А. В. Ворожцов
Дополнительные семинары по математике. — М.: Физтех-Колледж, 2002. — 71 с.

Эта методическая разработка предназначена для первоначального знакомства с пятью областями математики: комбинаторикой, теорией игр, теорией графов, теорией скользящих векторов, а также для для ознакомления с методом математической индукции. В помощь математическим кружкам и для проведения факультативных занятий.

Для школьников 7-11 классов и учителей математики.

Будем благодарны за обнаруженные ошибки и опечатки.
Шлите ваши замечания на *email*:artema@dgap.mipt.ru.
Текст методички доступен на http://www.dgap.mipt.ru/ artema/

Автор благодарен Кате Татариновой, Оле Люлько и Григорию Лабзину за полезные обсуждения и замечания относительно чернового варианта этой методички.

Редактор Татаринова Е.А.
Подписано в печать 29.03.2002 г.
Формат А4. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Тираж 35.

Издательство Физтех-Колледжа, 141700, г. Долгопрудный, Московское шоссе, д. 9.

Дорогие ребята!

Вы держите в руках уникальное пособие по математике, разработанное наиболее опытными преподавателями Физтех-Колледжа. Сборник подготовлен в соответствии с методикой, которая эффективно используется на занятиях по математике в Физтех-Колледже на протяжении нескольких лет.

Сборник состоит из шести семинаров, которые посвящены дополнительным главам математики. Вы не найдете здесь обычных школьных задач и тем, зато, возможно, узнаете о многих интересных применениях математики в жизни. Получите базовые знания о задачах теории информации, теории графов, динамике твёрдого тела, а также о теории игр.

Материалы к семинарам содержат теоретическое введение; подробный разбор наиболее важных задач, и коллекции задач для самомтоятельного решения. Ко многим задачам даны подсказки и ответы. Сложность задач определяется числом в круглых скобках после номера задачи. Сложность 1 — самая лёгкая, 20 — самая сложная. Уровни сложности от 7 до 11 примерно соответствуют году обучения в школе.

Мы надеемся, что данное пособие будет отличным подспорьем в изучении математики!

Желаем вам успеха!

Коллектив кафедры математики
Физтех-Колледжа

Оглавление

Семинар 1

Комбинаторика: ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

План занятия

- Принцип умножения и принцип сложения
- Треугольник Паскаля
- Комбинаторика и АЛГЕБРА
- Комбинаторика и ГРАФЫ

Принципы умножения и сложения

Комбинаторика — это наука о исчислении объектов. Задачи комбинаторики — это задачи о нахождениии числа каких-либо объектов. Например, числа диагоналей в выпуклом 20-угольнике, трёхзначных чисел, способов расположения 11 книг на книжной полке, неприводимых дробей со знаменателем 24, способов представления числа $N = 11$ в виде суммы натуральных слагаемых.

Задача 1.1 (6) *Мы можем нарисовать круг, квадрат или треугольник и закрасить его зелёным, красным, синим или чёрным цветом. Сколько различных объектов мы можем нарисовать?*

Решение. Есть три типа фигур, и четыре цвета. Нарисум все фигуры: синие в одной строчке, красные в другой, зелёные в третьей и чёрные в четвёртой. Четыре строчки, в каждой строчке по три фигуры. Чтобы получить все возможные объекты, нужно умножить 4 на 3. Ответ: $3 \times 4 = 12$.

Задача 1.2 (6) *Карты. Девять достоинств* $\{6,7,8,9,10,\text{В},\text{Д},\text{К},\text{Т}\}$ *и четыре масти* $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. *Сколько всего карт?*

Ответ: $4 \times 9 = 36$

Задача 1.3 (7) *У Коли в прошлом учебном году было в школе 6 предметов, 4 четверти и у него они пятёрки и четвёрки. Сколько возможно вариантов зачётной сранички дневника Коли за прошлый год?*

Решение. Число вариантов = число предметов × число четвертей × два варианта оценки (4 или 5) $= 6 \times 4 \times 2 = 48$.

Принцип, который мы использовали в данных задачах, называется **принцип умножения**. Есть ещё **принцип сложения**. Он черезвычайно прост: если мы разделили объекты на непересекающихся множества, то полное число объектов есть сумма числа объектов в этих множествах. Например, если в классе 12 девочек и 14 мальчиков, то всего $12 + 14 = 26$ детей.

Задача 1.4 (6) *Есть 5 человек и надо построить из них очередь. Сколько есть различных* ***способов упорядочивания*** *5 человек?*

Решение. Первым будет кто-то из пяти. Пусть мы кого-то выбрали и поставили первым. Вторым пойдет кто-то из оставшихся четырёх. Выберем кого-нибудь. Останется 3 человека. Выберем из трёх, потом из двух. Оставшийся пойдет последним. Мы выбирали последовательно сначала из 5 вариантов, потом из 4, 3, 2 и 1. Пользуясь принципом умножения, получаем $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Это число обозначается 5!, что читается как “пять факториал”. □

Утверждение 1.1 *Число* **упорядочиваний** *или число* **перестановок** *n различных объектов равно $n!$ (эн факториал):*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Число перестановок с n растет довольно быстро: 1, 2, 6, 24, 120, 720, 540, ... Например,

$$15! = 1307674368000$$

Задача 1.5 (7) *У нас есть яблоко, кекс, мороженое и шоколадка. Сколько различных способов их съедания существует?* Ответ: $4! = 24$

Теперь давайте считать байты. Байт — это восемь мест (восемь бит), в каждом из которых стоит либо 0, либо 1. Например: 01100110, 00111001, 11111111, ...

Задача 1.6 (7) *Сколько всего различных байт?*

Решение. Возможных состояний одного бита — **2** штуки : 0 и 1. Возможных состояний двух бит — **4** штуки: 00, 01, 10, 11. Трёхбитовых слов **8** штук: 000, 001, 010, 011 и 100, 101, 110, 1111. Первые четыре начинаются с 0, другие четыре — с 1. Каждый раз увеличивается в два раза. Четырёхбитовых будет 16, а восьмибитовых $2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$. Ответ: **256**.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Задача 1.7 (7) *Сколько всего было бы различных байт, если бы в каждом из восьми мест мы могли писать 0, 1 или 2?*
Ответ: $3^8 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 81 = 6400 + 2 \cdot 80 + 1 = \mathbf{6561}$.

Задача 1.8 (7) *Сколько всего байт, у которых ровно две единички?*

Решение. Надо выбрать два места, куда мы поставим единички. Для первого места 8 возможных вариантов: 10000000, 01000000, 00100000, 00010000, 00001000, 00000100, 00000010, 0000001. Теперь надо поставить ещё одну единичку. В каждом из восьми вариантов есть еще 7 мест (7 нулей) куда, мы можем поставить единичку. Байт 10000000 породит байты: 11000000, 10100000, 10010000, 10001000, 10000100, 10000010, 10000001. Итак, каждый из восьми исходных байт с одной единичкой даст 7 байт с двумя единичками. Из **принципа умножения** всего получается $8 \cdot 7 = 56$ вариантов. Но среди них будут повторения. А именно, байт 10001000 будет порождён как байтом 10000000, так и байтом 00001000. Байт 11000000 будет порождён как 10000000, так и 01000000 и т.д. Таким образом, каждый байт будет порождён дважды. Всего различных вариантов будет $56/2 = 28$. □

Давайте будем исчислять доминошки. Доминошки — это штучки, на которых записано 2 числа из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Сколько всего доминошек? Сначала разделим их на две части — дубли и недубли. Дублей 7 штук: {(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}.

Задача 1.9 (7) *Сколько "недублей" в домино?*

Решение. У "недублей" числа различаются. Первое число может быть любым из семи возможных. Второе отличается от первого, то есть для него уже шесть возможных вариантов. По **принципу умножения** получаем $7 \times 6 = 42$ варианта. Но это не совсем то, что нужно. Это число пар различных чисел из множества {0,1,2,3,4,5,6}. Их действительно 42 штуки (7 строчек по 6):

$$\begin{array}{l}
(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6)\\
(1,0),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\
(2,0),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\
(3,0),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)\\
(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)\\
(5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\\
(6,0),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)
\end{array}$$

Доминошка — это **неупорядоченная** пара двух чисел. Доминошка "недубль" — это **неупорядоченная** пара двух **различных** чисел. Пары $(0, 2)$ и $(2, 0)$ обозначают одну и ту же доминошку. Каждый "недубль" можно записать двумя упорядоченными парами. Поэтому "недублей" в два раза меньше, чем упорядоченных пар. Ответ: $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$. □

Используем **принцип сложения** и получаем общее число доминошек: $7 + 21 = 28$.

Треугольник Паскаля

Задача 1.10 *Дано множество пяти разных конфет. Нам разрешили взять только три. Сколько существует различных способов выбрать три конфеты из пяти?*

Решение. Обозначим число способов выбрать 3 из 5 как C_5^3, и соответственно k конфет из n как C_n^k. Давайте начнём с простых вариантов. Сколькими способами можно выбрать одну конфету из пяти? Очевидно, пятью, то есть $C_5^1 = 5$. Аналогично, $C_2^1 = 2$, $C_3^1 = 3$, $C_4^1 = 4$, $C_6^1 = 6$, ... Сколько способов выбора двух конфет из трёх? Это всё равно, что выбрать одну конфету, которую не будешь брать. То есть $C_3^2 = C_3^1 = 3$. Подсчитаем C_4^2 непосредственно. Обозначим конфеты числами. Тогда будут такие варианты:
{1,2}, {1,3}, {1,4},
{2,3}, {2,4},
{3,4},
то есть 6 различных вариантов и $C_4^2 = 6$. Для пяти получим:

{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5},
{2,3}, {2,4}, {2,5},
{3,4}, {3,5},
{4,5}
— 10 вариантов, то есть $C_5^2 = 10$. Это количество способов выбрать две конфеты из пяти. Но $C_5^2 = C_5^3$, потому что выбирать две конфеты, чтоб их взять, всё равно, что выбрать три конфеты, чтоб их оставить, а остальные взять, и наоборот. Ответ: 10 вариантов. □

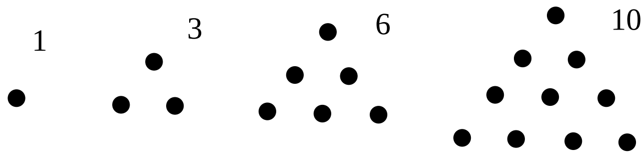


Рис. 1.1: Треугольные числа.

Примечание. Числа C_n^2 называются треугольными числами. Верно тождество

$$C_n^2 = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Они равны количеству точек в треугольниках на рисунке 1.1.

Определение 1.1 **Число сочетаний** k **из** *n есть число способов выбрать k элементов (различных) из n возможных (тоже различных). Обозначается как C_n^k или $C_{k_1,k_2} = C_{k_1+k_2}^{k_1} = C_{k_1+k_2}^{k_2}$*

Давайте нарисуем треугольник:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

У нас получится

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\ldots & & & & & & & \ldots & & & & & &
\end{array}$$

Это **треугольник Паскаля**.

Этот треугольник обладает рядом интересных свойств. Например, каждое число в этом треугольнике есть сумма двух над ним стоящих. Чтобы узнать, чему равно $C_5^2 = C_{2,3}$, нам нужно взглянуть на 5-ую строчку. На первом месте стоит 1 — это C_5^0, число способов выбора нуля конфет из пяти. Не дать ни одной конфеты можно только одним способом. Далее $5 = C_5^1$, число способов получить одну конфету. Далее $C_5^2 = 10$, число способов получить 2 конфеты из 5 возможных, и т.д.

Задача 1.11 (7) *Чему равно $C_{2,4}$?*

Задача 1.12 (8) *Чему равно $C_{3,4}$?*

Вернёмся к нашим байтам. Естественное обобщение задачки 1.8, это задача о числе байт, где 3 единички и 5 нулей, 4 единички и 4 нуля и т.д. А также случай, когда рассматривается слово произвольной длины. Байт — слово длины 8.

Задача 1.13 (7) *Рассмотрим слова длины n из нулей и единичек. Сколько всего слов, в которых ровно k единичек?* Ответ: C_n^k
Подсказка. Дело в том, что байты с тремя единичками можно поставить в соответствие с трёхэлементными подмножествами множества $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Например, $\{1,2,8\} \leftrightarrow 11000001$, $\{1,3,5,7\} \leftrightarrow 10101010$. Выбрать три конфеты из восьми возможных всё равно, что выбрать три бита в байте, куда поставить единицы.

Для того, чтобы решить целиком задачу про байты (сколько байт, в которых ровно k единичек?), нужно посмотреть на восьмую строчку треугольника Паскаля.

На первом месте стоит 1 — это $C_8^0 = C_{0,8}$ число способов размещения нуля единичек и восьми нуликов по восьми местам. Далее $8 = C_8^1 = C_{1,7}$, число способов разместить одну единичку и 7 нуликов по восьми местам. Далее $C_8^2 = C_{2,6} = 28$, число способов разместить 2 единички и 6 нуликов по 8 местам.

Задача 1.14 (7) *Найдите восьмую строчку треугольника Паскаля.*

Утверждение 1.2 *Всего различных байт 256 штук. Это число можно представить в виде суммы числа безъединичных байт (1 штука), одноединичных байт (8 штук), двухъединичных байт (28 штук), … Значит сумма чисел в восьмой строчке треугольника Паскаля равна 256.*

Задача 1.15 (7) *Вычислите сумму чисел в различных строчках треугольника Паскаля.*

Задача 1.16 (8) *Мы определили C_n^k как число способов выбрать k разных предметов из n разных. Используя это определение, докажите, что:*
а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
б) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (или $C_{k_1k_2} = C_{k_2k_1}$);
в) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$ (или $C_{k_1,k_2} = C_{k_1-1,k_2} + C_{k_1,k_2-1}$).
Подсказка. в) Будем выбирать $(k+1)$ элемент из $(n+1)$ возможных. Рассмотрим первый элемент. Мы его либо берём, либо не берём. Если не берём, то мы должны выбрать $(k+1)$ элемент из оставшихся n, если берём, то осталось выбрать k элементов из n.

Задача 1.17 (8) *Докажите, что*

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \textit{Или} \quad C_{k_1,k_2} = \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!}$$

Решение. Число упорядоченных выборок k различных элементов из n есть $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$, поскольку мы выбирали сначала из n элементов, потом из оставшихся $(n-1)$ элементов, потом из $(n-2)$, и так k раз. Это столько упорядоченных наборов. Мы можем выбрать одно и то же множество элементов, вытаскивая их в разной последовательности. Одно и то же множество из k элементов мы можем выбрать $k!$ различными способами — именно столько есть упорядочиваний этих k элементов. Поэтому неупорядоченных наборов в $k!$ раз меньше, чем упорядоченных. □

Задача 1.18 (8) *Используя явную формулу $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, докажите, что*

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Комбинаторика и АЛГЕБРА

Вспомним, что

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Давайте вычислим $(a+b)^3$:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$(a+b)^2$ после раскрытия скобок даёт четыре слагаемых $a^2 + ab + ba + b^2$, которые после приведения подобных, собираются в три. $(a+b)^3$ после раскрытия скобок даёт восемь слагаемых $a^3 + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb$, которые собираются в четыре слагаемых. $(a+b)^4$ даст 16 слагаемых, которые после приведения подобных соберутся в пять слагаемых.

Задача 1.19 (7-8) *Не поленитесь и вычислите* $(a+b)^4$.

Запишем результаты в столбик:

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+\ ?\ +4ab^3+b^4
\end{aligned}$$

Постарайтесь увидеть здесь треугольник Паскаля. Что стоит вместо ? в сторчке с $(a+b)^4$?

Задача 1.20 (7) Разложите на множители $(a+b)^5$.

Решение. Пятая строчка треугольника Паскаля есть

1 5 10 10 5 1.

Значит

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5.$$

□

Это правило вычисления $(a+b)^n$ называется Бином Ньютона. Поясним его. Взгляните на равенства

$$\begin{aligned}
a^3 &= a\cdot a\cdot a,\\
a^2b &= b\cdot a\cdot a = a\cdot b\cdot a = a\cdot a\cdot b,\\
ab^2 &= b\cdot b\cdot a = b\cdot a\cdot b = a\cdot b\cdot b,\\
b^3 &= b\cdot b\cdot b.
\end{aligned}$$

Они показывают, что если составлять произведения трёх множителей, каждый из которых равен a или b, то a^3 и b^3 можно получить единственным способом, а ab^2 и a^2b — тремя способами. Отсюда получается, что

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n.$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n.$$

Если $x = 1$, то сразу получаем $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

Представления числа в виде суммы

Задача 1.21 (7) *Чему равно число способов представления суммы $n = 7$ тубриков в виде упорядоченного набора монет достоинтвом 1 и 2 тубрика? Например:*

$$\begin{aligned} n &= 5 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2 = 2+1+1+1 = 1+2+1+1 \\ &= 1+1+2+1 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

— восемь способов представления числа 5.

Решение. Пусть $(K-1)$ тубриков можно представить F_{K-1} способами, а F_{K-2} — число способов представить $(K-2)$. Рассмотрим представления суммы K. Их можно разделить на две части: одни заканчиваются на 2, другие —на 1. Первых будет столько же, сколько способов представить сумму $(K-2)$, то есть F_{K-2}, других F_{K-1}. Окончательно получаем

$$F_K = F_{K-1} + F_{K-2}$$

Кроме того, мы знаем, что $F_1 = 1$ и $F_2 = 2$. Используя последнюю формулу, получаем $F_3 = 2+1 = 3$, $F_4 = 3+2 = 5$, $F_5 = 5+3 = 8$, $F_6 = 8+5 = 13$, $F_7 = 13+8 = 21$. Это Числа Фибоначчи $= \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$.
Ответ: 21. □

Задача 1.22 (9) *Чему равно число способов D_n^k представления суммы $n = 7$ тубриков в виде упорядоченного набора монет из $k = 5$ штук достоинтвом 1 и 2 тубрика? Например, при $n = 5$ есть только одно пятимонетное разложение $5 = 1+1+1+1+1$. При $n = 6$ получается 5 разложений:*

$$6 = 2+1+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+1+2+1 = 1+1+1+1+2.$$

Решение. Нам нужно найти D_{10}^5. Рассмотрим, какие суммы и сколькими способами можно представить двумя монетами: 1 нельзя представить в виде суммы двух слагаемых, $2 = 1+1$, $3 = 1+2 = 2+1$, $4 = 2+2$. То есть $D_1^2 = 0$, $D_2^2 = 1$, $D_3^2 = 2$, $D_4^2 = 1$. А теперь посмотрите на равенство:

$$(x+x^2)(x+x^2) = x^2 + 2x^3 + x^4.$$

Из каждой из двух скобок мы должны взять либо первую, либо вторую степень x. После раскрытия скобок при x^3 будет стоять натуральное число, равное числу способов набрать степень 3 из степеней 1 и 2. То есть число способов представить 3 в виде упорядоченной суммы двух слагаемых. После раскрытия

$$(x+x^2)^5$$

при x^k получим число способов представить k в виде упорядоченной суммы **пяти** слагаемых (слагаемые равны либо 1, либо 2). Раскроем это выражение:

$$(x+x^2)^5 = x^5(1+x)^5 = x^5(C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^2 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5) =$$

$$= x^5(1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5) = x^5 + 5x^6 + 10x^7 + 10x^8 + 5x^9 + x^{10}$$

При x^7 стоит коэффициент 10. Поэтому Ответ: 10. Общий Ответ: $D_n^k = C_n^{2k-n}$ □

Задача 1.23 (8, Геометрическая прогрессия) *Умножая обе части равенства на* $(1-z)$ *убедитесь в его справедливости:*

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots \tag{1.1}$$

Примечание. Подсчитайте бесконечную сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \ldots$

Обратимся снова к задаче 1.21. Её можно сформулировать так:

Задача 1.24 (10) *Чему равно число способов F_n представления n виде суммы* **произвольного числа упорядоченных слагаемых, равных** 1 **или** 2? *Например $F_4 = 5$, так как $4 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.*

Ответ: F_n — числа Фибоначчи, определённые в задаче 1.21.

Давайте попробуем развить идею многочленов, применённую в предыдущей задаче. А именно, давайте построим многочлен

$$F(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \ldots$$

Это бесконечная сумма называется **производящей функцией последовательности** чисел Фибоначчи $\{F_n\}$. При x^n стоит число F_n, равное количеству способов представления числа n в виде суммы **произвольного числа упорядоченных слагаемых равных 1 или 2**.

Мы знаем, чему равно число представлений числа n **в виде k слагаемых, равных 1 или 2**, — это коэффициент при x^n в $(x+x^2)^k$. Чтобы получить при x^n число представлений n в виде произвольного числа слагаемых нужно сложить $(x+x^2)^k$ с разными k:

$$F(x) = 1 + (x+x^2) + (x+x^2)^2 + (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + \ldots$$

Первая единичка соответствует $k=0$: сумму в 0 тубриков мы можем представить в виде нуля монет и, при этом, единственным образом. Используя результат задачи 1.23, куда подставляем $z = x + x^2$, получаем

$$F(x) = \frac{1}{1-(x+x^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \tag{1.2}$$

Тождества 1.2 и 1.1 называются разложениями в ряд Тейлора функций $\frac{1}{1-z}$ и $\frac{1}{1-x-x^2}$.

