+0{,}4)$ – некоторый вариант составной оценки *СНДО,* служащий для подстановки в функционалы *A* и *D*, *x* – переменная в первом члене варианта этой составной оценки, изменяющаяся от *60* до *10000* при $R = 0$, величина функционала *A (*суммарного смещения*)* уменьшается на величину меньше *0,0001%.* Поэтому в двух последних случаях $\tilde{v}$ и $\tilde{p}_\tau$ ограничились составными оценками, первый член которых имеет вид $\tilde{v}(\beta,R=0,n)) = w(\beta=0{,}9999,R=0,n)$ и $\tilde{p}_\tau(g=\tau;T_p(R=0) = 60n\tau)$, чьё влияние на изменение величины функционала $A(\tilde{v}) = 0{,}000159$ или $A(\tilde{p}_\tau) = 0{,}00180$ ограничено третьей значащей цифрой, описывающей целесообразную для практики точность вычисления суммарного смещения.

Отметим одно свойство оценок ВБР биномиального плана испытаний, а именно: их величины при $R = 0$ близки к единице, например, при $n = 1$

$1 – \tilde{v}(\beta,R=0,n=1) = 1 – w(\beta=0{,}9999,R=0,n=1) = 0{,}9999$,

$1 – \tilde{w}(\beta,R=0,n=1) = 1 – w(\beta=0{,}993, R=0,n=1) = 0{,}993$,

$1 – \tilde{p}_\tau(g=\tau;T_p(R=0,\tau=g,n=1)) = Exp(–\tau/ 60(n=1)\tau) =0{,}983$,

$1 – \tilde{p}_\tau(g=\tau;T_p(R=0,\tau=g,n=1)) = Exp(–\tau/ 1000(n=1)\tau) \approx 1$ (оценка исключена из дальнейшего рассмотрения).

С ростом $n > 1$ величины этих оценок возрастают, стремясь к единице. Т. е. в этом факте эти оценки близки по своим свойствам к несмещенной оценке $p_0 = R / n$.

Заметим тот факт, что для эффективных смещённых оценок $\tilde{\tilde{w}}$ и $\tilde{\tilde{p}}_{20}$ не только величина суммарного смещения близка к нулю, но и величина их суммарной дисперсии (*0,0480* и *0,0484*) близка к суммарной дисперсии классической, эффективной и несмещенной оценки $p_0 = R / n$ (*0,0488*), что соответствует неравенству Рао – Крамера [2, 7].

В тех задачах, когда по результатам испытаний n изделий необходимо сделать прогноз величины ВБР за более или менее длительный временной интервал g, чем время испытаний τ (в пределах 30%), то следует использовать оценку ВБР $P_g = 1 - \tilde{\tilde{p}}_\tau(g;T_p(R,\tau,n))$. Оценка ВБР $P_g = 1 - \tilde{\tilde{p}}_\tau(g;T_p(R,\tau,n))$ сравнима с оценками ВБР P_{v1} и P_{v2}, полученными для плана испытаний типа NBτ, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и отражено в части 2 настоящей книги.

Пример 3.8. В процессе испытаний на надежность из ряда 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещённые оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний и время, за которое оценивается ВБР, равны $\tau = g$.

Результаты расчета ВБР примера 3.8 ($\tau = g$, $R = 0$)

$N = n$	$\tilde{\tilde{p}}_\tau(g;T_p(R=0,\tau,n))= 1-Exp(-g/T_p)$, где $T_p(R=0) = 60n\tau$	$1 - \tilde{\tilde{p}}_{20}(R=0) = 1 - \tilde{\tilde{w}}(\beta=0,993;R=0)$	$P_{v2}(T_v) = \exp\{-g/18n\tau\}$, $g = \tau$, $R = 0$
	Биномиальный план испытаний		План испытаний типа $NB\tau$
1	0,9834	0,9930	0,9460
2	0,9917	0,9950	0,9726
3	0,9944	0,9966	0,9817
4	0,9958	0,9975	0,9862
5	0,9966	0,9980	0,9890
6	0,9972	0,9983	0,9908
7	0,9976	0,9986	0,9921
8	0,9979	0,9987	0,9931
9	0,9981	0,9988	0,9938
10	0,9983	0,9990	0,9945

Из примера 3.8 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 3.8 результаты эффективных смещённых оценок $1 - \tilde{\tilde{p}}_{20}$ и $P_v(T_v)$ различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остаётся за испытателем.

Пример 3.9. В рамках примера 3.8 возник один отказ. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещённые оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний и время, за которое оценивается ВБР, равны $\tau = g$.

Результаты расчета ВБР примера 3.9 ($\tau = g$, $R = 1$)

$N = n$	$1-\tilde{\tilde{p}}_\tau(g=\tau;T_p(R=1))= = Exp(-g=\tau/T_p)$, где $T_p(R=1) = (n\tau - \tau/2)/1,4$	$1-\tilde{\tilde{p}}_{20}(R=1) = 1-\tilde{\tilde{w}}(\beta=0,75;R=1)$	$1 - p_0(R=1) = 1-(R=1)/n$	$P_{v2}(T_v) = = e^{-g(R+0,5)/n\tau}$, $g = \tau$, $R = 1$
	Биномиальный план испытаний			План испытаний типа NBτ
1	0,061	0,000	0,000	0,223
2	0,393	0,500	0,500	0,472
3	0,571	0,673	0,666	0,606
4	0,670	0,756	0,750	0,687
5	0,733	0,806	0,800	0,740
6	0,775	0,839	0,833	0,779
7	0,806	0,862	0,857	0,807
8	0,830	0,879	0,875	0,829
9	0,848	0,893	0,888	0,846
10	0,863	0,903	0,900	0,860

3.8. Построение критерия получения эффективной смещённой оценки СНДО для биномиального плана испытаний (классическая процедура построения)

В качестве критерия получения эффективной смещённой оценки СНДО строится функционал (далее – $V(\hat{\theta})$), основанный на усреднении и суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\hat{\theta}(R,n,\tau)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных величин, принимаемых параметрами t, n, τ [9, 18–20] (см. также формулы (1.12)–(1.16)):

$$V(\hat{\theta}(R,n,\tau)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}(E\hat{\theta}(R,n,\tau=10^i)-t)^2\partial t. \quad (3.6)$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра СНДО $T_0 = t \in [0;\infty]$, а суммирование – по времени $\tau \in [10^3;10^5]$ и объему испытаний n.

Строится функционал (далее – $H(\hat{\theta})$), основанный на усреднении и суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(R,N)$ от параметра t (СНДО) экспоненциального з.р. для всех возможных количественных значений t, n [18–20] (см. также формулы (1.12)–(1.16)):

$$H(\hat{\theta}(R,n,\tau)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2}E(\hat{\theta}(R,n,\tau=10^i)-t)^2\partial t. \quad (3.7)$$

Задачей функционала $H(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ является определение степени разброса величин предложенных оценок СНДО.

Оценка СНДО, минимизирующая предлагаемые функционалы, является эффективной среди предложенных оценок.

3.9. Выбор эффективных смещённых оценок средней наработки до отказа

С целью сравнения рассмотрим следующие смещённые оценки СНДО:

$$\hat{T}_1 = \frac{S(R,\tau,\mathrm{n})}{R+1},\ \hat{T}_2 = \begin{cases}\frac{S(R,\tau,\mathrm{n})}{R>0},\\ S(R=0,\tau,\mathrm{n}),\end{cases}\ \hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6} = \begin{cases}\frac{\tau}{-\ln(1-\tilde{v}(R=0,N,\beta=0{,}6))},\\ \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{p}(R>0,N))},\end{cases}$$

$$\hat{T}_{\beta=0,6} = \frac{\tau}{-\ln(1-\tilde{v}(R,n,\beta=0{,}6))},\ \hat{T}_{\beta=0,5} = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{v}(R,n,\beta=0{,}5))}.$$

Количественные значения смещённых оценок $\hat{v}(R,n,\beta=0{,}5)$ и $\tilde{v}(R,n,\beta=0{,}6)$ представлены в приложении Б.

В таблице 3.7 приведены результаты подстановки в функционалы $V(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ и $H(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ в соответствии с формулами (3.6) и (3.7), следующих оценок СНДО: $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$, $\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$, $\hat{T}_{\beta=0,5}$, $\hat{T}_{\beta=0,6}$. Вычисления проводились с шагом $\partial p = 1E-3$.

Таблица 3.7

Результаты подстановки в функционалы $V(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ и $H(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ в соответствии с формулами (3.6) и (3.7), следующих оценок СНДО: $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$, $\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$, $\hat{T}_{\beta=0,5}$, $\hat{T}_{\beta=0,6}$

Вид функционала	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
$V(\hat{\theta}(R,N,\tau))$	1513	2364	11,26	11,01	10,59
$H(\hat{\theta}(R,N,\tau))$	238	302	595	538	1035

Из таблицы 3.7 следует, что эффективной смещённой оценкой СНДО для биномиального плана следует признать оценку $\hat{T}_{\beta=0,6}$, так как в соответствии с построенным критерием оценка СНДО

$$\hat{T}_{\beta=0,6} = -\tau/ln(1-\tilde{v}(R,n,\beta=0,6))$$

показала небольшое преимущество перед оценкой

$$\hat{T}_{\beta=0,5} = -\tau/ln(1-\hat{v}(R,n,\beta=0,5))\ [9, 20],$$

а именно:

$$V(\hat{T}_{\beta=0,6}) = 10{,}59 < V(\hat{T}_{\beta=0,5}) = 11{,}01,$$

$$H(\hat{T}_{\beta=0,6}) = 1035 > H(\hat{T}_{\beta=0,5}) = 538.$$

Несмотря на то, что оценка $\hat{T}_{\beta=0,6}$ имеет несколько больший разброс, именно оценку $\hat{T}_{\beta=0,6} = -\tau/ln(1-\tilde{v}(R,n,\beta=0,6))$ следует признать более эффективной в сравнении с оценкой $\hat{T}_{\beta=0,5} = -\tau/ln(1-\hat{v}(R,n,\beta=0,5))$ (в силу приоритета влияния на эффективность смещения). Из этого факта следует, что приоритет при принятии решения об эффективности смещённой оценки, отдается оценкам, имеющим минимальное смещение, а не минимальный разброс (что соответствует классическому определению эффективности оценки). Из рассмотренных вариантов смещенных оценок СНДО однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается.

Пример 3.10

В процессе испытаний на надежность в течение 1000 ч одного изделия отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
1000	1000	1957	1442	1957

Пример 3.11

В процессе испытаний на надежность в течение 1000 ч 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
10000	10000	19576	14426	19576

Пример 3.12

В процессе испытаний на надежность в течение 1000 ч одного изделия произошел один отказ. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
500	1000	0	0	0

Пример 3.14

В процессе испытаний 10 изделий на надежность в течение 1000 ч произошел один отказ. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
5000	10000	6895	5658	6895

Пример 3.15

В процессе испытаний на надежность в течение 10000 ч ряда из $1, \dots, 10$ изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещённые оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний.

Рассмотрим эффективную (смещённую) точечную оценку СНДО, полученную для плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний [12] в соответствии с классическим критерием эффективности интегральных оценок [14], а именно:

$$\hat{T}_{01} = 2N\tau, R = 0 \text{ и } \hat{T}_{01} = N\tau/(R+1), R > 0.$$

Эта оценка СНДО является эффективной по критерию интегральных оценок в достаточно широком классе оценок [9, 12, 14].

Результаты расчета:

n	$\hat{T}_{\beta=0,6} == \dfrac{\tau = 1000}{-\ln(1-\tilde{v}(R=0,N,\beta=0{,}6))}$	$T_{01} = 2N\tau$ при $R = 0, \tau = 1000$
1	1958	2000
2	3923	4000
3	5855	6000
4	7823	8000
5	9788	10000
6	11748	12000
7	13698	14000
8	15660	16000
9	17611	18000
10	19576	20000

Из примера следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний оценки $\hat{T}_{\beta=0,6}$ и $\hat{T}_{01}$ приблизительно равны для случая, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и следовало ожидать. Этот факт лишний раз подтверждает сделанные выводы об эффективности оценки $\hat{T}_{\beta=0,6}$. Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

3.10. Нахождение эффективной смещённой оценки СНДО с использованием критерия эффективности смещённых оценок

Из предыдущего подраздела следует, что из рассмотренных вариантов смещенных оценок СНДО однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается. Кроме того, предложенные в предыдущем подразделе оценки СНДО обладают достаточно большим смещением. Однако это смещение можно несколько уменьшить, а неоднозначность, при выборе классическим методом эффективной оценки, легко устранить использованием критерия эффективности смещенных оценок (см. подраздел 1.5). Будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей (з.р.) с параметром T_0, где последний совпадает со средней наработкой до отказа (СНДО). Время испытаний каждого из N изделий обозначим через τ.

В качестве критерия получения эффективной смещённой оценки СНДО строится функционал, основанный на усреднении и суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок *θ(R,n)* от параметра *t* экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных значений $N = n$, τ, $T_0 = t$

$$A(\theta(n;R)) = \tfrac{1}{3}\sum_{\tau=1E+3}^{1E+5}\tfrac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^{\infty}\tfrac{1}{t^2}\{E\theta(n;R,\tau)-t\}^2 dt\ .$$

Интегрирование ведётся по всем возможным величинам параметра (СНДО) *t* из [0;∞].

Формула для усредненной суммируемой дисперсии *D* имеет вид

$$D(\theta(n;R)) = \tfrac{1}{3}\sum_{\tau=1E+3}^{1E+5}\tfrac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^{\infty}\tfrac{1}{t^2}E\{\theta(n;R,\tau)-E\theta(n;R,\tau)\}^2 dt\ .$$

В таблице 3. 8 приведены результаты подстановки в функционалы *A(θ(n;R)), D(θ(n;R))* следующих оценок СНДО:

$$T_1 =((n - R)\cdot\tau + R\cdot\tau/2)/(R+1),$$

$$T_2= - \tau/Ln(1 - (R+1)/(n+1)),$$

$$T_3= - \tau/Ln(1 - p_1),$$

$$T_4= - \tau/Ln(1 - p_4),$$

где $p_4 = u = (R+1)/(n+2)$, $R=0$ и $p_4 = p_0 = R / n$, $R>0$,

$$T_5= - \tau/Ln(1 - v(R,n,\ \gamma=0,5),$$

$$T_6= - \tau/Ln(1 - v(R,n,\ \gamma=0,62).$$

Таблица 3.8

Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы *A(θ(n;R)), D(θ(n;R))* для биномиального плана испытаний

Вид функционала	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
A	1513	11,27	11,26	11,09	11,01	10,59
D	1,962	3,679	7,402	7,534	4,983	9,157
D/A	≈0,01	0,32	0,65	0,67	0,45	0,86
C=D·A	2968	41,4	83,3	83,6	54,8	96,9

Из таблицы 3. 8 следует, что в соответствии с построенным критерием эффективности смещённых оценок все оценки следует исключить из рассмотрения, т.к. для них выполняется критичное условие *D/A<4*. Однако, из-за необходимости сделать выбор, оценку $T_6= - \tau/Ln(1 - (R,n,\gamma=0,62)$ с минимальным смещением и максимальной характеристикой $D/A=0,86$ следует однозначно признать условно эффективной среди предложенных.

Предложенные оценки СНДО для биномиального плана испытаний сильно смещены, однако это смещение можно уменьшить, при этом вид оценок несколько изменится, а именно:

$$T_{10} = 400 + 0,015\cdot \tau + \tau \cdot (n - R + R^*0,02)/(R+0,5));$$

$$T_{20}=400 + 0,015 \cdot \tau - \tau\cdot 0,7/Ln(1-(R+0,4)/(n+0,4));$$

$$T_{30}=400 + 0,015 \cdot \tau - \tau\cdot 0,7-\tau/Ln(1- p_1);$$

$$T_{40}=400 + 0,015 \cdot \tau - \tau\cdot 0,7/Ln(1- p_4),$$

где $p_4(R = 0) = u = (R+1)/(n+2)$, $p_4(R > 0) = p_0 = R / n$;

$$T_{50}=400 + 0,015 \cdot \tau - \tau/Ln(1-v(R,n, \gamma=0,5);$$

$$T_{60}=400 + 0,015 \cdot \tau - \tau\cdot 0,75/Ln(1-v(R,n, \gamma=0,62).$$

Варианты предложенных оценок с меньшим смещением представлены в таблице 3. 9.

Таблица 3.9

Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид функционала	T_{10}	T_{20}	T_{30}	T_{40}	T_{50}	T_{60}
A	5,67	4,62	5,34	5,27	5,03	4,85
D	9,65	7,06	3,62	3,69	4,98	5,47
D/A	1,70	1,52	0,67	0,70	0,99	1,12
C=D·A	54	32,61	19,33	19,44	25,04	26,52

Из таблицы 3. 9 следует, что в соответствии с построенным критерием эффективности смещённых оценок все оценки следует исключить из рассмотрения, т. к. для них выполняется критичное условие $D/A<4$. Однако, из-за необходимости сделать выбор, оценку $T_{20}=400 + 0,015 \cdot \tau - \tau\cdot 0,7/Ln(1 - (R+0,4)/(n+0,4))$ с минимальным смещением следует признать условно эффективной среди предложенных.

В данном разделе приведены условно эффективные смещённые оценки параметра СНДО:

$$T_{20} = 400 + 0,015\cdot\tau - \tau\cdot 0,7/\mathrm{Ln}(1 - (R + 0,4)/(n + 0,4));$$

$$T_{60} = 400 + 0,015\cdot\tau - \tau\cdot 0,75/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0,62).$$

Однако применяя составные оценки можно получить более эффективные смещённые оценки. С этой целью рассмотрим следующие составные оценки, а именно:

$$T_\tau(R{=}0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_\tau(R{>}0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}8/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2));$$

$$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) -$$

$$- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)).$$

В таблице 3.10 приведены результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний.

Здесь и далее вычисления функционалов $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ проводились с шагом $\partial t = 10^{k=3,\ldots,6}$. А вычисления неявно заданных оценок w и v проводились с точностью 10^{-4}. При построении таблиц использовался вариант вычисления характеристики $C = D\cdot A$, когда вычисление функционалов A и D осуществлялось для каждого значения параметров n и p с последующим их раздельным суммированием, и уже на основе полученных суммарных значений A и D вычислялась характеристика $C = D\cdot A$.

Таблица 3.10

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра СНДО	A	D	D / A	$C = D\cdot A\cdot 10000$
Оценки параметра СНДО, предложенные для биномиального плана испытаний в [24]				
$T_{20} = 400 + 0{,}015\cdot\tau -$ $-\tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - (R + 0{,}4)/(n + 0{,}4))$	4,62	7,06	1,52	32,61
$T_{60} = 400 + 0{,}015\cdot\tau -$ $-\tau\cdot 0{,}75/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0{,}62)$	4,85	5,47	1,12	26,52
Оценка, предлагаемая для биномиального плана испытаний в [25]				
$T_\tau(R{=}0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau -$ $-\tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$ $T_\tau(R{>}0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau -$ $-\tau\cdot 0{,}8/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2))$	4,33	11,69	2,70	50,88
$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau -$ $-\tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$ $T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau -$ $-\tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) -$ $- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2))$	2,43	72,46	29,86	176,0

Из таблицы 3.10 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $T_{\tau 2}$ с величиной характеристики $C = 176$, т.к. остальные оценки, обладающие меньшими величинами характеристики С, как не удовлетворяющие критерию отбора $D > 4A$, не могут рассматриваться в качестве эффективных среди предложенных.

Дальнейшее уменьшение смещения на выделенном классе оценок является довольно сложной задачей. В данном случае решением задачи уменьшения смещения является поиск на более широком классе оценок, включающим класс несмещенных оценок или близкий к таковым. Заметим, что чем ближе оценка к несмещенной (характеристика A стремится к нулю), если таковая существует, её дисперсия увеличивается (см. таблицу 3. 1), стремясь снизу к дисперсии несмещенной оценки, или уменьшается, стремясь сверху к дисперсии несмещенной оценки, что вынуждает их реализации группироваться вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон, подобно реализациям несмещенных оценок. Этот факт следует непосредственно из неравенства Рао – Крамера для смещенных оценок [2, ф. 2.14.14]. Поэтому для оценок близких по смещению к нулю всегда будет выполняться условие $D/A>4$. Важно заметить, что оценки выбираемого класса, предназначенного для поиска эффективных смещённых оценок, должны соблюдать строгую монотонность относительно всех своих параметров (R, τ, n).

Пример 3.16. В процессе испытаний на надежность из ряда 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещённые оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний равна $\tau = 1000$ ч. Результаты расчета приведены в таблице 3.11.

Таблица 3.11

Результаты расчета СНДО примера 3 (τ = *1000* ч, R = 0)

$N = n$	$T_{\tau 2}(R=0) = 400 + 0,6\tau - \tau\cdot 0,6/\mathrm{Ln}(1 - ((R=0) + 0,3)/(n + 0,3)) = 1000 - 600/\mathrm{Ln}(1 - 0,3/(n + 0,3))$	$T_{B2}(R = 0) = 2,5n\tau = 2500n$
	Биномиальный план испытаний	План испытаний типа NBτ
1	3287	2500
2	5293	5000
3	7295	7500
4	9296	10000
5	11297	12500
6	13298	15000
7	15298	17500
8	17298	20000
9	19298	22500
10	21299	25000

Из таблицы 3.11 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 3.16 результаты эффективных в классе смещённых оценок $T_{\tau 2}$ и T_{B2} различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остаётся за испытателем.

Пример 3.17. В рамках примера 3.16 возник один отказ. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещённые оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний.

Результаты расчета СНДО примера 4 (τ = *1000* ч, R = 1)

$N = n$	$T_{\tau 2}(R=1) = 400 + 0,01\cdot\tau - \tau\cdot 0,2/\mathrm{Ln}(1 - ((R=1) + 2)/(n + 2)) - \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R=1) + 2)/(n + 2)) = 410 - 400/\mathrm{Ln}(1-3/(n+2))$	$T_{B2} = n\tau/(R + 1 + 2,3 - 0,6R) = 1000n/3,7$ при $R = 1$
	Биномиальный план испытаний	План испытаний типа NBτ
1	410	270
2	699	541
3	847	811
4	987	1081
5	1125	1351
6	1261	1622
7	1397	1892
8	1531	2162
9	1666	2432
10	1800	2703

3.11. Нахождение эффективной смещённой оценки гамма-процентной наработки до отказа (ресурса, срока сохраняемости) для биномиального плана

Постановка задачи

При условии подчинения наработки до отказа экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 (средняя наработка до отказа) величина ГПНДО (далее – t_γ) вычисляется по формуле

$$t_\gamma = -T_0 \ln(\gamma), \gamma \geq 0{,}95. \qquad (3.8)$$

С целью построения оценки ГПНДО ($\hat{t}_\gamma$) вполне естественным будет, если в качестве оценки параметра T_0 воспользоваться традиционной оценкой средней наработки до отказа, построенной для экспоненциального распределения [4, 5, 25]:

$$\hat{T}_{02} = \frac{S(R,n,\tau,s_i)}{R} \approx \frac{(n-R)\tau + R\tau/2}{R}, r > 0,$$

где S – суммарная наработка изделий; s_i – моменты отказов изделий.

Однако полученная таким образом оценка $\hat{t}_{\gamma 02} = -\hat{T}_{02} ln(\gamma)$ имеет существенные недостатки, а именно:

– оценка является смещенной [21];

– оценка является неэффективной [21];

– оценка не позволяет получать количественные значения параметра t_γ по результатам испытаний, не давших отказов.

Для решения упомянутой выше задачи достаточно найти несмещенную эффективную оценку ($\hat{t}_{\gamma эф}$), если такая существует в классе состоятельных смещенных оценок, в который входят и все оценки, полученные методом подстановки, включая и метод максимального правдоподобия, т. е. содержит в себе оценки с любым смещением, в том числе и с фиксированным – в виде функции от параметра или константы [2]. В ряде случаев найденные несмещенные эффективные оценки имеют весьма громоздкий вид со сложным алгоритмом вычисления [3]. Они также не всегда являются достаточно эффективными в классе всех смещенных оценок и не всегда имеют значительное преимущество перед простыми, но смещенными оценкам с точки зрения близости к оцениваемому показателю [9, 18].

Методы исследования и результаты

Рассмотрим класс оценок, представимых в виде $\hat{t}_\gamma = -\hat{T}_0 ln(\gamma)$, где $\hat{T}_0$ – некоторая оценка СНДО для биномиального плана испытаний, которая не имеет сильной зависимости от наступления моментов отказов s_i, что характерно для высоконадежных изделий [4, 5].

Тогда в качестве инструмента для нахождения эффективной оценки будем использовать интегральные характеристики [14, 20, 21]. Аналогично [14, 20, 21] построим функционал (далее – $A(\hat{t}_\gamma)$, в основе которого лежит суммарный квадрат отклонения ожидаемой реализации оценки $\hat{t}_\gamma(R,n,\tau)$ от $t_\gamma = -T_0\, ln(\gamma)$ для всех возможных величин, принимаемых параметрами $T_0 = t \,\epsilon\, [0;\infty]$,
γ, n и τ:

$$V(\hat{t}_\gamma) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\left(E\hat{t}_\gamma\left(\tau = 10^i\right) + t ln(\gamma)\right)^2 \partial t, \quad (3.9)$$

где переменная интегрирования t – парметр з.р. СНДО;

t^2 – нормирующий множитель;

$\hat{t}_\gamma\left(R,n,\tau = 10^i\right) = -\hat{T}_0\left(R,n,\tau = 10^i\right) ln(\gamma)$, а член в подынтегральном выражении определяется равенстовм $t\, ln(\gamma) = -t_\gamma$. В соответствии с формулой (3.8) математическое ожидание $E\hat{t}_\gamma(R,n,\tau)$ имеет вид

$$E\hat{t}_\gamma(R,n,\tau) = \sum_{k=0}^{n}\hat{t}_\gamma b_n(k,p) = -\sum_{k=0}^{n}\hat{T}_0\, ln(\gamma)\, b_n(k,p).$$

Эффективная оценка ГПНДО должна обладать минимальной величиной функционала $A(\hat{t}_\gamma)$.

Вынесем из-под знака интеграла выражение $(-ln(\gamma))$, тогда формула (3.9) примет вид

$$A\left(\hat{t}_\gamma\right) = ln^2(\gamma) V\left(\hat{T}_0\right), \quad (3.10)$$

где $V(\hat{T}_0) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}(E\hat{T}_0(R,n,\tau = 10^i) - t)^2 \partial t.$

В соответствии с [20] функционал $V(\hat{T}_0)$ в формуле (3.10) принимает минимальную величину (а вместе с ним и функционал $V(\hat{t}_\gamma)$, если в качестве оценки параметра T_0 подставить его эффективную оценку, построенную в достаточно широком классе смещенных оценок.

Для биномиального плана испытаний эффективной в классе смещённых оценок СНДО является

$$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) -$$
$$- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)).$$

Тогда эффективная смещённая оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$, построенная в достаточно широком классе оценок [21], примет вид

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) T_{\tau 2} \qquad (3.11)$$

Для испытаний, не давших отказов, оценку $\hat{t}_{\gamma 1}$ можно применять и для плана типа $N\text{В}\tau$. Полученная таким образом оценка $\hat{t}_{\gamma 1}$ количественного значения ГПНДО t_γ имеет существенные преимущества, а именно:

– оценка является эффективной в достаточно широком классе смещённых оценок [21];

– оценка позволяет получать количественные значения t_γ по результатам испытаний, не давших отказов и проводимых по планам испытаний типа $N\text{Б}\tau$ или $N\text{В}\tau$.

Проведенную работу уместно сравнить с другими работами, например [21].

Пример 3.18

В качестве показателя надежности изделия используется ГПР (ГПНДО) $t_\gamma(\gamma{=}0{,}95)$, который не должен быть менее 1500 ч. По результатам биномиальных испытаний одного изделия в течение 10000 ч отказы не возникали $R = 0$. Требуется сделать оценку $t_\gamma(\gamma{=}0{,}95)$ и проверку соответствия изделия требованиям к надежности.

Заметим, что в данном примере наработка 10000 ч не определяет предельное состояние изделия, как невосстанавливаемого (отказов всех изделий не было), так и восстанавливаемого. Поэтому γ=0,95 является минимальным пределом для того, чтобы при этой вероятности выполнялось приближенное равенство

ГПР ≈ ГПНДО, т. е. судить о ГПР по наработке, не дающей предельного состояния, при $\gamma < 0{,}95$ не корректно.

Непосредственно из формулы $t_\gamma = -T_0 Ln(\gamma)$ следует, что прогнозируемая величина ГПР (ГПНДО) $\tilde{t}_\gamma(0{,}95)$ составит:

$$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$$

$$= 400+0{,}6*10000-10000/Ln(1–0{,}3/(1+0{,}3) = 44514 \text{ ч.}$$

$$\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = -T_0 Ln(\gamma) = -44514 Ln(0{,}95) = 2283 \text{ ч.}$$

По результатам оценки величины ГПР (ГПНДО) $t_\gamma(0{,}95)$ можно сделать вывод о соответствии изделия требованиям к ГПР (ГПНДО). Время, в течение которого откажет не более 5% изделий, составит $\tilde{t}_\gamma(0{,}95)$ = 2283 ч, что соответствует требованиям к надежности изделия ($t_\gamma(0{,}95)$ = 1500 ч.).

