В.А. ДАЛИНГЕР

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Монография

3-е издание, стереотипное

Москва
Издательство «ФЛИНТА»
2016

ББК 74.262.21
Д15

Научный редактор
академик РАО М. П. Лапчик Рецензенты: д-р пед. наук, проф. *М. И. Рагулина*;
д-р пед. наук, проф. *И. И. Раскина*

Далингер В.А.

Д15 Избранные вопросы информатизации школьного математического образования : [электронный ресурс] монография / В.А. Далингер; науч. ред. М.П. Лапчик. –3-е изд. стереотип. – М. : ФЛИНТА, 2016. – 150 с.

ISBN 978-5-9765-1159-0

В монографии освещается теория и практика информатизации школьного математического образования. Раскрывается сущность информационных технологий обучения, анализируются их основы и характеризуются дидактические функции. На большом числе примеров показаны особенности применения информационных технологий в обучении арифметике, алгебре, геометрии, началам математического анализа, теории вероятностей и математической статистике.

Для исследователей в области информатизации школьного математического образования, для преподавателей, студентов, бакалавров, магистрантов, аспирантов и докторантов педагогических вузов. Монография будет также полезна учителям математики общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, ССУЗов.

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9765-1159-0 © Далингер В.А., 2016

§ 1. Понятие педагогической технологии и суть информационных технологий обучения

«Технология» – слово греческого происхождения (от *techno* – искусство, мастерство, умелость и *logos* – знание). В оригинале это понятие означает «знание о мастерстве», то есть род знаний, преломляющихся в специфической профессиональной деятельности.

Термин «технология» широко употребляется при характеристике производственных процессов и означает «совокупность приемов и способов обработки, изготовления, изменения состояния, свойств и других закономерностей с целью определения и использования на практике наиболее эффективных и экономичных производственных процессов» [95, с. 295].

«Педагогическая технология» является неточным переводом английского «educational technology» – образовательная технология. Последний термин соответствует англоязычному оригиналу, и в терминологическом словаре «Глоссарий современного образования» [20] рассматриваются три подхода к его определению:

а) образовательная технология как систематический метод планирования, применения, оценивания всего процесса обучения и усвоения знания путем учета человеческих и технологических ресурсов и взаимодействия между ними для достижения более эффективной формы образования;

б) образовательная технология как решение дидактических проблем в русле управления учебным процессом с точно заданными целями, достижение которых должно поддаться четкому описанию и определению;

в) образовательная технология как выявление принципов и разработка приемов оптимизации образовательного процесса путем анализа факторов, повышающих образовательную эффективность, с помощью конструирования и применения приемов и материалов, а также посредством применяемых методов.

В литературе встречаются самые различные определения понятия педагогической технологии. Приведем некоторые из них.

Педагогическая технология – это содержательная техника реализации учебного процесса (В. П. Беспалько).

Педагогическая технология – совокупность психолого-педагогических установок, определяющих специальный набор и компоновку форм, методов, способов, приемов обучения, воспитательных средств; она есть организационно-методический инструментарий педагогического процесса (Б. Т. Лихачев).

Педагогическая технология – это описание процесса достижения планируемых результатов обучения (И. П. Волков).

Педагогическая технология – это продуманная во всех деталях модель совместной педагогической деятельности по проектированию, организации и проведению учебного процесса с безусловным обеспечением комфортных условий для учащихся и учителя (В. М. Монахов).

Педагогическая технология – это комплекс, состоящий из некоторого представления планируемых результатов обучения, средств диагностики текущего состояния обучаемых, набора моделей обучения, критериев отбора оптимальной модели для данных конкретных условий (В. В. Гузеев).

Педагогическая технология – это системный метод создания, применения и определения всего процесса преподавания и усвоения знаний с учетом технических и человеческих ресурсов и их взаимодействия, ставящий своей задачей оптимизацию форм образования (ЮНЕСКО).

Из приведенных определений ясно, что понятие «педагогическая технология» в образовательной практике употребляется на трех уровнях. Назовем их.

1. Общепедагогический уровень Характеризует целостный образовательный процесс в данном регионе, учебном заведении, на определенной ступени обучения. Здесь педагогическая технология синонимична педагогической системе. В нее включается совокупность целей, содержания, средств и методов обучения, алгоритм деятельности субъектов образовательного процесса.

2. Частнометодический (предметный) уровень. Употребляется в значении «частная методика», то есть как совокупность методов и средств для реализации определенного содержания обучения и воспитания в рамках одного предмета, класса, учителя (методика преподавания предметов, методика компенсирующего обучения, методика работы учителя, воспитателя).

3. Локальный (модульный) уровень. Представляет собой технологию отдельных частей учебно-воспитательного процесса, решение частных дидактических и воспитательных задач (технология отдельных видов деятельности, формирование понятий, воспитание отдельных личностных качеств, технология урока, усвоения новых знаний, технология повторения и контроля материала, технология самостоятельной работы и др.).

В структуру педагогической технологии входят:

а) концептуальная основа;

б) содержательная часть обучения:

– цели обучения (общие и конкретные);

– содержание учебного материала;

в) процессуальная часть – технологический процесс:

– организация учебного процесса;

– методы и формы учебной деятельности школьников;

– методы и формы работы учителя;

– деятельность учителя по управлению процессом усвоения материала;

– диагностика учебного процесса.

Укажем каким критериям должна удовлетворять педагогическая технология.

Концептуальность – опора на определенную научную концепцию, включающую философское, психологическое, дидактическое и социально-педагогическое обоснование достижения образовательных целей.

Системность – наличие признаков системы: логики процесса, взаимосвязи всех его частей, целостности.

Управляемость – возможность планирования процесса обучения, поэтапной диагностики, варьирования средствами и методами с целью коррекции результатов.

Эффективность – гарантия достижения определенного стандарта обучения, эффективность по результатам и оптимальность по затратам.

Воспроизводимость – возможность применения в других однотипных образовательных учреждениях, другими субъектами.

Каждая педагогическая эпоха породила свое поколение технологий; большинство из них продолжает существовать и развиваться. Наиболее результативная часть исследований в области образовательных технологий сегодня концентрируется вокруг таких генеральных идей, как:

– укрупнение дидактических единиц,

– планирование результатов обучения,

– деятельностный подход,

– уровневая и профильная дифференциации,

– развивающее обучение,

– психологизация образовательного процесса,

– компьютеризация и т. д.

На основе этих и других генеральных идей спроектированы и реализованы такие педагогические технологии, как: блочно-модульная, интегральная, учебных циклов, дифференцированного обучения,

личностно ориентированная, коллективный способ обучения, информационно-коммуникационная и др. Об этих технологиях можно, например, узнать из работ [6; 23; 34; 35; 40; 80; 81; 84; 85; 88; 91; 93; 99; 115; 116].

Обновление системы образования сегодня непосредственно связано с использованием такого мощного средства, как компьютер. Он может играть роль эффективного средства учебно-познавательной деятельности, являться инструментом обработки и анализа педагогической информации, инструментом управления и организации учебно-воспитательного процесса.

Возможны следующие применения компьютера в процессе обучения:

– средство иллюстрации текста учебника;

– средство имитации работа различных устройств и объектов;

– средство моделирования различных явлений и процессов;

– видеолаборатория;

– тренажер, позволяющий учащимся закреплять знания, умения и навыки;

– вычислительное устройство;

– локальная информационно-справочная система и др.

Эффективность использования педагогических программных средств в обучении зависит от их качества. Педагогические программные средства должны служить развитию мыслительных процессов, лежащих в основе формирования тех или иных навыков, то есть акцент в них должен быть сделан и на процесс, и на результат. Только в этом случае учащиеся будут выступать в роли активных участников учебного процесса, конструирующих собственные мыслительные схемы, а не просто как пассивных получателей информации.

Существуют самые различные подхода к классификации педагогических программных средств. Отметим один из них, который нам представляется наиболее полным [71].

1) Управляющие программы, выполняющие некоторые традиционные функции учителя, в частности управления классом.

2) Обучающие программы, направляющие обучение исходя из имеющихся у учащихся знаний и индивидуальных предпочтений; как правило, они предполагают усвоение новой информации.

3) Диагностические программы, предназначенные для тестирования, оценивания или проверки знаний, способностей и умений.

4) Тренировочные программы, рассчитанные на повторение или закрепление пройденного и не содержащие нового учебного материала.

5) Базы данных по различным отраслям знаний, из которых хранимая в них информация может быть запрошена.

6) Измеряющие и контролирующие программы для датчиков, позволяющие получать и записывать информацию и управлять действиями роботов.

7) Имитационные программы, представляющие тот или иной аспект реальности с помощью ограниченного числа параметров для изучения их основных структурных или функциональных характеристик.

8) Моделирующие программы свободной композиции, предоставляющие в распоряжение обучаемого основные элементы и типы функций для моделирования определенной реальности.

9) Программы типа «микромир», похожие на имитационно-моделирующие, однако не отображающие реальность; в идеале это воображаемая учебная среда, создаваемая при участии учителя.

10) Инструментальные программные средства, обеспечивающие выполнение конкретных операций, например обработку текстов, составление таблиц, редактирование графической информации.

11) Языки программирования: системы кодирования, позволяющие управлять компьютером.

В настоящее время насущной стала проблема создания эффективных методик обучения в школе. Ее решение в рамках традиционных подходов невозможно. Основное внимание должно быть уделено созданию условий для внедрения в школу новых информационных технологий обучения, позволяющих вести гибкое и вариативное обучение учащихся.

В связи с этим необходимо критически пересмотреть ряд положений психолого-педагогической науки, относящихся к теории обучения, в плане технологизирования учебного процесса. Следует также разработать вопросы, связанные с технологией компьютерного обучения, которая является связующим звеном между теорией обучения и ее практической реализацией.

Предстоит еще до конца осознать те огромные возможности, которые несет «компьютерная революция», понять социальное влияние информатики на все сферы человеческой жизни, в том числа и на учебно-воспитательный процесс в школе.

Новые информационные технологии позволяют провести реконструкцию ныне действующей в школе методической системы обучения.

В основе технологии учебного процесса мы будем рассматривать методическую систему обучения, включающую в себя следующие компоненты: цели, содержание, методы, формы, средства обучения. Кардинально перестроить технологию учебного процесса можно за счет

устранения внутренних и внешних противоречий между компонентами методической системы обучения. К ним, в частности, относятся:

– противоречия между требованиями, предъявляемыми обществом к общеобразовательной подготовке выпускников школ, и ее фактическим уровнем;

– противоречия между единообразием форм, приемов и методов преподавания и разнообразием индивидуальных склонностей и способностей учащихся;

– противоречия между возрастающим объемом знаний, накапливаемым наукой, и реально существующими сроками обучения;

– противоречия между содержанием учебно-воспитательного процесса и формами его организации;

– противоречия, порожденные неверно установленной иерархией воспитательных, развивающих и обучающих целей учебного процесса;

– противоречия, исходящие из нереальности для большого числа учащихся поставленных перед ним учебных целей и задач.

В процессе разрешения отмеченных противоречий произойдет ломка догматических методик преподавания, устранение рецидивов универсализации некоторых методов обучения и установок на получение единообразного для всех учащихся содержания обучения.

Перестройка технологии учебного процесса должна идти за счет демократизации и гуманитаризации образования, активизации человеческого фактора, развития индивидуальных способностей учащихся, стимулирования творческого мышления учителей и учащихся, внедрения новых информационных технологий обучения.

Долгое время считалось, что лишь за счет совершенствования одного компонента методической системы (содержания) можно разрешить все противоречия, стоящие перед школьным обучением.

Содержание школьного образования главным образом нацеливалось на усвоение знаний, умений и навыков, а не на развитие личности учащегося, что привело к таким негативным последствиям, как отождествление всестороннего гармонического развития личности с ее всесторонней образованностью, примата информированности личности над ее культурой, рационально-логической стороны познания над чувственно-эмоциональной.

В арсенале традиционных методов, форм и средств обучения учебный процесс сейчас скорее является направляемым, чем управляемым. Один из недостатков традиционной системы обучения – слабое или отсутствующее воздействие результатов текущего усвоения знаний на ход дальнейшего обучения и относительная пассивность учащихся в условиях объяснительно-иллюстративного метода.

Новые информационные технологии обучения позволят соединить воедино процессы изучения, закрепления и контроля усвоения учебного материала, которые при традиционном обучении чаще всего оказываются искусственно разорванными.

Если в условиях информационно-объяснительного подхода к построению учебного процесса работала в основном «формула» «Усвоение = Понимание + Запоминание», то новые информационные технологии обучения строятся по «формуле» «Овладение = Усвоение + Применение знаний на практике». Эти технологии предполагают посредством знаний учить школьников мыслить, учить их познавательной деятельности, вооружать учебно-познавательным аппаратом.

Новые информационные технологии, которые строятся в соответствии с возрастными и индивидуально-типическими особенностями школьников, обеспечат значительный прогресс в учебной деятельности и умственном развитии всех учащихся как сильных, так и слабоуспевающих. Информационные технологии позволят оптимально учесть уровень развития у учащихся словесно-логического и интуитивно-практического мышления, индивидуальный стиль деятельности, обусловленный его темпераментом, учесть значительные различия в предпочитаемом способе действий (с опорой на образ или на слово) и способах запоминания (с опорой на зрение, слух и т. д.).

Использовать новые информационные технологии обучения в школе необходимо в связи с широчайшим распространением средств автоматизации и вычислительной техники во все сферы человеческой жизни. Школьники должны освоить важнейшие методы информатики и ознакомиться с вычислительной техникой уже в стенах школы. Компьютер в школе сегодня должен выполнять и определенные социальные функции.

Рассмотрим некоторые психолого-педагогические аспекты влияния новых информационных технологий обучения на учебный процесс.

Социальный заказ общества требует информатизации структуры и содержания образования в школе. Важное место в решении этой проблемы занимает исследование дидактического взаимодействия школьного учебника и компьютера.

Школьный учебник выполняет различные дидактический функции. Под дидактическими функциями учебника, следуя Д. Д. Зуеву, будем понимать «целенаправленно сформированные его свойства (качества) как носителя содержания образования и основного книжного средства обучения, наиболее полно отвечающие целевому назначению учебника в процессе реализации содержания образования в условиях развивающего, воспитывающего обучения» [59, с. 58].

Современному школьному учебнику присущи следующие дидактические функции: информационная, трансформационная, систематизирующая, закрепления и самоконтроля, самообразования, интегрирующая, координирующая, развивающе-воспитательная.

В связи с внедрением в школу новых информационных технологий обучения следует перераспределить эти функции между участниками учебного процесса: учителем, учащимся, учебником, компьютером.

Заметим еще раз, что информационные технологии обучения не отрицают и не ограничивают творческую роль педагога, не ставят его в роль инструктора, пассивно наблюдающего за работой учащихся. Учителю и в этих условиях должен быть отдан приоритет в таких вопросах, как создание творческой познавательной атмосферы в классе, стимулирование интереса учащихся к процессу учения, доведение до сознания школьников основной идеи и целей урока, поддержание рабочей дисциплины, организация обучения и сотрудничества детей для коллективного решения общих проблем и т. д. Новые информационные технологии обучения отводят учителю не только роль носителя и интерпретатора информации, которую он передает учащимся, а прежде всего роль умелого организатора самостоятельной учебно-поисковой деятельности школьников. Обобщая сказанное, заметим, что «учить надо с помощью компьютера, а не одним компьютером».

Основные понятия, правила, законы (категориально-понятийный аппарат курса математики) в учебнике должны подаваться в проблемном виде, что создаст условия для формирования у учащаяся положительных мотивов учения. Включение проблемных, познавательных и практических заданий позволит обучать переносу знаний в новые ситуации, умению видеть их новые функции, формировать альтернативное мышление.

Мы придерживаемся точки зрения тех ученых-педагогов, которые считают, что проблемные ситуации в учебниках должны быть градуированы по степени проблемности; последняя определяется количеством содержащейся в этих ситуациях информации об «открываемом» понятии, правиле, приеме и т. д.

Раскрывать проблемные ситуации в учебнике нецелесообразно, ибо если такое раскрытие и будет предусмотрено, то это будет лишь «усредненный» вариант, рассчитанный не на персонифицированную модель ученика, а на модель среднего ученика. Учебник не может реализовать все условия оптимального учета индивидуальных различий учащихся.

Учитель владеет большим арсеналом приемов, форм и методов дифференциации и индивидуализации процесса обучения, но и он не

в силах использовать его полностью на одном уроке, особенно в условиях переполненных классов.

Сказанное выше говорит в пользу того, что перепоручить раскрытие проблемных ситуаций следует компьютеру. Это позволит максимально учесть неповторимую индивидуальность каждого учащегося. Раскрытие проблемных ситуаций должно требовать от учащихся использования уже имеющихся знаний и умений и вместе с тем нести известную закономерность или способ действия, потребность в которых и должна быть осознана школьниками.

Организуя работу учащихся посредством педагогических программных средств, можно увеличивать или уменьшать их творческий компонент мышления. Это можно достичь регулированием местоположения в педагогических программных средствах необходимых консультаций, подсказок, роль которых – стимулировать психологический механизм возникновения догадки, осознания нужного способа решения.

В структуре учения можно выделить следующие компоненты:

– осмысление содержания знаний и действий;

– усвоение предметного и процессуального содержания;

– овладение усвоенным содержанием.

Уровень осмысления учебного материала зависит от того, в каком виде он преподносится учащимся. В учебнике он обычно дается в виде «готовых ответов и решений», а изложение ведется в основном синтетическим методом. В таком случае ученик осмысливает материал преимущественно на уровне рецептивно-репродуктивной деятельности. Однако осмысление учебного материала идет более эффективно на уровне продуктивно-творческой деятельности.

Эффективность осмысления зависит не только от предметного содержания и его логической структуры, но и от эмоционального отношения учащихся к учебному материалу и к тому, кто его объясняет, от их активности и восприимчивости.

Сказанное выше позволяет сделать вывод о целесообразности передачи функции объяснения (не путать с функцией описания) не учебнику, не компьютеру, а учителю, который, привлекая средства эмоционального воздействия на учащихся, поведет объяснение аналитико-синтетическим методом.

В зависимости от содержания рассматривают следующее типы объяснения: генетические (как объект стал таким, каким он является); причинные (устанавливаются причины явления); функциональные (в чем специфика функционирования объекта); структурные (объект объясняется через взаимосвязь, взаимодействие его элементов); через

закон (объект показывается как проявление известной закономерности) [114].

Объяснения могут быта «однопорядковые», если отсутствуют последующие объяснения, и «многопорядковые», если имеются вторичные, третичные и т. д. объяснения.

В условиях информационных технологий обучения эффективны многопорядковые объяснения. Первое объяснение учебного материала должен проводить учитель. При этом объяснение должно быть таким, чтобы оно было доступно всем учащимся. Это достигается за счет сокращения объема сообщаемого материала, намеренным упрощением изложения. Уровень первого объяснения должен быть таким, чтобы он давал тот минимум обязательных результатов обучения, который позволяет понимать материал следующих тем курса; первый уровень объяснения должен давать пусть и упрощенное, но целостное и верное представление об изучаемом объекте, явлении. Такое объяснение строится на максимально доступном материале.

Последующие объяснения могут быть организованы посредством компьютера и представлять собой более высокий уровень, учитывающий способности и склонности наиболее подготовленных учащихся. Повторные «компьютерные» объяснения должны содержать подробности и тонкости учебного материала, они должны отличаться строгостью и глубиной изложения материала. Эти объяснения направлены на развитие тех учащихся, которые проявляют интерес к предмету.

В процессе учебной деятельности школьники могут получать пять видов знаний: познание внешних, атрибутивных свойств предметов; познание зависимости между свойствами; познание связей или функций предметов в более сложном целом; познание зависимости между связями или функциями предметов; познание внутреннего строения объекта, состава элементов и структуры связей элементов как детерминант внешних свойств объектов [61].

Объяснение нового учебного материала учителем должно преследовать цель раскрытия существенных свойств изучаемого объекта. Другими словами, учащимся должны разъясняться схемы объектов (они отражают внутрипонятийные связи) и схемы ориентации в объектах (они отражают межпонятийные связи и отношения).

Одна из задач учителя и компьютера состоит в обеспечении оптимального уровня коммуникации между учебником и учащимися путем оказания необходимой помощи каждому ученику, путем различной дозировки знаний.

Для того чтобы эффективно строить процесс обучения по овладению школьниками новой порцией учебной информации, необходим учет базовых званий школьников и их актуализация. В решении этого вопроса главную роль должен сыграть компьютер и функция его в этом – диагностирующе-корректирующая.

Характер внедрения новых информационных технологий в процесс обучения зависит от особенностей учебного предмета. Раскроем обозначенную тему более систематично.

Традиционно все учебные предметы, входящие в учебный план школы, делят на гуманитарные, естественнонаучные и математические. В основе такого подхода лежит классификация наук по объекту изучения. Но такое деление не позволяет провести анализ общего и особенного в организации процесса обучения конкретному учебному предмету посредством новых информационных технологий.

С этой целью приемлема классификация по ведущей цели предмета в учебном плане, предложенная Л. Я. Зориной [57].

Дидактическая модель учебного предмета представлена исследователями Л. Я. Зориной и И. К. Журавлевым в виде некоторой целостности, которая в неразрывном единстве включает предметное содержание и средства его усвоения, развития и воспитания учащихся [55; 57]. В модель учебной дисциплины они включают два блока: основной – предметный, включающий то содержание, ради которого учебный предмет введен в учебный план; процессуальный, обеспечивающий усвоение знаний, формирование умений, развитие и воспитание школьников.

Главную цель учебного предмета определяет его ведущий компонент. По ведущему компоненту Л. Я. Зориной предложена такая классификация учебных предметов:

1) учебные предметы с ведущим компонентом «научные знания», или основы наук;

2) учебные предметы с ведущим компонентом «способы деятельности»;

3) учебные предметы с ведущим компонентом «художественное образование и эстетическое воспитание».

Математика есть учебный предмет с двумя ведущими компонентами: «научные знания» и «способы деятельности».

Если говорить отдельно о геометрии и алгебре, то следует заметить, что в учебном предмете «Геометрия» доминирует компонент «научные знания», а в учебном предмете «Алгебра» – «способы деятельности» (другими словами: в геометрии надо больше знать, чем в алгебре, а в алгебре больше уметь, чем в геометрии).

Использование информационных технологий в обучении алгебре и геометрии имеет свои особенности, которые должны быть учтены как составителями программ и учебников, так и учителями.

Доминирование «научных способов деятельности» в алгебре делает целесообразной такую структуру урока: 1/3 времени урока – на теорию и 2/3 – на решение задач. Преобладание в геометрии «научных знаний» требует другой структуры урока: 1/2 времени урока – на теорию и 1/2 времени урока – на решение задач.

Следует заметить, что ученым еще только предстоит провести основательные исследования вопроса о роли компьютера в «обслуживании» каждого блока: предметного и процессуального.

Структуру умственной деятельности школьников в области геометрии, следуя Г. Д. Глейзеру [19], можно представить в виде следующих взаимосвязанных составляющих: интуитивный, пространственный, метрический, логический, конструктивный, символический компоненты.

Информационные технологии в обучении геометрии с различной степенью полноты способны влиять на формирование каждого из названных компонентов. В большей степени эти технологии способствуют формированию у учащихся геометрической интуиции, конструктивных умений, пространственных представлений.

Говоря о пространственных представлениях, следует учитывать, что в психологии различают два их вида – памяти и воображения. Под представлениями памяти понимают образы, возникающие в сознании на основе прошлого опыта в результате отражения пространственных свойств и отношений ранее воспринятых предметов. Под представлениями воображения понимают новые образцы, формируемые в результате трансформации представлений памяти.

Носителем содержания обучения геометрии, как и других учебных курсов, в основном является учебник (он является конкретным выразителем стандарта единого уровня образования по предмету). В школьных учебниках геометрии различных авторских коллективов все пять компонентов, перечисленных выше, представлены по-разному, вернее, авторами сделаны различные акценты на них.

Так, А. Д. Александров считает, что в геометрии важнее всего «строгая логика плюс живое воображение», но ради наглядности можно пожертвовать логической точностью и обоснованностью; преподавание геометрии включает логику, наглядное представление, применение к реальным вещам.

А. В. Погорелов основной акцент в геометрии делает на развитие логического мышления учащихся.

А. Н. Колмогоров при разработке своего учебника ставил цель внедрить в школьный курс геометрии новые идеи и методы, важнейшие общематематические понятия.

В. Г. Болтянский считает важнейшей задачей преподавания геометрии в школе воспитание у учащихся «геометрического мышления».

А. С. Атанасян в своих учебниках на первый план выдвигает задачи развития умений и навыков учащихся, самостоятельности мышления, доступности изложения.

В зависимости от того, какой цели отдан приоритет в учебнике геометрии, по которому ведется преподавание, информационные технологии обучения будут разными, но служить они должны все же основным целям изучения геометрии в школе.

Целевые установки на преподавание геометрии в средней школе могут быть выражены следующим образом:

– формировать у учащихся диалектико-материалистическое мировоззрение, ознакомить их с ролью геометрии в формировании целостной научной картины мира, с соотношениями математических абстракций и реальной действительности;

– формировать у учащихся систему геометрических знаний и умений, обеспечить прочное и сознательное овладение методами их получения;

– развивать пространственное воображение и логическое мышление учащихся;

– вооружить школьников геометрическими знаниями, умениями и навыками, необходимыми в повседневной жизни и в работе, достаточными для изучения в школе других наук, для продолжения послешкольного образования.

Во все времена существования учебника геометрии основными направлениями его совершенствования являлись: обогащение идейного содержания и повышение научного уровня учебного материала. Во второй половине XIX в. учеными проводились исследования в плане поиска оптимальных средств преобразования информации, содержащейся в учебнике, в соответствии с возрастными особенностями учащихся. В 1930-е гг. совершенствование школьных учебников математики шло в направлении сближения различных курсов математики, решения задачи политехнической подготовки учащихся, повышения мировоззренческой направленности курса.

В настоящее время совершенствование учебников математики должно идти в плане учета новых информационных технологий обучения, которые внедряются в школе. Особо важными в решении этой проблемы являются вопросы пересмотра структурной компоновки учеб-

ников математики и их управляющей функции по формированию у школьников знаний, умений и навыков.

Эффективность применения компьютеров в обучении математики, впрочем, как и в обучении другим дисциплинам, обусловлена следующими факторами:

1) быстрота и надежность обработки любого вида информации;

2) возможность представления информации в графической форме;

3) хранение и быстрота подачи больших объемов информации;

4) возможность моделирования с помощью компьютера разнообразных процессов;

5) компьютер позволяет активизировать содержательную, операционную и мотивационную стороны процесса обучения;

6) компьютер позволяет оперативно управлять учебной деятельностью учащихся;

7) возможность оптимально дифференцировать учебную деятельность школьников в зависимости от уровня подготовки, познавательных интересов и т. д.;

8) компьютер позволяет организовать оперативный контроль и помощь учащимся со стороны учителя;

9) предоставляется возможность проводить различные «математические эксперименты».

Современные персональные компьютеры сделали, по существу, революцию в способах передачи, обработки и хранения информации. Диалоговые возможности современных персональных компьютеров реализуются в виде разнообразных компьютерных сред, обеспечивающих удобный пользовательский интерфейс и высокую эффективность работы. Развитие компьютерных технологий на современном этапе, их ориентация на интересы конкретного пользователя позволяют рассматривать компьютер как средство для организации процесса обучения.

Далее рассмотрим дидактико-методические аспекты использования компьютера в обучении математике.

§ 2. Истоки становления информационных технологий обучения, их основы и дидактические функции

Государства развиваются в направлении перехода от индустриального обществу к информационному. Такое общество характеризуется, с одной стороны, быстрым ростом объемов информации, с другой – труднодоступностью и сложностью переработки и хранения мегаинформации. В этих условиях жизненно важную роль играют информационные и коммуникационные технологии, которые обеспечивают доступность мегаинформации для каждого отдельного человека.

Государственная политика информатизации системы образования России в условиях введения новых государственных образовательных стандартов, перехода на новое содержание образования требует от педагогической науки и практики современного научно-методического обеспечения учебного процесса на основе современных информационно-коммуникационных технологий (ИКТ). Государство взяло курс на полное обеспечение школ компьютерами новых поколений, обеспечением выхода школ в Интернет, на интенсивное развитие программных средств учебного назначения. Образовательная политика России учитывает общие тенденции мирового развития, обусловливающие необходимость существенных изменений в системе образования:

– ускорение темпов развития общества, расширение возможностей политического и социального выбора, что вызывает необходимость повышения уровня готовности граждан к такому выбору;

– переход к постиндустриальному, информационному обществу, значительное расширение масштабов межкультурного взаимодействия, в связи с чем особую важность приобретают факторы коммуникабельности и толерантности;

– возникновение и рост глобальных проблем, которые могут быть решены лишь в результате сотрудничества в рамках международного сообщества, что требует формирования современного мышления у молодого поколения;

– динамичное развитие экономики, рост конкуренции, сокращение сферы неквалифицированного и малоквалифицированного труда, глубокие структурные изменения в сфере занятости, определяющие

постоянную потребность в повышении профессиональной квалификации и переподготовке работников, росте их профессиональной мобильности;

– возрастание роли человеческого капитала, который в развитых странах составляет 70–80 % национального богатства, что, в свою очередь, обусловливает интенсивное, опережающее развитие образования как молодежи, так и взрослого населения.

«Человечество вступает в новое столетие. XXI век будет веком знаний, веком информации, веком стремительного развития новых технологий. Со всей очевидностью это требует расширения масштабов и роста уровня образования, улучшения качества подготовки специалистов». С этих слов начинается обращение Совета Российского союза ректоров высших учебных заведений к государственным и политическим деятелям, представителям академических и деловых кругов.

Информационные технологии имеют очень мощные возможности для повышения эффективности и качества процесса обучения [93].

Вот они:

– индивидуализация и дифференциация процесса обучения (ученик имеет возможность сам выбирать траекторию изучения и уровень сложности учебного материала, изучать его в оптимальном темпе);

– немедленная обратная связь между учебной компьютерной программой и учеником (ученик сразу же узнает об ошибках, которые он совершает в процессе обучения);

– визуализация учебной информации (изучаемый объект представляется на экране монитора во всевозможных ракурсах, деталях, наглядно или в виде схемы);

– накопление и хранение огромных объемов информации, которой может пользоваться ученик; организация поиска и доступа к информации, распределенной в Интернете;

– автоматизация передачи учебной информации ученику, ее закрепления и контроля.

В обозначенных условиях значительную роль играет способность педагогов определять информационные потоки, создавать информационно-обучающее поле, формировать способы поиска, анализа, переработки и систематизации информации, ориентировать на дистанционные способы взаимодействия и оценки результатов обучения по продуцированию новых знаний. Вполне очевидной в этой связи становится необходимость создания новых педагогических технологий, направленных на формирование информационного мировоззрения личности, осуществляющей свою деятельность в современной информа-

ционной среде, способной эффективно использовать накопленные информационные ресурсы.

Предыстория электронно-вычислительных машин (ЭВМ) началась еще в XVII в. с попыток построения счетной машины математиком Блезом Паскалем (Pascal), предназначенной по его замыслу в первую очередь для облегчения рутинной вычислительной работы. Гигантским скачком, раскрывшим новые сферы применения счетных машин, стала разработка структуры автоматического вычислителя (1823), который сразу проектировался как универсальное устройство для обработки числовой информации без специальной направленности на решение конкретных задач. Его структура оказалась столь удачной, что повторяется и в современных ЭВМ.

Персональные ЭВМ вначале (Micral, Франция, 1973) казались всего лишь дорогостоящей забавой. Однако основатели и организаторы первого массового производства компьютеров («Apple Computer», 1977) создали такие условия, в которых человек мог обрабатывать информацию, пользуясь образами (например, графиками или рисунками), вместо цифрового и буквенного вводов команд. Эти нововведения позволили ЭВМ перейти в сферу массового использования. Стало доступным главное ее достоинство – обработка информации различной природы, преобразованной в цифровой вид, и представление результатов обработки в привычном для человека виде.

Информационный век, по мнению А. П. Ершова [53], начался не с появления первых компьютеров, а с появления глобальных информационных сетей, имеющих мощные информационные магистрали.

Первые вычислительные сети (ВС) ЭВМ появились в 1960-х гг. [60].

По сути, они произвели своего рода техническую революцию, сравнимую с появлением первых ЭВМ, так как была предпринята попытка объединить технологии сбора, хранения, передачи и обработки информации на ЭВМ с техникой связи.

Одной из первых сетей, оказавших влияние на дальнейшее их развитие, явилась сеть ARPA, созданная пятьюдесятью университетами и фирмами США. Она охватывала всю территорию США, часть Европы и Азии. Сеть ARPA доказала техническую возможность и экономическую целесообразность разработки больших сетей для более эффективного использования ЭВМ и программного обеспечения.

В настоящее время она преобразовалась в сеть Internet.

С появлением микроЭВМ и персональных компьютеров возникли локальные вычислительные сети (ЛВС). Они позволили поднять на качественно новую ступень управление производственными объек-

тами, повысить эффективность использования ЭВМ, поднять качество обрабатываемой информации, реализовать безбумажную технологию, создать новые технологии. Объединение ЛВС и глобальных сетей позволило получить доступ к мировым информационным ресурсам.

Internet представляет собой глобальную компьютерную сеть. Само ее название означает «между сетей». Это сеть, соединяющая отдельные сети.

Логическая структура Internet представляет собой некое виртуальное объединение, имеющее свое собственное информационное пространство.

Internet обеспечивает обмен информацией между всеми компьютерами, которые входят в сеть. Тип компьютера и используемая им операционная система значения не имеют. Соединение сетей обладает громадными возможностями.

Internet предоставляет в распоряжение своих пользователей множество всевозможных ресурсов.

Основные ячейки Internet – локальные вычислительные сети. Это значит, что Internet не просто устанавливает связь между отдельными компьютерами, а создает пути соединения для более крупных единиц – групп компьютеров. Если некоторая локальная сеть непосредственно подключена к Internet, то каждая рабочая станция этой сети также может подключаться к Internet. Существуют также компьютеры, самостоятельно подключенные к Internet. Они называются хост-компьютерами (host – хозяин). Каждый подключенный к сети компьютер имеет свой адрес, по которому его может найти абонент из любой точки света.

Интернет – как посредник между учителем и учениками – стал одним из наиболее удивительных средств телекоммуникации, предоставляющим возможность связи между ранее отдельно существующими и функционирующими сетями и использующим общий коммуникационный протокол TCP/IP (Transmission Control Protocol/Internet Protocol). По оценкам, уже в 1995 г. насчитывалось около 35 млн пользователей во всем мире, и их число постоянно увеличивается. Интернет предоставляет доступ к огромному объему материалов и информации.

У пользователей Интернет есть доступ:

1) к электронной почте;

2) к бюллетеням и компьютерным конференциям;

3) к данным в режиме реального времени (базам данных);

4) к каталогам и иллюстрированным путеводителям по музеям, картинным галереям, библиотекам и т. п.;

5) к бесплатному программному обеспечению;

6) к книгам и газетам;

7) к графике и т. д.

Но Интернет «...это нечто большее, чем система доставки информации – это также новая интеллектуальная среда, в которой мы начинаем создавать «места»... Это место, пока еще не существующее, но которое быстро превращается в общность нескольких мест» [68, с. 13]. В течение всего лишь несколько лет Интернет начал процесс фундаментальных изменений, которые позволят пользователям иметь доступ к мультимедиа материалам, таким как цифровые изображения, звук и анимация. Доступ становится все более легким, пользователь просто нажимает клавишу для выбора гипертекста во Всемирной паутине (WWW) [124].