Задача 1.25 (7) *Докажите тождество*

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{31} + x^{32}$$

Подсказка. Умножьте обе часть на $(1-x)$.

Задача 1.26 (8) *Используя результат предыдущей задачи, докажите, что любое число можно представить в виде суммы степеней двойки так, что каждая степень входит не более одного раза. Докажите единственность представления.*

Задача 1.27 (9) *Докажите тождество*

$$(x^{-1}+1+x)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)(x^{-27}+1+x^{27}) = x^{-40}+x^{-39}+\ldots+x^{-1}+1+x+\ldots+x^{39}+x^{40}$$

Подсказка. Докажите сначала, что $(x^{-1}+1+x)(x^{-3}+1+x^3) = x^{-4}+x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}+1+x+x^2+x^3+x^4$. Используйте Метод Математической Индукции.

Задача 1.28 (9) *У нас есть гири с весами* 1, 3, 9, 27. *Используя результат предыдущей задачи, выясните, какие веса можно представить на двухчашечных весах и сколькими способами.*

Ответ: Все веса от -40 до 40 единственным образом. Например, $1 = 1$, $2 = 3-1$, $3 = 3$, $4 = 3+1$, $5 = 9-3-1$, …

Задача 1.29 (11) *Пусть $\tilde{p}_n$ — число представлений числа n в виде суммы* **произвольного числа упорядоченных произвольных** *натуральных слагаемых. Например* $\tilde{p}_3 = 4$ $(3 = 1+1+1 = 2+1 = 1+2 = 3)$. *Докажите, что $\tilde{p}_n = 2^{n-1}$.*

Решение. Определим функцию

$$\tilde{p}(x) = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 x + \tilde{p}_2 x^2 + \tilde{p}_3 x^3 + \tilde{p}_4 x^4 + \ldots$$

— **производящая функция последовательности** $\{\tilde{p}_n\}$.

$$\tilde{p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x+x^2+x^3+x^4+\ldots)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x} = \frac{1-2x+x}{1-2x} = 1 + \frac{x}{1-2x} =$$

$$= 1 + x(1+2x+(2x)^2+(2x)^3+(2x)^4) = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \ldots + 2^k x^{k+1} + \ldots$$

Это доказывает утверждение задачи. □

Есть другой способ показать, что $\tilde{p}_n = 2^{n-1}$. А именно, представим, что у нас есть n клеточек подряд. И в каждую клетку мы можем поставить либо $\cdot$, либо $\cdot+$. Число точек всегда будет рано n. Каждой такой конфигурации мы можем поставить в соответствие разбиение числа n на упорядоченные слагаемые. Для $n = 5$ имеем $[\cdot|\cdot|\cdot+|\cdot|\cdot] \to 5 = 3+2$, $[\cdot|\cdot+|\cdot+|\cdot|\cdot] \to 5 = 2+1+2$, … Мы просто заменяем m подряд идущих точек на m. Так как в каждую клетку мы можем ставить один из двух возможных вариантов, то всего будет 2^n вариантов. Точнее 2^{n-1}, так как в последней клетке всегда должна стоять просто точка — разложения заканчивающиеся на + не имеют смысла. □

Задача 1.30 (11) *Пусть p_n — число представлений числа n в виде суммы* **произвольного числа неупорядоченных произвольных** *натуральных слагаемых. Например, $p(3) = 3$, так как $3 = 1+1+1 = 2+1 = 3$. Определим функцию $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots$. Докажите тождество:*

$$p(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots}$$

Подсказка. $\frac{1}{1-x^k} = (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots)$ — в этой скобке x^{km} соответствует m слагаемых равных k.

Тождество Эйлера

Леонард Эйлер в 1748 году ввел функции $\phi_n(x)$:

$$\phi_n(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)$$

Задача 1.31 (8) *Раскройте скобки в $\phi_n(x)$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.*

Ответ:

$$\begin{aligned}
&\phi_1(x) = 1 - x\\
&\phi_2(x) = 1 - x - x^2 + x^3\\
&\phi_3(x) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6\\
&\phi_4(x) = 1 - x - x^2 + 2x^5 - x^8 - x^9 + x^{10}\\
&\phi_5(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^6 + x^7 - x^8 - x^9 - x^{10}\dots\\
&\phi_6(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + 2x^7 - x^9 - x^{10}\dots\\
&\phi_7(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 + x^8 - x^{10}\dots\\
&\dots
\end{aligned}$$

Оказалось, что коэффициенты этого многочлена стабилизируются, то есть каждый из них, начиная с какого-то момента, уже не меняется (существует предел $\phi_n(x)$ при $n \to \infty$). Это легко понять, если посмотреть на равенство $\phi_n(x) = (1-x^n)\phi_{n-1}(x)$. Умножение на $(1-x^n)$ не меняет коэффициентов при x^k для $k = 1, 2, \dots, n-1$. Например, при $n > 10$ функции $\phi_n(x)$ имеют одинаковые коэффициенты при x^k, $k \leqslant 10$. При больших n все больше коэффициентов стабилизируется и мы получаем предельную функцию

$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Из приведённых выше примеров можно вывести, что $a_0 = a_5 = a_7 = 1$, $a_1 = a_2 = -1$, $a_3 = a_4 = a_6$. Если мы подсчитаем ϕ_n до $\phi_1 1$, то обнаружим, что $a_8 = a_9 = a_1 0 = 0$. Главное, что после раскрытия скобок практически все слагаемые сокращаются, и только некоторые остаются равными либо 1, либо -1.

Эйлер нашел, что

$$\phi(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \dots$$

Степени, которые встречаются в этом выражении равны $\frac{3k^2 \pm n}{2}$, а знаки чередуются: два плюса, потом два минуса и т.д.

Из тождества Эйлера и свойства $p(x)\phi(x) = 1$ следует рекурентная формула для p_n — количества разложений на неупорядоченные слагаемые числа n.

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} - p_{n-22} - \dots$$

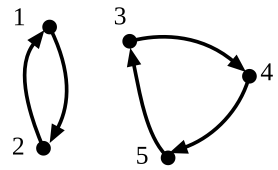
Задача 1.32 (8) *Найдите p_7 непосредственно, перечислив все разложения, а потом, используя рекурентную формулу. Сравните результаты.*

Ответ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
p_n	1	2	3	5	7	11	15	22	30	...

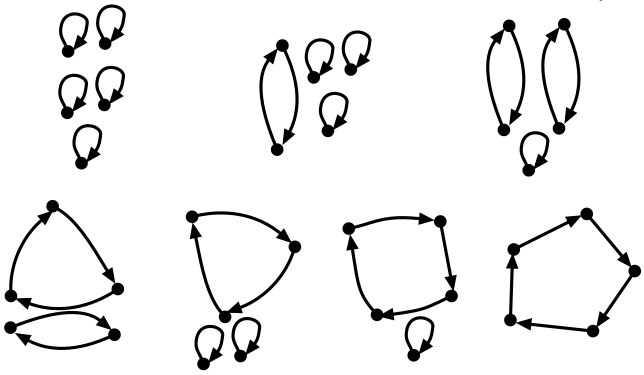
Связь с перестановками Как вы помните, число перестановок n элементов рано $n!$. Перестановки можно понимать как биективные отображения на себя. Это значит, что каждый элемент переходит в какой-то другой элемент, и никакие два не переходят в один и тот же элемент. Если было 12345 а стало 21453, то значит что 1 перешло в 2, 2 перешло в 1, 3 перешло в 4 ...: $1 \to 2 \to 1$, $3 \to 4 \to 5 \to 3$. Можно нарисовать картинку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$



Эта картинка называется **разложением перестановки на циклы**. Вопрос: А сколько всего перестановок, разложение на циклы которых имеют один и тот же вид? Когда нам неважно какие именно элементы переставляются, мы можем стереть обозначения вершин и **рассматривать перестановки с точностью до изоморфизма**. Две перестановки изоморфны, если одну можно получить из другой переобозначением переставляемых элементов.

Рассмотрим перестановки **пяти** элементов. Их всего **семь** штук.



Первая перестановка соответствует перестановке, которая ничего не переставляет: $\begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix}$. Последняя — это циклическая перестановка $\begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$.

Утверждение 1.3 *Количество различных с точностью до изоморфизма перестановок n элементов равно p_n.*

Комбинаторика и ГРАФЫ

Задача 1.33 (7) Найдите число способов, какими можно по стрелочкам добраться из A в B (см. рисунок 1.2)).

Подсказка. Запишите рядом с каждой вершиной число способов добраться до неё из вершины A. Начните с вершин, ближайших к A. Примечание. Числа, которые будут получаться слева на рисунке в), называются **числами Каталана**. Они появляются во многих комбинаторных задачах.

Задача 1.34 (Хромая ладья, 8) *В каждой клетке квадрата 8×8 напишите количество путей "хромой ладьи" из левой нижней клетки квадрата в эту клетку. (Хромая ладья ходит только на одну клетку вправо либо на одну клетку вверх). Какое число будет записано в правой верхней клетке, если ладья стоит в левой нижней?*

Подсказка. Посмотрите случай б) предыдущей задач

Задача 1.35 *Петя может прыгать на одну или две ступеньки вверх. Сколькими способами он может допрыгать до 10 ступеньки.*

Подсказка. Решите задачу 1.33 для случая на картинке 1.3 Числа внизу — это нумерация вершин, числа вверху — число путей из вершины 1 в данную. Число над вершиной 6 есть количество способов добраться до 6-ой супеньки.

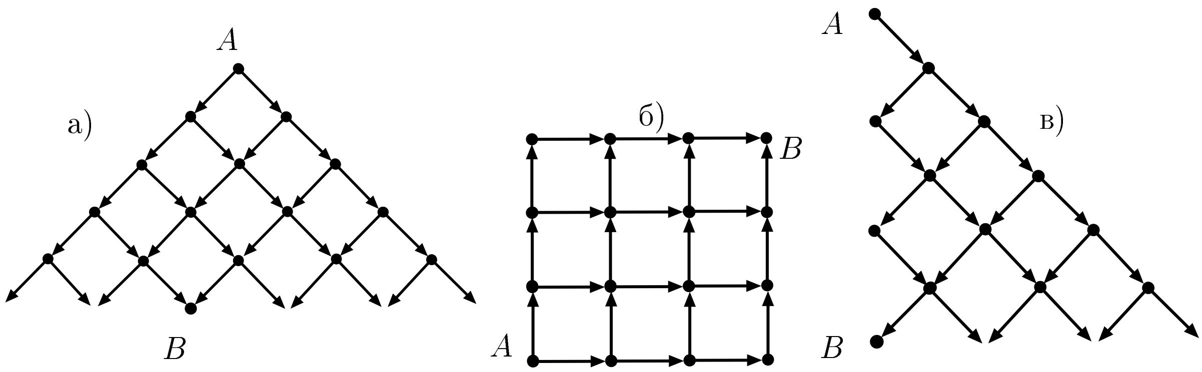


Рис. 1.2: Количество путей из A в B?

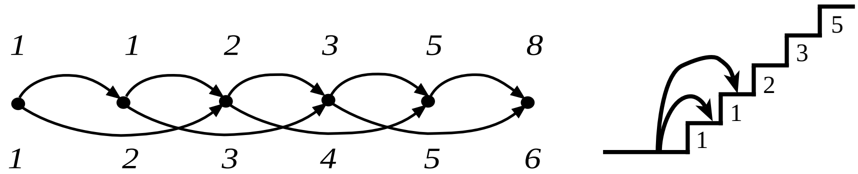


Рис. 1.3: Количество путей из вершины 1 в вершину 6 равно 8.

Задача 1.36 *Решите задачу 1.33 для случая на картинке 1.4.*

Подсказка. Применяйте **принципы умножения и сложения**.
Ответ: а) $2 \cdot 5$. б) $2 \cdot 4 + 2$.

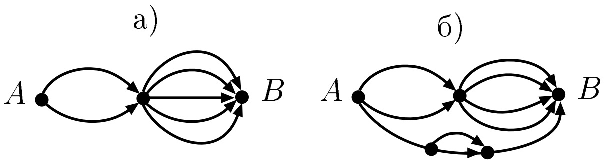


Рис. 1.4: Количество путей из A в B?

Контрольные задачи

Задача 1.37 (7,8) Сколько было бы доминошек, если на их половинках можно было записывать числа а) от 0 до 5? б) от 0 до 100?

Подсказка. Обычных доминошек 28 штук. На их половинках записаны числа от 0 до 6. Всего 7 дублей и $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ “недублей”.

Задача 1.38 (7) Игральную кость кидают два раза. Сколько существует способов набрать в сумме 9 очков (варианты (3,6) и (6,3) считаем различными)?

Задача 1.39 (7) У племени Маба-Буба не слишком хорошо развит язык. В их алфавите всего 4 буквы — {М,А,Б,У}. Подсчитайте число возможных четырёх-буквенных слов, а) считая, что допускаются все возможные комбинации этих четырёх букв; б) считая, что после согласной всегда идет гласная и наоборот; в) считая что, что все буквы в слове должны быть разные; г) считая, что не могут идти две одинаковых буквы подряд.

Задача 1.40 (8) Решите предыдущую задачу для восьми-буквенных слов.

Задача 1.41 (7) У нас есть семь бусинок семи разных цветов. Сколько всего ожерелий мы сможем из них сделать (при составлении ожерелья нужно использовать все бусинки)?

Задача 1.42 (7) Сколькими способами можно разбить 9 школьников на две команды, в одной из которых — 5 человек, а в другой — 4 человека?

Задача 1.43 (7) Сколько всего слагаемых получится после раскрытия скобок в выражении $(1+x)^n$; а) без приведения подобных слагаемых; б) после приведения подобных слагаемых?

Ответ: а) 2^n. б) $n+1$.

Задача 1.44 (7) Найдите сумму всех чисел 5-ой строчки треугольника Паскаля.

Задача 1.45 (8) Чему равно C_{20}^2?

Задача 1.46 (8) Раскройте скобки в $(1+2x)^6$.

Задача 1.47 (8) Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1+x)^{10}$.

Задача 1.48 (7,11,11,11) Найдите число решений уравнения в натуральных числах а) $x_1+x_2+x_3=7$, б) $x_1+x_2+x_3+x_4=20$, в) $x_1+2x_2+4x_3=15$, г) $x_1+2x_2=x_3+x_4$, $x\leqslant 10$,

Подсказка. В случае а) ответом будет коэффициент при x^7 в бесконечном многочлене $\frac{1}{(1-x)^3}$ откуда следует рекурентная формула $a_n=3a_{n-1}-3a_{n-2}+a_{n-3}$, $a_1=a_2=0, a_3=1$ но проще непосредственно перечислить. В случае б) ответ равен коэффициенту при x^20 в $\frac{1}{(1-x)^4}$, рекурентная формула $a_n=4a_{n-1}-6a_{n-2}+4a_{n-3}-a_{n-4}$. $a_1=a_2=a_3=0$, $a_4=1$. В случае д) нужно показать, что $(1-x)(1-x^2)(1-x^4)=1-x-x^2+x^3-x^4+x^5+x^6-x^7$, и использовать рекурентное соотношение $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+a_{n-4}-a_{n-5}-a_{n-6}+a_{n-7}$

Задача 1.49 (13) Докажите, что число p_n разбиений на упорядоченные слагаемые числа n равно числу решений в неотрицательных целых числах уравнения $x_1+2x_2+3x^3+4x_4+5x_5+\ldots=n$

Задача 1.50 (8) Докажите, что $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots\pm C_n^n=0$.

Задача 1.51 (10) В куче лежит n пронумерованных синих и n пронумерованных красных шариков. Чему равно число способов взять из кучи n шариков? Считайте, что последовательность их взятия не важна. Докажите, что

$$C_{2n}^n=C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+\ldots+C_n^nC_n^0 \tag{1.3}$$

Подсказка. У нас $2n$ разных шариков, нужно выбрать n, и мы можем сделать это C_{2n}^n способами. Это число способом можно подсчитать по-другому: сначала выберем некоторое количество красных (k штук), а потом доберём синих ($n-k$ штук). Рассмотрим все возможные k.

Задача 1.52 (10) Докажите тождество 1.3, используя

$$(1+x)^{2n}=(C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n)^2$$

Задача 1.53 (9) Посмотрите на пятую строчку треугольника Паскаля. Там стоят числа, которые делятся на 5 (кроме крайних единиц). Посмотрите на 7-ую строчку. Там все числа кроме крайних единичек делятся на 7. Докажите, что для любого простого числа p число C_p^k делится на p при всех k, кроме $k = 0$ и $k = p$.

Задача 1.54 (8) Разбейте на циклы перестановку $\begin{pmatrix} 1234567 \\ 5674321 \end{pmatrix}$.

Задача 1.55 (7) Сколькими способами можно выбрать произвольное непустое подмножество из множества, содержащего n элементов?

Подсказка. Сначала разберитесь с задачей без слова “непустое”. Попробуйте решить её для множеств $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$.

Задача 1.56 (7) Решите задачу 1.33 для случая на картинке 1.5.

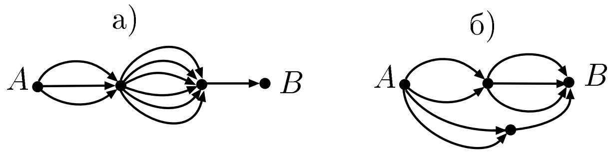
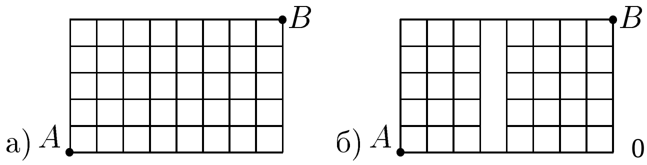
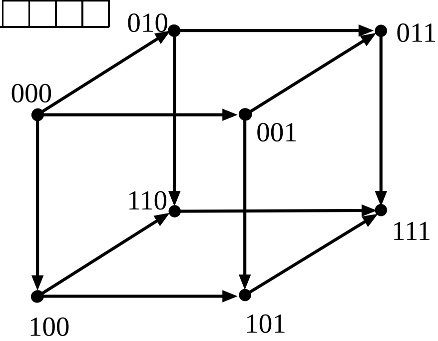


Рис. 1.5: Количество путей из A в B?

Задача 1.57 (8) План города имеет схему, изображенную на рисунке. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только “вправо” или “вверх”. Сколько есть разных маршрутов, ведущих из точки A в точку B?



Ответ: а) C_{13}^5. б) $C_8^5 + C_9^5$.



Задача 1.58 (8) Найдите число способов, каким можно добраться из вершины куба 000 в вершину 111. Из вершины A ведет стрелочка в B, тогда и только тогда, когда соответствующее слово B получается из слова A изменением одного нуля на единицу.

Задача 1.59 (11, 15) Сколько всего перестановок $n = 7$ элементов, которые не оставляют ни один элемент на месте (не содержат циклов длины один)? Найдите ответ для произвольного n. Найдите аналитический вид соответствующей производящей функции.

Задача 1.60 (Скобки–Числа Каталана, 8) Правильными скобочными структурами называются выражения вида (), (()()), (()(()())) ... Скобок всегда чётное число, n открывающих и n закрывающих, причем на каждый момент открытых должно быть не меньше чем закрытых.)(— неправильная скобочная структура. Число правильных скобочных структур длины $2n$ называется числом Каталана c_n:

$$\begin{array}{r|l|l}
0 & & c_0 = 1 \\
1 & () & c_1 = 1 \\
2 & ()(),\ (()) & c_2 = 2 \\
3 & ()()(),\ (())(),\ ()(()),\ (()()),\ ((())) & c_3 = 5 \\
4 & ()()()(),\ (())()(),\ ()(())(),\ ()()(()),\ (()()()),\ \ldots & c_4 =?
\end{array}$$

Найдите c_4 и c_5 (число правильных скобочных структур длины 8 и 10).

Ответ: $c_4 = 14$, $c_5 = 42$. $\{c_n\} = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots\}$

Задача 1.61 (10) Докажите свойство чисел Каталана:

$$c_{n+1} = c_n c_0 + c_{n-1} c_1 + \ldots + c_1 c_{n-1} + c_0 c_n$$

Задача 1.62 (14) Найдите аналитическое выражение производящей функции чисел Каталана.

Задача 1.63 (12) Найдите явную формулу чисел Каталана.
Ответ: $c_n = \frac{2n!}{(n+1)(n!)^2}$

Задача 1.64 (14) Рассмотрим множество гладких функций с пятью минимумами, которые уходят в бесконечность при сильно больших и сильно отрицательных значениях аргумента. Назовём две такие функции f_1 и f_2 эквивалентными, если существуют две гладкие строго возрастающие функции h_{in} и h_{out}, такие что $f_1(x) = h_{out}(f_2(h_{in}))$. Найдите число классов эквивалентности.

Задача 1.65 (12) Рассмотрим множество отображений конечного множества A на конечное множество B (каждый элемент из A переходит в какой-то элемент из B, причём, в каждый элемент из B кто-то переходит). Назовём два таких отображения f_1 и f_2 эквивалентными, если существуют перестановки h_A и h_B на множествах A и B соответственно, такие что $f_1(x) = h_B \circ f_2 \circ h_A$, то есть если сначала переставить элементы A потом применить отображение f_2 на B, а потом переставить элементы B перестановкой h_B, то получим f_1. Найдите число классов эквивалентности, если размеры множеств равны $|A| = 10$, $|B| = 5$.
Ответ: =7, что есть число разбиений 10 на 5 упорядоченных слагаемых. {{6, 1, 1, 1, 1}, {5, 2, 1, 1, 1}, {4, 3, 1, 1, 1}, {4, 2, 2, 1, 1}, {3, 3, 2, 1, 1}, {3, 2, 2, 2, 1}, {2, 2, 2, 2, 2}}.