3.12. Нахождение эффективной смещённой оценки остаточного гамма-процентного ресурса для биномиального плана испытаний. Прогнозирование остаточного ресурса по результатам биномиальных испытаний, не давших отказов

Под остаточным ресурсом понимается суммарная наработка объекта от момента контроля его технического состояния до момента достижения его предельного состояния [27]. То есть остаточный ресурс – ресурс, который исчисляется от величины наработки $t_н$ в текущий момент времени. В основе понимания долговечности изделия (его ресурса) лежит модель надежности [27], которая описывает закон распределения отказов. Внезапные отказы, носящие случайный характер, обычно довольно хорошо описываются экспоненциальным законом. Напротив, отказы, носящие название постепенных, во многих случаях довольно хорошо описываются нормальным законом [4]. У реального изделия часто совмещаются оба типа отказов. Изделие находится в работоспособном состоянии до первого из этих отказов. Пусть $P_1(s)$ – вероятность того, что за время s не произойдет внезапный отказ, а $P_2(s)$ – вероятность того, что за время s не произойдет постепенный отказ.

В предположении, что отказы возникают независимо, вероятность безотказной работы будет равна $P_0(s) = P_1(s)P_2(s)$. ВБР $P_0(s)$ имеет сложное аналитическое выражение [4], что значительно затрудняет проведение расчетов. Однако на практике для большинства случаев составляющей $P_2(s)$ можно пренебречь, поэтому ВБР $P_0(s) = P_1(s)$ и $P_1(s)$ имеет экспоненциальный характер по предположению. Далее покажем, в каких случаях это происходит.

Чаще всего в качестве показателя долговечности используется гамма-процентный ресурс, совсем редко – средний ресурс. Это объясняется тем, что за время, равное среднему ресурсу, откажет половина изделий; с точки зрения безопасности и экономичности такая эксплуатация является неоправданной. В соответствии с [27] ГПР (t_γ) – суммарная наработка, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах. Аналогично определяется остаточный гамма-процентный ресурс, а именно: ОГПР $(t_{\text{ост.}\gamma})$ – суммарная наработка объекта, исчисляемая от момента контроля его технического состояния, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах.

Изделия электронной техники характеризуются минимальной наработкой (далее – t_{min}), величина которой находится в пределах от 15 до 25 лет. Минимальной наработке t_{min} соответствует ГПР ЭРИ при $\gamma = 0{,}999$, т. е. вероятность постепенного отказа ЭРИ на относительно коротком временном участке, равном минимальной наработке, близка к нулю, что соответствует пологому участку нормального закона распределения.

Поэтому интенсивность отказов на начальном пологом участке нормального з.р. приближенно можно выразить формулой $\lambda_2(s) \cong \lambda_2 = const$, следовательно $P_2(s) = e^{-\lambda_2 s}$, где $\lambda_2 \ll \lambda_1$ – приближение константой интенсивности отказов на пологом участке кривой нормального закона распределения. Причем на этом пологом участке $P_2(s) > 0{,}95$ (определяет критерий соответствия выбранной экспоненциальной модели). С другой стороны, для экспоненциального закона распределения вероятность отказа высоконадежного изделия выражается формулой $P_2(t) =$

$e^{-\lambda_1 s}$. Из полученных приближений и равенства $P_0(s) = P_1(s)P_2(s) \cong e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} \cong e^{-\lambda_1 s}$ получаем, что на пологом временном участке ВБР определяется с хорошим приближением экспоненциальным законом. В этом случае гамма-процентная наработка до отказа совпадает с гамма-процентным ресурсом.

То же самое относится и к сложному изделию, состоящему из большого количества ЭРИ.

Для невосстанавливаемых сложных изделий ГПР не превышает минимальную наработку любого ЭРИ, составляющих это сложное изделие, а вероятность γ обычно выбирают в пределах от 0,95 до 0,999. Такой выбор величин вероятности γ разграничивает временной промежуток использования изделия на интервалы, где начальный интервал ограничен величиной ГПР ($\gamma \geq 0{,}95$). Такое разграничение позволяет считать, что в пределах этого начального интервала (15–25 лет) модель надежности невосстанавливаемых сложных изделий $P_0(s) = P_1(s)$ находится в рамках влияния экспоненциального закона. Этот факт позволяет делать прогнозы величины ГПР (ОГПР) невосстанавливаемых сложных изделий в пределах установленных ограничений (≤25 лет).

Модель надежности

На интервале [0; 25] лет, ограниченном величиной минимальной наработки ЭРИ t_{min}, наработка до отказа невосстанавливаемых сложных изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 (средняя наработка до отказа). Величина ВБР (далее – $P_0(s)$) за заданное время (далее – $s, s \leq t_{min}$) находится из выражения

$$P_0(s) = e^{\left(-\frac{s}{T_0}\right)}. \qquad (3.12)$$

Из формулы (3.12) легко выводится расчетная формула для ГПР ($\gamma_{\text{н}} = P_0(s = t_{\text{н}})$):

$$t_{\text{Н}} = -T_0 \ln(\gamma_{\text{н}}), \gamma \geq 0{,}95\,. \qquad (3.13)$$

Начальную (нормированную) величину ГПР $t_{\text{Н}}$ устанавливают по факту (в техническом задании).

Устанавливая (нормируя) величину вероятности ($\gamma_{п}$) для продленного ресурса (далее $- t_{п}, \gamma_{п}(t_{п}) < \gamma_{н}(t_{н})$), легко рассчитать ОГПР изделия (далее $- t_{ост.\gamma}$):

$$t_{ост.\gamma} = t_{п} - t_{н} = -T_0 \ln(\gamma_{п}) - \\ -\left(-T_0 \ln(\gamma_{н})\right) = T_0 \ln(\gamma_{н}) - T_0 \ln(\gamma_{п}). \qquad (3.14)$$

Из формул (3.12)–(3.14) легко рассчитать вероятность γ для ОГПР $t_{ост.\gamma}$, а именно: $\gamma = e^{\left(-\frac{t_{ост.\gamma}}{T_0}\right)}$.

Устанавливая (нормируя) величину вероятности $\gamma_{п}$ для продленного ресурса

$t_{п} = t_{Прогноз}$: $\gamma_{п}(t_{п}) = 0{,}95 = \gamma_{Прогноз}(t_{Прогноз})$, можно прогнозировать ОГПР изделия в соответствии с формулой (3.14), а именно:

$$t_{Прогноз.ост.\gamma} = T_0 \left(ln(\gamma_{н}) - ln\left(\gamma_{Прогноз}\right) \right).$$

Рассмотрим случай проведения испытаний в соответствии с планом $N Б \tau$.

С целью построения оценки ОГПР (далее – $\hat{t}_{ост.\gamma}$) вполне естественным будет, если в качестве оценки параметра T_0, воспользоваться традиционной точечной оценкой СНДО, построенную для экспоненциального распределения [4, 28]:

$$\widehat{m} = \frac{T^*}{R} \text{ при } R > 0,$$

где T^*– суммарная наработка; R – количество отказов.

Однако полученная таким образом оценка имеет существенные недостатки, а именно:

– оценка является смещенной;

– оценка является неэффективной;

– оценка не позволяет получать количественные значения $\hat{t}_{ост.\gamma}$ по результатам испытаний, не давших отказов.

Для решения упомянутой выше задачи достаточно найти несмещенную эффективную оценку ОГПР ($\hat{t}_{ост.\gamma эф}$), если такая существует в классе состоятельных смещенных оценок. Следует отметить, что класс состоятельных оценок, в который входят и все оценки, полученные методом подстановки, включая и метод максимального правдоподобия, содержит в себе оценки с любым смещением, в том числе и с фиксированным – в виде функции от параметра или константы [1].

В ряде случаев найденные несмещенные эффективные оценки имеют весьма громоздкий вид со сложным алгоритмом вычисления [3]. Они также не всегда являются достаточно эффективными в классе всех смещенных оценок и не всегда имеют значительное преимущество перед простыми, но смещенными оценками с точки зрения близости к оцениваемому показателю.

Методы и решения

В качестве инструмента для нахождения эффективной оценки будем использовать интегральные характеристики [9, 14, 20, 21] (см. формулы (3.10)). Аналогично [9, 14, 21] построим критерий выбора эффективной оценки на множестве оценок $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, N, \tau)$, основанном на суммарном квадрате относительных смещений математического ожидания оценок $E\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, N, \tau)$ от $t_{\text{ост.}\gamma} = T_0\,(ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}}))$ для всех возможных величин, принимаемых параметрами биномиальных испытаний $p(T_0, s) = 1 - e^{\left(-\frac{s}{T_0}\right)}$ и N. Поэтому в качестве критерия получения эффективной оценки строится функционал (далее – $A(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, N, \tau))$) [9, 14, 21]:

$$V(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2}(E\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, n, \tau = 10^i) - $$

$$- t(ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}})))^2 \partial t. \qquad (3.15)$$

где переменная интегрирования t – парметр з.р. СНДО, t^2 – нормирующий множитель,

$\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}\big(R, n, \tau = 10^i\big) = \hat{T}_0\big(R, n, \tau = 10^i\big)(ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}}))$, а член в подинтегральном выражении определяется равенством

$$t(ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}})) = t_{\text{ост.}\gamma}.$$

Эффективная смещённая оценка ОГПР должна обладать минимальной величиной функционала $A(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R,N,\tau))$.

В соответствии с формулой (3.14) оценку $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ можно представить в виде

$$\hat{t}_{\text{ост.}\gamma} = \hat{T}_0(ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}})),$$

где $\hat{T}_0$ – некоторая оценка СНДО. Воспользовавшись свойствами биномиального распределения с параметром p [1, 2], найдем

$$E\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}\left(R,n,\tau = 10^i\right) = \left(ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}})\right)E\hat{T}_0\,.$$

Вынесем из-под знака интеграла $(ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}}))$, тогда формула (3.15) с учетом (3.14) примет вид

$$A(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}\ ) = (\ ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}}))^2 V(\hat{T}_0), \tag{3.16}$$

где

$$V(\hat{T}_0) = \ \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\ \sum_{i=3}^{5}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}(E\hat{T}_0(R,n,\tau = 10^i) - t\ )^2 \partial t.$$

В соответствии с [20] $V(\hat{T}_0)$ в формуле (3.16) принимает минимальную величину, а вместе с ним и функционал $A(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma})$, если в качестве оценки параметра $\hat{T}_0$ подставить его эффективную оценку, построенную в достаточно широком классе смещенных оценок.

Для биномиального плана испытаний эффективной в классе смещенных оценок СНДО является

$$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\text{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\text{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) -$$

$$- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\text{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)).$$

Тогда эффективная смещённая оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$, построенная в достаточно широком классе смещенных оценок [9, 12, 20], примет вид

$$\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R,n,\tau) = (\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}}))T_{\tau 2}\,, \gamma_{\text{п}}\ \geq\ 0{,}95. \tag{3.17}$$

Полученная таким образом оценка $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ доставляет минимум функционалу $A(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma})$ в достаточно широком классе смещенных оценок [9, 12, 20, 24] и по определению является эффективной оценкой ОГПР в этом классе оценок. Оценка $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ имеет существенные преимущества в сравнении с традиционными оценками ОГПР, а именно:

– оценка является эффективной в достаточно широком классе смещенных оценок [9, 12, 20];

– оценка позволяет делать оценку ОГПР по результатам испытаний, не давших отказов.

Пример 3.19

По результатам безотказной эксплуатации 10 изделий в течение 10000 ч было принято решение продолжить эксплуатацию этих изделий еще в течение 10000 ч с целью определения прогнозной величины ОГПР $t_{Прогноз\cdot ост.\gamma}$ при $\gamma_{прогноз}$ = 95%. По результатам проведенной эксплуатации отказы обнаружены не были.

Решение. В качестве оценки СНДО T_0 в формуле $t_\gamma(0{,}95) = -T_0 Ln(\gamma)$ следует применять эффективную смещённую оценку при $R = 0$

$$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$$

$= 400 + 0{,}6\cdot 20000 - 20000\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - 0{,}3)/(10 + 0{,}3)) = 689017$ ч. Тогда прогнозируемая величина ГПР $t_\gamma(0{,}95)$ составит

$$\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = -T_{\tau 2}Ln(\gamma) = -689017\cdot Ln(0{,}95) = 35342 \text{ ч.}$$

Следовательно, изделия, чьи наработки в эксплуатации не превышают 10000 ч смогут проработать еще

$t_{ост.\gamma} = \tilde{t}_\gamma(0{,}95) - 10000 = 35342 - 10000 = 25342$ ч с вероятностью $\gamma = \mathrm{Exp}\{-25342/\,T_{\tau 2}\} = 0{,}963$.

Эту задачу можно решить други способом, если вычислить вероятность $\gamma_н$ за 10000 ч, т. е. $\gamma_н = \mathrm{Exp}\{-10000/\,T_{\tau 2}\} = 0{,}9856$.

$$\hat{t}_{\text{Прогноз.ост.}\gamma} = (ln(\gamma_н) - ln(\gamma_{\text{критерий}} = 0{,}95))T_{\tau 2} =$$
$$= \left(ln(0{,}9856) - ln(0{,}95)\right) * 689017 = 25342 \text{ ч;}$$

Заметим, что продолженная наработка, равная 25342 ч, имеет статус остаточного ресурса при $\gamma = 0{,}963$, т. е. можно сделать вывод, что продолженный ОГПР составил 25342 ч при $\gamma = 96{,}3$ %. То есть продолженный ОГПР изделий, чьи сроки эксплуатации достигнут 10000 ч, смогут безотказно проработать еще 25342 ч с высокой вероятностью, равной 0,963.

По результатам прогноза $t_{\text{Прогноз.ост.}\gamma}$ можно сделать вывод, что прогнозируемый ОГПР составил 25342 ч при $\gamma = 96{,}3$ %.

Приведем для сравнения традиционное решение примера 1.

Традиционно для испытаний, не давших отказов, оценку ВБР за первичную наработку, равную 20000 ч, оценивают параметр T_0 (вместо точечной оценки) по нижней доверительной границе СНДО с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}9$ (не путать с вероятностью «гамма»), то результат в соответствии с [28] составит

$$T_{01н} = \frac{2t_\Sigma}{x^2(1-\alpha;2r+1)} = (2\cdot 10\cdot 20000)/2{,}71 = 147601 \text{ ч}]\,,$$

где t_{Σ} − суммарная наработка изделия; $x^2(1-\alpha; 2r+1)$ – квантиль x^2-распределения с $(2r+1)$-й степенью свободы (для плана испытаний NБτ); $(\alpha = 1-\gamma = 1 - 0{,}9 = 0{,}1)$ − уровень значимости; согласно ГОСТ Р 50779.26–2007 [28]:

$$\gamma_{\text{н}}(t_{\text{н}}) = exp\left\{-\frac{s = 10000}{T_{01\text{н}} = 147601}\right\} = 0{,}934 < 0{,}95.$$

То есть первичная (или продолженная) наработка, равная 10000 ч, соответствует ГПР группы изделий при $\gamma = 93{,}4\,\%$, что ниже требуемых 0,95 %, поэтому следует продолжить эксплуатацию. Осуществлять прогнозирование в рамках заложенных ограничений невозможно.

Выводы к разделу 3

1. Полученные составные оценки:

– ВБР:

– $\tilde{p}_{20}(R=0) = \tilde{w}$, $\tilde{p}_{20}(R>0) = R / n$,

где $\tilde{w}(R=0) = w(0{,}993;n,R)$, $\tilde{w}(R>0) = w(0{,}75;n,R)$;

– $\tilde{p}_{\tau}(g;T_p(R,\tau,n)) = 1 - Exp(-g/T_p)$,

где g – время, за которое рассматривают вероятность, τ – время испытаний, $T_p(R=0) = 60{\cdot}n\tau$, $T_p(R>0) = n\tau - R\tau/2$. Применяется там где необходимо знать зависимость от времени испытаний τ и времени, за которое оценивается вероятность;

– СНДО

$$T_{\tau 2}(R=0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R=0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau 2}(R>0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2)) -$$
$$- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2)),$$

являются эффективными в достаточно широком классе смещённых оценок для биномиального плана испытаний.

2. Для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний оценки СНДО $T_{\tau 2}$ и T_B (см. раздел 2) приблизительно равны между собой для случая, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и следовало ожидать. Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

3. Полученная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) T_{\tau 2}$ является простой и более эффективной по сравнению с традиционной и уступает незначительно оценке

$\hat{t}_{\gamma эф}$ в случае ее существования с точки зрения близости к t_{γ} при использовании биномиального плана испытаний.

Полученная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$ имеет существенные преимущества, а именно:

– оценка является эффективной в достаточно широком классе оценок [21];

– оценка позволяет получать количественное значение t_{γ} по результатам испытаний, не давших отказов.

Полученная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$ рекомендуется для испытаний, не давших отказов, проводимых по биномиальному плану.

4. Полученная оценка ОГПР $\hat{t}_{ост.\gamma}(R, n, \tau) = (\ln(\gamma_{н}) - \ln(\gamma_{п}))T_{\tau 2}$. (см. формулу (3.18)) является простой и более эффективной по сравнению с традиционной, но уступает незначительно оценке $\hat{t}_{ост.\gamma\ эф}$ в случае ее существования с точки зрения близости к t_{γ} при использовании биномиального плана испытаний.

Полученная оценка ОГПР $\hat{t}_{ост.\gamma}$ имеет существенные преимущества, а именно:

– оценка является эффективной в достаточно широком классе смещенных оценок [9, 12, 21];

– оценка позволяет получать количественные значения $t_{ост.\gamma}$ по результатам испытаний, не давших отказов.

Предлагаемый метод прогнозирования и полученная эффективная оценка ОГПР $\hat{t}_{ост.\gamma}$ имеют направленность практического применения при безотказной эксплуатации изделий.

ЧАСТЬ 4
СОСТАВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

4.1. Байесовские оценки. Введение

В настоящее время проявляется повышенный интерес к байесовской теории среди специалистов в области прикладной теории надежности. Однако байесовский подход не является общепринятым среди специалистов в области математической статистики и теории надежности. Сомнения в возможности его применения при решении практических задач вызваны в первую очередь тем, что он допускает использование субъективных вероятностей [6]. Т. е. в байесовских методах предполагается, что априорное распределение известно до начала наблюдений и не предлагается конструктивных способов его выбора. В байесовском подходе предполагается, что случайность есть мера нашего незнания, т. е. предварительные знания о случайном событии позволяют предсказать его с «большей» вероятностью. В противовес этому, в частотном подходе предполагается, что случайность есть объективная неопределенность, т. е. единственным возможным средством анализа является проведение серии испытаний [1, 2].

В соответствии с формулой Байеса плотность апостериорного распределения имеет вид [1]:

$$q(x|t) = f_\theta(x)q(t)/f(x), \tag{4.1}$$

где t – реализация случайного параметра θ с некоторой (априорной) плотностью распределения $q(t), t \epsilon \Theta$; $f_\theta(x) = f(x|\theta \ = t)$ – условная плотность распределения случайной величины X,

$$f(x) = \int \ f_\theta(x)q(t)dt \ .$$

Само апостериорное распределение параметра θ будем обозначать через Q_x. Тогда байесовская оценка, соответствующая априорному распределению Q с плотностью $q(t)$, имеет вид

$$\hat{\theta}_Q(X) = E(\theta|x) = \int tq(t|X)dt = \int tQ_x(dt). \tag{4.2}$$

Из формулы (4.2) следует, что результат байесовской оценки $\hat{\theta}_Q$ ограничен выбранным априорным распределением как неизменным постулатом [6]. Ряд авторов исследует вопросы выбора априорного распределения, оставаясь в рамках априорного подхода [6]. Однако свойства байесовской оценки остаются ограниченными данным выбором. Примером могут служить сопряженные априорные распределения [6, стр. 46].

С одной стороны, эти заложенные в правило предварительные знания несут в себе однократные (или нет) финансовые издержки, а с другой – позволяют минимизировать объем испытаний [6], что в рамках стабильного производства дает им конкурентные преимущества [6]. В этих условиях вполне естественно возникает вопрос – есть ли необходимость в байесовских оценках в практических задачах надежности. Чтобы ответить на этот вопрос необходимо разобраться в частностях.

Рассмотрим пример [6, 30, 31]. Пусть процесс Бернулли с параметром $\theta = p$ и выборкой объема N имеет априорное бета-распределение с параметрами α и β. Тогда условная плотность $q(p|X)$, где X – случайное число отказов, $X = R$, выразится формулой

$$q(p|R) = \frac{\Gamma(R+\alpha+\beta)}{\Gamma(R+\alpha)\Gamma(N-R+\beta)} p^{R+\alpha-1}(1-p)^{N-R+\beta-1} \tag{4.3}$$

где Γ() – гамма-функция.

Из формулы (4.3) следует, что апостериорное распределение является тоже бета-распределением с параметрами $(R+\alpha)$ и $(N-R+\beta)$. Байесовская оценка случайного параметра p равна математическому ожиданию $E(p|R)$, т. е.

$$\hat{\theta}_Q(X) = \frac{R+\alpha}{N+\alpha+\beta}. \tag{4.4}$$

Заметим, что математическое ожидание априорного бетараспределения, т. е. априорная оценка параметра p до наблюдения, равна $\hat{p}_\alpha = {}^{\alpha}/_{\alpha+\beta}$ [4], а оценка по наблюдению (классическая оценка [3, стр. 19]), игнорирующая априорное распределение, равна $\hat{p} = \frac{R}{N}$ [1].

4.2. Формулировка составной байесовской оценки

В рамках биномиальных испытаний байесовская оценка $\hat{\theta}_Q(X) = \frac{R+\alpha}{N+\alpha+\beta}$ группируется в близи установленного предела *β/(α+β),* т. е. дает результаты, не выходящие за рамки дозволенного, определенного выбором вида распределения и его параметров α и β по результатам испытаний изделий предыдущих партий. Такая модель поведения оценки не отражает реальный мир и обслуживает период стабильной ситуации. Как только устанавливаются границы в пределах которого ведется рассуждение, то выход уже за эти границы ($\alpha \pm \varepsilon$; $\beta \pm \varepsilon$) становится невозможным при любом исходе в процессе испытаний. Однако смыслом оценки (статистической оценки) и поставленной задачи как раз и является заметить этот выход за установленные границы и откорректировать их ($\alpha = \alpha \pm \varepsilon$; $\beta = \beta \pm \varepsilon$), т. е. изменить постановку задачи по результатам испытаний, с целью получения адекватного решения. Т. е. в байесовском подходе не верна сама постановка, поэтому и задача оценки истинной величины показателя надежности при такой постановке не имеет адекватного решения [9, 44]. Вполне естественно требовать от оценки адекватные реакции на изменение внешних условий, влияющих на надежность, таких как нарушение в технологическом процессе, изменение условий эксплуатации и т. п.

Зададимся вопросом – насколько сдерживается чувствительность байесовской оценки к нарушению стабильности в зависимости от априорной оценки $\hat{p}_\alpha = {}^{\alpha}/_{\alpha + \beta}$.

На практике, как правило, рассматривают модели однородной продукции, т. е. каждое из изделий оцениваемой партии характеризуют одинаковой величиной, выбранного параметра надежности. В случае байесовского метода статистического оценивания рассматривается уже модель неоднородной продукции, однако в процессе стабильного производства не считается нормальным выпуск изделий с различной надежностью, что ставит под сомнение адекватность применения методов байесовского статистического оценивания.

Рассмотрим крайние модели, основанные на методах байесовского статистического оценивания. Приведем пример, когда плотность априорного распределения параметра p одинаково максимальна и равномерна, что соответствует модели максимальной неоднородности выпускаемой продукции. Для этого рассмотрим биномиальный план испытаний и предположим, что величина параметра p равномерно распределена в интервале [0;1]. Это допущение соответствует полному отсутствию данных о надежности изделия, т. е. максимальной неопределенности относительно интервала величин, принимаемых параметром p. Согласно раздела 3.2 байесовская оценка в этом случае имеет вид: $\bar{\bar{p}}(R,n) = (R+1)/(n+2)$, т. е. соответствует апостариорной байесовской оценке при α = 1 и β = 1 (см. формулу (4.4)).

Рассмотрим другой экстремальный пример, когда плотность априорного распределения параметра p максимально вырождена в одной точке или в небольшой области, что соответствует модели однородной продукции. В этом случае для биномиального плана следует использовать классическую оценку $\hat{p} = \frac{R}{N}$.

В таблице 4.1 приведены сравнительные результаты байесовской и классической оценок [3, с. 19] на примере априорного бета-распределения. Для однородной продукции наиболее подходит априорное бета-распределение с параметрами α << β, что и взято за основу при сравнении в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Сравнительные результаты байесовской и классической оценок

$\hat{\theta}_Q(X) = \frac{R+\alpha}{N+\alpha+\beta}$	$\hat{p}_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\hat{p} = \frac{R}{N}$	$\bar{\bar{p}}(R,n) = \frac{R+1}{n+2}$, α = 1, β = 1	R	N	α	β
11/16=0,6875	0,8333	0,25	2/6=0,333	1	4	10	2
12/16=0,75	0,8333	0,5	3/6=0,5	2	4	10	2
13/16=0,8125	0,8333	0,75	4/6=0,666	3	4	10	2
9/16=0,562	0,6666	0,25	2/6=0,333	1	4	8	4
10/16=0,625	0,6666	0,5	3/6=0,5	2	4	8	4
11/16=0,687	0,6666	0,75	4/6=0,666	3	4	8	4

Из таблицы 4.1 следует, что результаты байесовской оценки при любом исходе группируются в пределах догмата о среднем $\hat{p}_{\alpha} = {}^{\alpha}/_{\alpha + \beta}$, в то время как классическая оценка $\hat{p} = \frac{R}{N}$ адекватно реагирует на любые внешние изменения. Аналогичные результаты получены в [30]. Заметим ещё раз, что в данном случае рассматриваются модели однородной продукции [4]. Не следует в моделях однородной продукции использовать байесовские оценки предназначенные для моделей неоднородной продукции, что и отражено в таблице 4.1.

Моделируя различные ситуации окружающего мира, следует помнить о его постоянной изменчивости. Так, различные партии изделий имеют различные величины параметров априорного распределения, а в случае нарушения технологической дисциплины эти различия становятся еще сильнее.

Однако заметить эти отличия не позволяет не только зафиксированный выбор вида априорного распределения, но и зафиксированный выбор величин параметров этого распределения, осуществленный на выборках различных партий изделий еще до выпуска контролируемой партии. То есть этот выбор основан на опыте стабильного выпуска предыдущих партий. Таким образом, байесовская оценка контролируемой партии напрямую зависит не только от вида априорного распределения, исхода испытаний и объема выборки N, но и от выбранных параметров априорного распределения.

На практике наиболее часто встречающийся случай – это двухпараметрическое априорное распределение. Поэтому дальнейшее изложение, не нарушая общности рассуждений, проведем для двухпараметрического случая $q(t, \alpha, \beta)$.

Проблему неадекватной реакции на изменения, произошедшие в технологическом процессе контролируемой партии изделий, удастся решить, если искомую байесовскую оценку показателя надежности каждой контролируемой партии изделий искать в новой постановке задачи, а именно: в виде составной оценки, характеризующейся априори установленным распределением (или установленными распределениями), параметры которых заранее определены в зависимости от результатов будущих испытаний изделий этой партии. То есть параметры α, β должны определять не весь технологический процесс, а только контролируемую партию в зависимости от результата испытаний. Для описанного примера составную байесовскую оценку следует представлять в виде $\hat{\theta}_Q(R, N, \alpha_i, \beta_i)$, где $i = 0,1,2.., N$ и при $R = r, i = r$; а получаемую плотность составного априорного бета-распределения – в виде $q(t, \alpha_i, \beta_i)$, где α_i, β_i – набор параметров. Данная модель позволит по результатам составной байесовской оценки определять реальные изменения, а не стабильность ситуации.

Ясно, что подбор параметров α_i, β_i зависит от конкретного плана испытаний и вероятности возникновения исхода испытаний $P(r, N, p)$, которую необходимо выбирать максимальной $P_{max} = P(r, N, p_{max})$ для данного плана испытаний и исхода с целью получения оценки $\hat{p} = p_{max}$ параметра p, что одновременно определяет априорную оценку достигнутого уровня надежности контролируемой партии $\hat{p}_\alpha$, т. е. $\hat{p} = \hat{p}_\alpha = \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}$. Заметим, что априори известная плотность распределения получается не по результатам испытаний различных партий изделий, а по известным зависимостям вероятности возникновения исходов для конкретного плана испытаний, что нивелирует ошибки, зависящие от свойств используемой оценки искомых (истинных) параметров α, β в классическом случае.

Заметим еще раз, что параметры α_i, β_i не являются в чистом виде априорными, а являются выбранными вариантами из заранее определенного набора параметров в зависимости от результатов испытаний контрольной партии. Определенная таким образом пара парметров α_r, β_r из уже определенного набора вариантов, определенных по правилу максимальной вероятности возникновения событий (отказов) конкретного плана испытаний, характеризует надежность контролируемой партии изделий. Априорной информацией можно считать само распределение (например, бета-распределение параметра p – рандомизированного параметра биномиального распределения).

Составная байесовская оценка не зависит от вида испытуемых изделий, а зависит только от известной зависимости вероятности возникновения исхода испытаний, которая определяется конкретным планом испытаний и в силу выбора вероятности по правилам максимизации вероятности возникновения отказа, не изменится. Это и является основным преимуществом составной байесовской оценки – она определяется для конкретного плана испытаний однократно по правилам максимизации вероятности возникновения отказа.