Ключевые слова «гипертекст» и «гипермедиа» стали сущностью WWW. Гипертекст определяют как «систему, которая позволяет вам выбрать нужное слово или изображение – и вы переходите на другую часть документа. Как только вы подсоединились к точке, вы совершаете прыжок и получаете дальнейшую информацию, просто указывая клавишей на различные иконки-изображения...» [68, с. 15].

Гипермедиа стало настоящим словом-паролем в области образовательных технологий. «Среда гипермедиа – это интерфейс пользователя, который позволяет работать с различными элементами как с единым предметом: текстом, графикой, изображениями, звуком, программами по моделированию, базами данных, компьютерными сетями и т. д. на базе специальных приложений. Результаты этого подхода – увеличение встречной активности и упрощение пользования. Гипермедиатехнология важна не только для образовательных целей, по-видимому, в самом ближайшем будущем она может стать мощным инструментом для обработки информации самого различного толка» [68, с. 19].

Новая модель образования будет формироваться как результат развития информационных процессов и технологий. Они занимают центральное место в решении ряда стратегических задач: переход к обучению в течение всей жизни на основе дистанционных форм организации системы образования; выход школ в открытое информационное пространство с помощью предоставления им новых средств культурного и лингвистического общения; усиление образования средствами, присущими информационному обществу.

В рабочем документе «Multimedia Education Software: First elements for reflexion» («Мультимедийные образовательные программы: первые итоги») опубликованном в сентябре 1995 г. Европейской Комиссей (ЕС) говорится: «Слияние телекоммуникаций, телевидения и компьютерной технологии, происходящее благодаря широкому рас-

пространению методов цифровой обработки данных, возвещает приход новой эры, эры мультимедиа и телекоммуникаций... Полностью осознавая столь блестящие перспективы, Европейский Совет подтвердил, что в 1995 г. система образования должна рассматриваться как одна из наиболее приоритетных областей для внедрения новых информационных и коммуникационных технологий» [68, с. 21].

Одна из основных целей программы информатизации связана с созданием технологически насыщенной учебной среды сильно отличающейся от той, что мы знали до сих пор. Эта среда должна сократить разрыв между школой и внешним миром.

Осознание фундаментальной роли информации, возрастание объемов информации, развитие информационной техники и технологии являются одними из наиболее важных факторов, определяющих взаимосвязь, существующую между системой образования и информационной проблематикой. Переход информации в разряд важнейших универсальных категорий отражает объективную необходимость информационных ресурсов для всех основных видов человеческой деятельности: учебной, научно-исследовательской, производственной, административно-управленческой, творческой и ряда других. Реализация информационных ресурсов на основе современной компьютерной техники открывает широкие возможности для решения глобальных проблем человечества на основе использования информации и знаний. Вполне очевидной в этой связи становится необходимость исследования новых педагогических моделей личности, осуществляющей свою деятельность в современной информационной среде, способной эффективно использовать накопленные информационные ресурсы.

Компьютерные телекоммуникации являются естественным продолжением интеграционных тенденций развития информационных систем. При слиянии со средствами связи вычислительная техника приобретает новое качество – компьютеры становятся средством, позволяющим выйти за рамки информационного пространства данного учреждения, расширить возможности информационного взаимодействия до границ города, области, республики и в конечном счете обеспечить выход в мировое информационное пространство. В таком варианте пользователь персонального компьютера включается в мощную телекоммуникационную инфраструктуру, становится элементом глобальной компьютерной сети. Такие сети объединяют с помощью современных средств связи (выделенных и коммутируемых телефонных линий, телеграфной сети, радио, спутниковой связи и т. д.) десятки и сотни тысяч пользователей, информационных источников, центров обработки данных, удаленных друг от друга на значительные расстояния.

Под информатизацией образования [9] понимается процесс подготовки граждан к жизни в условиях современного информационного мирового сообщества и повышения качества общеобразовательной и профессиональной подготовки специалистов на основе широкого использования компьютерной техники и информационных технологий.

Информатизация образования – это процесс модернизации сферы образования под влиянием методологии информатики, а также использование в обучении, развитии и воспитании учащихся средств информатизации и информационных технологий. Содержанием процесса информатизации образования является [68; 93]:

– становление учебных дисциплин, обеспечивающих подготовку учащихся в области информатики;

– создание и освоение учителями новых средств обучения, основанных на средствах информатизации;

– внедрение информационных технологий во все учебные дисциплины, освоение учителями новых методов и форм учебной работы;

– изменение содержания всех учебных дисциплин;

– совершенствование механизмов управления системой образования на основе использования распределенных информационных ресурсов и компьютерных сетей;

– использование математических методов и информационного моделирования в управлении педагогическими системами.

Собственно к информационным процессам можно отнести:

1. Сбор информации – деятельность субъекта, в ходе которой он получает сведения об интересующем его объекте.

2. Передача информации – процесс, в ходе которого источник информации ее передает, а получатель – принимает.

3. Накопление информации – процесс фиксации получаемой информации.

4. Хранение информации – процесс поддержания накопленной информации в виде, обеспечивающем ее выдачу.

5. Обработка информации – процесс преобразования информации для получения новой информации.

Проникновение компьютерных технологий в образование началось с середины 1950-х гг., после появления достаточно мощных ЭВМ и создания первых языков программирования. Активное оснащение компьютерами учреждений образования в развитых странах Запада началось в конце 1970-х гг.

Предпосылкой для этого послужило появление персональных компьютеров. В Российской Федерации информатизация образования в широких масштабах началась в 1985 г. В школьную учебную про-

грамму был введен новый учебный предмет «Основы информатики и вычислительной техники», в течение короткого времени было создано учебно-методическое обеспечение этого курса, стали появляться первые педагогические программные средства и компьютерные программно-методические комплексы по общеобразовательным предметам.

В. Р. Майер отмечает: «В национальной доктрине образования в Российской Федерации определены цели воспитания и обучения, пути их достижения посредством государственной политики в области образования, ожидаемые результаты развития системы образования на период до 2025 г. Целый ряд положений этого документа относится к информатизации образования. Так, например, к основным целям и задачам, которые призвана обеспечить государственная система образования, отнесены следующие:

– организация учебного процесса с учетом современных достижений науки, систематическое обновление всех аспектов образования, отражающего изменения в сфере культуры, экономики, науки, техники и технологий;

– создание программ, реализующих информационные технологии в образовании, и развитие открытого образования;

– подготовка высокообразованных людей и высококвалифицированных специалистов, способных к профессиональному росту и профессиональной мобильности в условиях информатизации общества и развития новых наукоемких технологий» [75, с. 13].

И. В. Роберт отмечает, что «фрагментарное использование программных обучающих средств с целью «латания прорех» традиционной методики не может иметь успех ни у обучаемых, ни у обучающих». Кроме того, большинство программных средств, ориентированных на осуществление контроля или деятельности, связанной с формированием определенных умений и навыков, реализует идеи программированного обучения. Как отмечается в этой же работе, «использование таких программ в учебном процессе как зарубежной, так и отечественной школы – это уже пройденный этап, принесший педагогической практике не столько удовлетворение, сколько разочарование» [93, с. 49].

В области создания и использования компьютерных инструментов познания работают известные исследователи и практические разработчики.

В России исследования в этом русле ведутся в Московском институте новых технологий образования, Российском научно-исследовательском институте системной интеграции, Санкт-Петербургском институте продуктивного обучения, Центре профессионального обнов-

ления «Информатизация образования», Омском государственном педагогическом университете, Красноярском государственном педагогическом университете и других крупных учебно-научных центрах страны.

С. Р. Удалов и О. В. Воронина отмечают: «Информатизация образования создает предпосылки для широкого внедрения в педагогическую практику психолого-педагогических разработок, позволяющих интенсифицировать учебный процесс, реализовать идеи развивающего обучения, в том числе в рамках новых моделей. Развитие методов и организационных форм обучения обусловлено возможностями информационных технологий, меняющих человеческую деятельность и педагогическую практику» [116, с. 12].

Информационные технологии открывают каждому обучаемому и обучающемуся доступ к практически неограниченному объему информации и ее аналитической обработке, что обеспечивает включенность в информационные потоки общества. Средства информатизации представляют собой универсальное средство познавательно-исследовательской деятельности, являются вторым по значимости после письменности знаковым орудием, обеспечивающим оперативный обмен информацией по содержанию выполняемой деятельности.

Дидактические свойства информационных технологий – это природные, сущностные качества этих технологий, которые можно использовать с дидактическими целями в учебно-воспитательном процессе [84]. Можно выделить следующие функции:

1. Собирать и долговременно хранить учебную информацию.

2. Передавать учебную информацию на неограниченные расстояния или неограниченному числу потребителей.

3. Обрабатывать учебную информацию в реальном времени или отложено.

4. Представлять учебную информацию в различных видах (текст, изображения).

5. Представлять разнородную учебную информацию в мультимедийном виде.

6. Обеспечивать одновременный доступ к учебной информации неограниченному числу потребителей.

7. Защищать учебную информацию.

8. Программировать процесс обучения.

9. Проектировать процесс обучения.

10. Моделировать процесс обучения.

11. Управлять процессом обучения.

12. Диагностировать качество процесса обучения.

Особенность современного педагогического процесса состоит в том, что в отличие от традиционного образования, где центральной

фигурой является учитель, центр тяжести при использовании новых информационных технологий постепенно переносится на учащегося, который активно строит свой учебный процесс, выбирая определенную траекторию в развитой образовательной среде. Важная функция учителя – поддержать учащегося в его деятельности: способствовать его успешному продвижению в море учебной информации, облегчить решение возникающих проблем, помочь освоить большую и разнообразную информацию.

Со временем компьютер становится незаменимым в процессе обучения, что признают многие педагоги. В частности, С. Пейперт отмечает: «Я уже указывал на одну из причин, почему я убежден, что существование компьютеров окажет на интеллектуальное развитие людей гораздо более фундаментальное воздействие, чем любые другие изобретения техники, в том числе телевидение и даже полиграфия. Метафорическое описание компьютера как реалии, говорящей на языке математики, вовлекает обучаемого в качественно новый тип связи с важной областью человеческих знаний. Даже самые превосходные образовательные программы телевидения ограничиваются лишь улучшенными, но существующими и помимо них формами учения» [87, с. 17]. Он считает, что когда ребенок учится программированию, процесс учения преобразуется. Учение становится более активным и направляется самим ребенком. В частности, знание ребенок осваивает через достижение личных целей. Новые знания – источник могущества, и освоенные как таковые, они преобразуют мышление ребенка. По мнению С. Пейперта, компьютер позволяет конкретизировать (персонифицировать) формальное мышление. С. Пейперт пишет: «Я не сомневаюсь, что компьютер позволит нам сдвинуть возрастные границы, разделяющие конкретное и формальное мышление. Знание, которое осваивается только через овладение формальными операциями, может теперь конкретизироваться. И подлинная магия состоит в том, что такое конкретизированное знание включает все элементы, которые необходимы, чтобы стать мыслителем, владеющим средствами формального мышления» [87, с. 19].

Работы психолога П. И. Зинченко были посвящены исследованию уровня усвоения в зависимости от целей, которые ставятся при запоминании материала. Еще в 1960-е гг. им было выяснено, что уровень воспроизведения определяется целью действия: при формировании логических связей между разделами запоминание было лучше, чем без их учета. Этот важный вывод касается эффективности использования гипертекстовых связей в электронных учебниках, основанных на интеграции web-технологий с CD-ROM. Во-первых, при проектиро-

вании мультимедийных электронных учебников и интерактивных систем надо формировать гипертекстовые связи, следуя программе курса, методике обучения, логике учебных целей. Во-вторых, используя богатые возможности Интернета, необходимо следить за навигацией и ориентацией как в документе, так и в гиперпространстве.

Рассматривая информационные технологии через призму указанных выше тенденций в развитии школьного образования, можно определить дидактические функции информационных технологий, показав, какие уникальные педагогические задачи можно решать с их помощью.

Дидактические функции – это внешнее проявление свойств информационных технологий, используемых в учебно-воспитательном процессе с определенными целями. Это их назначение, роль и место в учебном процессе [84; 93].

Эти функции сводятся к следующему:

1. Формирование умения получать информацию из различных источников, обрабатывать и хранить ее.

2. Формирование умения передавать информацию, представленную в различных видах.

3. Формирование навыков исследовательской деятельности с помощью моделирования работы научной лаборатории.

4. Организация интерактивного диалога учащегося со средствами обучения.

5. Предоставление учащимся возможности управления реальными объектами (например, учебными роботами, имитирующими промышленные устройства или механизмы).

6. Предоставление учащимся возможности управления информационными моделями различных объектов, явлений, процессов.

7. Автоматизация контроля и самоконтроля результатов учебной деятельности, коррекция по результатам контроля, тренировка.

8. Создание среды для исследовательской работы учащихся из различных школ, регионов и стран.

9. Формирование у учащихся коммуникативных навыков, культуры общения.

10. Способствование культурному, гуманитарному развитию учащихся на основе приобщения к самой широкой информации культурного, этнического, гуманистического плана.

Отметим дидактические аспекты применения современных технологий обучения.

Прежде всего заметим, что образовательный веб-сайт – это «совокупность веб-страниц с повторяющимся дизайном, несущих в себе целенаправленный процесс обучения и воспитания в интересах лич-

ности, общества, государства, объединенных по смыслу, навигационно и физически находящихся на одном сервере, использование которых может сопровождаться аттестацией обучающихся» [70, с. 238].

Для решения учебных (дидактических и методических) задач предназначен учебный веб-сайт, который имеет следующий состав [70]:

– содержательная компонента (изложение учебного материала);

– деятельностная компонента (задания, упражнения);

– интерактивная компонента (online-текст);

– методическая компонента;

– организационная компонента (контактная информация, расписание).

Веб-технологию учитель должен использовать в двух аспектах: для создания авторских (открытых, переносимых, модифицируемых, адаптивных) цифровых учебных материалов и для поддержки учащихся, создающих свои веб-сайты.

Наиболее распространенные руководящие принципы разработки сайтов приведены в таблице 1 [95].

Таблица 1

Руководящий принцип	*Объяснение*
Будьте последовательны	Логичность представляет собой ключ к простому и удобному в использовании интерфейсу. Внутри вашего сайта не меняйте расположение кнопок или схемы поведения объектов
Не обманывайте ожиданий пользователя	Значение логичности структуры сайта может превышать важность его содержимого. Пользователи будут иметь определенные ожидания относительно того, как поведут себя объекты на сайте. Эти ожидания формируются у них под влиянием визитов на другие сайты. Убедитесь в том, что ваш сайт соответствует тому, что они ожидают увидеть или следуйте традициям графического интерфейса пользователя или того типа Web-дизайна, к которому привык пользователь
Поддерживайте различные действия, предпринимаемые людьми при работе с Web-страницами	Пользователи работают с Web-страницами несколькими основными способами. Они загружают страницу, выгружают страницу, распечатывают страницу, сохраняют страницу, читают страницу или взаимодействуют с ней. Убедитесь в том, что пользователи могут проделать все из того, к чему они привыкли

Продолжение таблицы 1

Руководящий принцип	*Объяснение*
Используйте неожиданности редко и не злоупотребляйте ими	Иногда быть нелогичным весьма полезно. Если вам хочется «встряхнуть» пользователя, то для этого очень подойдет неожиданное явно заметное изменение того, как выглядит или работает страница, но не пользуйтесь этим слишком часто, в противном случае пользователи могут почувствовать дискомфорт от посещения сайта
Упрощайте весь сайт и отдельные страницы насколько это возможно	Простота помогает пользователям легко понять сайт. Посмотрите по журналам статистики, какие страницы могут быть удалены с сайта за ненадобностью. На уровне отдельной страницы убирайте нагромождения объектов и старайтесь уменьшить «визуальный шум»
Опирайтесь на узнавание, а не на запоминание	Не рассчитывайте, что пользователь запомнит структуру вашего сайта или расположение кнопок. Сводите к минимуму то, что пользователь должен запоминать, демонстрируя возможные варианты выбора. Даже такая простая вещь, как исчезновение меню, когда в них отпадает надобность, повышает когнитивную нагрузку на пользователя
Не рассчитывайте, что пользователи будут читать инструкции	Вообще говоря, пользователи интересуются справочными системами только тогда, когда у них возникают определенные сложности. Избегайте присутствия на сайте функций, правильное использование которых требовало бы обучения или изучения дополнительной документации
Старайтесь предотвращать и корректировать ошибки	Не предлагайте пользователю варианты выбора, приводящие к результатам, которые он не сможет легко отменить. Если возникает ошибка, дайте пользователю знать об этом и предложите возможное решение
Обеспечивайте обратную связь	Давайте пользователю понять, что именно происходит. Если ожидается задержка, поставьте пользователя в известность, сколько она продлится. Если произошел сбой, предоставьте четкое сообщение об ошибке
Поддерживайте разные стили взаимодействия	Старайтесь обеспечивать различные способы выполнения одного и того же действия. Например, некоторые пользователи, когда им нужно что-либо найти, отдают предпочтение карте сайта перед поисковым механизмом

Окончание таблицы 1

Руководящий принцип	*Объяснение*
Сводите к минимуму путь, проходимый мышью, или количество необходимых нажатий на клавиши	Это означает, что кнопки должны находиться недалеко друг от друга. Постарайтесь максимально уменьшить расстояние от основной системы навигации до кнопки Back браузера. Это может диктовать расположение системы навигации в верхней части экрана
Учитывайте особенности конечного носителя информации	Обязательно принимайте во внимание, в каком виде пользователь получает информацию – на бумаге или на экране
Принимайте во внимание окружающую обстановку, в которой работает пользователь	Место и окружающая обстановка, в которой пользователь получает доступ к странице, будут влиять на то, как он воспримет саму страницу. Например, попытки опираться на звуковые сигналы в шумной обстановке нельзя назвать хорошим подходом
Фокусируйтесь на скорости	Убедитесь, что ваши страницы достаточно быстро загружаются. Обычно это достигается реализацией принципа «минимального дизайна»: страница не должна быть медленнее, чем это необходимо для того, чтобы донести ее основную идею

Образовательные сайты по назначению бывают самые различные. Укажем их классификацию (таблица 2).

Таблица 2

Классификация образовательных сайтов по назначению

Тип сайта	*Назначение*	*Примеры сайтов*
Обучающий	Организация дистанционного и очного обучения	Электронные курсы лекций, лабораторные практикумы, электронные задачники, электронные учебники, сайты для тестирования
Исследовательский	Организация исследовательской деятельности учащихся	Исследовательские работы учащихся, научные лаборатории, творческие мастерские, научно-исследовательские и учебные центры

Продолжение таблицы 2

Тип сайта	*Назначение*	*Примеры сайтов*
Консультативный	Оказание консультативной помощи в образовательных целях	Для учителей и учеников, для научно-методических центров
Методический	Оказание виртуальной методической помощи	Сайт для методического объединения учителей по школьным предметам (http://Pedsovet.alledu.ru); сайт для тематических телеконференций и чатов в online-режиме по вопросам образования; сайт творческого взаимодействия учителей в сети (http://www.omsk.edu.ru); сайт для повышения квалификации педагогических кадров
Проектный	Организация информационных и соревновательных Интернет-проектов	Телекоммуникационных олимпиад и викторин; для проведения образовательных конкурсов; информационно-развлекательных проектов образовательной тематики; для формирования связей между школьниками и учителями, школьниками и родителями
Школьный	Организация коммуникации с внешним миром	Организация дистанционных родительских собраний, проведение конкурсов
Информационный	Распространение образовательной и культурологической информации	Виртуальные библиотеки (http://www.bestlibrary.ru); сайты библиотек (http://www.gpntb.ru); виртуальные опалы и газеты образовательной тематики (http://www.ug.ru); виртуальные музеи; виртуальные клубы

Окончание таблицы 2

Тип сайта	*Назначение*	*Примеры сайтов*
Справочные	Предоставление справочной информации образовательной тематики	Электронные энциклопедии; сайты-словари; электронные справочники; сайты-каталоги; базы данных; содержащие информацию о проводимых конференциях, конкурсах научного и образовательного направления, о предоставляемых грантах

По материалам образовательного web-сайта А. В. Могилева и Т. С. Старовой http://center.fio.ru/vio/VIO_02/cd_site/Articles/Art_4_4.htm

Отмечено, что «образовательный веб-квест – это сайт в Интернете, разработанный с целью обеспечения максимальной интеграции Интернета в различные учебные предметы на разных уровнях обучения. Охватывает отдельную проблему, учебный предмет, тему, может быть и межпредметным.

Различают два типа веб-квестов: для кратковременной (цель – углубление знаний и их интеграция, рассчитаны на 1–3 занятия) и длительной работы (цель – углубление и преобразование знаний учащихся, рассчитаны на длительный срок).

Особенностью образовательных веб-квестов является то, что часть или вся информация для самостоятельной или групповой работы учащихся находится на различных веб-сайтах. Кроме того, результатом работы с веб-квестом является публикация работ учащихся в виде веб-страниц и веб-сайтов (локально или в Интернет)» [70, с. 244].

К основным требованиям к образовательному веб-квесту относят следующие:

– наличие ясного вступления, где четко описаны главные роли участников или сценария;

– предварительный план работы;

– обзор всего квеста.

Отметим, что особую роль информационно-комуникационные технологии играют в обучении математике.

В докладе В. А. Садовничего отмечалось: «...так уж сложилось историческое развитие математического образования в мире, что оно

давно разделено на три как бы самостоятельных острова – профессиональное математическое образование, общее математическое образование и математическое просвещение. Всякие реформы, затеваемые в математической образовании, – это в основном попытки навести какие-то мосты между названными островами. Но если раньше такие реформы предпринимались, как правило, в рамках отдельных стран и строились национальными математическими архитекторами, то теперь дело в корне меняется. Появился наднациональный реформатор математического образования. У него, как у Януса, – два лика. Один лик – это компьютеризация образования, второй – глобализация мира. Мосты, которые могут быть наведены между островами в математическом образовании в процессе компьютеризации и глобализации, несомненно, не обойдут стороной и Россию. Этого не понимать и с этим не считаться нельзя. Как, каким образом нам поступать и действовать, чтобы не остаться в стороне от происходящего с математическим образованием в мире и по максимуму использовать внешние и внутренние обстоятельства для дальнейшего улучшения нашей отечественной системы математического образования?» [96, с. 13].

В многочисленных отечественных и зарубежных публикациях отмечается, что компьютер может быть использован при изучении естественно-математических и гуманитарных дисциплин для решения самых различных задач: выполнения сложных вычислительных операций, анализа результатов учебных экспериментов, построения и интерпретации математических моделей физических, химических и других явлений и процессов. Он может выполнять функции информационной системы, банка данных, автоматизированного справочника. Эксперименты показывают методическую эффективность использования графических возможностей персонального компьютера при обучении геометрии, черчению, для развития пространственного воображения, формирования конструкторских способностей и т. п. Указываются и многие другие возможности применения компьютеров в учебном процессе.

Отмечается, в частности, что компьютеры могут быть с успехом использованы на всех стадиях учебного занятия: они оказывают значительное влияние на контрольно-оценочные функции урока, придают ему игровой характер, способствуют активизации учебно-познавательной деятельности учащихся. Компьютеры позволяют добиться качественно более высокого уровня наглядности предлагаемого материала, значительно расширяют возможности включения разнообразных упражнений в процесс обучения, а непрерывная обратная связь, подкрепленная тщательно продуманными стимулами учения, оживляет учеб-

ный процесс, способствует повышению его динамизма, что, в конечном счете, ведет к достижению едва ли не главной цели собственно процессуальной стороны обучения – формированию положительного отношения учащихся к изучаемому материалу, интереса к нему, удовлетворения результатами каждого локального этапа в обучении.

Результативность компьютерного обучения по различным учебным дисциплинам существенно зависит от уровня компьютерной грамотности обучаемых. Поэтому сам факт введения массового компьютерного всеобуча создает благоприятные предпосылки и для повышения эффективности компьютерного обучения.

Основное требование к составляемым обучающим программам – их ориентация на развитие активности, инициативы, творчества учащихся.

Общая оценка сильных сторон компьютера и дидактических возможностей компьютерных технологий такова:

– новизна работы с компьютером вызывает у обучающихся повышенный интерес к работе с ним и усиливает мотивацию учения;

– компьютер позволяет строить индивидуализированное обучение на основе модели обучающихся, учитывающей историю его обучения и индивидуальные особенности памяти, восприятия и мышления;

– компьютер активно включает обучающегося в учебный процесс, позволяет сосредоточить внимание на наиболее важных аспектах изучаемого материала, не торопит с решением;

– расширяет наборы применяемых учебных задач;

– благодаря компьютеру обучающиеся могут пользоваться большим объемом ранее недоступной информации.

В последнее время появилось новое научное направление – компьютерная математика. Ее можно определить как совокупность теоретических, методических, аппаратных и программных средств, в совокупности обеспечивающих эффективное автоматическое и диалоговое выполнение с помощью компьютеров всех видов математических вычислений с высокой степенью визуализации.

В работах М. А. Никифоровой [80; 81; 82; 83] отмечается, что увеличение умственной нагрузки на уроках математики заставляет задуматься над тем, как поддержать у учащихся интерес к изучаемому предмету, их активность на протяжении всего урока. Огромную помощь в решении этого вопроса может оказать компьютер. Использование компьютера при обучении позволяет создать информационную обстановку, стимулирующую интерес и пытливость ребенка.

В школе компьютер становится электронным посредником между учителем и учеником. Он позволяет организовать процесс обуче-

ния по индивидуальной программе. Ученик, обучающийся за пультом компьютера, может сам выбирать наиболее удобную для него скорость подачи и усвоения материала. В этом главное преимущество компьютера в процессе обучения: он позволяет работать с каждым учеником в отдельности.

Индивидуализация обучения улучшает качество подготовки. Это достигается за счет живой обратной связи, которая устанавливается в процессе диалога школьника с персональным компьютером (ПК). В зависимости от характера ответов на контрольные вопросы компьютер может предложить наводящие вопросы, подсказать или замедлить темп обучения. Если же ученик устанет, может предложить ему в качестве обучения развлекательно-обучающую программу.

Опыт использования ПК показывает, что машина позволяет освободить учителя от ряда утомительных функций, например: отработки элементарных умений и навыков, проверки знаний.

Целесообразно применять компьютер в случаях:

– диагностического тестирования качества усвоения материала;

– тренировочном режиме для отработки элементарных умений и навыков после изучения темы;

– в обучающем режиме;

– при работе с отстающими учениками, у которых применение компьютера обычно значительно повышает интерес к процессу обучения;

– в режиме самообучения;

– в режиме графической иллюстрации изучаемого материала.

Условно программное обеспечение можно классифицировать следующим образом:

– обучающие программы;

– контролирующие программы;

– инструментальные программы.

Одной из причин того, что учителя мало используют компьютер на своих уроках, является практически отсутствующая реклама различных программных продуктов. Но самое важное – недостаток программного обеспечения.

Стремясь внести посильный вклад в развитие математического образования в средней школе, оказать практическую помощь ученикам и учителям, факультет педагогического образования МГУ им. М. В. Ломоносова открыл в Интернете специальный бесплатный консультационный сайт по математике для школьников и преподавателей математики. Вот адрес этого сайта: www.school.msu.ru (более подробную информацию об этом можно найти в работе Н. Х. Розова [94]).

В других высших учебных заведениях, в том числе и в Омском государственном педагогическом университете (ОмГПУ), создаются подобные сайты. В ОмГПУ создан сайт «Школьник», на который автор работы выставил два элективных курса: «Планиметрические задачи на построение» и «Все о логарифмических уравнениях, неравенствах и их системах», а также электронную версию своих книг: «Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы», «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства», «Текстовые задачи».

Интерес представляет интернет-ресурс, расположенный во всемирной паутине по адресу http://www.problem.ru. Это результат работы масштабного проекта Московского центра непрерывного математического образования. Об этом читатель найдет подробную информацию в публикации П. Сергеева [102].

На этом сайте размещено (точнее, доступно пользователю в настоящий момент) более десяти тысяч задач «школьного уровня» из самых разных областей математики. Почти все задачи приводятся с решениями (или с ответами). Задачи классифицированы по темам, уровням сложности и классам, школьникам которых может быть рекомендована конкретная задача. Кроме этого на сайте расположены методические материалы (статьи, справочный и теоретический материал и т. д.).

Указанный проект предназначен для учеников, учителей и всех, кому просто интересно решать задачи по математике. Учитывая читательскую аудиторию газеты «Математика», рассказано о том, как может problem.ru помочь учителю в его работе.

«Многочисленные публикации по включению информационных технологий в обучение математике, – отмечают А. Зубрилин и О. Лобурева, – идеализируют состояние дел, а компьютер по-прежнему на уроках применим в качестве средства наглядности, позволяющего качественно отображать как статические, так и динамические модели. Существенно изменить ситуацию стало возможным с введением на старшей ступени общеобразовательной школы элективных курсов, когда на занятия приходит ограниченный контингент достаточно подготовленных к математической деятельности старшеклассников, желающих повысить уровень своей математической подготовки. Как следствие, деятельность обучаемых более осознанна и они готовы к открытию неких количественных и качественных закономерностей в структуре математического знания. Учителю необходимо только направить обучаемых в нужное русло и незаметно контролировать процесс усвоения материала» [58, с. 16].

Все более широко в деятельности математика, учителя математики используются программные математические пакеты, среди которых наиболее распространенными являются Derive, MathCad, Maple, MatLab, Matematica, обладающие многофункциональным программно-математическим обеспечением.

В работе М. И. Рагулиной [91] содержательно и в то же время лаконично изложены функциональные возможности широко используемых компьютерных математических пакетов и рассмотрены приемы их использования для символьного и численного решения задач линейной алгебры, математического анализа, комбинаторики и теории вероятностей, при этом с учетом вариативности целей, средств и форм представления данных, заложенных в программных пакетах, в работе приведены различные способы решения и разные формы получения результатов при решении математических задач.

Математическая система Derive разработана фирмой Soft Warehouse и представляет собой универсальную систему, ориентированную на решение самых различных математических и научно-технических задач. Derive – самый компактный по объему дисковой памяти программный математический пакет.

Корпорацией SoftLine разработана математическая система MathCad, предназначенная для выполнения численных и символьных расчетов.

Фирмой Waterloo Maple Software разработана мощная математическая система Maple для всевозможных аналитических вычислений и преобразований, для решения в символьном виде и численно системы уравнений и неравенств, для нахождения корней многочленов и т. д.

Систему MathLab для автоматизации математических расчетов разработала фирма MathWorks. Эта система работает как интерпретатор и включает в себя большой набор команд для выполнения численных алгоритмов, задания структур данных и графического представления информации.

Система Mathematica, разработанная компанией Wolfram Research, позволяет упрощать алгебраические выражения, решать алгебраические и трансцендентные уравнения, находить пределы последовательностей, дифференцировать функции, находить неопределенные и вычислять определенные интегралы, находить бесконечные суммы и произведения, представлять функции в виде рядов.

§ 3. Информационные технологии в обучении геометрии

В этом параграфе мы анализируем вопрос об использовании информационных технологий в преподавании геометрии, причем основное внимание уделяем формам и методам использования компьютерной графики и диалоговых возможностей современных компьютеров. Сегодня актуальна проблемы разработки компьютерно-ориентированной методики обучения геометрии, разумно сочетающая в себе компьютерные технологии с другими дидактическими средствами.

Актуальность указанной проблемы определяется такими факторами:

– новыми требованиями к математической и, в частности, геометрической подготовке школьников на современном этапе развития общества;

– новыми подходами к построению школьного геометрического образования;

– возрастанием роли компьютерных технологий в геометрических исследованиях и их влиянием на геометрическое образование на различных уровнях обучения;

– необходимостью создания новых технологий обучения геометрии с учетом новых требований к геометрическому образованию.

В литературе (И. В. Роберт [93]) выделены наиболее значимые с позиции педагогических принципов методические цели, реализация которых оправдывает использование компьютера в качестве средства обучения:

– индивидуализация и дифференциация процесса обучения (за счет возможности поэтапного продвижения к цели по линиям различной степени сложности);

– осуществление контроля с обратной связью с диагностикой и оценкой результатов учебной деятельности;

– осуществление самоконтроля и самокоррекции;

– обеспечение возможности тренажа и осуществление с его помощью самоподготовки учащихся;

– высвобождение учебного времени без ущерба качеству усвоения за счет выполнения на компьютере трудоемких работ и деятельности, связанных с числовым анализом;

– визуализация изучаемых процессов, наглядная демонстрация динамики изучаемых процессов, наглядное представление скрытых в реальном мире процессов, наблюдение их в развитии во временном и пространственном движении, графическая интерпретация исследуемых закономерностей;

– моделирование и имитация изучаемых или исследуемых процессов и явлений с переходом «реальность – модель» и наоборот;

– проведение лабораторных работ в условиях имитации в компьютерной программе реального опыта с комплексом оборудования;

– создание и использование баз данных, необходимых в учебной деятельности и обеспечение доступа к сети информации;

– усиление мотивации обучения;

– вооружение обучаемого стратегией усвоения учебного материала на базе обеспечения режима активного взаимодействия с компьютером;

– формирование умения принимать оптимальные решения или вариативные решения в сложной ситуации;

– формирование алгоритмической культуры учебной деятельности информационной культуры.

Сегодня во всем мире идет интенсивный поиск новых форм обучения геометрии на основе компьютерных технологий, разработка программных средств учебного назначения, которые могут быть использованы при изучении отдельных разделов школьного и вузовского курсов геометрии (И. Н. Антипов, Е. И. Баранова, Я. А. Вагременко, Б. С. Гершунский, А. В. Дмитриева, А. А. Кузнецов, М. П. Лапчик, М. Н. Марюков, В. М. Монахов, О. П. Одинцова, М. И. Рагулина, И. В. Роберт, С. А. Титоренко, Л. Л. Якобсон и др.). Как показывают наши исследования, а также результаты работ Е. И. Барановой, М. Н. Марюкова, С. А. Титоренко, эти программные средства позволяют конструировать и исследовать геометрические объекты в режиме диалога; значительный арсенал чувственных образов, генерируемых компьютером, оказывает существенное влияние на развитие геометрического мышления, при этом достигаются следующие возможности:

– исследование задач аналитической геометрии и геометрических преобразований в режиме диалога;

– построение на компьютере кривых второго порядка;

– исследование основных понятий проективной и гиперболической геометрии;

– декартовы и полярные координаты;

– исследование на компьютере уравнений геометрических объектов, включая линии окружности, эллипса и координаты точек;

– компьютерная мультипликация;

– геометрические места точек;

– исследование постулатов евклидовой геометрии и следствий из них;

– изучение геометрических фигур, имея в виду выявление их свойств и признаков, непосредственно не связанных с измерением, вычислением периметров, площадей и объемов: форма положение в пространстве или на плоскости, взаимное расположение фигур или их частей, некоторые другие топологические свойства;

– изучение геометрических фигур, имея в виду их метрические характеристики и свойства: измерение длин отрезков, градусных мер углов, нахождение длины линии, периметров и площадей многоугольников и др.

Решая проблему использования компьютера в процессе обучения геометрии, следует исходить не только из функциональных возможностей компьютера и желания его использовать в учебном процессе, но прежде всего из методической системы обучения геометрии, сравнительный анализ которой покажет какие учебные задачи могут быть решены только средствами компьютера, ибо другие дидактические средства менее эффективны или вообще не применимы.

