В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Омск - 2010

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

В.А. Далингер, С.Д. Симонженков

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Омск - 2010

Печатается по решению редакционно-издательского совета ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

ББК 22.161 я7

Д. 152

Далингер В.А., Симонженков С.Д. Избранные главы математического анализа в задачах: учебное пособие. – Омск: Изд-во ООО «Амфора», 2010. – 126 с.

ISBN 978-5-904947-04-0

Данное учебное пособие предназначено для учащихся старших классов и студентов математических специальностей педвузов. Материал пособия может быть полезен при подготовке школьников и студентов к математическим олимпиадам, при создании соответствующего элективного курса или дисциплины по выбору. Учителя и вузовские преподаватели найдут здесь немало примеров, иллюстрирующих сущность понятий и методов математического анализа, а также межпредметные связи этого курса с другими.

ББК 22.161 я7

ISBN 978-5-904947-04-0

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение математического анализа является неотъемлемой частью образования по любой специальности, так или иначе связанной с математикой или использующей ее методы. В последние десятилетия вышло огромное число учебных пособий по анализу. В море литературы нельзя не отметить «вечно зеленые» источники – это прежде всего учебники Фихтенгольца [32, 33], любимые авторами с давних студенческих времен. Вспоминается одна байка про влюбленного студента матфака, который своей пассии вместо стихов вдохновенно читал любимые места «из Фихта» (увы, студентка – предмет его обожаний – училась на филфаке…). В Уральском государственном университете на семинаре известного математика В.К.Иванова однажды некоторая проблема долго не поддавалась решению даже «мозговым штурмом», но все-же была решена руководителем семинара, который сказал участникам после изложения решения: «Читайте Фихтенгольца!».

Другой источник из числа «вечно зеленых» – это переводной двухтомник анализа Р.Куранта. На авторов в свое время большое впечатление произвел особенно первый том [17]. Книга представляет собой мастерски написанный крупным математиком курс анализа, адресуемый будущим учителям и научным работникам. Как и у Фихтенгольца, материал сопровождается тщательно подобранными и систематизированными задачами и упражнениями, причем с решениями. Автор в одном из предисловий писал: «Больше всего обратит на себя внимание то, что я порываю с отжившей традицией разделять дифференциальное и интегральное исчисления. Это разделение, не обоснованное ни дидактически, ни по существу, ни исторически, мешает выяснению основного пункта – связи между интегралом и производной». Такое совместное изложение (говоря физическим языком, параллельное, а не последовательное) двух разделов анализа весьма импонирует авторам, оно сейчас актуально в связи тенденциями синтеза наук.

Под влиянием книг Фихтенгольца, Куранта, некоторых других источников и написано предлагаемое учебное пособие. В первом приближении оно может рассматриваться как книжка для внеклассного чтения, когда нет заумных теорий, а есть живая задача. Для кого оно предназначено? Конечно, для начинающих, но подготовленных хотя бы в рамках школьного курса анализа. Размышления авторов привели к тому, что 1). Не надо писать пособие, выдерживая систематичность и общепринятую строгую доказательность материала. Ведь таких пособий «не счесть числа»! Но начинающий не выносит педантичности, не делающей различия между существенным и несущественным. 2). Пособие должно быть практически полезным. Поэтому оно написано для школьников старших классов, студентов младших курсов педвузов, учителей и преподавателей, имеющих первоначальную подготовку в области математического анализа и желающих расширить и углубить сведения по этой дисциплине. Ведь многие важные для теории и практики факты остаются за рамками установившихся, традиционных современных разделов анализа для школ и педвузов. Например, «не проходится» формула Стирлинга, играющая важную роль во многих разделах теории вероятностей, математической статистики, теории специальных функций и т.д.