4.3. Построение составной байесовской оценки на примере априорного бета-распределения

Пусть процесс испытаний Бернулли с параметром $\theta\ = p$ проводится над изделиями с выборкой объема $N = 4$. Для этого плана испытаний задано априорное составное бета-распределение с параметрами α_r и β_r. В соответствии с формулами (4.2) и (4.3) байесовская оценка примет вид [6; 31, с. 107] (ср. с формулой (4.4)):

$$\hat{\theta}_Q(R = r, N, \alpha_r, \beta_r) = \int tq(t|X)dt =$$

$$= \int_0^1 p \frac{\Gamma(r + \alpha_r + \beta_r)}{\Gamma(r + \alpha_r)\Gamma(N - r + \beta_r)} p^{r+\alpha_r-1}(1 - p)^{N-r+\beta_r-1}\, dp =$$

$$= \frac{r + \alpha_r}{N + \alpha_r + \beta_r},$$

где $R = \sum_{i=1}^{N} R_i$ – случайное число отказов; $r -$ реализация с.в. R; с.в. R_i подчиняется закону Бернулли с параметром $p, 0\ \le\ p\ \le\ 1$, т. е. R_i – дискретная с.в., принимающая всего лишь два целых значения 0 и 1 с вероятностями $P(R_i = 1|p) = p$ и $P(R_i = 0|p) = 1 - p = q$; $R = \sum_{i=1}^{N} R_i$ – статистика, которая подчиняется биномиальному закону распределения $b(r, N, p) = C_N^r p^r (1 - p)^{N-r}$ с параметрами N и p, C_N^r – число сочетаний r из N элеменов.

Решим классическую задачу определения максимума функции $b(r, N, p) = C_N^r p^r (1 - p)^{N-r}$ относительно переменной p. Для этого прологарифмируем функцию $b(r, N, p) = C_N^r p^r (1 - p)^{N-r}$, возьмем производную и приравняем ее нулю. Решение полученного уравнения дает известную классическую оценку вероятности отказа для биномиального распределения $\hat{p} = \frac{R}{N}$ [3, с. 19] (несмещенную и эффективную).

Ясно, что классическая оценка $\hat{p} = \frac{R}{N}$ доставляет максимум функции $b(r, N, p) = C_N^r p^r (1-p)^{N-r}$ и определяет достигнутый уровень надежности и величину априорной оценки в зависимости от исхода испытаний, т. е.

$$\hat{p} = \frac{R}{N} \cong \hat{p}_\alpha = \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}.$$

В таблице 4.2 приведены сравнительные результаты составной байесовской оценки с набором параметров $\alpha_r\left(\hat{p} = \frac{r}{N}\right)$, $\beta_r\left(\hat{p} = \frac{r}{N}\right)$ и классической (эффективной и несмещенной), где вероятность возникновения исхода $b(r, N, p), r = 0,1,2.., N$, выбиралась максимальной для конкретных плана и исхода испытаний, что определило априорную оценку $\hat{p}_\alpha$ параметра p до наблюдения, т. е. $\hat{p} = \frac{R}{N} \cong \hat{p}_\alpha = \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}$.

Таблица 4.2

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}_Q(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{\alpha_r}, \boldsymbol{\beta_r})$ с набором параметров $\boldsymbol{\alpha_r}(\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{r}{N})$, $\boldsymbol{\beta_r}\left(\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{r}{N}\right)$ и классической оценки $\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{R}{N}$

$\hat{\theta}_Q = \frac{(R=r)+\alpha_r}{N+\alpha_r+\beta_r}$	$\hat{p} = \frac{R}{N}$	$\hat{p}_\alpha = \frac{\alpha_r}{\alpha_r+\beta_r}$	R	N	α_r	β_r	$b()$
1/29=0,034	0	1/25=0,04	0	4	1	24	0,85
3/12=0,25	0,25	2/8=0,25	1	4	2	6	0,42
7/14=0,5	0,5	5/10=0,5	2	4	5	5	0,37
9/12=0,75	0,75	6/8=0,75	3	4	6	2	0,42
29/30=0,96	1	25/26=0,96	4	4	25	1	0,84

Из таблицы 4.2 следует, что апостериорная оценка (составная байесовская оценка) $\hat{\theta}_Q$ адекватно реагирует на любые внешние изменения. Такая оценка близка к классической (эффективной и несмещенной) $\hat{\theta}_Q \cong \hat{p} = \frac{R}{N}$ при условии, что каждая составная часть априорной оценки определена максимальной вероятностью возникновения исхода.

Докажем этот факт:

$$\hat{\theta}_Q(R = r, N, \alpha_r, \beta_r) = \frac{r + \alpha_r}{N + \alpha_r + \beta_r} =$$

$$= \frac{\frac{r}{\alpha_r + \beta_r} + \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}}{1 + \frac{N}{\alpha_r + \beta_r}} \cong \frac{\frac{r}{\alpha_r + \beta_r} + \frac{r}{\mathrm{N}}}{1 + \frac{N}{\alpha_r + \beta_r}} =$$

$$= \frac{\frac{r \cdot r}{N} + \frac{r \cdot \alpha_r}{\mathrm{N}}}{r + \alpha_r} = \frac{r}{N} \cdot \frac{r + \alpha_r}{r + \alpha_r} = \frac{r}{N}$$

Еще одним преимуществом составной байесовской оценки является возможность оценивать показатели надежности изделий величиной, отличной от нуля и единицы.

Следует заметить, что, для целочисленных значений $R = 0$ и $R = N$ исходов биномиальных испытаний, априорные вероятности возникновения отказа $\hat{p}_\alpha(0)$ и $\hat{p}_\alpha(N)$ следует ограничить вещественными значениями, отличными от нуля и единицы (таблица 4.2). В этом заключен некоторый произвол, однако в противном случае составная байесовская оценка совпадет с классической $\hat{p} = \frac{R}{N}$. Что делает необходимость в байесовской оценке биномиальных планов испытаний ничтожной.

Так как составную байесовскую оценку можно сколь угодно близко приблизить к классической и сделать ее практически несмещенной и эффективной, то нет смысла сравнивать по эффективности составную байесовскую оценку с произвольной байесовской оценкой. Проигрыш по эффективности любой байесовской оценки, построенной для исследуемого плана испытаний, – очевиден.

Неоднозначность выбора коэффициентов α_r и β_r можно отрегулировать минимизацией дисперсии бета-распределения [2, п. 2.16].

В силу неоднозначного выбора параметров α_r и β_r можно построить несколько составных байесовских оценок $\hat{\theta}_Q$ примерно равнозначных. Формально, когда сравниваемые оценки являются смещенными и имеют одинаковую минимальную сумму квадрата относительных смещений математического ожидания этих оценок от параметра p [30], следует дополнительно рассматривать функционал, основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}_Q$ от параметра p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, N, r. В этом случае, оценку с минимальной суммой математических ожиданий квадратов относительных уклонений от параметра p , для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, N, r, следует признать более эффективной [9, 20].

4.4. Точечная составная оценка как альтернатива байесовской оценки на примере априорного бета-распределения

Разумной альтернативой классической оценки, а следовательно и составной байесовской оценки, в части биномиальных испытаний, в процессе которых отказы не возникали, может служить смещенная точечная составная оценка вероятности отказа изделия. Для биномиального плана испытаний можно в качестве эффективной в классе смещённых оценок выбрать составную оценку вида (см. раздел 3)

$$\tilde{P}_4 = 1 - p_4,\ p_4 = w(0{,}993; n, R=0), \text{ и } p_4 = R/n,\ R>0,$$

где $w(0{,}993;n,R)$ – решение уравнения $P_{\sum}(R=r)=\sum_{k=0}^{r} P_n(k,w)=0{,}5+x$,
где $P_n(k, w)=C_n^r w^r (1-w)^{n-r}$ [25].

Оценка p_4 обладает аналогичными с составной байесовской оценкой $\hat{\theta}_Q$ свойствами, а именно:

– оценка $\tilde{p}$ близка к классической (эффективной и несмещенной) $\hat{p} = \frac{R}{N} \cong \hat{\theta}_Q$;

– величина оценки p_4 для испытаний, не давших отказов, отлична от нуля.

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q(R, N, \alpha_r, \beta_r)$ с составной оценкой p_4 при $R = r$ приведены в таблице (4.3).

Таблица 4.3

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\widehat{\theta}_Q$ с набором параметров $\alpha_r\left(\widehat{p}=\frac{R}{N}\right)$, $\beta_r\left(\widehat{p}=\frac{R}{N}\right)$ и составной оценкой p_4

$\hat{\theta}_Q=\dfrac{(R=r)+\alpha_r}{N+\alpha_r+\beta_r}$	$\hat{p}=\dfrac{R}{N}$	p_4	R	N	α_r	β_r	$b()$
1/29=0,034	0	0,007	0	4	1	24	0,85
3/12=0,25	0,25	0,25	1	4	2	6	0,42
7/14=0,5	0,5	0,5	2	4	5	5	0,37
9/12=0,75	0,75	0,75	3	4	6	2	0,42
29/30=0,96	1	1	4	4	25	1	0,84

Из сказанного следует, что использование байесовских оценок является ошибочным и необходимости их использования в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для групп однородной продукции, не имеется.

Оптимальным вариантом замены байесовским оценкам служат интегральные смещённые оценки [24, 25], которые наилучшим образом помогают избежать неопределенность при $R=0$.

В таблице 4.4 приведены сравнительные результаты байесовских $^{\approx}P_1$ и $^{\approx}P_3$, классической $^{\approx}P_2$ и интегральной $^{\approx}P_4$ оценок на примере априорного бета-распределения. Для однородной продукции наиболее подходит априорное бета-распределение с параметрами $\beta >> \alpha$, что и взято за основу при сравнении в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Сравнительные результаты байесовских, классической и интегральной оценок

R	N	β	α	$1-^{\approx}p_\alpha=\beta/(\alpha+\beta)$	$^{\approx}P_1$	$^{\approx}P_3$	$^{\approx}P_2$	$^{\approx}P_4$
0	4	94	2	94/96=0,979	98/100=0,98	5/6=0,833	1	0,993
1	4	94	2	94/96=0,979	97/100=0,97	4/6=0,666	0,75	0,75
2	4	94	2	94/96=0,979	96/100=0,96	3/6=0,5	0,5	0,5
3	4	94	2	94/96=0,979	95/100=0,95	2/6=0,333	0,25	0,25
4	4	94	2	94/96=0,979	94/100=0,94	1/6=0,166	0	0
0	4	20	2	20/22=0,909	24/26=0,9230	5/6=0,833	1	0,993
1	4	20	2	20/22=0,909	23/26=0,8846	4/6=0,666	0,75	0,75
2	4	20	2	20/22=0,909	22/26=0,8461	3/6=0,5	0,5	0,5
3	4	20	2	20/22=0,909	21/26=0,8076	2/6=0,333	0,25	0,25
4	4	20	2	20/22=0,909	20/26=0,7692	1/6=0,166	0	0

Из таблицы 4.4 следует, что апостериорная оценка $\tilde{P}_1$ соответствующая априорному бета-распределению с параметрами β >> α (модель однородной продукции) неадекватно оценивает ВБР, т. е. её реализации при любых исходах близко группируются возле величины математического ожидания в рамках догмата, основанном на виде априорного распределения, что наглядно показано в сравнении с интегральной оценкой $\tilde{P}_4$.

Обоснуем сделанные выводы, используя критерий эффективности смещённых оценок, для этого воспользуемся результатами работы [24] и сравним предложенные оценки по эффективности [44]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний n изделий по схеме Бернулли (биномиальный план испытаний). В основе сравнения эффективности смещённых оценок ВБР лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \bullet D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [24], где

$$A(\theta(n;R)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 (E\theta(n;R) - p)^2\,dp$$ – суммарное смещение (в квадрате),

$$D(\theta(n;R)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 E(\theta(n;R) - E\theta(n;R))^2\,dp$$ – суммарная дисперсия.

В таблице 4.5 приведены результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний [44].

Таблица 4.5

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра p	A	D	D / A	$C = D\cdot A\cdot 10000$
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$, $\alpha=2$, $\beta=94$	0,2797	8,6E-05	<<4	–
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$, $\alpha=2$, $\beta=20$	0,1653	0,00111	<<4	–
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$, $\alpha=2$, $\beta=3$	0,0271	0,00751	<<4	–
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$, $\alpha=8$, $\beta=4$	0,0567	0,00269	<<4	–
$\tilde{p}(R,n) = (R+1)/(n+2)$	0,01046	0,0162	1,55	1,684
$\tilde{p}_4(R=0) = w(\beta=0{,}993;n,R)$, $\tilde{p}_4(R>0) = R\ /\ n$	2E-06	0,0484	1E+04	0,00097
$p_0 = n\,/\,R$ – классическая оценка (эффективная и несмещенная)	0	0,0488	∞	0

Из таблицы 4.5 следует, что байесовские оценки ($\tilde{\theta}_Q(R)$, $\tilde{p}(R,n)$) имеют большое суммарное смещение A и вырожденную суммарную дисперсию D, т. е. в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок байесовские оценки не могут являться эффективными ($D << 4A$), что не позволяет реализациям этих оценок при различных исходах группироваться вокруг истинной величины оцениваемого параметра; и в этом они проигрывают остальным оценкам.

Из вида байесовской формулы апостериорной оценки ВБР $\tilde{P}_1 = (N+\beta-R)/(N+\alpha+\beta)$ непосредственно следует, что с ростом $\beta >> N$ оценка перестает практически зависеть от числа отказов R. Т. е. с вырождением дисперсии оценки $\tilde{P}_1$, когда для однородной модели разброс значений параметра p стягивается в точку ($\beta >> \alpha$, $\beta >> N$) оценка практически находится в пределах догмата $\tilde{P}_1 \approx (N+\beta)/(N+\alpha+\beta) \approx \beta/(\alpha+\beta)$, приближаясь к априори известной величине, но не истине. В такой постановке дисперсия стремится к нулю с ростом β [6]:

$$S_{\tilde{P}_1}^2 = [(N+\alpha-R)(\beta+R)]/[(N+\alpha+\beta)^2(N+\alpha+\beta+1)] \approx 1/(N+\alpha+\beta) \approx 1/(\alpha+\beta).$$

Такое поведение оценки неприемлемо.

Заметим ещё раз, что в данном случае рассматриваются модели однородной продукции [4], поэтому использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для групп однородной продукции, является ошибочным, а необходимости в их использовании не имеется. Попытка использования байесовских методов в рамках моделей однородной продукции приводит к сильной смещенности апостериорных оценок ($\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_3$) и к вырождению их дисперсий, что не позволяет реализациям этих оценок группироваться вокруг истинной величины оцениваемого параметра в отличие от несмещенной классической оценки ($\tilde{P}_2$) и интегральной смещенной оценки ($\tilde{P}_4$), поэтому не следует в моделях однородной продукции использовать байесовские оценки, предназначенные для моделей неоднородной продукции, что и отражено в таблицах 4.1–4.5. Преимущество интегральных смещённых оценок состоит в том, что эти оценки можно использовать по результатам испытаний, в процессе которых отказы не возникают. В этом случае отпадает необходимость в привлечении математических моделей доверительного оценивания, которые по своей эффективности проигрывают точечным оценкам, внося дополнительные риски [4].

Выводы к разделу 4

Из изложенного и приведенного примера следует:

– составная байесовская оценка $\hat{\theta}_Q$ близка к классической $\hat{p} = \frac{R}{N}$ при условии, что каждая составная часть априорной оценки определена максимальной вероятностью возникновения заданного числа отказов, и, следовательно, адекватно (подобно классической) реагирует на любые внешние изменения параметров технологического процесса изготовления изделий;

– составная байесовская оценка не зависит от вида испытуемых изделий, а зависит только от известной (доказанной) зависимости вероятности возникновения исхода испытаний. Это и является основным преимуществом составной байесовской оценки – она определяется однократно для конкретного плана испытаний;

– для целочисленных значений $R = 0$ и $R = N$ исходов биномиальных испытаний, априорные вероятности возникновения отказа $\hat{p}_\alpha(0)$ и $\hat{p}_\alpha(N)$ следует ограничить вещественными значениями, отличными от нуля и единицы (см. таблицу (4.1)). В этом заключен некоторый произвол, однако в противном случае составная байесовская оценка совпадет с классической. Что делает необходимость в байесовской оценке биномиальных планов испытаний ничтожной;

– для биномиальных испытаний разумной альтернативой составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q$ в задачах надежности, которые используют модели однородной продукции, может служить составная точечная оценка вероятности отказа изделия p_4;

– реализации байесовских оценок при любом исходе группируются в пределах догмата о среднем $1 - \tilde{p}_\alpha = 1 - \alpha/(\alpha+\beta)$, в то время как классическая несмещенная $\tilde{P}_2 = 1 - R/N$ и интегральная смещенная оценки ($\tilde{P}_4$) адекватно реагируют на любые внешние изменения. Использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для однородной продукции, является ошибочным, а необходимости в их использовании не имеется;

– байесовские оценки следует использовать только для групп неоднородной продукции.

ЧАСТЬ 5
ПЛАН ИСПЫТАНИЙ С ДОБАВЛЕНИЕМ

5.1. Формулировка плана испытаний с добавлением

На практике часто приходится сталкиваться с задачей определения величин показателей надежности (точечное оценивание). Обычно в качестве показателя надежности выбирают вероятность безотказной работы. Исходя из экономических соображений для определительных испытаний на надежность высоконадежных и дорогостоящих изделий выставляют минимум изделий, планируя получить безотказные испытания (приемочное число $Q = 0$) или испытания с одним отказом ($Q = 1$), тем самым минимизируя количество испытуемых изделий. Наиболее интересен последний случай. Выбирая конкретные величины приемочного числа Q и количества испытуемых изделий, испытатель делает предварительную оценку планируемой ВБР, а выбирая $Q = 1$, испытатель минимизирует риски от возникновения маловероятного случайного отказа. Однако с ростом величины Q растет и количество испытуемых изделий, что делает испытания дорогостоящими. Поэтому сокращение количества изделий при испытаниях на надежность является проблемой номер один.

Будем рассматривать биномиальные испытания (первоначальная выборка) ([1, 2, 4, 23]) с добавлением одного изделия (дополнительная выборка) на испытания при отказе любого из первоначально выставленных испытуемых изделий. Испытания заканчиваются, когда заканчиваются испытания всех выставленных изделий с любым исходом (в первичной и дополнительной выборках). Здесь и далее имеется в виду, что время испытаний одно и то же для всех изделий.

Испытания с приемочным числом отказов больше нуля ($Q > 0$), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.

5.2. Построение оценок вероятности безотказной работы для плана испытаний с добавлением

Пусть n – число испытуемых однотипных изделий, первоначально выставленных на испытания, а $R = r$ – число отказавших изделий, включающее k отказов из n первоначально выставленных на испытания изделий и m отказов из k вторично выставленных на испытания изделий, т. е. $r = k + m$. Тогда число испытуемых изделий составит $N = n + k$. Пусть отказы являются независимыми событиями, тогда вероятность возникновения ровно r отказов за испытания (далее – $P_n(R = r)$) легко выразить посредством производящей функции, для этого следует воспользоваться свойствами производящей функции [31].

Производящая функция (далее – $\psi_R(z)$) – математическое ожидание от степенной функции вида z^R, т. е. для плана испытаний с добавлением [31] $\psi_R(z) = Ez^R = \sum_{i=0}^{2n} z^i P_n(R = i)$.

Для случая, когда первоначальная выборка состоит из одного изделия $n = 1$, производящая функция примет вид [31]:

$$\psi_R(z) = Ez^R = \sum_{i=0}^{2} z^i P_1(R = i) = q + qpz + p^2 z^2.$$

Тогда для случая, когда первоначальная выборка состоит из n изделий, производящая функция примет вид [31]:

$$\psi_{n;R}(z) = (q + qpz + p^2 z^2)^n.$$

Вероятность получить ноль отказов за испытания первоначальной выборки объема n [31]:

$$P_n(R = 0) = \psi_{n;R}(z) = (q + qpz + p^2 z^2)^n|_{z=0} = q^n.$$

Математическое ожидание случайной величины R находят из выражения [31]:

$$ER = \psi_{n;R}^{(1)}(z = 1).$$

А вероятность получить ровно r отказов находят из выражения [31]:

$$P_n(R = r) = \psi_{n;R}^{(r)}(z = 0)/r!$$

Построим первую производную производящей функции:

$$\psi_{n;R}^{(1)}(z) = n(q + qpz + p^2z^2)^{n-1}(2p^2z + pq).$$

Откуда непосредственно следует, что среднее число отказов за испытания составит

$$ER = \psi_{n;R}^{(1)}(z = 1) = n(q + qp + p^2)^{n-1}(2p^2 + pq) = np(1 + p).$$

Тогда вероятность получить один отказ за испытания вычисляется по формуле

$$P_n(R = 1) = \psi_{n;R}^{(1)}(z = 0) = nq^{n-1}pq = npq^n.$$

Построение производных высших порядков имеет громоздкий вид и поэтому не приводится.

Полученные результаты являются не лучшим вариантом для ведения расчетов, поэтому построим более удобную формулу для вероятности возникновения ровно $R = r$ отказов за испытания, которая получается из следующей процедуры построения

$$(n \ \geq k \ \geq m;\ r = k + m \ \leq \ 2 \cdot n):$$

$$P_k(m) := C_k^m p^m q^{k-m};$$

$$P_n(k) := C_n^k p^k q^{n-k} \sum_{m=0}^{k} P_k(m) = C_n^k p^k q^{n-k};$$

где $q = 1 - p, p$ – вероятность отказа; C_n^k – число сочетаний k из n элементов;

$$P_n(k, m) := \ P_n(k) P_k(m) = C_n^k \, C_k^m \, p^{k+m} \, q^{n-m};$$

$$P_n(r = 0) = P_n(k = 0, m = 0) = q^n;$$

$$P_n(r = 1) = P_n(k = 1, m = 0);$$

$$P_n(r = 2;\ r \ \leq \ n) \ = P_n(k = 1, m = 1) \ + P_n(k = 2, m = 0);$$

$$P_n(r = 3;\ r \ \leq \ n) = P_n(k = 2, m = 1) + P_n(k = 3, m = 0);$$

$$P_n(r = 4;\ r \ \leq \ n) = P_n \ (k = 2, m = 2) +$$

$$+ P_n \ (k = 3, m = 1) + P_n \ (k = 4, m = 0);$$

$$P_n(r = 5;\ r \ \leq \ n) = P_n \ (k = 3, m = 2) +$$

$$+ P_n \ (k = 4, m = 1) + P_n \ (k = 5, m = 0);$$

$$P_n(r = 6;\ r \ \leq \ n) = P_n(k = 3, m = 3) + P_n(k = 4, m = 2) +$$

$$+ P_n(k = 5, m = 1) + P_n(k = 6, m = 0);$$

$$P_n(r = 7;\ r \ \leq \ n) = P_n(k = 4, m = 3) + P_n(k = 5, m = 2) +$$

$$+ P_n(k = 6, m = 1) + P_n(k = 7, m = 0)$$

…

$$P_n(R = r) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m:m+k=r,m \le k} P_n(k, m)$$

…

$$P_n(r = 2n) = P_n(k = n, m = n) = p^{2n}.$$

Из логики построения получаем искомую формулу для вероятности возникновения ровно $R = r$ отказов:

$$P_n(R = r) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m:m+k=r,m \le k} P_n(k, m),$$

$$r = k + m = 0,1,2, \dots, 2n\ ;\ k = 0,1,2, \dots, n;\ m: m + k = r, m \le k.$$

Из определения вероятности

$$P_n(k = x, m = y) = P_n(k = x) P_n(m = y),$$

где $x, y = 0, 1, 2, \dots, n$ и $P_n(R = r)$, легко получить вероятностную функцию плана испытаний с добавлением:

$$P_{n\sum}(k \le x, m \le y) = \textstyle\sum_{k=0}^{x} \sum_{m:m+k \le x+y, m \le k, m \le y} P_n(k, m), \quad (5.1)$$

которая на всем множестве событий $R : r = k + m = 0, 1, 2, \dots, 2n$ должна быть равна единице. Проверим этот факт.

Вероятностную функцию на всем множестве событий можно представить в виде суммы произведений каждого члена основного многочлена на многочлен, где многочлены имеют биномиальные коэффициенты, а именно:

$$P_{n\sum}(n, n) = \sum_{r=0}^{2n} P_n(r) = \sum_{k+m=0}^{2n} P_n(k) P_k(m) =$$

$$= \sum_{k+m=0}^{2n} C_n^k p^k q^{n-k}\, C_k^m p^m q^{k-m} == q^n + C_n^1\, p^1 q^{n-1} \sum_{m=0}^{1} C_1^m\, p^m\, q^{1-m} + \dots +$$

$$+ C_n^k\, p^k q^{n-k} \textstyle\sum_{m=0}^{k} C_k^m p^m q^{k-m} + \dots + p^n \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, p^k q^{n-k} = 1.$$

Сокращенно это можно представить в виде

$$P_{n\Sigma}(n,n) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; p^k q^{n-k} = 1.$$

Более простым способом можно найти выражение для ER: так среднее число испытуемых изделий за время испытаний с добавлением состоит из количества первоначально выставленных на испытания изделий и среднего числа отказавших из первоначально выставленных на испытания изделий, т. е. $N = n + np$. Тогда среднее число отказавших изделий за время испытаний с добавлением составит

$$E(R,n) = Np = E(k,n) + E(m,n) = np + np \cdot p =$$
$$= (n + np)p = np(1 + p).$$

Заметим, что именно вероятность $P_n(k,m)$ определяет шансы на исход испытаний (k,m), поэтому в качестве оценки параметра p следует выбирать оценку, которая доставляет максимум вероятности $P_n(k,m)$.

Решим классическую задачу определения максимума функции

$$b(r,p,k,n) = P_n(k,m) = C_n^k C_k^m p^{k+m} q^{n-m}$$

относительно переменной p. Для этого прологарифмируем функцию $b(r,p,k,n)$, возьмем производную относительно переменной p, приравняем полученный результат нулю и решим полученное уравнение относительно переменной p. Полученная оценка $\hat{p} = (R = r)/(n + k) = r/(n + r - m)$ доставляет максимум функции $b(r,p,k,n)$. Изучим свойства полученной оценки $\hat{p} = R/(n + k)$ и, как следствие, оценки ВБР

$$\hat{P} = 1 - \hat{p} = 1 - R/(n + k) = (n - m)/(n + k).$$

Пусть $k + m = r > 1$, тогда для различных $k_1 > k_2, m_1 < m_2$ выполняется неравенство

$$\hat{p}(k_1,m_1) = \frac{r}{n+k_1} < \hat{p}(k_2,m_2) = \frac{r}{n+k_2}. \qquad (5.2)$$

То есть надежность контролируемой партии изделий (ВБР: $\hat{P}(k_1,m_1) = 1 - \hat{p}(k_1,m_1)$) по результатам испытаний выборки, в которой количество отказавших из первоначально выставленных испытуемых изделий k_1 больше, чем в выборке сравниваемой партии изделий k_2 при одном и том же количестве отказов r, всегда будет выше $\hat{P}(k_1, m_1)$> $\hat{P}(k_2, m_2)$, чем у этой сравниваемой партии изделий. То есть при сравнении результатов двух окончательно сформированных выборок (при равенстве в количестве отказов) приоритет в надежности отдается изделиям, чьи отказы в основном произошли в первоначально выставленной выборке, а не в дополнительной. И в этом смысле дополнительная выборка дает шанс на реабилитацию при неудачных первичных испытаниях. И в этом преимущество плана испытаний с добавлением.

5.3. Нахождение несмещенных оценок вероятности безотказной работы

Определим математическое ожидание оценки $\hat{p}(n; k, m) = (R = r)/(n + k)$:

$$E(\hat{p}(n; k, m)) = \sum_{r=0}^{2n} \frac{r}{n+k} P_n(r).$$

Можно доказать, что оценка $E(\hat{p}(n; k, m))$ в общем виде смещенная. Чтобы доказать этот факт, достаточно показать это в частом случае.

Определим математическое ожидание оценки $\hat{p}(n = 1) =$ $= (R + r)/(1 + k)$:

$$n = 1: E(\hat{p}(n = 1)) = \sum_{r=0}^{2} \frac{r}{1+k} P_1(r) =$$

$$= 0P_1(k = 0, m = 0) + \frac{1}{2} P_1(k = 1, m = 0) + 1P_1(k = 1, m = 1) =$$

$$= \frac{1}{2} pq + p^2 = 0{,}5(p + p^2).$$

Следовательно, оценка $\hat{p}(n = 1) = (R = r)/(1 + k)$ – смещенная.