Одно из основных назначений компьютера в обучении геометрии – исследование геометрических моделей. Основными дидактическими функциями компьютера в этом виде деятельности являются:

– получение на экране компьютера изображения геометрической фигуры и исследование этого изображения в зависимости от изменения внутренних и внешних характеристик модели;

– выделение на компьютерной модели геометрической фигуры ее частей и исследование поведения выделенных частей при изменении внешних и внутренних характеристик модели;

– исследование плоских элементов геометрической фигуры методом перехода к их оригиналам;

– выполнение построений на компьютерной модели, преобразование данной модели в искомую согласно условиям задачи;

– имитация перемещения фигуры в пространстве и переход к оригиналу ее плоских элементов;

– контролирование динамики процесса конструирования модели при изменении режима параметров;

– управление позицией наблюдателя при зрительном исследовании модели;

– отбор наиболее приемлемых с психолого-педагогической точки зрения соотношений размеров модели из большого числа экспериментальных данных;

– выборочное стирание изображения, достраивание модели, дублирование изображения;

– нахождение видимых и невидимых элементов многогранников;

– исследование взаимного расположения вершин, ребер и граней многогранников;

– исследование взаимного расположения многогранников и нахождение их общих частей;

– построение на данном изображении фигур с заданными свойствами;

– сравнение геометрических фигур не только по метрическим, но и по некоторым другим, в том числе и топологическим, свойствам, выявление существенных признаков понятий;

– ввод результатов деятельности учащегося в оперативную память компьютера, компьютерный анализ и контроль результатов этой деятельности;

– получение компьютерной помощи.

На самых различных этапах обучения геометрии может быть использован компьютер и это применение основано прежде всего на его графических и вычислительных возможностях.

Рассмотрим подробнее некоторые применения компьютера в процессе обучения геометрии.

В геометрии компьютер должен играть роль эффективного средства для наглядной иллюстрации понятий, демонстрирования чертежей и рисунков. И эта возможность компьютера, представлять динамику графических изображений, как никакая другая возможность, изменит характер преподавания геометрии: геометрические фигуры могут описываться с помощью процедур, а не только уравнений.

Заметим, что в школьном курсе геометрии можно выделить три вида чертежей:

а) чертежи, иллюстрирующие содержание вводимого понятия;

б) чертежи, которые образно представляют условие решаемой задачи или рассматриваемого математического предложения;

в) чертежи, иллюстрирующие преобразование геометрических фигур.

По отношению к тексту учебника *иллюстрации* можно разделить на три группы: ведущие, равнозначные и обслуживающие.

Ведущие иллюстрации самостоятельно раскрывают содержание учебного материала, заменяя основной текст.

Равнозначные иллюстрации служат целям более глубокого и эффектного усвоения содержания учебного материала.

Цель этих иллюстрации – дать определениям геометрических понятий, сформулированных в учебнике в свободной логической форме, адекватную алгоритмическую процедуру получения этих понятий.

Следует заметить, что в учебниках геометрии, как правило, даются стандартные чертежи, и это приводит к связыванию школьниками формируемого геометрического понятия с фигурами определенного вида и расположения. Это происходит вследствие того, что использование стандартного чертежа вызывает у учащегося неверные ассоциации, в результате которых он в содержание понятия вносит и частные признаки демонстрируемой фигуры.

Равнозначные иллюстрации должны устранить разобщенность между словесным объяснением понятия и геометрической наглядностью, с этой целью учащимся следует предлагать рисунки, на которых бы варьировались несущественные признаки понятия.

Обслуживающие иллюстрации призваны дополнять, конкретизировать содержание текста учебника.

В работе с геометрическими понятиями эти иллюстрации должны предлагать рисунки, на которых представлены различные комбинации существенных признаков понятий. Роль обслуживающих иллюстраций – сформировать у учащихся навык подведения под понятие.

Компьютер может сыграть роль эффективного средства активного диалога в работе учащихся с моделями геометрических фигур, их развертками, роль средства для формирования у учащихся конструктивных умений.

Укажем виды стереометрических задач, которые способствуют формированию у учащихся умений работать с развертками пространственных фигур:

а) задачи на узнавание геометрического тела по развертке его поверхности (определить вид и свойства геометрического тела по развертке его поверхности; изобразить геометрическое тело по развертке его поверхности; отыскать среди данных фигур развертку поверхности определенного геометрического тела);

б) задачи на построение развертки поверхности геометрического тела (построить развертку поверхности данного геометрического тела; достроить данную фигуру так, чтобы она стала разверткой поверхности данного геометрического тела; построить на развертке поверхности многогранника след секущей плоскости);

в) задачи на вычисление геометрической величины тела по развертке его поверхности (вычислить определенные геометрические величины по части развертки его поверхности, по развертке всей поверхности; экстремальные задачи, связанные с разверткой поверхности геометрического тела);

г) задача, где развертка поверхности выступает как средство ее решения (найти кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности; доказать некоторые свойства фигур).

Решение всех этих задач может быть организовано с помощью компьютера.

При обучении геометрии компьютер может сыграть большую роль в развитии у учащихся конструктивных умений, которые являются одним из видов политехнических умений.

По форме различают умственное, графическое и предметно-манипулятивное конструирование. Компьютер является эффективным средством формирования у школьников умений и навыков графического конструирования.

Отметим те требования, которое предъявляются в педагогической литературе к качеству графика на экране дисплея компьютера. Вообще качественная характеристика педагогических программных средств складывается из трех категорий критериев [71]: технический уровень, дидактический уровень, степень интерактивности (степень поддержки процесса обучения).

С позиций технического уровня, чтобы оценить качество графики на экране дисплея, надо ответить на такие вопросы [71]:

1) Четко ли представляются тексты и графики?

2) Адекватно ли и соответствует ли содержанию изображение на экране?

3) Используются ли графические средства (цвет, рамки, подчеркивание) для пояснения содержания?

4) Хорошо ли располагается изображение на экране, то есть соблюдается ли разумное соотношение между неиспользуемым пространством и текстом (графиком)?

5) Выделяются ли наиболее важные элементы информации, например, центрированием или использованием цвета?

6) Имеются ли прописные и строчные буквы?

7) Учитываются ли шрифты – критерий читабельности?

8) Достаточно ли однозначны буквенные обозначения?

9) Выдержаны ли интервалы между строками и буквами?

10) Четки ли контуры графических изображений?

11) Привлекательны ли формы изображения?

12) В случае динамических изображений равномерно ли и плавно ли движение?

Большое значение имеет компьютер в обучении учащихся доказательству теорем.

В учебниках геометрии все теоремы предлагаются учащимся в готовом виде. Компьютер же позволяет поставить каждого школьника в условия «первооткрывателя» теоремы. Это можно сделать в форме «компьютерного эксперимента». Так, например, можно организовать работу учащихся по «открытию» теоремы из курса геометрии 8 класса о произведении отрезков пересекающихся хорд: «Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды».

Работа по этой программе будет состоять в следующем. Учащемуся на экране дисплея предлагается рисунок (рис. 1).

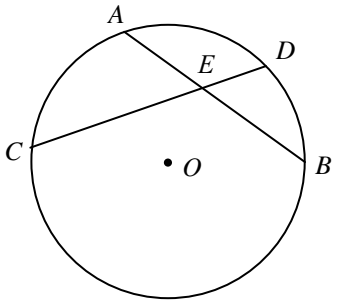


Рис. 1

Указываются длины отрезков AE, EB, DE, EC. Школьникам предлагается произвести над этими длинами поочередно четыре арифметических операции. Затем рисунок меняется (на экране в той же окружности чертятся другие хорды). Указываются длины новых полученных отрезков. Школьники проделывают над ними те же операции.

Эта ситуация повторяется до тех пор, пока ученик не подметит нужную закономерность, которую он должен ввести в компьютер в форме: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Если подмеченная закономерность соответствует «открываемой» теореме, то компьютер подтверждает это, в противном случае ученику предлагается еще несколько вариантов чертежей.

Рассмотрим еще один пример «компьютерного переоткрытия» теоремы, и сделаем мы это на примере теоремы Фаньяно: «Из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортоцентрический». (Ортоцентрическим называется треугольник, вершинами которого являются основания высот заданного треугольника.)

Для этого на экран дисплея выводится треугольник, в который поочередно вписываются различные треугольники, а учащимся предлагается ответить на вопрос: «Всегда ли для ортоцентрического треугольника выполняется свойство «минимизации», то есть всегда ли он имеет меньший периметр?». Программу для компьютера можно упростить так, чтобы периметр любого вписанного треугольника трансформировался в отрезок, длина которого была бы равна этому периметру. На основе полученного наборы отрезков школьники делают нужный вывод.

Компьютер позволяет организовать эффективную работу учащихся над формулировкой теоремы. Такая работа, например, может состоять в следующем. На экран дисплея выводится формулировка теоремы с пропусками, а школьникам предлагается дописать недостающие фрагменты формулировки. Компьютер в это время контролирует правильность ввода недостающего текста формулировки.

Одна из сложностей в работе над теоремой состоит в том, что учащимся трудно дается перевод ее словесной формулировки в символическую запись по обозначениям соответствующего чертежа. Значительно облегчит эту работу компьютер.

Покажем это на примере следующего сценария программы, помогающей ученику записать в символической форме первый признак равенства треугольников. Сценарий программы состоит в следующем. На экран дисплея выводится словесная формулировка теоремы, в которой в нужных местах расставлены скобки: «Если две стороны (,) и угол ( ) между ними одного треугольника ( ), соответственно равны двум сторонам (,) и углу ( ) между ними другого треугольника ( ), то такие треугольники равны (=)».

Вместе с формулировкой теоремы на экране дисплея появляется чертеж (рис. 2).

Ученик, читая формулировку теоремы, расставляет в скобках нужные обозначения, а программа в это время высвечивает на чертеже указанные элементы треугольников.

С помощью компьютера можно организовать работу по закреплению доказательства теоремы. Покажем это на примере такой теоремы из курса геометрии 8 класса: «В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°».

Программа выводит на экран дисплея текст доказательства теоремы с пропусками. Учащиеся же должны восстановить недостающие фрагменты доказательства, а программа контролирует правильность предлагаемых ответов.

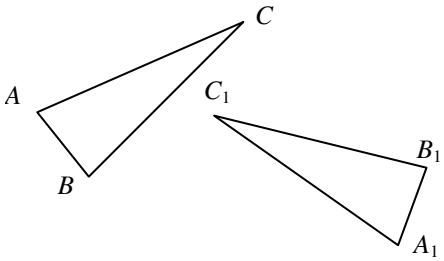


Рис. 2

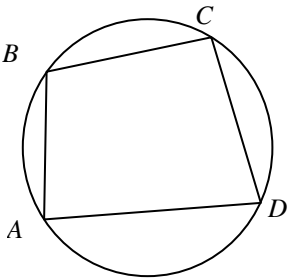


Рис. 3

Покажем, как организован текст доказательства теоремы с пропусками по рис. 3.

Дано: $ABCD$ – вписанный в окружность четырехугольник.

Доказать: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$.

Доказательство:

$\angle A$_____ и опирается на дугу _____, поэтому он измеряется _____ дуги _____. $\angle C$ _____ и опирается на дугу _____, поэтому он измеряется половиной _____. Следовательно, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}$ (_____). Но $\cup BCD + \cup ДАВ$ = =_____, значит, $\angle A + \angle C$ = _____. (Аналогично доказывается равенство $\angle B + \angle D = 180°$.)

Роль компьютера нельзя переоценить при демонстрации чертежей, иллюстрирующих преобразование геометрических фигур. Покажем это на примере темы «Площади многоугольников» из курса геометрии 8 класса.

А) Для вывода формулы площади треугольника на экране дисплея демонстрируется один из рисунков (рис. 4, 5, 6, 7).

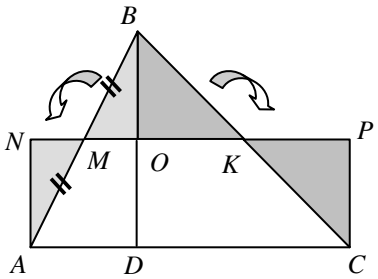


Рис. 4

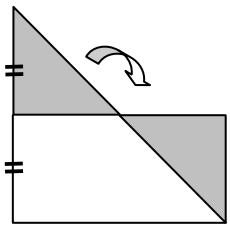


Рис. 5

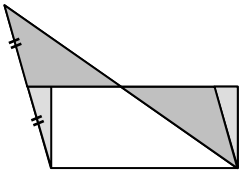


Рис. 6

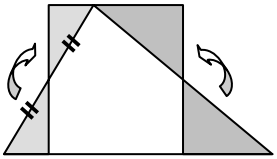


Рис. 7

Прокомментируем работу по рис. 4. Программа должна быть организована так, чтобы она перемещала треугольник *BOM* в положение треугольника *ANM*, а треугольник *BOK* в положение треугольника *CPK*. У получившегося прямоугольника *ANPC* основание *AC* то же, что и у ΔABC, а высота его равна половине высоты треугольника. Отсюда сразу видно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

Б) Для вывода формулы площади параллелограмма можно демонстрировать такие рисунки (рис. 8, 9, 10).

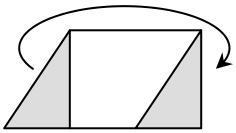


Рис. 8

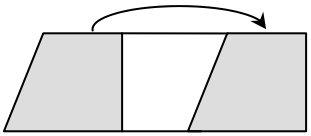


Рис. 9

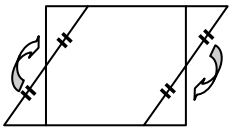
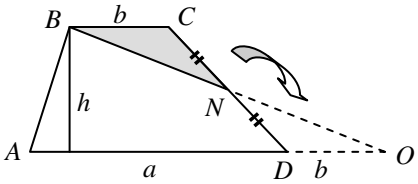


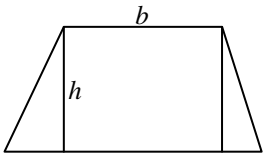
Рис. 10

В) Для вывода формулы площади трапеции на экране дисплея демонстрируется целая серия рисунков (рис. 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22).



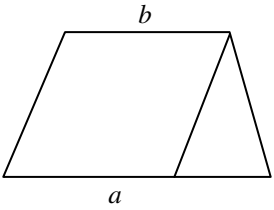
$$S_{mp} = S_{\Delta} = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 11



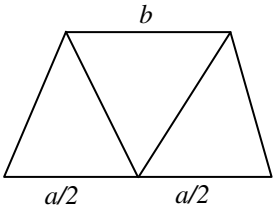
$$S_{mp} = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_1} + S_{[]} =$$
$$= \frac{1}{2}(a-b)h + bh = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 12



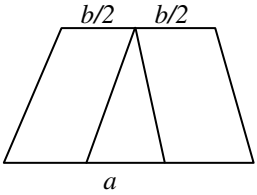
$$S_{тр} = S_{парал} + S_{\Delta} = bh + \frac{1}{2}(a-b)h = \\ = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 13



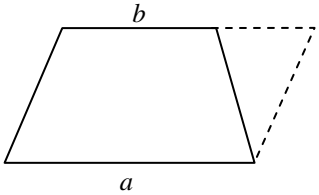
$$S_{тр} = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + S_{\Delta_3} = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}h + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}h = \\ = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 14



$$S_{тр} = S_{парал_1} + S_{\Delta} + S_{парал_2} = \\ = \frac{b}{2}h + \frac{1}{2}(a-b)h + \frac{b}{2}h = \\ = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 15



$$S_{тр} = S_{парал} - S_{\Delta} = \\ = ah - \frac{1}{2}(a-b)h = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 16

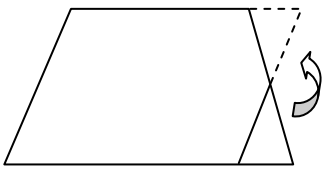


Рис. 17

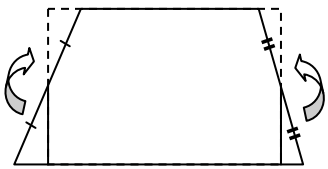
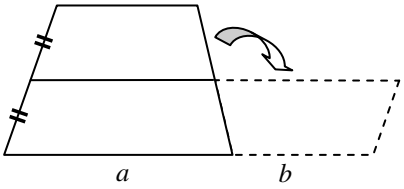
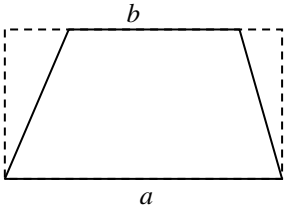


Рис. 18



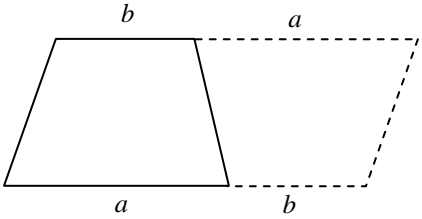
$$S_{тр} = S_{парал} = \\ = (a+b)\frac{h}{2} = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 19



$$S_{тр} = S_{прям} - (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2}) = \\ = ah - \frac{1}{2}(a-b)h = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 20



$$S_{тр} = \frac{1}{2}S_{парал} = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 21

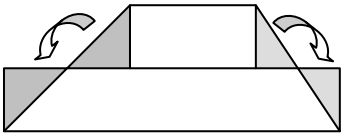


Рис. 22

Опишем сценарий по рис. 11. Компьютер посредством программы перемещает ΔBCN в положение ΔODN и тем самым получается ΔABO. Основание ΔABO есть сумма оснований трапеции $ABCD$, а высота его равна высоте трапеции. А раз $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot (AD + DO)$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot (AD + BC)$.

Посредством компьютера возможно эффективное решение задач на равновеликость и равносоставленность фигур.

А) В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка (рис. 23). Вершина B соединена с серединой стороны DC, вершина A – с середи-

ной стороны BC, вершина D – с серединой стороны AB, вершина C – с серединой стороны AD. Докажите, что четырехугольник, образуемый этими четырьмя отрезками, – параллелограмм, и что его площадь в пять раз меньше площади данного параллелограмма.

Доказательство

Докажем, что четырехугольник $PQTR$ – параллелограмм. $CD = AB$ по условию, тогда, $NB = \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}CD = LD$; $NB = LD$. А так как по условию $LD \parallel BN$, то $BLDN$ – параллелограмм, откуда следует, что $BL \parallel DN$. Аналогично можно доказать, что $AK \parallel CM$.

Покажем теперь, каким образом из девяти частей, на которые прямые разбили параллелограмм $ABCD$, можно сложить пять параллелограммов, равные параллелограмму $PQTR$ (рис. 24). Этот рисунок демонстрируется на экране дисплея, причем он должен быть динамичным.

Осталось доказать, что полученные пять параллелограммов равны (они на рис. 24 закрашены).

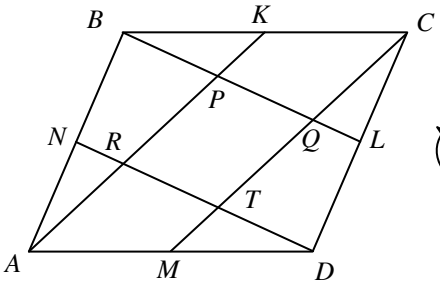


Рис. 23

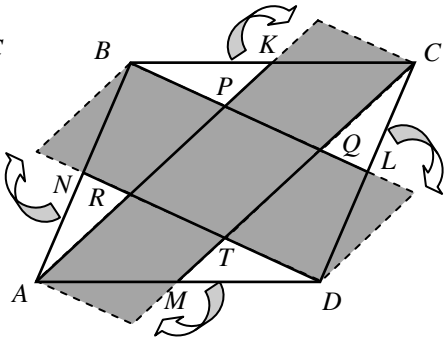


Рис. 24

Б) Доказать, что площадь правильного восьмиугольника (рис. 25) равна произведению большей и меньшей из его диагоналей.

Доказательство

Проведем ось симметрии заданного правильного восьмиугольника AA_1 и CC_1. Проведем также $EK \perp AA_1$ и $KD \perp CC_1$. Тогда EK равна наименьшей диагонали восьмиугольника, а KD – наибольшей. Путем перекладывания треугольников, указанным на рис. 25 спосо-

бом, получаем, что $S_{ABCFA_1PC_1N} = S_{EKDT} = EK \cdot DT$, что и требовалось доказать.

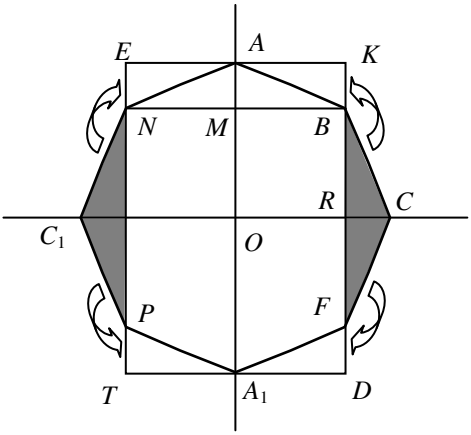


Рис. 25

Доказательство проводится на компьютере посредством соответствующих поворотов четырех треугольников (они на рис. 25 закрашены).

Замечание: Указанное в доказательстве перекладывание треугольников возможно, если соответствующие треугольники равны (в силу симметрии достаточно показать это для одной пары треугольников).

В) Известны две замечательные теоремы, которые в свое время дали ответ на третью проблему Д. Гильберта.

Теорема Бойяи-Гервина: Равновеликие многоугольники равносоставлены.

Теорема Хадвигера-Глюра: Каждые два равновеликих многоугольника можно разбить на части так, чтобы отвечающие друг другу части (треугольники или многоугольники) в разбиении обеих фигур были бы равны и их соответствующие стороны были параллельны.

Проиллюстрируем эти теоремы на ряде примеров.

Теорема Пифагора: Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

«Доказать» (вернее, сделать гипотетическое предположение) эту теорему можно следующим образом. Предлагается рисунок (рис. 26), на котором производится разбиение на части квадратов, построенных на катетах a и b, и их закрашивание различными цветами. Затем эти пронумерованные, закрашенные части, «выкладывают» квадрат, построенный на гипотенузе.

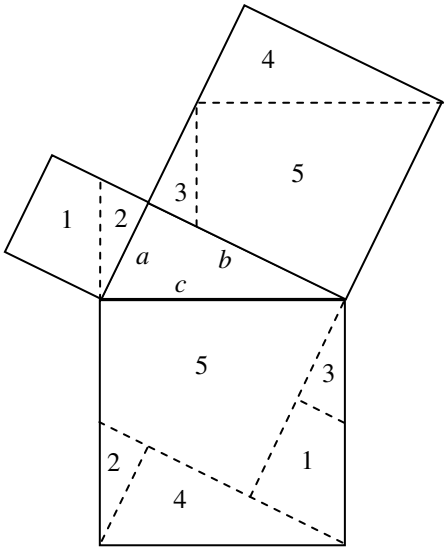


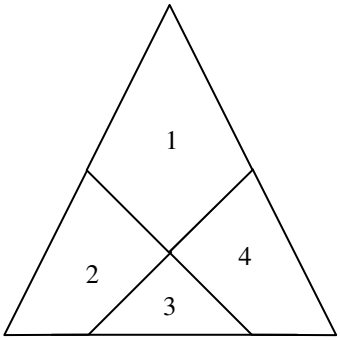
Рис. 26

Учащиеся тем самым производят «переоткрытие» известной теоремы: $a^2 + b^2 = c^2$.

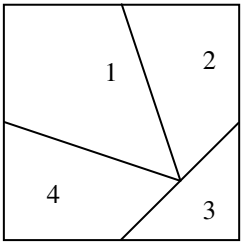
Интересным исследовательским заданием для учащихся будет следующее: «Разработать программу для следующего сценария: На экране дисплея рисуется произвольный многоугольник, компьютер подсчитывает площадь этого многоугольника и строит на экране квадрат, равновеликий многоугольнику. Нарисованный многоугольник компьютер разбивает на такие части (они закрашиваются различным цветом), из которых затем (в динамике) выкладывается квадрат».

В качестве иллюстрации мы приведем такой пример. На рис. 27 изображены равновеликие равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке показан один из способов разбиения треугольника на четыре части, из которых выкладывается квадрат.

Если полученные при разбиении четыре фигуры скрепить так, как показано на рис. 28, то они образуют цепочку, которая при «компьютерном складывании» по часовой стрелке даст треугольник, а против часовой стрелки – квадрат.



а)



б)

Рис. 27

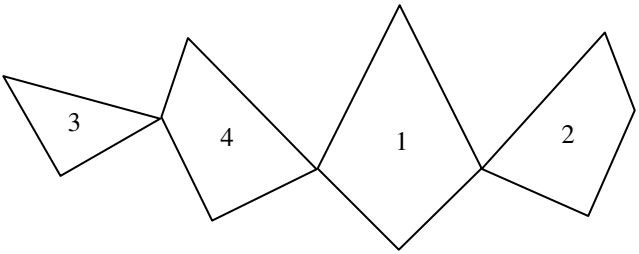


Рис. 28

Компьютер окажет значительную помощь и при изучении таких вопросов, как действия сложения, вычитания векторов, умножение вектора на число. В учебниках эти операции иллюстрируются статическими чертежами, что затрудняет видение и усвоение учащимися алгоритма выполнения этих операций. Компьютер позволяет показать процедурный компонент этих операций, а не только их результат.

Огромную роль играет компьютер в формировании графической грамотности. Различают несколько уровней графической грамотности [110].

Уровень элементарной графической грамотности:

– обучаемый знает элементарные закономерности теории изображений в параллельной проекции (параллелограмм, куб, параллелепипед, призма, тетраэдр, окружность в виде эллипса, цилиндр, конус);

– имеет навыки рисования основных примитивов в редакторах Paint, Word;

– умеет преобразовывать основные фигуры.

Уровень функциональной графической грамотности:

– обучаемый знает основные положения теории изображений фигур в параллельной проекции (сохраняется параллельность прямых, сохраняется простое отношение отрезков на одной или параллельных прямых, изображение сопряженных диаметров эллипса);

– умеет проводить анализ метрических отношений на оригинале и учитывает их при изображении фигуры;

– умеет из основных примитивов комбинировать новую фигуру, учитывая сопряжение фигур по общим элементам;

– умеет закрасить часть данной фигуры, объединение или пересечение двух многоугольников;

– умеет обозначать в фигуре данные элементы (вершины, стороны, углы).

Уровень исследовательской графической грамотности:

– знает простейший математический аппарат машинной графики: параметрические уравнения отрезка, окружности, эллипса; аналитическое задание внутренности многоугольника, аналитическое задание движений, гомотетии, сжатия к оси;

– умеет организовывать компьютерный эксперимент под руководством преподавателя, в котором цикл научного познания выражается схемой: выявление и накопление фактов → постановка проблемы → выдвижение гипотезы → установление сущности явления → обоснование утверждения → вывод следствий.

Графическая форма представления информации обладает огромными возможностями для хранения, передачи и фиксирования знаний, способствует формированию активной познавательной деятельности. Графика позволяет лучше представить учащемуся чувственно не воспринимаемые объекты, дает образную основу абстрактным понятиям. Графическая деятельность не должна сводиться к демонстрации иллюстраций, то есть повторять иллюстративно-монологический метод традиционного обучения. Она должна помочь познавательной деятельности учащегося для создания внутренней мотивации учебной деятельности.

Математическое вышивание кривых может быть творческой работой учащихся. Это исследование посильно для учащихся и развивает интерес к математике и информатике.

Приведем примеры фигур, которые получены с помощью персонального компьютера (рис. 29, 30, 31).

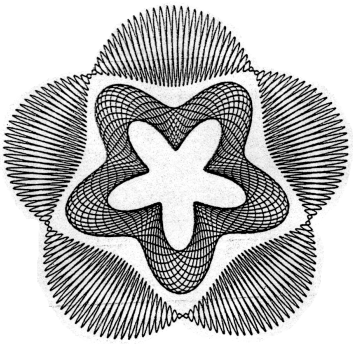


Рис. 29

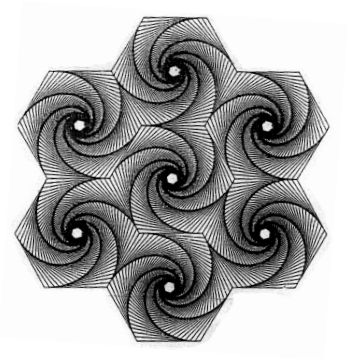


Рис. 30

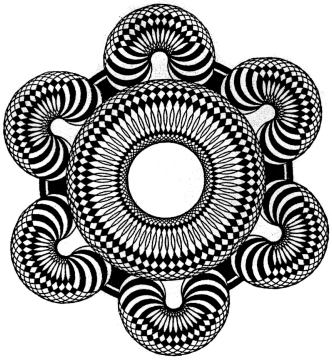


Рис. 31

На рис. 29 помещены две кривые, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид:

а) $\rho = 35{,}5 + 10{,}5\sin(80\varphi)\sin(2{,}5\varphi)$;

б) $\rho = 18{,}5 + 11{,}5\sin\left(\frac{79{,}5\varphi}{16}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{32}\right)$.

В последнее время большое распространение получили компьютерные рисунки, так называемые фракталы (название «фрактал» произошло от латинского «дробный, изрезанный»).

Основоположник фракталов Б. Мандельброт изучал различные процессы, возникающие в ходе решения многих практических задач. В конце прошлого столетия понятие «фрактал» во всей своей красе

ворвалось в науку. Книга Б. Мандельброта «Фрактальная геометрия природы», вышедшая в 1983 г. открыла новые горизонты геометрии. В ней автор писал: «Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, горы – это не конусы, линии берега – это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой…» Природа демонстрирует нам не просто более высокую ступень понимания мира, а совсем другой уровень его сложности. И далее: «Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные, – задачи исследования морфологии аморфного».

Тем, кто занимается фракталами, открывается прекрасный и удивительный мир, в котором царят математика, природа и искусство.

Фракталы – прекрасные в своем разнообразии геометрические объекты, активное исследование которых началось сравнительно недавно. Но следует отметить, что фракталы, несмотря на их «молодость», могут быть использованы в процессе повторения и закрепления школьниками принципов работы с векторами на базе координатного метода и могут стать прекрасной площадкой для интеграции математики и информатики.

Подобные занятия удобно организовать на факультативе в 10 или 11 классе. К этому времени школьники должны уметь складывать векторы, заданные координатами и знать методы определения координат точек с использованием векторов, основы расчета по рекуррентным формулам. Из курса информатики необходимо знакомство либо с методами программирования на каком-либо языке, либо умение работать, например, с Mathcad, который позволят программировать и строить графики. При этом для использования языка программирования достаточно знания школьной программы по информатике, а знакомство со средствами Mathcad можно ограничить знакомством с содержанием нескольких разделов пособий.

Занятия целесообразно строить по схеме:

1) обзор свойств геометрических фракталов;

2) определение первого или двух первых шагов (поколений) в построении фрактальной кривой;

3) разработка рекуррентных формул для расчета координат вершин фрактала;

4) программирование и построение фрактальной кривой.

Обо всем этом можно найти материал в статье К. А. Попова «Векторы, фракталы и компьютерное моделирование» [90].

На рис. 32 показан процесс получения некоторых фракталов, а на рис. 33 приведены фракталы, полученные с помощью компьютера.

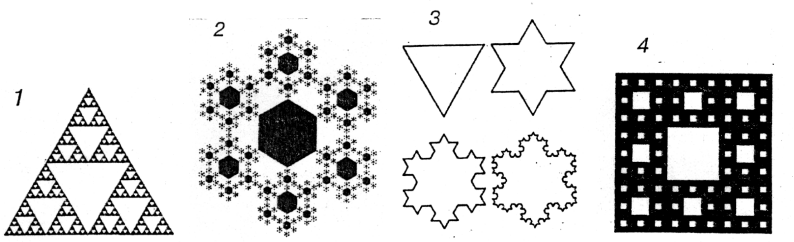


Рис. 32

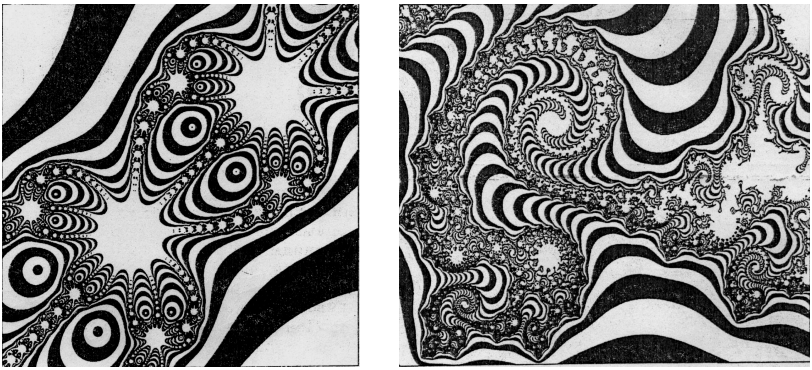


Рис. 33

На сайте Донского государственного университета www.dstu.edu.ru/informatics/fractals, а также в литературных источниках [3; 50; 90; 108; 117; 120] представлен интересный материал о фракталах.

Чтобы почувствовать и понять эстетическую суть фракталов, нужно поэкспериментировать с этими геометрическими объектами. Для этого достаточно зайти на один из многочисленных сайтов в Интернете.

Укажем некоторые из них:

www.eclectasy.com/Fractal-Explorer/;

www.dmitriyku.narod.ru;

www.fractals.narod.ru;

www.dstu.edu.ru/informatics/fractals/.

На этих сайтах можно найти:

– многочисленные фрактальные галереи;

– программы для создания фракталов;

– обширные теоретические сведения, рассказывающие об истории создания и современных тенденциях исследования фрактальной геометрии.

С помощью компьютера целесообразно организовать учебно-исследовательскую деятельность учащихся. Приведем лишь некоторые примеры.

1) Нахождение точек Ферма и Торичелли для треугольника [51; 110; 111].

Точкой Ферма для треугольника называется точка, для которой сумма расстояний до вершин треугольника является минимальной.

Точкой Торричелли для треугольника называется точка, из которой все стороны треугольника видны под равными углами.

Если каждый угол ΔABC меньше 120°, то точка Ферма и точка Торичелли совпадают для данного треугольника.

Представим фрагмент программы нахождения точки Ферма-Торричелли, написанной на Visual Basic.

```
'= функция нахождения точки Ферма-Торричелли.
Public Function Tor (A As PointCLS,B As PointCLS,c As PointCLS) As PointCLS
Dim A1 As New PointCLS, CI As New PointCLS, A2 As New PointCLS, C2 As New PointCLS,
tor1 As New PointCLS

A1.X = c.X 12- Sqr(3) * c.Y / 2 + B.X / 2 + Sqr(3) * B.Y / 2
A1.Y = Sqr(3) * c.X / 2 + c.Y / 2 – B.X * Sqr(3) / 2 + B.Y / 2
C1.X = A.X / 2 + Sqr(3) * A.Y / 2 + B.X / 2 – Sqr(3) * B.Y / 2
Cl.Y = A.Y /2 – Sqr(3) * A.X 12 + B.X * Sqr(3) / 2 + B.Y / 2

C2.X = A.X / 2 – Sqr(3) * A.Y / 2 + B.X / 2 + Sqr(3) * B.Y / 2
C2.Y = Sqr(3) * A.X / 2 + A.Y / 2 – B.X * Sqr(3) / 2 + B.Y / 2
A2.X = c.X/2 + Sqr(3) * c.Y/2 + B.X/2 – Sqr(3) * B.Y/2
A2.Y = c.Y / 2 – Sqr(3) * c.X/2 + B.X * Sqr(3) / 2 + B.Y / 2

If Sqr((A1.X – A.X)^2 + (A1.Y – A.Y)^2) < Sqr((A2.X – A.X)^2 + (A2.Y – A.Y)^2) Then
```

```
        A1.X = A2.X: A1.Y = A2.Y
        C1.X = C2.X: C1.Y = C2.Y
        End If
        tor1.X=((A.X-A1.X)*(c.Y*C1.X-c.X*C1.Y)-(c.X-C1.X)*(A.Y*A1.X-
AX*A1.Y))/((A1.Y-A.Y)*(c.X-C1.X)-(C1.Y-c.Y)*(A.X-A1.X))
        tor1.Y=((A.Y*A1.X-A.X*A1.Y)*(C1.Y-c.Y)-(c.Y*C1.X-c.X*C1.Y)*(A1.Y-
A.Y))/((A1.Y-A.Y)*(c.X-C1.X)-(C1.Y-c.Y)*(A.X-Al.X))

        Set Tor = tori
        Set A1 = Nothing: Set CI = Nothing: Set A2 = Nothing: Set C2 = Nothing:
Set tori = Nothing

        End Function
```

2) Арбелос Архимеда определяется как криволинейный треугольник, ограниченный тремя полуокружностями S_1, S_2, S_3 [112].

