SYMMETRY OF ALGEBRAIC AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

N. A. KUDRYASHOV

The symmetry of algebraic and ordinary differential equations is considered. Symmetric polynomials and their application for solution of equations of higher order and sets of equations are discussed. Definitions of group and group of transformation are given. Invariants of functions and first-order ordinary differential equations are discussed. Schematization of group analysis for ordinary differential equation is considered.

Рассматривается симметрия алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. Обсуждаются симметрические многочлены и их применение при решении уравнений высших степеней и систем. Даются понятия группы, однопараметрической группы преобразований и инвариантов дифференциальных уравнений. Рассмотрена схема группового анализа дифференциальных уравнений.

СИММЕТРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. КУДРЯШОВ

Московский инженерно-физический институт (технический университет)

ВВЕДЕНИЕ

Каждый человек, исходя из своего житейского опыта, имеет какое-то представление о симметрии, поскольку это одно из самых распространенных явлений в природе, искусстве и науке. Однако обычно под симметрией понимается либо зеркальная симметрия, когда одна половина предмета зеркально-симметрична другой, либо центральная, как у буквы И. Такая симметрия означает, что есть преобразование (поворот), которое переводит предмет сам в себя.

В ряде случаев симметрия является достаточно очевидным фактом. Например, любой школьник, рассматривая равносторонний треугольник, может показать, почему эта фигура симметрична, и для подтверждения своей мысли может предложить несколько преобразований, в результате которых треугольник не изменит своего вида. В действительности понятие симметрии гораздо шире, и под ней понимается неизменность при какой-либо операции не только предметов, но и физических явлений, математических формул, уравнений и т.д.

Дать точное определение симметрии в общем случае не представляется возможным, поскольку она принимает свою конкретную форму в каждой области человеческой деятельности. Например, в искусстве симметрия проявляется в соразмерности и взаимосвязанности отдельных частей, образующих произведение. В классической механике она выражается в виде принципа относительности. Симметрия сыграла чрезвычайно важную роль при проведении исследований в физике микромира [1]. И не случайно крупнейший физик-теоретик академик А.Б. Мигдал в книге “Поиски истины” [2] утверждал, что “главными направлениями физики двадцатого века были поиски симметрии и единства картины мира”.

Математики также издавна стремились к красоте математических формул и справедливо считали, что красивая формула отличается от некрасивой тем, что в красоте больше симметрии.

В статье пойдет речь о симметрии алгебраических и дифференциальных уравнений и о том, как использовать это свойство, чтобы находить решения.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

При решении некоторых алгебраических уравнений высшего порядка и некоторых систем алгебраических уравнений используются специальные многочлены, называемые симметрическими, определение которых дадим на примере многочленов от двух переменных [3].

Определение 1. Многочлен $P(x, y)$ от двух переменных называется *симметрическим*, если при замене x на y и y на x он не меняется.

Например, многочлен

$$P(x, y) = 2x^3y + x^2y + xy^2 + 2xy^3 \qquad (1)$$

является симметрическим, поскольку при замене x на y и y на x имеем тождество

$$P(x, y) = P(y, x).$$

Простейшие симметрические многочлены от x и y

$$\sigma_1 = x + y, \qquad \sigma_2 = xy \qquad (2)$$

называются *элементарными* (или *основными*) *симметрическими многочленами.*

Обобщение определения симметрических многочленов от n переменных осуществляется естественным путем. Например, симметрическим многочленом от трех переменных называется многочлен $Q(x, y, z)$ от трех переменных, который не меняется при перестановке любых двух переменных, а элементарные симметрические многочлены определяются формулами

$$\sigma_1 = x + y + z,$$

$$\sigma_2 = xy + yz + xy,$$
$$\sigma_3 = xyz.$$

Для симметрических многочленов справедлива следующая важная

Теорема 1. *Всякий симметрический многочлен от n переменных можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов, и это представление единственно.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [3].