Задача 1.66 (8) Сколько различных байт, в которых ровно 4 единицы и никакие две единицы не идут подряд?
Ответ: 5.

Подсказка. Если рассматривать слова длины $2n$ в которых n единиц, и нет спаренных единиц, то 1) $n = 1$: 01, 10. 2) $n = 2$: 1001, 1010, 1010. 3) 101001, 101010, 101010, 010101 … Чтоб получить следующий случай, мы должны выписать все слова из предыдущего и дописать к ним в начало 10 и, кроме того, дописать одно слово вида 01010101 … .

Задача 1.67 (10) Сколько байт, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

Задача 1.68 (10) Сколько различных девятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3,...9 (каждая цифра используется ровно один раз) таких, чтобы никакие две нечётные цифры не стояли рядом?
Ответ: $5! \cdot 4!$

Задача 1.69 (10) Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2,...,6 (каждая цифра используется ровно один раз) таких, чтобы никакие две нечётные цифры не стояли рядом?
Ответ: $3! \cdot 3! \cdot 4$.

Подсказка. Посмотрите задачу 1.66.

Задача 1.70 (10) Сколькими способами можно разбить 24 школьников на четыре команды по 6 человек?
Ответ: $\frac{24!}{(6!)^4 \cdot 4!}$.

Задача 1.71 (7,8,9,10) Решите системы уравнений:

$$\text{а)} \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ x+y &=& 0 \\ x+2y+z &=& 0 \\ x+3y+3z+t &=& 0 \end{array} \right. \qquad \text{б)} \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ x+2y &=& 0 \\ x+3y+3z &=& 0 \\ x+4y+6z+4t &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\text{в)} \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x+2y+3z &=& 0 \\ x+4y+9z &=& 0 \end{array} \right. \qquad \text{г)} \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1 \\ x+2y+3z+4t &=& 0 \\ x+4y+9z+16t &=& 0 \\ x+8y+27z+64t &=& 0 \end{array} \right.$$

Ответ: $\{x, y, z, t\}$ = а) $\{1, -1, 1, -1\}$, б) $\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0\}$. Если продолжить систему до бесконечной, то в качестве решения получим числа Бернулли $\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, \ldots\}$. в) $\{x, y, z\} = \{3, -3, 1\}$. г) $\{x, y, z, t\} = \{4, -6, 4, -1\}$.
Примечание. Если рассмотреть последовательность систем,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ x+2y &=& 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x+2y+3z &=& 0 \\ x+4y+9z &=& 0 \end{array} \right. \qquad \ldots$$

и записать ответы друг под другом, то получится почти треугольник Паскаля.

Семинар 2

Анализ: МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

План занятия

- Метод Математической Индукции на классических примерах
- ММИ в геометрии
- Задачи на делимость
- Доказательство тождеств ММИ

Основные понятия

Метод Математической Индукции — это метод решения задач в четыре этапа:

> [БАЗА] Покажем, что доказываемое утверждение верно для некоторых простейших частных случаев $n = 1$, $n = 2$, ...
>
> [ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ] Предполагаем, что утверждение доказано для первых K случаев.
>
> [ШАГ] В этом предположении доказываем утверждения для случая $n = K + 1$.
>
> [ВЫВОД] Утверждение верно для всех случаев, то есть для всех n.

Вы видите, что Методом Математической Индукции (ММИ) можно решать не все задачи, а только задачи запараметризованные некоторой переменной. Эта переменная (обозначим её n) называется *переменной индукции*. Мы будем рассматривать только простой случай, когда $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые задачи

Классическая задача, которая решается ММИ, это

Задача 2.1 (7, Ханойская башня) Три штырька и n колец разного размера. Класть можно только маленькое кольцо на большее. Можно ли переместить пирамидку с одного штырька на другой? Каково количество шагов?

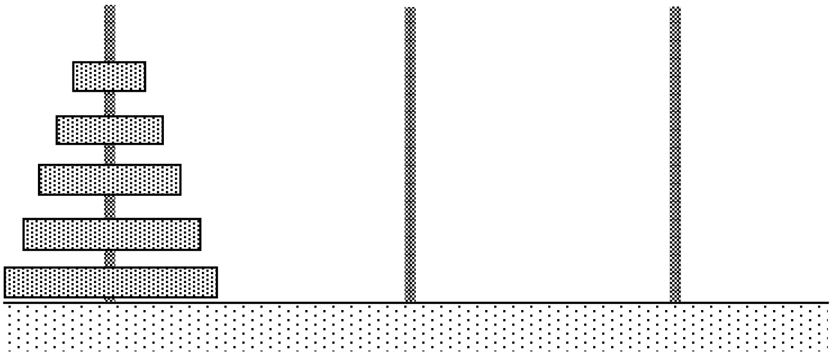


Рис. 2.1: Головоломка “Ханойская башня”.

Решение. Здесь роль переменной индукции играет количество колец в пирамидке. Понятно, что пирамидки с $n = 1$ и $n = 2$ можно переместить. Это будет базой индукции.

[БАЗА] Пирамидки с $n = 1$ и $n = 2$ можно переместить (очевидно).

[ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ] Предположим, что мы умеем перемещать пирамидки с числом колец $n \leqslant K$

[ШАГ] Попробуем научиться перемещать пирамидку с $n = K + 1$. Пирамидку из K колец, лещащих на самом большом (K+1)-ом кольце, мы можем согласно предположению переместить на любой другой штырёк. Сделаем это. Неподвижное $(K+1)$-ое кольцо не будет нам мешать провести алгоритм перемещения, так как оно самое большое. После перемещения K колец, переместим это самое большое $K + 1$ кольцо на оставшийся стержень. И затем опять применим, известный нам по предположению, алгоритм перемещения K колец и переместим их на штырек с лежащим внизу $(K + 1)$-ым кольцом. Таким образом, если мы умеем перемещать пирамидки с K кольцами, то умеем перемещать пирамидки и с $(K + 1)$ кольцом.

[ВЫВОД] Следовательно утверждение верно для всех случаев, то есть для всех n.

Итак, мы доказали возможность переместить пирамидку. Число шагов при этом равно $2^n - 1$. Доказательство этого сводится к решению следующей задачи. □

Задача 2.2 (8) *Числа* $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, ... *удовлетворяют соотношению* $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1$. *Докажите, что* $a_n = 2^n - 1$.

Решение.

[БАЗА] Первые числа действительно подходят под эту формулу:

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1, \quad a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

[ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ] Предположим, что формула верна для $n \leqslant K$.
[ШАГ] Докажем что она верна и для $n = K + 1$:

$$a_{K+1} = 2a_K + 1 = 2(2^K - 1) + 1 = 2 \cdot 2^K - 2 + 1 = 2^{K+1} - 1.$$

То есть для $n = K + 1$ предполагаемая формула тоже подходит.
[ВЫВОД] Следовательно формула верна для любых n. □

Следующий пример из теории чисел.

Задача 2.3 (7) *Докажите бесконечность числа простых чисел.*

Решение. Будем доказывать, что мы можем предъявить n простых чисел.

[БАЗА] Мы можем предъявить два простых числа: 2 и 3.

[ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ] Предположим, что мы смогли предъявит K простых чисел: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_K$.

[ШАГ] Предъявим $(K+1)$-ое. Сделаем это так. Определим число

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_K + 1$$

Это число не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_K$, так как при делении на них оно дает остаток 1. Значит, либо число M есть новое простое число, и тогда мы его и предъявим в качестве p_{K+1}, либо M составное, и тогда простые числа, на которые оно делится, не могут быть равны ни одному из чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_K$. Возьмем один из простых делителей M в качестве следующего $(K+1)$-ого простого числа.

[ВЫВОД] Следовательно, мы сможем предъявить сколько угодно много простых чисел. □

Задачи

Задача 2.4 (7) + Докажите, что с помощью монет достоинством 3, 4 можно представить любую сумму больше чем 5.

Подсказка. Достаточно найти представления трёх чисел 6=?, 7=?, 8=?. Это будет БАЗОЙ индукции.

Задача 2.5 (7) Докажите, что любое число можно представить в виде суммы степеней двойки так, что каждая степень встречается не более одного раза. Например, $13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0$, $18 = 16 + 2 = 2^4 + 2^1$.

Задача 2.6 (8) Докажите, что любое число можно представить в виде суммы степеней тройки так, что каждая степень встречается не более одного раза либо со знаком +, либо со знаком −. Например, $4 = 3 + 1$, $7 = 9 - 3 + 1$, $14 = 27 - 9 - 3 - 1$.

Задача 2.7 (9) Есть ли такое число N, начиная с которого любую сумму $\leqslant N$ можно представить монетами 5 и 8?

Игра 2.1 (“Конфета") *Есть натуральное число N — “конфета”. Игроки по очереди “откусывают” не больше половины от имеющегося кусочка. Проигрывает тот, кто не может откусить от оставшегося единственного “кванта конфеты”.*

Вот как выглядит карта выигрышных-проигрышных позиций для $N \leqslant 21$: (“+” — выигрышная, “−” — проигрышная позиция)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
−	+	−	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+

Задача 2.8 (9) *Докажите ММИ, что проигрышные конфеты — это конфеты* $\{2^n - 1\}$.

Задача 2.9 (10) Докажите, что $a_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ натуральное число: $a_n \in \mathbb{N}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Подсказка. Для БАЗЫ индукции найдите a_0 и a_1. Для доказательства ШАГА индукции покажите, что $a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$.

Задача 2.10 (9, На делимость) Докажите, что
а) сумма квадратов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9,
б) $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16, в) $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

ММИ в геометрии

Задача 2.11 (7, Триангуляция) Докажите что любой n-угольник можно разделить на треугольники непересекающимися диагоналями.

Задача 2.12 (8) Докажите что сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)180°$, (или $(n-2)\pi$ радиан). В частности для треугольника получаем $(3-2)180° = 180°$, а четырёхугольника $(4-2)180° = 360°$

Задача 2.13 (8) Докажите, что любые n прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках.

Задача 2.14 (8) Чему равно количество кусочков, на которые эти прямые делят плоскость? Одна прямая — на две части, две — на четыре. А пятнадцать прямых?

Задача 2.15 (7, Раскраска плоскости) Плоскость разделена на части n прямыми. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, что соседние куски раскрашены в разные цвета.

Задача 2.16 (7) Докажите, что при каждом натуральном n, начиная с 3, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

Подсказка. ШАГ: Пусть есть такой K-угольник. Возьмём один из его тупых углов и отрежем его. Число вершин станет $K+1$. Новые два угла, появившиеся вместо старого, будут ещё тупее, так как они — внешние углы отрезанного треугольника.

Применение ММИ для доказательства тождеств

Задача 2.17 (7-10) Докажите следующие равенства
а) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
б) $1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$
в) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3}$
г) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
д) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Задача 2.18 (9) Докажите ММИ тождество $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Задача 2.19 (8) Найдите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$$

Подсказка. Угадайте явное выражение для $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$.

Задача 2.20 (9) Докажите, что

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Задача 2.21 (11) Найдите сумму

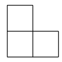
$$1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2^2} + 3\frac{1}{2^3} + \ldots$$

Понимание и умение применять принцип математической индукции является хорошим критерием логической зрелости

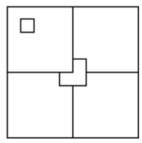
А. Н. Колмогоров

Контрольные задачи

Задача 2.22 (7) Обратите внимание на то, что $1 = 1$, $1+3 = 4$, $1+3+5 = 9$, $1+3+5+7 = 16$. Сделайте предположение и докажите его по индукции.

Задача 2.23 (7) Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на “уголки” из трёх клеток . Докажите это для квадрата $2^n \times 2^n$.

Подсказка. ШАГ: Разбиваем квадрат на четыре квадрата и вырезаем из каждой недырявой части угловую клетку так, чтобы вырезанные клетки образовали уголок:



Задача 2.24 (8) На доске записана рациональное число $q = \frac{m}{n}$. Его можно стереть и записать вместо него либо $q + 1 = \frac{m+n}{n}$, либо $\frac{1}{q} = \frac{n}{m}$. Докажите, что с помощью указанных двух операций можно из единицы получить любое рациональное число. Например $\frac{2}{5}$ можно получить так

$$1 \to 2 \to \frac{1}{2} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{2} \to \frac{2}{5}.$$

Задача 2.25 (7) Докажите, что любую сумму, начиная с 8 тугриков, можно выплатить купюрами по 3 тугрика и 5 тугриков.

Подсказка. Либо как в задаче 2.4 предъявить разложения сумм в 8, 9 и 10 тугриков. Прибавляя к ним монеты по 3 тугрика, мы сможем получить любое число >8. Либо второй вариант: Пусть представили сумму K. Представим сумму в $K+1$ тугрик. Меняем купюру в 5 тугриков на две купюры по 3 тугрика. Если же пятитугриковых купюр нет — меняем три купюры по 3 тугрика на две купюры по 5 тугриков...

Задача 2.26 (9) В Вишкиландии имеются в обращении банкноты в 7 и 11 рублей. Докажите, что ими можно уплатить без сдачи любую сумму, начиная с 60 рублей. Докажите, что со сдачей можно уплатить любую сумму.

Задача 2.27 (8) У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых общего положения, на каждой из которых с одной из сторон растут волосы. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется волосатой снаружи.

Решение. Число прямых — переменная индукции. БАЗА: Для одной прямой очевидно. ШАГ: Пусть мы провели K прямых и такая часть нашлась. Тогда сконцентрируемся на ней а все остальное сотрём. Рисуем $K+1$ прямую. Она для нашей части все равно что первая.

Задача 2.28 (8) В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трёх цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трёх цветов.

Задача 2.29 (8) Плоскость поделена на области несколькими прямыми и окружностями. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. (Соседними считаются области, имеющие общий участок границы.)

Задача 2.30 (10) Строители строят одноэтажный дом из бетонных плит, окрашенных с одной стороны в синий цвет, а с другой — в жёлтый. Сначала возводятся наружные стены, а затем по одной ставятся перегородки так, что каждая новая перегородка закрепляется концами к уже существующим стенам или перегородкам. Докажите, что если снаружи дом синий, то в нем есть хотя бы одна полностью жёлтая комната.

Подсказка. Эта задача похожа на задачу 2.27, только про волосатый снаружи куб, рассеченный волосатыми плоскостями.

Задача 2.31 (10) В компании из n человек ($n > 3$) каждый узнал по новому анекдоту. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им анекдоты. Докажите, что за $2n - 4$ разговоров все смогут узнать все новые анекдоты.

Задача 2.32 (7) Докажите, что в любом n-угольнике, $n > 3$, можно провести диагональ, лежащую целиком внутри него.

Задача 2.33 (8) Докажите, что выпуклых n-гранников бесконечное количество.

Задача 2.34 (11) Докажите, что для четных n

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n \alpha d\alpha = \pi \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots}{n\cdot(n-2)\cdot\ldots}.$$

В частности, $I_0 = \pi$, $I_2 = \pi\frac{1}{2}$, $I_4 = \pi\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}$, $I_6 = \pi\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}$. А для нечётных n

$$I_n = 2\frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots}{n\cdot(n-2)\cdot\ldots}$$

В частности, $I_1 = 2$, $I_3 = 2\frac{2}{3}$, $I_5 = 2\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}$.

Подсказка. Запишите как $\int \sin\alpha d(-\cos\alpha)$ и проинтегрируйте по частям. Получите соотношение между I_n и I_{n-2}.
Примечание. Общее решение, как при четных, так и при нечётных n, можно записать так

$$I_n = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

где $\Gamma(x) = (x-1)!$ при натуральных x и гладко прололжена на остальные вещественные x.

Задача 2.35 (12, Неравенство Коши) Докажите ММИ, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Подсказка. Можно доказывать так: Сначала ММИ докажем это равенство для всех n равных степни двойки. Это делается так: группируем числа в пары, подставляем средние арифметические этих пар в предыдущее, доказанное по предположению индукции, равенство. Затем, применяем неравенство $(a+b)/2 > \sqrt{ab}$ для всех средних в правой части. После того, как докажем это неравенство для случаев, когда n есть степень двойки, индукцией вниз распространяем на остальные n.

Задача 2.36 (14) В равностороннем треугольнике со стороной 1 высота равна $h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, в равностороннем тетраэдре со стороной 1 высота равна $h_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Чему равна высота в n-мерном симплексе?

Подсказка. $h_n^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n}h_{n-1}\right)^2$.

Семинар 3

Теория графов: ПРОГУЛКИ ПО ГРАФАМ

План занятия

- Что такое Метод Математической Индукции?
- Что такое ГРАФ?
- Деревья, циклы и Формула Эйлера
- Прогулки по графу

Основные понятия и ключевые задачи

Мы будем считать, что вы уже имеете некоторое понятие о Методе Математической Индукции (см. предыдущий семинар). Этот метод доказательства очень активно используется в **теории графов**.

Напомним, что *Метод Математической Индукции* — это метод решения задач в четыре этапа: [БАЗА] Покажем, что доказываемое утверждение верно для некоторых простейших частных случаев $n = 1$, $n = 2$, ... [ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ] Предполагаем, что утверждение доказано для первых K случаев. [ШАГ] В этом предположении доказываем утверждения для случая $n = K + 1$. [ВЫВОД] Утверждение верно для всех случаев, то есть для всех n.

Определения. Множество точек, некоторые из которых соединены линиями, называются графами. Точки называются **вершинами** графа, а линии — **рёбрами**.

Степенью вершины графа называется число исходящих из неё рёбер. Если степень вершины равна 0, то вершина называется **изолированной**. **Чётностью вершины** называется остаток при делении её степени на два. Вершина называется **висячей** или **листом графа**, если её степень равна 1.

Задача 3.1 (4) *Определите степени вершин графов на рисунке 3.1.*

Задача 3.2 (7) *Докажите по индукции, что в любом графе чётное число вершин с нечётной степенью.*

Решение. Докажем, что сумма степеней вершин — чётное число. Сумма нескольких натуральных чисел чётное число тогда и только тогда, когда среди них чётное число нечётных слагаемых — то, что и нужно доказать.

Переменной индукции будет число вершин. БАЗА: Для простейшего графа с одной вершиной это действительно так. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ: Пусть мы доказали это утверждение для всех графов с числом вершин $\leqslant K$. ШАГ: Докажем, что оно верно и для любого графа с $(K+1)$ вершиной. Возьмем любой граф с $(K+1)$ вершиной. Выберем у него произвольную вершину и сотрём её. Если её степень m, то сумма степеней вершин уменьшилась на $m+m=2m$. А именно, у m вершин степень уменьшилась на 1, и исчезла одна вершина с степенью m. $2m$ — чётное число, значит чётность суммы степеней не изменилась.

Другой вариант доказательства. В качестве переменной индукции возьмём число рёбер. ПРЕДПОЛОЖИМ, что для графов с K рёбрами всё доказано. ШАГ индукции проще, чем в предыдущем доказательстве: в графе с $(K+1)$ ребром сотрем одно ребро. При этом изменяется чётность двух вершин — концов этого ребра. Сумма степеней вершин уменьшилась на 2, поэтому чётность этой суммы одинакова для исходного графа с $(K+1)$ ребром и получившегося графа с K ребрами. Но по предположению, у любого графа с K рёбрами сумма степеней вершин чётное число. ВЫВОД: Сумма степеней вершин есть чётное число для всех графов. БАЗА индукции в данном случае — графы у которых 0 рёбер. Их бесконечное число. Это множества изолированных вершин, которых может быть сколько угодно. За каждый ШАГ индукции мы доказываем утверждение тоже сразу для бесконечного числа графов.

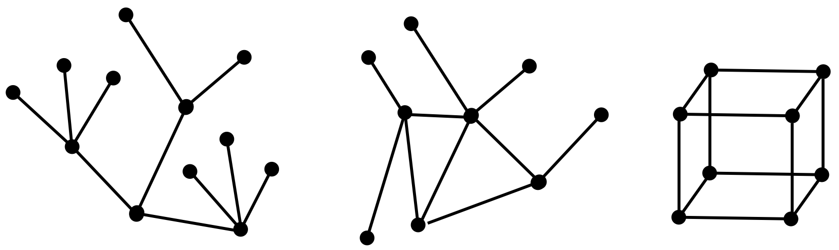


Рис. 3.1: Примеры графов

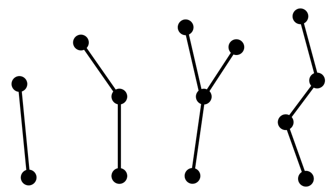


Рис. 3.2: Примеры простейших деревьев

Задача 3.3 (10) *В графе с $2n$ вершинами n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть три вершины, попарно соединённые ребрами.*

Решение. Пусть утверждение верно для произвольного графа с $2K$ вершинами. Докажем, что оно верно и для графа с $2(K+1)$ вершинами и $(K+1)^1+1$ рёбрами. Рассмотрим произвольные две соединённые ребром вершины A и B. Если существует вершина C, из которой идут рёбра и в A и в B, то треугольник нашёлся. Если же такой вершины нет, то из вершин и ведёт не более $2K$ рёбер, так как кроме A и B есть ещё $2K$ вершин, всего $2K+2$ и ни в одну из этих вершин из A и B не должно вести более одного ребра. Поэтому, если убрать из графа вершины A и B, то останется $2K$ вершин и не менее чем $(K+1)^2+1-1-2K=K^2+1$ рёбер. И тогда по ПРЕДПОЛОЖЕНИЮ индукции в оставшейся части графа найдётся треугольник.