Геометрия арбелоса изучалась известными геометрами: Архимедом, Паппом, И. М. Ягломом, И. Ф. Шарыгиным.

Программа построения последовательности окружностей, вписанных в арбелос (реализация на языке Бейсик).

```
        Cls
        Screen 12
        Window (–1000,–1000)-(1000, 1000)
        Line (0, –1000)-(0,1000), 14
        Line (–1000, 0)-(1000, 0), 14

        ' Задаем радиусы a, b окружностей S2 и S3
        a = 400
        b = 200
        p = 3.1415926525
        k = 0.74

        ' Рисуем окружность S2 с радиусом a и центром (a, 0)
        For al = 0 To 2*p Step 0.001
        x = a + a * Cos(al)
        y = a* Sin(al)
        Pset (x * k, y)
        Next al

        ' Рисуем окружность S3 с радиусом b и центром (2a+b,0)
        For al = 0 To 2 * p Step 0.001
```

```
x = 2*a + b + b * Cos(al)
y = b* Sin(al)
Pset (x* k, y)
Next al

' Рисуем окружность S1 с радиусом a+b и центром (a+b,0)
For al = 0 To 2 * p Step 0.001
x = a+b +(a+ b)* Cos(al)
y= (a + b) *Sin(al)
Pset (x * k, y)
Next al

' Рисуем последовательность окружностей, вписанных в арбелос Архимеда по формулам (1)
For n = –10 To 10
For f = 0 To 2 *p Step 0.001
x = a*(a+b)*(2*a+b)/(a^2+a*b+n^2*b^2) + a*b*(a+b)*Cos(f) / (a^2 + a*b + n^2 * b^2)
y = 2*n*a*b*(a+b) / (a^2+a*b+n^2*b^2) + a*b*(a+b)*Sin(f) / (a^2 + a*b + n^2 * b^2)
Pset (x * k, y)
Next f
Next n
```

3) Программа построения равносторонних треугольников и точки Ферма [111].

```
SCREEN 12
INPUT «Введите координаты вершины A(x,y) «, a1, a2
INPUT «Введите длину стороны b «; b
INPUT «Введите длину стороны c «; c
INPUT «Угол при вершине A (yg1) «, yg1
INPUT «Угол наклона стороны C к оси OX (yg2) «, yg2
pi = 3.141593
'1 Перевод углов в радианную меру
rad1 = yg1 * pi / 180: rad2 = yg2 * pi / 180
a = SQR(b^2 + c^2 – 2*b*c* COS(rad1)) 'Длина стороны a
'Координаты вершин B(b1,b2), C(c1,c2)
b1 = c * COS(rad2) + a1: b2 = c * SIN(rad2) + a2
c1 = b * COS(rad2 + rad1) + a1: c2 = b * SIN(rad2 + rad1) + a2
'Проверка условий
IF yg1 > 120 THEN f1 = a1: f2 = a2: GOTO 111
```

```
        IF (2*b–2*c*COS(rad1)) <= (-a) THEN f1 = c1: f2 = c2: GOTO 111
        IF (2*c–2*b*COS(rad1)) < (-a) THEN f1 = b1: f2 = b2: GOTO 111
        'Координаты точек B1(b11,b12), C1(c11,c12), A1(a11,a12)
        b11 = b * COS(rad1 + rad2 + pi / 3) + a1: b12 = b * SIN(rad1 + rad2 + pi /
3) + a2
        c11 = c * COS(rad2 – pi / 3) + a1: c12 = c * SIN(rad2 – pi / 3) + a2
        a11 = (b * COS(rad1 + rad2) + c * COS(rad2) + SQR(3) * (b * SIN(rad2 +
rad1) – c * SIN(rad2))) / 2 + a1
        a12 = (b * SIN(rad1 + rad2) + c * SIN(rad2) + SQR(3) * (-b * COS(rad2 +
rad1) + c * COS(rad2))) / 2 + a2
        'Кооодинаты точки Ферма F(f1,f2)
        m = SQR(b^2+c^2–2*b*c*COS (pi / 3 + rad1))
        f1 = 2*b*c*SIN(rad1 + pi / 3) * (b*SIN(rad1 + rad2 + pi / 6) – c * SIN (rad2 –
pi / 6)) / (m^2 * SQR (3) ) + a1
        f2 = 2*b*c*SIN(rad1 + pi / 3) * (-b*COS(rad1 + rad2 + pi / 6) + c*COS (rad2 –
pi / 6)) / (m^2*SQR(3)) + a2
        CLS
        'Построение равносторонних треугольников с основаниями на сторонах
треуг. ABC
        LINE (a1, a2) – (b11, b12), 8
        LINE (c1, c2) – (b11, b12), 8
        LINE (c1, c2) – (a11, a12), 8
        LINE (b1, b2) – (a11, a12), 8
        LINE (a1, a2) – (c11, c12), 8
        LINE (b1, b2) – (c11, c12), 8
        'Построение прямых AA1, BB1, CC1
        LINE (a1, a2) – (a11, a12), 6
        LINE (b1, b2) – (b11, b12), 6
        LINE (c1, c2) – (c11, c12), 6
        111 :
        'Построение треуг. ABC (на экране линии треугольника толще)
        LINE (a1, a2) – (b1, b2), 4: LINE (a1, a2 + 1) – (b1, b2 + 1), 4: LINE (a1,
a2 – 1) – (b1, b2 – 1), 4
        LINE (a1, a2) – (c1, c2), 4: LINE (a1 + 1, a2) – (c1 + 1, c2), 4: LINE (a1,
a2 – 1) – (c1, c2 – 1), 4
        LINE (c1, c2) – (b1, b2), 4: LINE (c1, c2 + 1) – (b1, b2 + 1), 4: LINE (c1,
c2 – 1) – (b1, b2 – 1), 4

        'Точка Ферма изображена в виде закрашенной окружности
        CIRCLE (f1, f2), 3, 3: PAINT (f1 + 1, f2 + 1), 3, 3
        END
```

Паркеты с древних времен привлекали к себе внимание людей. Им, в частности, посвящены многие замечательные картины М. Эшера. И, конечно, с паркетами мы встречаемся в повседневной жизни.

И хотя изучение паркетов не входит в школьную программу по математике, тем не менее эта тема непосредственно связана с такими понятиями, как многоугольник, правильный многоугольник, параллельный перенос, поворот, осевая и центральная симметрии, площадь и др. Поэтому авторы нового учебника (Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия 7–9. М.: Просвещение, 2000) сочли необходимым в 9 классе рассказать учащимся о паркетах.

Ниже мы приведем сокращенный вариант статьи названных авторов учебника [107].

Итак, паркетом называют замощение плоскости многоугольниками, при котором вся плоскость оказывается покрытой ими и любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо вообще не имеют общих точек. Паркет называют правильным, если он составлен из равных правильных многоугольников. Всем известны примеры замощения плоскости равносторонними треугольниками и квадратами (рис. 34 и 35). Еще можно составить паркет из правильных шестиугольников (рис. 36). Других правильных паркетов не существует. И это нетрудно доказать: углы правильного n-угольника равны $180°(n - 2) / n$. Если в одной вершине паркета сходятся m правильных n-угольников, то должно выполняться равенство $m180°(n - 2)/n = 360°$.

После преобразования получаем: $m = 2n/(n - 2)$. Видно, что только при значениях n, равных трем, четырем или шести, m окажется целым числом (те, кто не верят, могут поискать опровержение методом подбора). В частности, нельзя заполнить плоскость правильными пятиугольниками.

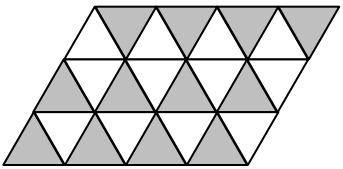


Рис. 34

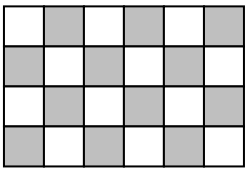


Рис. 35

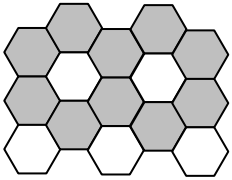


Рис. 36

Среди правильных многоугольников одного и того же периметра, используемых для построения паркета, наибольшей площадью обладает шестиугольник. В природе этот факт находит отражение в фор-

ме пчелиных сот. Они похожи на паркеты, составленные из правильных шестиугольников, поскольку пчелы, строя соты, инстинктивно стараются сделать их как можно более вместительными и израсходовать при этом как можно меньше воска.

Неудобство изложения такой интересной и доступной школьнику темы заключается лишь в невозможности правильно, а значит, красиво, изобразить паркеты на доске или в тетради. Однако в современных условиях выход из этого положения есть – это использование компьютера на уроке. Например, графического редактора «Paint», входящего в стандартный пакет Microsoft Office. Делается это так. Сначала рисуем выбранный многоугольник (можно воспользоваться автофигурами из редактора «Word»). Затем копируем, полученную копию передвигаем с помощью мышки так, чтобы исходный многоугольник и его копия соприкасались сторонами. Доставая новые копии и перемещая их так, чтобы они соприкасались сторонами с предыдущими многоугольниками, получим целое семейство многоугольников. Можно использовать различные цвета заливки, в результате получатся очень симпатичные разноцветные паркеты.

Расширим способы составления паркетов из правильных многоугольников, используя в них правильные многоугольники с различным числом сторон, но так, чтобы вокруг каждой вершины правильные многоугольники располагались в одном и том же порядке. Такие паркеты называют полуправильными. Посмотрим, сколько различных паркетов можно составить, приняв это условие.

В одной вершине могут сходиться три правильных треугольника и два квадрата: треугольники следуют за квадратами (рис. 37), или треугольники и квадраты чередуются (рис. 38).

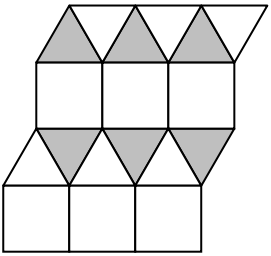


Рис. 37

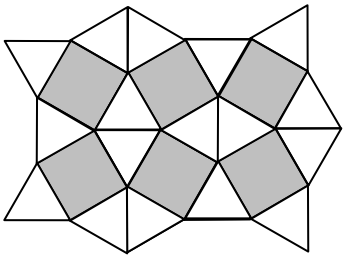


Рис. 38

Еще в одной вершине могут сходиться треугольники и шестиугольники: четыре треугольника и шестиугольник (рис. 39) или два треугольника и два шестиугольника (рис. 40).

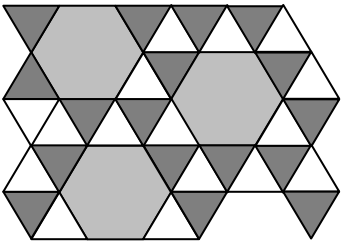


Рис. 39

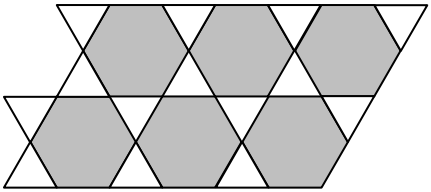


Рис. 40

На рис. 41 приведен паркет, состоящий из квадратов и восьмиугольников, а на рис. 42 паркет составлен из треугольников и двенадцатиугольников.

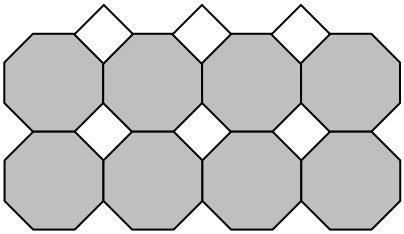


Рис. 41

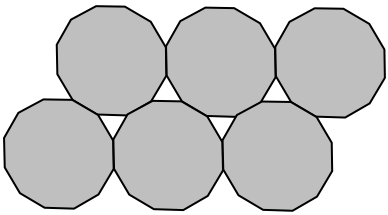


Рис. 42

Если в каждой вершине сходятся шестиугольник, треугольник и два квадрата, то получится паркет, показанный на рис. 43, а на рис. 44 приведен паркет, состоящий из квадратов, шестиугольников и двенадцатиугольников.

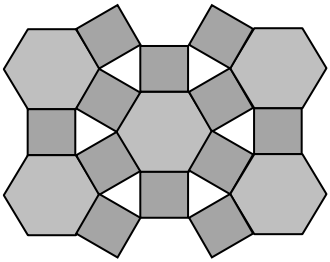


Рис. 43

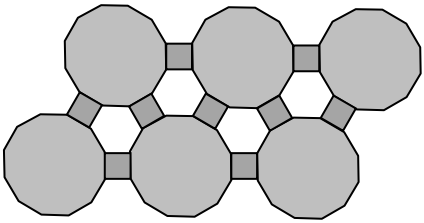


Рис. 44

Мы рассмотрели 11 типов паркетов, составленных из правильных многоугольников. Оказывается, что других вариантов не существует (попробуйте опровергнуть это утверждение в «Paint»).

Теперь займемся заполнением плоскости неправильными одинаковыми многоугольниками и проверим утверждение о том, что для любого четырехугольника существует паркет, состоящий из четырехугольников, равных исходному. Иначе говоря, четырехугольником произвольной формы можно заполнить всю плоскость без пробелов и наложений.

Возьмем произвольный четырехугольник *ABCD* (рис. 45) и рассмотрим симметричный ему относительно середины стороны *AB* четырехугольник. Исходный четырехугольник *ABCD* обозначим цифрой 1, а симметричный – цифрой 2. Теперь четырехугольник 2 отразим симметрично относительно середины его стороны *BC*. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 3 и отразим его симметрично относительно середины его стороны *CD*. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 4. Четырехугольники 1, 2, 3 и 4 примыкают к общей вершине углами *A, B, C* и *D*. А так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то эти четырехугольники заполнят часть плоскости вокруг общей вершины. Такое же построение можно провести вокруг каждой новой вершины, что и даст искомое заполнение плоскости.

Отметим, что четырехугольник может быть и невыпуклым. Соответствующий паркет приведен на рис. 46. Все показанные на рисунках паркеты выполнены в графическом редакторе «Paint». Попробуйте в этом редакторе замостить плоскость треугольниками произвольной формы или фигурой, изображенной на рис. 47.

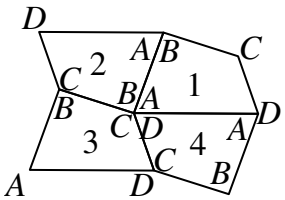


Рис. 45

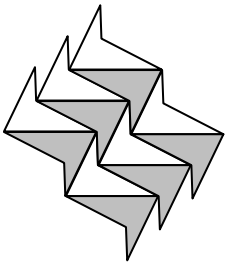


Рис. 46

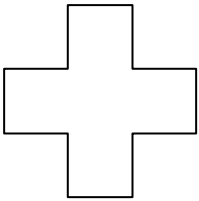


Рис. 47

Ниже мы приведем примеры компьютерных программ, предназначенных для обучения геометрии.

1. «Открытая математика. Планиметрия 1.0»

(http://www.physicon.ru)

Основной частью программы «Открытая математика. Планиметрия» является электронный учебник по планиметрии, который включает краткое изложение теории, а также вопросы, задачи, тренажеры. Это обеспечивает детальную проработку учеником изучаемого материала. Имеется ряд компьютерных моделей и иллюстраций различных геометрических задач. Для решения задач на построение учащимся предлагается использовать интерактивный конструктор и специальное приложение «Чертеж» – средство для построения чертежей к геометрическим задачам. Представлены также компьютерные варианты занимательных геометрических задач и игр.

В курс входят: электронный учебник, более 100 задач и вопросов, интерактивный конструктор для решения задач на построение, журнал работы ученика, звуковое сопровождение.

Содержание курса. Точка, прямая. Угол. Параллельные прямые. Треугольник. Решение треугольников. Окружность. Четырехугольник. Построение фигур. Многоугольник. Декартовы координаты. Векторы. Преобразования. Площадь.

Построения на плоскости и в пространстве

Увеличивается количество программ, где ученику предоставляется среда, в которой можно выполнять любые аналоги построений с помощью циркуля и линейки. Это прекрасные технические инструменты, приходящие на смену карандашу, линейке, циркулю, резинке. Быстро, аккуратно, точно, красочно можно выполнить практически любые геометрические построения и операции, ввести привычные обозначения, автоматически измерить длины и т. д.

Эти программы могут: строить аккуратные чертежи; трансформировать уже готовый чертеж, двигая одну из точек или прямых (построение при этом сохраняется). В ряде программ предусмотрена анимация.

Возможность трансформации чертежа интересна тем, что:

– не надо задумываться о положении базовых точек (при построении на бумаге может оказаться, что в одном месте чертежа точек много, а в другом мало, приходится перерисовывать);

– появляется возможность легко проверить построение;

– можно организовать самостоятельную поисковую деятельность.

Например, построив треугольник и проведя медианы, можно осуществлять различные изменения формы треугольника и замечать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, или, проводя соответствующие измерения, выяснить, в каком отношении делятся медианы их точкой пересечения.

Очень полезно использовать такие программы при изготовлении различных разноуровневых наглядных карточек-заданий для всего класса.

Приведем примеры.

2. «Свободная плоскость. СвоП 2.0»

(http://www.freeplane.nm.ru)

Предназначена для построения геометрических чертежей и их детального анализа. С помощью этой программы можно отметить точку, провести прямую, луч, окружность. Можно изменять размеры построенных фигур, выполнять повороты, симметрично отражать относительно точки или прямой. Целесообразно использовать при решении задач по геометрии на стадии исследования.

Программа не имеет методической поддержки для учителя, поэтому ему необходимо проявить творчество. Можно выполнить иллюстрации к различным теоремам или задачам и сопровождать изложение на уроке соответствующими чертежами. Это позволит сделать более наглядными те или иные теоретические факты.

3. Программа «ПланиМир»

(http://www.math.msu.su/lnfoMir)

Эта программа представляет особый интерес для учителя математики (подчас пугающегося компьютера), так как содержит прекрасно разработанный геометрический практикум по теме «Построение с помощью циркуля и линейки». Имеется поурочная методическая разработка, что позволяет даже на первом этапе знакомства с программой легко проводить уроки.

«Геометрический практикум» составлен в соответствии с учебниками геометрии.

Каждый раздел «Геометрического практикума» содержит одну из основных задач на построение из учебника, например о построении биссектрисы угла с пошаговым и доказательством справедливости по-

строения. Затем учащимся предлагаются две задачи для самостоятельного решения.

Имеется раздел «Свободная работа в ПланиМире», который позволяет решать любые задачи на построение из учебника.

4. Программа «Живая геометрия»

(int_soft@mtu-net.ru)

Программа «Живая геометрия» является электронным аналогом готовальни с дополнительными динамическими возможностями и со стандартными компьютерными функциями типа редактирования, каталогизирования и т. п. Эта компьютерная среда предоставляет пользователю и другие, непривычные пока возможности (например, озвучивание чертежей), которые еще не вошли в педагогическую практику, однако представляются весьма перспективными. «Живая геометрия» позволяет создавать красочные, варьируемые и редактируемые чертежи, осуществлять операции над ними, а также проводить все необходимые измерения. Чертежи можно компоновать в сценарии – своеобразные геометрические мультфильмы.

Программа обеспечивает деятельность учащихся в области анализа, исследования, построений, доказательств, решения задач, головоломок и даже рисования; позволяет обнаруживать закономерности в наблюдаемых геометрических явлениях, формулировать теоремы для последующего доказательства, подтверждать уже доказанные теоремы и развивать их понимание. Рекомендуется для использования на уроках математики в 6–9 классах, уроков информатики и форм внеклассной и внешкольной работы.

Необходимо отметить, что программа – всего лишь технический инструмент, поэтому для реального использования ее в учебном процессе необходимо затратить много сил. Авторы предлагают несколько иллюстраций, демонстрирующих прекрасные возможности системы. Например, приводимая формулировка теоремы Чевы нацелена на простое понимание ее как непосредственно наблюдаемого явления.

5. Программа «Functor 2.9»

(http://functor.cjb.net)

Здесь можно построить различные многоцветные изображения поверхностей второго порядка, поверхности можно поворачивать (рис. 48, 49). На первых уроках по теме «Декартовы координаты в пространстве» при использовании программы учащиеся проявляют интерес и более осознанно воспринимают начала аналитической геометрии.

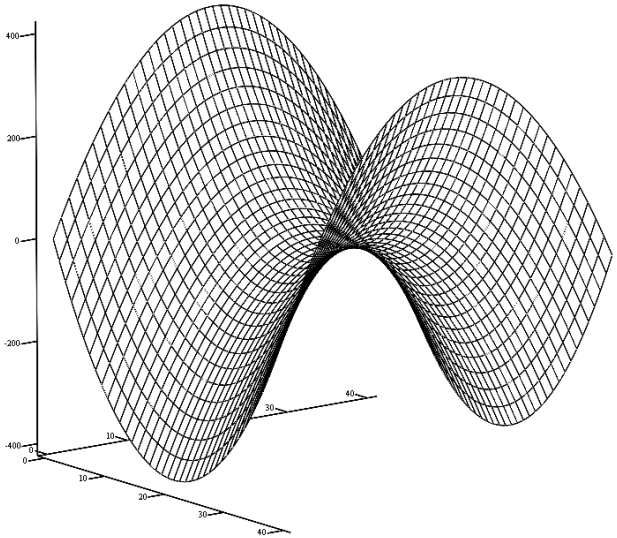


Рис. 48

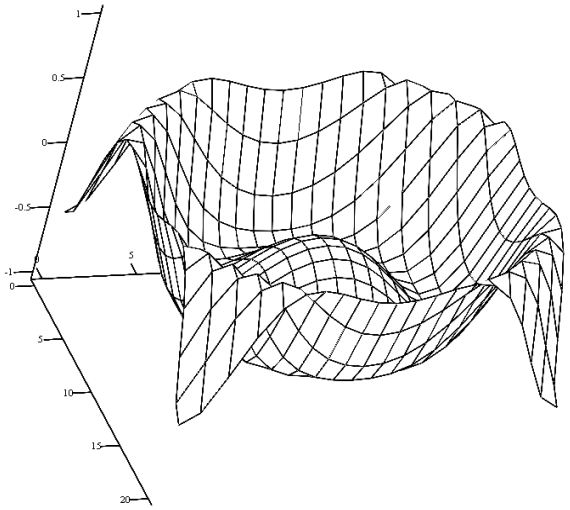


Рис. 49

6. Программа «s3D SecBuilder»

(http://www.chat.ru/~sud/s3d.exe)

Известно, что при изучении стереометрии очень важно достичь наглядности изображения. Эта программа очень удобна для построения пространственных фигур, так как содержит различные заготовки, которые можно увеличивать или уменьшать, поворачивать, включить режим анимации и наблюдать вращение тела в пространстве и, главное, построить сечение.

В настоящее время основным результатом образования является не столько набор знаний, умений, навыков учащегося, сколько выработанная в ходе обучения способность к анализу и дальнейшему разрешению проблемы в сложившихся условиях, в ходе чего и привлекается запас имеющихся знаний и умений из различных предметных областей. Новый результат образования, которым должны обладать учащиеся, получил название «компетентность учащегося».

В силу того что учебно-познавательная деятельность учащихся является ведущей в процессе обучения, выделяют учебно-познавательную компетентность. Наличие данной компетентности у учащегося обеспечивает его возможностью осуществления мотивированной самостоятельной учебно-познавательной деятельности.

Для достижения нового результата образования – учебно-познавательной компетентности учащегося – необходимы различные средства обучения.

Поскольку бóльшая часть времени на уроках геометрии отводится решению задач, одним из средств развития учебно-познавательной компетентности старшеклассников должны стать задачи нового типа, или «компетентностные задачи», отличающиеся от традиционных математических задач.

Во-первых, эти задачи должны содержать некую практическую или личностную значимость для учащегося, чтобы его деятельность в ходе ее решения была мотивированной.

Во-вторых, цель решения задачи должна заключаться не столько в получении ответа, сколько в присвоении нового знания (метода, способа решения, приема) с возможным переносом на другие предметы, то есть предметное знание должно выступать в роли средства для получения некоего общего межпредметного или общепредметного знания.

С другой стороны, для того чтобы учебно-познавательная деятельность учащегося стала самостоятельной, должна измениться организация этой деятельности. В этом смысле перспективным, на наш взгляд, является использование информационных технологий на уроках геометрии в старших классах.

О. В. Харитонова отмечает: «Необходимость включения информационных технологий в процесс обучения геометрии обусловлена несколькими причинами.

Одна из них состоит в том, что применение информационных технологий во всех сферах человеческой жизнедеятельности на сегодняшний день стало необходимым условием успешного функционирования в современном информационном обществе и, значит, должно касаться и школьного образования.

Вторая обусловлена предметным содержанием. На уроках геометрии учащиеся много работают с графическим изображением пространственных геометрических фигур, которые не всегда наглядно отражают их свойства. Поэтому особый интерес представляют графические редакторы, позволяющие создавать и изменять компьютерные модели геометрических объектов.

И наконец, возможности информационных технологий в проведении компьютерного эксперимента, с целью самостоятельного получения нового знания о геометрическом объекте на основе изучения компьютерной модели, делает эти технологии в процессе обучения одним из инструментов познания» [119, с. 62]. Ниже использован материал этой статьи.

Рассмотрим некоторые преимущества компьютерных моделей пространственных геометрических фигур по сравнению с традиционными моделями (развертки, модели из пластилина), а также чертежами и рисунками, выполненными на бумаге или доске.

1. Возможность быстрого создания большого количества разнообразных компьютерных моделей геометрических фигур, что затруднено в случае с материальными моделями как в техническом, так и в материальном плане.

2. Неоднократное обращение к компьютерной модели с целью ее воспроизведения (демонстрации), в то время как с традиционными моделями действует принцип «здесь и сейчас».

3. Моментальное копирование компьютерных моделей для индивидуальной работы в классе, что невозможно при работе с материальными моделями и затруднено с чертежами и рисунками.

4. Возможность динамического изменения количественных характеристик модели объекта, которая полностью исключена в случае с традиционными моделями.

Построение компьютерных моделей может быть реализовано в двумерных и трехмерных графических редакторах. Очевидно, что при изучении стереометрии используются последние, так как они позволяют создавать компьютерную модель пространственной геометриче-

ской фигуры, схожую с ее возможной материальной моделью. Это особенно важно для формирования адекватных пространственных образов изучаемых геометрических фигур.

При обучении теме «Многогранники» в 10 классе в качестве основного программного обеспечения можно использовать пакет трехмерной графики 3D Studio MAX 3.1.

Он привлекает внимание, так как, во-первых, 3D Studio MAX позволяет создавать и изменять компьютерные модели пространственных геометрических фигур без необходимости программирования или знания аналитической геометрии.

Во-вторых, интуитивно понятный графический интерфейс облегчает освоение основных действий в данном пакете. Четыре окна проекций (три окна ортогональной проекции и окно перспективы) позволяют видеть модель со всех сторон. Инструменты программы расположены в панели инструментов и в командной панели, и появляются не все сразу, а из соответствующих свитков и закладок.

В-третьих, конечный результат моделирования может быть сохранен в виде видеоклипа, не требующего для своего воспроизведения наличия самой программы.

Конечно, 3D Studio MAX является профессиональным пакетом, который требует от учащегося наличия компьютерной грамотности и владения основными действиями в этой программной среде. Однако к моменту использования 3D Studio MAX на уроках геометрии овладение этими действиями может быть приобретено на уроках информатики. К тому же содержание предмета информатики предполагает работу учащихся с графической информацией как для базового, так и профильного уровней обучения. И наконец, общеизвестно, что компьютерная грамотность учащихся «лидирует» на фоне грамотности в других областях.

Перейдем к конкретному примеру, который иллюстрирует изложенное выше. Рассмотрим задачу «Грани призмы», которая предлагается учащимся сразу же после введения понятия призмы и ее элементов.

Откройте в 3D Studio MAX файл «Грани призм» и у всех призм выделите синим цветом все боковые грани, а желтым – основания.

Учащимся предложен файл с семью моделями многогранников, по-разному расположенных в пространстве: 1) куб, 2) выпуклая четырехугольная пирамида, 3) невыпуклая восьмиугольная призма, 4) наклонная треугольная призма, 5) правильная шестиугольная призма, 6) усеченная треугольная пирамида, 7) «клин» или призматоид.

Возможности 3D Studio MAX позволяют вращать и перемещать эти модели в виртуальном пространстве так, как удобно каждому уча-

щемуся. В ходе движения данных моделей учащиеся интерпретируют информацию о них, сравнивают модели друг с другом, с конструктивным определением призмы и делают вывод, какие из них являются моделями призм.

При раскрашивании граней в синий и желтый цвета учащиеся имеют возможность самостоятельно оценить достоверность своего выбора и при необходимости исправить ошибку. Так, например, первоначально некоторые из учащихся принимают усеченную пирамиду за призму. При раскрашивании боковых граней они обнаруживают, что по форме боковые грани являются трапециями, в то время как по свойству призмы они должны быть параллелограммами. В итоге реализуется контролирующая функция компьютерного моделирования: сравниваются свойства компьютерной модели и свойства объекта, которые должны оставаться неизменными.

Кроме того, раскрашивая грани куба, учащиеся сталкиваются с проблемой выбора оснований и боковых граней. В итоге не важно, какую пару противоположных граней куба принять за основания, так как все грани равные квадраты. При совместном обсуждении возникшей проблемы проводится обобщение полученного результата для прямоугольного параллелепипеда и просто параллелепипеда. В данном случае учащиеся самостоятельно получают новую информацию о призме, предваряющую теоретическое обоснование, то есть осуществляется познавательная функция компьютерного моделирования.

Такого рода задания с компьютерными моделями, как показывает практика, целесообразны при введении определений новых понятий геометрических фигур, когда необходимо научить учащихся выделять существенные свойства понятия; проверять наличие у примера (объекта) выделенных свойств; делать вывод о принадлежности данного объекта понятию; выводить следствия из того факта, что объект принадлежит понятию.

Кроме того, учащиеся с интересом включаются в работу на основе моделирования и испытывают удовольствие от самостоятельного получения знаний по геометрии. Это не только положительно сказывается на мотивации обучения, но и вселяет уверенность в выполнении нового задания, обеспечивающую продуктивность учебно-познавательной деятельности.

Таким образом, использование компьютерного моделирования на уроках геометрии при помощи 3D Studio MAX изменяет характер учебно-познавательной деятельности старшеклассников в содержательном плане за счет уделения большего внимания предметной модели

изучаемого объекта по сравнению с математическими выкладками и вычислениями, а также в организационном плане путем увеличения степени самостоятельности обучающегося в ее осуществлении.

Все это позволяет утверждать, что информационные технологии могут выступать в качестве одного из средств развития учебно-познавательной компетентности учащихся на уроках геометрии.

В настоящей работе приведены лишь некоторые применения новых информационных технологий в обучении геометрии с целью иллюстрации их эффективности по сравнению с традиционным безмашинным обучением. Примеры подобных применений могут быть значительно расширены.

§ 4. Информационные технологии в обучении курсам «Алгебра» и «Алгебра и начала анализа»

Существует множество компьютерных программ по математике, изданных на дисках CD-ROM и опубликованных на многочисленных сайтах Интернета.

В этой же работе пойдет речь о графической программе Advanced Grapher [1]. Удобный русский интерфейс, простота управления, многообразие функций делают ее отличным помощником учителя. Используя Advanced Grapher, можно строить графики алгебраических и тригонометрических функций в декартовой системе координат, исследовать функции, находить их производную или первообразную. С помощью программы легко определяются координаты точек пересечения графиков, вычисляются площади замкнутых фигур, устанавливаются уравнения касательных к графику данной функции в указанных точках. Программа строит графики и в полярной системе координат, а также линии, заданные параметрически. Кроме того, она чертит графики и направления, которые задаются с помощью уравнений или неравенств.

Представим несколько примеров работы с этой программой. Возьмем конкретные темы уроков алгебры и начал анализа 9–11 классов. На уроке алгебры, посвященном преобразованиям графика функции $y = ax^2 + bx + c$, на экране монитора (или еще лучше, с помощью проектора на большом экране) удобно показывать все перемещения графика: растяжения, сжатия, переносы вдоль координатных осей. На рис. 50, 51 виден только застывший результат построения, а на экране монитора прослеживается вся динамика последовательных действий учителя или ученика.

Аналогично выглядит картина построения графиков тригонометрических функции, изучаемых в 10 классе. Сколько времени и сил отнимает у учителя подготовка к этим урокам. Не всегда построенные на доске графики выглядят гладкими кривыми. С компьютером гораздо проще: надо только задать соответствующую формулу, цвет линии и ее толщину.

График можно перемещать различным образом, а полученные картинки копировать и вставлять в карточки-задания, создавая тем самым собственную базу методических материалов. Например, можно набрать целую серию проверочных карточек для итогового контроля. Пример такой карточки приведен ниже.

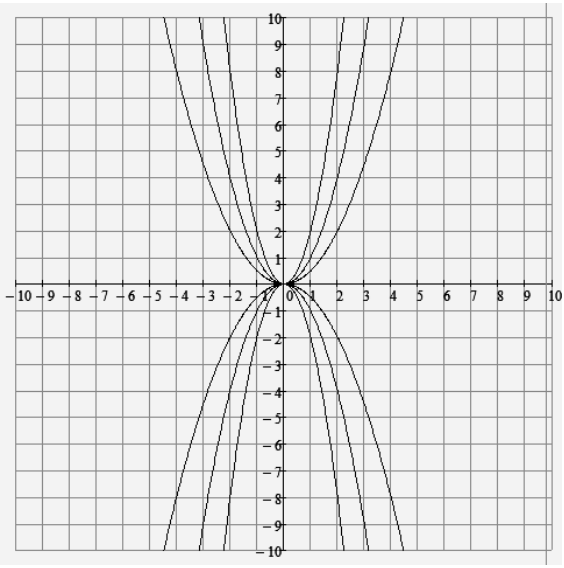


Рис. 50

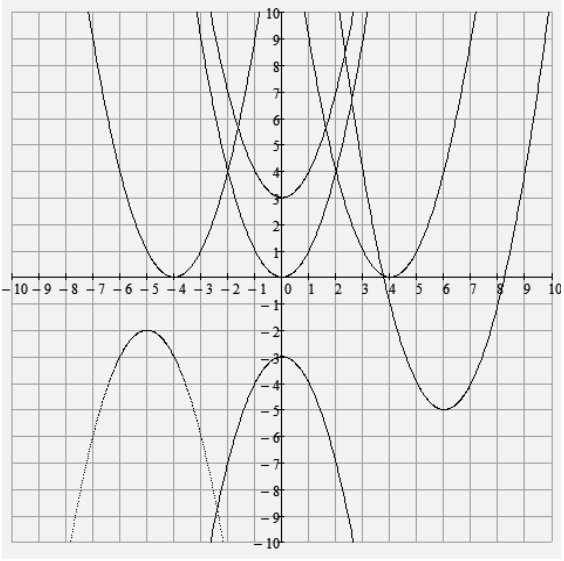


Рис. 51

Определите формулу, которой задается график, изображенный на рис. 52.