Оценка $\hat{p}(n = 1)$ представима в виде

$$\hat{p}(n = 1) = \frac{R = r}{1 + k} \equiv \begin{cases} 0, r = 0, k = 0, m = 0, \\ 1/2, r = 1, k = 1, m = 0, \\ 1, r = 2, k = 1, m = 1. \end{cases}$$

Приравнивая математическое ожидание неизвестной оценки $\widehat{w}_1(n = 1; k, m)$ параметру p, легко получить несмещенную оценку вероятности отказа $\widehat{w}_1$ для случая $n = 1$; p_0, p_1, p_2 – неизвестные вероятности:

$$E(\widehat{w}_1) = \sum_{r=0}^{2} \frac{r}{1+k} \widehat{w}_1 P_1(r) \; = p_0(1-p) + p_1(p - p^2\,) + p_2 p^2 = p$$

$$p^0\colon p_0\, p^0 = p_0 * 1 = 0 \Rightarrow p_0 = 0;\; p^1\colon p_1 p^1 = p \Rightarrow\; p_1 = 1;$$

$$p^2\colon -p^2 p_1 + p^2 p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = p_1 = 1\,;$$

$$\widehat{w}_1 \equiv \begin{cases} 0\,, r\; = 0, k = 0, m = 0, \\ 1\,, r\; = 1, k = 1, m = 0, \\ 1\,, r\; = 2, k = 1, m = 1. \end{cases}$$

Несмещенная оценка представляет собой индикаторную функцию, т. е. в случае появления отказов оценка $\widehat{w}_1$ становится равной единице, в противном случае – нулю. Вариант, когда $n = 1$, для практики неинтересен, так как совпадает с биномиальным планом, и поэтому в настоящей работе далее рассматриваться не будет.

Определим математическое ожидание оценки $\hat{p}(n = 2) = = (R = \; r)/(2 + k)$:

$$n = 2\colon E(\hat{p}(n = 2)) \; = \sum_{r=0}^{4} \frac{r}{2+k} P_2(r) \; =$$

$$= 0P_2\,(k = 0, m = 0) + \left(\frac{1}{3}\right) P_2(k = 1, m = 0) +$$

$$+(2/3)P_2(k = 1, m = 1) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right) P_2(k = 2, m = 0) + \left(\frac{3}{4}\right) P_2(k = 2, m = 1) +$$

$$1 \cdot P_2(k = 2, m = 2) =$$

$$= 0q^2 + \left(\frac{1}{3}\right) 2p^1 q^2 + \left(\frac{2}{3}\right) 2p^2 q + \left(\frac{1}{2}\right) p^2 q^2 +$$

$$+(3/4)2q^3 q \; + 1 \cdot p^4 =$$

$$= 2p\,(1-p)\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)p + \left(\frac{2}{3}\right)p + \left(\frac{1}{4}\right)p - \left(\frac{1}{4}\right)p^2\right) +$$

$$+(3/2)p^3 - (3/2)p^4 \; + p^4 =$$

$$= 2p(1-p)\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{7}{12}\right)p-\left(\frac{1}{4}\right)p^2\right)+\left(\frac{3}{2}\right)p^3-\left(\frac{3}{2}\right)p^4 \ +p^4 =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)p+\left(\frac{7}{6}\right)p^2-\left(\frac{1}{2}\right)p^3-\left(\frac{2}{3}\right)p^2-\left(\frac{7}{6}\right)p^3+\left(\frac{1}{2}\right)p^4 +$$

$$+\left(\frac{3}{2}\right)p^3-\left(\frac{3}{2}\right)p^4 \ +p^4 =$$

$$= (2/3)\,p+(1/2)p^2-(1/6)p^3\,,$$

$$p = 0{,}5\colon E(\hat{p}(n=2)) = \ 1/3+1/8-1/(6\cdot 8) = 21/48.$$

Следовательно, оценка $\hat{p}(n=2) = (R = r)/(2+k)$ смещенная. Оценка $\hat{p}(n=2)$ представима в виде

$$\hat{p}(n=2) \ \equiv \begin{cases} 0, r \ = 0, k = 0, m = 0, \\ 1/3, r \ = 1, k = 1, m = 0, \\ 2/3, r \ = 2, k = 1, m = 1, \\ 1/2, r \ = 2, k = 2, m = 0, \\ 3/4, r \ = 3, k = 2, m = 1, \\ 1, r \ = 4, k = 2, m = 2. \end{cases}$$

Заметим, что для полученных результатов $\hat{p}(r=2, k=1, m=1) = 2/3$ и $\hat{p}(r=2, k=2, m=0) = 1/2$ надежность контролируемой партии изделий, у которой некоторые изделия в выборке отказали только в первоначальном испытании, выше, чем у изделий, чьи отказы возникали при повторном испытании и при одном и том же количестве отказов. Это соответствует свойству оценки $\hat{p}$, выражаемому формулой (5.2).

Легко получить несмещенную оценку $\hat{s}_2$) для параметра p:

$$\hat{s}_2 \equiv \begin{cases} 0, r \ = 0, k = 0, m = 0, \\ 1/2, r \ = 1, k = 1, m = 0, \\ 5/8, r \ = 2, k = 1, m = 1, \\ 6/8, r \ = 2, k = 2, m = 0, \\ 7/8, r \ = 3, k = 2, m = 1, \\ 1, r \ = 4, k = 2, m = 2. \end{cases}$$

Для этого следует математическое ожидание предполагаемой несмещенной оценки с неизвестными вероятностями p_{ik} приравнять параметру p и провести необходимые преобразования:

$$E(\hat{p}(n=2) = \sum_{r=0}^{4} \hat{p}(n=2) P_2(r) = [p_{00} = 0;\ p_{22} = 1] =$$

$$= p_{00}q^2 + p_{10}2pq^2 + p_{11}2p^2q + p_{20}p^2q^2 + p_{21}2p^3q + p^4 =$$

$$= p_{00}q^2 + p_{10}2pq^2 + p_{11}2p^2q + p_{20}p^2q^2 + p_{21}2p^3q + p^4 =$$

$$= 2p_{10}\,p - 2p_{10}2p^2 + 2p_{10}\,p^3 + 2p_{11}p^2 - 2p_{11}p^3 + p_{20}p^2 -$$

$$-2p_{20}p^3 \ + p_{20}p^4 + p_{21}2p^3 - p_{21}2p^4 + p_{22}\,p^4 =$$

$$= 2p_{10}p - 4p_{10}p^2 + 2p_{11}p^2 + p_{20}p^2 + 2p_{10}p^3 - 2p_{11}p^3 - 2p_{20}p^3 \ +$$

$$+p_{21}2p^3 + p_{20}p^4 - p_{21}2p^4 + p_{22}p^4 = p.$$

Для того чтобы выполнялось это равенство, необходимо, чтобы коэффициенты при различных степенях параметра p равнялись нулю, за исключением первой степени, при которой коэффициент должен быть равен единице, а именно:

$$p^1\colon 2p_{10}p^1 = p => p_{10} = 1/2;$$

$$p^2\colon -4p_{10}p^2 + 2p_{11}p^2 + p_{20}p^2 = 0 => \ 2p_{11} + p_{20} =$$

$$2 => \ 2p_{11} = 2 - p_{20},$$

$$p^3\colon 2p_{10}p^3 - 2p_{11}p^3 - 2p_{20}p^3 + 2p_{21}p^3 =$$

$$= 0 => 2p_{11} + 2p_{20} - 2p_{21} = 1 =>$$

$$=> 2 - p_{20} + 2p_{20} - p_{20} - 1 = 1 => p_{20} = 6/8 => p_{11} = 5/8;$$

$$p^4\colon p_{20}p^4 - p_{21}2p^4 + p_{22}p^4 = 0 => [p_{22} = 1]\colon$$

$$2p_{21} - p_{20} = p_{22} => 2p_{21} = p_{20} + 1 => p_{21} = 7/8.$$

Данная неоднородная система линейных уравнений всегда разрешима и имеет бесконечное множество подобных решений (число переменных больше, чем число уравнений):

$$p_{00} = 0;\ p_{10} = 1/2;\ p_{11} = \frac{5}{8};\ p_{20} = 6/8;\ p_{21} = 7/8; p_{22} = 1.$$

Заметим, что вероятности отказов должны удовлетворять нестрогому неравенству $0 \ \leq \ p_{ij} \ \leq \ 1$. Заметим также, что на практике для двух контролируемых партий изделий и при одном и том же количестве отказов в сформированных выборках, для полученных результатов $p_{20} = 6/8$ и $p_{11} = 5/8$ надежность первой контролируемой партии изделий $1 - p_{20} = 1 - -6/8 = \ 2/8$, у которой некоторые изделия в первоначальной и дополнительной выборках отказали только в первоначальном испытании ($k = 2, m = 0$), следует считать ниже, чем у изделий второй контролируемой партии $1 - p_{11} = 1 - 5/8 = 3/8$, чьи отказы возникали и при повторном испытании в дополнительной выборке. Такой эффект противоречит свойству (см. формулу (5.2)) смещенной оценки $\hat{p}(r = k + m, k, m) = (R = r)/(n + k)$ и вносит неопределенность при выборе эффективной оценки.

В дальнейшем, чтобы избежать противоречий при поиске новых оценок вероятности отказа, будем исходить из того, что величины оценок для одного и того же количества отказов не зависят от того, в какой выборке (первичной или дополнительной) произошли отказы. Следовательно, этот принцип по поиску новых оценок вероятности отказа $\widehat{w}(n; k, m)$ можно записать следующим образом:

$$\widehat{w}(k_1 + m_1 = r, k_1, m_1) = \ \widehat{w}(k_2 + m_2 = r, k_2, m_2). \tag{5.3}$$

То есть отказываемся от свойства оценки $\hat{p}$, выражаемого формулой (5.2).

Аналогично предыдущим рассуждениям продемонстрируем этот способ поиска новых оценок:

$$\widehat{w}_2(0) \coloneqq p_0;\ \widehat{w}_2(1) \coloneqq p_1;\ \widehat{w}_2(2) \coloneqq p_2;\ \widehat{w}_2(3) \coloneqq p_3;$$

$$\widehat{w}_2(4){:} = p_4\ ;$$

$$E(\widehat{w}_2) = \sum_{r=0}^{4} \widehat{w}_2(r) P_2(r) = p_0 q^2 + p_1 2pq^2 + p_2 2p^2 q +$$

$$+ p_2 p^2 q^2 + p_3 2p^3 q + p_4 p^4 =$$

$$= 2p_1 p - 2p_1 2p^2 + 2p_1 p^3 + 2p_2 p^2 - 2p_2 p^3 + p_2 p^2 -$$

$$-2p_2 p^3 + p_2 p^4 \ + p_3 2p^3 - p_3 2p^4 + p_4 p^4 \ =$$

$$= 2p_1 p - 4p_1 p^2 + 2p_2 p^2 + p_2 p^2 + 2p_1 p^3 - 2p_2 p^3 - 2p_2 p^3 +$$

$$+ p_3 2p^3 + p_2 p^4 - p_3 2p^4 + p_4 p^4.$$

Для того чтобы выполнялось это равенство, необходимо, чтобы коэффициенты при различных степенях равнялись нулю, за исключением первой степени, при которой коэффициент должен быть равен единице:

$$p^0: p_0 p^0 = p_0 * 1 = 0 => p_0 = 0;$$

$$p^1: 2p_1 = 1 => p_1 = 1/2;$$

$$p^1: 2p_1 = 1 => p_1 = 1/2;$$

$$p^2: -4p_1p^2 + 2p_2\, p^2 + p_2\, p^2 = 0 => -2 + 3p_2 = 0 => p_2 = 2/3;$$

$$p^3: 2p_1p^3 - 2p_2p^3 - 2p_2p^3 + p_3 2p^3 = 0 => 1 - \frac{8}{3} + 2p_3 =$$

$$= 0 => p_3 = 5/6;$$

$$p^4: p_2p^4 - p_3 2p^4 + p_4p^4 = 0 => 2/3 - 10/6 + p_4 = 0 => p_4 = 1;$$

$$p_0 = 0; p_1 = 1/2;\ p_2 = 2/3;\ p_3 = 5/6;\ p_4 = 1\ .$$

Данная неоднородная система линейных уравнений всегда разрешима и имеет единственное решение (число переменных $2n$ равно рангу (числу линейно независимых уравнений) [32]), которое и будет принято за оценку $\widehat{w}_2$!

Аналогично предыдущему примеру (случай $n = 2$) определим математическое ожидание оценки $\hat{p}(n = 3) = r/(3 + k)$:

$$E\big(\hat{p}(n = 3)\big) = \sum_{r=0}^{6} \frac{r}{3 + k} P_3(r).$$

Произведя последовательно все необходимые манипуляции (они не приводятся из-за громоздкости выражений), приходим к выводу, что оценка $\hat{p}(n = 3) = r/(3 + k)$ – смещенная. Оценка $\hat{p}(n = 3) = r/(3 + k)$ представима в виде

$$\hat{p}(n = 3) = \frac{r}{3 + k} \equiv \begin{cases} 0, r = 0, k = 0, m = 0, \\ 1/4, r = 1, k = 1, m = 0, \\ 1/2, r = 2, k = 1, m = 1, \\ 2/5, \mathrm{r} = 2, k = 2, m = 0, \\ 3/5, r = 3, k = 2, m = 1, \\ 4/5, r = 4, k = 2, m = 2, \\ 1/2, r = 3, k = 3, m = 0, \\ 2/3, r = 4, k = 3, m = 1, \\ 5/6, r = 5, k = 3, m = 2, \\ 1, r = 6, k = 3, m = 3. \end{cases}$$

Найдем несмещенную оценку вероятности отказа для случая $n = 3$ ($\widehat{w}_3(r)$), используя принцип, выражаемый формулой (5.3). Определение величин вероятностей этой оценки проводится через ее математическое ожидание, которое должно равняться оцениваемому параметру p:

$$\hat{w}_3(0) \coloneqq p_0;\ \hat{w}_3(1) \coloneqq p_1;\ \hat{w}_3(0) \coloneqq p_2;\ \hat{w}_3(3) \coloneqq p_3;$$

$$\hat{w}_3(4) \coloneqq p_4;\ \hat{w}_3(5) \coloneqq p_5;\ \hat{w}_3(6) := p_6;$$

$$E\left(\hat{w}_3(r)\right) = p_0 q^3 + p_1 3pq^3 + \ 3p_2\,(p^2q^2 + p^2q^3) +$$

$$+p_3\,(6p^3q^2 + p^3q^3\,) + p_4\,(3p^4q + 3p^4q^2\,) + p_5 3p^5 q +$$

$$+p_6 p^6 3p_1(p - 3p^2 + 3p^3 - p^4\,) + 3p_2\,(p^2 - 2p^3 + p^4\,) +$$

$$+3p_2(p^2 - 3p^3 +\ 3p^4 - p^5) +\ 6p_3\,(p^3 - 2p^4 + p^5){+}p_3\,(p^3 -$$

$$-3p^4 + 3p^5 - p^6\,) + 3p_4\,(p^4 - p^5\,) +$$

$$+3p_4\,(p^4 - 2p^5 + p^6) + 3p_5\,(p^5 - p^6) + p_6 p^6;$$

$$p^0 \colon p_0 p^0 = p_0 1 = 0; p_0 = 0;$$

$$p^1 \colon 3p_1 = 1;\ p_1 = 1/3;$$

$$p^2 \colon -9p_1 + 3p_2 + 3p_2 = 0 => 6p_2 = 3 => p_2 = 1/2;$$

$$p^3 \colon 9p_1 - 6p_2 - 9p_2 + 6p_3 + p_3 = 0 => 6p_2 + 9p_2 - 6p_3 - p_3 =$$

$$= 3 => p_3 = 9/14;$$

$$p^4 \colon -3p_1 + 3p_2 + 9p_2 - 12p_3 - 3p_3 + 3p_4 + 3p_4 = 0 =>$$

$$=> 12p_2 - 15p_3 + 6p_4 = 1 => p_4 = 65/84;$$

$$p^5 \colon -3p_2 + 6p_3 + 3p_3 - 3p_4 - 6p_4 + 3p_5 = 0 => p_5 = 75/84;$$

$$p^6 \colon -p_3 + 3p_4 - 3p_5 + p_6 = 0 => p_6 = 1;$$

$$\hat{w}_3(r) \equiv \begin{cases} 0, r\ = 0, \\ 1/3, r\ = 1, \\ 1/2, r\ = 2, \\ 9/14, r\ = 3, \\ 65/84, r\ = 4, \\ 75/84, r\ = 5, \\ 1, r\ = 6. \end{cases}$$

Аналогичный поиск несмещенных оценок для случаев $n = 4$ и $n = 5$ к успеху не привел, так как полученные результаты величин вероятностей превысили единицу, что неприемлемо. Из этого следует, что для $n > 3$ построение несмещенной оценки по правилу $\hat{p}(k_1 + m_1 = r, k_1, m_1) = \ \hat{p}(k_2 + m_2 = r, k_2, m_2)$ проблематично!

5.4. Построение центрируемой оценки вероятности безотказной работы

Здесь и далее будем исходить из того, что статистика $\hat{p}(n;k,m) = (R = r)/(n+k)$ имеет функцию распределения, равную $P_{n\Sigma}$, т. е. закон распределения статистики $\hat{p}$ определяется законом распределения случайных величин k, m, что позволяет определять доверительные границы [2].

Введем новое понятие, а именно: пусть оценка вероятности отказа (далее – $\hat{v}$) центрирует вероятностную функцию $P_{n\Sigma}$ относительно предельных границ изменения ее вещественных значений. Это означает, что интервалы $[0;\hat{v}]$ и $[\hat{v};1]$ величин этих оценок с вероятностью равной 0,5 накрывают оцениваемый параметр p. Такие оценки будем называть центрируемыми (не путать с центральными [2]). Заметим, что центрируемые оценки для некоторых планов испытаний близки к эффективным оценкам [9, 18, 20]. В нашем случае центрируемая оценка $\hat{v}$ находится из выражения (заменяем p на $\hat{v}$ в формуле (5.1)):

$$P_{n\Sigma}(k \le x, m \le y, \hat{v}) = \sum_{k=0}^{x} \sum_{m:m+k \le x+y, m \le k, m \le y} P_n(k,m,\hat{v}) = 0{,}5.$$

Чтобы решение этого уравнения существовало и было единственным, необходимо проверить монотонность $P_{n\Sigma}$ относительно переменной p [33].

Напомним, что

$$P_n(k,m) := C_n^k\, C_k^m\, p^{k+m}\, q^{n-m} \text{ и } r = k+m.$$

Беря производную от $P_{n\Sigma}$ по параметру p, получаем

$$(P_{n\Sigma}(k \le x, m \le y, p))'_p =$$

$$= \sum_{k=0}^{x} \sum_{m:m+k \le x+y, m \le k, m \le y} C_n^k\, C_k^{r-k}\, (rp^{r-1}\, q^{n-r+k} - (n-r+k)p^r q^{n-r+k-1}.$$

Из-за громоздкости полученного выражения не удается доказать или опровергнуть монотонность $P_{n\Sigma}$. Однако для наиболее интересных для практики случаев R: $r = 0, r = 1$ и $r = 2$ это удается. Рассмотрим эти случаи:

$$r = 0\colon (P_{n\Sigma}(n,p,k=0,m=0))'_p =$$
$$= C_n^0\, C_0^{0-0}\, [(0+0)\, p^{-1}q^n - np^0q^{n-1}\,] = -nq^{n-1} < 0;$$
$$= C_n^0\, C_0^{0-0}\, [(0+0)\, p^{-1}q^n - np^0q^{n-1}\,] = -nq^{n-1} < 0;$$
$$r = 1\colon (P_{n\Sigma}(n,p,k=1,m=0))'_p =$$
$$= C_n^1C_1^0[(1+0)p^0q^n - npq^{n-1}\,] - C_n^0C_0^0nq^{n-1} =$$
$$= nq^n - n^2pq^{n-1} - nq^{n-1} = nq^{n-1}\,(1-p-np-1) =$$
$$= -pn(n+1)q^{n-1} < 0;$$
$$r = 2\colon (P_{n\Sigma}\ \ (n,p,k=1,m=1))'_p =$$
$$= C_n^1C_1^1[(1+1)\, pq^{n-1} - (n-1)p^2q^{n-2}\,] +$$
$$+ C_n^1C_1^0[(1+0)p^0q^n - -npq^{n-1}] - C_n^0C_0^0nq^{n-1} =$$
$$= 2npq^{n-1} - n(n-1)p^2q^{n-2} + nq^n - n^2pq^{n-1} - nq^{n-1} =$$
$$= npq^{n-2}(2(1-p) - (n-1)p) - pn(n+1)q^{n-1} =$$
$$= npq^{n-2}(2-p-np) - pn(n+1)q^{n-1} = npq^{n-2}(2-n-1) \le 0;$$
$$r = 2\colon (P_{n\Sigma}(n,p,k=2,m=0))'_p == C_n^2C_2^0[(2+0)\, pq^n - np^2q^{n-1}\,] +$$
$$+ C_n^1C_1^0[(1+0)\, p^0q^n - np^1q^{n-1}\,] - C_n^0C_0^0nq^{n-1} =$$
$$= n(n-1)pq^n - 0{,}5n^2(n-1)p^2q^{n-1} + nq^n - n^2pqq^{n-1} -$$
$$-nq^{n-1} = n(n-1)pq^{n-1}(1-p-0{,}5np) - pn(n+1)q^{n-1} =$$
$$= npq^{n-2}(0{,}5np - n) \le 0.$$

Следовательно, для случаев $R\colon r = 0, r = 1, r = 2$ вероятностная функция $P_{n\Sigma}$ монотонно убывает с ростом параметра p, а следовательно, центрируемая оценка $\hat{v}$ параметра p для плана испытаний с добавлением является единственной.

Из определения центрируемой оценки следует, что она определяет нижнюю (верхнюю) доверительную границу интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью $\gamma = 0{,}5$ или уровнем значимости $\alpha = 0{,}5$. С другой стороны, любую оценку НДГ (ВДГ) интервала неизвестного параметра p можно трактовать как точечную оценку параметра p с сильным смещением (вниз – для НДГ и вверх – для ВДГ). Односторонние НДГ (далее – $\hat{p}_{\text{н}}$) и ВДГ (далее – $\hat{p}_{\text{в}}$)

интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ вычисляют соответственно по формулам:

$$P_{n\Sigma}(x, y, \hat{p}_{\text{н}}) = \gamma, P_{n\Sigma}(x, y, \hat{p}_{\text{в}}) = \alpha.$$

Границы центрального доверительного интервала вычисляют по формулам [2]:

$$P_{n\Sigma}(x, y, \hat{p}_{\text{н}}) = 1 - \alpha/2, P_{n\Sigma}(x, y, \hat{p}_{\text{в}}) = \alpha/2.$$

В таблицах 5.1–5.3 приведены соответственно величины, принимаемые НДГ, ВДГ и центрируемой оценкой $\hat{v}$, для наиболее реальных для практики объемов испытаний и событий возникновения отказа (см. приложение В).

Таблица 5.1

Количественные значения односторонней НДГ для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали) при $\boldsymbol{\gamma = 0,8}$

	n:	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	*m*=0	0,199	0,105	0,071	0,054	0,043	0,036	0,031	0,027
k=1	*m*=0	0,445	0,287	0,212	0,168	0,139	0,119	0,104	0,092
k=1	*m*=1	1	0,445	0,287	0,212	0,168	0,139	0,119	0,104

Таблица 5.2

Количественные значения односторонней ВДГ для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали) при $\boldsymbol{\alpha = 0,2}$

	n:	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	*m*=0	0,800	0,552	0,415	0,331	0,275	0,235	0,205	0,182
k=1	*m*=0	0,894	0,710	0,582	0,488	0,422	0,370	0,330	0,297
k=1	*m*=1	1	0,894	0,710	0,582	0,488	0,422	0,370	0,330

Таблица 5.3

Количественные значения центрируемой оценки $\hat{v}$ для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали)

	n:	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	*m*=0	0,292	0,206	0,159	0,129	0,108	0,094	0,082	0,074
k=1	*m*=0	0,707	0,5	0,384	0,313	0,264	0,226	0,201	0,179
k=1	*m*=1	1	0,707	0,5	0,384	0,313	0,264	0,226	0,201

5.5. Исследование оценок вероятности безотказной работы для плана испытаний с добавлением

Сформулируем критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР), построим на основе сформулированного критерия улучшенную (но смещенную) оценку вероятности отказа (и, следовательно, оценку ВБР) для плана испытаний с добавлением для n>3 и выберем среди предложенных оценок эффективную.

Методы исследования оценок показателей надежности

В основе поиска эффективных оценок лежит интегральный подход, сформулированный в работах [9, 18–20, 22]. В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(n;k,m)$, заданного на сумме величин абсолютных (или относительных) смещений оценок $\hat{\theta}(n;k,m)$, выбранных из некоторого множества, от параметра закона распределения, где в нашем случае n – количество изделий, первоначально выставленных на испытания.

Классический китерий выбора эффективной оценки для ВБР

Критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок $\hat{\theta}(n;k,m)$ основан на суммарном квадрате абсолютных (или относительных) смещений математического ожидания этих оценок $E\hat{\theta}(n;k,m)$ от вероятности отказа p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p,n.

Для выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) потребуется только понятие абсолютно эффективной оценки по смещению и изменение параметра p в пределах $0 \le p \le 1$. Для получения конечного результата в качестве критерия получения эффективной оценки $\hat{\theta}_0(n;k,m)$ строится функционал (далее – $L(\hat{\theta}(n;k,m))$) на ограниченном множестве $n=1,\dots,I$ [9, 23]:

$$L\left(\hat{\theta}(n;k,m)\right)=\frac{1}{I}\sum_{1\le n\le I}\int_0^1\left(E\hat{\theta}(n;k,m)-p\right)^2dp. \qquad (5.4)$$

Оценка $\hat{\theta}_0(n; k, m)$, минимизирующая функционал $L(\hat{\theta}(n; k, m))$ на заданном множестве оценок, называется эффективной оценкой по смещению на заданном множестве смещенных оценок. Среди оценок, доставляющих примерно один и тот же минимум функционалу $L\left(\hat{\theta}(n; k, m)\right)$, следует выбрать оценку, которая имеет минимальное уклонение в среднеквадратическом смысле (классическое определение эффективной оценки [1]). Данную оценку будем называть как более эффективную в сравнении с выбранными.

Для выбора оценок, обладающих минимальным уклонением, строится функционал (далее – $D\left(\hat{\theta}(n; k, m)\right)$, основанный на усреднении и суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(n; k, m)$ от параметра p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, n [9, 23]:

$$D\left(\hat{\theta}(n; k, m)\right) = \frac{1}{I}\sum_{1 \le n \le I} \int_0^1 E\left(\hat{\theta}(n; k, m) - p\right)^2 dp. \qquad (5.5)$$

Оценку, которая доставляет нуль функционалу $L\left(\hat{\theta}_0(n; k, m)\right)$ (несмещенная оценка) и минимум функционалу $D\left(\hat{\theta}_0(n; k, m)\right)$, будем называть абсолютно эффективной по смещению.

Ограничим объем испытаний $n \le 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула (5.4) примет вид

$$L\left(\hat{\theta}(n; k, m)\right) = \frac{1}{10}\sum_{1 \le n \le 10} \int_0^1 \left(E\hat{\theta}(n; k, m) - p\right)^2 dp,$$

а формула (5.5) примет вид

$$D\left(\hat{\theta}(n; k, m)\right) = \sum_{1 \le n \le 10} \int_0^1 E\left(\hat{\theta}(n; k, m) - p\right)^2 dp.$$

В таблице (5.4) приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(n; k, m))$ и $D(\hat{\theta}(n; k, m))$ в соответствии с формулами (5.4) и (5.5) следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$: $\hat{p}, \hat{p}_2, \widehat{w}_2, \widehat{w}_3, \hat{v}$. Вычисления проводились с шагом $dp = 1E - 03$.

Таблица 5.4

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$

Функционал	$\hat{p}_2(n=2)$	$\hat{w}_2(n=2)$	$\hat{w}_3(n=3)$	$p\hat{}(n=>3)$	$\hat{v}(n>3)$
$L(\hat{\theta}(n;k,m))$	2,6E-33	2,6E-33	5,1E-33	2E-04	1,51E-03
$D(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,0687	0,0418	0,0418	0,0187	0,0164

Из таблицы 5.4 следует, что для вариантов $n > 3$ оценка $\hat{p}$ обладает минимальным смещением в сравнении с оценкой $\hat{v}$. Оценки $\hat{p}_2$, $\hat{w}_2$ и $\hat{w}_3$ являются несмещенными и, как следствие, эффективными для вариантов соответственно: $n = 2$ и $n = 3$.

Из таблицы 5.4 также следует, что оценка $\hat{v}$ имеет небольшое преимущество в сравнении с оценкой $\hat{p}$ в смысле минимального уклонения своих количественных значений от параметра p. Поэтому оценку $\hat{p}$ выберем в качестве искомой эффективной среди предложенных оценок, хотя это формально противоречит классическому критерию эффективности оценок, т. е. эффективная оценка должна обладать минимальным уклонением. В данном случае это относится к оценке $\hat{v}$.

Отметим важный факт, что при вычислениях варьирование шагом суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Заметим, что функционал $D(\hat{\theta}(n;k,m))$ (уклонение) в нашей задаче практически равен дисперсии, тогда таблицу 5.4 несколько изменим на примере двух смещенных оценок $\hat{v}$ и $\hat{p}$ (см. таблицу 5.4а).

Таблица 5.4а

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$

Функционал	$p\hat{}(n=>3)$	$\hat{v}(n>3)$
$L(\hat{\theta}(n;k,m))$	2E-04	1,51E-03
$D(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,0187	0,0164
D/L	93,5	10,86
$C = D \bullet L \bullet 10^5$	0,374	2,476

Из таблицы 5.4а следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок в качестве эффективной смещенной оценки следует признать оценку $\hat{p}$, что согласуется с ранее сделанным выводом.