Задача 3.4 (9) *В некоторой компании $\geqslant 4$ человек среди любых четверых есть человек знакомый с остальными троими. Доказать, что есть человек, который знает всех остальных.*

3.1 Формула Эйлера

Граф называется **связанным**, если из любой вершины можно дойти по рёбрам до любой другой. Граф называется **деревом**, если он связанный и в нем нет циклов. **Циклом** называется замкнутый путь в графе по рёбрам (вершина, откуда начали идти, является также и конечной вершиной пути), такой что никакое ребро не проходилось дважды. На рисунке 3.1 первый граф есть дерево, два других — графы с циклами.

Задача 3.5 *Пусть B — число вершин, P — число ребер. Докажите, что в любом дереве*

$$B - P = 1$$

Подсказка. Для простейших деревьев это действительно так (см. рис. 3.2). Переменной индукции у нас будет число вершин. Предположение сделаем такое: пусть для всех деревьев, у которых меньше, чем K вершин, наше утверждение доказано. Возьмем любое дерево с K вершинами. Найдем висячую вершину. Сотрём её. Исчезнет одна вершина и одно ребро, и разность $B - P$ не изменится.

А теперь, рассмотрим различные выпуклые n-гранники. На рис. 3.3 показаны тетраэдр, куб, пирамида, октаэдр. У n-гранников есть рёбра (P), вершины (B) и грани (Γ).

Задача 3.6 *Докажите формулу Эйлера:*

$$B - P + \Gamma = 2$$

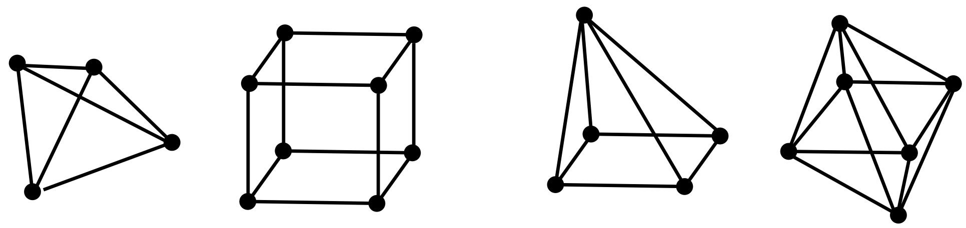


Рис. 3.3: Примеры выпуклых многогранников

Подсказка Для простейших n-гранников это действительно так. Переменной индукции у нас будет число граней. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ сделаем такое: пусть для всех многогранников, у которых меньше, чем K граней, наше утверждение доказано. ШАГ: Возьмем любой многогранник с K гранями. Возьмем любую его грань. Пусть эта грань l-угольник. Её можно стянуть в точку-вершину. При этом у нас исчезнет одна грань, l вершин, и l ребер, зато появится одна новая вершина вместо неё. У получившегося многогранника число граней меньше на единицу. А значит, по предположению индукции для него формула Эйлера верна. Но тогда формула Эйлера верна и для нашего K-граника, так как у него на 1 грань больше, на l рёбер меньше, и на $l - 1$ вершин меньше. А значит, величина $B - P + \Gamma$ у него такая же.

Здесь есть несколько тонкостей. Например, при упрощении многогранника могут получится две вершины соединённые несколькими рёбрами. Тогда лишние рёбра можно убирать. При этом число рёбер и граней уменьшается на одно и то же число, и по прежнему величина $B - P + \Gamma$ не меняется.

Следующая тонкость — БАЗА индукции. Нужно определится с набором элементарных многогранников, к которым все остальные многогранники сводятся с помощью указанных двух операций (убирание грани и убирание лишних рёбер).

Попробуйте осуществить индукцию по количеству рёбер. При этом удобно иметь дело с *планарными развертками* многогранников. На рисунке 3.4 показаны планарные развертки первых трёх фигур с рисунка 3.3.

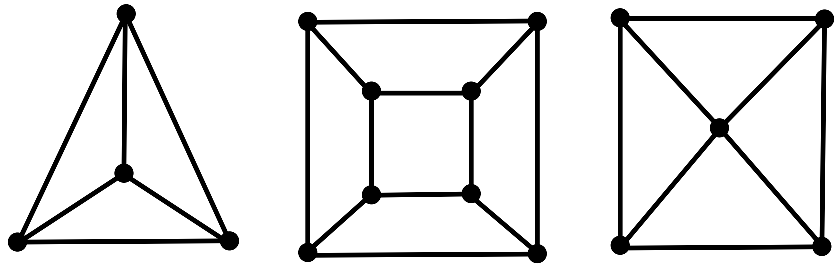


Рис. 3.4: Планарные развёртки тетраэдра, куба, и четырёхугольной пирамиды

3.2 Прогулки по графам

Мы с вами рассматривали неориентированные графы. Если ребра у графа стрелочки, то краф называется **ориентированным**. Две вершины (A,B) в графе называются связными, если из одной можно добраться до другой по стрелочкам.

Задачи об ориентированных графах очень часто возникают в жизни. Например, вершины – это города, а стрелочки — авиалинии их соединяющие.

Обычный, неориентированный граф называется **полным**, если любые две вершины соединены ребром. Ориентированный граф называется полным, если из он полный в обычном смысле, когда мы забываем про направление рёбер.

Задача о связности двух вершин в полном ориентированном графе.

Задача 3.7 (7) *В стране Графландии любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что есть город, из которого можно добраться до любого другого.*

Решение. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ: Пусть для стран, в которых K городов, это верно. (Число городов — переменная индукции) ШАГ: Рассмотрим страну ч $K+1$ городом. Уберём произвольный город X. По предположению индукции среди оставшихся K городов найдётся город A, из которого можно добраться до любого другого города (из этих K городов). Если дорого между A и X ведёт в X, то A нам подходит. Если из X в A, то нам подходит город X — из него мы доберёмся до города A, а затем в любой другой город станы Графландии. □

Следующая задача — **задача о существовании обхода полного ориентированного графе**. **Обход** — это путь по стрелкам, обходящий все вершины ровно однин раз.

Задача 3.8 (9) *Доказать, что в стране Графландии можно проехать по всем городам, побывав в каждом по одному разу.*

Решение. ШАГ ИНДУКЦИИ. Уберём произвольный город A. По индукционному предположению оставшуюся часть можно обойти, пусть этот путь начинается с города X. Если дорога между A и X ведёт в X, то можно из A переехать в X, и проехать оттуда по оставшимся городам. Если же эта дорога ведёт в A, то рассмотрим последний город на пути из X. Пусть это город C. Если дорога между A и C ведёт в A, то искомый маршрут $= X - ... - C - A$. Иначе рассмотрим первый город на пути $A - .. - C$, в который ведёт дорога из X. (назовём его Y, а предыдущий — Y_1) и воспользуемся маршрутом $X - ... - Y_1 - A - Y - ... - C$. □

Задача 3.9 (9) *Усадьбы любых двух джентльменов в графстве Вишкиль соединены либо водным (лодочка), либо сухопутным (карета) сообщением. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы любой джентльмен мог по-прежнему добраться до любого другого.*

Решение. Индукция по числу усадьб. ШАГ. Уберём произвольую усадьбу A. По ПРЕДПОЛОЖЕНИЮ одного вида транспорта достаточно, чтобы связать любые две из оставшихся. Пусть, для определённости, это водный путь. Если из A можно добраться водным путём хотя бы в одну усадьбу водным путём, то можно добраться и до любой другой. Если же из A во все остальные города ездит карета, то из любого города до любого другого можно добраться каретой через город A. □

Задача обхода — побывать во всех вершинах по одному разу. Задача **эйлерова пути** — пройтись по каждому ребру по одному разу. Найти эйлеров путь значит нарисовать на бумаге граф, не отрывая ручку и не проводя одну и ту же линию дважды.

Задача 3.10 (8) Когда эйлеров путь является в то же время обходом графа?

Задача 3.11 (7, О существовании эйлерова пути I) Пусть в обычном, неориентированном связном графе из всех вершин исходит чётное число ребер. Докажите, что его можно обойти весь по рёбрам, не проходя ни по какому ребру дважды. То есть докажите, что существует эйлеров путь.

Задача 3.12 (9, О существовании эйлерова пути II) Докажите, что в связном графе есть эйлеров путь тогда и только тогда, когда у него либо нет, либо ровно две нечётные вершины.

3.3 Контрольные задачи

Задача 3.13 (7) Нарисуйте планарную развертку октаэдра (четвертая фигура на рисунке 3.3). Подсчитайте число рёбер, вершин и граней.

Задача 3.14 (7) Чему равно число рёбер в полном графе с 10 вершинами?

Задача 3.15 (10) В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой не более чем с одной пересадкой.

Решение. Индукция по числу городов. БАЗА очевидна. Для доказательства индукционного перехода удалим сначала один из городов (назовём его A). В силу индукционного предположения есть город X с требуемым свойством. Если из X в A ведёт дорога, то город X искомый. Если же дорога ведёт из A в X, то рассмотрим все города, в которые ведёт дорога из X. Если хоть из одного из них ведёт дорога в A, то город X снова искомый. В противном случае во все эти города ведет дорога из A, и город A является искомым.

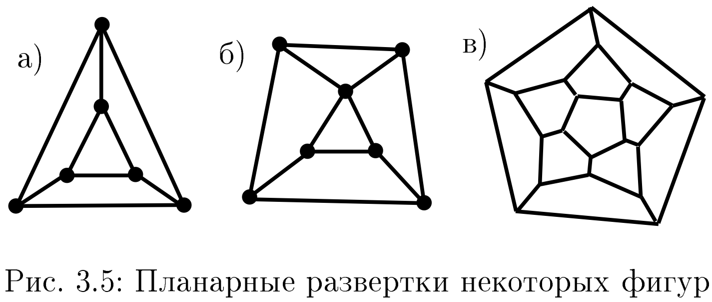
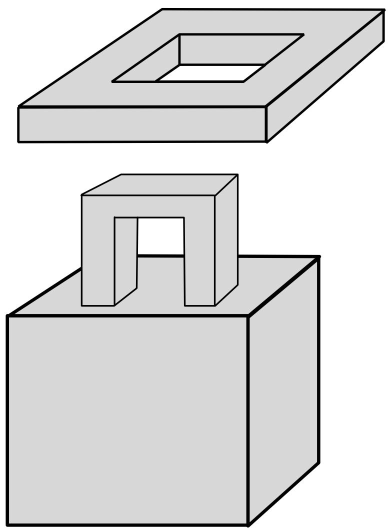


Рис. 3.5: Планарные развертки некоторых фигур

Задача 3.16 (14) Найдите нижнюю границу для числа ребер в графе, в котором n вершин и среди любых четырёх есть одна соединённая с отальными тремя.

Задача 3.17 (8) Посмотрите на фигуру справа. Это каркас тора. Вычислите для него $B - P + \Gamma$. Является ли он выпуклой фигурой?



Величина $B - P + \Gamma$ называется **эйлеровой характеристикой n-гранника**.

Задача 3.18 (9) Как изменится эйлерова характеристика каркаса тора, если мы из середины одного из четырёх брусков вырежем слой?

Задача 3.19 (9) а) Как изменится эйлерова характеристика каркаса тора, если мы поставим на него объемную букву **П** (добавим петельку)? б) Как изменится эйлерова характеристика куба после добавления к нему такой петельки?

Задача 3.20 (7) На рисунках 3.5а,б приведены планарные развертки некоторых выпуклых n-гранников. Найдите число их граней, рёбер и вершин.

Задача 3.21 (8) На рисунке 3.5в приведена планарная развертка додекаэдра. Найдите число граней додекаэдра, число рёбер и вершин.

Задача 3.22 (9) Доказать, что после окончания однокругового турнира по теннису его участников можно выстроить в ряд так, что каждый выиграл у следующего за ним в этом ряду.

Подсказка. Это переформулировка задачи о существовании пути в полном ориентированном графе.

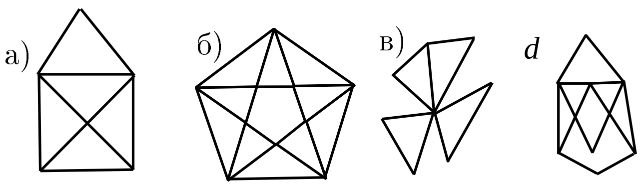


Рис. 3.6: Найдите эйлеров путь и обход, если такие существуют

Задача 3.23 (7) В каких из показанных на рисунке 3.6 графах существует элеров путь. Другими словами, какие из этих рисунков можно нарисовать не отрывая ручку от бумаги. Если он есть, пронумеруйте вершины и запишите его.

Семинар 4

Теория Игр
ЦАРСТВО НИМ

План занятия

- Что такое Игра?
- Давайте поиграем
- Конечные и бесконечные, цветные и нейтральные, простые и сложные игры
- Понятие выигрышной позиции и выигрышной стратегии
- Граф игры
- Давайте поиграем

Что такое ИГРА?

Бывает, что во время урока математики,
когда даже воздух стынет от скуки, в класс
со двора влетает бабочка... *А.П. Чехов*

Примеры игр: крестики-нолики, шахматы, шашки, реверси...

Сразу договоримся, что футбол, “дурака”, ‘пьяницу”, “Эпоху Империй”, “Казаки”, “верю-не-верю”, “мамонта”, ляпы ... рассматривать не будем. Во первых, это слишком сложные игры, во-вторых, слишком интересные. А наука, как мы знаем, рассматривает только скучное, простое и неинтересное.

Игра — это, говоря по секрету, раскрашенный в два цвета граф. Но вы, естественно, этому не поверите. Поэтому давайте дадим такое определение:

Определение 4.1 Игра — *это набор игровых позиций, про каждую из которых игрокам известно, как (в какие другие позиции) может ходить каждый из них.*

Если возможные ходы игроков из одной и той же позиции отличаются (например в шахматах, так, как может ходить белый, не может ходить черный, и наоборот), то игру назовем **цветной**. Иначе — игра **нейтральная**.

Шахматы, шашки, крестики-нолики, фараоны, Го — цветные игры.

А вот пример нейтральной игры. Это древняя китайская игра “Ним”. В неё любили играть китайские императоры. Тем, кто у них выигрывал, отрубали голову.

Игра 4.1 (“Ним”) *Есть три кучки камней с числом камней —* $\{3, 2, 1\}$*. Играющие по очереди забирают любое количество камней из любой кучки. Проигрывает тот, кому нечего забирать.*

Итак, “Ним” — нейтральная игра.

Задача 4.1 *Вспомните какую-нибудь игру и определите нейтральная она или цветная.*

Как нужно играть, чтоб выиграть в “Ним”?

Задача 4.2 *Поиграйте в “Ним” друг с другом. Есть ли выигрышная стратегия у первого? А у второго?*

Для того, чтобы разобраться с этим, давайте рассмотрим различные игровые позиции. Во-первых, сколько игровых позиций? Перечислим все: {1}, {1,1}, {2,1}, {1,1,1}, {2,1,1}, {2,1}, {3,1}, {3,1,1}, {2,2,1}, {3,2}, {3,2,1}. Это позиции, в которые мы можем попасть через некоторое, произвольное число ходов. Далее. Очевидно, что в позиции {1,1} выигрывает второй, а в позициях {1}, {1,1,1} выигрывает первый.

Задача 4.3 *Докажите, что позиции* $\{2,1\}$*,* $\{3,1\}$*,* $\{2,1,1\}$ *— выигрышные.*
Решение. Они выигрышные, потому что из них можно сходить в $\{1,1\}$.

Задача 4.4 *Докажите, что позиция* $\{2,2\}$ *— проигрышная.*

Теперь, когда вы, наверное, уже придумали выигрышную стратегию для второго, давайте разберемся, что такое *выигрышная стратегия.*

Что такое выигрышная стратегия?

Определение 4.2 *Позиции, в которых выигрывает тот, кто ходит первым, назовём* **выигрышными***, а в которых выигрывает второй —* **проигрышными***.*

“Выигрывает” — это значит имеет возможность ходить так, и так отвечать на ходы противника, чтобы выиграть у него, независимо от того, как противник будет ходить. Эта возможность + описание того, как нужно отвечать на ходы соперника называется **выигрышной стратегией**. Другими словами, если игрок умный и хочет выиграть и ходит первым из выигрышной позиции, то он выиграет. Но как бы ни был умён игрок, он может проиграть даже дураку, если будет ходить первым из проигрышной позиции.

Задача 4.5 *Докажите, что позиция* $\{10,10\}$ *проигрышная, то есть проигрывает тот, кто ходит первым.*

Задача 4.6 *Докажите, существование выигрышной стратегии для игрока, который ходит вторым в игре “Ним”* $\{3,2,1\}$*.*

Важно понять, что в данном случае кроме проигрышных и выигрышных позиций никаких других позиций нет. Это довольно сложно, и, кроме того, для некоторых игр это неверно. А сейчас, рассмотрим **граф игры** “Ним” (рис 4.1).

Определение 4.3 Граф игры *— это множество точек, каждая из которых обозначает одну из возможных игровых ситуаций, соединённых стрелочками (направленными рёбрами) синего или красного цвета. То, что из точки A ведёт синяя стрелочка в точку B, означает, что “синий” игрок может из позиции A сходить в позицию B. Если игра нейтральная, то все синие и красные стрелочки повторяют друг друга, и удобно рисовать чёрные стрелочки. Чёрные стрелочки — это стрелочки по которым могут ходить как “синий”, так и “красный” игрок.*

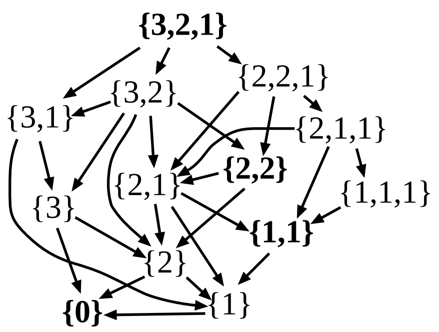


Рис. 4.1: Граф игры “Ним” {3,2,1}.

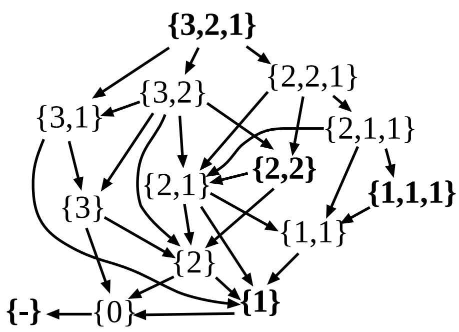


Рис. 4.2: Граф игры “Ним” {3,2,1} в поддавки.

Мы забыли сказать, что древние китайские императоры любили отрубать голову тем, кто у них выигрывал в “Ним”. Давайте в связи с этим решим задачу об игре “Ним” в поддавки: тот кто взял последний камень, тот и проиграл.

Задача 4.7 *Кто выигрывает при правильной игре в “Ним” в поддавки? Нарисуйте граф игры.*

Решение. {1} — проигрышная позиция. Значит, все позиции, из которых в неё можно сходить, будут выигрышными. Это позиции: {2}, {3}, {1,1}, {2,1}, {3,1}. Дальше мы должны найти позицию, из которой можно сходить только в эти выигрышные позиции. Это будет {2,2} — проигрышная позиция, так как из неё нельзя сходить в проигрышную позицию (поставить своего соперника в проигрышную позицию). Позиции из которых можно сходить в {2,2} есть выигрышные. Это {3,2} и {2,2,1}. Теперь из оставшихся позиций, {1,1,1}, {2,2,1}, {3,1,1} нужно найти такую, из которой можно сходить только в хорошие позиции(выигрышные позиции). Это {1,1,1} — плохая, проигрышная позиция. Значит {2,1,1} и {3,1,1} — хорошие. Смотрим на {3,2,1}. Из неё нельзя сходить ни в одну из проигрышных позиций ({1},{1,1,1},{2,2}), а значит она сама проигрышная. Как видите, и в поддавки и в обычный “Ним” позиция {3,2,1} является проигрышной. В этом нет никакого противоречия. Граф игры показан на рисунке 4.2. □

“–”	“+”
{1}	{2}, {3}, {1,1}, {2,1}, {3,1}
{2,2}	{3,2} {2,2,1}
{2,1,1}	{2,1,1} {3,1,1}
{3,2,1}	

Игра 4.2 (“Конфета") *Есть натуральное число N — “конфета”. Игроки по очереди “откусывают” не больше половины от имеющегося кусочка. Проигрывает тот, кто не сможет откусить от оставшегося единственного “кванта конфеты”.*

Давайте разберем подробно эту игру. Конфета величиной в один квант — {1} — проигрышная позиция. Конфета {2} — выигрышная. Далее: {3} — проигрышная, потому что из ней можно сходить только в конфету {2}. Из {4} можно сходить в {3}, а значит поставить соперника в плохую ситуацию. Значит {4} — выигрышная позиция.