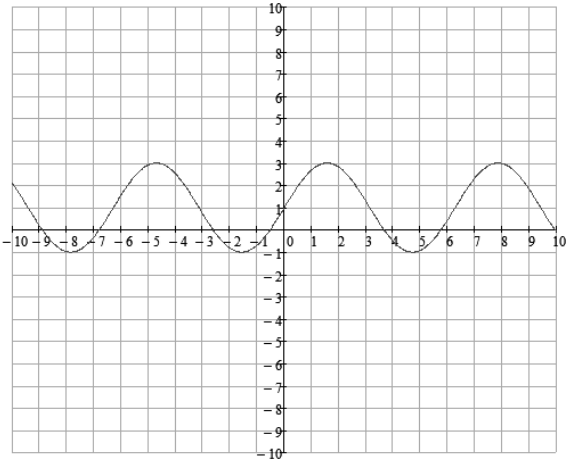


Рис. 52

1. Назовите область определения и область значений этой функции.

2. Найдите нули функции.

3. При каких значениях x функция принимает положительные значения?

4. Постройте график функции, которая имеет ту же область определения и значений, что и данная функция.

Несколько слов еще об одном разделе алгебры 10 класса. Каждый учитель знает, как однообразны и трудоемки уроки исследования функций, как порой нелегко объяснить некоторые этапы исследования: особенности окрестности точки, в которой происходит перегиб; асимптоты графика и др. Программа Advanced Grapher не только облегчает учителю объяснение материала, но и позволяет ученикам быстрее усвоить трудные места этого материала, поскольку дает возможность увеличивать размеры графика, выполнять дополнительные построения, более детально и полно производить исследование функции. Покажем это на примере графика дробно-рациональной функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ (рис. 53).

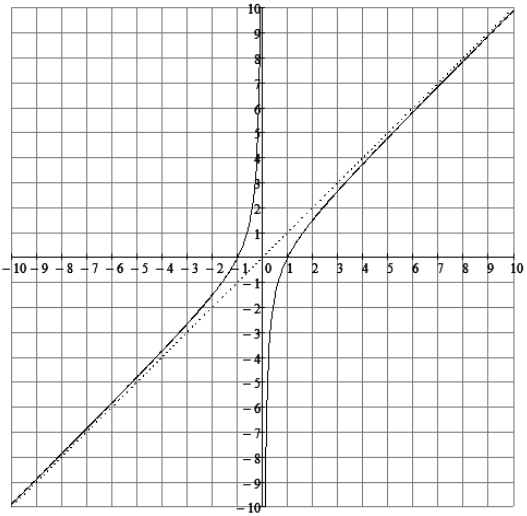


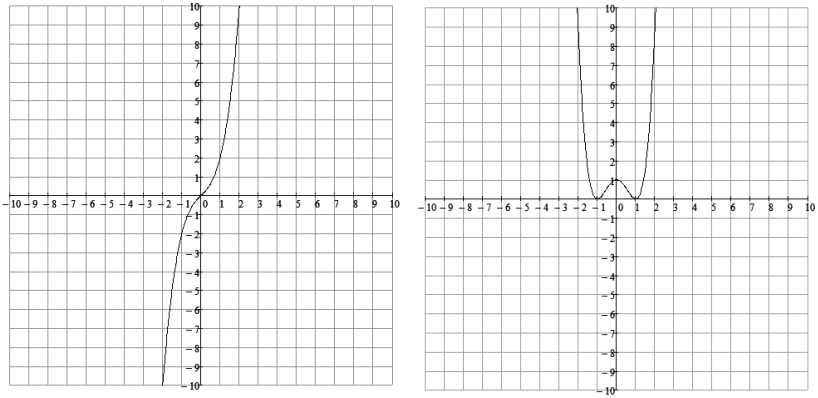
Рис. 53

Строя графики в первом полугодии 10 класса, ученики еще не владеют методами исследования функции с помощью производной и пользуются в основном вычислительными приемами. Находя последовательные значения данной функции при значениях $x \to \pm\infty$, $x \to 0$ с помощью компьютера, ученики не только достаточно точно строят график, но и определяют его асимптоты, сверяя свои построения с готовой картинкой на экране монитора.

Следующий этап изучения функций – исследование с помощью производной, нахождение касательной к графику данной функции. И здесь Advanced Grapher не будет лишним. С его помощью решаются задачи двух видов. Вначале по построенному графику проводится исследование функции с целью лучшего понимания и запоминания плана решения. Затем ученик, выполняя самостоятельное построение по заданным формулам, проверяет точность построения. Такого рода задачи обогащают урок, вносят в него занимательность, доступную наглядность и практическую осознанность. В качестве примера задач такого рода служит серия альтернативных заданий, представленных ниже (рис. 54).

1. Используя графики на рис. 54 (*а, б*), проведите исследование функции.

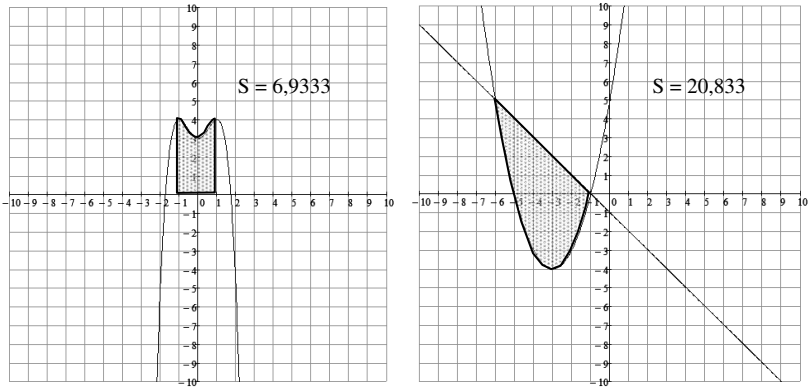
2. Постройте графики функций $y = x^3 + x$ и $y = (x^2 - 1)^2$. Проверьте точность исследования и построения графиков с помощью компьютерной программы.



а) б)

Рис. 54

Следующий пример относится к теме 11 класса «Первообразная и интеграл функции». В ходе объяснения понятия криволинейной трапеции используют рисунки, построенные с помощью компьютерной программы. Перед детальным рассмотрением алгоритма решения задач подобного вида полезно просчитывать на компьютере площадь искомой фигуры. Это позволит ученикам в дальнейшем избежать вычислительных ошибок и поможет сформировать умение приближенно оценивать значение площади фигуры. На рис. 55 показаны примеры фигур и численные значения их площадей, найденные компьютером.



а) б)

Рис. 55

Advanced Grapher можно использовать и на внеклассных занятиях, рассматривая с учениками замечательные кривые, заданные параметрическими уравнениями или уравнениями в полярных координатах. Программа строит множество различных замкнутых кривых. Остановимся лишь на некоторых из них, так называемых розах – плоских кривых, уравнения которых в полярных координатах имеют вид: $R(a) = A \sin ka$, где A и k – постоянные. Построим несколько таких кривых, задавая определенные значения k. Если k – нечетное, то роза состоит из k лепестков: если k – четное, то лепестков в розе будет уже $2k$. В каждом из перечисленных случаев лепестки розы будут находиться внутри круга радиуса a. Программа позволяет не только практически устанавливать положение розы в системе координат, определять количество ее равных лепестков, но и создавать свои собственные «цветы», рассматривая которые ученики быстрее устанавливают связи между параметрами, входящими в ту или иную формулу. Построим на компьютере несколько роз (рис. 56).

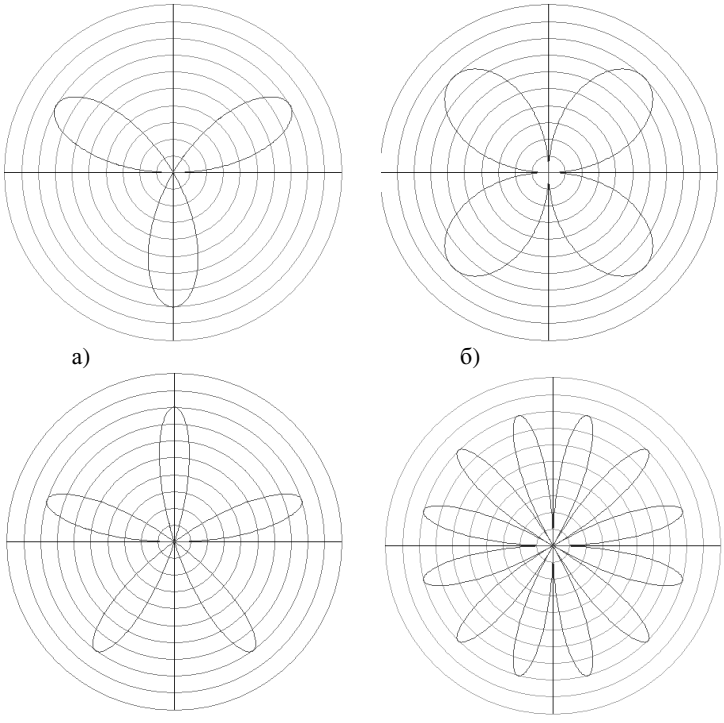


Рис. 56

Advanced Grapher можно «скачать» из Интернета, эта программа размещена в разделе «Образование» на бесплатном сайте http:// www.freeware.ru.

Далее поведем разговор о системе Derive, которая позволяет эффективно организовывать процесс обучения многим математическим темам [72; 73].

Перечислим основные особенности программы:

1) Derive – система символьной математики, то есть она может, например, разлагать многочлены на множители, вычислять неопределенные интегралы и т. д.;

2) программу можно эффективно использовать при решении широкого круга задач самых различных разделов математики;

3) она обладает хорошими графическими возможностями;

4) текст на экране почти ничем не отличается от обычных записей в тетради;

5) овладеть основными операциями программы достаточно просто;

6) программа не требует больших ресурсов памяти, ее можно установить даже на ПК класса IBM PC XT; требуемая минимальная оперативная память 512 Кбайт, все файлы (вместе с математической библиотекой) помещаются на одной дискете (это выгодно отличает Derive от других программ символьных вычислений: Mathematica, MathCad и т. д.).

Система Derive уже нашла широкое применение в школах и вузах многих стран мира, в том числе и в России. С 1994 г. за рубежом издаются специализированные журналы «Derive User Group Newsletter» и «The International Derive Journal», а также опубликовано большое число книг для пользователей системы. Литература по Derive издается и в нашей стране.

Программа имеет несколько десятков встроенных функций, среди которых: логарифмическая, показательная, тригонометрические, гиперболические, обратные тригонометрические и гиперболические функции, а также:

– функции комплексного аргумента, которые позволяют находить модуль и аргумент числа, его действительную и мнимую части, комплексное сопряженное к данному числу;

– комбинаторные функции: $n!$, C_n^m;

– вероятностные функции;

– статистические функции;

– операции из курса математического анализа: нахождение пределов функций, производных заданного порядка, неопределенных и определенных интегралов, нахождение конечных сумм и сумм числовых рядов, бесконечных произведений;

– матричные функции, например: нахождение элементов матрицы, нахождение матрицы, обратной данной, собственного значения матрицы, вычисление сумм и произведений матриц;

– векторные функции, например: нахождение скалярного и векторного произведения векторов, определение координат вектора;

– функции дифференциального и интегрального исчислений.

Выражения вводятся примерно в таком же виде, как в Бейсике, а отображаются на экране в привычной записи. Интерфейс системы прост и предоставляет пользователю большие удобства.

Обратим внимание на то, что Derive нумерует строки. Это очень удобно. Для того чтобы вычислить производную функции $x\sin^2 x$ первого порядка, пользователь должен ввести строчку DIF(x(sinx)^2,x), и появится запись в строке 3. Для получения ответа надо нажать клавишу S. Ответ будет напечатан в строке 4. В строке 6 мы увидим производную второго порядка функции $x^3\cos^2 x$. Для ее вычисления надо ввести INT(*x*^3(cosx)^2,*x*) и нажать последовательно клавиши Enter и S. Выражение в строке S (первообразная функции $x\sin x$) будет выделено темной рамкой, а в самом низу есть запись Simp(7). Это означает, что строка 8 является упрощением строки 7.

Для занятий со способными школьниками очень интересны задачи по математическому анализу: построение кривых, заданных параметрически и в полярных координатах; построение графиков функций двух переменных (см., например, рис. 57); нахождение огибающих семейства кривых элементарным способом и построение рисунка.

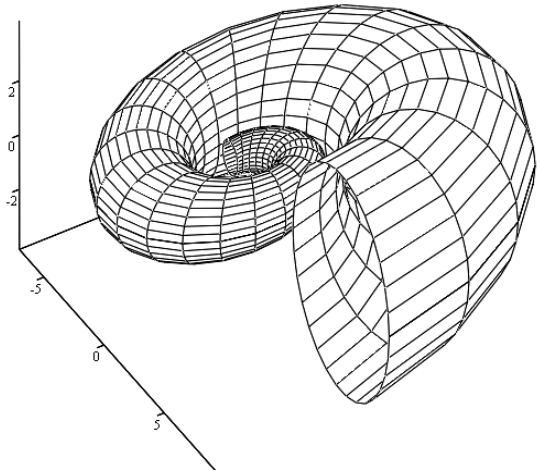


Рис. 57

К системе прилагается библиотека функций, решающих самые различные задачи. Функции собраны в файлы-утилиты. Есть также демонстрационные файлы, которые могут помочь разобраться в возможностях системы. Также можно самому создать библиотеку функций.

Проведем характеристику некоторых компьютерных программ, предназначенных для обучения учащихся 2–11 классов различным темам арифметики, алгебры, алгебры и началам анализа [80; 81; 82].

Тренажеры устного счета

1. «Учись умножать» (http://www.download.ru).

Программа предназначена для обучения таблице умножения. Ответ вводится с помощью кнопок или клавиатуры. На каждый ответ дается 30 секунд. В течение 10–15 мин программа найдет пробелы в знаниях, а затем устранит их за 15–60 мин (рис. 58).

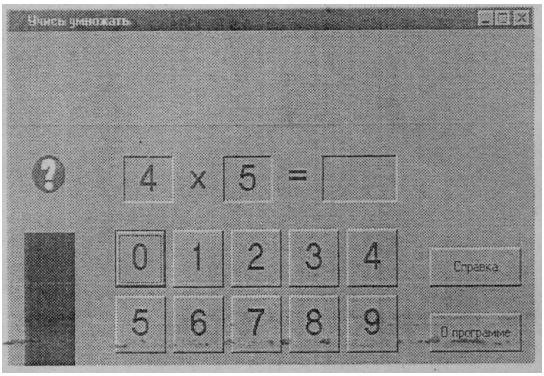


Рис. 58

2. Тренажер устного счета «Арифметика» (http://www.macromedia.com).

Тренажер устного счета для 5 класса. Можно установить желаемое число примеров. Есть возможность выполнять каждое из действий отдельно или компьютер выбирает действия случайным образом. Ответ вводится с клавиатуры. Результат фиксируется. Дается две попытки для решения, а затем демонстрируется правильный ответ, который необходимо ввести, чтобы продолжить работу (рис. 59).

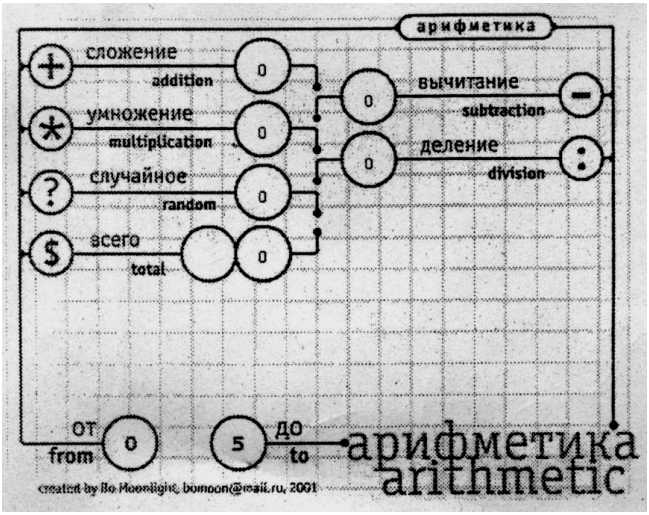


Рис. 59

3. Тренажер устного счета – «Метеоритная атака» (авт. И. Волкович, С. Лях, М. Зеков; МКЦ «ИНИС»).

Предназначен для учащихся 2–7 классов. Позволяет в увлекательной игровой форме отрабатывать навыки устного счета, превращая утомительную работу в увлекательную игру. После запуска программы появляется главное меню с разделами:

• ПОМОЩЬ – содержит инструкцию по работе с тренажером;

• РЕЖИМЫ – позволяет выбирать тип чисел, арифметическую операцию, скорость движения и уровни. Тренажер позволяет работать отдельно с любой арифметической операцией или одновременно со всеми, генерировать примеры любого уровня сложности;

• НАЧАЛО – запуск программы. Перед началом игры нужно ввести количество примеров (до 99), пауз и размер метеорита.

Игровой экран представляет собой панель управления космическим кораблем. На фоне звездного неба в центральной нижней части экрана – изображение космического корабля. Метеориты появляются с трех сторон: сверху, справа и слева. Каждый метеорит несет в себе определенный пример. В центре панели управления находится окошко для ввода ответа. Ученик должен ввести ответ и направить его в нужную сторону. В случае правильного ответа луч лазера уничтожает метеорит, а на его месте появляется новый.

На панели управления фиксируются следующие показатели:

• ПРИМЕРОВ – количество предложенных на данный момент примеров;

• ОШИБОК – количество допущенных ошибок (ошибкой считается только столкновение метеорита с кораблем, но не ввод неправильного ответа);

• ПАУЗ – количество пауз, которыми еще можно воспользоваться;

• ОЦЕНКА – текущая оценка, которая зависит от процента правильно выполненных примеров: 80 % и более – оценка «5»; от 60 до 79 % – «4»; от 30 до 59 % – «3»; менее 30 % – «2».

Примеры в программе генерируются случайным образом. Основным достоинством такого метода генерации является практически ничем не ограниченное количество возможных примеров. Основным и, наверное, единственным недостатком можно считать непредсказуемость появления элементарных примеров на любом уровне сложности.

Тренажер позволяет организовать занятия как в режиме обучения, так и в режиме контроля.

4. Тренажер «Деление дробей» (http://www.download.ru).

Содержит серию тренажеров на отработку навыков деления обыкновенных дробей и смешанных чисел. Ученик письменно решает пример, вводит с клавиатуры ответ. Если решение верное, то автоматически осуществляется переход к следующему примеру.

Если в решении есть ошибка, то компьютер возвращает ученика к этому же примеру. Обычно ученик 1–2 раза вводит неправильный ответ, а затем зовет учителя, который выясняет, где ошибка и помогает устранить ее. Примеры генерируются случайным образом. Поэтому ученики, занимающиеся на соседних компьютерах, работают с разными примерами.

Программа отслеживает допущенные ошибки и пишет свое заключение. Например, «Обрати внимание на выделение целой части».

В заключение выставляется оценка, которая фиксируется в общем списке.

Программа «Ассистент II»

(автор Ф Иваненко; http://theosoft.virtualave.net/)

Программа предназначена для проведения тестирования в двух режимах:

• контроль знаний (из всех доступных вопросов выбирается указанное вами количество);

• тренажер (программа задает все доступные вопросы).

При запуске программы можно выбрать следующие варианты работы:

– задавать вопросы последовательно или в случайном порядке;

– перемешивать варианты ответов на вопросы;

– ограничивать время ответа на один вопрос;

– ограничивать время ответа на все вопросы.

Программа сохраняет в специальном файле статистику работы. В режиме контроля выставляется оценка, в режиме тренажера можно получить сведения о количестве примеров, количестве правильно решенных примеров, сведения о времени работы. Вопросы можно записать, например, в текстовом редакторе БЛОКНОТ.

Подобных программ достаточно много в Интернете, например, в каталоге www.downloads.ru.

Программа «DIAMATH»

(авторы И. Зверев, С. Фомин)

Программа ориентирована специально на учителей математики. Имеет систему учителя и систему ученика. В системе учителя легко создавать как привычные тексты, тренажеры, так и целые уроки по любым темам. В программе заложены шаблоны с использованием математической символики, графиков, формул. Учитель легко может построить нужные ему графики, ввести формулы и т. п. Программа позволяет помещать сложные рисунки, надписи, формулы. Имеется множество готовых тренажеров, тестов и т. д. по различным темам.

Вся информация о работе ученика сохраняется в специальном файле. Фиксируется время работы, количество выполненных примеров, количество правильно выполненных примеров.

Программа очень проста в использовании и предоставляет широкие возможности учителю математики для создания уроков, так как ориентирована именно на этот предмет.

Координатная плоскость

1. Программа «КУМИР» (http://www.math.msu.su/InfoMir).

Раздел «»Координаты» этой программы целесообразно использовать на первом уроке по изучению координатной плоскости.

Знакомство с координатами начинается с шахматной доски. Программа задает и демонстрирует положение точки на доске и ее координату.

Дале происходит знакомство с декартовыми координатами в двух режимах: демонстрационном и обучающем. В демонстрационном режиме программа предлагает выбрать любую точку на координатной

плоскости, а в ответ демонстрирует ее координаты. Или предлагает ученику ввести координаты точки с клавиатуры, а в ответ строит эту точку на координатной плоскости.

Следующий этап – обучающий, который проводится в двух режимах. На экране нарисована точка на координатной плоскости. В соответствующем окне нужно ввести ее координаты. И наоборот, компьютер задает координаты, а ученик должен показать соответствующую точку на плоскости. Результаты работы фиксируются в соответствующем окне.

2. Программа «Рисуем по координатам» (автор О. Записных; http:// www.download.ru).

Хорошо известна игра «Рисуем по координатам». В Интернете появился ее электронный аналог. Программа нарисует изображение по введенным координатам или составит таблицу координат по нарисованному рисунку. Целесообразно использовать эту игру на заключительных уроках по теме «Координатная плоскость». Ученики заготавливают рисунки дома. Вводят координаты и получают картинку, которую можно распечатать и устроить конкурс рисунков.

Удобна эта программа и для учителя. С ее помощью можно заготовить множество различных карточек-заданий по соответствующей теме.

Графическое исследование функций

В настоящее время существует множество программ, позволяющих строить графики функций. Они дают иллюстрации важнейших понятий, связанных с функциями, на уровне, обеспечивающем качественные преимущества по сравнению с традиционными формами. Существенно повышается наглядность, активизируется познавательная деятельность учащихся. Появляется возможность оптимально сочетать практические и аналитические виды деятельности в соответствии с индивидуальными особенностями каждого ученика.

С помощью компьютера можно изучать традиционные объекты школьной математики в форме специфического экспериментального исследования. При этом:

– резко повышается интерес к работе, усиливается стремление добиться успеха;

– в определенной мере решается проблема «слабых учащихся» (освоение материала на эмпирическом уровне достигается и при слабой подготовке);

– формируется способность применять на практике полученные знания.

Основной формой проведения занятий является лабораторная работа.

Привете три примера таких программ.

1. FNGraph (автор А. Минза; www.fngraph.n3.net)

Основным недостатком программы является отсутствие методической поддержки и необходимость ввода формул по специальным правилам.

2. «ГРИФ» (АО «КУДИЦ», Москва; http://www.math.msu.su/InfoMir)

Программно-методический комплекс содержит:

– программный комплекс GRIF, предназначенный для построения и исследования функций;

– пособие для учителя;

– демонстрационную программу.

ГРИФ позволяет работать с алгебраическими выражениями в привычной для учащихся форме. Представляет инструментальную среду для работы с графиками функций.

Замечательно то, что комплекс включает в себя пособие для учителя, которое содержит основные методические идеи, лежащие в основе применения программы.

3. 3D Grapher (http://www.romanlab.com/rus/).

3D Grapher – простая в использовании, но мощная программа для построения графиков. Она позволяет создавать анимированные 2D и 3D графики уравнений и табличных данных. В одной системе координат может быть неограниченное количество графиков, каждый из которых может отображаться при помощи точек, линий и поверхностей.

Систему координат можно вращать, перемещать и масштабировать в реальном времени. Программа позволяет отслеживать и выводить координаты курсора на плоскости или в трехмерной системе координат. Использование графической библиотеки OpenGL позволяет создавать высококачественные изображения графиков.

Алгебра

1. Электронный учебник «Алгебра не для отличников» (http://www.avias.com).

Программа ориентирована на теорию поэтапного формирования умственных действий профессора П. Я. Гальперина, то есть имеет три основные части.

1. Ориентировка (теория вопроса).

2. Тренажер (обеспечивает деятельность ученика, при которой контролируется каждый его шаг),

3. Экзамен (ученик решает задания, проверяется лишь конечный результат).

Учебник состоит из восьми глав, каждая из которых имеет одну и ту же структуру:

– введение (учитель рассказывает краткое содержание главы);

– основные разделы главы (здесь помещается теоретический материал);

– задачи с примерами, подсказками, ответами;

– контрольная работа по материалам главы;

– видеоурок учителя.

Можно провести регистрацию ученика. В этом случае будет фиксироваться результат выполнения контрольных работ.

2. Программа «Алгебра» (автор А. Гутман; http://gutsoft.narod.ru).

Программа имеет:

– набор встроенных функций (по ним можно построить соответствующие графики);

– справочник по формулам (тригонометрия, логарифмы и производные);

– позволяет вычислить дискриминант и корни квадратного уравнения;

– калькулятор.

3. Алгебра v1.2 (http://www.vb-yan.nm.ru).

A1gebry v.1.2 – программа по математике, которая позволяет решать квадратные уравнения, биквадратные уравнения, системы уравнений, складывать (вычитать) дроби, вычислять корни любой степени и т. д.

Общий вид каждого уравнения показан в программе. Следует всего лишь ввести соответствующие коэффициенты и нажать кнопку.

Раздел «Простые вычисления» включает: возведение в степень, нахождение корня любой степени, сложение дробей. Чтобы провести простые вычисления, нужно ввести соответствующие коэффициенты и нажать кнопку «РЕШИТЬ». При сложении дробей программа выводит также целую часть дроби.

Использование этой программы может ускорить работу учителя. Необходимо заметить, что программ подобного типа в Интернете немало.

Все перечисленные программы объединяются общими методическими подходами. В их основе: опора на наглядность; активизация работы ученика; оптимизация сочетания практических и аналитических видов деятельности в соответствии с индивидуальными особенностями учеников.

Деятельность школьников можно построить в виде проектной деятельности, когда они самостоятельно добывают знания, пользуясь при этом прикладными программными средствами компьютера, например табличным редактором Microsof Exce1 [58].

Существует и ряд условий, которые необходимо учитывать при использовании метода проектов [85].

1. Учащимся следует предоставить достаточно широкий набор проектов для реализации возможности реального выбора.

2. Поскольку школьник не владеет проектным способом работы, он должен быть снабжен инструкцией по работе над проектом.

3. Для ребенка важна практическая значимость полученного им результата и оценка со стороны окружающих. Поэтому важно, чтобы завершенный проект был представлен и получил одобрение взрослых и сверстников.

4. Необходимо создать условия, при которых школьники имеют возможность обсуждать друг с другом свои успехи и неудачи. При этом происходит взаимообучение, что полезно как для обучаемого, так и для обучающего.

5. Метод проектов ориентируется главным образом на использование информационных технологий.

Укажем один из способов организации исследовательской деятельности учащихся на примере нахождения корней уравнения вида $x^n = z$ средствами обозначенного выше табличного редактора.

Обязательные этапы деятельности:

1. Мотивация деятельности.

2. Ознакомление с теоретическими положениями.

3. Построение математической модели решения задачи.

4. Выделение возможностей программного средства по решению конкретной задачи.

5. Программирование решения задачи или анализ заранее подготовленной программы.

6. Экспериментальная деятельность по выявлению математических закономерностей.

Задача. Решить уравнение вида $x^n = z$, где z – любое число. Изобразить корни уравнения.

Решение задачи предваряет знакомство школьников с комплексными числами и рассмотрение основной теоремы алгебры. Мотивационным моментом может стать просьба решить уравнение $x^3 = 1$ и обсуждение найденных корней. Ученики, решая уравнение на множестве действительных чисел, получат единственный корень, равный единице. Учитель может утверждать, что на множестве комплексных чисел ответ несколько другой, и в качестве аргумента привести корни $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

В ходе проверки подтверждается, что предложенные учителем корни действительно являются корнями рассматриваемого уравнения. Возникает вопрос, как находятся такие «экзотические корни» и есть ли какая-либо закономерность между ними? Можно обратить внимание учеников на знаки «+» и «–» между действительной и мнимой частями корня.

В теоретической части объясняется метод нахождения всех корней уравнения степени *n* на множестве комплексных чисел с акцентом на то, что решение уравнения базируется на основной теореме алгебры, что всякий многочлен *n*-й степени на множестве комплексных чисел имеет ровно *n* корней, если каждый кратный корень считать такое число раз, какова его кратность. Корни могут быть как действительными, так и комплексными числами и определяются по формуле

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Для программной реализации решения задачи на компьютере можно воспользоваться табличными редакторами. Предпочтение, из-за наглядности представления данных, должно остаться за табличными процессорами, в частности за наиболее популярным в России Microsoft Exce1.

Решение задачи целесообразно представить на двух листах. На первом приводятся исходные данные и результат, на втором – промежуточные вычисления. Так как для решения понадобится надстройка *Пакет анализа*, ее следует подключить подачей команд *Сервис, Надстройки* и установкой флажка напротив пункта *Пакет анализа*.

Начало программной реализации: на первом листе вводятся показатель степени и число, вычисляются $\sqrt[n]{r}$ и φ (рис. 60). Следует предусмотреть ввод *z* как в комплексной форме, так и в действительной.

Результат выполненных действий приведен на рис. 60.

Имя ячейки	*Содержимое ячейки*	*Примечание*
C1	"Решение уравнения вида $x^n = z$, где z – комплексное число"	
A4	"Степень"	
A5	"Число"	
A7	"$\sqrt[n]{r}$ = "	
A8	"φ = "	
B4	Вводится степень	Числа от 3 до 35
B5	Вводится число	
B7	=СТЕПЕНЬ(МНИМ. ABS(B5); 1/B4)	
B8	=МНИМ. АРГУМЕНТ(B5)	

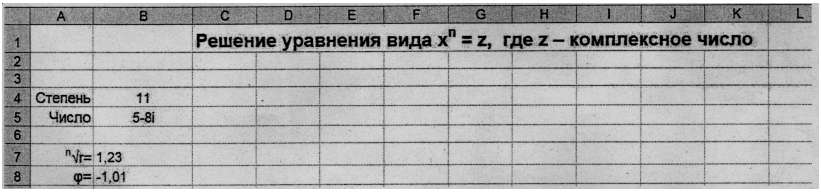
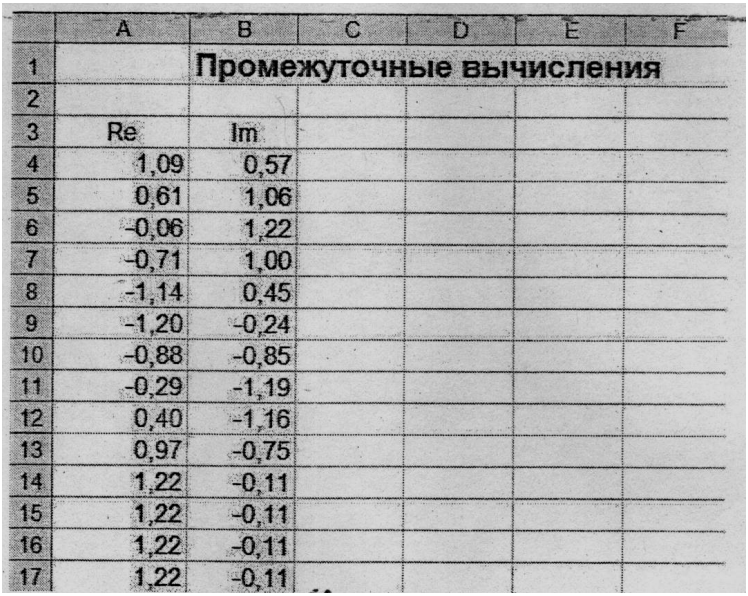


Рис. 60 Первый лист (начало программной реализации)

На втором листе (рис. 61) по формулам $\mathrm{Re}_k = \sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $Jm_k = \sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ определяется значение действительной и мнимой частей корня исходного уравнения.

Так как предполагается сделать решение универсальным, то количество корней берется с избытком, например 35. При этом необходимо ввести ограничения на «лишние» корни. Одним из способов их «отсечения» может стать дублирование последнего корня. Возможный результат выполненных действий приведен на рис. 61.

Имя ячейки	*Содержимое ячейки*	*Примечание*
B1	"Промежуточные вычисления"	
A3	"Re"	
B3	"Im"	
A4	=ЕСЛИ(Лист1!A11="«;"«;Лист1!$B$7*COS(Лист1!$B$8/Лист1!$B$4+2*ПИ()*Лист1!A11/Лист1!$B$4))	Вычисление действительной части корней уравнения
A5	=ЕСЛИ(Лист1!A12="«;A4:Лист1!$B$7*COS(Лист1!$B$8/Лист1!$B$4+2*ПИ()*Лист1!A12/Лист1!$B$4))	
A6:A38	"Протягивается» ячейка A5	
B4	=ЕСЛИ(Лист1!A11="«;"«;Лист1!$B$7*SIN(Лист1!$B$8/Лист1!$B$4+2*ПИ()*Лист1!A11/Лист1!$B$4))	Вычисление мнимой части корней уравнения
Bo	=ЕСЛИ(Лист1!A12="«;B4;Лист1!$B$7*SIN(Лист1!$B$8/Лист1!$B$4+2*ПИ()*Лист1!A12/Лист1!$B$4))	
B6:B38	"Протягивается» ячейка B5	



	A	B	C	D	E	F
1		Промежуточные вычисления				
2						
3	Re	Im				
4	1,09	0,57				
5	0,61	1,06				
6	-0,06	1,22				
7	-0,71	1,00				
8	-1,14	0,45				
9	-1,20	-0,24				
10	-0,88	-0,85				
11	-0,29	-1,19				
12	0,40	-1,16				
13	0,97	-0,75				
14	1,22	-0,11				
15	1,22	-0,11				
16	1,22	-0,11				
17	1,22	-0,11				

Рис. 61. Второй лист

На первом листе происходит нумерация корней, считывание действительной и мнимой частей корней уравнения со второго листа, компоновка из них самого корня, отбрасывание «лишних» корней.

Отметим особенности, связанные с компоновкой корня в виде $a + bi$:

1) при считывании действительных и мнимых частей корней уравнения со второго листа целесообразно округлить их до сотых;

2) при сцеплении корней должны быть учтены условия, связанные с визуализацией ответа (корень уравнения имеет вид $x_k = \mathrm{Re_k} + \mathrm{Im_k}$). Значения Re действительной части корня содержатся в ячейках C11–C45, а значения Im мнимой части корня – в ячейках D11–D45).

Экспериментальная работа с программой позволяет организовать исследовательскую деятельность школьников по нахождению некоторых математических закономерностей. Структурировать деятельность возможно следующей системой вопросов.