Пример 5.1

Изделия входят в состав агрегата и применяются по схеме с резервированием. Требуется сделать точечную оценку ВБР изделий по результатам биномиальных испытаний на надежность. При планировании определительных испытаний на надежность испытатель при расчете объема выборки ($n = 6$) учитывает один отказ ($Q = 1$), минимизируя риски от возникновения этого маловероятного случайного отказа. При этом прогнозируемая величина ВБР составила $\hat{P} = 1 - 1/n = 5/6 = 0{,}83$, что соответствует требованиям технического задания (ТЗ) ($P = 0{,}83$) на изделия. Учитывая, что за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек. В процессе испытаний допустимы два исхода: безотказные испытания и испытания с одним отказом (планируемые). В случае испытаний, не давших отказов, отпадает необходимость в испытаниях дополнительной выборки.

Рассмотрим эти варианты:

1) безотказные биномиальные испытания;

2) безотказные биномиальные испытания с добавлением.

1. **Безотказные биномиальные испытания**:

$\hat{P} = 1 - \hat{p}(n = 5, k = 0, m = 0) = 1 - \frac{R=0}{n+k} = 1 - \frac{0}{5+0} = 1;$

$\hat{V} = 1 - \hat{v}(n = 5, k = 0, m = 0) = 1 - 0{,}108 = 0{,}892$.

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 5, \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ составила (см. таблицу 5.2):

$\hat{P}_{\text{н}}(n = 5, R = 0) = 1 - \hat{p}_{\text{в}}(n = 5, k = 0, m = 0) = 1 - 0{,}275 = 0{,}725.$

Безотказные биномиальные испытания:

$$\hat{P}(n = 6, R = 0) = 1 - R/n = 1 - 0/6 = 1.$$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 6, R = 0, \gamma = 0{,}8$ (находится решением уравнения, составленного по правилу Клоппера – Пирсона [2] составила: $\hat{P}_{н}(n = 6, R = 0) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{6}} = 0{,}764$.

2. **Испытания с одним отказом. Испытания с дополнением и с одним отказом**:

$$\hat{P} = 1 - \hat{p}(n = 5, k = 1, m = 0) = 1 - \frac{R = r}{n + k} = 1 - \frac{1}{5 + 1} = 0{,}83;$$

$$\hat{V} = 1 - \hat{v}(n = 5, k = 1, m = 0) = 1 - 0{,}264 = 0{,}736.$$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 5, \gamma = 1 - \alpha = 1 — 0{,}2 = 0{,}8$ составила: $\hat{P}_{н}(n = 5, R = 1) = 1 - -\hat{p}_{в}(n = 5, k = 1, m = 0) = 1 - 0{,}422 = 0{,}588$.

Биномиальные испытания с одним отказом:

$$\hat{P} = 1 - R/n = 1 - 1/6 = 0{,}83.$$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 6, R = 1, \gamma = 0{,}8$ (находится решением уравнения, составленного по правилу Клоппера – Пирсона [2]) составила : $\hat{P}_{н}(n = 6, R = 1) = 0{,}578$.

5.6. Улучшение эффективности центрируемой оценки вероятности отказа (вероятности безотказной работы) для плана испытаний с добавлением

Заметим, что центрируемые оценки близки по своей эффективности к лучшим оценкам [9, 18–20] и, несмотря на оптимистическое определение центрируемой оценки $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$, эта оценка является смещенной относительно оцениваемого параметра $L(\hat{v}(R, n, \beta = 0{,}5)) > 0$. Однако это смещение можно уменьшить, а значит, и улучшить эффективность. Для этого достаточно минимизировать функционал $L\big(\tilde{v}(n; R)\big)$, варьируя величиной вероятности $(0{,}5 + x)$ в выражении $P_{n\sum}(r, m, \tilde{v}) = 0{,}5 + x$, где x – некоторое вещественное число, $R = r$. Полученная таким образом оценка уже не является центрируемой, но имеет меньшую величину функционала $L(\tilde{v}(n; R))$ (смещение) в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$. А следовательно, от оценки $\tilde{v}$ можно ожидать и большую эффективность.

Заметим, что функция вероятности плана испытаний с добавлением $P_{n\sum}$ должна быть монотонной с ростом параметра p [2], чтобы уравнение

$$P_{n\sum}(k, m, \tilde{v}) = \beta = 0{,}5 + x$$

имело единственное решение.

Ограничим объем испытаний $4 \le n \le 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула (5.4) примет вид

$$L\big(\hat{\theta}(n; k, m)\big) = \frac{1}{7}\sum_{n=4}^{10}\int_0^1 \big\{E\hat{\theta}(\mathrm{n}; k, m) - p\big\}^2 \partial p.$$

А формула (5.5) примет вид

$$D\big(\hat{\theta}(n; k, m)\big) = \frac{1}{7}\sum_{n=4}^{10}\int_0^1 E\big\{\hat{\theta}(\mathrm{n}; k, m) - p\big\}^2 \partial p.$$

Проведенные расчеты показали, что оценке $\hat{v}(\beta = 0{,}5 + x\ )$, минимизирующей функционалы $L(\hat{\theta}(n; k, m))$ и $D(\hat{\theta}(n; k, m))$, соответствует $\beta = 0{,}5 + x = 0{,}5$, т. е. $x = 0$.

В таблице (5.5) приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(n; k, m))$ и $D(\hat{\theta}(n; k, m))$ в соответствии с формулами (5.4) и (5.5) следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$: $\hat{p}$, $\overline{\mathrm{p}}$, $\hat{v}$, где

$$\bar{p} = \begin{cases} \hat{v}(0, n, \beta = 0{,}5\ )\,, R = 0, \\ \dfrac{R}{n + k}, R > 0. \end{cases}$$

Вычисления функционалов $L(\hat{\theta}(n; k, m))$ и $D(\hat{\theta}(n; k, m))$ проводились с шагом $(dp = 1E - 03)$. А вычисление неявно заданных оценок $\hat{v}$ и $\overline{\mathrm{p}}$ проводилось с точностью $1E - 04$ (случай $4 \le n \le 10$).

Заметим, что функционал $D(\hat{\theta}(n; k, m))$ (уклонение) в нашей задаче практически равен дисперсии, что учтено в таблице 5.5 при вычислении параметра (C=L•D) критерия эффективности смещенных оценок.

Таблица 5.5

Результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$ оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$: $\hat{p}$, $\bar{p}$, $\hat{v}$ (случай $4 \le n \le 10$)

Вид функционала	$\tilde{v}(\beta = 0{,}5)$ $4 \le n \le 10$	$\hat{p} = \dfrac{R}{n+k}$ $4 \le n \le 10$	$\bar{p}(\tilde{v}(\beta = 0{,}5))$ $4 \le n \le 10$
$L(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,00229	0,000219	0,000805
$D(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,0205	0,0186	0,0164
C=L•D•100000	4,6945	0,40734	1,3202

Из таблицы 5.5 следует, что для объема испытаний $4 \le n \le 10$ преобладают оценки $\hat{p}$ и составная оценка $\bar{p}(\hat{v}(\beta = 0{,}5))$, приобретая минимальные смещения.

Из таблицы (5.5) также следует, что оценка $\hat{p}$ и составная оценка $\bar{p}$ примерно равносильны по уклонению своих величин от параметра p и незначительно превосходят в этом качестве оценку $\hat{v}$. В соответствии с критерием эффективности смещенных оценок оценку $\hat{p}$, обладающую минимальным параметром C = 0,40734, можно принять в качестве искомой оценки, т. е. эффективной среди предложенных оценок, когда объем испытаний $n > 3$. Однако, когда необходимо оценить неизвестный параметр p величиной, отличной от нуля и единицы, следует использовать оценку $\bar{p}$. Заметим, что соотношение *D/L* во всех случаях значительно превосходит критический порог, равный *D/L* >> 4.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования ($\partial\, p = 1E-03$) приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Пример 5.2

Изделия входят в состав агрегата и применяются по схеме с резервированием. Требуется сделать точечную оценку ВБР изделий по результатам биномиальных испытаний на надежность этих изделий. При планировании определительных испытаний на надежность испытатель при расчете объема выборки ($N = n + k = 5$) учел один отказ ($Q = k = 1$), минимизируя риски от возникновения этого маловероятного случайного отказа.

Для вычисления величин ВБР, для биномиального плана испытаний, была использована эффективная в классе смещённых оценок составная оценка [9, 20]

$$\tilde{P} = \begin{cases} 1 - \tilde{b}(0, N, \beta = 0{,}81)\,, R = 0, \\ 1 - \dfrac{R}{N}, R > 0. \end{cases}$$

где $\tilde{b}(0, N, \beta = 0{,}81)$ – неявно заданная оценка биномиального плана испытаний [20]. При этом прогнозируемая величина ВБР составила $\tilde{P}(R = 1) = 1 - R/N = 4/5 = 0{,}8$, что соответствует требованиям ТЗ (ВБР должна быть не менее 0,8) на изделия. Поскольку за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек. В процессе испытаний допустимы два исхода: безотказные испытания и испытания с одним отказом (планируемые). В случае испытаний, не давших отказов, отпадает необходимость в испытаниях дополнительной выборки.

Результаты испытаний $R = r$:

В процессе испытаний отказы не возникали $r = 0$:

ВБР (испытания с добавлением)			ВБР (биномиальные испытания)
$\mathrm{r = k = 0, n = 4, N = n + k = 4 + 0 = 4, Q = 1}$			$\mathrm{r = 0, N = n = 4, Q = 0}$
$1 - \tilde{\mathrm{v}}$ $\beta = 0{,}5$	$1 - \hat{\mathrm{p}} = 1 - \dfrac{\mathrm{R = r}}{\mathrm{n + k}}$	$1 - \bar{\mathrm{p}}(\tilde{\mathrm{v}})$ $\beta = 0{,}5$	$\tilde{P} = 1 - \tilde{\mathrm{b}}(0, \mathrm{N}, \beta = 0{,}81)$
0,871	1	0,871	0,936

В процессе испытаний возник один отказ $r = 1$:

ВБР (испытания с добавлением)			ВБР (биномиальные испытания)
$\mathrm{r = k = 1, n = 4, N = n + k = 5, Q = 1}$			$\mathrm{r = 1, N = n = 5, Q = 1}$
$1 - \tilde{\mathrm{v}}$ $\beta = 0{,}5$	$1 - \hat{\mathrm{p}} = 1 - \dfrac{R = r}{\mathrm{n + k}}$	$1 - \bar{\mathrm{p}}(\tilde{\mathrm{v}})$ $\beta = 0{,}5$	$\tilde{P} = 1 - \frac{\mathrm{R=r}}{\mathrm{N}}$, r>0
0,687	0,8	0,8	0,8

Заметим, что если в случае проведения биномиальных испытаний по сокращенной выборке $N = n = 4, Q = 0$ возникнет один отказ $R = 1$, то по правилам потребуется проведение повторных испытаний по тем же правилам, так как $1 -$

$\tilde{p} = 1 - (R = r)/n = 1 - 3/4 = 0{,}75 < 0{,}8$ [5]. Причем в повторном биномиальном испытании отказы не допускаются. Для проведения биномиальных испытаний при $R = 0$ и приемочном числе отказов $Q = 1$ потребуется выборка объемом $N = 5$, что больше первичной выборки испытаний с добавлением $N = 4$.

В этом и есть преимущество испытаний с добавлением, которые позволяют сделать вывод о соответствии ТЗ по результатам только одних испытаний с различными исходами: $N = n + k = 4, R = 0$ и $N = n + k = 5, R = 1$ (без проведения повторных испытаний в том же объеме $N = n + k = 4, R = 0$, как в случае биномиальных испытаний, где допустим один исход $Q = 0$).

Пример 5.3

В рамках примера 5.2 испытатель при расчете объема выборки ($N = 4$) учел один отказ ($Q = k = 1$). При этом прогнозируемая величина ВБР составила $\tilde{P} = 1 - R/N = 3/4 = 0{,}75$, что соответствует требованиям ТЗ (ВБР должна быть не менее 0,75) на изделия. Учитывая, что за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек.

Результаты испытаний $R = r$:

В процессе испытаний отказы не возникали $r = 0$

<table>
<tr><td colspan="4">ВБР (испытания с добавлением)</td><td>ВБР (биномиальные испытания)</td></tr>
<tr><td colspan="4">$r = 0, k = 0, n = 3, N = n + k = 3 + 0 = 3, Q = 1$</td><td>$r = 0, N = n = 3, Q = 0$</td></tr>
<tr><td>$1 - \tilde{v}$
$\beta = 0{,}5$</td><td>$1 - \hat{p}$</td><td>$1 - \widehat{w}_3(0)$</td><td>$1 - \bar{p}(\tilde{v})$
$\beta = 0{,}5$</td><td>$\tilde{P} = 1 - \tilde{b}(0, N, \beta = 0{,}81)$</td></tr>
<tr><td>0,841</td><td>1</td><td>1</td><td>0,841</td><td>0,916</td></tr>
</table>

В процессе испытаний возник один отказ $r = 1$

<table>
<tr><td colspan="4">ВБР (испытания с добавлением)</td><td>ВБР (биномиальные испытания)</td></tr>
<tr><td colspan="4">$r = k = 1, n = 3, N = n + k = 4, Q = 1$</td><td>$r = 1, N = n = 4, Q = 1$</td></tr>
<tr><td>$1 - \tilde{v}$
$\beta = 0{,}5$</td><td>$1 - \hat{p}$</td><td>$1 - \widehat{w}_3(0)$</td><td>$1 - \bar{p}(\tilde{v})$
$\beta = 0{,}5$</td><td>$\tilde{P} = 1 - \frac{R=r}{N}$, r>0</td></tr>
<tr><td>0,616</td><td>0,75</td><td>0,642</td><td>0,75</td><td>0,75</td></tr>
</table>

5.7. Построение эффективной оценки средней наработки до отказа

Классический критерий выбора эффективной оценки для СНДО

Будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей с параметром T_0, где последний совпадает с СНДО. Тогда величина ВБР одного изделия за заданное время τ будет определяться равенством

$$P_0(\tau) = e^{\left(-\frac{\tau}{T_0}\right)}.$$

В качестве критерия получения эффективной оценки СНДО строится функционал (далее – $V(\hat{\theta}(k, m, n, \tau))$), основанный на суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\hat{\theta}(k, m, n, \tau)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных величин, принимаемых параметрами t, n, τ [9, 10]:

$$V\left(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^\infty\left(\frac{1}{t}\right)^2\{E\hat{\theta}(k, m, n, \tau = 10^i) - t\}^2 \partial t. \quad (5.6)$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра $t \epsilon [0; \infty]$ (СНДО).

Рассмотрим функционал (далее – $H(\hat{\theta}(k, m, n, \tau))$), основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(k, m, n, \tau)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных величин, принимаемых параметрами t, n, τ [9, 10]:

$$H\left(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^\infty\left(\frac{1}{t}\right)^2 E\{\hat{\theta}(k, m, n, \tau = 10^i) - t\}^2 \partial t. \quad (5.7)$$

Задачей функционала $H\left(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\right)$ является определение степени разброса количественных значений предложенных оценок.

Оценка, минимизирующая предлагаемые функционалы, является эффективной среди предложенных оценок СНДО.

Выбор эффективной оценки СНДО

Определим оценку СНДО ($\hat{T}_2$) для плана испытаний с добавлением как

$$\hat{T}_2 = \frac{S(k, m, \tau, s_i, n)}{R},$$

где s_i – моменты отказов, $i = 1,2, \dots, R > 0$; S – суммарная наработка. Доопределим оценку $\hat{T}_2$ при $R = 0$ величиной $\hat{T}_2 = S(k, m, \tau, n)$.

Другой вариант. Чтобы уйти от деления на ноль для оценки СНДО $\hat{T}_2$ представим ее в виде

$$\hat{T}_3 = \frac{S(k, m, \tau, s_i, n)}{R + 1}.$$

Будем рассматривать простой случай и сократим число переменных для оценок $\hat{T}_2$ и $\hat{T}_3$. Для этого будем предполагать, что разброс s_i происходит симметрично относительно $\tau/2$. Это выполнимо для высоконадежных изделий $\tau/T0 < 0{,}1$ [4], поэтому $S(k, m, \tau, n) = (n - k)\tau + (k + m)\tau/2$.

Определим следующие оценки СНДО для плана испытаний с добавлением как

$$\hat{T}_0 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \tilde{v}(k,m,n,\beta = 0{,}5))}, \ \hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \bar{p}(k,m,n,\beta = 0{,}6))}.$$

Вычисления функционалов $V\big(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\big)$ и $H\big(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\big)$ проводились с шагом $\partial p = 1E - 03$. А вычисления неявно заданных оценок $\hat{v}$ и $\bar{p}$ проводились с точностью $(1E - 04)$.

В таблице 5.6 приведены результаты подстановки в функционалы $V\big(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\big)$ и $H\big(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\big)$, в соответствии с формулами (5.6) и (5.7) следующих оценок СНДО $\hat{\theta}$: $\hat{T}_0$, $\hat{T}_3$, $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$.

Таблица 5.6

Результаты подстановки в функционалы $V\big(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\big)$ и $H\big(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\big)$ следующих оценок СНДО $\hat{\theta}$: $\hat{T}_0, \hat{T}_3, \hat{T}_1, \hat{T}_2$

Вид функционала	$\hat{T}_0(\tilde{v}, \beta = 0{,}5)$	$\hat{T}_1(\bar{p}, \beta = 0{,}6)$	$\hat{T}_2 = \frac{S}{R}$	$\hat{T}_3 = \frac{S}{R+1}$
$V\big(\hat{\theta}(\tau; n; k, m)\big)$	10,89	10,80	2363	1836
$H\big(\hat{\theta}(\tau; n; k, m)\big)$	27,47	25,54	2373	1845
D = H - V	16,58	14,74	10	9
D/V	1,522	1,364	<<1	<<1
C=V•D/100	1,805	1,592	>2000	>1500

Из таблицы 5.6 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок оценка СНДО $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\bar{p}k,m,n,\beta=0{,}6))}$ является условно эффективной среди предложенных оценок C = 1,592 (*D/V* = *1,364* < *4*).

Пример 5.4

В рамках примера 5.2 изделия испытывались 10000 ч. Воспользуемся классической эффективной оценкой СНДО

$$\hat{T} = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{b}(R=r,n))}, \hat{b}(r,n) = \frac{R=r}{n}$$

для биномиального плана [9, 18] и эффективной оценкой СНДО [9, 20]

$$\hat{T}_b = \frac{\tau}{-\ln\left(1-\tilde{b}(R=0,N,\gamma=0{,}6)\right)}.$$

и построим на их основе следующую составную оценку СНДО для биномиальных испытаний:

$$\hat{T}_{\text{БИ}} = \begin{cases} \dfrac{\tau}{-\ln(1-\hat{b})}, R > 0, \\ \dfrac{\tau}{-\ln\left(1-\tilde{b}(R,n,\beta=0{,}6)\right)}, R = 0, \end{cases}$$

где $\tilde{b}(R,n,\beta=0{,}6)$ – неявно заданная оценка вероятности отказа биномиального плана испытаний [9, 20].

Испытатель определил прогнозируемую величину СНДО

$$\hat{T}_{\text{БИ}}(R=1,n=5) = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{b}(r,n))} = \frac{10000}{-\ln(1-\frac{\mathrm{R=r}}{n})} = \frac{10000}{-\ln(1-\frac{1}{5})} = 44814 \text{ ч},$$

что соответствует требованиям ТЗ ($T_0 \geq 40000$) на изделия. Поскольку за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек.

Результаты испытаний $R = r$:

В процессе испытаний отказы не возникали $r = 0$:

СНДО (испытания с добавлением)	СНДО (биномиальные испытания)
$r = 0, k = 0, n = 4, N = n + k = 4 + 0 = 4,$ $Q = 1$ $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \bar{p}(k = 0, m = 0, n, \beta = 0{,}5))}$	$r = 0, N = n = 4$,Q=0 $\hat{T}_{БИ} = \begin{cases} \frac{\tau}{-\ln(1 - \frac{R = r > 0}{n})} \\ \frac{\tau}{-\ln\left(1 - \tilde{b}(R = 0, n, \beta = 0{,}6)\right)} \end{cases}$
$\frac{10000}{-\ln(1 - \tilde{v}(k = 0, m = 0, n = 4, \beta = 0{,}5))} = 72411$	$\frac{10000}{-\ln\left(1 - \tilde{b}(R = 0, n = 4, \beta = 0{,}6)\right)} = 78304$

В процессе испытаний возник один отказ R: $r = 1$

СНДО (испытания с добавлением)	СНДО (биномиальные испытания)
$r = 1, k = 1, n = 4, N = n + k = 4 + 1 = 5,$ $Q = 1$ $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \bar{p}(k, m, n, \beta = 0{,}5))}$	$r = 1, N = n = 5, Q$=1 $\hat{T}_{БИ} = \begin{cases} \frac{\tau}{-\ln(1 - \frac{R = r > 0}{n})} \\ \frac{\tau}{-\ln\left(1 - \tilde{b}(R = 0, n, \beta = 0{,}6)\right)} \end{cases}$
$\frac{10000}{-\ln(1 - \frac{k + m}{n + k})} = 44814$	$\frac{10000}{-\ln(1 - \frac{1}{5})} = 44814$

Выводы к разделу 5

1. Проведено построение и исследование оценок ВБР для плана испытаний с добавлением. Для варианта $n > 3$ оценка $\hat{P} = 1 - \hat{p} = 1 - \frac{k+m}{n+k}$ в сравнении с оценкой $\hat{V} = 1 - \hat{v}(\beta = 0{,}5)$ является эффективной среди предложенных.

2. Испытания с приемочным числом отказов больше нуля ($Q > 0$), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.

3. Оценки вероятности отказа $\widehat{w}_2$ и $\widehat{w}_3$ являются несмещенными и, как следствие, эффективными для вариантов соответственно: $n = 2$ и $n = 3$.

4. Оценку $\hat{p} = \frac{k+m}{n+k}$ можно принять в качестве искомой оценки вероятности отказа эффективной среди предложенных, когда объем испытаний $n > 3$. Однако когда необходимо оценить неизвестный параметр p величиной, отличной от нуля и единицы, следует использовать составную оценку $\bar{p}(\hat{v}(\beta = 0{,}5))$.

5. Составную оценку СНДО $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\bar{p}(k,m,n,\beta=0{,}6))}$ можно принять в качестве эффективной оценки среди предложенных.

6. Полученные составные оценки $\bar{p}$ и $\hat{T}_1$ имеют направленность практического применения для безотказных испытаний, проводимых по плану испытаний с добавлением.

ЧАСТЬ 6
СОКРАЩЕНИЕ ОБЪЕМОВ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ИСПЫТАНИЙ, БЕЗ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОТКАЗОВ, ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАНОВ

Для проведения испытаний на надежность сложных и высоконадежных изделий требуется выставлять большое число испытуемых изделий. С целью сокращения объема испытаний оценку показателей надежности проводят расчетно-экспериментальным методом [27, 34]. Под расчетно-экспериментальным методом понимают:

– Расчетно-экспериментальный метод [27]: метод оценки надежности объекта путем расчета, при котором показатели надежности всех или некоторых составных частей объекта определены экспериментально.

– Расчетно-экспериментальный метод [34]: оценка показателей надежности при наличии основной информации о составных частях объекта и информации о его структуре.

Следует заметить, что в основе расчетно-экспериментального метода лежат методы точечного и интервального оценивания [28, 34], а сами планы испытаний относят к определительным [27].

Следующим шагом по сокращению объема испытаний является сокращение учитываемых отказов. В большинстве случаев допустимое число отказов в процессе испытаний сводят к нулю. Все эти шаги позволяют минимизировать затраты на проведение испытаний на надежность. Однако затраты на проведение испытаний остаются все еще большими, что заставляет разработчика и производителя изделий искать иные подходы к формированию выборки и оценке результатов испытаний на надежность.

Как правило, план испытаний относят к плану типа $N\text{Б}\tau$ (биномиальные испытания) или $N\text{В}\tau$ (испытания с ограниченной продолжительностью и восстановлением), где N – число испытуемых однотипных изделий; τ – наработка (одинаковая для каждого изделия); Б (В) – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний не восстанавливается (восстанавливается) [4]. Для результатов испытаний, не давших отказов, эти планы следует считать эквивалентными.

Предлагаемые в настоящее время методы оценки величин параметров надежности основываются на стандартах, основы которых закладывались на протяжении предыдущего столетия. В частности, в качестве точечной оценки показателей надежности по результатам испытаний, не давших отказов, принимается соответствующая этой оценке нижняя доверительная граница.

Наиболее успешными в этом направлении работами являются методы байесовского статистического оценивания [6, 35, 36].

Примером может служить оценка вероятности безотказной работы, проводимая по результатам испытаний типа $N\text{Б}\tau$. В качестве точечной оценки ВБР по результатам испытаний, не давших отказов, принимается ее НДГ ($R_{\text{НДГ}}$), величина которой определяется по формуле [6] (байесовская нижняя доверительная граница – случай равномерного априорного распределения – тривиальная априорная информация):

$$R_{\text{НДГ}} = \sqrt[(N+1)]{1-\gamma}\,, \qquad (6.1)$$

где γ – доверительная вероятность.

Заметим, что формулу (6.1) с хорошим приближением можно применять и для плана испытаний $N\text{Б}\tau$ в случае, когда в процессе испытаний отказы не возникают.

Существенным недостатком методов байесовского статистического оценивания является ограничение, накладываемое выбранным априорным распределением как неизменным постулатом [30, 37]. Поэтому, несмотря в достигнутые впечатляющие результаты, методы байесовского статистического оценивания остаются ограниченными выбранным априорным распределением и дают результаты, не выходящие за рамках дозволенного, которое определено выбором вида распределения и его параметров по результатам испытаний изделий предыдущих партий. Такая модель поведения байесовской оценки не отражает реальный мир и обслуживает период стабильной ситуации. Так, различные партии изделий имеют различные величины параметров априорного распределения, а в случае нарушения технологической дисциплины эти различия становятся еще сильнее. Однако заметить эти отличия не позволяет не только зафиксированный выбор вида априорного распределения, но и зафиксированный выбор величин параметров этого распределения, осуществленный на выборках различных партий изделий еще до выпуска контролируемой партии. То есть этот выбор основан на опыте стабильного выпуска предыдущих партий. Таким образом, байесовская оценка контролируемой партии напрямую зависит не только от вида априорного распределения, исхода испытаний и объема выборки N, но и от выбранных параметров априорного распределения [27, 30].

В сильной степени устранить эти недостатки может составная байесовская оценка, приведенная в [37] для биномиального плана испытаний. Однако, для целочисленных значений $r = 0$ и $r = N$ исходов биномиальных испытаний, априорные вероятности возникновения отказа ограничены величинами, отличными от нуля и единицы. В этом заключен некоторый произвол, однако в противном случае составная байесовская оценка вероятности отказа совпадет с классической оценкой ($\hat{p} = R/N$), что делает необходимость в байесовской оценке биномиальных планов испытаний ничтожной [37], превращая изложенные преимущества байесовского оценивания в миф.

Поэтому байесовская оценка $R_{\text{НДГ}} = \sqrt[(N+1)]{1-\gamma}$ в настоящей работе рассматривается не как эталон, а как инструмент сравнения лучших классических оценок с современными по результатам испытаний, не давших отказов.

Разумной альтернативой классической оценки $\mathrm{R}_{\text{НДГ}} = \sqrt[(N+1)]{1-\gamma}$, а следовательно и составной байесовской оценки, в части биномиальных испытаний, не давших отказов, может служить неявно заданная точечная оценка вероятности отказа изделий, приведенная в [9, 18–23].

В основе предлагаемого метода решения проблемы сокращения количества испытуемых изделий для испытаний, не давших отказов, лежит использование в качестве расчетных формул выражения для точечных оценок показателей надежности (вместо НДГ), полученных за последнее время [9, 12–23].

Здесь и далее в качестве основной модели надежности рассматривается экспоненциальный закон распределения наработки до отказа [5]. Ниже приводятся расчетные оценки объемов испытаний, в течение которых отказы не возникают. Подчеркнем еще раз, что приводимые расчетные оценки объемов испытаний верны исключительно для испытаний, не дающих отказов, проводимые в соответствии с планами типа $N\text{Б}\tau$ или $N\text{В}\tau$, которые для этого случая эквивалентны.

6.1. Сокращение объемов в случае оценки вероятности безотказной работы при планировании испытаний без возникновения отказов

Проведем расчет объема выборки испытаний для числа отказов $R = 0$ исходя из оценок [9, 18–20, 24–25, 38].

В классическом случае для испытаний, не давших отказов, определение объема выборки (N) рассматривают исходя из равенства НДГ $R_{\text{НДГ}}$ нормируемой величине ВБР ($P_{\text{норма}}$), т. е. исходят из равенства $R_{\text{НДГ}} = P_{\text{норма}}$. В качестве эталона сравнения объемов выборки испытаний, рассчитанных исходя из различных оценок, возьмем формулу (6.1), которая определяет байесовскую НДГ. Тогда объем выборки (для испытаний при $R = 0$) $N_{\text{Байес}}$ рассчитывают по формуле

$$N_{\text{Байес}} = \frac{Ln(1-\gamma)}{Ln\left(R_{\text{НДГ}}=\text{P}_{\text{норма}}\right)} - 1. \tag{6.2}$$

Полученная расчетная формула (6.2) объема выборки для испытаний при $R = 0$ является традиционной. Заметим, что оценка НДГ ВБР, полученная решением уравнения Клоппера – Пирсона [4], проигрывает байесовской оценке (см. формулу (6.1)), поэтому в сравнительном анализе рассматриваться не будет.