Используя теорему 1, симметрический многочлен (1) с учетом (2) можно представить в виде

$$P(x, y) = P_1(\sigma_1, \sigma_2) = 2\sigma_1^2\sigma_2 - 4\sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_1.$$

Таким образом, чтобы найти выражение симметрического многочлена через элементарные, необходимо разбить многочлен на однородные части и затем, собирая все члены многочлена с одной степенью по совокупности переменных, выразить каждую однородную часть через элементарные симметрические многочлены.

ПРИМЕНЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Симметрические многочлены можно успешно использовать при решении некоторых уравнений и систем.

В качестве примера рассмотрим решение следующей системы уравнений с помощью симметрических многочленов:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91,$$
$$x^2 - xy + y^2 = 7. \qquad (3)$$

Используя элементарные многочлены (2), эту систему можно записать в виде

$$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_2^2 = 91,$$
$$\sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7.$$

Подставляя σ_1^2 из второго уравнения в первое, находим

$$\sigma_2 = 3,$$

а из второго

$$\sigma_1^2 = 16.$$

Таким образом, решение системы уравнений (3) свелось к решению двух простейших систем

$$x + y = 4, \qquad x + y = -4,$$
$$xy = 3; \qquad xy = 3.$$

Симметрические многочлены применяются также при решении некоторых уравнений высших степеней, называемых возвратными. У таких уравнений коэффициенты многочленов, равноудаленные от концов, совпадают. Решение возвратных уравнений основывается на следующей теореме [3].

Теорема 2. *Всякий возвратный многочлен*

$$P(z) = a_0z^{2k} + a_1z^{2k-1} + \ldots + a_{2k-1}z + a_{2k}$$

четной степени $2k$ *представляется в виде*

$$P(z) = z^kh(\sigma), \qquad (4)$$

где

$$\sigma = z + \frac{1}{z}$$

и $h(\sigma)$ *— некоторый многочлен степени* k *от* σ.

Всякий возвратный многочлен $P(z)$ *нечетной степени делится на* $z + 1$, *причем частное от деления представляет собой возвратный многочлен четной степени.*

Доказательство. Рассмотрим сначала доказательство первого утверждения этой теоремы. Пусть

$P(z)$ – многочлен четной степени, тогда его можно представить в виде

$$P(z) = z^k\left(a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + \frac{a_{2k-1}}{z^{k-1}} + \frac{a_{2k}}{z^k}\right).$$

Принимая во внимание определение возвратного многочлена, имеем $a_0 = a_{2k}$, $a_1 = a_{2k-1}$, ..., поэтому

$$P(z) = z^k\left[a_0\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right) + a_1\left(z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}\right) + \ldots + a_k\right].$$

Поскольку степенная сумма

$$S_k = x^k + y^k$$

в соответствии с теоремой 1 выражается через элементарные симметричные многочлены σ_1 и σ_2, то, полагая

$$x = z, \qquad y = \frac{1}{z}.$$

получаем, что двучлены

$$z^k + \frac{1}{z^k}, \qquad z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}, \ \ldots$$

выражаются через

$$\sigma = \sigma_1 = z + \frac{1}{z}, \qquad \sigma_2 = 1$$

и, следовательно, многочлен $P(z)$ может быть представлен в виде (4).

Возвратный многочлен нечетной степени

$$P(z) = a_0 z^{2k+1} + a_1 z^{2k} + \ldots + a_{2k} z + a_{2k+1}$$

в силу равенств

$$a_0 = a_{2k+1}, \qquad a_1 = a_{2k}, \qquad a_2 = a_{2k-1}, \ldots$$

может быть представлен в виде

$$P(z) = a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1 z(z^{2k-1} + 1) + \\ + a_2 z^2(z^{2k-3} + 1) + \ldots + a_k z^k(z + 1). \qquad (5)$$

В каждом двучлене, стоящем в скобках, можно выделить множитель $z + 1$, поскольку

$$z^{2m+1} + 1 = (z + 1)(z^{2m} - z^{2m-1} + z^{2m-2} + \ldots + z^2 - z + 1).$$

Принимая это соотношение во внимание, получаем из (5)

$$P(z) = (z + 1)R(z),$$

где $R(z)$ – возвратный многочлен степени $2k$.