1. Изменяя значения числа z и показателя степени n, определите расположение корней уравнения на координатной плоскости. (Корни уравнения являются вершинами правильного n-угольника.)

2. Пусть z принимает действительные значения. Изменяя значения z и показателя степени n, определите, наблюдается ли симметричность расположения корней уравнения? [Да.]

3. Определите ось, относительно которой симметричны корни уравнения в этом случае. [Вещественная ось Re.]

4. Выясните, как проявляется данное свойство симметрии относительно оси Re расположения корней уравнения в зависимости от четности показателя степени n при условии, что z – действительное. [При четном n все корни симметричны, при нечетном – n-1 корней симметричны.]

5. Чем обусловлена данная особенность? [При четном n все корни уравнения попарно сопряженные числа, а при нечетном n один корень не будет иметь сопряженного.]

6. Выясните, существует ли закономерность в расположении корней уравнения на координатных осях в зависимости от знака числа z и четности показателя степени n?

7. Определите закономерность расположения корней уравнения $x^n = z$ при $z > 0$ на оси Re в зависимости от четности n. [В случае четного n два корня уравнения располагаются на оси Re, при нечетном n – один корень.]

8. На каком направлении оси Re располагаются корни уравнения в случае нечетного n? [На положительном направлении оси Re.]

9. Выявите закономерность расположения корней уравнения $x^n = z$ при $z < 0$ на отрицательном направлении оси Re в зависимости от четности n. [В случае нечетного n один корень уравнения располагается на отрицательном направлении оси Re.]

10. Наблюдаются ли закономерности, выявленные для уравнений вида $x^n = z$, где z – действительное число, также для уравнений вида $x^n = z$, где z – комплексное число? Рассмотрите все возможные варианты значений n, a и b.

Далее мы рассмотрим задачи: три практического характера и одну оптимизационного, решение которых мы приведем в среде EXCEL (табличный процессор) – это программный продукт, предназначенный для автоматизации обработки данных табличной формы.

Поиск решения – это надстройка Excel, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Если в меню *Сервис* отсутствует команда *Поиск решения*, значит, необходимо загрузить эту надстройку. Выберите команду *Сервис* $\Rightarrow$ *Надстройки* и активизируйте надстройку *Поиск решения*.

Задача 1. Расход топлива в зависимости от скорости движения автомобиля представляет собой квадратичную функцию $y = \frac{1}{1000}(x-30)^2 + 7$

на промежутке [10; 100]. Построить эту зависимость на данном промежутке с шагом Δ = 10.

В настоящее время известно множество программ по обработке числовых данных, к ним же относятся и табличные процессоры. Одним из таких процессоров является приложение MS Excel 95/97.

Решение

1. Составляем таблицу данных *x* и *y*. Для этого в ячейку A1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку B1 – слово *Парабола*. В ячейку A2 вводится первое значение аргумента – левая граница диапазона (10). В ячейку A3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (20). Затем автозаполнением получаем все значения аргумента (до ячейки A11). В ячейку B2 вводим уравнение: =1/1000*(A2–30)*(A2–30)+7. Затем автозаполнением копируем эту формулу в диапазон B2:B11.

2. Далее выбираем тип диаграммы – *График*, вид – *График с маркерами*.

3. Указание диапазона. Здесь наиболее важным для нас является указание диапазона прямой B2:B11, что подтверждает правильное введение интервала данных.

4. Ввод подписей по оси Ox (горизонтальной). В диалоговом окне *Мастер диаграмм* необходимо выбрать вкладку *Ряд* и в поле *Подписи* оси Ox указать диапазон подписей (в примере *Аргумент*) A2:A11.

5. Введение заголовков. В следующем окне необходимо указать:

Ось Ox – скорость движения, км/ч;

Ось Oy – расход топлива, л.

6. Выбор размещения.

7. Завершение. Нажимаем кнопку «*Готово*» и на текущем листе должна появиться следующая диаграмма (рис. 62).



Рис. 62. Расход топлива в зависимости от скорости движения автомобиля

Аналогичным образом можно построить любой график функции и получить любое изображение кривых.

А если мы можем строить графики функций, то с их помощью мы можем решать любые системы уравнений графически.

Задача 2. Влияние кислотности на скорость коррозии железа изменяется по закону $y = \frac{(x-7)^2}{2} + 0{,}003$, а на скорость коррозии молибдена – по закону $y = \frac{x}{2}$. При каком уровне кислотности скорость коррозии будет одинаковой?

Решение

1. Для решения данной задачи необходимо решить систему

$$\begin{cases} y = -\frac{(x-12)^2}{100} + 3{,}003, \\ y = \frac{x}{0{,}6}. \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений графически.

2. Для построения графиков данных функций прежде всего необходимо ввести данные в рабочую таблицу. Вводим в ячейку A1 слово *Аргумент*. Затем в ячейку A2 – первое значение аргумента 0. Далее будем вводить приращения аргумента с шагом 1. Введем в ячейку A3 сумму левой границы диапазона плюс шаг 1. Затем, выделив блок ячеек A2:A3, автозаполнением получаем все значения аргумента (до ячейки A15).

3. Далее требуется ввести значение функции (в примере $y = -\frac{(x-12)^2}{100} + 3{,}003$). В ячейку B1 вводим слово *Функция* 1 и устанавливаем табличный курсор в ячейку B2. Здесь должно оказаться значение функции, соответствующее значению аргумента в ячейке A2. Далее автозаполнением получаем все остальные значения функции.

4. Аналогично получаем значения для второй функции.

5. Далее строим *графики* аналогично графику в предыдущей задаче (рис. 63).

6. Как видно из построенном диаграммы, система имеет решение (есть точка пересечения), и оно единственное (в заданном диапазоне имеется только одна точка пересечения): $x \approx 5{,}9$ и $y \approx 6{,}433$.

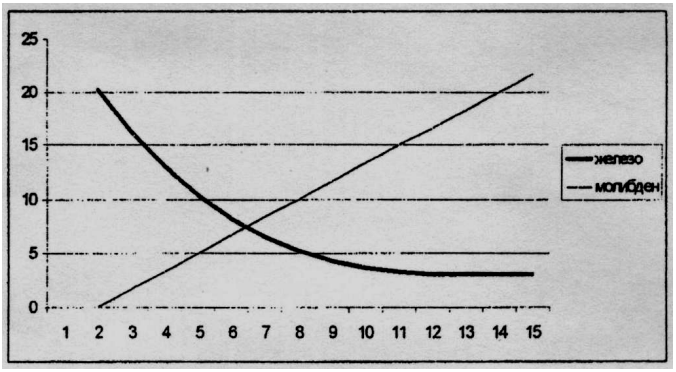


Рис. 63. Влияние кислотности на скорость коррозии

Рассмотрим решение следующего задания в Excel 95/97.

Задача 3. В таблице 3 представлены составы электролитов родирования.

Таблица 3

Составы электролитов родирования

Компоненты электролита и режим	*№ электролита*		
	1	*2*	*3*
$[Rh(H_2O_6I_2(SO_4)_3]$	6	18	20
H_2SO_4	160	92	190
H_2SeO_4	0	2	4
T, ^0C	15	20	40

Подобрать раствор электролита при средней температуре перемешивания.

Решение

Для решения задачи решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x + 48y = 5, \\ 20x + 120y + 2z = 20, \\ 20x + 160y + 4z = 40. \end{cases}$$

1. Введите матрицу А в диапазон A1:C3 $A = \begin{pmatrix} 4 & 48 & 0 \\ 20 & 120 & 2 \\ 20 & 160 & 4 \end{pmatrix}$.

Матрицу B = (15 20 40) введите в диапазон D1:D3.

2. Найдите обратную матрицу A^{-1}. Для этого:

– выделите блок ячеек под обратную матрицу. Например, выделите блок A4:C6;

– нажмите на панели инструментов *Стандартная кнопка «Вставка функции»;*

– в появившемся диалоговом окне *Мастер функций* в рабочем поле *Категория* выберите пункт *Математические*, а в рабочем поле *Функция* – имя функции МОБР. Щелкните на кнопке ОК;

– появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы и введите диапазон исходной матрицы A1:C3 в рабочее поле *Массив*. Нажмите сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter;

– если обратная матрица не появилась в диапазоне A4:C6, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие Ctrl+Shift+Enter.

В результате в диапазоне A4:C6 появится обратная матрица.

3. Умножением обратной матрицы A^{-1} на вектор B найдите вектор X. Для этого:

– выделите блок ячеек под результирующую матрицу (под вектор X). Ее размерность будет $m \times p$, в данном случае 3×1. Например, выделите блок ячеек D4:D6;

– нажмите на панели инструментов *Стандартная кнопка «Вставка функции»;*

– в появившемся диалоговом окне *Мастер функций* в рабочем поле *Категория* выберите пункт *Математические*, а в рабочем поле *Функция* – имя функции МУМНОЖ. Щелкните на кнопке ОК;

– появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц и введите диапазон обратной матрицы A^{-1} – D1:D3 в рабочее поле массив 2.

После этого нажмите сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter;

– если вектор X не появился в диапазоне D4:D6, следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие Ctrl+Shift+Enter.

В результате в диапазоне D4:D6 появится вектор X (рис. 64).

6	160	0	15
18	92	2	20
20	190	4	40
0,002311	0,123267	-0,06163	0,034669
0,006163	-0,00462	0,002311	0,09245
-0,30431	-0,39676	0,448382	5,435285

Рис. 64 Содержимое ячеек A1:D6 (к примеру)

Задача 4. Некоторая фирма занимается выпуском сотовых телефонов и аксессуаров к ним (зарядных устройств, футляров и наушников). Для их производства требуется четыре различных вида сырья (пластик, микросхемы, кожа, стекло). Это сырье ограничено и составляет в планируемый период соответственно 21, 11, 7, 3 условных единиц. Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые показывают, сколько единиц i-го вида сырья требуется для производства j-го вида изделий ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$).

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть прибыль, получаемая фирмой при реализации единицы изделия j-го вида, равна 90, 12, 8, 3 условным единицам соответственно. Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль от реализации ее была бы наибольшей [64] (задача рассматривалась моим бывшим аспирантом, а ныне кандидатом педагогических наук П. В. Кийко).

Решение

Экономико-математическая модель задачи. Пусть объем производства телефонов – x_1, зарядных устройств – x_2, футляров – x_3, наушников – x_4. С учетом этих обозначений математическая модель задачи имеет вид: $f(x) = 90x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 3x_4 \to \max$.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 21 & \text{(ограничение по пластику);} \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \le 11 & \text{(ограничение по микросхемам);} \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 7 & \text{(ограничение по коже);} \\ x_1 \le 3 & \text{(ограничение по стеклу);} \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4. & \end{cases}$$

Решение

1. Указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки).

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 объем производства телефонов, зарядных устройств, футляров и наушников соответственно. В нашей задаче оптимальные значения вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ будут помещены в ячейках A2:D2, оптимальное значение целевой функции – в ячейке E3.

2. Ввести исходные данные.

Введем исходные данные задачи, как показано на рис. 65.

	A	B	C	D	E	F
1	x1	x2	x3	x4		
2						
3	90	12	8	3		
4	2	1	1	1		21
5	3	2	0	1		11
6	1	0	2	1		7
7	1	0	0	0		3

Рис. 65. Введены исходные данные

3. Ввести зависимость для целевой функции.

Поместим курсор в ячейку E3, произойдет выделение ячейки.

Поместим курсор на кнопку *Мастер функций*, расположенную на панели инструментов.

Введем Enter. На экране появится диалоговое окно *Мастер функций* шаг 1 из 2.

В окне *Категория* выберем категорию *Математические*.

В окне функции выберем строку СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно СУММПРОИЗВ.

В строку Массив 1 введем A2:D2.

В строку Массив 2 введем A3:D3.

Массив 1 будет использоваться при вводе зависимостей для ограничений, поэтому на этот массив надо сделать абсолютную ссылку (если перед буквой или номером стоит знак доллара, например $A$1, то ссылка на столбец или строку является абсолютной). На рис. 66 показано, что в ячейку E3 введена функция.

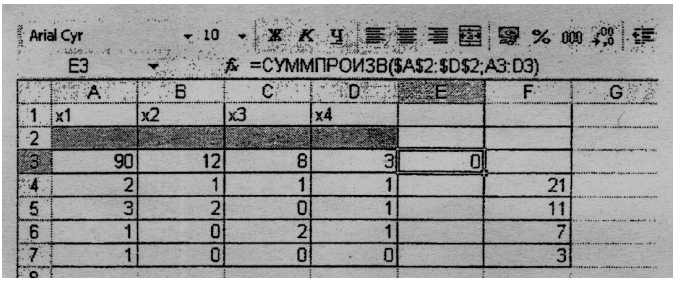


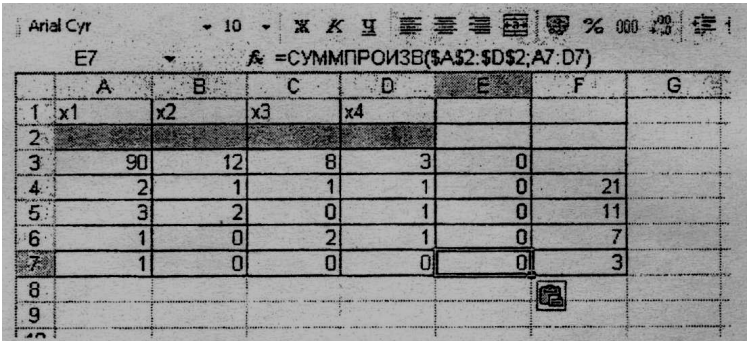
Рис. 66 Введена зависимость для целевой функции

4. Ввести зависимости для ограничений (рис. 67).

Поместим курсор в ячейку E3.

На панели инструментов нажмем кнопку *Копировать в буфер*.

Поместим курсор в ячейку E4.



	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	x2	x3	x4			
2							
3	90	12	8	3	0		
4	2	1	1	1	0	21	
5	3	2	0	1	0	11	
6	1	0	2	1	0	7	
7	1	0	0	0	0	3	
8							
9							

Рис. 67 Введены зависимости для всех ограничений

На панели инструментов нажмем кнопку *Вставить из буфера*.

Поместим курсор в ячейку E5.

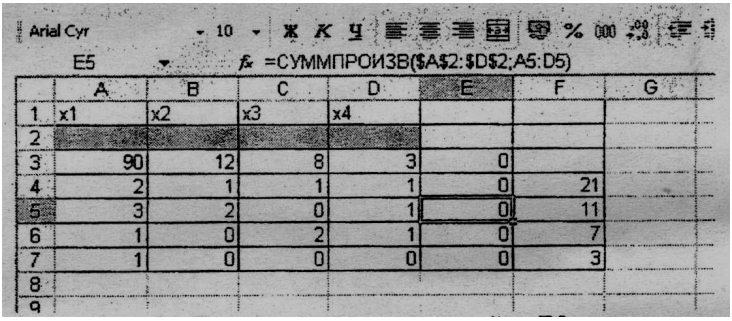
На панели инструментов нажмем кнопку *Вставить из буфера*.

Поместим курсор в ячейку E6.

На панели инструментов нажмем кнопку *Вставить из буфера*.

Поместим курсор в ячейку E7.

На панели инструментов нажмем кнопку *Вставить из буфера*. (Содержимое ячеек E4-E7 необходимо проверить. Они обязательно должны содержать информацию, как это показано для примера на рис. 68; в качестве примера представлено содержимое ячейки E5.)



	A	B	C	D	E	F	G
1	x1	x2	x3	x4			
2							
3	90	12	8	3	0		
4	2	1	1	1	0	21	
5	3	2	0	1	0	11	
6	1	0	2	1	0	7	
7	1	0	0	0	0	3	
8							
9							

Рис. 68 Проверка содержимого ячейки E5

В строке *Меню* указатель мышки поместим на *Сервис*. В развернутом меню выберем команду *Поиск решения*. Появляется диалоговое окно *Поиск решения*.

5. Запустить команду *Поиск решения*.

6. Назначить ячейку для целевой функции (установить целевую ячейку), указать адреса изменяемых ячеек.

Поместим курсор в строку *Установить целевую ячейку*. Введем адрес ячейки $E$3.

Введем тип целевой функции в зависимости от условий нашей задачи. Для этого отметим, чему равна целевая функция – Максимальному значению или Минимальному значению.

Поместим курсор в строку *Изменяя ячейки*.

Введем адреса искомых переменных $A$2:$B$2.

7. Ввести ограничения.

Поместим указатель мышки на кнопку *Добавить*. Появляется диалоговое окно *Добавление ограничения*.

В строке *Ссылка* на ячейку ввести адрес $E$4.

Ввести знак ограничения.

В строке *Ограничение* ввести адрес $F$4.

Поместим указатель мышки на кнопку *Добавить*. На экране вновь появится диалоговое окно *Добавление ограничения*.

Введем остальные ограничения задачи по вышеописанному алгоритму.

После введения последнего ограничения нажать на кнопку ОК. На экране появится диалоговое окно *Поиск решения* с введенными условиями.

8. Ввести параметры для решения задачи линейного программирования.

В диалоговом окне поместим указатель мышки на кнопку *Параметры*. На экране появится диалоговое окно *Параметры поиска решения*.

19. Ввод параметров.

Установим флажки в окнах *Линейная модель* (это обеспечит применение симплекс-метода) и *Неотрицательные значения*.

Поместим указатель мышки на кнопку *Выполнить*.

Через некоторое время появятся диалоговое окно *Результаты поиска* решения и исходная таблица с заполненными ячейками A3:D3 для значений x_i, и ячейка E3 с максимальным значением целевой функции.

Если указать тип отчета *Устойчивость*, то можно получить дополнительную информацию об оптимальном решении.

В заключение параграфа остановимся на материале темы «Дифференциальные уравнения», который можно использовать в работе со старшеклассниками на элективных курсах. Причем обучение этой теме будет идти с применением информационных технологий.

Приведем фрагмент лабораторного занятия по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка» (Материал разрабатывался и апробировался моей аспиранткой Т. И. Федотовой [118], ныне защитившей кандидатскую диссертацию).

На первом этапе следует формировать положительное отношение к изучаемому материалу, побуждающее учащихся к деятельности по его изучению. Приведем доводы необходимости изучения планируемого учебного материала:

1. Дифференциальные уравнения являются аппаратом, с помощью которого мы можем изучать процессы, протекающие в природе. Например, процессы радиоактивного распада, поглощения света при прохождении через некоторую среду, движение тела в сопротивляющейся среде и многие другие сводятся к одному и тому же уравнению $y' = kxy$. Оно показывает, что во всех этих вопросах мгновенная скорость изменения некоторой величины пропорциональна значению этой величины в данный момент времени.

2. Использование языка дифференциальных уравнений позволяет точно предсказывать течение событий. Так, уравнения небесной механики дают возможность предсказывать поведение небесных тел, уравнения квантовой механики – течение событий в микромире. Математически сформулированная теория открывает широкие возможности для предсказания новых, до сих пор неизвестных явлений. Классическими примерами являются: открытие Леверье Нептуна, предсказание Максвеллом электромагнитного поля, Дираком – позитрона, Юкавой – пимезона.

Изучение дифференциальных уравнений целесообразно начинать с проблемы, предложенной в виде профессионально ориентированной задачи, приводящей к дифференциальному уравнению.

Задача 1. Пусть тело (например, металлическая пластина), нагретое до температуры y_0 в момент времени $t = 0$, погружается в очень большой сосуд с воздухом нулевой температуры. Очевидно, что тело начнет охлаждаться и его температура будет зависеть от времени, то есть будет являться функцией от времени t. Обозначим ее $y(t)$.

Опираясь на закон охлаждения Ньютона, учащиеся приходят к выводу, что скорость изменения температуры тела, то есть производная $y'(t)$ (или $\frac{dy}{dt}$), пропорциональна разности температуры тела

и окружающей среды, в данном случае пропорциональна *y(t)*. В каждый момент времени справедливо соотношение $\frac{dy}{dt} = -ky$, где k – положительный коэффициент, зависящий от материала тела; знак «–» потому, что температура убывает.

Равенство $\frac{dy}{dt} = -ky$, представляющее собой дифференциальное уравнение является математической записью закона (математической моделью) охлаждения, которое выражает зависимость между функцией (температурой) и ее производной в один и тот же момент времени.

Решив приведенное выше уравнение, учащиеся получат общее решение, которое задается формулой $y = C \cdot e^{-kt}$ (где C – произвольная постоянная).

После этого на лабораторном занятии учащимся следует предложить разобраться в основных понятиях: частное решение, особое решение, общий интеграл, частный интеграл.

На предложенном примере учащиеся убеждаются в том, что чисто практическая задача описывается новым для них понятием – дифференциальным уравнением.

Далее обучающимся надо сообщить алгоритм решения профессионально ориентированных задач с применением теории обыкновенных дифференциальных уравнений, который сводится к следующему:

1. Подробный разбор условий задачи и составление чертежа, поясняющего ее суть.

2. Составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса.

3. Интегрирование составленного дифференциального уравнения и определение общего решения этого уравнения.

4. Определение частного решения задачи на основании данных начальных условий.

5. Определение, по мере необходимости, вспомогательных параметров (например, коэффициента пропорциональности и др.), используя для этой цели дополнительные условия задачи.

6. Вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение искомых величин.

7. Анализ ответа и проверка исходного положения задачи.

После этого стоит обратить внимание на то, что процесс формулирования задачи, построения математической модели заданной реальной ситуации, то есть составления дифференциального уравнения

из условий геометрической, физической или иной фабулы задачи, подразделяются на две группы, в зависимости от типа модели. А именно:

а) когда модель представляет собой уравнение в производных;

б) когда модель представляет собой уравнение в дифференциалах.

Затем учащиеся на задачах 2 и 3 рассматривают по порядку процесс построения модели каждого из указанных типов: и получают следующие решения.

Задача 2. Трубопровод тепловой магистрали радиуса R_1 защищен изоляцией. Радиус изолированной трубы равен R_2, температура трубы T_1, температура внешнего покрова T_2 ($T_2 < T_1$), коэффициент теплопроводности изоляционного материала λ. Найти распределение температуры внутри изоляции, а также количество теплоты, отдаваемое 1 погонным метром трубы.

Решение

Выберем цилиндрическую систему координат, как показано на рис. 69. Труба, а значит, и изоляция трубы находятся в стационарном тепловом состоянии. При этом температура T в каждой точке изоляции является функцией только одной координаты r ($T = f(r)$).

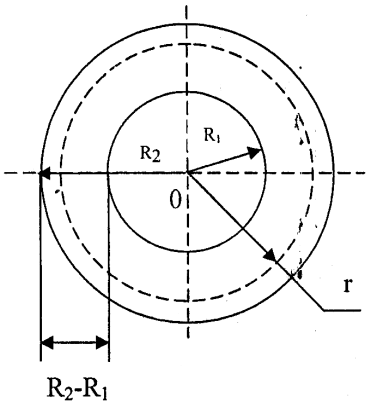


Рис. 69

Согласно закону теплопроводности Фурье, количество теплоты, испускаемое трубопроводом в секунду, равно

$$Q = -\lambda S(r)\frac{dT}{dr} = const,$$

где $S(r) = 2\pi rl$ – площадь сечения трубопровода на расстоянии r (l – длина трубы).

Подставляя вместо $S(r)$ его значение в выражение для Q и разделяя переменные, получим уравнение

$$dT = -\frac{Q}{2\pi l\lambda}\cdot\frac{dr}{r},$$

интегрируя которое, будем иметь

$$T = -\frac{Q}{2\pi l\lambda}\ln|r| + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия $T = T_1$ при $r = R_1$. Имеем $C = T_1 + \frac{Q}{2\pi l\lambda}\ln R_1$. При этом

$$T = T_1 - \frac{Q}{2\pi l\lambda}\ln\frac{r}{R_1}.$$

Коэффициент $\frac{Q}{2\pi l\lambda}$ найдем из условия $T = T_2$ при $r = R_2$. Имеем

$$\frac{Q}{2\pi l\lambda} = \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

Формула для T преобразуется к виду

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\ln\frac{r}{R_1}.$$

Полученная формула и выражает закон распределения температуры внутри изоляции. Используя эту формулу, найдем количество теплоты, отдаваемое трубопроводом в секунду:

$$Q\big|_{r=R_2} = \frac{2\pi l\lambda(T_1 - T_2)}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

Например, если радиус трубы $R_1 = 0{,}1$ м, толщина изоляции 0,2 м ($R_2 = 0{,}2$ м), температура трубы $T_1 = 180°$, температура внешнего покрова $T_2 = 10°$, коэффициент теплопроводности изоляционного материала $\lambda = 0{,}05$ Вт/(м · К), то один погонный метр трубопровода ($l = 1$) отдает в секунду количество теплоты Q ≈ 11 Дж. Количество теплоты, отдаваемое одним погонным метром трубопровода в течение суток, составляет примерно 6653 кДж.

Задача 3. В круглой трубе диаметра D течет теплая жидкость с постоянной скоростью. Найти закон изменения температуры вдоль трубы при установившемся процессе, если температура жидкости в начале трубы равна $T_н$, температура окружающего воздуха T_0, количество весовых единиц жидкости, протекающей через трубу в единицу времени, равно P.

Решение

Согласно закону Ньютона, количество теплоты, передаваемое от более нагретого тела к менее нагретому, определяется соотношением

$$Q = \mu(T_2 - T_1)St \qquad (T_2 > T_1),$$

где μ – коэффициент теплопроводности между этими телами, S – площадь поверхности соприкосновения тел, t – время.

Рассмотрим теплопередачу за единицу времени на участке трубы длины dx. За это время в рассматриваемый отрезок трубы войдет P весовых единиц жидкости с температурой T и выйдет столько же жидкости с температурой $T + dT$. Следовательно, внутри отрезка останется $PcdT$ (Дж). Здесь c – удельная теплоемкость жидкости, отнесенная к единице веса.

Поскольку по условию тепловой процесс внутри трубы установился, то есть температура жидкости на рассматриваемом отрезке не меняется с течением времени, то такое же количество теплоты этот отрезок трубы должен передать окружающему воздуху. Но по закону Ньютона это количество теплоты равно

$$\mu(T - T_0)\pi D dt,$$

где T – температура жидкости на рассматриваемом отрезке.

Таким образом, должно выполняться условие

$$\mu(T - T_0)\pi D dx = -PcdT$$

Полученное равенство является дифференциальным уравнением, описывающего процесс, указанный в задаче.

Разделяя переменные и интегрируя, найдем общий интеграл уравнения:

$$\ln|T - T_0| = -\frac{Pc}{\mu\pi D}x + C_1$$

Используя начальное условие $T = T_н$ при $x = 0$ (условие в начале трубы), найдем значение постоянной интегрирования C_1:

$$C_1 = \ln|T_н - T_0|$$

Подставляя значение C_1 в общий интеграл уравнения, получим

$$\ln\left|\frac{T-T_0}{T_н-T_0}\right| = -\frac{Pc}{\mu\pi D}x$$

откуда

$$T - T_0 = (T_н - T_0)\exp\left(-\frac{Pc}{\mu\pi D}x\right)$$

Таким образом, изменение температуры вдоль трубы происходит по экспоненциальному закону.

Компьютерная система MATLAB, позиционируемая на рынке программных продуктов как среда для проведения технических расчетов, допускает решение дифференциальных уравнений не менее чем пятью разными интерфейсами, в каждом из которых может быть использован один из более десятка различных методов. Структурная динамичность MATLAB, допускающая множественность однородных вычислительных процессов и тем самым предоставляющая возможность альтернативного решения задач, делает эту программу наиболее совершенной обучающей математической средой. Достигается это за счет:

- многообразия форм обращения к выбранным высокоуровневым библиотечным программам;
- наличия, как правило, нескольких библиотечных программ для реализации однородных, но параметрически различающихся вычислений;
- возможности создания пользовательских программ и пользовательской переработки или доработки библиотечных программ.

Для проведения вычислительного эксперимента MATLAB располагает широким набором средств, к которым относятся:

- техника работ с числовыми или символьными переменными;
- техника визуального моделирования вычислительных процессов;
- большое число специализированных приложений;
- коды библиотечных программ;
- файлы помощи и демонстрационные примеры, беспрецедентные по объему и качеству содержания.

Рассмотрим пример решения профессионально ориентированной задачи с помощью программного средства MATLAB тремя интерфейсами: M-файл, Simulink, SimMechanis, который можно предложить учащимся.

Задача 4. Груз массой m подвешен на невесомой пружине длиной l_0 с жесткостью c. Состоянию покоя соответствует растяжение пружины на величину $\sigma_{ст}$. Определить закон движения груза при его осво-

бождении после отклонения от положения статического равновесия на величину σ.

Для решения этой задачи с помощь программного средства MATLAB учащиеся должны построить ее математическую модель, рассуждая следующим образом: в состоянии статического равновесия на точку действует сила веса P и упругая сила Q пружины, которая растянута на величину $\sigma_{ст}$ (рис. 70). Выполняется условие равновесия: P = Q, где P = mg, Q = $c\sigma_{ст}$.

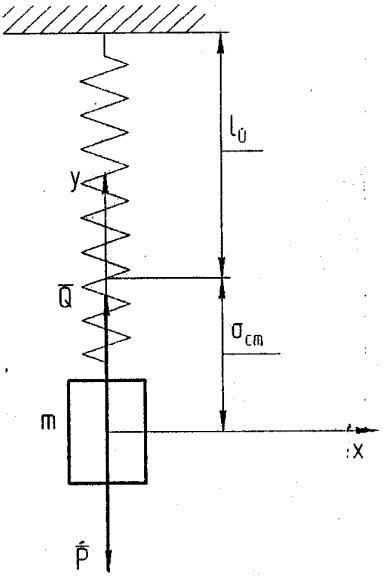


Рис. 70. Расчетная схема

Введя систему координат *xOy* с началом в точке статического равновесия, учащиеся получат, что в процессе движения в некоторый произвольный момент времени, определяемый координатой y, на груз действуют две силы: сила тяжести P = mg = $c\sigma_{ст}$ и сила натяжения пружины, определяемая в зависимости от ее удлинения функцией Q = $c(\sigma_{ст} + y)$, и запишут дифференциальное уравнение движения груза вдоль оси y, которое описывает гармонические колебания груза.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P + Q = -c\left(y + \sigma_{cm}\right) + \sigma_{cm} = -cy$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2 y = 0 \quad \left(k^2 = \frac{c}{m}\right).$$

Получив общее решение этого уравнения:

$$y = A\,sin(kt + \quad),$$

где A = σ – амплитуда колебаний, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – начальная фаза, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – круговая (собственная) частота, период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{c}{m}}$, учащиеся решают эту задачу с помощью системы MATLAB, задавая для численного решения m = 10 кг, с = 100 Н/м.

Решение задачи с помощью М-файла

Учащимся следует сообщить, что для решения задачи Коши в MATLAB существует семь солверов: ode45, ode23, ode113, ode15c, ode23s, ode23t и ode23tb. Методика их использования одинакова, включая способы задания входных и выходных аргументов. В общем случае вызов солвера для решения задачи Коши происходит следующим образом:

[T, У] = solver(odefun, interval, YO, options),

где odefun – функция для вычисления вектор-функции правой части системы уравнений, interval – массив из двух чисел, задающих промежуток для решения уравнения, Y0 – заданный вектор начальных значений искомой вектор-функции, options – структура для управления параметрами и ходом вычислительного процесса. Солвер возвращает массив T с координатами узлов сетки, в которых найдено решение, и матрицу решений Y, каждый столбец которой является значением компоненты вектор-функции решения в узлах сетки.

Задача Коши для дифференциального уравнения состоит в нахождении функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению произвольного порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

и начальным условиям при $t = t_0$

$$y(t_0) = u_0, y'(t_0) = u_1, ..., y^{(n-1)}(t_0) = u_{(n-1)}.$$

Схема решения таких задач в MATLAB состоит из нескольких этапов:

1. Приведение дифференциального уравнения к системе дифференциальных уравнений первого порядка (если изначально задана система, то в этом нет необходимости).

2. Написание специальной функции для системы уравнений.

3. Вызов подходящего солвера.

4. Визуализация результатов.

Перемещение точки в среде описывается уравнением:

$$y'' + k^2 y = 0.$$

Предполагая, что координата точки в начальный момент равна – 0,1 м, а скорость – 0 м/с, учащиеся запишут соответствующие начальные условия в виде:

$$y(0) = -0{,}1;\ y'(0) = 0.$$

Затем учащиеся приведут задачу к системе дифференциальных уравнений, вводя столько вспомогательных функций, каков порядок уравнения ($y_1 = y,\ y_2 = y'$) и получат следующую систему дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -k^2 y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -10\,y. \end{cases} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее учащиеся записывают функцию для системы дифференциальных уравнений, которая имеет два входных аргумента: переменную t, по которой проводится дифференцирование, и вектор, размер которого равен числу неизвестных функций системы, учитывая, что число и порядок аргументов фиксированы, даже если t явно не входит в систему, а выходным аргументом функции является вектор правой части системы. Текст функции prav, который получат учащиеся приведен ниже в листинге.

Листинг 1. Файл-функция solv_01 для решения дифференциального уравнения y'' = – 10 y, y(0) = – 0.1, y'(0) = 0.

```
function solv_01

%формирование вектора начальных условий
Y0=[-0.1;0];
%вызов солвера от функции prav, начального и конечного момента
%времени и вектора начальных условий
[T,Y]=ode45(@prav,[0 10],Y0);
%вывод графика решения исходного дифференциального уравнения
plot(T,Y(:,1))
%вывод пояснений на график
title('Решение дифференциального уравнения y^{"}= -10 y','FontName','Arial Unicode MS')
xlabel('Время, сек', 'FontName','Arial Unicode MS')
ylabel('Амплитуда, м', 'FontName','Arial Unicode MS')
grid on

%подфункция вычисления правых частей уравнения
function F = prav(t,y)
F=[y(2);-10*y(1)+0*t];
```

Так как размеры матрицы и вектора достаточно велики, то учащимся следует отобразить результаты на графике (рис. 71).

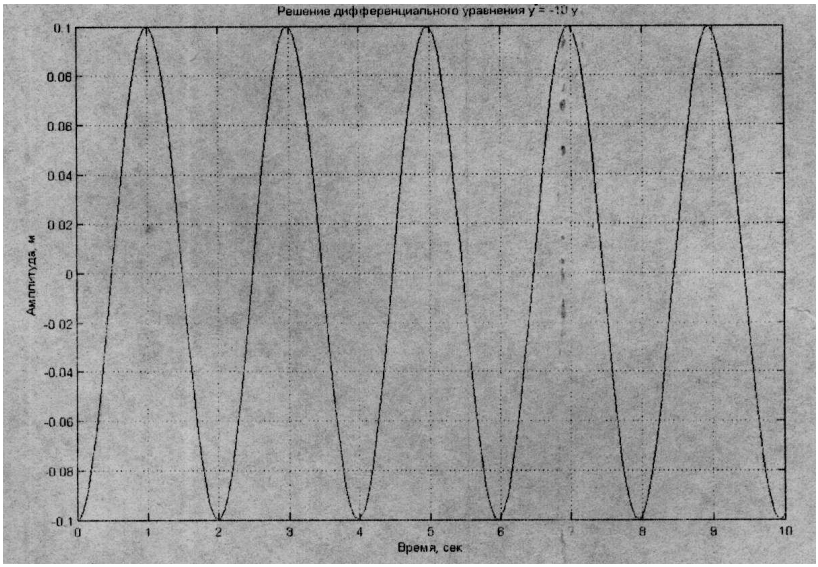


Рис. 71. Решение уравнения с помощью функции solv_01.