Биномиальный план испытаний

Для испытаний (при $R = 0$), проводимых по биномиальному плану, рассмотрим точечную оценку ВБР [25]

$$\tilde{\tilde{p}}_\tau(g;T_p(R=0,\tau,n)) = 1 - Exp(-g/T_p), \text{ где } T_p(R=0) = 60n\tau \qquad (6.3)$$

за время τ. Оценка не является эффективной [25], так как таковой является традиционная несмещенная и эффективная оценка $\hat{P}(R,N) = 1 - \hat{p} = 1 - \frac{R}{N}$. Однако возможность оценивать ВБР величиной, отличной от нуля и единицы, делает ее весьма привлекательной. Приравняем $1 - \tilde{\tilde{p}}_\tau$ норме $P_{норм}$, тогда объем выборки при $g = \tau$ следует рассчитывать по формуле

$$N_{NБ\tau} = -1/60Ln(P_{норм}) \qquad (6.4)$$

*План испытаний типа N*Вτ

Для плана испытаний типа N Вτ рассмотрим эффективную точечную оценку ВБР за время $g = \tau$ [25], полученную в соответствии с критерием эффективности интегральных оценок [25], а именно:

$$P_{v2}(T_v(R)) = e^{-g/T_v(R)}, \qquad (6.5)$$

где $T_v(R=0) = 18n\tau$, $T_v(R>0) = n\tau/(R + 0{,}5)$, для $\tau = g$.

Приравняем P_{v2} в формуле (6.5) норме $P_{норм}$, тогда объем выборки при $g = \tau$ следует рассчитывать по формуле

$$N_{NB\tau} = -1/18Ln(P_{норм}) \qquad (6.6)$$

Из формул (6.4) и (6.6) следует, что объем выборки не зависит от γ – доверительной вероятности (см. формулу (6.1)), так как вывод этих формул основан на точечных оценках.

Результаты объемов испытаний N, рассчитанных в соответствии с формулами (6.2), (6.4) и (6.6) для планов испытаний, не давших отказов, типа NБτ и NВτ, приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Результаты объемов испытаний N, рассчитанных в соответствии с формулами (6.2), (6.4) и (6.6) для планов испытаний, не давших отказов, типа NБτ и NВτ

Нормируемая величина ВБР	$N_{Байес}$ (γ = 0,8), шт	$N_{NБ\tau}$, шт	$N_{NВ\tau}$, шт
0,999	1608	17	56
0,99	159	2	6
0,95	30	1	1
0,9	14	1	1

Из таблицы 6.1 следует, что объемы испытаний имеют тенденцию к резкому снижению для выбранного ряда оценок.

6.2. Сокращение объемов в случае оценки средней наработки до отказа при планировании испытаний без возникновения отказов

Если в качестве оценки СНДО рассматривать традиционную оценку $\hat{T}_0$ [4, 28]:

$$\hat{T}_0 = \frac{N\tau}{R}, R > 0,$$

где R – случайное число отказов, то объем выборки, как и величину реализации оценки $\hat{T}_0$, для испытаний, не давших отказов, рассчитать невозможно. Поэтому в этом случае традиционно в качестве оценки СНДО выбирают ее НДГ [4, 28], например для биномиального плана испытаний, а именно:

$$T_{01н} = \frac{2t_{\Sigma}}{x^2(1-\propto;2r+1)},$$

где $t_{\Sigma} = N\tau\ (R{:}\, r = 0) -$ суммарная наработка изделия;

$x^2(1-\propto; 2r+1)$ – квантиль x^2-распределения с $(2r+1)$-й степенью свободы (для плана испытаний NБτ);

$(\alpha = 1-\gamma = 1 - 0{,}9 = 0{,}1)$ – уровень значимости согласно ГОСТ Р 50779.26–2007 [28] (здесь оценка НДГ СНДО с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}9$ (не путать с вероятностью «гамма»)).

Аналогично для плана испытаний типа $N\text{В}\tau$ получаем

$$T_{01\text{н}} = \frac{2t_{\Sigma}}{x^2(1-\propto;\ r+2)}.$$

Пусть в качестве нормируемой величины СНДО $T_{01\text{н}}$ выбирается величина равная $T_{01\text{н}} = T_{\text{норма}}$, тогда объем выборки для биномиального плана испытаний следует рассчитывать по формуле

$$N = T_{\text{норма}}\frac{x^2(1-\propto;1)}{2\tau}.$$

А для плана испытаний типа $N\text{В}\tau$ – по формуле

$$N = T_{\text{норма}}\frac{x^2(1-\propto;2)}{2\tau}.$$

Точечная оценка СНДО для плана испытаний типа $N\text{В}\tau$

Для плана испытаний типа NВτ рассмотрим точечную оценку СНДО [25] (см. раздел 2), полученную в соответствии с критерием эффективности оценок [24], а именно:

$T_{\text{В}2}(R = 0) = 2{,}5n\tau$, $T_{\text{В}2} = n\tau / (R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$,

$T_{\text{В}2}(R > 5) = n\tau / (R + 1)$.

Тогда относительный выигрыш от минимизации объема выборки при $R = 0$ для плана $N\text{В}\tau$ следует рассчитывать по формуле

$$\text{Выигрыш} = x^2(1-\propto;2) * 1{,}15.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}2$ относительный выигрыш от минимизации объема выборки составит 3,6 раза, а для $\alpha = 0{,}1$ составит 5,1 раза.

Точечная оценка СНДО для биномиального плана испытаний

Для биномиального плана испытаний рассмотрим точечную эффективную оценку СНДО [24], полученную в соответствии с критерием эффективности оценок [25], а именно:

$$T_{\tau2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\text{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\text{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) -$$
$$- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\text{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)).$$

Поскольку для испытаний, не давших отказов, планы испытаний типа NБτ и NВτ примерно эквивалентны, то все сказанное для плана испытаний типа NВτ примерно верно и для плана испытаний типа NБτ, и наоборот.

$T_{\text{норма}} = T_{\tau 2}(R=0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R=0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$,

Обозначим через $t = -1 + (T_{\text{норма}} - 400)/0{,}6\tau$, тогда

$t = -1/\ \mathrm{Ln}(1 - 0{,}3/(n + 0{,}3))$, следовательно $\mathrm{Ln}(1 - 0{,}3/(n + 0{,}3)) = -1/t$.

Откуда $1 - 0{,}3/(n + 0{,}3) = \exp\{-1/t\} \approx 1 - 1/t$, следовательно

$0{,}3/(n + 0{,}3) \approx 1/t$, откуда $0{,}3t = n + 0{,}3$ или

$n = 0{,}3(t - 1) = 0{,}3(-2 + (T_{\text{норма}} - 400)/0{,}6\tau)) = -0{,}6 + (T_{\text{норма}} - 400)/2\tau$.

Учтем, что время испытаний $\tau \approx T_{\text{норма}}$, а $400/2\tau \approx 0$. Тогда

$n = -0{,}6 + T_{\text{норма}}/2\tau$, следовательно

Выигрыш $= N/n \approx \chi^2(1 - \alpha;1)/(1 - 0{,}3) = 7\chi^2(1 - \alpha;1)$.

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}3$ относительный выигрыш от минимизации объема выборки составит 7 раз, а для $\alpha = 0{,}1$ – 16 раз.

В заключение раздела следует заметить, что рассмотренные оценки, в отличие от традиционной $\hat{T}_0$, позволяют рассчитывать точечную оценку СНДО по результатам испытаний, не давших отказов.

Выводы к разделу 6

Использование приведенных в данной работе оценок параметров надежности позволяет минимизировать объем выборки при проведении испытаний на надежность, которые были запланированы как безотказные, что в сильной степени решает проблему минимизации объема выборки. Такое стало возможным потому, что эти оценки дают возможность проводить точечное оценивание по результатам испытаний, не давших отказов, что, в свою очередь, не позволяет занижать реальный показатель надежности.

ЧАСТЬ 7 АНАЛИЗ СМЕЩЕНИЯ ОЦЕНОК СТАЦИОНАРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАНОВ ИСПЫТАНИЙ

7.1. Введение

Любой процесс разработки технических изделий должен включать проведение испытаний на надежность. Если в процессе эксплуатации нормой является восстановление изделия после наступившего отказа, то в качестве планов испытаний на надежность обычно используют планы испытаний типа NBt и NBR, где N – число испытуемых однотипных изделий; t – время испытаний каждого из N изделий; R – число отказов; B – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается (не восстанавливается) [4, 5, 39]. Обычно символы NBt и NBR обозначают, что в процессе испытаний отказы восстанавливаются мгновенно. Чтобы не путать планы NBt и NBR, с планами испытаний с длительным временем восстановления, будем последние обозначать соответственно символами $NB!t$ и $NB!R$ [40].

Упростим постановку задачи и потребуем для планов испытаний типа $NB!t$ и $NB!R$, выполнение условия $D = R$, где D – число восстановлений, т. е. после окончания испытаний в момент времени t восстановление изделий продолжается пока не восстановится последнее из R отказавших изделий. Для плана испытаний типа $NB!t$ добавим условие, что все изделия должны иметь суммарную наработку равную t. Такие планы испытаний будем обозначать соответственно $NB!t(D{=}R)$ и $NB!R(D{=}R)$. В качестве модели надежности принимается экспоненциальное распределение.

Для восстанавливаемых изделий обычно в качестве комплексного показателя надежности устанавливают стационарный коэффициент готовности (КГ). Стационарный КГ определяется как вероятность того, что изделие окажется в работоспособном состоянии в данный момент времени, достаточно удаленный от начала испытаний [27].

Формула для стационарного КГ ($K_г$), используемая на практике, имеет вид [4, 5, 41, 42]

$$K_г = T / (T + H) = 1 / (1 + H / T),$$

где $T = 1 / \lambda$ – средняя наработка до отказа изделия, где λ – интенсивность отказов изделия, $H = 1 / h$ – среднее время восстановления (замены) изделия, где h – интенсивность восстановлений (замен) изделия. В качестве оценки КГ используется общая формула

$$G = \check{T} / (\check{T} + \hat{H}) = 1 / (1 + \hat{H} / \check{T}),$$

где $\check{T}$ – оценка средней наработки до отказа, полученная по результатам испытаний изделий, $\hat{H}$ – оценка среднего времени восстановления, полученная по результатам испытаний изделий. Из вида оценки G следует, что существует бесконечное множество оценок стационарного КГ $K_г$. Например, для планов испытаний типа NBt и NBR в качестве $\check{T}$ можно выбрать оценку[1] соответственно $\check{T} = Nt /(R + 1)$, $R \geq 1$ и $\check{T} = Nt /R$, $R \geq 1$ [4, 5, 39]. В качестве формулы для $\hat{H}$ традиционно выбирают $\hat{H} = V / D = R$, где $R \geq 1$, V – суммарное время восстановления. Нахождение эффективных оценок является одной из основных задач теории надежности. За последнее время, начиная с 60-тых годов прошлого столетия, в отечественной научной литературе было представлено ничтожно мало исследований, касающихся свойств оценок стационарного КГ. Наиболее известная работа по исследованию оценок стационарного КГ для плана испытаний типа NBR представлена в [41]. Настоящая работа восполняет указанный пробел [40].

Чтобы из бесконечного множества оценок стационарного КГ $K_г$ выявить эффективную оценку, сначала следует построить критерий сравнения по эффективности этих оценок.

[1] ГОСТ Р 50779.26-2007 Статистические методы. Точечные оценки, доверительные, предикционные и толерантные интервалы для экспоненциального распределения. М.: Стандартинформ, 2008. 27 с.

Цель работы

Целью работы является построение простого критерия эффективности смещенных оценок стационарного КГ для планов испытаний с длительным временем восстановления ($N \geq 1$) и определение на основе построенного критерия эффективной смещенной оценки из числа предложенных [40].

Методы исследования

Для нахождения эффективной смещенной оценки использовались:

– критерий эффективности смещенных оценок (см. подраздел 1.5);

– интегральные числовые характеристики точности оценки, основанные на суммировании квадрата смещения ожидаемой реализации некоторого варианта оценки от исследуемых параметров законов распределений и суммировании дисперсии оценки.

7.2. Построение критерия эффективности оценок стационарного коэффициента готовности для плана испытаний типа *NB!t(D=R)*

Рассмотрим план испытаний типа $NB!t(D{=}R)$. Такие испытания предназначены прежде всего для оценки стационарного КГ [4, 5, 40, 41] (определительные испытания). В процессе испытаний наработка до отказа и время восстановления изделия являются случайными величинами и подчиняются экспоненциальному закону распределения вероятностей [4, 5, 39]. В процессе испытаний изделие всегда может находиться в одном из двух состояний: работоспособном и неработоспособном. В случае отказа изделие восстанавливается, причем ресурс изделия восстанавливается полностью (путем замены или ремонта), что в процессе испытаний позволяет считать неизменными параметры законов распределения.

Упростим задачу и будем рассматривать в процессе, проведения испытаний типа NBt, только одно изделие $N = 1$, тогда в рамках этой задачи наблюдается пуассоновский поток отказов с интенсивностью λ [4, 5, 39].

Таким образом, испытание системы, состоящей из одного изделия, в соответствии с планом $NB!t(D{=}R)$, $N = 1$ можно представить в виде двух совокупностей испытаний, проводимых по классическим планам NBt, где восстановление можно считать мгновенным, и $NB(D{=}R)$, где отказы системы возникают мгновенно, т. е. соответственно план с восстановлением и ограниченным временем испытаний и план с ограниченным числом восстановлений (R является случайной величиной).

Введем обозначения:

$S = t$ – суммарная наработка системы, состоящей из одного изделия;

V – суммарное время восстановлений этой системы.

Можно предложить множество вариантов оценок $G(D{=}R,R,S,V)$. Для их сравнения по эффективности следует построить критерий эффективности смещенных оценок стационарного КГ (см. раздел 1.5 настоящей книги). С этой целью воспользуемся опытом подобных построений, изложенными в предыдущих главах. Оценка G считается более эффективной в сравнении с другими смещёнными оценками, если ее математическое ожидание EG имеет наименьшее смещение от истинного стационарного КГ $K_г$, который всегда зависит от параметров законов распределения λ, h. Смещение (m) в большинстве случаев определяют как квадрат отклонения EG от принимаемых значений КГ, а именно:

$$m(G, K_г) = (EG - K_г)^2.$$

В принципе, вид оценок G стационарного КГ системы может иметь любой функциональный вид $G(N,S,V,D, R, \ldots)$, $N = 1, S, D = R$.

В данной работе следует ограничиться оценками с простым видом, а именно:

$$G_1 = \frac{1}{1+\frac{V}{S}\cdot\frac{R}{D=R}} \text{ (традиционная оценка)}, \; G_2 = \frac{1}{1+\frac{V}{S}\cdot\frac{R+1}{D=R}}, \; G_3 = \frac{1}{1+\frac{V}{S}\cdot\frac{R}{R+1}}.$$

Тогда в предположении независимости с.в. V и R, конечно, следует, что $EG(V, R) = E_R(E_V(G|R))$ [43].

Для каждого из R отказов изделия плотность функции вероятности суммы V независимых одинаково распределенных случайных величин времен восстановлений с плотностью распределения he^{-ht}, имеет вид специального распределения Эрланга [4, 5]

$$\frac{h(hV)^{(d-1)}e^{-hV}}{(d-1)!}.$$

Тогда условное математическое ожидание E_V оценки G стационарного КГ изделия имеет вид

$$E_V(G \mid R, D=R, h) = \int_0^{\infty} G \frac{h(hV)^{(D-1)}e^{-hV}}{(D-1)!} dV .$$

Поток отказов представляет собой пуассоновский поток с функцией распределения $L(r) = \sum_{k=0}^{r} e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!}$, ($\Delta = \lambda t$). Математическое ожидание EG вычисляется по формуле [4, 5, 39]:

$$EG = E_R\left(E_V G\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(E_V G\right) \cdot e^{-\Delta} \frac{\Delta^r}{r!} .$$

Смещение $m(G)$, как и $K_г$, тоже зависит от параметров выбранных законов распределения (T, H). Для построения критерия эффективности смещенных оценок стационарного КГ изделия, следует просуммировать смещение по всем параметрам выбранных законов распределения (T, H) и плана испытаний (R=r, t, N=1):

$$A(G) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{T_1}^{T_2} \int_{H_1}^{H_2} m(G)\, dH\, dT\, dt. \tag{7.1}$$

Заметим, что обычно при построении подобных функционалов проводится усреднение, однако в данном случае усреднение приводит к мизерным величинам, поэтому усреднение заменено на суммирование. Если не ограничивать суммирование, то величина построенного функционала $A(G)$ для большинства оценок всегда будет равна бесконечности. Поэтому пределы суммирования (выраженные в часах) ограничивают разумными интервалами величин параметров (T, H, t, V) и R = 20.

Среди оценок, обладающих минимальным суммарным смещением $A(G)$, эффективной следует считать оценку с минимальной суммарной дисперсией. С этой целью строится функционал

$$D(G) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{T_1}^{T_2}\int_{H_1}^{H_2} y(G)dHdTdt, \tag{7.2}$$

где $y(G) = E_R(E_V((G - E(G))^2|R))$ [43],

$$E_V\left(\left(G - E(G)\right)^2 \mid R\ , D = R, h\right) = \int_0^{\infty}\left(G - E(G)\right)^2 \frac{h(hV)^{(D-1)}e^{-hV}}{(D-1)!}dV\ .$$

Непосредственное вычисление функционалов $A(G)$ и $D(G)$ (формулы (1) и (2)) весьма затруднительно, т.к. требует больших вычислительных мощностей. Поэтому формулы (7.1) и (7.2) следует упростить и привести к более практичному виду соответственно (R ограничим величиной *20* вместо бесконечности):

$$A_1 = \sum_{k=3}^{5}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=4}^{7}(C)^2\ , \tag{7.3}$$

где $C = \left[\sum_{r=1}^{20} E_V G\left(D=r, R=r, H=10^j, t=10^k\right) \cdot e^{-\frac{t=10^k}{T=10^i}} \frac{\left(-t=10^k\right)^r}{\left(T=10^i\right)^r r!}\right] - \frac{10^i}{10^i+10^j}$,

$$D_1 = \sum_{k=3}^{5}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=4}^{7}\sum_{r=1}^{20} e^{-\frac{t=10^k}{T=10^i}} \frac{\left(-t=10^k\right)^r}{\left(T=10^i\right)^r r!} E_V F\ , \tag{7.4}$$

где $F = \left[G\left(D=r, R=r, t=10^k\right) - E(G)\right]^2$.

В основе сравнения эффективности смещенных оценок СНДО лежит минимизация функционала вида $C(G) = A(G) \bullet D(G)$ на предложенных оценках $G(D{=}R, R, S{=}Nt, V)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [24, 25].

Результаты подстановки в формулы (7.3) и (7.4) предложенных оценок стационарного КГ изделия для плана испытаний типа $NB!t(D{=}R)$, $N{=}1$ представлены в таблице 7.1. Расчет проводился в системе “Mathcad”.

Таблица 7.1

Результаты подстановки в формулы (7.1) и (7.2) предложенных оценок стационарного КГ системы для плана испытаний типа *NB!t*(*D=R*), *N=1*

Вид функционала	G_1	G_2	G_3
A_1 – суммарное смещение	33,553	33,748	33,412
B_1 – суммарная дисперсия	1,46	1,377	1,531
D_1/A_1	< 1	< 1	< 1
$C = A_1 \bullet D_1$	48,98	46,47	51,15

Из таблицы 7.1 следует, что для плана испытаний типа $N=1B!t(D=R)$ оценка $G_2 = (1 + V(R+1) / SR)^{-1}$, обладающая минимальной характеристикой С = 46,47, в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок является условно эффективной среди предложенных оценок. Условная эффективность следует из величины характеристики $D_1/\mathrm{A}_1 << 4$.

Заметим, что если число однотипных изделий N, поставленных на испытания, превышает единицу $N > 1$, то, в предположении подчинения распределения наработки до отказа экспоненциальному закону (простейший поток отказов [4, 5]), вместо системы, представимой в виде одного изделия $N = 1$ и одного временного отрезка испытаний системы $S_1 = t$, следует рассматривать систему, состоящую из $N > 1$ рассосредоточенных однотипных изделий и последовательную временную структуру системы, как продолжение предыдущей временной структуры $S = S_1 = t$, на $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N = Nt$, состоящую из N временных отрезков испытаний изделий, каждое из которых работает независимо, а наступление событий в виде отказов и восстановлений происходят совместно на суммарном временном интервале S. Т. е. систему можно представить в виде одного изделия, которое последовательно испытывают в течении времени $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N = Nt$. Такое возможно, так как однородный процесс Пуассона является простейшим, для которого выполняются условия: стационарность, отсутствие последействия и ординарность [4, 5]. С другой стороны в задекларированных условиях распределения наработки до отказа, систему состоящую из $N > 1$ изделий можно представить как объединение простейших потоков [4, 5] длительностью t, что в конечном итоге приводит к тому же результату. Тогда эффективную оценку стационарного КГ изделия вычисляют по формуле

$$G_{\text{изделия}} = (1 + V(R+1) / SR)^{-1},$$

где $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N = Nt$ – суммарная наработка всех изделий системы и самой системы (первый вариант), по второму варианту t – наработка системы, состоящей из N изделий (из N объединенных простейших потоков отказов), с суммарной наработкой всех изделий системы $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N = Nt$;

$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_N$ – суммарное время восстановлений (случайная величина) этой системы;

$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_N$ – суммарное число отказов (случайная величина) этой системы ($N = 1$) за время S, а по второму варианту – N $(N > 1)$ изделий за время t.

Пример 7.1. Сложное оборудование в количестве двух штук $N = 2$ было поставлено на опытную эксплуатацию на срок равный одному году с условием, что каждое изделие должно иметь наработку равную 8760 ч. В качестве показателя надежности изделия в ТЗ установлен стационарный коэффициент готовности изделия $K_г = 0{,}97$. В процессе опытной эксплуатации обнаружен отказ. Из-за сложной логистики оборудование простояло на ремонте 500 ч.

Далее рассмотрим два решения примера. Испытаниям соответствует план типа $NB!t(D=R)$, $N=2$.

1) Традиционная эффективная оценка

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ системы составила

$$G_{\text{изделие}} = (1 + V / S)^{-1} = (1 + 500 / (8760+8760))^{-1} = 0{,}972253,$$

что соответствует требованиям ТЗ.

2) С использованием эффективной оценки стационарного КГ $G_2 = (1 + V(R+1) / SR)^{-1}$.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ системы составила

$G_{\text{изделие}} = (1 + V(R+1) / SR)^{-1} = (1 + 2\bullet 500 / (8760+8760))^{-1} = 0{,}946004$, что не соответствует требованиям ТЗ.

Пример 7.2. Сложное оборудование в количестве двух штук $N = 2$ было поставлено на опытную эксплуатацию. Первое изделие суммарно отработало 10000 ч и простояло в ремонте два раза $R = 2$ соответственно 200 и 300 ч. Второе изделие суммарно отработало 20000 ч и простояло в ремонте три раза $R = 3$ соответственно 200, 300 и 400 ч.В качестве показателя надежности изделия в ТЗ установлен стационарный коэффициент готовности изделия $K_г = 0{,}95$.

Далее рассмотрим два решения примера. Испытаниям соответствует план типа $NB!t(D=R)$, $N=2$.

1) Традиционная эффективная оценка

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ системы составила

$G_{изделие} = (1 + V / S)^{-1} = (1 + 1400 / 30000)^{-1} = 0{,}955414$, что соответствует требованиям ТЗ.

2) С использованием эффективной оценки стационарного КГ $G_2 = (1 + V(R+1) / SR)^{-1}$.

Суммарное число отказов сотставило R = 5. Суммарное время восстановлений составило $V = 1400$ ч. Суммарное время работы составило $S = 30000$ ч. По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ системы составила

$G_{изделие} = (1 + V(R+1) / SR)^{-1} = (1 + 1400 \bullet 6 / (5 \bullet 30000))^{-1} = 0{,}94697$, что не соответствует требованиям ТЗ.

7.3. Построение критерия эффективности оценок стационарного коэффициента готовности для плана испытаний типа *NB!R*(*D=R*)

Испытание с длительным временем восстановления $NB!R(D=R)$, $N = 1$ можно представить в виде двух совокупностей испытаний, проводимых по классическим планам NBR (мгновенное воссстановление, $N = 1$) и $NB(D=R)$ (мгновенные отказы, $N = 1$).

Для любого из R отказов системы, состоящей из одного изделия $N = 1$, длительности восстановления и работы не зависят друг от друга и каждая имеет свою плотность распределения соответственно he^{-ht} и $\lambda e^{-\lambda t}$. Зависимость факта появления отказов и, как следствие, восстановлений не влияет на продолжительности восстановления и работы. И, как следствие, независимы и их суммы, т. е. с.в. *S*, *V*. С целью построения математического ожидания *EG* следует знать функцию распределения сумм *S*, *V* и заданное число отказов *R*. Плотность функции вероятности суммы *V* независимых одинаково распределенных случайных времен восстановлений с плотностью распределения he^{-ht}, имеет вид специального распределения Эрланга $\frac{h(hV)^{(d-1)}e^{-hV}}{(d-1)!}$ [4, 5]. Плотность функции вероятности суммы *S* независимых одинаково распределенных случайных наработок до отказа с плотностью распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, тоже имеет вид специального распределения Эрланга $\frac{\lambda(\lambda S)^{(r-1)}e^{-\lambda S}}{(r-1)!}$ [4, 5].

Тогда математическое ожидание оценки *G* стационарного КГ системы рассчитывают по формуле:

$$E\left(G, D=d=r, R=r, \lambda, h\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty G\frac{h(hV)^{(d-1)}e^{-hV}}{(d-1)!}\frac{\lambda(\lambda S)^{(r-1)}e^{-\lambda S}}{(r-1)!}dVdS\,.$$

Аналогично

$$E\left(\left(G-E(G)\right)^2, D=d=r, R=r, \lambda, h\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty \left(G-E(G)\right)^2\frac{h(hV)^{(d-1)}e^{-hV}}{(d-1)!}\frac{\lambda(\lambda S)^{(r-1)}e^{-\lambda S}}{(r-1)!}dVdS\,.$$

Чтобы построить критерий эффективности смещенных оценок стационарного КГ системы, следует просуммировать смещение *A(G)* и дисперсию *B(G)* по всем параметрам выбранных законов распределения (*T*, *H*) и плана испытаний:

$$A\left(G\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\int_{H_1}^{H_2}\int_{T_1}^{T_2}m\left(G\right)dTdH\,, \tag{7.9}$$

$$B\left(G\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\int_{T_1}^{T_2}\int_{H_1}^{H_2}E\left(G-E(G)\right)^2dHdT\,. \tag{7.10}$$

Заметим, что обычно при построении подобных функционалов проводится усреднение, однако в данном случае усреднение приводит к мизерным величинам, поэтому усреднение заменено на суммирование. Непосредственное вычисление функционалов $A(G)$ и $B(G)$ (формулы (7.9) и (7.10)) весьма затруднительно, т. к. требует больших вычислительных мощностей. Поэтому формулы (7.9) и (7.10) следует упростить и привести к более практичному виду соответственно:

$$A_1 = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=4}^{7}\sum_{r=1}^{10} C\left(D=R, R=r, H=10^j, T=10^i\right), \tag{7.11}$$

где $C\left(D=R, R=r, H=10^j, T=10^i\right)=\left(EG-\frac{T}{T+H}\right)^2$,

$$B_1 = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=4}^{7}\sum_{r=1}^{10} F\left(D=R, R=r, H=10^j, T=10^i\right), \tag{7.12}$$

где $F\left(D=R, R=r, H=10^j, T=10^i\right)=E\left(G-E(G)\right)^2$.

В основе сравнения эффективности смещенных оценок СНДО лежит минимизация функционала вида $C(G) = A(G) \bullet B(G)$ на предложенных оценках $G(D=R, R, S, V)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [24, 25].

Результаты подстановки предложенных оценок стационарного КГ изделия в формулы (7.11) и (7.12) для плана испытаний типа $NB!R(D=R)$, $N = 1$ представлены в таблице 7.2. Расчет проводился в системе “Mathcad”. К ранее предложенным оценкам добавлена новая оценка

$$G_4 = \frac{1}{1+\dfrac{V(R+0,5)}{S(R+0,9)}}.$$

Таблица 7.2

Результаты подстановки предложенных оценок стационарного КГ системы в формулы (7.11) и (7.12) для плана испытаний типа *NB!R*(*D*=*R*)

Вид функционала	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1 – суммарное смещение	0,0202	0,1199	0,0325	0,01357
B_1 – суммарная дисперсия	0,469	0,546	0,395	0,443
B_1/A_1	23,2	4,55	12,5	32,6
$C = A_1 \bullet B_1 \bullet 100$	0,947	6,54	1,28	0,695

Из таблицы 7.3 следует, что оценка $G_4 = (1 + V(R+0,5) / S(R+0,9))^{-1}$ в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок является эффективной в классе оценок $G = (1 + V(R+\alpha) / S(R+\beta))^{-1}$.