Ответ будет таким: (“ + ” — выигрышная, “–” — проигрышная)

1	2	**3**	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	20	21
–	+	–	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+

Задача 4.8 (10) *Докажите Методом Математической Индукции, что проигрышные конфеты — это конфеты* $\{2^n - 1\}$.

Игра 4.3 (“Вариации Конфеты") *Игроки по очереди “откусывают”*

а) 3, 5 или 8 квантов.
б) 2^n *квантов, где* $n = 0, 1, 2 \ldots$.
в) n^2 *квантов, где* $n = 1, 2 \ldots$.

Проигрывает тот, кто не может ничего откусить от “конфеты”.

Задача 4.9 *Нарисуйте табличку проигрышных–выигрышных позиций и попытайтесь угадать закономерность для этих трёх случаев.*

Задача 4.10 *Нарисуйте граф игры “Конфета”* $N = 5$.

Давайте возвратимся к “Ниму”. Рассмотрим его естественное обобщение.

Игра 4.4 (“Ним”) *Есть кучки камней* $\{n_1, n_2, \ldots, n_l\}$, n_i *— число камней в* i*-ой кучке. Играющие по очереди забирают любое количество камней из любой кучки. Проигрывает тот, кому нечего забирать.*

Надо ответить на вопрос: кто выиграет при правильной игре? Начнем по порядку. Первая идея, которая у на есть — это **идея симметрии**.

Задача 4.11 *Докажите, что в игре* $\{3, 3, 1, 1\}$ *выигрывает второй.*

Решение. Действительно, разобьем кучки на две одинаковые группы: $\{3, 1\}$ и $\{3, 1\}$. Тогда, как бы ни сходил первый, мы (второй игрок) будем делать аналогичный ход, только в другой группе. И так далее. Симметричный ход всегда будет существовать и нам всегда будет куда ходить. Поэтому мы не проиграем, а значит выиграем. □

Утверждение 4.1 *Во всех симметричных играх выигрывает второй.*

“Ним” $\{3, 2, 1\}$ — несимметричная игра. Но в ней все равно выигрывает второй.

Задача 4.12 *Позиция* $\{3, 3, 1\}$ *выигрышная или проигрышная?*

Задача 4.13 *Позиция* $\{4, 3, 1\}$ *выигрышная или проигрышная?*

Задача 4.14 *Позиция* $\{100, 100, 1\}$ *выигрышная или проигрышная?*

Задача 4.15 *Докажите, что игра “Ним”* $\{n, n, 1\}$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$ *является выигрышной.*

Следующая идея: если из набора куч, который есть выбросить симметричную составляющую, то характеристика позиции не изменится (если была проигрышная позиция, то и останется проигрышной, если была выигрышная, то останется выигрышной). Например, в предыдущей задаче можно было выкинуть $\{100, 100\}$. Позиция $\{1\}$ выигрышная, значит и $\{100, 100, 1\}$ тоже выигрышная.

Проигрышные позиции будем называть **нулевыми**. $\{3, 2, 1\}$, $\{7, 7\}$, $\{2, 1, 2, 1\}$ — нулевые. Откуда взялось такое название станет ясно из следующего утверждения.

Утверждение 4.2 *Если к позиции добавить или отнять нулевую позицию, то характеристика позиции не изменится.*

Решение. Действительно, если мы складываем выигрышную позицию A с позицией B, то $A+B$ — тоже выигрышная. Мы, играя первыми, будем играть на части с позицией A и выиграем там, а всякий раз когда соперник будет делать ход в часть B, будем парировать, благо по условию в части B есть выигрышная стратегия для второго.

Если обе игры нулевые, то и в результате тоже будет нулевая игра. Второй будет иметь выигрышную стратегию на обеих частях доски. На каждой из частей он сможет успешно отвечать на ходы первого. Не важно, сыграют они сначала на одной части, а потом на другой, или будут переносить игру с одной части на другую. Второй будет ходить в ту часть, в какую сходил первый. □

Задача 4.16 *Докажите, что* $\{3, 2, 1, 100, 100\}$ *является нулевой позицией.*

Итак, сложение любой позиции с нулевой позицией не меняет её характеристику. Правильнее говорить не о сумме позиций, а о сумме игр.

Рассмотрим игры, которые формулируются как "... проигрывает тот, кому некуда ходить". Тогда сумма двух игр соответствует параллельной игре "на двух досках". Проигрывает в такой игре тот, кому некуда ходить ни на первой, ни на второй доске.

Задача 4.17 *Найдите сумму игр, графы которых изображены на рисунках 4.3.*

Подсказка. Получится игра, в которой $4 \times 5 = 20$ позиций. Каждая позиция — это пара = (позиция в игре А, позиция в игре В). Из одной пары можно сходить в другую, если либо первая часть обоих пар одинаковая, а во второй части сделали ход, либо наоборот. Попробуйте сначала сложить что-нибудь попроще.

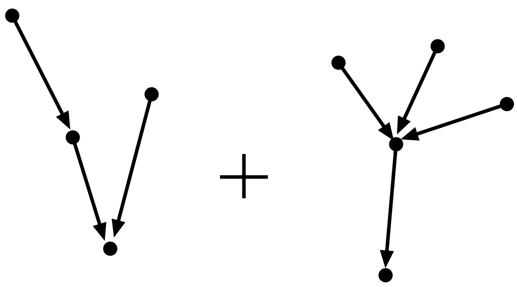


Рис. 4.3: Найти сумму игр

Игра 4.5 *На доске два числа —* $\{7, 8\}$*. Игроки по очереди стирают наибольшее и пишут вместо него любое меньшее натуральное число. Выигрывает тот, кто сходит в позицию* $\{1, 1\}$*.*

Игра 4.6 *Дан выпуклый n-угольник. Игроки по очереди соединяют любые две из его вершин диагональю. Не допускается, чтобы из одной вершины выходило 3 или больше диагоналей. Проигрывает тот, кто не может провести диагональ.*

Теперь мы откроем вам великую тайну. Царство НИМ — это множество конечных нейтральных игр с введенной на них операцией сложения. Все элементы этого царства зашифрованы натуральными числами. Все проигрышные игры (позиции) зашифрованы нулём. Остальным присвоены натуральные числа по такому правилу: игре A соответствует число $M = Nimber(A)$, если это минимальное из натуральных чисел, отсутствующих в множестве чисел игр (позиций), в которые можно сходить из A.

Теорема 4.1 (Главная) *При сложении двух конечных нейтральных игр соответствующие им Nimber'ы XORятся (читается как "ксорятся").*

$$Nimber(A+B) = Nimber(A) \oplus Nimber(B)$$

XOR ($\oplus$) двух натуральных чисел осуществляется так: оба числа представляются в двоичной системе счисления, записываются друг под другом и осуществляется побитовое сложение по модулю 2 без переноса на старшие разряды. Если игра имеет ненулевой Nimber, то она выигрышная.

Примеры операции XOR:

$$\begin{array}{r} \oplus\ 1010 \\ 1001 \\ \hline 0011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \oplus\ 101110 \\ 1011 \\ \hline 100101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \oplus\ 101011 \\ 111011 \\ \hline 10000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \oplus\ 101011 \\ 1111 \\ 100101 \\ 10001 \\ \hline 10000 \end{array}$$

Попросту говоря, считается количество единиц в каждом столбике: четное — внизу пишем 0, нечетное — 1.

Следствие 4.1.1 *В игре "Ним" $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ есть выигрышная стратегия для первого тогда и только тогда, когда $Nimber = XOR(m_1, m_2, \ldots, m_k) = 0$. Иначе есть выигрышная стратегия для второго.*

Примеры. Nimber игры "Ним" из одной кучки с n камнями есть n:

$$Nimber(\text{"Нимб"}\{n\}) = n$$

В случае одной кучки всегда выигрывает первый. Это очевидно. Когда мы берем несколько кучек, то это все равно, что сложить несколько однокучковых игр "Ним". $Nimber(\text{"Нимб"}\{10, 9\}) = 3$ (первый пример операции XOR), значит в игре "Нимб"$\{10, 9\}$ выигрывает второй. Зато $Nimber(\{10, 9, 3\}) = 0$, и в ситуации $\{10, 9, 3\}$ есть выигрышная стратегия у второго. Какова она?

Задача 4.18 *Найдите $Nimber(\{5, 1\})$, $Nimber(\{9, 8, 1\})$.*

Общая стратегия такова. Если в текущий момент набор кучек таков, что их *Nimber* не равен 0, то вы должны сходить так, чтоб он стал равен 0. Второй из позиции с нулевым *Nimber*-ом сможет сходить только в позицию с ненулевым *Nimber*-ом. Вы после его хода снова сходите в позицию с нулевым Nimber'ом, и так далее. Конечная позиция – полное отсутствие камней – имеет нулевой *Nimber*, а значит, когда-нибудь именно вы в неё сходите и выиграете. Это правило доказывается проще, чем приведённая выше общая теорема.

Задача 4.19 *Докажите, что если в позиции $\{m_1, \ldots, m_k\}$ игры "Ним" $XOR(m_1, \ldots, m_k) \neq 0$, то вы сможете сходить в новую позицию (уменьшив одно из чисел $\{m_1, \ldots, m_k\}$), для которой $XOR = 0$.*

Задача 4.20 *Докажите, что если в позиции $\{m_1, \ldots, m_k\}$ игры "Ним" $XOR(m_1, \ldots, m_k) = 0$, то вы сможете сходить только в позиции, в которых $XOR \neq 0$.*

Решив эти две задачи, вы докажите последнее следствие, не доказывая самой теоремы.

А сама теорема доказывается Методом Математической Индукции, и довольно сложно. Доказательство. Пусть для некоторого класса игр-позиций это верно. Рассмотрим позицию X, из которой можно сходить только в позиции из этого класса. Присвоим ей по описанному правилу число, обозначим его M. Если $M = 0$, то это значит, что из неё можно сходить только в ненулевые позиции, где выигрывает первый. А значит в нашей игре выигрывает второй и она нулевая заслуженно. Если $M \neq 0$, то в ней, очевидно, выигрывает первый.

Сложность состоит в доказательстве того, что она подчиняется правилам сложения.

Давайте рассмотрим её сумму с любой игрой с таким же числом, про которую уже все доказано (например с игрой "Ним" $\{M\}$). Докажем, что эта игра, $X+$"Ним"$\{M\}$, нулевая. Если первый ходит на доску, где "Ним"$\{M\}$ и получает там позицию "Ним"$\{M')$, то мы, вторые, ходим в нашу игру X, так чтобы там стала позиция с Нимбером равным M'. Это мы можем сделать — по определению M мы из X можем сходить в позиции со всеми возможными нимберами меньше M. Если первый ходит на доску с игрой X получая X' с Нимбером M', который заведомо меньше M, то мы ходим на доску с "Ним"$\{M\}$ делая там "Ним"$\{M'\}$.

Давайте поиграем

Игра 4.7 ("Шоколадка") Шоколадка $m \times n$ кусочков. В начале игры целая. Игроки по очереди берут один из имеющихся кусочков шоколадки и разламывают его по одной из линий. Проигрывает тот, кому нечего разламывать, все кусочки 1×1. Например при шоколадке 1×3 выигрывает второй. Он вынужден сходить в ситуацию $\{1 \times 1, 1 \times 2\}$, а второй ходит в конечную ситуацию $\{1 \times 1, 1 \times 1, 1 \times 1\}$. В "Шоколадке" 2×2 выигрывает первый.

Игра 4.8 ("Обобщенный Ним") Есть лес деревьев. Играющие по очереди рубят одно любое из звеньев (стирают ребро графа). Куски деревьев не прикрепленные к земле тут же исчезают. Проигрывает тот, кому нечего рубить.

Это конечная нейтральная игра.

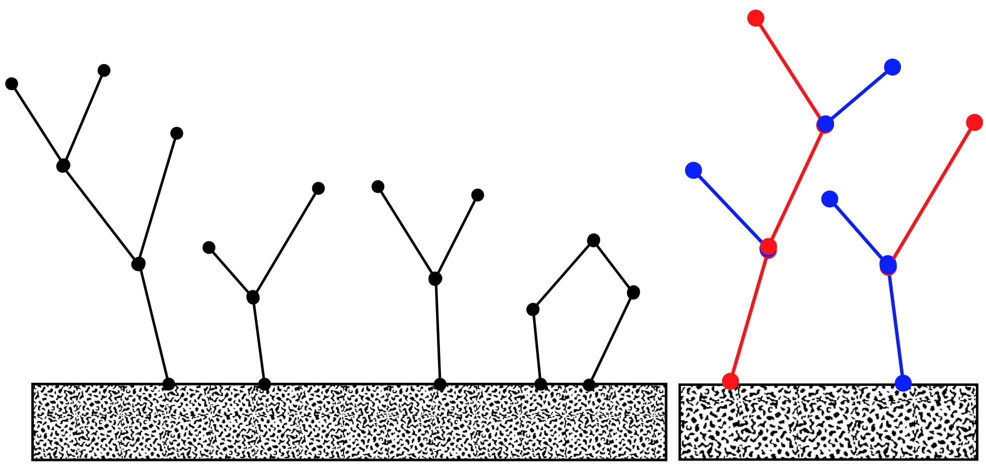


Рис. 4.4: Примеры игровых ситуаций для игр "Ним" и "Хаккенбуш".

Игра 4.9 ("Huckenbush") Есть лес деревьев, ветки которого (ребра графа) раскрашены в два цвета. Игроки тоже имеют цвет и могут рубить ребра только своего цвета.

Эта игра цветная. Она, как и предыдущая, конечная и имеет единственную проигрышную позицию — "пустыню" без деревьев. Шахматы же, как известно, имеют огромное количество матовых ситуаций. Кроме того, игре типа Хаккенбуш тоже можно присвоить число. Для игры A это число обозначим как $HN(A)$. Это действительнок число, оно может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Царство "Хаккенбуша" состоит из игр, графы которых не содержат "полосатых циклов". То есть во время игры игроки не могут вернутся в одну из предъыдущих позиций. Есть и другие ограничения.

Главная теорема для царства "Хаккенбуш" выглядит так:

Теорема 4.2 (Главная в царстве "Хаккенбуш") *При сложении двух игр A и B из царства "Хаккенбуш" получается игра из этого же царства и число игры равно сумме чисел игр*

$$HN(A+B) = HN(A) + HN(B)$$

Если число положительно, то выигрывают красные, независимо от того, какими по счету они ходят. Когда число игры отрицательно — всегда выигрывают синие. А когда ноль — выигрывает тот, кто ходит вторым.

Правило определения числа такое: рассмотрим позиции, в которые может сходить красный игрок, и найдем максимум чисел этих позиций, обозначим его R; рассмотрим множество игр, куда может сходить синий игрок, и найдем среди их чисел минимальное — B. Тогда наша исходная позиция имеет число равное $r = m/2^k$, $m \in \mathbb{Z}$, где $k \in \mathbb{N}$ такое что $r \in (R, B)$, а k самое минимальное из возможных.

Теорему и корректность определения мы доказывать не будем.

Игра 4.10 ("Рассада") Имеется граф, у которого чётность каждой вершины $\leqslant 3$. Игроки могут по очереди соединять существующие вершины ребром, не нарушая это правило. При этом на нарисованном ребре ставится еще одна вершина. Проигрывает тот, кто не может нарисовать ребро.

Эта игра нейтральная и бесконечная. В ней бесконечное число возможных позиций. И до сих пор не известно, кто в ней выигрывает — первый или второй, или у того и у другого есть непроигрышная стратегия.

Игра 4.11 ("Фараоны") Играют на клеточном поле двое игроков. Игроки ставят точки своего цвета в узлах клеточного поля. По одной точке за ход. Каждый старается окружить цепью своих точек как можно больше точек противника. Точки считаются соседними, если они являются вершинами одной и той же маленькой клеточки. Когда все узлы клеточного поля заняты, подсчитывается количество узлов окружённых красными, включая граничные и количество узлов окружённых синими. Чьих больше, тот и выиграл.

Эта игра цветная и конечная.

Контрольные задачи

Задача 4.21 (7) Поиграйте в "Ним" $\{5,4,1\}$. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 4.22 (7) Поиграйте в "Ним" $\{5,5,2,2\}$. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 4.23 (7) Поиграйте в "Шоколадку" 3×3. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 4.24 (7) Докажите, что в "Шоколадке" 14×14 выигрывает второй.

Задача 4.25 (9) Поиграйте в "Шоколадку" 10×3. Кто выигрывает при правильной игре? Чему равен Nimber шоколадки $3 \times n$?

Задача 4.26 (7,8) Поиграйте в игру "Конфета"4.3 случай в). Кто выигрывает при правильной игре, если размер конфеты равен а) 20, б) n?

Задача 4.27 (9) Поиграйте в игру "Конфета"4.3 случай в). Чему равен Nimber игры?

Задача 4.28 (9) Кто выигрывает в игре, являющейся суммой двух "Конфет"(игра 4.2) с а) $N_1 = 16$ и $N_2 = 32$, б) $N_1 = 10$ и $N_2 = 15$?

Задача 4.29 (14) Кто выигрывает в игре "Ним" в поддавки в ситуации $\{17,13,5,1\}$?

Задача 4.30 (13) Рассмотрим прямоугольник $n \times m$ разделённый на единичные квадратики. Игроки по очереди выбирают одну из вершин, являющуюся общей для двух или более квадратиков, и убирают все квадратики, которые выше и правее этой вершины. Можно еще ходить в самую нижнюю левую, но тот, кто туда сходит проигрывает. Докажите, что в такой игре, независимо от значений m и n выигрывает первый.

Семинар 5

Статика
СКОЛЬЗЯЩИЕ ВЕКТОРА

План занятия

- Главная задача динамики
- Понятие твердого тела
- Понятие силы и принцип линейности
- Эквивалентные и равновесные системы сил
- Признаки эквивалентности и равновесности

Теория “Скользящих векторов” непосредственно связана с физикой. Скользящие вектора — это *силы*, действующие на *твёрдое тело*. Чтобы понять приложение скользящих векторов в физике, необходимо представлять себе главную задачу динамики и основную идею движения тел под действием сил. Этой теме посвящен следующий раздел. Там наглядно объяснено понятие силы и вектора.

“Скользящие вектора” — это математическая игра с направленными палочками. У игры есть правила, которых надо придерживаться. Тот, кто хочет сразу начать играть, не отвлекаясь на связь этой игры с физикой, может перейти к части “Игра «Скользящие вектора»”

Динамика и её главная задача

Главная задача ДИНАМИКИ. Дана некоторая физическая система и известно её начальное состояние. Предсказать её состояние во все последующие моменты времени.

Вы, наверное, уже имели дело с частными случаями этой задачи. Например:

Задача 5.1 *Пусть тело состоит из одной точечной массы и в начальный момент имеет скорость V_0. Пусть на него действует постоянная сила F. Найти положение тела во все последующие моменты времени и его скорость.*

Ответ: Равноускоренное движение:

$$X(t) = X_0 + V_0 t + (F/2m)t^2 = X_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2},$$

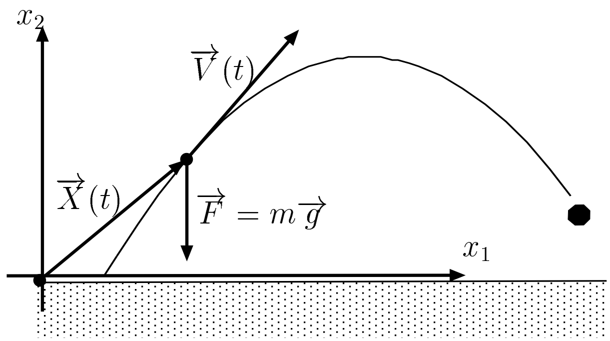
$$V(t) = V_0 + (F/m)t = V_0 + at$$

В школе обычно рассматривается *прямолинейное* движение. Но эти формулы верны и в случае пространственного движения, только над всеми величинами нужно поставить знак вектора.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}(t) &= \overrightarrow{X_0} + \overrightarrow{V_0}t + \frac{\overrightarrow{F}t^2}{2m} = \overrightarrow{X_0} + \overrightarrow{V_0}t + \frac{\overrightarrow{a}t^2}{2} \\ \overrightarrow{V}(t) &= \overrightarrow{V_0} + \frac{\overrightarrow{F}}{m}t = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{a}t \end{aligned} \tag{5.1}$$

Векторы в этих формулах могут быть направлены в разные стороны (см. рис. 5.1).

Галилей первый доказал, что траектория тела движущегося в пространстве при постоянной действующей на него силе есть парабола — брошенный камень летит по параболе (конечно, если забыть про силу трения о воздух, про непостояноство $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}(r)$).



$$\overrightarrow{X}(t) = \\ = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{matrix} \right\| t + \left\| \begin{matrix} 0 \\ -g \end{matrix} \right\| \frac{t^2}{2}$$

Рис. 5.1: Траектория движения камня под воздействием силы тяжести

Но дело в том, что камень — это не точечная масса! Он может вращаться, и, конечно, всё становится сложнее. Собственно говоря, тел, чья масса заключена в одной точке, вообще не бывает. Камню и любому другому твёрдому телу можно задать не только начальную скорость, но и раскрутить его.

Что такое твёрдое тело? Как дать строгое определение этому понятию?