В качестве примера рассмотрим решение уравнения пятой степени

$$x^5 - 8x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 8x + 1 = 0. \qquad (6)$$

Хорошо известно, что в общем случае уравнение пятой степени и выше не может быть решено при помощи корней (радикалов). Это было доказано в 1824 году норвежским математиком Нильсом Абелем. Однако уравнение (6) является возвратным нечетной степени, и поэтому одним из его корней является $x = -1$. Поделив уравнение (6) на $x + 1$, получаем возвратное уравнение четвертой степени

$$x^4 - 9x^3 + 20x^2 - 9x + 1 = 0,$$

которое сводится к квадратному уравнению относительно σ

$$\sigma^2 - 9\sigma + 18 = 0.$$

Симметричные многочлены используются также при доказательстве неравенств, при решении иррациональных уравнений, при разложении многочленов на множители и при решении некоторых других задач [3].

ПОНЯТИЕ ОБ АБСТРАКТНОЙ ГРУППЕ

Понятие группы возникло при изучении симметрии, относящейся к корням алгебраических уравнений.

Из школьного курса алгебры известно, что квадратное уравнение

$$x^2 + ax + b = 0$$

может быть записано в виде

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения, причем

$$x_1 + x_2 = -a,$$
$$x_1 x_2 = b.$$

Эти соотношения известны как теорема Виета.

Для кубического уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx = c = 0$$

аналогичное представление для корней приводит к соотношениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b,$$
$$x_1x_2x_3 = -c.$$

Любопытно, что корни уравнения в эти соотношения входят симметрично и a, b, c являются элементарными симметрическими многочленами.

Такие равенства могут быть написаны для корней алгебраического уравнения произвольного порядка. Именно эти соотношения были использованы Нильсом Абелем, чтобы доказать, что в общем случае решения уравнения пятой степени не могут быть получены через радикалы. После Абеля полную теорию разрешимости уравнений в радикалах создал французский математик Эварист Галуа, которому, в частности, принадлежит определение алгебраической операции.

Определение 2. Пусть задано множество G каких-то элементов, тогда если каждым двум элементам из этого множества, взятым в определенном порядке, однозначно ставится в соответствие некоторый элемент из множества G, то говорят, что *на множестве G определена алгебраическая операция.*

Обычно алгебраическая операция, определенная на множестве G, называется *умножением* или *сложением*.

Определение 3. Множество G с определенной в нем алгебраической операцией является *группой*, если:

1) для любых трех элементов этого множества (a, b, $c \in G$) выполняется ассоциативный закон:

$$a(bc) = (ab)c;$$

2) для любого элемента $a \in G$ в множестве G существует единичный элемент e такой, что:

$$ae = ea = a;$$

3) для любого элемента $a \in G$ в множестве G существует обратный элемент $a^{-1} \in G$ такой, что:

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Рассмотрим совокупность всех целых чисел, состоящую из положительных, отрицательных и нуля. Покажем, что множество таких чисел образуют группу относительно операции сложения. В самом деле, если за единицу в этом множестве возьмем нуль, то сумма двух целых чисел всегда целое число. Прибавление нуля к любому числу не изменит его, поэтому в данном множестве есть единичный элемент. Кроме того, прибавление к любому числу числа с обратным знаком дает также нуль. Таким образом, все три пункта определения 3 выполнены, и совокупность целых чисел относительно операции сложения в самом деле образуют группу.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Применение теории групп для анализа дифференциальных уравнений было открыто норвежским математиком Софусом Ли (1842–1899). Ему удалось показать, что большинство методов, используемых при решении дифференциальных уравнений и казавшихся до него искусственными и хитроумными, могут быть получены с помощью теории групп [4–6].

Пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка

$$E(x, y, y_x) = 0, \qquad y_x = \frac{dy}{dx}, \tag{7}$$

где E – некоторая функция от трех переменных x, y и y_x. Рассмотрим семейство преобразований на плоскости (x, y)

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, a), \\ y' &= \psi(x, y, a), \end{aligned} \tag{8}$$

зависящее от вещественного параметра a.