По сравнению со многими зарубежными странами, у нас внедрение элементов анализа в школьную математику началось сравнительно недавно. Тем не менее в издательствах «Наука», «Просвещение» была издана масса интересных учебных пособий, например, источники [2, 14, 16, 30]. Помимо чисто рутинных задач «на закрепление темы» там можно найти и много задач типа олимпиадных. Вообще в последние годы в математических олимпиадах для школьников самого различного ранга возросла по сравнению с предыдущими временами доля задач с элементами математического анализа. Например, доля задач на неравенства, последовательности, непрерывность функции, применение производной. Эта тематика отражена в данном пособии, поэтому оно может быть полезным для «продвинутых» учащихся, желающих попробовать свои силы в олимпиадах.

Если школьные математические олимпиады проводятся давно (в нашей стране с 1930-х г.г.), то аналогичные вузовские олимпиады начались в 1970-х г.г. Для студентов – олимпийцев, будущих педагогов – математиков, в данном пособии тоже найдется кое-что интересное, что можно взять на вооружение. Например, теорему Штольца (дискретный аналог правила Лопиталя) или определенное интегрирование, когда подынтегральная функция удовлетворяет некоторому функциональному уравнению.

Рассматриваемые в каждом разделе иллюстрационные примеры и задачи для самостоятельного решения заимствованы из самых различных источников. Помимо упомянутых выше учебников Фихтенгольца и Куранта – это практикумы по решению задач школьной математики [18, 27, 28, 35], сборники олимпиадных задач для школьников [3, 4, 15] и студентов [25, 26], неувядающий сборник задач Демидовича [13] и его расширенные и углубленные аналоги [5, 20, 29]. Есть и задачи, придуманные авторами.

Идеи историзма, синтеза наук, межпредметных связей также прослеживаются в данном учебном пособии. Особенно это касается связи анализа с геометрией (или геометрии с анализом?). Тот или иной факт из области анализа без утомительных и скучных формальных выкладок становится очевидным, если стать на геометрическую точку зрения. Примером могут быть оценки интеграла от выпуклой функции из раздела 5.2, существенно используемые далее в главе 7 для логарифмической функции при выводе формулы Стирлинга.

Некоторые разделы данного пособия (например, последние) могут быть использованы школьниками и студентами как основа для написания докладов, рефератов, курсовых работ; учителя и преподаватели найдут материал для кружковой работы и элективного курса.

ГЛАВА 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.1. Некоторые предварительные сведения

Последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел, множество значений которой может состоять из элементов любой природы: чисел, точек, функций, множеств и т.д., занумерованных натуральными числами. По определению, последовательность содержит бесконечное число членов, но множество ее значений может быть конечным. Мы рассматриваем здесь только числовые последовательности. Каждую будем записывать в виде $(x_n): x_n = f(n)$, где n пробегает натуральный ряд, f – некоторое правило (аналитическое выражение) для однозначного задания общего члена последовательности. Предполагается, что читатель имеет представления об основных понятиях: предел числовой последовательности и сходимость, арифметические свойства пределов. Но основными «рабочими лошадками» являются: критерий сходимости Коши, «принцип двух милиционеров» (теорема о «зажатой» последовательности), теорема о пределе монотонной последовательности. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 1.1.1. Последовательность задана формулой общего члена

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}.$$

Требуется исследовать ее на сходимость.

Решение. Как распознать, сходится ли последовательность, если заранее ее предел указать не можем? Ответ на вопрос дает критерий Коши : для сходимости необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, т.е. чтобы выполнялось условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $n(\varepsilon)$, что при всех $n > n(\varepsilon)$ и при всех $p \in N$ имеет место неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Геометрически критерий становится очевидным, если члены последовательности изобразить точками на числовой оси. Он тогда утверждает: сходимость сводится к тому, что, начиная с некоторого номера $n(\varepsilon)$, все члены последовательности могут изменяться только в небольшом интервале, который становится сколь угодно малым, если выбрать $n(\varepsilon)$ достаточно большим. Аналитическое доказательство можно найти, например, в работах [17, с.84; 32, с.84-85].