Определение 5.1 В общем случае *твёрдое тело* можно представлять как набор точечных масс с фиксированными взаимными расстояниями между любыми двумя точками. Под такое описание подходят тела, представляющие собой систему маленьких тяжёлых шариков, соединённых крепкими невесомыми стержнями. Если взять очень много шариков, то можно с достаточной точностью описать любое твёрдое тело, например — деревянный стул. Но понятно, что для сложных тел, лучше использовать непрерывное описание, а именно, каждой точке тела поставить в соответствие значение плотности материи в данной точке. На языке математики это равносильно заданию скалярной положительной функции в трехмерном пространстве, связанном с телом.

Первые вопросы, которые следует себе задать, приступая к изучению динамики твёрдого тела: **1.** Что такое сила и системы сил? **2.** Как описать положение твёрдого тела в пространстве? **3.** Что нужно знать о распределении массы в твёрдом теле, чтобы решить главную задачу динамики? **4.** И наконец, как решить главную задачу динамики для любого твёрдого тела? Полный ответ на эти вопросы дал замечательный математик, положивший начало Петербургской академии наук, Леонард Эйлер. Сегодня, в теории движения твердого тела есть углы Эйлера, теорема Эйлера о представлении движения твердого тела, и сами, главные уравнения движения тоже названы в его честь — уравнения Эйлера движения твердого тела. Эйлер показал, что для вычисления движения твердого тела, достаточно знать массу тела, центр масс и тензор инерции (по сути, три числа, характеризующие меру инерционности вращения относительно трёх главных осей тела).

Решить главную задачу динамики для твердого тела означает следующее:

Задача 5.2 (о вычислении движения) *Дано начальное положение тела и начальное состояние движения (то есть начальная скорость каждой его точки). Известны все действующие на него силы в любой момент времени, начиная с начального. Найти положение тела в любой момент времени, начиная с начального.*

Положение тела — это его место в пространстве + ориентация.

Эта задача сложная, мы её решать не будем. Рассмотрим лишь случай, когда на тело не действуют никакие силы. Принцип Галилея гласит: **свободное тело (тело, на которое не действуют никакие силы) движется либо 1) равномерно (с постоянной скоростью) и прямолинейно, либо 2) покоится**. В случае твердого тела необходимо еще добавить: **..., равномерно вращаясь (с постоянной угловой скоростью) вокруг некоторой оси**. Этот принцип есть решение задачи о вычислении движения для случая, когда нет никаких сил.

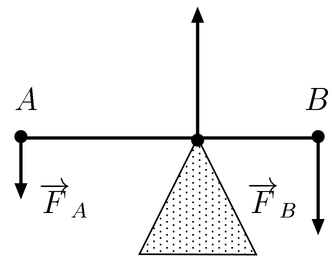


Рис. 5.2: Весы в равновесии — это равновесная система трёх сил.

Что значит фраза "нет никаких сил"? К одному месту стула мы можем одинаковой силой. Стул не сдвинется с места. Потому что эти две силы компенсируют друг друга. Другими словами, система из этих сил — равновесна, то есть не оказывает на тело никакое воздействие.

Есть другие равновесные системы. Рассмотрим, например весы (рис. 5.2). Если силы, действующие на концы, обратно пропорциональны длине соответствующего плеча ($\frac{|\overrightarrow{F_B}|}{|\overrightarrow{F_A}|} = \frac{a}{b}$), то весы находятся в равновесии. Таким образом, на палочку весов AB действуют три силы, но она неподвижна. Это ещё один пример равновесной системы сил.

Игра «Скользящие вектора»

Давайте изучим системы сил, которые не оказывают на тело никакого воздействия. Статика — это наука, занимающаяся изучением таких систем сил.
Простейшим примером равновесной системы сил является пара противоположенных сил приложенных к одной точке. Если с одинаковой силой потянуть в противоположенные стороны две верёвочки, привязанные к одному месту покоящегося твердого тела, то тело останется в покое.

Определение 5.2 *Система сил называется* **равновесной**, *если под её действием свободное покоящееся тело не приходит в движение.*

Итак, сила — это веревочка, привязанная к какой-то точке твердого тела (эта точка называется *точкой приложения силы*), за которую тянут в каком-то направлении.

Таким образом у силы есть направление и её величина(модуль силы), который характеризует "силу" силы. "Верёвочка" — это лишь мысленный образ. Силы могут действовать на расстоянии без непосредственного контакта тел. Например, всех нас "невидимыми верёвочками" притягивает к земле.

Сила тяжести действует на каждый кусочек твердого тела. Тяжесть камня складывается из множества маленьких сил, действующих на его молекулы. Есть теорема о том, что всё это множество сил можно заменить одной единственной большой силой, с точкой приложения в центре масс тела. Эта одна сила $\overrightarrow{F}_{\text{тяж}} = m\overrightarrow{g}$ приложенная к центру масс *эквивалентна* системе маленьких сил действующей на молекулы.

Что значит эквивалентна?

Определение 5.3 *Две системы сил называются* **эквивалентными***, если объединение одной из них с минус второй системой силой даёт равновесную систему сил.*

"Минус" перед системой силой означает систему, получающуюся из исходной заменой всех сил на противоположные им, с той же точкой приложения.

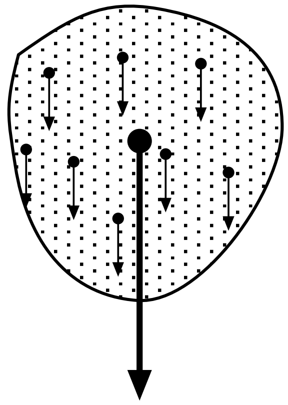


Рис. 5.3: Большая сила эквивалентна множеству маленьких

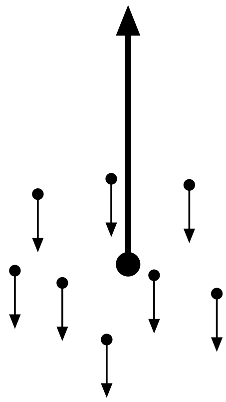


Рис. 5.4: Равновесная система сил

Будем считать, что всякое твёрдое тело после добавления равновесной системы сил к силам, уже действующим на него, будет двигаться так, как если бы мы ничего не добавляли. В частности, при добавлении к равновесной системе сил другой равновесной получим ещё одну равновесную систему. Это частный случай фундаментального принципа — принципа линейности законов физики[1].

Пусть на твёрдое тело действует некоторая система сил. Добавляя к ней разные равновесные системы, мы можем её изменять. Рассмотрим элементарные преобразования, которые позволят нам получать равносильные системы сил:

[1]**Принцип линейности гласит:***Пусть есть две решённые задачи о вычислении движения. Тогда решение задачи, начальные условия которой есть сумма начальных условий этих двух, есть сумма их решений.*

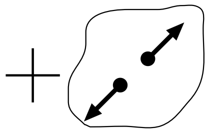
Проиллюстрируем смысл понятий "суммы начальных условий" и "суммы решений" на простом примере. Пусть есть точечное тело, способное двигаться вдоль прямой. И пусть в момент $t = 0$ оно находиться в точке X_0 и движется со скоростью V_0, а в каждый момент времени на него действует постоянная сила F. Тогда решением задачи о его движении будет формула

$$X(t) = X_0 + V_0 t + (F/2m)t^2.$$

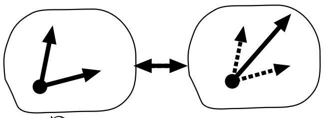
Если у нас есть решения двух разных задач о движении этого тела:

$$X_1(t) = X_{10} + V_{10}t + (F_1/2m)t^2 \quad \text{и} \quad X_2(t) = X_{20} + V_{20}t + (F_2/2m)t^2,$$

Элементарные допустимые преобразования



— добавление двух противоположенных сил, действующих вдоль одной прямой.



— замена двух сил, приложенных к одной точке их векторной суммой.

Эти две операции не портят состояния равновесия. Давайте сначала рассмотрим плоский (двумерный) случай. Теперь определение равновесности, данное в определении 5.3, мы можем заменить на новое:

Определение 5.4 *Система сил называется* **равновесной***, если она эквивалентна пустой системе сил, то есть указанными элементарными преобразованиями можно избавится от всех сил.*

Задача 5.3 *Используя введённые операции, докажите, что смещение точки приложения силы вдоль прямой, по которой она направлена, не испортит состояния равновесия.*

Задача 5.4 *Пусть у нас есть твёрдая пластинка и все силы, которые на неё действуют лежат в её плоскости. Доказать, что любая система сил равносильна некоторым двум силам.*

Подсказка: достаточно показать, что любые три силы сводятся к двум. Смотрите следующие задачи.

Задача 5.5 *Докажите, что любые две непараллельные силы на плоскости можно допустимыми преобразованиями превратить в одну.*

Задача 5.6 *Докажите, что любые две параллельные силы с разными точками приложения, сводятся к одной силе, если только они не противоположенные (рис. 5.5).*

Подсказка: Две параллельные силы можно превратить в непареллельные пользуясь допустимыми преобразованиями (см. рис 5.6). А две непараллельные силы на плоскости мы умеем превращать в одну.

Задача 5.7 (8) *Докажите, что если две системы сил равносильны, то сумма всех сил первой системы равна сумме всех сил второй.*

Подсказка. Посмотрите, меняют ли сумму сил элементарные преобразования.

Определение 5.5 Моментом силы F *относительно некоторой точки O называется величина* $M(\overrightarrow{F}, O) = |\overrightarrow{F}| r \sin\alpha$.

то сумма этих решений есть

$$X_1(t) + X_2(t) = (X_{10} + X_{20}) + (V_{10} + V_{20})t + \frac{F_1 + F_2}{2m}t^2,$$

— это ещё одно решение задачи о движении этого тела.

Под величинами X, V, F можно понимать вектора, а их суммы как векторные суммы. Задача становится трёхмерной, но запись её решения остаётся той же.

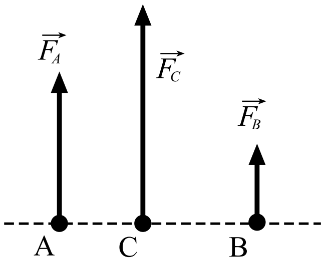


Рис. 5.5: Силы F_A и F_B могут быть заменены одной силой F_C

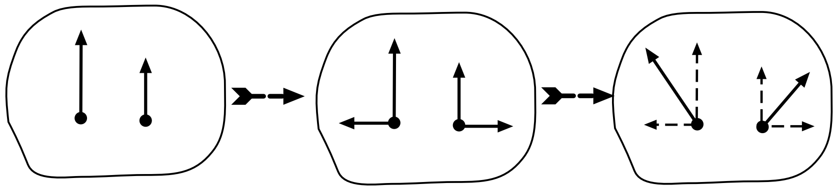
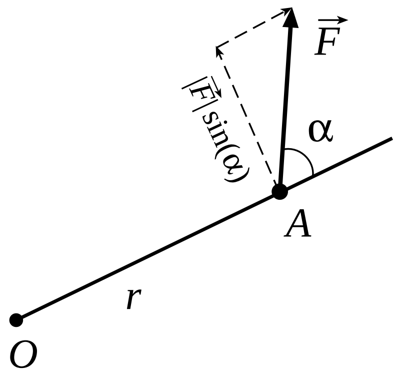


Рис. 5.6: Как из двух параллельных сделать две непараллельные

$|F|\sin\alpha$ есть составляющая силы F ортогональная прямой OA. Интуитивно ясно, что именно эта составляющая порождает вращательную силу вокруг точки O.

Задача 5.8 (8) *Докажите, что равносильные системы имеют одинаковый суммарный момент сил относительно любой точки O.*

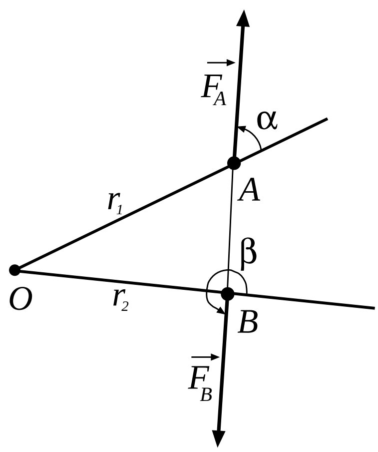
Подсказка. Посмотрите, меняют ли суммарный момент сил элементарные преобразования. Используйте рисунок 5.7 и теорему синусов.



Подсказка. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что упомянутые выше две операции не изменяют суммарный момент сил. Следует использовать теорему синусов и то, что сумма проекций сил равна проекции суммы. См. рисунок 5.7.

Задача 5.9 (7) *Любая система сил на плоскости сводится либо к одной силе либо к двум противоположным силам, не лежащим на одной прямой.*

Рис. 5.7: (ТЕОРЕМА СИНУСОВ)
$$\angle A = \angle OAB = \alpha,\ \angle B = \angle OBA = 360 - \beta,$$
$$\frac{\sin(A)}{r_1} = \frac{\sin(B)}{r_2},$$
$$r_1 \sin(A) = r_2 \sin(B),$$
$$M(F_A) + M(F_B) = Fr_1 \sin(\alpha) + Fr_2 \sin(\beta) =$$
$$Fr_1 \sin(A) - Fr_2 \sin(B) = 0,$$
где $|\overrightarrow{F}_A| = |\overrightarrow{F}_B| = F$.



Задача 5.10 (9, Главная Задача про систему сил на плоскости) *Докажите, что система сил равновесна тогда и только тогда, когда сумма всех сил и их суммарный момент равны нулю.*

А теперь нужно сформулировать и решить аналогичную задачу про систему сил в пространстве. Попробуем свести трёхмерный случай хотя бы частично к задаче на плоскости.

I Выберем произвольную плоскость и двигая точки приложения сил вдоль направлений сил можем сместить их в эту плоскость, кроме, конечно, сил параллельных этой плоскости.

II Если сила параллельна выбранной плоскости, то добавляя пару противоположенных сил, направленных вдоль одной прямой, можем сделать её не параллельной. Одна из противоположенных сил приложена к той же точке, что и данная, а другая к некоторой точке в этой плоскости.

III Из пунктов I и II следует, что любая система сил сводится к силам, чьи точки приложения лежат в одной плоскости. Рассмотрим проекции всех сил на эту плоскость и решим для них задачу 5.10.

В результате пункта III получим одну или две силы целиком лежащие в выбранной плоскости, и набор сил ортогональных ей. Эти силы параллельны друг другу и можно считать, что их точки приложения лежат на этой плоскости.

Задача 5.11 (9) *Проделайте оставшиеся шаги и докажите, что любая система сил в пространстве сводится к трём силам, две из которых противоположены, а третья — произвольная сила приложенная к середине отрезка, соединяющего точки приложения первых двух сил.*

Определение 5.6 Моментом силы относительно некоторой оси *назовём момент проекции этой силы на произвольную ортогональную оси плоскость относительно точки пересечения этой оси и выбранной плоскости.*

Задача 5.12 (10) *Покажите, что результат не зависит от выбора этой плоскости.*

Интересно, что, если мы знаем значение момента силы относительно трёх ортогональных осей, пересекающихся в одной точке, то мы можем определить значение момента относительно любой оси, проходящей через эту точку.

Теорема 5.1 (Главная теорема СТАТИКИ)
1. Система сил равновесна тогда и только тогда, когда сумма всех сил и суммарный момент сил относительно произвольной оси равны нулю.
2. Любая система сил с точностью до равновесной однозначно определяется суммой всех сил и суммарным моментом всех сил относительно трех ортогональных пересекающихся осей.

Контрольные задачи

Задача 5.13 (9) Чему равен момент сил относительно точки O и сумма сил, изображенных на рисунках 5.8 а) б) в) (одно деление — это один сантиметр или один Ньютон для векторов сил)?

Задача 5.14 (8) Приведите к элементарному виду системы сил изображенных на рисунках 5.8а)б)в).

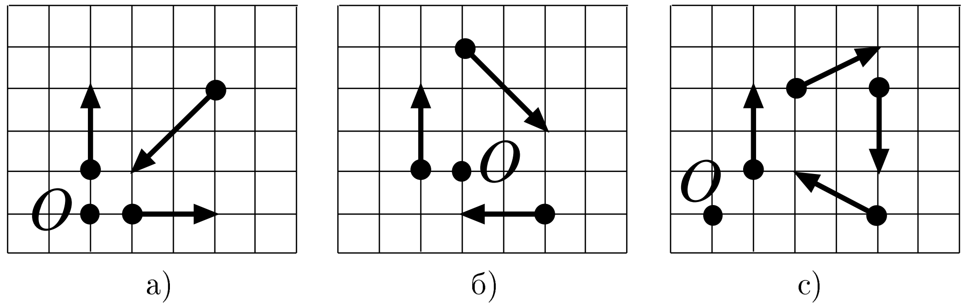
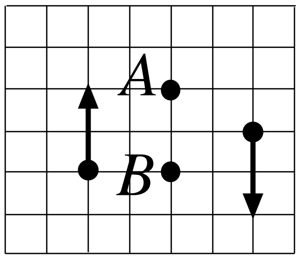


Рис. 5.8: Рисунок к задачам 5.13,5.14.



Задача 5.15 Чему равен момент сил относительно точек A и B двух сил на рисунке слева?

Задача 5.16 Докажите, что момент двух сил на рисунке слева не зависит от того, относительно какой точки его считать.

Задача 5.17 В каком случае суммарный момент системы сил не зависит от выбора точки?

Задача 5.18 (8) Найдите момент трех сил, приложенных к вершинам правильного треугольника, относительно его центра. Сторона треугольника равна 1, силы направлены вдоль сторон против часовой стрелки, модули сил равны 1.

Задача 5.19 (7) Дайте определение вращательного и поступательного движения тела.

Задача 5.20 (12) Объясните, пользуясь молекулярной моделью газа, причину возникновения силы трения о воздух. Какие качественные зависимости величины этой силы от скорости движения тела и его формы можно предположить?

Решение. Сила трения, тормозящая движение тела в воздухе, связана с ударами молекул воздуха о поверхность тела. Эти удары чаще и сильнее с той стороны, куда тело движется. Когда тело покоится, удары молекул о поверхность тела с разных сторон компенсируют друг друга. Но это нужно ещё доказать! □

Задача 5.21 (12) На поверхность твёрдого тела со всех сторон действуют силы, вызванные давлением газа, внутри которого оно находится. Других сил нет. Доказать, что тело не начнёт двигаться или вращаться.

Семинар 6

Теория Информации ДАНЕТКИ, ЭНТРОПИЯ И ОБОБЩЁННЫЕ ВРУНЫ

План занятия

- Что такое информация?
- Игра “Угадай число”
- Энтропия — мера незнания
- Вруны и обобщённые вруны
- “Данетки”
- Игра “быки и коровы”
- *Оценка числа операций для упорядочивания n объектов
- *Кодирование Хемминга

Что такое ИНФОРМАЦИЯ?

Гриша спрашивает у Артёма: “Какой у нас третий урок?” – “Математика” – отвечает Артём. Он передал Грише нужную информацию. А сколько именно информации заключалось в ответе Артема? На этот вопрос может ответить **теория информации**. Другая важная задача, которую решает теория информации и которая имеет непосредственное отношение к современным проблемам теле- и радиосвязи, такая: “Два человека соединены проводом (радиосвязью). Сколько информации они смогут друг другу передавать в единицу времени, если известны характеристики помех, возникающих в этом проводе (в эфире)?”

Как и в каких единицах измерять информацию станет ясно из такой игры:

Игра 6.1 *Ведущий загадывает натуральное число от 1 до 100. Остальные играющие задают ему вопросы, на которые можно ответить либо “да”, либо “нет”. Нужно угадать число задав как можно меньше вопросов.*

Можно, например, задавать такие вопросы: “Верно ли, что это число 27?”, “Загаданное число меньше 50?”, “Загаданное число чётное?”.

Задача 6.1 (3) *Поиграйте друг с другом в эту игру. Сколько вопросов требуется для угадывания числа $x \in \{1, 2, \ldots, 100\}$?*

Подсказка. Решите эту задачу для случаев, когда загаданное число $x \in \{1, 2\}$, $x \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.
Решение. Решим эту задачу для случая $x \in \{1, 2, \ldots, 16\}$. Первый вопрос: "Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки?":

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \mid 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

После ответа на этот вопрос, мы будем знать, в какой половине находится загаданное число. Пусть слева. Тогда второй вопрос: "Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки между 4 и 5?"

$$1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8 \mid 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

Иначе (если справа от 8) второй вопрос будет таким: "Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки между 12 и 13?"

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \mid 9\ 10\ 11\ 12 \mid 13\ 14\ 15\ 16$$

В любом случае, после второго вопроса мы будем наверняка знать в какой из четырех частей лежит загаданное число:

$$1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8 \mid 9\ 10\ 11\ 12 \mid 13\ 14\ 15\ 16$$

Эту часть мы тоже разделим на две половинки, и после третьего вопроса узнаем, в какой из них лежит загаданное число. Останется два варианта:

$$1\ 2 \mid 3\ 4 \mid 5\ 6 \mid 7\ 8 \mid 9\ 10 \mid 11\ 12 \mid 13\ 14 \mid 15\ 16$$

Задаем последний, четвёртый вопрос и узнаем какое именно число загадал ведущий.

$$1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 10 \mid 11 \mid 12 \mid 13 \mid 14 \mid 15 \mid 16$$

Итак, мы показали, что четырех воросов достаточно, чтоб угадать загаданное число из 16 возможных.