Фактически соотношения (8) отображают точку (x, y) некоторого множества M в точку (x', y') того же множества, но поскольку эти преобразования зависят от параметра, то таких отображений целое семейство.

Предположим, что семейство преобразований (8) достаточное число раз дифференцируемо по всем переменным и по параметру a и имеет следующие свойства:

1) существует $a_0 \in \Delta$ (Δ – интервал вещественной оси), такое, что

$$\varphi(x, y, a_0) = x, \qquad \psi(x, y, a_0) = y$$

(далее полагаем $a_0 = 0$);

2) последовательное выполнение двух преобразований равносильно применению третьего того же вида (8). Это свойство может быть записано в виде

$$\varphi(x', y', b) = \varphi(x, y, a + b),$$
$$\psi(x', y', b) = \psi(x, y, a + b);$$

3) существует $-a \in \Delta$, такое, что

$$\varphi(x', y', -a) = \varphi(x, y, a),$$
$$\psi(x', y', -a) = \psi(x, y, a).$$

Теперь можно сформулировать определение однопараметрической группы преобразований.

Определение 4. Семейство преобразований (8), которое можно дифференцировать достаточное число раз по x, y и по параметру a и имеющее свойства 1–3, называется *однопараметрической группой преобразований.*

Легко заметить, что свойства 1–3 – это обычные групповые свойства. Существенно новым моментом этого определения является то, что эти преобразования можно дифференцировать. Условие 2 в определении может выполняться не для всех значений параметра a и b из интервала Δ, а только при достаточно малых. О таком семействе преобразований говорят как о локальной однопараметрической группе преобразований.

Примерами локальных однопараметрических групп преобразований, которые часто используются, являются следующие преобразования на плоскости:

1) **преобразование переноса** (сдвига) параллельно прямой $kx + ly = 0$ (k и l – постоянные)

$$\begin{aligned} x' &= x + la, \\ y' &= y - ka; \end{aligned} \tag{9}$$

2) **преобразование вращения на плоскости** (x, y)

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= y\cos\alpha - x\sin\alpha; \end{aligned} \tag{10}$$

3) **преобразование дилатации** (неоднородного растяжения)

$$\begin{aligned} x' &= xe^{a}, \\ y' &= ye^{ka}. \end{aligned} \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что все эти преобразования образуют однопараметрические группы преобразований.

ИНВАРИАНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

С помощью однопараметрической группы преобразований можно найти некоторое соотношение между переменными, которое не меняется при действии на него преобразований. Такое соотношение называется инвариантом соответствующей группы преобразований.

Если задана также функция $F(x, y)$ от двух переменных, то точка (x, y) может подвергаться преобразованию в соответствии с формулами (8). Тогда и функция F в общем случае изменится при действии преобразования, причем $F(x', y')$ будет, вообще говоря, зависеть от группового параметра a. Однако для каждой однопараметрической группы преобразований существуют инвариантные функции, которые не меняются при действии преобразований.

Инвариант может быть найден путем исключения группового параметра a из соответствующей группы преобразований. В качестве примера рассмотрим, как найти инвариант групп преобразований неоднородного растяжения на плоскости.

Возведя первое соотношение семейства (11) преобразований в степень k и разделив на второе равенство, получим

$$I_1 = \frac{x'^k}{y'} = \frac{x^k}{y}.$$

Это соотношение показывает, что функция

$$I_1 = \frac{x^k}{y}$$

является инвариантом группы преобразований неоднородного растяжения (11).

Аналогично можно доказать, что инвариантами групп преобразований (9) и (10) будут соответственно соотношения

$$I_2 = kx' + ly' = kx + ly$$

и

$$I_3 = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2.$$

Класс функций, который будет инвариантен относительно группы преобразований растяжения, определяется функциями, которые зависят от инварианта I_1, для групп преобразований (9) и (10) – соответственно функциями от I_2 и I_3.