Заметим, что если число однотипных изделий N, поставленных на испытания, превышает единицу $N > 1$, то в предположении подчинения распределения наработки до отказа экспоненциальному закону (простейший поток отказов [4, 5]), вместо системы, представимой в виде одного изделия $N = 1$ и одного случайного временного отрезка испытаний S_1 системы, следует рассматривать систему, состоящую из $N > 1$ рассосредоточенных однотипных изделий (или систем состоящих из одного изделия) и последовательную случайную временную структуру, как продолжение предыдущей случайной временной структуры системы $S = S_1$, т. е. $S = S_1 + S_2 + \dots + S_N$, состоящую из N случайных временных отрезков испытаний изделий, каждое из которых работает независимо, а наступление событий в виде отказов и восстановлений происходят совместно на суммарном временном интервале. Т. е. систему можно представить в виде одного изделия, которое последовательно испытывают в течении времени $S = S_1 + S_2 + \dots + S_N$. Такое возможно, так как однородный процесс Пуассона является простейшим, для которого выполняются условия: стационарность, отсутствие последействия и ординарность [4, 5]. Тогда оценку стационарного КГ изделия вычисляют по формуле

$G_{изделия} = (1 + V(R+0,5) / S(R+0,9))^{-1}$,

где $S = S_1 + S_2 + \dots + S_N$ – суммарная наработка системы (случайная величина), состоящей из N последовательно испытуемых однотипных изделий;

$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$ – суммарное время восстановлений (случайная величина) этой системы;

$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$ – суммарное нормированное число отказов системы.

Пример 7.3. Сложное оборудование в количестве двух штук $n = 2$ было поставлено на опытную эксплуатацию на срок, который определялся для каждого изделия числом отказов $R = 1$. Отказ первого изделия произошел на 11000 ч и длился 400 ч. Отказ второго изделия произошел на 9000 ч и длился 600 ч. В качестве показателя надежности в ТЗ установлен стационарный КГ, равный *0,955*.

Далее рассмотрим два решения примера. Испытаниям соответствует план типа *NB!R*(*D*=*R*), *N=1*.

1) Традиционная оценка

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ изделия составила

$G_{изделие} = (1 + V / S)^{-1} = (1 + 1000 /20000)^{-1} = 0{,}952381$,

что не соответствует требованиям ТЗ.

2) С использованием эффективной оценки стационарного КГ $G_4 = (1 + V(R+0{,}5) / S(R+0{,}9))^{-1}$.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ изделия составила

$G_{изделия} = (1 + V(R+0{,}5) / S(R+0{,}9))^{-1} = (1 + 1000 \cdot 2{,}5 / (20000 \cdot 2{,}9))^{-1} = 0{,}958678$, что соответствует требованиям ТЗ.

Пример 7.4. Сложное оборудование в количестве двух штук *n = 2* было поставлено на опытную эксплуатацию. Срок первого изделия определялся числом отказов *R = 1*. Отказ первого изделия произошел на 10000 ч и длился 400 ч. Срок второго изделия определялся числом отказов *R = 2*. Отказы второго изделия произошли соответственно на 9000 ч и 11000; и длилися соответственно 300 ч и 700 ч. В качестве показателя надежности в ТЗ установлен стационарный КГ, равный *0,96*.

Далее рассмотрим два решения примера. Испытаниям соответствует план типа *NB!R*(*D*=*R*), *N=2*. Характеристики испытаний составили: R = 3, S = 30000 ч, V = 1400 ч.

1) Традиционная оценка

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ изделия составила

$G_{изделие} = (1 + V / S)^{-1} = (1 + 1400 /30000)^{-1} = 0{,}955414$,

что не соответствует требованиям ТЗ.

2) С использованием эффективной оценки стационарного КГ $G_4 = (1 + V(R+0,5) / S(R+0,9))^{-1}$.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ изделия составила

$G_{изделия} = (1 + V(R+0,5) / S(R+0,9))^{-1} = (1 + 1400•3,5 / (30000•3,9))^{-1} \approx 0,96$, что соответствует требованиям ТЗ.

Выводы к разделу 7

1) Построены простые критерии эффективности оценок стационарного КГ системы для различных планов испытаний с длительным временем восстановления (случай $N \geq 1$).

2) Оценка $G_2 = (1 + V(R + 1) / S)^{-1}$ является условно эффективной среди предложенных для плана испытаний типа $NB!t(D=R)$.

3) Оценка $G_4 = (1 + V(R+0,5) / S(R+0,9))^{-1}$ является эффективной среди предложенных для плана испытаний типа $NB!R(D=R)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в книге результаты являются прямым отражением ускоренного развития теории надежности за последние десятилетия, которое основано не в последнюю очередь и на работах российских ученых. В классе смещённых оценок получены эффективные оценки показателей надежности для различных планов испытаний: биномиального плана испытаний, плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением отказавших изделий, плана с добавлением и специальных определительных планов испытаний для КГ. Полученные оценки показателей надежности имеют направленность практического применения при испытаниях и эксплуатации изделий различного назначения, в процессе которых отказы не возникали.

Сформулирован общий подход к построению критерия эффективности смещенных оценок. Для различных планов испытаний построены критерии эффективности, которые позволяют однозначно определить эффективную оценку из числа предложенных оценок. Однако задача, построения (получения) эффективных оценок (смещенных и нет) с хорошими статистическими свойствами, остается по прежнему основной в теории надежности и ждет своего решения. К приведенным результатам не следует относиться как к догмам. Правильным будет – осуществление поиска новых подходов получения эффективных оценок.

Послесловие

Новые знания определяют развитие в начале использования и сдерживают его в конце. Чтобы определять развитие, следует отказаться от старых догм и приобрести новые.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Обозначения:

N – число испытуемых однотипных изделий ($N = n$ – число первоначально выставленных изделий);

τ – наработка (одинаковая для каждого изделия);

B – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается;

Б – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний не восстанавливается;

NБτ – тип плана – биномиальные испытания;

NВτ – тип плана – испытания с ограниченным временем испытаний τ и восстановлением;

T_0 – параметр экспоненциального закона распределения – средняя наработка до отказа;

$P_0(*)$ – расчетная ВБР за заданное время;

$\hat{P}$ – оценка ВБР за заданное время;

R – случайное число отказов;

r – наблюдаемое число отказов;

$\Delta = N\tau/T_0$ – параметр пуассоновского распределения;

$S(R = r, \tau, s_i)$ – суммарная наработка;

s_i – моменты отказов, $i = 1,2, \ldots, r$;

p – вероятность отказа объекта за одно испытание;

$b_N(r)$ – вероятность события получения r отказов группы из N объектов биномиального плана испытаний;

$\hat{p}(R, N) = R/N$ – несмещенная и эффективная оценка вероятности отказа одного изделия для биномиального плана;

E – символ математического ожидания;

q – плотность распределения априорная;

θ – параметр некоторого распределения;

$\hat{\theta}$ – оценка параметра некоторого распределения;

Q – априорное распределение с плотностью q;

Q_{R} – апосториорное распределение;

$\hat{Q}_{\mathrm{R}}$ – байесовская оценка, соответствующая априорному распределению с плотностью q;

t – реализация случайной величины T_0;

$A(\hat{\theta})$ – некоторый функционал;

Δ – шаг суммирования;

$\hat{v}$ – центрируемая оценка;

$P_{\mathrm{n}\Sigma}$ – вероятностная функция;

γ – доверительная вероятность;

α – уровень значимости;

β – вероятность $> 0{,}5$;

$\hat{T}$ – некоторая оценка СНДО;

$C^k{}_n$ – число сочетаний из n элементов по k элементов.

Сокращения:

СНДО – средняя наработка до отказа;

ВБР – вероятность безотказной работы;

НДГ – нижняя доверительная граница;

ВДГ – верхняя доверительная граница;

ГПСС – гамма-процентный срок сохраняемости;

ГПНДО – гамма-процентная наработка до отказа;

ГПР – гамма-процентный ресурс;

ОГПР – остаточный гамма-процентный ресурс;

з.р. – закон распределения;

с.в. – случайная величина;

ЭРИ –электрорадиоизделия;

ТЗ – техническое задание.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Боровков А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков. Новосибирск: Издательство Института математики, 1997. 772 с.

2. Шуленин В. П. Математическая статистика. Часть 1. Параметрическая статистика / В. П. Шуленин. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 540 с.

3. Воинов В. Г. Несмещенные оценки и их применение / В. Г. Воинов, М. С. Никулин. М.: Наука, 1989. 440 с.

4. Гнеденко Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. М.: Наука, 1965. 524 с.

5. Вопросы математической теории надежности / Е. Ю. Барзилович, Ю. К. Беляев, В. А. Каштанов и др.; под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 376 с.

6. Савчук, В. П. Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов / В. П. Савчук. М.: Наука, 1989. 328 с.

7. Ясногородский Р.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. Санкт-Петербург: Наукоемкие технологии, 2019. 320 с.

8. Михайлов В. С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность и контроль качества. 1988. №9. С. 6–11.

9. Михайлов В.С., Юрков Н.К. Интегральные оценки в теории надежности. Введение и основные результаты. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2020. — 149 с.

10. Михайлов В. С. План испытаний с добавлением. Эффективные оценки показателей надежности / В. С. Михайлов // Надежность. 2020. № 1. С. 13 — 20.

11. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебн. пособие. – 2-е изд., исправл. и дополн. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 496 с.

12. Михайлов В. С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов //Надежность. 2016. № 4. С. 40–42.

13. Михайлов В. С. Оценка вероятности безотказной работы по результатам испытаний, не давших отказы / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2017. №2 (18). С. 62–66.

14. Михайлов В. С. Исследование интегральных оценок потока отказов / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2018. № 2 (22). С. 3–10.

15. Михайлов В. С. Неявные оценки для плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением изделий / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 2 (26). С. 35–42.

16. Михайлов В. С. Исследование интегральных оценок / В. С. Михайлов // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. 2018. Т. 1. С. 184–187.

17. Михайлов В. С. Статистическое оценивание остаточного гамма-процентного ресурса космической техники по результатам испытаний, не давших отказы и проводимых по плану с ограниченным временем и восстановлением / В. С. Михайлов // Космическая техника и технологии. 2019. № 4. С. 77–84.

18. Михайлов В. С. Неявные оценки для плана испытаний типа NБτ / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. № 1(21). С. 64–71.

19. Михайлов В. С. Оценки показателей надежности для безотказных испытаний, проводимых по биномиальному плану / В. С. Михайлов Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. 2018. № 4 (24). С. 29–39.

20. Юрков Н. К. Частный случай нахождения эффективных оценок / Н. К. Юрков В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 2 (26). С. 103–113.

21. Юрков Н. К. Оценка и прогнозирование остаточного ресурса по результатам биномиальных испытаний, не давших отказы / Н. К. Юрков, В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 3 (27). С. 62–69.

22. Михайлов В. С. Оценка гамма-процентного срока для биномиального плана испытаний / В. С. Михайлов // Надежность. 2019. № 2. С. 18–21.

23. Михайлов В. С. План испытаний с добавлением / В. С. Михайлов // Надежность. 2019. № 3. С. 12–20.

24. Михайлов В.С. Критерий эффективности смещенных оценок. Новый взгляд на старые проблемы. //Надежность. 2022. № 1. С. 30 — 37.

25. Михайлов В.С. Улучшение эффективности оценок различных планов испытаний однородной продукции. //Надежность. 2022. № 2. С. 30 — 37.

26. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. М.: Наука, 1966. 228 с.

27. ГОСТ 27.002–2015. Надежность в технике. Термины и определения. М. : Стандартинформ, 2016. 23 с.

28. ГОСТ Р 50779.26–2007 Статистические методы. Точечные оценки, доверительные, предикционные и толерантные интервалы для экспоненциального распределения. М.: Стандартинформ, 2008. 27 с.

29. ГОСТ Р ИСО 3534-2 – 2019 Статистические методы. Словарь и условные обозначения. Часть 2. Прикладная статистика. М.: Стандартинформ, 2019. 104 с.

30. Михайлов, В. С. Исследование оценок на основе интегрального и байесовского подходов / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2018. №1 (21). С. 28–39.

31. Крупкина, Т. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 2. Электронный курс лекций / Т. В. Крупкина. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. 237 с.

32. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: учебник для вузов / А. И. Кострикин. М.: МЦНМО, 2004. 272 с.

33. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969. Т. 1. 607 с.

34. РД 50-690–89. Надежность в технике. Методы оценки показателей надежности по экспериментальным данным. М.: Госстандарт, 1990. 132 с.

35. Швецова-Шиловская, Т. Н. Расчетно-эксперементальный метод оценки показателей надежности технологического комплекса на основе результатов его испытаний с учетом априорной информации о надежности по результатам испытаний составных частей / Т. Н. Швецова-Шиловская, Т. В. Громова, Ф. П. Соколов, В. Г. Ратушенко // Надежность. 2013. № 2, с. 80–92.

36. Судаков, Р. С. К вопросу об учете предварительной информации в схеме биномиальных испытаний / Р. С. Судаков, А. Н. Чеканов // Надежность и контроль качества. 1974. № 1, с. 24–28.

37. Михайлов, В.С., Юрков Н.К. Составные байесовские оценки. // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 4 (28). С. 118-126.

38. Юрков, Н.К., Михайлов, В.С. Анализ возможностей по снижению объема испытаний на надежность. // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 4 (28). С. 149-156.

39. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. М. : Советское радио, 1967. 299 с.

40. Рудковский Д.М., Михайлов В.С. Анализ смещения оценок стационарного коэффициента готовности для различных планов испытаний. //Надежность. 2021. № 1. С. 17 — 22.

41. Белецкий Б.Р. Теория надежности радиотехнических систем (математические основы): Учебное пособие для вузов. М. : Советское радио, 1978. 264 с.

42. Михайлов В.С., Рудковский Д.М. Анализ решения проблемы оценки контрольных уровней показателей надежности изделий космической техники по результатам испытаний, не давших отказы. // Космонавтика и ракетостроение. 2020. № 1 (112). С. 134 — 143.

43. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с.

44. Храмов С.М., Рудковский Д.М., Михайлов В.С. Анализ применимости байесовских оценок при решении практических задач надежности, использующих модели, предназначенные для групп однородной продукции. //Надежность. 2022. № 3. С. 29 — 34.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

План испытаний с ограниченным временем и восстановлением. Количественные значения неявно заданной оценки $\hat{\boldsymbol{\Delta}}$

Таблица А.1 – Количественные значения неявно заданной оценки $\hat{\boldsymbol{\Delta}}$

R	$\beta = 0{,}5$
0	0,693148
1	1,678349
2	2,674061
3	3,672062
4	4,670910
5	5,670158
6	6,669640
7	7,669250
8	8,668953
9	9,668716
10	10,668526

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Биномиальный план испытаний. Количественные значения неявно заданной оценки $\tilde{v}(\boldsymbol{\beta})$

Таблица А.1 – Количественные значения неявно заданной оценки $\tilde{v}_{\beta}$

R	n	$\tilde{v}_{\beta=0,5}$	$\tilde{v}_{\beta=0,6}$	$\tilde{v}_{\beta=0,81}$
0	1	0,500000	0,400000	0,19
0	2	0,292893	0,225403	0,1
1	2	0,707031	0,632446	0,435791
0	3	0,206299	0,156567	0,06783
1	3	0,500000	0,432861	0,278809
2	3	0,793457	0,736328	0,574707
0	4	0,159104	0,119888	0,051317
1	4	0,384766	0,329163	0,205933
2	4	0,614258	0,555420	0,40918
3	4	0,840881	0,795166	0,660156
0	5	0,129449	0,097120	0,041268
1	5	0,313721	0,265564	0,16333
2	5	0,500000	0,445313	0,31958
3	5	0,686157	0,635010	0,501953
4	5	0,870544	0,832520	0,717285
0	6	0,109101	0,081614	0,034511
1	6	0,264404	0,222534	0,135498
2	6	0,421387	0,373047	0,261719
3	6	0,578125	0,529175	0,407227
4	6	0,735535	0,690552	0,570313
5	6	0,890869	0,857422	0,758179
0	7	0,094276	0,070376	0,029654
1	7	0,226563	0,191528	0,115723
2	7	0,364014	0,320557	0,222656
3	7	0,500000	0,453857	0,34375
4	7	0,635864	0,589844	0,476563
5	7	0,771484	0,731445	0,62207
6	7	0,905701	0,877197	0,788574
0	8	0,082996	0,061857	0,025996
1	8	0,201111	0,168152	0,100586
2	8	0,320313	0,281067	0,19397
3	8	0,439941	0,396484	0,297607
4	8	0,559814	0,516479	0,410278
5	8	0,679443	0,638184	0,531494
6	8	0,798828	0,762878	0,663086
7	8	0,916992	0,891724	0,8125
0	9	0,074125	0,055178	0,023141
1	9	0,179565	0,149841	0,0896
2	9	0,286133	0,250000	0,171387
3	9	0,393066	0,353516	0,262573

R	n	$\tilde{v}_{\beta=0,5}$	$\tilde{v}_{\beta=0,6}$	$\tilde{v}_{\beta=0,81}$
4	9	0,500000	0,458984	0,360352
5	9	0,606445	0,562500	0,464966
6	9	0,713745	0,675781	0,576172
7	9	0,820374	0,787720	0,696533
8	9	0,925873	0,903198	0,831055
0	10	0,066967	0,049800	0,020852
1	10	0,162262	0,135132	0,080566
2	10	0,258545	0,225464	0,15387
3	10	0,354980	0,318359	0,234863
4	10	0,451660	0,412109	0,321289
5	10	0,547852	0,509277	0,413574
6	10	0,644897	0,606995	0,509766
7	10	0,741211	0,706299	0,613281
8	10	0,837708	0,807617	0,723755
9	10	0,932983	0,912415	0,846924

ПРИЛОЖЕНИЕ В

План испытаний с добавлением. Количественные значения односторонних доверительных границ

Таблица В.1 – Количественные значения односторонних доверительных границ

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
0	0	0	3	0,05	0,631	0,5	0,206	0,95	0,017
0	0	0	3	0,1	0,536	0,5	0,206	0,9	0,034
0	0	0	3	0,15	0,438	0,5	0,206	0,85	0,051
0	0	0	3	0,2	0,415	0,5	0,206	0,8	0,072
0	0	0	3	0,25	0,369	0,5	0,206	0,75	0,091
0	0	0	3	0,3	0,331	0,5	0,206	0,7	0,112
1	1	0	3	0,05	0,751	0,5	0,385	0,95	0,094
1	1	0	3	0,1	0,679	0,5	0,385	0,9	0,141
1	1	0	3	0,15	0,626	0,5	0,385	0,85	0,179
1	1	0	3	0,2	0,582	0,5	0,385	0,8	0,212
1	1	0	3	0,25	0,543	0,5	0,385	0,75	0,243
1	1	0	3	0,3	0,508	0,5	0,385	0,7	0,272
2	1	1	3	0,05	0,864	0,5	0,500	0,95	0,135
2	1	1	3	0,1	0,804	0,5	0,500	0,9	0,196
2	1	1	3	0,15	0,755	0,5	0,500	0,85	0,244
2	1	1	3	0,2	0,711	0,5	0,500	0,8	0,287
2	1	1	3	0,25	0,674	0,5	0,500	0,75	0,326
2	1	1	3	0,3	0,637	0,5	0,500	0,7	0,359
2	2	0	3	0,05	0,788	0,5	0,445	0,95	0,128
2	2	0	3	0,1	0,724	0,5	0,445	0,9	0,182
2	2	0	3	0,15	0,676	0,5	0,445	0,85	0,225
2	2	0	3	0,2	0,635	0,5	0,445	0,8	0,262
2	2	0	3	0,25	0,599	0,5	0,445	0,75	0,296
2	2	0	3	0,3	0,564	0,5	0,445	0,7	0,328
3	2	1	3	0,05	0,919	0,5	0,670	0,95	0,312
3	2	1	3	0,1	0,882	0,5	0,670	0,9	0,388
3	2	1	3	0,15	0,850	0,5	0,670	0,85	0,442
3	2	1	3	0,2	0,822	0,5	0,670	0,8	0,484
3	2	1	3	0,25	0,796	0,5	0,670	0,75	0,522
3	2	1	3	0,3	0,770	0,5	0,670	0,7	0,557
3	3	0	3	0,05	0,795	0,5	0,454	0,95	0,130
3	3	0	3	0,1	0,732	0,5	0,454	0,9	0,186
3	3	0	3	0,15	0,685	0,5	0,454	0,85	0,230
3	3	0	3	0,2	0,644	0,5	0,454	0,8	0,268
3	3	0	3	0,25	0,608	0,5	0,454	0,75	0,302
3	3	0	3	0,3	0,575	0,5	0,454	0,7	0,335
0	0	0	4	0,05	0,523	0,5	0,159	0,95	0,013
0	0	0	4	0,1	0,438	0,5	0,159	0,9	0,026
0	0	0	4	0,15	0,377	0,5	0,159	0,85	0,040

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
0	0	0	4	0,2	0,331	0,5	0,159	0,8	0,054
0	0	0	4	0,25	0,293	0,5	0,159	0,75	0,069
0	0	0	4	0,3	0,260	0,5	0,159	0,7	0,085
1	1	0	4	0,05	0,657	0,5	0,314	0,95	0,076
1	1	0	4	0,1	0,582	0,5	0,314	0,9	0,112
1	1	0	4	0,15	0,532	0,5	0,314	0,85	0,142
1	1	0	4	0,2	0,488	0,5	0,314	0,8	0,169
1	1	0	4	0,25	0,454	0,5	0,314	0,75	0,194
1	1	0	4	0,3	0,422	0,5	0,314	0,7	0,218
2	1	1	4	0,05	0,751	0,5	0,385	0,95	0,094
2	1	1	4	0,1	0,679	0,5	0,385	0,9	0,141
2	1	1	4	0,15	0,626	0,5	0,385	0,85	0,179
2	1	1	4	0,2	0,582	0,5	0,385	0,8	0,212
2	1	1	4	0,25	0,543	0,5	0,385	0,75	0,243
2	1	1	4	0,3	0,508	0,5	0,385	0,7	0,272
2	2	0	4	0,05	0,708	0,5	0,380	0,95	0,109
2	2	0	4	0,1	0,641	0,5	0,380	0,9	0,155
2	2	0	4	0,15	0,593	0,5	0,380	0,85	0,191
2	2	0	4	0,2	0,554	0,5	0,380	0,8	0,222
2	2	0	4	0,25	0,520	0,5	0,380	0,75	0,251
2	2	0	4	0,3	0,489	0,5	0,380	0,7	0,278
3	2	1	4	0,05	0,835	0,5	0,549	0,95	0,229
3	2	1	4	0,1	0,784	0,5	0,549	0,9	0,292
3	2	1	4	0,15	0,745	0,5	0,549	0,85	0,338
3	2	1	4	0,2	0,712	0,5	0,549	0,8	0,376
3	2	1	4	0,25	0,681	0,5	0,549	0,75	0,410
3	2	1	4	0,3	0,653	0,5	0,549	0,7	0,441
4	2	2	4	0,05	0,902	0,5	0,614	0,95	0,249
4	2	2	4	0,1	0,857	0,5	0,614	0,9	0,320
4	2	2	4	0,15	0,821	0,5	0,614	0,85	0,373
4	2	2	4	0,2	0,788	0,5	0,614	0,8	0,417
4	2	2	4	0,25	0,757	0,5	0,614	0,75	0,456
4	2	2	4	0,3	0,728	0,5	0,614	0,7	0,492
3	3	0	4	0,05	0,723	0,5	0,397	0,95	0,112
3	3	0	4	0,1	0,659	0,5	0,397	0,9	0,161
3	3	0	4	0,15	0,612	0,5	0,397	0,85	0,199
3	3	0	4	0,2	0,573	0,5	0,397	0,8	0,232
3	3	0	4	0,25	0,539	0,5	0,397	0,75	0,263
3	3	0	4	0,3	0,507	0,5	0,397	0,7	0,291
4	3	1	4	0,05	0,861	0,5	0,609	0,95	0,303
4	3	1	4	0,1	0,818	0,5	0,609	0,9	0,367
4	3	1	4	0,15	0,784	0,5	0,609	0,85	0,412
4	3	1	4	0,2	0,755	0,5	0,609	0,8	0,449
4	3	1	4	0,25	0,727	0,5	0,609	0,75	0,482
4	3	1	4	0,3	0,704	0,5	0,609	0,7	0,510
4	4	0	4	0,05	0,726	0,5	0,398	0,95	0,113
4	4	0	4	0,1	0,661	0,5	0,398	0,9	0,161
4	4	0	4	0,15	0,615	0,5	0,398	0,85	0,199
4	4	0	4	0,2	0,575	0,5	0,398	0,8	0,233

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
4	4	0	4	0,25	0,541	0,5	0,398	0,75	0,263
4	4	0	4	0,3	0,510	0,5	0,398	0,7	0,292
0	0	0	5	0,05	0,451	0,5	0,129	0,95	0,010
0	0	0	5	0,1	0,367	0,5	0,129	0,9	0,021
0	0	0	5	0,15	0,316	0,5	0,129	0,85	0,032
0	0	0	5	0,2	0,275	0,5	0,129	0,8	0,044
0	0	0	5	0,25	0,234	0,5	0,129	0,75	0,056
0	0	0	5	0,3	0,214	0,5	0,129	0,7	0,069
1	1	0	5	0,05	0,582	0,5	0,264	0,95	0,063
1	1	0	5	0,1	0,510	0,5	0,264	0,9	0,093
1	1	0	5	0,15	0,461	0,5	0,264	0,85	0,117
1	1	0	5	0,2	0,422	0,5	0,264	0,8	0,140
1	1	0	5	0,25	0,389	0,5	0,264	0,75	0,161
1	1	0	5	0,3	0,360	0,5	0,264	0,7	0,182
2	1	1	5	0,05	0,657	0,5	0,314	0,95	0,076
2	1	1	5	0,1	0,582	0,5	0,314	0,9	0,112
2	1	1	5	0,15	0,532	0,5	0,314	0,85	0,142
2	1	1	5	0,2	0,488	0,5	0,314	0,8	0,169
2	1	1	5	0,25	0,454	0,5	0,314	0,75	0,194
2	1	1	5	0,3	0,422	0,5	0,314	0,7	0,218
2	2	0	5	0,05	0,640	0,5	0,332	0,95	0,095
2	2	0	5	0,1	0,574	0,5	0,332	0,9	0,135
2	2	0	5	0,15	0,528	0,5	0,332	0,85	0,166
2	2	0	5	0,2	0,491	0,5	0,332	0,8	0,193
2	2	0	5	0,25	0,459	0,5	0,332	0,75	0,218
2	2	0	5	0,3	0,430	0,5	0,332	0,7	0,242
3	2	1	5	0,05	0,754	0,5	0,462	0,95	0,180
3	2	1	5	0,1	0,698	0,5	0,462	0,9	0,233
3	2	1	5	0,15	0,656	0,5	0,462	0,85	0,272
3	2	1	5	0,2	0,621	0,5	0,462	0,8	0,306
3	2	1	5	0,25	0,590	0,5	0,462	0,75	0,335
3	2	1	5	0,3	0,563	0,5	0,462	0,7	0,363
4	2	2	5	0,05	0,811	0,5	0,500	0,95	0,189
4	2	2	5	0,1	0,753	0,5	0,500	0,9	0,247
4	2	2	5	0,15	0,710	0,5	0,500	0,85	0,290
4	2	2	5	0,2	0,673	0,5	0,500	0,8	0,326
4	2	2	5	0,25	0,625	0,5	0,500	0,75	0,359
4	2	2	5	0,3	0,610	0,5	0,500	0,7	0,390
3	3	0	5	0,05	0,664	0,5	0,355	0,95	0,101
3	3	0	5	0,1	0,600	0,5	0,355	0,9	0,144
3	3	0	5	0,15	0,554	0,5	0,355	0,85	0,177
3	3	0	5	0,2	0,516	0,5	0,355	0,8	0,207
3	3	0	5	0,25	0,485	0,5	0,355	0,75	0,234
3	3	0	5	0,3	0,456	0,5	0,355	0,7	0,260
4	3	1	5	0,05	0,795	0,5	0,535	0,95	0,256
4	3	1	5	0,1	0,742	0,5	0,535	0,9	0,312
4	3	1	5	0,15	0,710	0,5	0,535	0,85	0,353
4	3	1	5	0,2	0,679	0,5	0,535	0,8	0,386
4	3	1	5	0,25	0,652	0,5	0,535	0,75	0,415