После решения задачи в М-файле, учащиеся приступают к решению этой же задачи в Simulink.

Решение задачи в Simulink

На рис. 72 показана схема, которую получают учащиеся для решения уравнения вида $y = ay' + b$, в модели которой использовалось интегрирование сигнала с помощью блоков Integrator; стандартные блоки Simulink и соединительные линии подписываются в соответствии с сигналом, проходящим по ним. Начальные условия для интегрирования учащиеся задают в диалоге Block Parameters блоков Integrator в строке Initial Condition; в блоке k1 задается параметр y(0); в блоке k2 – $y'(0)$; в блоке b указывается коэффициент, стоящий перед y: Gian = –10; в блоке a – коэффициент, стоящий перед y': Gian = 0.

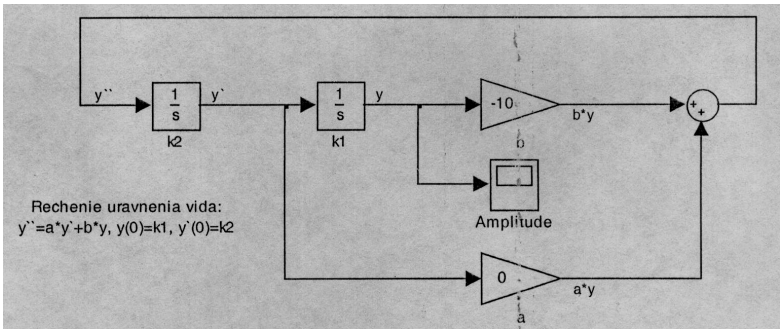


Рис. 72. Схема в Sumilink

Результат моделирования, полученный учащимися, показан на рис. 73.

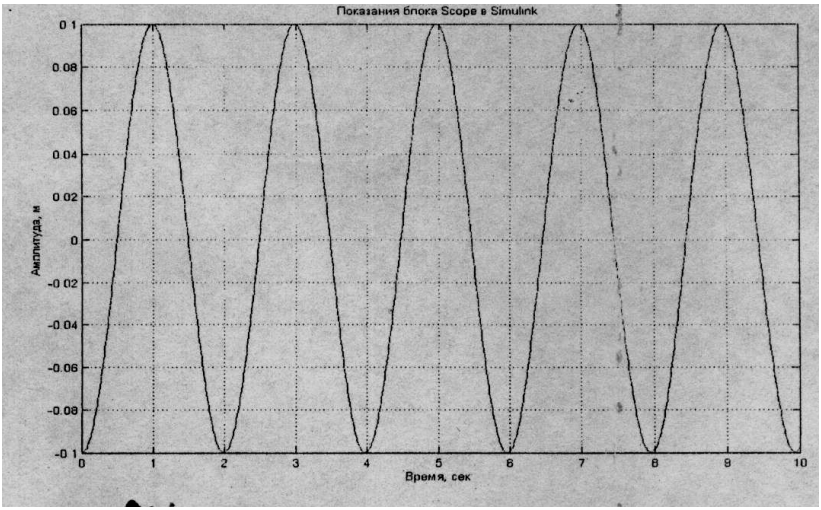


Рис. 73. Решение уравнения в Sumilink

Решение в SimMechanics

Учащимся следует предложить рассмотреть решение задачи в SimMechanics. Преимущество такого решения заключается в том, что для решения задачи необходимо создать модель физической системы и система SimMechanics сама составит дифференциальные уравнения и решит их.

На рис. 74 показана схема модели в SimMechanics, которую получат учащиеся при решении задачи. Она состоит из блоков библиотеки SimMechanics и стандартных блоков Sumilink. Блоки, используемые в модели, учащиеся должны настраивать следующим образом.

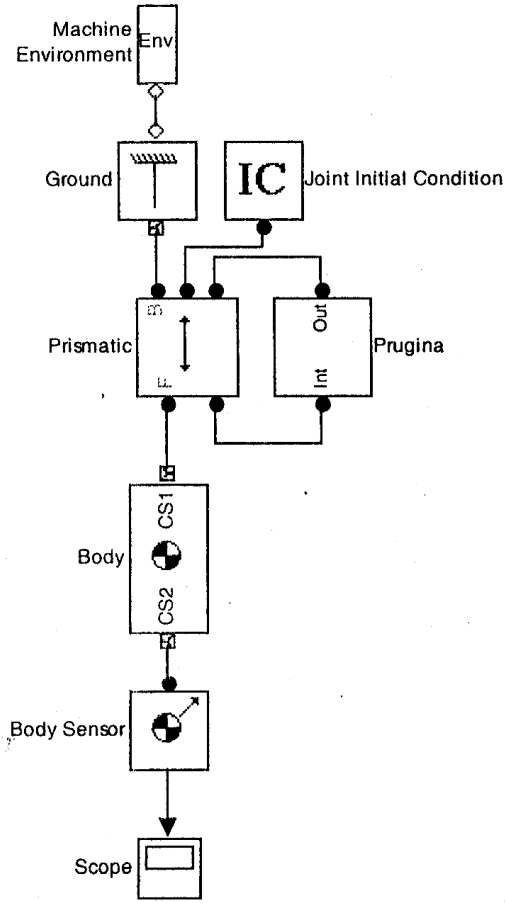


Рис. 74 Схема в SimMechanics

С помощью блока Machine Environment убрана сила тяжести, действующая на модель, так как начало координат расположено в точке равновесия и движение груза не зависит от этой силы. Для устране-

ния действия силы тяжести в настройках блока Machine Environment во вкладке Parameters задается вектор Gravity vector – [0 0 0].

Блок Ground осуществляет привязку модели к глобальной системе координат. В настройках блока указываются координаты центра глобальной системы координат – [0 0 0].

Блок Prismatic задает одну степень свободы груза m – перемещение по оси Oy. Для этого в окне настройки блока в столбце Axis of translation задается вектор [0 1 0].

Блок Body моделирует твердое тело, представляющее, в нашем случае, сосредоточенную массу. Так как геометрические характеристики тела в задаче не имеют значения, то координаты центра масс и характерных точек оставляются по умолчанию равными [0 0 0]. Также задается масса тела, для этого в строке Mass вводится необходимая величина – 10 кг. Инерционные характеристики тела в задаче не учитывались, поэтому поле Intertia оставляется без изменении.

Блок Body Sensor служит для регистрирования перемещений груза. Для этого в окне настройки блока ставится галочка напротив Position и выбирают единицы измерения, в которых отображаются координаты груза.

Блок Scope служит для вывода графика перемещения груза.

Блок Joint Initial Condition служит для задания начальных условий. С его помощью задаются начальная координата и начальная скорость груза. В рассматриваемой задаче начальная координата Position – (–0,1м), а начальная скорость Velocity – 0 м/сек.

Подсистема Prugina состоит из стандартных блоков Simulink и моделирует элемент Фохта. В подсистеме задается жесткость пружины c = 100 Н/м, коэффициент вязкого трения b = 0 и равновесное состояние, при котором не действуют силы упругости, $a = 0$ м.

При запуске система SimMechanics автоматически преобразовывает структурное изображение во внутреннюю эквивалентную математическую модель и решает ее. Присоединяя блоки Sensor к интересующим элементам и указывая параметры, которые необходимо узнать, учащиеся получают график изменения параметра по времени. На данном этапе обучающиеся управляют процессом решения, выбирая солвер: ode45, ode23; ode113, ode15c, ode23s, ode23t или ode23tb.

На рис. 75 показан результат моделирования, полученный учащимися при помощи солвера ode45.

Высокоуровневые программы, такие как MATLAB, не подменяют аналитический аппарат математики, а дополняют его. MATLAB значительно сокращает время освоения большинства разделов стандартного курса математики; дает более глубокую и численную и аналитическую

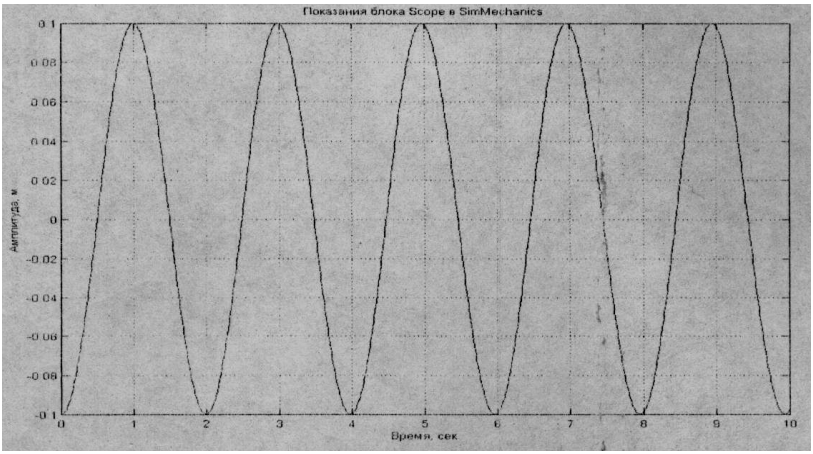


Рис. 75 Результаты моделирования в SimMechanics

проработку решаемых задач; помогает быстро решить задачу; дает основу для разработки пользовательских программ и методов с целью решения нестандартных задач.

§ 5. Информационные технологии в обучении теории вероятностей и математической статистике

Теория вероятностей и математической статистики включена во многие школьные учебники математики и хотя многие учителя математики пытаются игнорировать ее, она все же начинает занимать достойное место в учебном процессе.

Значительную помощь в организации процесса обучения теории вероятностей и математической статистики оказывают информационные технологии и связано это с тем, что компьютер позволяет производить быстрые расчеты, организовывать «виртуальные математические эксперименты» и др.

Мы приведем лишь некоторые примеры использования информационных технологий в обучении указанному учебному материалу.

1) Метод Монте-Карло для прогнозирования результатов экспериментов, для подтверждения или опровержения предложенного ответа [7].

Рассмотрим реализацию метода Монте-Карло на языке программирования Pasca1.

Основными объектами, которые используются в азартных играх, являются монеты, игральные кости, колесо рулетки, карты и т. п. При проведении случайного эксперимента наступает случайный результат. Например, при подбрасывании монеты может выпасть или «герб», или «решка». В результате этого эксперимента может наступить любой из двух исходов, причем с равной вероятностью. Чтобы этот эксперимент реализовать с помощью компьютера, нужно использовать функцию, позволяющую сформировать случайное число в заданном диапазоне.

Выбрать случайное число из диапазона позволяет функция Random. Если эта функция записана без аргумента, то компьютер выбирает случайное действительное число из диапазона [0, 1). Если же в скобках указать аргумент, то компьютер выбирает случайное целое число из диапазона [0, аргумент).

Например, при подбрасывании монеты можно условиться, что исходу «герб» будет соответствовать число 1, а исходу «решка» – число 0. Таким образом, результатом эксперимента будет любое из двух

целых чисел из диапазона [0, 2). Значит, команда, реализующая этот эксперимент, записывается следующим образом – RANDOM(2);

Если эксперимент состоит в подбрасывании игральной кости, то исходами могут быть значения от 1 до 6, и команда, реализующая этот эксперимент, записывается следующим образом: RANDOM(6)+1; 1 добавляется для того, чтобы сместиться от диапазона [0, 6) к реальному диапазону значений [1, 7).

Для реализации эксперимента с вращением колеса рулетки (европейской с 37 секторами) необходимо использовать команду: RANDOM(37).

Для осуществления многократного «подбрасывания» и подсчета числа исходов следует организовать цикл с параметром *i*, где *i* – счетчик совершенных подбрасываний.

Запишем программу, реализующую подбрасывание монеты N раз и подсчитывающую количество выпавших «гербов» (G) и «решек» (R).

```
PROGRAM PRIMER1;
VAR I,N,G,R,X:INTEGER;
BEGIN
RANDOMIZE; {инициализация датчика случайных
величин}
WRITELN ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЭКСПЕРИМЕНТОВ');
READLN(N);
G:=0; R:=0;
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
X:=RANDOM(2); { Эксперимент }
IF X=1 { Обработка }
THEN G:=G+1 { результатов }
ELSE R:=R+1;{ эксперимента }
END;
WRITELN('ЧИСЛО ГЕРБОВ ',G);
WRITELN('ЧИСЛО РЕШЕК ',R);
END.
```

Исполним эту программу по 5 раз для различного количества экспериментов. Результаты выполнения программы могут быть следующие:

Введите количество экспериментов	10
Число «гербов»	7
Число «решек»	3

По результатам моделирования можно определить относительную частоту выпадения «гербов», которая является оценкой вероятности этого события (таблица 4).

Таблица 4

Количество экспериментов	*Число «гербов»*	*Число «решек»*	*Относительная частота выпадения «гербов» (с 2 знаками после запятой)*
10	7	3	0,70
	6	4	0,60
	4	6	0,40
	8	2	0,80
	7	3	0,70
1000	486	514	0,49
	516	484	0,52
	487	513	0,49
	488	512	0,49
	498	502	0,50
10000	5050	4950	0,51
	5021	4979	0,50
	4961	5039	0,50
	4914	5086	0,49
	4973	5027	0,50

Из приведенного примера видно, что чем больше число проводимых экспериментов, тем частота выпадения гербов ближе к 1/2.

В данной программе весь эксперимент заключался всего лишь в одной строке, реализующей подбрасывание монеты: X:=RANDOM(2).

Команды, стоящие после этой строки, отвечают за обработку результатов эксперимента, в частности за подсчет числа «гербов» и числа «решек».

Естественно, что для таких простых задач нет смысла писать программу и вычислять вероятность (относительную частоту выпадения «гербов»), используя моделирование, гораздо проще определить эту вероятность аналитически. Для других, более сложных задач аналитическое вычисление вероятности наступления некоторого события становится трудоемким процессом, и процесс моделирования становится более удобным методом решения.

Задача. Эксперимент состоит в подбрасывании 3 игральных костей. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 10.

Моделирование методом Монте-Карло.

Составим программу, моделирующую этот эксперимент. В данном случае будет подбрасываться не одна монета, а три игральные

кости. Обозначим у – порядковый номер кости. Тогда реализация эксперимента будет выглядеть следующим образом:

```
S:=0;  {сумма очков на костях }
FOR J:=1 TO 3 DO
BEGIN
X:=RANDOM(6)+1; {подбрасываем игральную кость}
S:=S+X;{добавляем очки к общей сумме}
END;
```

Естественно, по условию задачи меняется и обработка результатов эксперимента. Теперь нам нужно подсчитывать число тех экспериментов (В), когда сумма выпавших очков равняется 10.

Таким образом, программа будет иметь следующий вид:

```
PROGRAM PRIMER2;
VAR I,N,B,J,X,S:INTEGER;
BEGIN
RANDOMIZE; {инициализация датчика случайных
величин}
WRITELN '( ' ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО
ЭКСПЕРИМЕНТОВ');
READLN(N);
B: = 0 ;
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
S : = 0 ;
FOR J:=1 TO 3 DO
BEGIN
X:=RANDOM(6)+1;
S:=S+X;
END;
IF S=10 THEN B:=B+1;
END;
WRITELN('ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА ВЫПАДЕНИЯ
10 ОЧКОВ',
B/N: 8 : 3 ) ;
END
```

Сложнее обстоит дело с моделированием зависимых испытаний.

Задача. В урне пять черных и три белых шара. Два друга по очереди вынимают по одному шару, и побеждает тот, кому первому достанется белый шар, причем шары в урну не возвращаются. Найти шансы на победу каждого из игроков.

Решение

Для моделирования экспериментов такого типа предлагается сформировать строку, которая отображает текущее состояние урны. Обозначим буквой «б» белый шар и буквой «ч» черный шар. Тогда исходному состоянию урны будет соответствовать строка: «ччччббб». Чтобы смоделировать извлечение шара из урны, достаточно выбрать случайный символ из строки, а затем его из строки удалить. В случае, когда эксперимент проводится с возвращением шаров в урну, выбранный символ из строки не удаляется.

Моделирование эксперимента будет выглядеть следующим образом:

```
URNA:='ЧЧЧЧЧббб';
J:=0; {порядковый номер хода}
REPEAT
J:=J+1;
X: = RANDOM(length(URNA))+1; {вытягиваем шар
из урны}
SHAR:=URNA [X];
DELETE(URNA,X,1);
UNTIL (SHAR='6'); {шар белый}
```

Программа будет иметь следующий вид:

```
PROGRAM PRIMER3;
VAR I,N,B1,B2,J,X:INTEGER;
URNA,SHAR:STRING;
BEGIN
RANDOMIZE; {инициализация датчика случайных
величин}
WRITELN('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЭКСПЕРИМЕНТОВ ' ) ;
READLN(N);
B1:=0; B2:=0;
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
URNA:='ччччббб';
J:= 0; {порядковый номер хода}
REPEAT J:=J+1;
X:=RANDOM(length(URNA))+1,{вытягиваем шар из
урны}
SHAR:=URNA [X]; {запоминаем цвет шара}
DELETE(URNA,X,1); {удаляем шар из урны}
UNTIL (SHAR='6'); {шар белый}
```

```
     IF ODD(J) {потребовалось нечетное число вытя-
гиваний}
     THEN B1:=B1+1
     ELSE B2:=B2+1;
     END;
     WRITELN('ШАНСЫ ПЕРВОГО ',B1/N:8:3);
     WRITELN('ШАНСЫ ВТОРОГО ',B2/N:8:3);
     END
```

Задача ([98, 35–38], Санкт-Петербургский парадокс). Бросаем монету до тех пор, пока не выпадет решка; если это произойдет при r-ом бросании, игрок получает из банка 2^r долларов. Сколько следует заплатить игроку за участие в игре, чтобы игра стала безопасной?

Определим вступительный взнос, используя моделирование.

Используя моделирование, произведем большое число разыгрываний и определим средний выигрыш.

Первоначально смоделируем ситуацию, описанную в условии задачи, не учитывая ограничения, и оценим средний выигрыш игрока несколько раз.

Моделирование эксперимента аналогично программе PRIMER3. Только в данном случае при обработке полученных результатов требуется вычислять выигрыш игрока в зависимости от количества сделанных бросков.

Пример программы:

```
     PROGRAM PRIMER4;
     VAR I,N,B,J,X:LONGINT; V,S:REAL;
     BEGIN
     RANDOMIZE; {Инициализация датчика случайных
величин}
     WRITELN('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЭКСПЕРИМЕНТОВ ' ) ;
     READLN(N);
     S:=0; {средний выигрыш игрока}
     FOR I:=1 TO N DO
     BEGIN
     J: = 0 ;
     REPEAT
     J:=J+1;
     X:=RANDOM(2); {подбрасываем монету}
     UNTIL X=0;
     V:=EXP(J*LN(2)); {выигрыш за игру}
     S:=S+V; {вычисляем сумму выигрышей за N игр}
     END;
```

```
WRITELN ('ОЖИДАЕМЫЙ ВЫИГРЫШ', S/N:8:3);
END.
```

Результаты выполнения программы могут быть следующие (при n = 1 000 000):

Ожидаемый выигрыш	21,072
Ожидаемый выигрыш	57,860
Ожидаемый выигрыш	18,592
Ожидаемый выигрыш	36,992
Ожидаемый выигрыш	20,197

Из полученных результатов видно, что даже при большом числе проводимых испытаний значения ожидаемых выигрышей различаются существенно. Таким образом, мы подтвердили решение, найденное аналитически, что выигрыш игрока имеет бесконечное математическое ожидание, а проще говоря, его нет.

Добавим в программу условие об ограниченности приза, т. е. выигрыш будет равен 100 тыс., если V будет больше 100 тыс.

```
IF V>100000 THEN V:=100000;
```

Тогда результаты выполнения этой программы будут следующие:

Ожидаемый выигрыш	17,198
Ожидаемый выигрыш	17,625
Ожидаемый выигрыш	17,763
Ожидаемый выигрыш	16,386
Ожидаемый выигрыш	18,098

Эти результаты согласуются с результатом, найденным аналитически (17,5 долларов).

2) Компьютерный эксперимент, заключающийся в подбрасывании монеты.

Отмеченный выше опыт имеет два исхода: либо монета упадет так, что сверху окажется «орел», либо наверху будет «решка». До опыта нет никаких оснований предпочитать один исход другому. В таких случаях говорят, что исходы равновероятны, а вероятность каждого из них равна 1/2.

Несмотря на кажущуюся простоту, вопрос о том, что выпадет: «орел» или «решка» – является классическим в теории вероятностей. Опыт с монетой проводили неоднократно выдающиеся математики прошлого: Паскаль, Ферма, Гаусс. Ученые сравнивали его результат с тем, который дает теория вероятностей. Для этого каждый экспериментатор подбрасывал монету несколько тысяч раз, подсчитывая число обоих исходов. Утомительное занятие.

Изучая теорию вероятностей со школьниками в математическом кружке, можно предложить им осуществить данный эксперимент на

компьютере. С. Н. Карташов [62] предлагает вариант программы для проведения этого эксперимента, составленный на языке Бейсик.

При составлении программы надо воспользоваться оператором RND – генератором случайных чисел. Используя генератор случайных чисел, позволим переменной К принимать случайным образом только два значения 0 и 1 (см. строку 60 в программе 1). Условимся считать, что если К = 0, то выпал «орел», а если К = 1, то «решка». Число того и другого исходов учитывается соответственно переменными Х и У в строке 70.

Для осуществления многократного «подбрасывания» и подсчета числа обоих исходов, организован цикл с параметром М, где М – счетчик совершенных подбрасываний. Цикл начинается строкой 50 и заканчивается строкой 80 программы 1. В строках 90 и 100 подсчитывается вероятность выпадения «орла» и «решки» как отношение числа соответствующих исходов к общему числу подбрасываний. Оставшиеся строки осуществляют вывод результатов эксперимента на экран в виде небольшой таблицы (таблица 5).

Таблица 5

Результат выпадения	*Число выпадений*	*Вероятность выпадений*
Орел	49	0,49
Решка	51	0,51

В данном случае показаны результаты одного из экспериментов, когда число подбрасываний N было равно 100. Очевидно, что результаты эксперимента даже с одним и тем же числом подбрасываний в каждом случае будут разные. Но тем не менее опыт очень хорошо согласуется с теорией вероятностей. Компьютер позволяет быстро проводить опыт и с гораздо большим числом подбрасываний: на обработку результатов эксперимента при N=1000 компьютер тратит менее 2 с. Нетрудно убедиться, что чем больше N, тем лучше результат эксперимента согласуется с теорией.

Компьютерный эксперимент имеет и другие преимущества перед реальным. Существует много факторов, которые в реальном эксперименте могут привести к результатам, далеким от теории вероятностей: различная высота подбрасывания монеты, неровность поверхности, на которую она падает, несимметричность монеты, ловкость рук экспериментатора и т. п. Компьютер полностью исключает все эти факторы, то есть мы можем говорить о чистоте и объективности компьютерного эксперимента, который проводится как бы в идеальных условиях.

Можно предложить учащимся, используя те же принципы, что и в программе 1, провести компьютерный эксперимент с подбрасыванием игральной кости (программа 2).

Игральная кость – это кубик, на каждой грани которого написана одна цифра из набора 1, 2, 3 ... 6 (цифры на гранях не повторяются). Если бросить такой кубик, то любая из шести его граней может оказаться верхней. Поскольку кость предполагается однородной и симметричной, то все исходы опыта равновероятны. Вероятность каждого исхода равна 1/6. Числа выпадений и вероятности выпадения каждой цифры образуют два массива, которые формируются соответственно в строках 30 и 40 программы 2.

Используя оператор RND, позволим принимать переменной z шесть целых значений от 1 до 6. В строках 90–110 программы цикл с параметром K осуществляет проверку, какая цифра выпала, и подсчитывает общее число выпадений каждой цифры. В строках 140–180, благодаря еще одному циклу с параметром K, происходит подсчет вероятности выпадения каждой цифры, а также выводятся на экран результаты эксперимента. В таблице 6 демонстрируется результат одного эксперимента, когда общее число подбрасываний кубика было равно 3000 (494 + 502 + 502 + 491 + 482 + 529 = 3000).

Таблица 6

Цифра	Число выпадений	Вероятность
1	494	0,1646667
2	502	0,1673333
3	502	0,1673333
4	491	0,1636667
5	482	0,1606667
6	529	0,1763333

На обработку результатов этого эксперимента компьютер потратил менее 25 с.

Все случайные события не ограничиваются двумя приведенными выше. Эксперименты с монетой и костью описываются наиболее часто в учебной литературе по теории вероятностей, поэтому мы и решили рассмотреть их, как самые простые и популярные.

Программа 1

```
10 REM МОНЕТА
20 CLS
30 PRINT <введите число подбрасываний>
40 INPUT <N=>; N
50 FOR M=1 TO N
60 K=INT (2*RND (1))
70 IF K=0 THEN X=X+1 ELSE Y=Y+1
80 NEXT M
90 A=X/N
100 B=Y/N
110 LOCATE 5, 10
120 PRINT <число выпадений>, <вероятность выпадения>
130 PRINT <орла>, X, A
140 PRINT <решки>, Y, B
150 END
```

Программа 2

```
10 REM CUBUS
20 CLS
30 DIM X (6)
40 DIM A (6)
50 PRINT <введите число подбрасываний>
60 INPUT <N=>; N
70 FOR M=1 TO N
80 Z=INT (6*RND(1)+1)
90 FOR K=1 TO 6
100 IF K=Z THEN X (K)=X(K)+1
110 NEXT K
120 NEXT M
130 PRINT<цифра>,<число выпадений>, TAB(45); <вероятность>
140 FOR K=1 TO 6
150 A(K)=X(K)/N
160 PRINT K; TAB (20); X(K); TAB (45); A(K)
170 NEXT K
180 END
```

3) Решение задач по теории вероятностей и математической статистике с помощью среды MathCad.

В нашей работе [13] приведено большое число примеров, здесь же мы продемонстрируем лишь некоторые из них.

Если учитель будет использовать эту книгу на элективных курсах для работы с учащимися, то предполагается, что они должны быть знакомы с элементарной теорией вероятностей, когда за основные, неопределяемые понятия взяты «испытание», «исходы испытания». Каждое испытание заканчивается только одним из исходов, множество которых (конечное или счетное) называется пространством элементарных событий. С каждым исходом ω_k связывается неотрицательное число p_k – вероятность этого исхода, при этом сумма всех таких вероятностей равна 1. Случайное событие A – это подмножество пространства элементарных событий. Если исход $\omega_k \in A$, то говорят, что он благоприятствует событию A. Его вероятность определяется как сумма

$$P(A) = \sum_k p_k ,$$

где суммирование идет по всем k, для которых $\omega_k \in A$. В частном случае, когда множество исходов конечное и все они равновероятные, то есть $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1/n$, получаем классическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов, а n – число всех исходов.

Вопрос о том, как определяются численные значения вероятностей p_k в данной конкретной задаче, решается либо в результате большого числа наблюдений, либо возможно предсказание вероятностей в ходе испытания на основе симметрии, в результате чего приходят к классическому определению. Так, если испытание состоит в подбрасывании игрального кубика, то можно с вероятностью $\frac{1}{6}$ ожидать выпадение на каждую из его граней.

Наличие у события A вероятности p может быть проведено экспериментально, когда подсчитывается относительная частота m/n его появления в достаточно длинной серии n испытаний, приблизительно равная p. В различных работах приведены результаты экспериментов по проверке «симметричности монеты», проведенных рядом исследователей. Последуем вслед за ними и «покидаем» монету на компьютере в качестве упражнения на освоение Mathcad.

Условимся выпадение герба интерпретировать числом 1, а нулем – выпадение цифры. В достаточно длинной последовательности из случайных нулей и единиц подсчитаем долю единиц, используя встроенную функцию Хевисайда $\Phi(x)$. Для получения случайных чисел 0, 1 сгенерируем случайное число между 0 и 1 командой rnd(1), которое затем округлим в ближайшую сторону командой round(x). Полученный вектор X из нулей и единиц можно просмотреть прокруткой.

Этот результат подтверждает, что предположение о равновозможности герба и цифры находится в согласии с опытом.

Моделирование опыта с подбрасыванием монеты.

$N := 1000$ $\quad i := 1..N$ $\quad X_i := \text{round}(\text{rnd}(1))$

$$n := \sum_{i=1}^{N} \Phi(X_i - 1) \qquad n = 502$$

$$w := \frac{n}{N} \qquad w = 0.502$$

$X =$

	1
1	0
2	0
3	1
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	0
11	1
12	0
13	0
14	1
15	1
16	0

Аналогично экспериментально можно проверить, что с вероятностью $\frac{1}{6}$ выпадет шестерка при подбрасывании игрального кубика. Для этого надо уметь сгенерировать случайное число из множества $\{1,2,3,4,5,6\}$. Например, найти целую часть (команда floor) случайного числа rnd(6) между 0 и 6, к которой добавить 1.

Статистические закономерности такого рода были обнаружены давно на примерах карточных игр, игр в кости и т. п., то есть на примерах испытаний, которые характеризуются равновозможностью исходов. Эти наблюдения открыли путь для статистического подхода к чис-

ленному определению вероятности. Он особенно важен, когда из теоретических соображений, подобных соображениям симметрии, значение вероятности часто заранее установить нельзя.

Моделирование опыта с подбрасыванием игрального кубика.

$N := 500$ $i := 1..N$ $Y_i := \text{floor}(\text{rnd}(6)) + 1$

$$n := \sum_{i=1}^{N} \Phi(Y_i - 6) \qquad n = 88$$

$w := \frac{n}{N}$ $w = 0.176$ $\frac{1}{6} = 0.167$

$Y =$

	1
1	1
2	1
3	5
4	1
5	6
6	5
7	5
8	4
9	1
10	6
11	6
12	1
13	4
14	2
15	6
16	6

По численным значениям элементарных событий, найденным классическим или статистическим способом, могут быть найдены новые вероятности по соответствующим теоремам сложения или умножения. Они достаточно хорошо освещены в учебной и методической литературе, поэтому мы их не анализируем. Но все же приведем некоторые примеры с использованием Mathcad.

Задача 1. Кавалер де Мере считал, что при подбрасывании трех игральных костей вероятность получить сумму выпавших очков, равную 11, такова же, как и вероятность получения суммы 12 очков. Но его наблюдения показали, что это не так. Для разъяснения противоречия он обратился к Паскалю, который указал ошибку в рассуждениях де Мере.

Обобщим задачу: найдем вероятности получения суммы в r очков, $r = 3, 4, ..., 18$. Кости следует различать, например, занумеровав их. Пусть на первой кости выпало i очков, на второй j и на третьей k очков. Исход испытания зашифруем упорядоченной тройкой этих чисел. Ясно, что тогда пространство элементарных событий будет состо-

ять из 216 точек. Пусть S_r – число троек (i, j, k) с суммой не более r; эту величину найдем с помощью функции Хевисайда Φ(x). Пусть Q_r – число троек с суммой, в точности равной r. Тогда $Q_r = S_r - S_{r-1}$. Искомые вероятности получатся делением Q_r на 216. Приведем соответствующие вычисления в Mathcad.

Как видно, вероятность получения 11 очков больше вероятности получения 12 очков.

$r := 3..18$

Задача де Мере из: Чубарев А. М., Холодный В. С. Невероятная вероятность. М.: Знание, 1976. С. 16–17.

$$S_r := \sum_{i=1}^{6} \left[\sum_{j=1}^{6} \left(\sum_{k=1}^{6} \Phi(r - i - j - k) \right) \right] \qquad S_2 := 0 \qquad Q_r := S_r - S_{r-1}$$

r =	S_r =	Q_r =	$\frac{Q_r}{216}$ =
3	1	1	0.005
4	4	3	0.014
5	10	6	0.028
6	20	10	0.046
7	35	15	0.069
8	56	21	0.097
9	81	25	0.116
10	108	27	0.125
11	135	27	0.125
12	160	25	0.116
13	181	21	0.097
14	196	15	0.069
15	206	10	0.046
16	212	6	0.028
17	215	3	0.014
18	216	1	0.005

Задача 2. Два шахматиста условились сыграть 10 результативных партий. Вероятность выигрыша каждой отдельной партии первым игроком равна 2/3, вторым – 1/3 (ничьи не считаются). Чему равны вероятности выигрыша матча первым игроком, вторым игроком, общего ничейного результата?

Первый шахматист выиграет матч, если одержит не менее шести побед; вероятность этого $P1$. Он проиграет матч, если наберет 0 или 1 или 2 или 3 или 4 очка, соответствующая вероятность $P2$. Ничейный исход матча (*remis*) означает, что будет по 5 побед у каждого. Соответствующие вычисления представлены ниже.

$$n := 10 \qquad p := \frac{2}{3}$$

$$P1 := \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \mathrm{dbinom}(i, n, p) \qquad P2 := \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{dbinom}(i, n, p) \qquad P_{remis} := \mathrm{dbinom}\left(\frac{n}{2}, n, p\right)$$

$$P1 = 0.786872 \qquad P2 = 0.076564 \qquad P_{remis} = 0.136565 \qquad P1 + P2 + P_{remis} = 1$$

Задача 3. Обувщики полагают, что около 30 % женщин носят обувь 36 размера. С какой вероятностью владелец обувного магазина может ожидать, что из 300 потенциальных на сегодня покупательниц 75 будут иметь намерение купить обувь именно этого размера? Какова вероятность этого намерения у 90 покупательниц? Найдите искомые вероятности по формуле Бернулли и по локальной теореме Муавра-Лапласа. Постройте графики соответствующих вероятностей, когда число покупательниц – 75, 76, …, 90. О чем свидетельствуют графики?

Решение

Ниже в Mathcad-решении обозначены: $p1$, $p2$ – вероятности, найденные по формуле Бернулли, $P1$, $P2$ – те же вероятности, вычисленные по локальной теореме Муавра-Лапласа. График (рис. 76) показывает, что точки $(k, p1_k)$, $(k, P1_k)$ почти сливаются.

Это – хорошее подтверждение близости биномиального распределения к нормальному при большом числе испытаний Бернулли.

$p := 0.3 \quad q := 1 - p \quad n := 300 \quad n \cdot p \cdot q = 63 \quad k1 := 75 \quad k2 := 90$

$p1 := dbinom(k1, n, p) \quad p1 = 0.00836 \quad p2 := dbinom(k2, n, p) \quad p2 = 0.05021$

$$P1 := \frac{dnorm\left(\frac{k1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, 0, 1\right)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \quad P1 = 0.008428 \quad P2 := \frac{dnorm\left(\frac{k2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, 0, 1\right)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \quad P2 = 0.050262$$

$k := k1 .. k2 \quad p1_k := dbinom(k, n, p)$

$$P1_k := \frac{dnorm\left(\frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, 0, 1\right)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

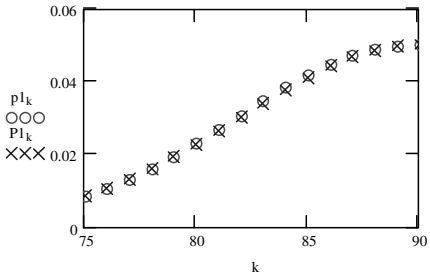


Рис. 76

Задача 4. Ниже в матрице A представлены 50 наблюдений за длиной «линии жизни» на левой руке в сантиметрах (с точностью до ближайших 0,15 см), в матрице B – продолжительность жизни человека (округленная до ближайшего целого года).