Определение 6.1 *Обозначим* $\mathrm{ilog}(N)$ *минимальное число вопросов, которые нужно задать, чтобы наверняка узнать загаданное число из* N *возможных вариантов.*

Значит, мы показали, что $\mathrm{ilog}(16) = 4$. Чтобы угадать из двух вариантов, нужен один вопрос, то есть $\mathrm{ilog}(2) = 1$. Далее $\mathrm{ilog}(3) = 1$, $\mathrm{ilog}(4) = 2$, $\mathrm{ilog}(8) = 3$. Докажите это. Функция $\mathrm{ilog}(n)$ есть **логарифм n по основанию 2 округленный до большего натурального**. Логарифм по основанию 2 обозначается $\log_2 n$ или $\log n$, — это функция обратная возведению 2 в какую-то степень.

$$2^4 = 16, \Rightarrow \mathrm{ilog}\, 16 = \log 16 = 4$$
$$2^5 = 32, \Rightarrow \mathrm{ilog}\, 32 = \log 32 = 5$$
$$\log 20 = 4.32193,\ \mathrm{ilog}\, 20 = 5$$

$\mathrm{ilog}\, n$ есть число вопросов, и поэтому натуральное число. Функция $\log n$ — гладкая функция и может принимать любые значения. Она совпадающая с функцией $\mathrm{ilog}\, n$ лишь при $n = 2, 4, 16, 32, \ldots$. Взгляните на графики этих двух функций на рисунке 6.1.

Задача 6.2 (7) *Нарисуйте таблицу*

n	1	2	3	4	…	32
$\operatorname{ilog} n$						

Задача 6.3 (8) *Вычислите* $\log 256$. *Оцените* $\log 100$.

Определение 6.2 *Вопрос называется* **элементарным**, *если он подразумевает два возможных ответа, например "Да" или "Нет".* **Количество информации** I *определяется минимальным количеством элементарных вопросов, которые нужно задать, чтобы наверняка выведать эту информацию. Количество информации измеряется в* **битах**.

Чтобы выведать один бит информации, нужно правильно задать элементарный вопрос и получить на него ответ.

Утверждение 6.1 (Главная) *Если информация представляет собой один из n возможных равноправных вариантов, то её величина равна* $I = \log n$

Примечание. Заметьте, что здесь стоит log a не ilog, а значит могут получится нецелые количества информации. Мы не можем задать полтора вопроса или π вопросов, но тем не менее мы везде в дальнейшем будем использовать log, а не ilog. Шведский математик Клод Шеннон[1], создатель теории информации, определил в свой работе в 1945 году как следует интерпретировать дробное и любое вещественное количество информации $I \in [0, \infty)$.

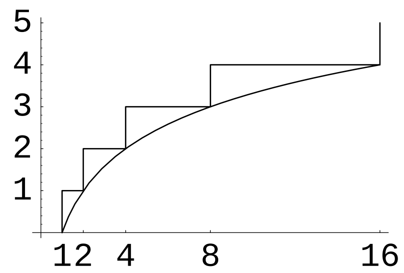


Рис. 6.1: График логарифма (гладкий график) и логарифма округлённого до целого (ломанный график).

Пример: Васе сказали, что следующий урок математика. До этого он знал, что следующий урок либо математика, либо физика, либо рисование, либо география. Сколько бит информации сообщили Васе?

Решение. Информация состоит из четырёх возможностей. Поэтому

Ответ: $I = \log 4 = 2$.

Задача 6.4 *У Васи есть одна доминошка. Сколько информации надо у него выведать, чтобы узнать какая у него доминошка?*

Решение. Число доминошек равно 28. Поэтому число вопросов, равно $\operatorname{ilog} 28 = 5$, а количество информации несколько меньше 5, так как $28 < 32$, но больше 4, так как $28 > 16$. На калькуляторе можно подсчитать Ответ: $\log 28 = 4.807\ldots$

Задача 6.5 *У Васи есть одна доминошка. Он признался, что у него дубль. Сколько информации он нам сообщил?*

[1] **Клод Элвуд Шеннон (Claude Shannon), 1916-2001** — Дальний родственник Томаса Эдисона, был сотрудником Bell Laboratories с 1941 до 1972 г. В его работе "Математическая теория коммуникаций"(http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/), опубликованной в 1948 г., впервые определялась мера информационного содержания любого сообщения и понятие кванта информации — **бита**. Эти идеи легли в основу теории современной цифровой связи. Другая работа Шеннона "Communication Theory of Secrecy Systems", опубликованная в 1949 г., способствовала превращению криптографии в научную дисциплину.

Решение. После его признания осталось 7 вариантов. Количество информации, которую он по прежнему от нас скрывает равно $\log(7)$. А до его признания $\log 28$. Поэтому Вася сообщил нам $\log(28) - \log(7) = 2$ бит.

Ответ можно было получить другим путем. Разделим как-нибудь доминошки на 4 группы по 7 так, чтобы одна из групп состояла из всех дублей. Тогда можно считать, что от Васи мы узнали, в какой из четырех равноправных по размеру групп находится доминошка Васи. Число групп = число вариантов = $\frac{28}{7} = 4$ означает, что Вася сообщил нам $\log(4) = 2$ бита. □

Здесь мы встречаемся с важным тождеством:

$$\log(n) - \log(m) = \log(\frac{n}{m})$$

В нашем случае $n = 28$, $m = 7$.

Задача 6.6 *У Васи есть доминошка. Известно, что одно число на ней чётное, другое нечётное. Сколько информации нам осталось выведать? Сколько уже известно?*

Решение. Нечётных чисел 3 штуки: 1,3,5; а чётных 4 штуки: 0,2,4,6. Всего таких доминошек $3 \times 4 = 12$. То есть осталась неопределённость в 12 вариантов, и, значит, осталось выведать $I = \log 12 \approx 3.58$ бит. Сообщили нам $\log 28 - \log 12 = \log \frac{28}{12} = \log \frac{7}{3} \approx 1.222$ бит.
Примечание. Заметьте, что I можно записать как сумму неизвестной информации про нечётное число $= \log 3$ и неизвестной информации про чётное число $= \log 4$: $I = \log 3 + \log 4 = \log 12$. Верно следующее важное свойство логарифма

$$\log(m) + \log(n) = \log(nm).$$

Задача 6.7 *У Оли есть карта. Мы знаем, что масть этой карты — крести. Сколько информации нам известно?*

Ответ: $I = \log 4 = 2$, так как есть четыре варианта для масти.
Итоги: количество информации, необходимое для описания объекта равно логарифму по основанию два от количества возможных объектов.

$$\text{Информативность(объекта)} = \log\left(\text{всего возможных объектов}\right)$$

То есть

$$I(a) = \log N \tag{6.1}$$

Количество информации о каком-то объекте, которую мы получили в сообщении, равно логарифму от отношения количества возможных объектов до сообщения на количество возможных

$$\text{Информативность(сообщения)} = \log\left(\frac{\text{число возможных объектов до сообщения}}{\text{число возможных объектов после сообщения}}\right)$$

То есть, если обозначить сообщение буквой w имеем

$$I(w) = \log\left(\frac{N_{\text{до получения } w}}{N_{\text{после получения } w}}\right) \tag{6.2}$$

Задача 6.8 (7) *Вася признался, что а) оба числа на его доминошке нечётные б) одно число на его доминошке чётное. Сколько информации он нам сообщил?*

Задача 6.9 (8) *Мальчик сказал, что в его имени 4 буквы. Сколько информации он нам сообщил? Сколько осталось у него узнать?*

Ответ: Пусть N — количество различных имён. N_4 — количество имен из четырёх букв. Тогда нам осталось узнать $\log N_4$ бит, а сообщили нам $\log \frac{N}{N_4}$ бит.

Значительная часть простых задач теории информации сводится к **комбинаторным задачам**, то есть к вычислению числа объектов с некоторой данной конфигурацией. Другая часть задач связана с вычислением функции ЭНТРОПИИ.

ЭНТРОПИЯ — мера незнания

Задача 6.10 (8) *Перед нами 5 чёрных ящиков. В каждом из них находится либо чёрный, либо белый шарик. Мера неизвестности (неизвестной информации) равна 5 бит. Нам говорят, что 3 из них белые. Сколько информации нам сообщили? Сколько нам осталось узнать?*

Решение. Сначала было 2^5 вариантов и мера неизвестности равнялась $\log(2^5) = 5$. Когда нам сказали, что 3 шарика белые, число возможных вариантов стало равно количеству возможных распределений 3 белых и 2 чёрных шариков по 5 ящикам. Их 10 штук. Если ввести обозначения: 1 — белый, а 0 — чёрный, то получим:

$$(11100), (11010), 11001), (10110), (10101), (10011), (01110), (01101), (01011), (00111)$$

Это число распределений равно $C_{3,2} = C_5^3 = C_5^2$ и называется числом сочетаний 3 элементов из 5, или 2 элементов из 5, или биномиальным коэффициентом $(2, 3)$. Это число $C_{3,2} = 10$ получается так: первый нолик можно поместить на любое из 5 мест, второй — на любое из оставшихся 4. Всего получается 20 вариантов. Но среди них каждый вариант повторён дважды — сначала нолики выбраны в одном порядке, потом — в другом. А нам неважно, в каком порядке были выбраны нолики. Поэтому реальных вариантов в два раза меньше — 10 штук.
Ответ: Было неизвестно 5 бит, потом стало неизвестно $\log(C_{3,2}) = \log(10) \approx 3.32$ бит, значит нам сообщили $5 - \log(10) \approx 1.68$ бит. □

3 из 5 соответствует 60%. Давайте обобщим эту задачу.

Задача 6.11 (9) *Перед нами сколько-то чёрных ящиков. В каждом из них находится либо чёрный, либо белый шарик. Нам говорят, что* 60% *из них белые. Сколько информации нам осталось узнать? То есть, чему равна мера нашего незнания? Решите эту задачу, когда число ящиков равно а)10, б) 100, в) 1000, г) n.*

Решение. По аналогии получаем а) $\log(C_{6,4})$, б) $\log(C_{60,40})$, в) $\log(C_{600,400})$ г) $\log(C_{0.6n,0.4n})$. □

Надо поподробнее изучить числа C_{m_1,m_2}. Это количество способов разместить m_1 единичек и m_2 ноликов по $m_1 + m_2$ местам. Какова общая формула для C_{m_1,m_2}? Для вычисления удобно пользоваться такой формулой

$$C_{m_1,m_2} = C_{m_1-1,m_2} + C_{m_1,m_2-1}$$

Решение. Докажем эту формулу. Давайте поместим на первое место единичку и разместим в оставшихся позициях $m_1 - 1$ единичку и m_2 нолик. Это можно сделать C_{m_1-1,m_2} способами. Затем поставим на первое место нолик и разместим в оставшихся позициях m_1

единичку и $m_2 - 1$ нолик. Это можно сделать C_{m_1,m_2-1} способами. В итоге мы переберём все возможные размещения m_1 единичек и m_2 нолика. □

Эта формула позволяет нам просто вычислять C_{m_1,m_2}

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Это **треугольник Паскаля**. Каждое число в этом треугольнике есть сумма двух над ним стоящих. Чтобы узнать чему равно $C_{2,3}$, нам нужно взглянуть на $2 + 3 = 5$-ую строчку. На первом месте стоит 1 — это $C_{5,0}$, число способов размещения пяти единичек по пяти местам. Далее $5 = C_{4,1}$, число способов разместить 4 единички и один ноль по пяти местам. Далее следует нужное нам $C_{3,2} = 10$, число способов разместить 3 единички и 2 нулика по 5 местам.

Задача 6.12 (8) *Чему равно $C_{2,4}$? Чему равно $C_{3,4}$?*

Задача 6.13 (9) *Чему рано наше незнание, если мы знаем, что 3 бита из 8 бит байта единички, а остальные нули? Байт — это восемь мест, в которых стоят нули и единицы.*

Если мы в треугольнике Паскаля дойдём до 11 строчки, то получим

$$\{1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1\}.$$

Эти числа нарисованы в виде гистограммы на рисунке 6.2, а логарифмы этих чисел, делённые на 11, на рисунке 6.3

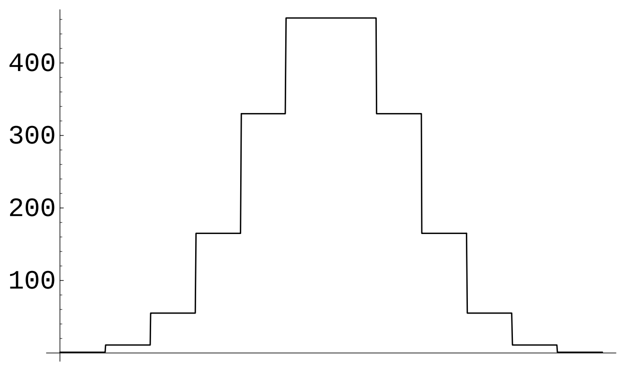


Рис. 6.2: 11-ая строчка треугольника Паскаля

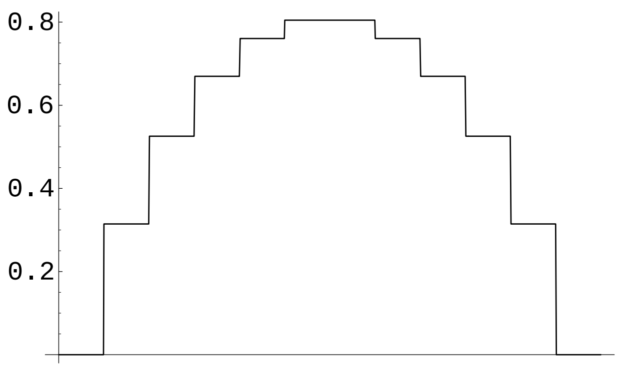


Рис. 6.3: $H_{11}(p)$. Логарифмы от чисел 11-ой строчка треугольника Паскаля, делённые на 11.

Утверждение 6.2 *Если нам сообщают, что $0.6{\cdot}1000$ из неизвестных нам 1000 бит единички, то мера нашего незнания, равная изначально 1000, уменьшается до $\log(C_{600,400})$ или в общем случае:*

Если нам сообщают, что $p \cdot n$ (где $0 < p < 1$) из неизвестных нам n бит есть единички, то мера нашего незнания, равная изначально n, уменьшается до $\log(C_{pn,(1-p)n})$. Мера нашего незнания умножается на число меньше 1, которое равно

$$\frac{\log(C_{pn,(1-p)n})}{n}$$

Давайте рассмотрим это соотношение подробнее. Обозначим его $H_n(p)$. Это число можно интерпретировать как незнание, приходящееся на каждый из n бит. Или так: столько информации нам осталось узнать про каждый бит, после того, как нам сказали, что $p \cdot 100\%$ бит равны 1.

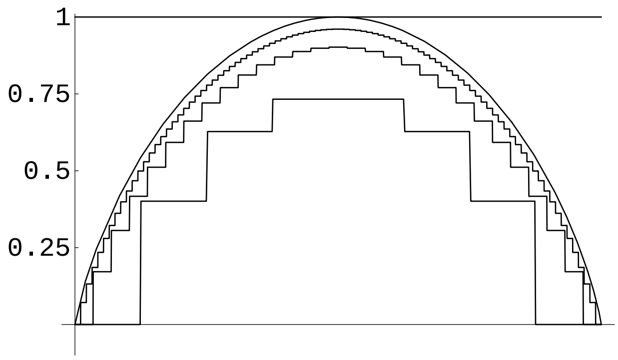


Рис. 6.4: Функция $H_n(p) = \frac{\log(C_{pn,(1-p)n})}{n}$ для $n = 7, 28, 91$. Самый верхний график — это график функции $H(p)$.

Определение 6.3 Энтропией *случайной величины с вероятностями $\{p, 1-p\}$ называется функция*

$$H(p) = -p \log p - (1-p)\log(1-p)$$

Теорема 6.1 *Чем больше n, тем более схожи функция $H_n(p)$ и функция энтропии $H(p)$. Выбирая большие n, мы можем сделать их сколь угодно мало отличающимися в каждой точке.*

Строгое доказательство этой теоремы использует явную формулу

$$C_{m_1,m_2} = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1! m_2!}$$

и формулу Стирлинга, суть которой заключена в том, что мы можем $n!$ заменять на $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Чтобы получить правильный ответ, достаточно заменить $\log n!$ на $n \log n$:

$$\log C_{m_1,m_2} = \log\left(\frac{(m_1+m_2)!}{m_1!m_2!}\right) = \log(m_1+m_2)! - \log m_1! - \log m_2!$$

$$(m_1+m_2)\log(m_1+m_2) - m_1 \log m_2 - m_2 \log m_2 =$$

$$m_1 \log(m_1+m_2) + m_2 \log(m_1+m_2) - m_1 \log m_2 - m_2 \log m_2 =$$

$$-m_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) - m_2 \log\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)$$

И для величины $H_n(p) = \frac{C_{m_1,m_2}}{m_1+m_2}$, $n = m_1 + m_2$, $m_1 = pn$, $m_2 = (1-p)n$, получаем приближенное значение

$$-\frac{m_1}{m_1+m_2}\log\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) - \frac{m_2}{m_1+m_2}\log\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$$

Это и есть энтропия $H(p)$.

Если в ящиках чёрные, белые и синие шарики, то мера незнания про каждый ящик равна $\log 3$. Но когда нам сообщают информацию, что 30% шариков черные, 25% — белые, остальные 45% синие, то мера нашего незнания о том, что хранится в каждом ящике, уменьшается с $\log 3 \approx 1.585$ до величины

$$H(\{0.3, 0.25, 0.45\}) = -0.3\log 0.3 - 0.25\log 0.25 - 0.45\log 0.45 \approx 1.539$$

Те есть случайная величина с вероятностями p_1, p_2, p_3, $p_1+p_2+p_3 = 1$ имеет энтропию

$$H(\{p_1, p_2, p_3\}) = -p_1\log p_1 - p_2\log p_2 - p_3\log p_3 = -\sum p_i \log p_i$$

Общая формула энтропии случайной величины такая:

$$H = -\sum p_i \log p_i$$

Случайная величина — это конвеер, по которому поступают черные ящики, мы их открываем и узнаем, что там. Известно процентное содержание различных штучек в этих ящиках.

Энтропия позволяет записать более общую формулу для информативности сообщения (сравните с 6.2):

$$\text{Информативность(сообщения)} = H_{\text{до сообщения}} - H_{\text{после сообщения}}$$

Или, если обозначить сообщение как w

$$I(w) = H_{\text{до получения } w} - H_{\text{после получения } w} \tag{6.3}$$

Вруны и обобщённые вруны

А что, если человек, который нам отвечает на вопросы, заядлый врунишка? Если он абсолютный врун, то ничего страшного нет. Например, если он на вопрос "Это ты съел варенье?" отвечает "Нет!" — значит съел. Абсолютный врун — это тот, кто *всегда* врет. Абсолютные вруны являются прекрасными проводниками информации, надо только все их ответы интерпретировать наоборот!

Конечно, абсолютных врунов не бывает. Чаще встречаются обычные, нормальные вруны, которые врут, скажем, в 40% случаев. С ними гораздо сложнее. Но и у них можно выведать всю правду. Только придется задать больше вопросов. То, сколько бит выведанной информации в среднем приходится на один вопрос, называется пропускной способностью "обобщённого вруна".

Её можно вычислить так: зададим обобщённому 40%-вруну n элементарных вопросов. Мы знаем, что на 40% вопросов он соврал. Информация о том на какие именно из заданных он соврал представляет собой $nH(0.4)$ бит. Это значит, что если бы он перестал врать, то мы за $nH(0.4)$ элементарных вопросов узнали бы, где он соврал. Но врун врёт. И пока мы будем у него выяснять, в каких именно вопросах он нам соврал, он нам будет продолжать врать, и всё путать. Лучше рассуждать по-другому. Предположим, что мы смогли составить так n вопросов, что в полученных n ответах содержалась нужная нам перевранная информация размером m бит и еще информация о том, в каких именно из n ответов он врал. То есть $m + n \cdot H(0.4) = n$ или $m = n - n \cdot H(0.4) = n(1 - H(0.4))$ и пропускная способность вруна

$$v = \frac{m}{n} = 1 - H(p) \tag{6.4}$$

Это значит, что если умело задавать вруну вопросы, то за n вопросов можно выведать у него $n(1 - H(p))$ бит.

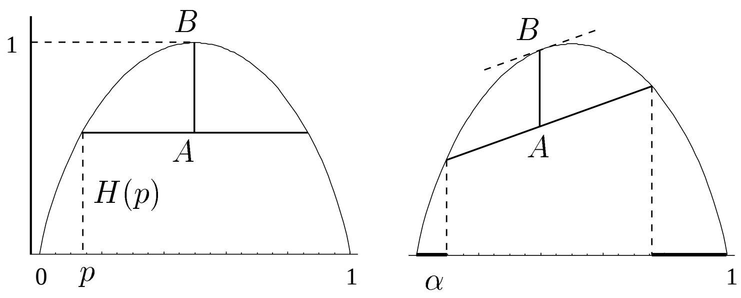


Рис. 6.5: Пропускная способность равна отрезку AB. Слева — **симметричный врун**, справа — **несимметричный врун**. Несимметричность означает, что когда нужно отвечать “Да” врун врёт с одной вероятностью α, а когда “Нет” — с другой вероятностью β.