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
4	3	1	5	0,3	0,627	0,5	0,535	0,7	0,442
5	3	2	5	0,05	0,875	0,5	0,641	0,95	0,330
5	3	2	5	0,1	0,835	0,5	0,641	0,9	0,398
5	3	2	5	0,15	0,804	0,5	0,641	0,85	0,445
5	3	2	5	0,2	0,777	0,5	0,641	0,8	0,480
5	3	2	5	0,25	0,753	0,5	0,641	0,75	0,515
5	3	2	5	0,3	0,729	0,5	0,641	0,7	0,543
4	4	0	5	0,05	0,670	0,5	0,359	0,95	0,101
4	4	0	5	0,1	0,606	0,5	0,359	0,9	0,144
4	4	0	5	0,15	0,561	0,5	0,359	0,85	0,179
4	4	0	5	0,2	0,524	0,5	0,359	0,8	0,209
4	4	0	5	0,25	0,491	0,5	0,359	0,75	0,236
4	4	0	5	0,3	0,462	0,5	0,359	0,7	0,262
5	4	1	5	0,05	0,805	0,5	0,557	0,95	0,275
5	4	1	5	0,1	0,761	0,5	0,557	0,9	0,333
5	4	1	5	0,15	0,727	0,5	0,557	0,85	0,375
5	4	1	5	0,2	0,697	0,5	0,557	0,8	0,408
5	4	1	5	0,25	0,671	0,5	0,557	0,75	0,438
5	4	1	5	0,3	0,647	0,5	0,557	0,7	0,464
5	5	0	5	0,05	0,671	0,5	0,360	0,95	0,101
5	5	0	5	0,1	0,607	0,5	0,360	0,9	0,144
5	5	0	5	0,15	0,562	0,5	0,360	0,85	0,179
5	5	0	5	0,2	0,524	0,5	0,360	0,8	0,209
5	5	0	5	0,25	0,492	0,5	0,360	0,75	0,236
5	5	0	5	0,3	0,462	0,5	0,360	0,7	0,262
0	0	0	6	0,05	0,393	0,5	0,109	0,95	0,008
0	0	0	6	0,1	0,319	0,5	0,109	0,9	0,017
0	0	0	6	0,15	0,271	0,5	0,109	0,85	0,027
0	0	0	6	0,2	0,235	0,5	0,109	0,8	0,036
0	0	0	6	0,25	0,206	0,5	0,109	0,75	0,047
0	0	0	6	0,3	0,182	0,5	0,109	0,7	0,058
1	1	0	6	0,05	0,521	0,5	0,227	0,95	0,053
1	1	0	6	0,1	0,452	0,5	0,227	0,9	0,079
1	1	0	6	0,15	0,407	0,5	0,227	0,85	0,100
1	1	0	6	0,2	0,371	0,5	0,227	0,8	0,120
1	1	0	6	0,25	0,341	0,5	0,227	0,75	0,138
1	1	0	6	0,3	0,314	0,5	0,227	0,7	0,156
2	1	1	6	0,05	0,582	0,5	0,264	0,95	0,063
2	1	1	6	0,1	0,510	0,5	0,264	0,9	0,093
2	1	1	6	0,15	0,461	0,5	0,264	0,85	0,117
2	1	1	6	0,2	0,422	0,5	0,264	0,8	0,140
2	1	1	6	0,25	0,389	0,5	0,264	0,75	0,161
2	1	1	6	0,3	0,360	0,5	0,264	0,7	0,182
2	2	0	6	0,05	0,584	0,5	0,295	0,95	0,085
2	2	0	6	0,1	0,520	0,5	0,295	0,9	0,119
2	2	0	6	0,15	0,476	0,5	0,295	0,85	0,147
2	2	0	6	0,2	0,441	0,5	0,295	0,8	0,171
2	2	0	6	0,25	0,411	0,5	0,295	0,75	0,193
2	2	0	6	0,3	0,385	0,5	0,295	0,7	0,214

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
3	2	1	6	0,05	0,686	0,5	0,397	0,95	0,149
3	2	1	6	0,1	0,626	0,5	0,397	0,9	0,193
3	2	1	6	0,15	0,584	0,5	0,397	0,85	0,228
3	2	1	6	0,2	0,549	0,5	0,397	0,8	0,257
3	2	1	6	0,25	0,519	0,5	0,397	0,75	0,283
3	2	1	6	0,3	0,484	0,5	0,397	0,7	0,307
4	2	2	6	0,05	0,729	0,5	0,421	0,95	0,153
4	2	2	6	0,1	0,667	0,5	0,421	0,9	0,201
4	2	2	6	0,15	0,622	0,5	0,421	0,85	0,237
4	2	2	6	0,2	0,585	0,5	0,421	0,8	0,269
4	2	2	6	0,25	0,553	0,5	0,421	0,75	0,297
4	2	2	6	0,3	0,524	0,5	0,421	0,7	0,323
3	3	0	6	0,05	0,609	0,5	0,322	0,95	0,092
3	3	0	6	0,1	0,551	0,5	0,322	0,9	0,130
3	3	0	6	0,15	0,508	0,5	0,322	0,85	0,161
3	3	0	6	0,2	0,469	0,5	0,322	0,8	0,188
3	3	0	6	0,25	0,442	0,5	0,322	0,75	0,212
3	3	0	6	0,3	0,415	0,5	0,322	0,7	0,235
4	3	1	6	0,05	0,735	0,5	0,475	0,95	0,221
4	3	1	6	0,1	0,683	0,5	0,475	0,9	0,271
4	3	1	6	0,15	0,646	0,5	0,475	0,85	0,307
4	3	1	6	0,2	0,615	0,5	0,475	0,8	0,337
4	3	1	6	0,25	0,588	0,5	0,475	0,75	0,363
4	3	1	6	0,3	0,563	0,5	0,475	0,7	0,388
5	3	2	6	0,05	0,808	0,5	0,554	0,95	0,267
5	3	2	6	0,1	0,760	0,5	0,554	0,9	0,325
5	3	2	6	0,15	0,725	0,5	0,554	0,85	0,367
5	3	2	6	0,2	0,696	0,5	0,554	0,8	0,402
5	3	2	6	0,25	0,669	0,5	0,554	0,75	0,432
5	3	2	6	0,3	0,644	0,5	0,554	0,7	0,459
6	3	3	6	0,05	0,847	0,5	0,578	0,95	0,270
6	3	3	6	0,1	0,799	0,5	0,578	0,9	0,333
6	3	3	6	0,15	0,763	0,5	0,578	0,85	0,378
6	3	3	6	0,2	0,731	0,5	0,578	0,8	0,415
6	3	3	6	0,25	0,688	0,5	0,578	0,75	0,447
6	3	3	6	0,3	0,677	0,5	0,578	0,7	0,476
4	4	0	6	0,05	0,624	0,5	0,329	0,95	0,092
4	4	0	6	0,1	0,562	0,5	0,329	0,9	0,132
4	4	0	6	0,15	0,518	0,5	0,329	0,85	0,163
4	4	0	6	0,2	0,483	0,5	0,329	0,8	0,191
4	4	0	6	0,25	0,452	0,5	0,329	0,75	0,216
4	4	0	6	0,3	0,425	0,5	0,329	0,7	0,240
5	4	1	6	0,05	0,756	0,5	0,506	0,95	0,247
5	4	1	6	0,1	0,707	0,5	0,506	0,9	0,299
5	4	1	6	0,15	0,671	0,5	0,506	0,85	0,337
5	4	1	6	0,2	0,642	0,5	0,506	0,8	0,367
5	4	1	6	0,25	0,615	0,5	0,506	0,75	0,395
5	4	1	6	0,3	0,592	0,5	0,506	0,7	0,419
6	4	2	6	0,05	0,840	0,5	0,623	0,95	0,359

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
6	4	2	6	0,1	0,801	0,5	0,623	0,9	0,416
6	4	2	6	0,15	0,771	0,5	0,623	0,85	0,456
6	4	2	6	0,2	0,746	0,5	0,623	0,8	0,488
6	4	2	6	0,25	0,723	0,5	0,623	0,75	0,515
6	4	2	6	0,3	0,702	0,5	0,623	0,7	0,540
5	5	0	6	0,05	0,626	0,5	0,330	0,95	0,092
5	5	0	6	0,1	0,564	0,5	0,330	0,9	0,132
5	5	0	6	0,15	0,520	0,5	0,330	0,85	0,163
5	5	0	6	0,2	0,485	0,5	0,330	0,8	0,191
5	5	0	6	0,25	0,453	0,5	0,330	0,75	0,216
5	5	0	6	0,3	0,426	0,5	0,330	0,7	0,238
6	5	1	6	0,05	0,762	0,5	0,513	0,95	0,250
6	5	1	6	0,1	0,713	0,5	0,513	0,9	0,304
6	5	1	6	0,15	0,678	0,5	0,513	0,85	0,342
6	5	1	6	0,2	0,649	0,5	0,513	0,8	0,374
6	5	1	6	0,25	0,623	0,5	0,513	0,75	0,401
6	5	1	6	0,3	0,599	0,5	0,513	0,7	0,426
6	6	0	6	0,05	0,625	0,5	0,330	0,95	0,092
6	6	0	6	0,1	0,564	0,5	0,330	0,9	0,132
6	6	0	6	0,15	0,521	0,5	0,330	0,85	0,163
6	6	0	6	0,2	0,485	0,5	0,330	0,8	0,191
6	6	0	6	0,25	0,454	0,5	0,330	0,75	0,216
6	6	0	6	0,3	0,426	0,5	0,330	0,7	0,240
0	0	0	7	0,05	0,348	0,5	0,094	0,95	0,007
0	0	0	7	0,1	0,280	0,5	0,094	0,9	0,015
0	0	0	7	0,15	0,237	0,5	0,094	0,85	0,023
0	0	0	7	0,2	0,205	0,5	0,094	0,8	0,031
0	0	0	7	0,25	0,172	0,5	0,094	0,75	0,040
0	0	0	7	0,3	0,158	0,5	0,094	0,7	0,050
1	1	0	7	0,05	0,469	0,5	0,201	0,95	0,046
1	1	0	7	0,1	0,375	0,5	0,201	0,9	0,069
1	1	0	7	0,15	0,363	0,5	0,201	0,85	0,087
1	1	0	7	0,2	0,330	0,5	0,201	0,8	0,104
1	1	0	7	0,25	0,301	0,5	0,201	0,75	0,121
1	1	0	7	0,3	0,279	0,5	0,201	0,7	0,136
2	1	1	7	0,05	0,521	0,5	0,227	0,95	0,053
2	1	1	7	0,1	0,452	0,5	0,227	0,9	0,079
2	1	1	7	0,15	0,407	0,5	0,227	0,85	0,100
2	1	1	7	0,2	0,371	0,5	0,227	0,8	0,120
2	1	1	7	0,25	0,341	0,5	0,227	0,75	0,138
2	1	1	7	0,3	0,314	0,5	0,227	0,7	0,156
2	2	0	7	0,05	0,536	0,5	0,266	0,95	0,077
2	2	0	7	0,1	0,475	0,5	0,266	0,9	0,107
2	2	0	7	0,15	0,433	0,5	0,266	0,85	0,132
2	2	0	7	0,2	0,400	0,5	0,266	0,8	0,154
2	2	0	7	0,25	0,372	0,5	0,266	0,75	0,173
2	2	0	7	0,3	0,348	0,5	0,266	0,7	0,192
3	2	1	7	0,05	0,625	0,5	0,348	0,95	0,126
3	2	1	7	0,1	0,566	0,5	0,348	0,9	0,165

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
3	2	1	7	0,15	0,524	0,5	0,348	0,85	0,195
3	2	1	7	0,2	0,491	0,5	0,348	0,8	0,221
3	2	1	7	0,25	0,462	0,5	0,348	0,75	0,244
3	2	1	7	0,3	0,436	0,5	0,348	0,7	0,266
4	2	2	7	0,05	0,659	0,5	0,364	0,95	0,129
4	2	2	7	0,1	0,596	0,5	0,364	0,9	0,169
4	2	2	7	0,15	0,552	0,5	0,364	0,85	0,199
4	2	2	7	0,2	0,517	0,5	0,364	0,8	0,228
4	2	2	7	0,25	0,486	0,5	0,364	0,75	0,253
4	2	2	7	0,3	0,458	0,5	0,364	0,7	0,275
3	3	0	7	0,05	0,569	0,5	0,295	0,95	0,084
3	3	0	7	0,1	0,510	0,5	0,295	0,9	0,120
3	3	0	7	0,15	0,468	0,5	0,295	0,85	0,148
3	3	0	7	0,2	0,435	0,5	0,295	0,8	0,173
3	3	0	7	0,25	0,407	0,5	0,295	0,75	0,195
3	3	0	7	0,3	0,382	0,5	0,295	0,7	0,216
4	3	1	7	0,05	0,681	0,5	0,426	0,95	0,193
4	3	1	7	0,1	0,628	0,5	0,426	0,9	0,238
4	3	1	7	0,15	0,590	0,5	0,426	0,85	0,271
4	3	1	7	0,2	0,560	0,5	0,426	0,8	0,298
4	3	1	7	0,25	0,534	0,5	0,426	0,75	0,322
4	3	1	7	0,3	0,510	0,5	0,426	0,7	0,345
5	3	2	7	0,05	0,745	0,5	0,484	0,95	0,223
5	3	2	7	0,1	0,694	0,5	0,484	0,9	0,274
5	3	2	7	0,15	0,656	0,5	0,484	0,85	0,312
5	3	2	7	0,2	0,626	0,5	0,484	0,8	0,344
5	3	2	7	0,25	0,599	0,5	0,484	0,75	0,371
5	3	2	7	0,3	0,570	0,5	0,484	0,7	0,396
6	3	3	7	0,05	0,775	0,5	0,500	0,95	0,225
6	3	3	7	0,1	0,721	0,5	0,500	0,9	0,279
6	3	3	7	0,15	0,682	0,5	0,500	0,85	0,317
6	3	3	7	0,2	0,650	0,5	0,500	0,8	0,350
6	3	3	7	0,25	0,621	0,5	0,500	0,75	0,379
6	3	3	7	0,3	0,595	0,5	0,500	0,7	0,404
4	4	0	7	0,05	0,584	0,5	0,305	0,95	0,085
4	4	0	7	0,1	0,524	0,5	0,305	0,9	0,122
4	4	0	7	0,15	0,482	0,5	0,305	0,85	0,151
4	4	0	7	0,2	0,449	0,5	0,305	0,8	0,177
4	4	0	7	0,25	0,420	0,5	0,305	0,75	0,200
4	4	0	7	0,3	0,394	0,5	0,305	0,7	0,222
5	4	1	7	0,05	0,708	0,5	0,463	0,95	0,224
5	4	1	7	0,1	0,656	0,5	0,463	0,9	0,272
5	4	1	7	0,15	0,623	0,5	0,463	0,85	0,306
5	4	1	7	0,2	0,563	0,5	0,463	0,8	0,334
5	4	1	7	0,25	0,568	0,5	0,463	0,75	0,359
5	4	1	7	0,3	0,545	0,5	0,463	0,7	0,382
6	4	2	7	0,05	0,787	0,5	0,561	0,95	0,310
6	4	2	7	0,1	0,744	0,5	0,561	0,9	0,363
6	4	2	7	0,15	0,712	0,5	0,561	0,85	0,400

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
6	4	2	7	0,2	0,685	0,5	0,561	0,8	0,430
6	4	2	7	0,25	0,662	0,5	0,561	0,75	0,456
6	4	2	7	0,3	0,640	0,5	0,561	0,7	0,480
7	4	3	7	0,05	0,841	0,5	0,617	0,95	0,338
7	4	3	7	0,1	0,801	0,5	0,617	0,9	0,398
7	4	3	7	0,15	0,770	0,5	0,617	0,85	0,441
7	4	3	7	0,2	0,744	0,5	0,617	0,8	0,474
7	4	3	7	0,25	0,721	0,5	0,617	0,75	0,503
7	4	3	7	0,3	0,699	0,5	0,617	0,7	0,529
5	5	0	7	0,05	0,589	0,5	0,307	0,95	0,085
5	5	0	7	0,1	0,529	0,5	0,307	0,9	0,122
5	5	0	7	0,15	0,486	0,5	0,307	0,85	0,151
5	5	0	7	0,2	0,452	0,5	0,307	0,8	0,177
5	5	0	7	0,25	0,423	0,5	0,307	0,75	0,201
5	5	0	7	0,3	0,397	0,5	0,307	0,7	0,223
6	5	1	7	0,05	0,719	0,5	0,475	0,95	0,227
6	5	1	7	0,1	0,669	0,5	0,475	0,9	0,280
6	5	1	7	0,15	0,635	0,5	0,475	0,85	0,315
6	5	1	7	0,2	0,605	0,5	0,475	0,8	0,344
6	5	1	7	0,25	0,581	0,5	0,475	0,75	0,370
6	5	1	7	0,3	0,558	0,5	0,475	0,7	0,393
7	5	2	7	0,05	0,805	0,5	0,594	0,95	0,350
7	5	2	7	0,1	0,765	0,5	0,594	0,9	0,402
7	5	2	7	0,15	0,734	0,5	0,594	0,85	0,439
7	5	2	7	0,2	0,711	0,5	0,594	0,8	0,468
7	5	2	7	0,25	0,689	0,5	0,594	0,75	0,493
7	5	2	7	0,3	0,668	0,5	0,594	0,7	0,516
6	6	0	7	0,05	0,590	0,5	0,307	0,95	0,085
6	6	0	7	0,1	0,529	0,5	0,307	0,9	0,122
6	6	0	7	0,15	0,487	0,5	0,307	0,85	0,151
6	6	0	7	0,2	0,453	0,5	0,307	0,8	0,177
6	6	0	7	0,25	0,424	0,5	0,307	0,75	0,200
6	6	0	7	0,3	0,397	0,5	0,307	0,7	0,223
7	6	1	7	0,05	0,721	0,5	0,478	0,95	0,231
7	6	1	7	0,1	0,672	0,5	0,478	0,9	0,280
7	6	1	7	0,15	0,637	0,5	0,478	0,85	0,313
7	6	1	7	0,2	0,609	0,5	0,478	0,8	0,344
7	6	1	7	0,25	0,583	0,5	0,478	0,75	0,371
7	6	1	7	0,3	0,560	0,5	0,478	0,7	0,395
7	7	0	7	0,05	0,590	0,5	0,307	0,95	0,085
7	7	0	7	0,1	0,529	0,5	0,307	0,9	0,122
7	7	0	7	0,15	0,486	0,5	0,307	0,85	0,151
7	7	0	7	0,2	0,453	0,5	0,307	0,8	0,177
7	7	0	7	0,25	0,424	0,5	0,307	0,75	0,200
7	7	0	7	0,3	0,397	0,5	0,307	0,7	0,223
0	0	0	8	0,05	0,250	0,5	0,082	0,95	0,006
0	0	0	8	0,1	0,250	0,5	0,082	0,9	0,013
0	0	0	8	0,15	0,211	0,5	0,082	0,85	0,020
0	0	0	8	0,2	0,182	0,5	0,082	0,8	0,027

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
0	0	0	8	0,25	0,159	0,5	0,082	0,75	0,035
0	0	0	8	0,3	0,140	0,5	0,082	0,7	0,044
1	1	0	8	0,05	0,429	0,5	0,180	0,95	0,041
1	1	0	8	0,1	0,368	0,5	0,180	0,9	0,061
1	1	0	8	0,15	0,328	0,5	0,180	0,85	0,077
1	1	0	8	0,2	0,298	0,5	0,180	0,8	0,093
1	1	0	8	0,25	0,272	0,5	0,180	0,75	0,107
1	1	0	8	0,3	0,250	0,5	0,180	0,7	0,121
2	1	1	8	0,05	0,469	0,5	0,201	0,95	0,046
2	1	1	8	0,1	0,375	0,5	0,201	0,9	0,069
2	1	1	8	0,15	0,363	0,5	0,201	0,85	0,087
2	1	1	8	0,2	0,330	0,5	0,201	0,8	0,104
2	1	1	8	0,25	0,301	0,5	0,201	0,75	0,121
2	1	1	8	0,3	0,279	0,5	0,201	0,7	0,136
2	2	0	8	0,05	0,494	0,5	0,241	0,95	0,069
2	2	0	8	0,1	0,436	0,5	0,241	0,9	0,098
2	2	0	8	0,15	0,397	0,5	0,241	0,85	0,120
2	2	0	8	0,2	0,366	0,5	0,241	0,8	0,139
2	2	0	8	0,25	0,340	0,5	0,241	0,75	0,157
2	2	0	8	0,3	0,317	0,5	0,241	0,7	0,175
3	2	1	8	0,05	0,573	0,5	0,309	0,95	0,094
3	2	1	8	0,1	0,515	0,5	0,309	0,9	0,144
3	2	1	8	0,15	0,475	0,5	0,309	0,85	0,171
3	2	1	8	0,2	0,443	0,5	0,309	0,8	0,194
3	2	1	8	0,25	0,416	0,5	0,309	0,75	0,215
3	2	1	8	0,3	0,391	0,5	0,309	0,7	0,219
4	2	2	8	0,05	0,600	0,5	0,320	0,95	0,111
4	2	2	8	0,1	0,538	0,5	0,320	0,9	0,147
4	2	2	8	0,15	0,496	0,5	0,320	0,85	0,175
4	2	2	8	0,2	0,462	0,5	0,320	0,8	0,198
4	2	2	8	0,25	0,433	0,5	0,320	0,75	0,220
4	2	2	8	0,3	0,407	0,5	0,320	0,7	0,241
3	3	0	8	0,05	0,531	0,5	0,273	0,95	0,079
3	3	0	8	0,1	0,474	0,5	0,273	0,9	0,112
3	3	0	8	0,15	0,435	0,5	0,273	0,85	0,137
3	3	0	8	0,2	0,403	0,5	0,273	0,8	0,160
3	3	0	8	0,25	0,377	0,5	0,273	0,75	0,180
3	3	0	8	0,3	0,353	0,5	0,273	0,7	0,200
4	3	1	8	0,05	0,633	0,5	0,386	0,95	0,171
4	3	1	8	0,1	0,580	0,5	0,386	0,9	0,212
4	3	1	8	0,15	0,543	0,5	0,386	0,85	0,242
4	3	1	8	0,2	0,514	0,5	0,386	0,8	0,267
4	3	1	8	0,25	0,488	0,5	0,386	0,75	0,289
4	3	1	8	0,3	0,465	0,5	0,386	0,7	0,310
5	3	2	8	0,05	0,688	0,5	0,431	0,95	0,192
5	3	2	8	0,1	0,635	0,5	0,431	0,9	0,238
5	3	2	8	0,15	0,598	0,5	0,431	0,85	0,271
5	3	2	8	0,2	0,567	0,5	0,431	0,8	0,299
5	3	2	8	0,25	0,541	0,5	0,431	0,75	0,324

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
5	3	2	8	0,3	0,516	0,5	0,431	0,7	0,348
6	3	3	8	0,05	0,711	0,5	0,440	0,95	0,193
6	3	3	8	0,1	0,655	0,5	0,440	0,9	0,240
6	3	3	8	0,15	0,616	0,5	0,440	0,85	0,274
6	3	3	8	0,2	0,584	0,5	0,440	0,8	0,303
6	3	3	8	0,25	0,555	0,5	0,440	0,75	0,328
6	3	3	8	0,3	0,530	0,5	0,440	0,7	0,353
4	4	0	8	0,05	0,550	0,5	0,285	0,95	0,080
4	4	0	8	0,1	0,492	0,5	0,285	0,9	0,114
4	4	0	8	0,15	0,452	0,5	0,285	0,85	0,141
4	4	0	8	0,2	0,420	0,5	0,285	0,8	0,165
4	4	0	8	0,25	0,393	0,5	0,285	0,75	0,187
4	4	0	8	0,3	0,368	0,5	0,285	0,7	0,207
5	4	1	8	0,05	0,664	0,5	0,427	0,95	0,205
5	4	1	8	0,1	0,613	0,5	0,427	0,9	0,249
5	4	1	8	0,15	0,580	0,5	0,427	0,85	0,280
5	4	1	8	0,2	0,552	0,5	0,427	0,8	0,306
5	4	1	8	0,25	0,523	0,5	0,427	0,75	0,329
5	4	1	8	0,3	0,505	0,5	0,427	0,7	0,351
6	4	2	8	0,05	0,738	0,5	0,509	0,95	0,271
6	4	2	8	0,1	0,692	0,5	0,509	0,9	0,320
6	4	2	8	0,15	0,659	0,5	0,509	0,85	0,355
6	4	2	8	0,2	0,632	0,5	0,509	0,8	0,383
6	4	2	8	0,25	0,608	0,5	0,509	0,75	0,408
6	4	2	8	0,3	0,587	0,5	0,509	0,7	0,430
7	4	3	8	0,05	0,784	0,5	0,550	0,95	0,287
7	4	3	8	0,1	0,740	0,5	0,550	0,9	0,342
7	4	3	8	0,15	0,707	0,5	0,550	0,85	0,379
7	4	3	8	0,2	0,679	0,5	0,550	0,8	0,412
7	4	3	8	0,25	0,655	0,5	0,550	0,75	0,439
7	4	3	8	0,3	0,632	0,5	0,550	0,7	0,464
8	4	4	8	0,05	0,807	0,5	0,560	0,95	0,289
8	4	4	8	0,1	0,760	0,5	0,560	0,9	0,345
8	4	4	8	0,15	0,726	0,5	0,560	0,85	0,384
8	4	4	8	0,2	0,696	0,5	0,560	0,8	0,416
8	4	4	8	0,25	0,671	0,5	0,560	0,75	0,444
8	4	4	8	0,3	0,647	0,5	0,560	0,7	0,470
5	5	0	8	0,05	0,557	0,5	0,288	0,95	0,080
5	5	0	8	0,1	0,498	0,5	0,288	0,9	0,114
5	5	0	8	0,15	0,458	0,5	0,288	0,85	0,142
5	5	0	8	0,2	0,426	0,5	0,288	0,8	0,166
5	5	0	8	0,25	0,398	0,5	0,288	0,75	0,188
5	5	0	8	0,3	0,373	0,5	0,288	0,7	0,209
6	5	1	8	0,05	0,680	0,5	0,443	0,95	0,214
6	5	1	8	0,1	0,631	0,5	0,443	0,9	0,260
6	5	1	8	0,15	0,596	0,5	0,443	0,85	0,289
6	5	1	8	0,2	0,568	0,5	0,443	0,8	0,320
6	5	1	8	0,25	0,544	0,5	0,443	0,75	0,344
6	5	1	8	0,3	0,522	0,5	0,443	0,7	0,366

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
7	5	2	8	0,05	0,762	0,5	0,549	0,95	0,318
7	5	2	8	0,1	0,719	0,5	0,549	0,9	0,367
7	5	2	8	0,15	0,689	0,5	0,549	0,85	0,400
7	5	2	8	0,2	0,664	0,5	0,549	0,8	0,428
7	5	2	8	0,25	0,642	0,5	0,549	0,75	0,452
7	5	2	8	0,3	0,622	0,5	0,549	0,7	0,474
8	5	3	8	0,05	0,822	0,5	0,622	0,95	0,379
8	5	3	8	0,1	0,784	0,5	0,622	0,9	0,433
8	5	3	8	0,15	0,756	0,5	0,622	0,85	0,469
8	5	3	8	0,2	0,733	0,5	0,622	0,8	0,499
8	5	3	8	0,25	0,712	0,5	0,622	0,75	0,523
8	5	3	8	0,3	0,693	0,5	0,622	0,7	0,546
6	6	0	8	0,05	0,555	0,5	0,287	0,95	0,080
6	6	0	8	0,1	0,500	0,5	0,287	0,9	0,114
6	6	0	8	0,15	0,459	0,5	0,287	0,85	0,142
6	6	0	8	0,2	0,426	0,5	0,287	0,8	0,166
6	6	0	8	0,25	0,399	0,5	0,287	0,75	0,188
6	6	0	8	0,3	0,374	0,5	0,287	0,7	0,209
7	6	1	8	0,05	0,685	0,5	0,448	0,95	0,215
7	6	1	8	0,1	0,636	0,5	0,448	0,9	0,262
7	6	1	8	0,15	0,602	0,5	0,448	0,85	0,295
7	6	1	8	0,2	0,573	0,5	0,448	0,8	0,323
7	6	1	8	0,25	0,549	0,5	0,448	0,75	0,347
7	6	1	8	0,3	0,527	0,5	0,448	0,7	0,369
8	6	2	8	0,05	0,770	0,5	0,563	0,95	0,331
8	6	2	8	0,1	0,727	0,5	0,563	0,9	0,381
8	6	2	8	0,15	0,701	0,5	0,563	0,85	0,415
8	6	2	8	0,2	0,676	0,5	0,563	0,8	0,443
8	6	2	8	0,25	0,655	0,5	0,563	0,75	0,465
8	6	2	8	0,3	0,635	0,5	0,563	0,7	0,484
7	7	0	8	0,05	0,559	0,5	0,288	0,95	0,080
7	7	0	8	0,1	0,500	0,5	0,288	0,9	0,114
7	7	0	8	0,15	0,459	0,5	0,288	0,85	0,142
7	7	0	8	0,2	0,427	0,5	0,288	0,8	0,166
7	7	0	8	0,25	0,399	0,5	0,288	0,75	0,188
7	7	0	8	0,3	0,374	0,5	0,288	0,7	0,209
8	7	1	8	0,05	0,686	0,5	0,448	0,95	0,215
8	7	1	8	0,1	0,637	0,5	0,448	0,9	0,262
8	7	1	8	0,15	0,603	0,5	0,448	0,85	0,295
8	7	1	8	0,2	0,574	0,5	0,448	0,8	0,323
8	7	1	8	0,25	0,550	0,5	0,448	0,75	0,347
8	7	1	8	0,3	0,528	0,5	0,448	0,7	0,369
8	8	0	8	0,05	0,559	0,5	0,288	0,95	0,080
8	8	0	8	0,1	0,500	0,5	0,288	0,9	0,114
8	8	0	8	0,15	0,459	0,5	0,288	0,85	0,142
8	8	0	8	0,2	0,427	0,5	0,288	0,8	0,166
8	8	0	8	0,25	0,398	0,5	0,288	0,75	0,188
8	8	0	8	0,3	0,374	0,5	0,288	0,7	0,209

Оформление и верстка *Ю. Болдырева*

Дата подписания к использованию: 27.09.2022
Объем издания: 3,3 Мб. Комплектация: 1 электрон. опт. диск (CD-R)
Тираж 10 экз.

Издательство АНО ДПО «Межрегиональный центр
инновационных технологий в образовании»
610047, г. Киров, ул. Свердлова, 32а, пом. 1003
Тел.: 8-800-222-30-98
https://mcito.ru/publishing; e-mail: book@mcito.ru

ISBN 978-5-907623-24-8