Инвариант группы преобразований может быть получен и более формальным путем. Для этой цели при заданной группе преобразований находятся функции, называемые компонентами касательного векторного поля:

$$\xi = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|_{a=0}, \qquad \eta = \left.\frac{\partial\psi}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

В теории Софуса Ли доказано, что необходимым и достаточным условием того, что функция F инвариантна относительно группы преобразований, является выполнение равенства

$$XF = 0. \tag{12}$$

Здесь X – выражение (называемое дифференциальным оператором), которое действует на функцию и дает снова функцию. Оно имеет вид

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Докажем необходимость условия (12). Если функция $F(x, y)$ – инвариант соответствующей группы преобразований, то

$$F(x, y) = F(x', y'). \tag{13}$$

Используя соотношения для x' и y' (справедливые при малых a) в виде

$$x' = x + a\left.\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|_{a=0} = x + \xi a,$$

$$y' = y + a\left.\frac{\partial\psi}{\partial a}\right|_{a=0} = y + \eta a,$$

имеем равенства

$$F(x', y') = F(x + \xi a, y + \eta a) =$$
$$= F(x, y) + a\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y}\right). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), приходим к (12).

Соотношение (12) эквивалентно следующему уравнению в частных производных:

$$\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Решение его как раз и дает инвариант искомой группы преобразований.

В качестве примера найдем инвариант группы преобразований вращения на плоскости.

Поскольку

$$\frac{\partial x'}{\partial\alpha} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial\alpha} = -y\sin\alpha - x\cos\alpha,$$

то

$$\xi = \left.\frac{\partial x'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = y,$$

$$\eta = \left.\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = -x.$$

Уравнение (12) для данного случая примет вид

$$y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

решение которого дает инвариант группы преобразований (10) в виде

$$I = x^2 + y^2.$$

СХЕМА ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Алгоритм, позволяющий находить группы преобразований, для которых дифференциальное уравнение остается инвариантным, называется *групповым анализом дифференциального уравнения.* Схему этого алгоритма рассмотрим на примере дифференциального уравнения первого порядка (7). Задача, которая при этом ставится: найти группы преобразований, относительно которых дифференциальное уравнение остается инвариантным (в этом случае обычно говорят о группе преобразований, которая допускается дифференциальным уравнением).

Дифференциальное уравнение (7) можно рассматривать как алгебраическое уравнение с функцией от трех переменных x, y и y_x. Важным моментом теории группового анализа дифференциальных уравнений является то, что при заданной группе преобразований однозначно определяются компоненты касательного векторного поля и, наоборот, при известных компонентах касательного векторного поля однозначно восстанавливается группа преобразований. Таким образом, задание однопараметрической группы преобразований фактически эквивалентно заданию компонент касательного векторного поля.

Это обстоятельство позволяет при групповом анализе дифференциального уравнения (7) искать не сами группы, а только компоненты касательного векторного поля ξ и η. Однако дифференциальное уравнение (7) содержит три переменные x, y и y_x, и поэтому оператор, который должен действовать на левую часть уравнения (7), принимает вид

$$X' = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta'\frac{\partial}{\partial y_x},$$

причем поскольку y_x является производной от y по x, то η' определяется следующим выражением от ξ и η:

$$\eta' = \eta_x + y_x(\eta_y - \xi_x) - y_x^2\xi_y.$$

Кроме того, поскольку соотношение (7) является дифференциальным уравнением, в котором $E = 0$, то условие инвариантности уравнения (7) относительно группы преобразований принимает вид

$$X'E|_{E=0} = 0. \qquad (15)$$

Условие (15) позволяет найти все компоненты касательного векторного поля ξ и η и тем самым определить все независимые однопараметрические группы преобразований, которые допускаются уравнением (7).

Техника проведения группового анализа дифференциальных уравнений довольно трудоемка, и, как правило, в настоящее время этот алгоритм выполняется с применением программ аналитических вычислений на ЭВМ. Такие программы с успехом применяются в последние годы для решения многих математических задач, где требуется большое количество алгебраических вычислений.

Следует заметить, что некоторые группы преобразований (но не все) можно установить по виду самого дифференциального уравнения.