Тот же результат можно получить из таких рассуждений: На выходе у вруна ответы “Да” и “Нет”. Мера неопределенности равна 1 бит. Но в этой мере неопределённости часть неопределенности возникает из-за случайности “вранья”. Каждый раз врун кидает монетку, чтоб решить — врать или не врать. Мера этой неопределённости равна $H(p)$. Значит, “полезная”, не связанная с враньём неопределённость в одном ответе равна $1 - H(p)$.

На рисунке 6.5 показана геометрическая интерпретация пропускной способности. Длина отрезка AB и есть пропускная способность. Рядом показан случай несимметичного вруна, который в случае правильного ответа “Да” врёт с одной вероятностью α, а в случае ответа “Нет” — с другой вероятностью β.

Если врун врёт с вероятностью 0.5, то вам никогда не удастся у него ничего выяснить.

Понятие информационной зависимости сообщений

Если дано два сообщения, A и B, то из них можно составить такие два:

$$A \cap B = \text{“Верно и } A\text{, и } B\text{”},$$

$$A \cup B = \text{ “Из сообщений } A \text{ и } B \text{ верно по крайней мере одно”.}$$

Взаимной информацией двух сообщений A и B называется величина

$$I(A, B) = I(A) + I(B) - I(A \cap B).$$

Если $I(A,B)=0$, то сообщения называются независимыми. Пример независимых сообщений: Пусть $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

$$A = \text{“}x \text{ чётное”} \text{ и } B = \text{“}x \leqslant 4\text{ ”}.$$

Действительно, $I(A) = \log\frac{8}{4} = 1$ и $I(B) = \log\frac{8}{4} = 1$. $A \cap B$=“x и чётное и $\leqslant 4$, то есть $x \in \{2,4\}$”, и $I(A\cap B) = \log\frac{8}{2} = 2$. **Информационно независимые сообщения** — это такие сообщения, которые в случае одновременного прихода приносят информацию равную сумме информаций содержащихся в них, когда они по отдельности: $I(A\cap B) = I(A) + I(B)$.

Сообщения A = “Число x чётное” и B = “Число x делится на 4” зависимы, потому что $B \Rightarrow A$ и $I(A\cap B) = I(B)$. **Сообщения зависимы** всякий раз, когда они не являются независимыми.

Задача 6.14 (10) Найдите $I(A)$, $I(A\cap B)$ и $I(A\cup B)$, где а) A = “У доминошки X оба числа чётные” и B = “Доминошка X дубль ”; б) A = “У доминошки X одно число $= 3$” и B = “Доминошка X дубль”;

Задача 6.15 (10) Приведите пример двух информационно зависимых и двух информационно независимых сообщений.

Задача 6.16 (10) Приведите пример двух информационно независимых сообщений, которые не соответствуют случаю $A \Rightarrow B$ или $B \Rightarrow A$.

“Данетки”

Что такое ДаНетка? Это загадка, которая “разыгрывается” между ведущим и отгадывающими. Отгадывающие задают вопросы, а загадывающий отвечает на них “да”, “нет” или “не имеет значения”. В результате отгадывающие должны прояснить ситуацию полностью. У всех ДаНеток, в которых вопрос не оговорен отдельно, вопросом является “Почему?”, “Как и/или что случилось?” или “Кто это?”

1. Бежит человек с ружьём, а за ним толпа. Человек оглядывается, кричит: "Не видать вам моего золота!", стреляет пять раз и бежит дальше.
2. От тщеславия она лишилась пищи.
3. Мальчик рассказывает: “Вчера был такой ужасный дождь, а мой папа не взял ни зонта, ни шляпы. Когда он появился в дверях, вода лилась с него ручьями, но ни один волос на его голове не промок”.
4. Чем сильнее его бьют по нужному месту, тем лучше он выполняет свою функцию.
5. Человек в течение получаса не обращал внимания на часы. В результате он не получил крупную денежную сумму.
6. Два джигита соревнуются: чей конь последним придет к финишу. Но дело не идет, оба стоят на месте. Они обращаются за советом к мудрецу... После этого оба поскакали во весь опор.
7. На автостраде произошло довольно странное ДТП. Оба водителя доставлены в больницу в тяжелом состоянии. Интересно, что их машины не получили при этом никаких повреждений.
8. Из трамвая выскакивает и быстро убегает человек, а за ним другой, который кричит: "Все забирай, но отдай билет!"

9. Грабитель влез в окно, огляделся, лег на кровать и спокойно заснул.
10. Человек вызывает лифт, заходит внутрь и умирает.
11. Наперерез бегущему молодому мужчине бежит другой и сильно пинает его в ногу. Это видят полицейские, но даже не пытаются арестовать хулигана.
12. Восемь мужчин поочередно падают вниз с десятиметровой высоты.
13. Он бежал медленнее всех, и его убили.
14. Мужчина, завернувшись в простыню, озадаченно разглядывает еще теплый труп.
15. Человек пошел на пляж, а на следующий день его уволили за профнепригодность.
16. Натуралист увидел птичье гнездо с яйцами, наклонился над ним и умер унизительной смертью.
17. Вооруженный мужчина покупает у проходящих мимо людей маленькие кусочки пластмассы.
18. Человек шел по дороге, посмотрел на часы и умер в недоумении.
19. Пятьдесят один вегетарианец стал жертвой дорожно-транспортного происшествия.
20. Человек движется со скоростью 350 километров в час без помощи каких-либо технических средств, и только потому, что его технические средства не сработали.

Отгадки

1. Это биатлонист, он бежит первым и претендует на золотую медаль.
2. Басня "Ворона и лисица".
3. Папа был лысый.
4. Гвоздь.
5. Часы были шахматные. Человек — шахматист, играющий решающую партию крупного турнира. Не заметив, что противник уже сделал ход, он просрочил время и проиграл партию, заняв в турнире только второе место.
6. Мудрец посоветовал обменяться конями.
7. Был сильный туман, водители высунулись из окон, чтоб видеть осевую разметку, и столкнулись головами.
8. Карманник украл у пассажира трамвая бумажник, где лежал лотерейный билет, выигравший автомобиль, но пассажир быстро заметил пропажу.
9. Это была собственная квартира грабителя. Он потерял ключ и пришлось лезть через окно.
10. Двери лифта открылись, но лифт-то не подошел.
11. Матч чемпионата мира по футболу (полицейские сидят на трибуне).
12. Соревнования по прыжкам в воду.
13. Тараканьи бега с тотализатором. Таракана, прибежавшего последним, с досады раздавил человек, поставивший на него много денег.
14. Мужчина был в летаргическом сне, но его посчитали мертвым, и медсестра уже везла его на вскрытие, когда он очнулся и сел на каталке. Медсестра умерла от ужаса.
15. Человек работал диктором на радио, а на пляже, точнее в море, он чуть не попал в пасть акулы (ну прямо фильм "Челюсти"). От пережитого потрясения он стал заикаться.
16. Это было гнездо страуса. А сзади к натуралисту подошел страус-хозяин гнезда и пнул его.
17. Кассир в казино обменивает выигранные фишки посетителей на наличные деньги.

18. Дорога была железная, через туннель, где нельзя было отойти, а поезд шел не по расписанию.
19. Вегетарианец-водитель грузовика не справился с управлением на горной дороге, и машина упала в пропасть. В кузове грузовика стояло пятьдесят клеток с кроликами.
20. Он спрыгнул с самолета с парашютом, а тот не раскрылся.

Контрольные задачи

Задача 6.17 (7) Коля съел на переменке шоколадку, яблоко и кекс. Сколько элементарных вопросов надо задать, чтоб узнать, в какой последовательности он их съел. Сколько информации от нас скрыто? **(9)** А если Коля съел 6 различных объектов?

Задача 6.18 (7) Натуральное число n. Известно, что оно чётное и $5 \leqslant n \leqslant 20$. Сколько элементарных вопросов нам нужно задать, чтобы узнать это число?

Задача 6.19 (7) В книге восемь рассказов, в каждой главе 32 страницы. Вася сказал, что он читает 5-ый рассказ. Сколько информации он нам сообщил? Сколько информации осталось у него выведать, чтобы узнать какую страницу он читает?

Задача 6.20 (7) Мы сказали продавцу, что хотим купить коньки. Но коньки бывают обычные и роликовые, белого, чёрного, зелёного и феолетового цвета. Кроме того есть размеры 38, 39, 42 и 44. Сколько информации вам нужно сообщить продавцу?

Задача 6.21 (7) Нам сказали, что сумма чисел у доминошки X равно 3. Сколько информации нам сообщили?

Задача 6.22 (8) Коля выучил стихотворение, в котором 32 слова. Оцените информацию, которую он запомнил. (Считайте, что всего в русском языке 10000 слов). По каким причинам сделанная вами оценка несколько завышена?

Задача 6.23 (8) “Граждане встречающие! Поезд 26 прибывает по 7-му пути в 19:35.” Сколько информации содержится в этом сообщении? (Всего на вокзале 8 платформ, ежедневно прибывает и отправляется в путь 120 поездов)

Подсказка. Оцените одним из возможных способов.

Задача 6.24 (10) Преступник имеет следующие приметы: молодой человек, яркий брюнет, с заметной родинкой на левой щеке. Сколько информации нам про него известно? Считайте что ярких брюнетов 20%, с родинкой на левой щеке 5%. Здесь “молодой” означает: 17-22 лет с вероятностью 0.25, 23-28 лет с вероятностью 0.5, 29-34 лет с вероятностью 0.25. В то время как общее распределение по возрастам такое: до 17 лет – 0.375, 17-22 лет – 0.125, 23-28 лет – 0.125, 29-34 лет — 0.125, 35 лет и старше – 0.25.

возраст	“молодой”	общее
до 17	0	0.375
17-22	0.25	0.125
23-28	0.5	0.125
29-34	0.25	0.125
после 34	0	0.25

Подсказка. Для вычисления информативности сообщения о молодости пользуйтесь формулой 6.3 на стр. 62.

Задача 6.25 (7) “У доминошки X числа разные”. Сколько информации нам сообщили и сколько еще осталось узнать, чтоб однозначно определить доминошку? Придумайте элементарные вопросы, которые нужно для этого задать.

Задача 6.26 (10) Известно, что класс 8а состоит из 7 отличников, 16 хорошистов, 8 троешников и 4 двоечников. Сколько информации содержится в сообщении: а) Коля хорошист б) Коля не двоечник в) Коля учится без троек г) Коля не отличник? Считайте, что Коля — случайный ученик из 8а.

Задача 6.27 (8) У Коли в прошлом учебном году было в 6 предметов и 4 четверти. Нам сказали, что у него нет двоек и троек. Сколько информации нам сообщили?

Подсказка. До сообщения для каждой оценки у нас было 4 варианта: 2, 3, 4, 5 (единиц не бывает). А после сообщения — 2 варианта

Задача 6.28 (10) Решите предыдущую задачу при условии, что нам сказали, что у Коли ровно половина пятерок и половина четвёрок в каждой четверти.

Подсказка. До сообщения для оценок каждой четверти 4^6 вариантов. После сообщения — C_6^3 варианта. Учтите, что четвертей четыре штуки.

Задача 6.29 (9) Сколько информации о числе π содержится в записи

$$\pi = 3.14159265...?$$

ДОПОЛНЕНИЕ: Алгоритмы сжатия данных

Одно из важнейших приложений теории информации — это алгоритмы сжатия данных. Например текстов. Если бы каждая буква в русском языке имела вероятность 1/32, то мера неопределенности буквы была равна $H(\{\frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \ldots\}) = \log 32 = 5$. Но это не так:

о	0.09	в	0.038	з	0.016	ж	0.007
е, ё	0.072	л	0.035	ы	0.016	ш	0.006
а	0.062	к	0.028	б	0.014	ю	0.006
и	0.062	м	0.026	ь,ъ	0.014	ц	0.004
н	0.053	д	0.025	г	0.013	щ	0.003
т	0.053	п	0.023	ч	0.012	э	0.003
с	0.045	у	0.021	й	0.01	ф	0.002
р	0.04	я	0.018	х	0.009		

Задача 6.30 *Дана таблица частот букв русского языка. Оцените количество бит, приходящееся на одну букву в эффективно заархивированном тексте на русском языке.*

Ответ: Самый известный метод архивирования использующий различия в частотах (неравномерность гистограммы частот) появления букв — это Алгоритм Хаффмана (Huffman). При сжатии текста этим методом в среднем на одну букву приходится столько бит, какова энтропия распределения. В случае русского языка $H = \sum p_i \log p_i = 3.9$, то есть около 4 бит на одну букву. Заметим, что длина алфавита равна 32 и число бит необходимое для обычной передачи буквы равно $\log 32 = 5$. Кодирование Хаффмана в случае русского алфавита позволяет сжать данные в 5/4 раза. Эффективная длина алфавита равна $2^H \approx 15$, а не 32.

Задача 6.31 (9) *Сколько килобайт информации ($1K = 1$ килобайт $= 2^1 0 = 1024$ байт $= 8 \cdot 1024$ бит) содержится в произведении Толстого "Анна Каренина", если в нём всего около 1550000 букв (без пробелов).*

Ответ: $1550000 \cdot 3.9/(8 \cdot 1024) \approx 738K$

ДОПОЛНЕНИЕ: Оценка числа операций для процедуры упорядочивания

Задача 6.32 *Вася переставил местами числа* $\{1, 2, 3, 4\}$. *Сколько вопросов нужно задать Васе, чтобы узнать у него, какую перестановку он осуществил?*

Решение. Всего возможных перестановок четырех элементов $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ штуки. Поэтому нам нужно выведать $\log 24 \approx 4.58$ бит. Придется задать 5 элементарных вопросов.

Если мы даем задачу компьютеру упорядочить n элементов, то ему придется задать по меньшей мере $\log n!$ элементарных вопросов (именно такими элементарными вопросами являются условные переходы ассемблера компьютера). Кроме задавания вопросов, алгоритму на компьютере придется еще заниматься перетаскиванием элементов с места на место, чтобы выстроить их попорядку. Но как бы там ни было, $\log n! \approx n(\log n - 1)$ даёт нижнюю границу для количества операций любого упорядочивающего алгоритма. Эта граница практически достигается в алгоритмах $MergeSort$, $BinaryInsertion$ и др. Ниже приведён ряд $\log n!$ для $n = 1, 2, 3, ..., 14$ и график этого численного ряда.

$$0, 1, 2.585, 4.585, 6.91, 9.49, 12.3, 15.3, 18.47, 21.79, 25.25, 28.84, 32.54, 36.34$$

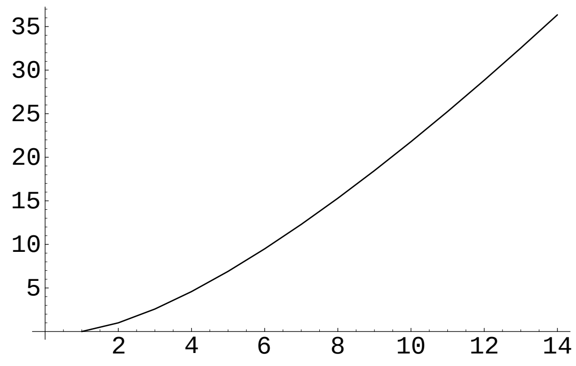


Рис. 6.6: График логарифма от факториала, $f(n) = \log_2 n!$.

Алгоритмы упорядочивания часто используются на практике. Ассимптотическое поведение алгоритмов при больших n очень важно.

ДОПОЛНЕНИЕ: Код Хемминга

Заменим термин “обобщенный врун” на “информационный канал”. **Информационный канал** — это произвольная физическая среда у которой есть вход и выход. Мы помещаем сообщение на вход, желая передать его на выход. В идеальном случае, оно в неизменном виде приходит на выход. Но обычно в телефонных проводах, радио эфире, при передаче через спутник или из-за шумов в компьютерных процессорах в сигнал закрадываются помехи.

С помехами можно бороться по-разному. Один из способов — применять **помехоустойчивое кодирование**. Простейший пример: каждый бит мы шлем пять раз; вместо 0, 1 будем передавать 00000, 11111.

Если получатель получит слово 0001010111, то скорее всего исходное слово имело вид 0000011111, что означает 01. Защитой от помех приходится платить, как говорят, увеличением “трафика” — в данном примере нам приходится пересылать в пять раз больше бит. Коэффициент раздувания равен 5, а **коэффициент полезного содержания** равен КПС $= 1/5$. КПС называют ещё **скоростью кода**.

Чтобы при передаче слова, на выходе его проинтерпретировали неправильно, помехам нужно инвертировать минимум три бита в группе из пяти бит, а двойные ошибки в группе из 5 бит нам не страшны. Если мы будем повторять каждый бит 3 раза, то нам не страшны будут одиночные ошибки в словах длины 3.

С помощью кодов Хемминга можно эффективнее, нежели простым повторением, спасаться от одиночных ошибок.

В частности, при кодировании 11 бит получается слово длинной 15 бит, и КПС $= \frac{11}{15}$.

Оценим минимальное количество контрольных разрядов, необходимое для исправления одиночных ошибок. Пусть содержательная часть составляет m бит, и мы добавляем ещё r *контрольных*. Каждое из 2^m правильных сообщений имеет $n = m + r$ его неправильных вариантов с ошибкой в одном бите. Всего бит $n = m + r$ и столько же возможно одиночных ошибок.

Такими образом, с каждым из 2^m сообщений связано множество из $n + 1$ слов, и эти множества *не должны пересекаться*. Не должны, потому что мы хотим, чтобы одна ошибка не выводила нас из класса исходного слова, чтобы мы могли его восстановить. Так как общее число слов 2^n, то

$$(n+1)2^m \leqslant 2^n$$
$$(m+r+1) \leqslant 2^r.$$

Этот теоретический предел достижим при использовании метода, предложенного Хеммингом. Идея его в следующем: все биты, номера которых есть степень 2, — контрольные, остальные биты — биты сообщения. Каждый контрольный бит отвечает за чётность суммы некоторой группы бит. Один и тот же бит может относиться к разным группам. Чтобы определить какие контрольные биты контролируют бит в позиции k, надо разложить k по степеням двойки. Если $k = 11 = 8 + 2 + 1$, то этот 11-ый бит относится к трём группам — к группе, чья чётность подсчитывается в 1-ом бите, к группе, чья четость подсчитывается во 2-ом бите, и к группе 8-ого бита. Другими словами, в контрольный бит с номером 2^k заносится сумма (по модулю 2) бит с номерами, которые имеют в разложении по степеням двойки степень 2^k:

$$\begin{aligned}
&b_1 = b_3 + b_5 + b_7 + \ldots \\
&b_2 = b_3 + b_6 + b_7 + b_{10} + b_{11} + b_{14} + b_{15} \ldots \\
&b_4 = b_5 + b_6 + b_7 + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} \ldots \\
&b_8 = b_9 + b_{10} + b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} \ldots
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Пример для кода Хемминга с $n = 15$, $m = 11$, $r = 4$:

$$\boxed{10110100111} \to \boxed{\boxed{0}\boxed{0}1\boxed{1}011\boxed{0}0100111}$$

$$b_1\; b_2 b_3 b_4 \qquad b_8\, b_9 \qquad b_{15}$$

Получив слово, мы проверяем каждый контрольный бит на предмет правильности чётности и складываем номера контрольных бит, в которых нарушена чётность. Полученное число, есть XOR номеров бит, где произошла ошибка. Если ошибка одна, то это число есть просто номер ошибочного бита.

Например, если в контрольных разрядах 1, 2, 8 обнаружено несовпадение чётности, то ошибка в 11 разряде, так как только он связан одновременно с этими тремя контрольными разрядами.

Задача 6.33 (11) Закодируйте методом Хемминга слово 1111.

Задача 6.34 (11) Закодируйте слово 11111111111 (11 единичек).

Задача 6.35 (11) На выходе слово 1011011. Известно, что если и была ошибка, то только в одном бите. Какое слово передали, если известно, что применялся метод Хемминга?

Есть фундаментальное ограничение на возможности помехоустойчивого кодирования. Если мы организуем протокол передачи данных, использующий помехоустойчивые коды, то скорость передачи всегда будет меньше, чем пропускная Шенноновская способность физического канала данных. Грубо говоря,

$$\text{КПС}(\text{кодирования}) \leqslant v(\text{канала}).$$

Литература

[1] Журнал «Квант». http://courier.com.ru/kvant

[2] Библиотека «Математическое просвящение» В. М. Тихомиров, *Великие математики прошлого и их великие теоремы.*, А. А. Болибрух, *Проблемы гильберта 100 лет спустя*, Д. В. Аносов, *Взгляд на математику и нечто из неё*, А. Б. Сосинский, *Мыльные плёнки и случайные блуждания* и др. http://www.mccme.ru/

[3] С. Г. Гиндикин *Рассказы о физиках и математиках*, М.:МЦНМО, 2001. — 448 с.

[4] С. Б. Гашков, В. И. Чубариков *Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений.* – М.:Высш.шк., 2000.

[5] В. В. Прасолов, *Диофантовы уравнения.* МК НМУ. 1993.

[6] А. Н. Колмогоров, *Три подхода к определению понятия "количество информации".* – Проблемы передачи информации, 1969, т.5, № 3.

[7] *Московский Центр Непрерывного Математического Образования*, математические кружки, математические школы и классы, олимпиады для школьников, и др. http://www.mccme.ru/