ORIGIN≡ 1

$$A := \begin{pmatrix} 9.75 & 9 & 9.6 & 9.75 & 11.25 & 9.45 & 11.25 & 9 & 7.95 & 12 \\ 8.1 & 10.2 & 8.55 & 7.2 & 7.95 & 8.85 & 8.25 & 8.85 & 9.75 & 8.85 \\ 9.15 & 10.2 & 9.15 & 7.95 & 8.85 & 9 & 7.8 & 10.05 & 10.5 & 9.15 \\ 9.45 & 9.45 & 9.45 & 8.1 & 8.85 & 9.6 & 6.45 & 9.75 & 10.2 & 6 \\ 8.85 & 9 & 9.75 & 10.65 & 13.2 & 7.95 & 7.95 & 9.15 & 9.75 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 19 & 40 & 42 & 42 & 47 & 49 & 50 & 54 & 56 & 56 \\ 57 & 57 & 58 & 61 & 62 & 62 & 65 & 65 & 65 & 66 \\ 66 & 66 & 67 & 68 & 68 & 68 & 69 & 69 & 70 & 71 \\ 71 & 71 & 72 & 73 & 74 & 74 & 75 & 75 & 75 & 76 \\ 77 & 80 & 82 & 82 & 82 & 83 & 86 & 88 & 88 & 94 \end{pmatrix}$$

При этом данные соответствуют друг другу поэлементно, например, человек с длиной «линии жизни» $A_{11} = 9{,}75$ прожил $B_{11} = 19$ лет. Верно ли, что продолжительность жизни и длина «линии жизни» связаны линейной регрессионной зависимостью?

Решение

От матриц перейдем к векторам согласно следующему фрагменту.

$i := 1..5$ $\quad j := 1..10$ $\quad X_{10\cdot(i-1)+j} := A_{i,j}$ $\quad Y_{10\cdot(i-1)+j} := B_{i,j}$

Найдем коэффициент корреляции:

$$r := \mathrm{corr}(X, Y) \qquad r = -0.123$$

Малое его значение говорит в пользу отсутствия линейной связи между длиной «линии жизни» и продолжительностью жизни. Об этом свидетельствует (рис. 77) и диаграмма рассеяния (корреляционное поле).

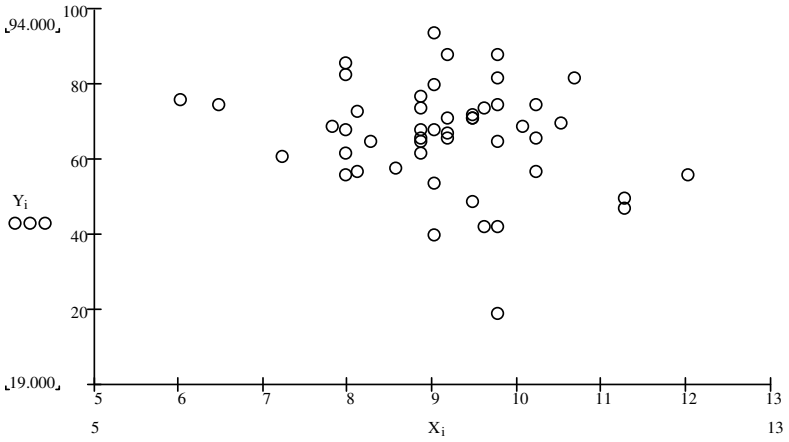


Рис. 77

Такое облако точек вообще не отражает никакой зависимости!

Задача 5. Коммерсант предполагает, что объем продаж нового вида продукции в каждой из пяти торговых точек, расположенных в различных районах Омска, будет одинаков. Фактический объем продаж оказался разным (таблица 7):

Таблица 7

Район	i	1	2	3	4	5
Объем продаж	n_i	105	117	84	111	83

Оценить, значимы или нет различия между наблюдаемыми и ожидаемыми объемами продаж при уровне значимости 0,05 (таблица 8).

Решение

Нулевая гипотеза состоит в том, что согласуются ожидаемые и фактические объемы продаж.

Таблица 8

Район	i	1	2	3	4	5
Фактический объем продаж	v_i	105	117	84	111	83
Ожидаемый объем продаж	v_i'	100	100	100	100	100

Как явствует из Mathcad-решения, имеем 9,8 > 9,4877, поэтому нулевая гипотеза должна быть отклонена.

ORIGIN≡ 1

$V_{obs} := (105 \;\; 117 \;\; 84 \;\; 111 \;\; 83)$ $V_{pred} := (100 \;\; 100 \;\; 100 \;\; 100 \;\; 100)$

$\nu := V_{obs}^{T}$ $\nu 1 := V_{pred}^{T}$ $\chi 2 := \sum_{i=1}^{5} \frac{(\nu_i - \nu 1_i)^2}{\nu 1_i}$ $\chi 2 = 9.8$

$\alpha := 0.05$ $X_{right} := qchisq(1 - \alpha, 4)$ $X_{right} = 9.4877$

Задача 6. Приведены классические данные Р. Фишера о количестве осадков в одном из районов Англии.

ORIGIN≡ 1

$X := (16 \;\; 17 \;\; 18 \;\; 19 \;\; 20 \;\; 21 \;\; 22 \;\; 23 \;\; 24 \;\; 25 \;\; 26 \;\; 27 \;\; 28 \;\; 29 \;\; 30 \;\; 31 \;\; 32 \;\; 33 \;\; 34 \;\; 35 \;\; 36 \;\; 37 \;\; 38 \;\; 39)^{T}$

$n := (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 12 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 4 \;\; 8 \;\; 9 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 1)^{T}$

Здесь в векторе X отражены количества осадков в дюймах, в векторе n соответствующие частоты. Требуется проверить гипотезу о нормальном распределении осадков (уровень значимости 0,05).

$X := (16 \;\; 17 \;\; 18 \;\; 19 \;\; 20 \;\; 21 \;\; 22 \;\; 23 \;\; 24 \;\; 25 \;\; 26 \;\; 27 \;\; 28 \;\; 29 \;\; 30 \;\; 31 \;\; 32 \;\; 33 \;\; 34 \;\; 35 \;\; 36 \;\; 37 \;\; 38 \;\; 39)^{T}$

$n := (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 12 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 4 \;\; 8 \;\; 9 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 1)^{T}$

Еще раз приведем исходные данные.

Далее группируем данные с $m = 6$ интервалами и строим гистограмму (рис. 78).

$N := \sum n$ $\quad N = 90$ $\quad X_{min} := \min(X)$ $\quad X_{max} := \max(X)$ $\quad R := X_{max} - X_{min}$

$R = 23$ $\quad r := \text{length}(X)$ $\quad r = 24$ $\quad k := 1..r$

$m := 6$ $\quad h := \frac{R}{m}$ $\quad h = 3.833$ $\quad i := 1..m$ $\quad j := 1..m + 1$

$U_j := X_{min} + h \cdot (j - 1)$ $\quad c_i := \frac{U_i + U_{i+1}}{2}$ $\quad U_1 := X_{min} - 0.1$ $\quad U_{m+1} := X_{max} + 0.1$

$$\nu_i := \sum_{k=1}^{r} n_k \cdot \Phi(U_{i+1} - X_k) \cdot \Phi(X_k - U_i) \qquad \sum \nu = 90$$

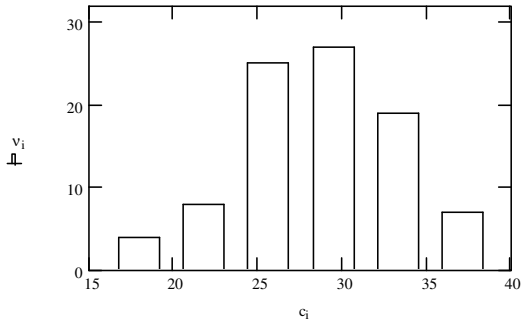


Рис. 78

Некоторая симметричность столбцов позволяет сделать предположение о нормальном распределении. Проверим это по критерию «хи-квадрат». Найдем выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение по исходным данным. С помощью функции распределения $N(a,\sigma)$ вычисляем теоретические вероятности попадания на интервалы группировки.

$$X_{mean} := \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{r} n_k \cdot X_k \qquad a := X_{mean} \qquad a = 28.622$$

$$S2 := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{k=1}^{r} n_k \cdot (X_k - a)^2 \qquad S2 = 23.271 \qquad \sigma := \sqrt{S2} \qquad \sigma = 4.824$$

$$j := 2..\, m-1 \qquad p_j := pnorm(U_{j+1}, a, \sigma) - pnorm(U_j, a, \sigma)$$

$$p_1 := pnorm(U_2, a, \sigma) \qquad p_m := 1 - pnorm(U_m, a, \sigma)$$

Затем находим теоретические вероятности и наблюдаемое значение критерия, равное 1,249. Оно не попало в область $[7{,}815; +\infty)$, что и подтверждает нашу гипотезу.

$$p^T = (\ 0.034\ \ 0.118\ \ 0.256\ \ 0.305\ \ 0.2\ \ 0.087\ ) \qquad \sum p = 1 \qquad \nu 1 := N \cdot p$$

$$\nu^T = (\ 4\ \ 8\ \ 25\ \ 27\ \ 19\ \ 7\ ) \qquad \nu 1^T = (\ 3.081\ \ 10.612\ \ 23.029\ \ 27.443\ \ 17.965\ \ 7.87\ )$$

$$\chi 2 := \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - \nu 1_i)^2}{\nu 1_i} \qquad \chi 2 = 1.249$$

$$df := m - 3 \qquad \alpha := 0.05 \qquad t := qchisq(1 - \alpha, df) \qquad t = 7.815$$

Задача 7. Будем считать прогноз погоды на следующий день относительно предсказываемой температуры удачным, если истинная температура отличалась от предсказанной не более чем на 5 градусов. За 100 дней было 60 удачных и 40 неудачных прогнозов. С помощью критерия знаков проверить нулевую гипотезу: вероятность удачного предсказания равна 0,5 против альтернативы: эта вероятность отлична от 0,5 при уровне значимости 0,1.

Решение

Решение задачи о прогнозе погоды.

$n := 100 \qquad \mu := 60 \qquad x1 := \sqrt{2\cdot\mu + 1.5} - \sqrt{2\cdot(n - \mu) - 0.5} \qquad x1 = 2.106$

$W := pnorm(x1, 0, 1) \qquad W = 0.982$

Поскольку $W \notin (\alpha/2, 1-\alpha/2) = (0{,}05; 0{,}95)$, нулевую гипотезу отвергаем.

4) Отметим сайт Тюменского регионального центра Интернет-образования «Теория вероятностей в школе» (http://tmn.fio.ru) (Здесь и ниже опора в тексте сделана на статью С. Щербатых [122]). Предложенный авторами проект состоит из следующих разделов: введение; история; особенности преподавания теории вероятностей (в 5–6-х классах, 7–9-х классах, 10–11-х классах); опыт преподавания теории вероятностей в зарубежных школах. Содержание web-сайта представлено методическими материалами по теории вероятностей, предназначенными для учителей. Некоторые выдержки можно использовать как презентации к отдельным урокам. На сайте помещены ссылки на некоторые адаптированные лекционные источники, которые могут быть использованы учителем при подготовке очередного урока.

5) Следующей уместно рассмотреть обучающую программу «Математика (5–11 классы)», разработанную издательством «Дрофа ДОС» в 2003 г. и выпущенную на CD-диске.

«Математика (5–11 классы)» – это набор разнообразных учебных объектов, заданий, моделей, демонстраций, программных модулей и др., предназначенных для поддержки школьного курса математики различными видами практической учебой деятельности. Используемые для этого программные средства (например, модули для проведения вероятностных экспериментов) не только являются инструментами виртуального конструирования объектов разного рода, но и позволяют динамически изменять параметры построенных моделей. Следует отметить, что данная программа в максимальной степени адаптирована для учащихся старшего школьного возраста.

Материалы комплекса могут быть использованы при изучении различных разделов школьной математика, среди которых и стохастика, на всех уровнях – от 5–6-х классов основной школы до старших классов профильной школы, на факультативах и кружках. Особенность практических заданий позволяет выполнять одно и то же задание на

разных уровнях сложности. При отборе тем авторы программы руководствовались следующими критериями: близостью темы к школьному курсу, наличием практических, лабораторных заданий по теме, что говорит о попытках реализации прикладной направленности. Наиболее эффективной формой работы с комплексом является работа учащихся под руководством учителя. Благодаря своему практическому характеру большинство заданий и демонстраций будут интересны всем учащимся, проявившим склонность к математике, что позволяет рекомендовать их и для самостоятельных домашних занятий.

6) Электронный учебник «StatSoft» (http://www.statsoft.ru /home/textbook) помогает начинающим, в первую очередь старшеклассникам, изучать статистику, усвоить основные понятия статистики и более полно представить диапазон применения статистических методов. Дополнительная информация по методам анализа данных, добычи данных, визуализации и прогнозирования содержится на портале StatSoft (http://www.statistics.ru). Материал учебника подготовлен отделом распространения и технической поддержки компании «StatSoft» на основе многолетнего опыта чтения лекций студентам математических специальностей, отдельные его элементы, предварительно адаптированные, могут быть использованы при построении учебного материала в школе. В электронном учебнике приводится довольно большое количество примеров применения математической статистики в различных областях науки и народного хозяйства, включая лабораторные исследования (в медицине, сельском хозяйстве и других областях).

7) Остановимся на электронном издании «Математика, 5–11 классы. Практикум», разработанном ГУ РЦ ЭМТО, ЗАО «1С», АН О УИЦ «Интерактивная линия» в 2004 г. и выпущенном на CD-диске. Данное издание представляет собой адаптированный комплекс лабораторных работ по алгебре, алгоритмике, геометрии и стохастике, предназначенных для поддержки этих курсов практическими заданиями творческого характера. В электронный учебный комплекс включены задания на конструирование, моделирование, математический эксперимент, рассчитанные на все уровни и профили обучения.

Рассмотрим устройство лаборатории «Теория вероятностей и математическая статистика», которая присутствует в программе. Она состоит из пяти частей: 1) методические рекомендации, в которых дается краткое описание работы лаборатории; 2) задачи; 3) лаборатория математической статистики; 4) эксперименты; 5) справочник по теории вероятностей и математической статистике, в котором представлены основные понятия и формулы данных разделов математики.

В разделе «Задачи» учащимся предлагаются задания по следующим темам: классическая формула вычисления вероятностей, геометрические вероятности, условная вероятность, испытания Бернулли, математическая статистика. Решая задачи, ученик мгновенно получает ответ, а при необходимости, и подсказку.

В лаборатории математической статистики школьники смогут выполнить серию лабораторных работ, в ходе которых они построят гистограммы, полигоны частот, столбчатые диаграммы, найдут характеристики положения и разброса выборки.

В разделе «Эксперименты» предлагается провести экспериментальные работы следующего содержания: бросание симметричных монет, бросание симметричных кубиков, метод Монте-Карло, доска Гальтона. При выполнении этих работ учащиеся на конкретных прикладных примерах смогут подтвердить многие теоретические положения.

Список сайтов и программ можно продолжить и далее, но мы ограничились приведенными, поскольку считаем, что они помогут составить основательную базу при изучении элементов теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики с привлечением адаптированных для старшеклассников электронных средств в большинстве своем прикладного назначения.

Литература

1. *Азевич А. И.* ADVANCED GRAPHER на уроке и после него // Математика в школе. – 2001. – № 6. – С. 65–69.

2. *Азевич А. И.* Несколько компьютерных программ // Математика в школе. – 2002. – № 10. – С. 44–46.

3. *Азевич А. И.* Фракталы: геометрия и искусство // Математика в школе. – 2005. – № 4. – С. 76–78.

4. *Аммерал Л.* Машинная графика на персональных компьютерах. – М.: СолСистем, 1992. – 147 с.

5. *Аммерал Л.* Принципы программирования в машинной графике. – М.: СолСистем, 1992. – 153 с.

6. *Анисимова Н. С., Сидоркина И. Г.* Психолого-педагогические аспекты использования интернет-технологий в образовании // Информатика и образование. – 2002. – № 9. – С. 46–50.

7. *Афанасьев В. В., Суворова М. А.* Школьникам о вероятности в играх. Введение в теорию вероятностей для учащихся 8–11 классов. – Ярославль: Академия развития, 2006. – 192 с.

8. *Беспалько В. П.* Образование и обучение с участием компьютеров (педагогика третьего тысячелетия) – М.: Изд-во Московского психолого-социального ин-та; Воронеж: Изд-во НПО «Модэк», 2002. – 352 с.

9. *Барановский Ю. С.* Новая дисциплина «Введение в педагогическую информатику» в структуре многоуровневого педагогического образования // Педагогическая информатика. – 1995. – № 2. – С. 18–29.

10. *Воробьев Е. М.* Введение в систему символьных, графических и численных вычислений «Математика-5». – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2005. – 368 с.

11. *Вострокнутов И. Е.* Современный интерактивный кабинет математики // Математика. – 2009. – № 21. – С. 27–29.

12. *Вострокнутов И. Е.* «Школьный калькулятор» – новый образовательный проект фирмы CASIO в России // Математика. – 2003. – № 5. – С. 74–76.

13. *Галюкшов Б. С., Далингер В. А., Симонженков С. Д.* Элементы теории вероятностей и математической статистики с применением MATHCAD: учеб. пособие. Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2009. – 140 с.

14. *Галиханова Т.* Строим и исследуем графики с помощью компьютера // Математика. – 2008. – № 9. – С. 25–26.

15. *Гашков С.* Микрокалькулятор – друг или враг? // Математика. – 2009. – № 21. – С. 11–19.

16. *Гершунский Б. С.* Компьютеризация в сфере образования: проблемы и перспективы. – М.: Педагогика, 1987. – 264 с.

17. *Гин А. А.* Методика оценки педагогических методик // Математика. – 2008. – № 14. – С. 10–11.

18. *Гин А. А.* Приемы педагогической техники. – М.: Вита-Пресс, 2008. – 162 с.

19. *Глейзер Г. Д.* Психолого-математические основы развития пространственных представлений при обучении геометрии // Преподавание геометрии в 9–10 классах / сост. З. А. Скопец, Р. А. Хабиб. – М.: Просвещение, 1980. – С. 253–269.

20. Глоссарий современного образования (терминологический словарь) / Л. В. Левчук // Народное образование. – 1997. – № 3. – С. 93–95.

21. *Говорухин В.* Компьютер в математическом исследовании: учеб. курс. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.

22. *Грузман М. З.* Логические игры с калькулятором: кн. для учащихся 8–10 кл. сред. шк. / под ред. И. Ф. Тесленко. – М.: Просвещение, 1989. – 160 с.

23. *Гузеев В. В.* Образовательная технология: от приема до философии. – М.: Сентябрь, 1996. – 171 с.

24. *Гурский Д. А.* Вычисления в MathCad. – Минск: Новое знание, 2003. – 814 с.

25. *Далингер В. А.* Использование калькуляторов на уроках математики: методические рекомендации для учителей и студентов физико-математических факультетов. – Омск: Изд-во ОГПИ им. А. М. Горького, 1985. – 45 с.

26. *Далингер В. А.* Дидактико-методические основы построения диалоговых обучающих программ на базе микро-ЭВМ: методические рекомендации. – Омск: Омский ОИУУ, 1986. – 60 с.

27. *Далингер В. А.* Диалоговые программы и проблема развития творческого мышления учащихся // Информатика и вычислительная техника в учебном процессе и управлении: тезисы докладов V областной науч.-практ. конф. – Омск: Изд-во ОГПИ им. А. М. Горького, 1988. – С. 17–21.

28. *Далингер В. А.* Диалоговые обучающие программы и требования к ним // Информатика и образование. – 1988. – № 6. – С. 22–31.

29. *Далингер В. А.* Проблемы развития творческого мышления учащихся в условиях диалогового взаимодействия с компьютером // Электронно-вычислительная техника в общеобразовательной школе: методические разработки. – Новосибирск: Изд-во НИИ информатики и вычислительной техники, 1989. – С. 15–20.

30. *Далингер В. А.* Компьютеризация курса методики преподавания математики: рекомендации для студентов педвузов. – Омск: Изд-во ОГПИ им А. М. Горького, 1989. – 29 с.

31. *Далингер В. А.* Влияние информационных технологий обучения на методическую систему обучения // Психолого-педагогические вопросы компьютеризации обучения в средней школе: материалы Всесоюзной науч.-практ. конф. – М.: Изд-во Симферопольского гос. ун-та, 1989. – С. 13–17.

32. *Далингер В. А.* Иллюстративная функция учебника геометрии и роль информационных технологий обучения в ее реализации // Новые информационные технологии в учебном процессе и управлении: тезисы докладов

VII Омской областной науч.-практ. конф. – Омск: Из-во ОГПИ им. А. М. Горького, 1990. – С. 19–22.

33. *Далингер В. А.* Влияние информационных технологий обучения на компоненты методической системы обучения // Новые информационные технологии в учебном процессе и управлении: тезисы докл. VI Омской областной науч.-практ. конф. – Омск: Омский ОИУУ, 1990. – С. 22–26.

34. *Далингер В. А.* Новые информационные технологии в обучении геометрии // Новые исследования в педагогических науках. Вып. 1(57). – М.: Изд-во АПН СССР, 1991. – С. 14–20.

35. *Далингер В. А.* Новые информационные технологии в обучении математике // Материалы V Международной конференции «Применение новых технологий в образовании». – Троицк: Изд-во Троицкого ин-та инновации и термоядерных исследований, 1994. – С. 101–105.

36. *Далингер В. А.* Некоторые основные аспекты становления дистанционного обучения // Применение новых технологий в образовании: материалы X Междунар. конф. – Троицк: Изд-во «Фонд новых технологий в образовании "Байтик"», 1999. – С. 135–136.

37. *Далингер В. А.* О некоторых проблемах подготовки учителей к работе с одаренными детьми в условиях информатизации образования // Информационные технологии в образовании. – М.: Ин-т ЮНЕСКО по информационным технологиям в образовании; Международная академия информатизации, 1998. – С. 127–130.

38. *Далингер В. А.* От классно-урочного обучения к дистанционному // Материалы XI Международной конференции «Применение новых технологий в образовании». – Троицк: Изд-во «Фонд новых технологий в образовании "Байтик"», 2000. – С. 100–102.

39. *Далингер В. А.* Компьютерные технологии в школьном геометрическом образовании // Материалы XII Международной конференции «Применение новых технологий в образовании». – Троицк: Изд-во «Фонд новых технологий в образовании "Байтик"», 2001. – С. 23–26.

40. *Далингер В. А.* Компьютерные технологии в обучении геометрии: метод. рекомендации. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. – 33 с.

41. *Далингер В. А.* Информационно-коммуникационные технологии в образовании будущего учителя математики // Инновации в профессиональном и профессионально-педагогическом образовании: тезисы докл. IX Республиканской науч.-практ. конф. (Москва, Екатеринбург). – Екатеринбург: Изд-во Российского гос. профессионально-педагогического ун-та, 2002. – С. 27–28.

42. *Далингер В. А.* Персональный компьютер на уроках геометрии // Материалы XIII Международной конференции «Применение новых технологий в образовании». – Троицк: Изд-во «Фонд новых технологий в образовании "Байтик"», 2002. – С. 28–30.

43. *Далингер В. А.* Математическое моделирование как средство интеграции естественнонаучных и математических дисциплин // Интеграция образования: научно-методический журнал. – 2002. – № 4. – С. 106–112.

44. *Далингер В. А.* Информационно-коммуникационные технологии как средство интеграции курса математики и спецдисциплин в профильных математических классах // Образовательные технологии: межвузовский сб. науч. трудов. – Воронеж: Центрально-черноземное изд-во, 2003. – С. 64–68.

45. *Далингер В. А.* Пользовательский интерфейс и обучение будущего учителя умению его адаптировать к особенностям учащихся // Информационные технологии в образовании: сб. трудов XIV Междунар. конф.-выставки. – М.: Изд-во МИФИ, 2004. – С. 165–167.

46. *Далингер В. А.* Использование средств информатизации и информационных технологий в педагогической деятельности в условиях компетентного подхода // Человек и общество: На рубеже тысячелетий: Междунар. сб. науч. трудов: Вып. 30. – Воронеж: Изд-во ВГПУ, 2005. – С. 325–332.

47. *Далингер В. А.* Пользовательский интерфейс и индивидуальные учебные стили учащихся: материалы науч. конф. «Технологии 2005» (Турция) // Современные наукоемкие технологии. – 2005. – № 4. – С. 78–80.

48. *Далингер В. А., Васяк Л. В.* Профессионально ориентированные задачи по математике для студентов инженерных специальностей: учеб. пособие. – Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2007. – 59 с.

49. *Далингер В. А., Фазылов Ф. Н.* Использование программируемых калькуляторов для проведения оперативного контроля знаний учащихся. – Омск: Изд-во Омского областного ИУУ, 1988. – 30 с.

50. *Диков А. В.* Команды на LOGO конструируют фракталы // Математика в школе. – 2005. – № 4. – С. 78–80.

51. *Дмитриева Т. А., Совертков П. И.* Координатный метод определения точки Ферма-Торричелли // Элементарная математика, математическое образование и геометрия. – СПб.: ТОО «Мифрил», 1999. – № 2. – С. 63–67.

52. *Дьяконов В. П.* Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001. – 196 с.

53. *Ершов А. П.* Программирование – вторая грамотность. – Новосибирск, 1982. – 18 с.

54. *Захарова О.* Калькулятор помогает исследовать функции // Математика. – 2008. – № 2. – С. 21–23.

55. *Журавлев И. К., Зорина Л. Я.* Дидактическая модель учебного предмета // Новые исследования в педагогических науках. – М.: Педагогика, 1979. – № 1.

56. *Зеленин В. М., Струнец Р. Ю.* Скажем нет проекту фирмы CASIO // Математика в школе. – 2005. – № 3. – С. 68–70.

57. *Зорина Л. Я.* Программа-ученик-учитель. – М.: Знание, 1989. – 80 с.

58. *Зубрилин А., Лобурева О.* К вопросу об организации исследовательской деятельности школьников (на примере решения уравнений вида $x^n = z$ в табличном редакторе Microsoft Excel // Математика. – 2009. – № 9. – С. 15–20.

59. *Зуев Д. Д.* Школьный учебник. – М.: Педагогика, 1983. – 240 с.

60. *Исаченко Н. А.* Математика и информатика: учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОмГУ, 2006. – 160 с.

61. *Ильясов И. И.* Структура процесса учения. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 200 с.

62. *Карташев С. Н.* Компьютерное моделирование случайных событий // Математика в школе. – 1998. – № 4. – С. 86–87.

63. *Касаткин В. Н., Владыкина Л. И.* Алгоритмы и игры. – Киев: Радянски школа, 1984. – 80 с.

64. *Кийко П. В.* Экономико-математические модели и методы: учеб. пособие. – Омск: Изд-во ФГОУ ВПО ОмГАУ, 2006. – 61 с.

65. *Кондратьев А. А., Лаптев В. В., Ходанович А. И.* Дидактические аспекты дистанционного обучения физике в школе: учеб. пособие для спецкурса. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2001. – 27 с.

66. Концепция информатизации образования // Информатика и образование. – 1990. – № 1. – С. 3–9.

67. *Короткова О., Рощина Н.* Исследуем квадратичную функцию с использованием графического калькулятора // Математика. – 2009. – № 21. – С. 20–23.

68. *Курманалина Ш. Х.* Методология и технология создания электронной методической системы в условиях информатизации образования: монография. – Алматы: Изд-во «Алем», 2002. – 264 с.

69. *Лапчик М. П., Семакин И. Г., Хеннер Е. К.* Методика преподавания информатики: учеб. пособие для студентов пед. вузов. – М.: Академия, 2001. – 624 с.

70. *Лапчик М. П., Рагулина М. И., Смолина Л. В.* Теория и методика обучения информатике: лабораторный практикум / под ред. М. П. Лапчика. – Изд. 2-е испр. и доп. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2006. – 312 с.

71. *Лаутербах Р., Фрей К.* Программное обеспечение процесса обучения // Перспективы: вопросы образования. – 1988. – № 3. – С. 70–79.

72. *Лобанова О. В.* Практикум по решению задач в математической системе Derive. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 102 с.

73. *Лобанова О. В.* Система DERIVE на уроках математики // Математика в школе. – 2001. – № 6. – С. 70–72.

74. *Лодатко Е. А.* Школьнику о вычислениях с микрокалькулятором. – М.: Просвещение, 1985. – 96 с.

75. *Майер В. Р.* Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: монография. – Красноярск: РИО КГПУ, 2001. – 368 с.

76. Математика и информатика: учеб. пособие / под ред. В. Д. Будаева, Н. Л. Стефановой. – М.: Высшая школа, 2004. – 349 с.

77. *Минаева С. С.* Калькулятор на уроках тригонометрии // Математика в школе. – 2008. – № 4. – С. 51–57.

78. *Минаева С. С.* Калькулятор снова приходит в школу // Математика в школе. – 2007. – № 2. – С. 12–15

79. *Минаева С. С.* Решать задачи становится интереснее // Математика. – 2007. – № 21. – С. 12–15.

80. *Никифорова М. А.* Новые компьютерные технологии // Математика. – 2004. – № 29. – С. 2–5.

81. *Никифорова М. А.* Новые компьютерные технологии // Математика. – 2004. – № 30. – С. 10–14.

82. *Никифорова М. А.* Преподавание математики и новые компьютерные технологии // Математика в школе. – 2005. – № 6. – С. 73–74.

83. *Никифорова М. А.* Преподавание математики и новые компьютерные технологии // Математика в школе. – 2005. – № 7. – С. 56–64.

84. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф. пед. кадров / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеева и др. / под ред. Е. С. Полат. – М.: Издат. центр «Академия», 1999.

85. *Пак Н. И., Семенов С. В.* Из опыта использования метода проектов в курсе информатики средней школы // Педагогическая информатика. – 1997. – № 1. – С. 7–11.

86. Педагогическая технология: что это такое? // Математика. – 2008. – № 14. – С. 4–6.

87. *Пейперт С.* Переворот в сознании: дети, компьютеры и плодотворные идеи. – М.: Педагогика, 1989. – 224 с.

88. *Полат Е. С.* Новые педагогические и информационные технологии. – М.: Академия, 1998. – 324 с.

89. Политика в области образования и новые информационные технологии: Нац. доклад РФ на II Междунар. конгр. ЮНЕСКО «Образование и информатика». Москва, 1–5 июля 1996 г. // Информатика и образование. – 1996. – № 6. – С. 17–22.

90. *Попов К. А.* Векторы, фракталы и компьютерное моделирование // Математика в школе. – 2006. – № 8. – С. 56–61.

91. *Рагулина М. И.* Информационные технологии в математике: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Издат. центр «Академия», 2008. – 304 с.

92. *Резник Н. А., Ежова Н. М.* Отдельные проблемы интерфейса компьютерных средств обучения. – Мурманск: МИЭП, 2003. – 36 с.

93. *Роберт И. В.* Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы: перспективы использования. – М.: Школа-Пресс, 1994. – 128 с.

94. *Розов Н. Х.* Консультационный сайт по математике для школьников и учителей // Математика. – 2005. – № 1. – С. 3–8.

95. Российский энциклопедический словарь / гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2000. – 385 с.

96. *Садовничий В. А.* Математическое образование: настоящее и будущее // Доклад на Всероссийской конф. «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков». – Дубна, 2000. – 23 с.

97. *Свириденко С. С.* Современные информационные технологии. – М.: Радио и связь, 1989. – 213 с.

98. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.

99. *Селевко Г. К.* Современные образовательные технологии: учеб. пособие. – М.: Народное образование, 1998. – 324 с.

100. *Селиванов В. Л., Селиванова Э. Т.* Методика обучения основам компьютерного моделирования. – Новосибирск: НГПУ, 2002. – 165 с.

101. *Сергеев П.* Интернет в помощь учителю и ученику // Математика. – 2005. – № 18. – С. 57–60.

102. *Сергеев П.* Интернет и кружки по математике // Математика. – 2005. – № 21. – С. 3–6.

103. *Серов З.* Особенности применения калькуляторов в курсе математики 5–6 классов // Математика. – 2007. – № 21. – С. 16–17.

104. *Скибицкий Э. Г., Хомина Л. И.* Психолого-педагогические аспекты дистанционного обучения. – Новосибирск: НИПК и ПРО, 1999. – 138 с.

105. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Изображение фигур с помощью «ADOBE ILLUSTRATOR» // Математика в школе. – 2002. – № 10. – С. 46–50.

106. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Компьютер помогает геометрии. – М.: Дрофа, 2003. – 56 с.

107. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Паркеты и их иллюстрация в графическом редакторе «PAINT» // Математика в школе. – 2000. – № 8. – С. 54–55.

108. *Совертков П. И.* Занимательное компьютерное моделирование в элементарной математике: учеб. пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2004. – 384 с.

109. *Совертков П. И.* Модели геометрии Лобачевского: учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2007. – 143 с.

110. *Совертков П. И.* Некоторые направления развития поисковой деятельности учащихся по математике и информатике: учеб. пособие. – Сургут: РИО СурГПУ, 2007. – 270 с.

111. *Совретков П. И., Абдулаев С. А.* Равносторонние треугольники и точка Ферма на экране компьютера // Элементарная математика, математическое образование, геометрия и информатика. – СПб.: ТОО «Мифрил», 2001. – № 6. – С. 52–59.

112. *Совертков П. И., Тушканов И. М.* Арбелос Архимеда на экране компьютера // Элементарная математика, математическое образование, геометрия и информатика. – СПб.: ТОО «Мифрил», 1999. – № 2. – С. 68–75.

113. *Сорокин К. А.* Использование компьютера при подготовке типовых расчетов для V класса // Математика в школе. – 1999. – № 3. – С. 45–52.

114. *Сохор А. М.* Объяснение в процессе обучения: Элементы педагогической концепции. – М.: Педагогика, 1988. – 128 с.

115. Технология обучения: вопросы и ответы // Математика. – 2008. – № 14. – С. 6–9.

116. *Удалов С. Р., Воронина О. В.* Информационные технологии обучения: учеб. пособие для студентов высших педагогических учебных заведений / под общей ред. М. П. Лапчика. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004. – 176 с.

117. *Федер Е.* Фракталы: пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 280 с.

118. *Федотова Т. И.* Профессионально ориентированные задачи как содержательный компонент математической подготовки студентов технического вуза в условиях уровневой дифференциации: дис. … канд. пед. наук. – Омск, 2009. – 217 с.

119. *Харитонова О. В.* 3D STUDIO MAX на уроках стереометрии // Математика в школе. – 2006. – № 8. – С. 61–64.

120. *Цакарь А. Я.* Уроки развития воображения: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во «РИФплюс», 1997. – 166 с.

121. *Чирва Т., Жесткова А.* Интегрированный урок «Вписанные углы. Графический редактор» // Математика. – 2008. – № 2. – С. 24–25.

122. *Щербатых С.* Информационное обеспечение стохастической линии // Математика. – 2008. – № 1. – С. 46–47.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Понятие педагогической технологии и суть информационных технологий обучения 3

§ 2. Истоки становления информационных технологий обучения, их основы и дидактические функции..... 17

§ 3. Информационные технологии в обучении геометрии 38

§ 4. Информационные технологии в обучении курсам «Алгебра» и «Алгебра и начала анализа»..... 75

§ 5. Информационные технологии в обучении теории вероятностей и математической статистике..... 117

Литература 141

Научное издание

ДАЛИНГЕР Виктор Алексеевич

Избранные вопросы информатизации школьного математического образования: монография

Монография

Подписано в печать 30.06.2016.
Электронное издание для распространения через Интернет.

ООО «ФЛИНТА», 117342, Москва, ул. Бутлерова, д. 17-Б, офис 324.
Тел./факс: (495)334-82-65; тел. (495)336-03-11.
E-mail: flinta@mail.ru; WebSite: www.flinta.ru