Покажем, например, как это делается на примере дифференциального уравнения, имеющего вид

$$x^2\frac{dy}{dx} = xy + y^2. \qquad (16)$$

Предположим, что это уравнение допускает группу преобразований неоднородного растяжения на плоскости (x, y), тогда

$$x' = ax,\quad y' = by. \qquad (17)$$

Подставляя эти соотношения в уравнение, получаем

$$x'^2\frac{dy'}{dx'} = x'y' + \frac{a}{b}y'^2.$$

Последнее уравнение совпадает с (16), если $b = a$, и поэтому уравнение (16) допускает группу преобразований (17) при $b = a$. Эта группа имеет инвариант

$$\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}.$$

Используя инварианты групп преобразований, можно упростить процедуру нахождения решения дифференциального уравнения. В самом деле, поскольку $y = \theta(x)x$, то уравнение (16) можно записать в виде

$$x\frac{d\theta}{dx} = \theta^2,$$

откуда находится решение

$$y = -\frac{x}{\ln(xc)}$$

(здесь c – постоянная).

В качестве еще одного примера рассмотрим, как можно с помощью инварианта решить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x + \beta y. \qquad (18)$$

Предположим, что это дифференциальное уравнение допускает группу преобразований сдвига по x и по y

$$x' = x + a,\quad y' = y + b. \tag{19}$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (18), получим, что оно не изменит своего вида, если

$$b = -\frac{\beta}{\alpha}a.$$

Инвариант группы преобразований (19) имеет вид

$$z = \alpha x' + \beta y' = \alpha x + \beta y.$$

В этом случае

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta}\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{\beta}$$

и уравнение (18) преобразуется к уравнению

$$\frac{dz}{dx} = \alpha + \beta z,$$

решение которого выражается формулой

$$z(x) = \frac{c_1}{\beta}e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta}$$

(здесь c_1 – произвольная постоянная).

Учитывая обозначение инварианта, находим окончательное решение уравнения (18) в виде

$$y = \frac{c_1}{\beta^2}e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}x.$$

Приведенные примеры показывают, что в ряде случаев группа преобразований находится непосредственно из вида дифференциального уравнения и полученные инварианты существенно упрощают решение дифференциального уравнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Групповой анализ дифференциальных уравнений в последние годы находит широкое применение при построении решений уравнений в частных производных. Оказалось, что инварианты соответствующих групп преобразований для уравнений такого вида позволяют существенно упростить процедуру получения аналитического решения. Это, по-видимому, один из самых важных практических результатов теории симметрии дифференциальных уравнений.

После открытия солитонов в 60-х годах нашего столетия резко усилился интерес к применению теории симметрии при решении нелинейных уравнений в частных производных, и идеи Софуса Ли в работах ряда ученых были обобщены. Эти работы расширили наше понимание симметрии дифференциальных уравнений и привели к понятию "высшей" симметрии. В последнее время этот раздел нелинейной математической физики интенсивно изучается, и в научных периодических журналах можно найти много работ, посвященных этой теме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Компанеец А.С.* Симметрия в микро- и макромире. М.: Наука, 1978. 206 с.

2. *Мигдал А.Б.* Поиски истины. М.: Мол. гвардия, 1983. 240 с.

3. *Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я.* Симметрия в алгебре. М.: Наука, 1967. 284 с.

4. *Дородницин В.А., Еленин Г.Г.* Симметрия в решениях уравнений математической физики. М.: Знание, 1984. № 4. 64 с.

5. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989. № 8. 48 с.

6. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа. М.: Знание, 1991. № 7. 48 с.

* * *

Николай Алексеевич Кудряшов, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики в физике и экономике МИФИ, член-корреспондент Российской академии естественных наук (РАЕН), лауреат Государственной премии СССР в области науки и техники. Основные научные интересы: математическое моделирование задач газовой динамики и глобальных катастроф в природе, нелинейные волны и теория солитонов, аналитические и численные методы решения нелинейных уравнений в частных производных. Автор более 150 печатных работ, в том числе пяти учебных пособий.