Вернемся к примеру. Имеем

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|.$$

Так как модуль суммы не больше суммы модулей и модуль косинуса не более 1, то

$$|x_{n+p}-x_n|\le\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}.$$

Но правая часть равна

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}.$$

По заданному $\varepsilon>0$ достаточно взять $n(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-1$ для проверки фундаментальности данной последовательности. Ответ: последовательность сходится.

Пример 1.1.2. В решениях многих задач используется следующий результат:

$$\sqrt[n]{n}\to 1\quad(n\to\infty).$$

Требуется дать ему обоснование.

Решение. Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n=n^{\frac{1}{n}}$. Ясно, что x_n можно представить в виде $x_n=1+a_n,\, a_n\ge 0$. Мы хотим доказать, что $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. Начало прозрачное: $n=(1+a_n)^n$. Далее используем биномиальную теорему:

$$n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2+\ldots,$$

где многоточие обозначает некоторую неотрицательную сумму. Поэтому, отбрасывая ее и второе слагаемое, получим при $n>1$, что $0 \le a_n \le \sqrt{\frac{2}{n}}$. Осталось сослаться на «принцип двух милиционеров».

Пример 1.1.3. Исследовать на сходимость последовательности $(x_n),(y_n)$ с общими членами $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{n+1}}$.

Решение. Покажем, что первая последовательность возрастает, вторая – убывает (обе в строгом смысле). Используем как основу классическое неравенство для положительных чисел

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{1.1.1}$$

хорошо известное из школьного курса при $n=2$. Применим его, полагая сначала $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \frac{n}{n-1}$, получим $x_n > x_{n-1}$ (не верьте, но проверьте!). Знак неравенства строгий, так как в (1.1.1) знак равенства имеет место лишь при равных между собой чисел $a_i, i = 1,2,\ldots,n$. Аналогично, заменяя в (1.1.1) n на $n+1$, при $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a_{n+1} = \frac{n-1}{n}$ получим $y_n < y_{n-1}$. Так как $x_n < y_n$, то указанные последовательности ограничены. По теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности обе сходятся, причем к общему пределу (ибо $y_n = x_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$ и последний множитель стремится к 1). Этот общий предел и есть вторая константа – число e. Таким образом, доказано, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{1.1.2}$$

Здесь в правой части заменим n на $n-1$. Возведением в $\frac{1}{n}$ – ю степень получим

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)=1.$$

У этого равенства есть обобщение

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a.$$

Вывод см., например, в работе [29, с.64-65].

Логарифмированием по основанию e из (1.1.2) получим еще одно полезное следствие

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}. \tag{1.1.3}$$

В заключение этого раздела сделаем одно замечание относительно неравенств (1.1.2). Можно предположить их улучшение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+a}\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+b}$$

при всех $n\in N$ и некоторых $a>0, b<1$. Оказалось, что

$$a_{\max}=\frac{1}{\ln 2}=0.442695\ldots,\quad b_{\min}=\frac{1}{2}.$$

Сможете ли Вы это обосновать?

Задачи к разделу 1.1

1.1.1. С помощью критерия Коши докажите, что последовательность с общим членом

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

расходится.

1.1.2. Доказать, что последовательность с общим членом

$$x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

сходится.

1.1.3. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0\ \ (p\in R, a>1)\,,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ \ (a\in R)\,.$$

1.1.4. Двое учащихся спорят по поводу последовательности

$$(x_n):\quad x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$

Один утверждает, что она сходится, другой – наоборот. Кто прав?

1.1.5. Пусть заданы два положительных числа a и b. Положим

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n};\quad n\ge 0, a_0=a, b_0=b\,.$$

Докажите, что они сходятся к общему пределу. Каков его вид как функции от начальных значений a,b ?

1.2. Теорема Штольца

Кто такой Штольц (O.Stolz), авторам в имеющейся литературе выяснить не удалось. Его теорема, формулируемая ниже, – это дискретный аналог правила Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема. Пусть последовательность (y_n) строго возрастает и $\lim_{n\to\infty} y_n=+\infty$. Если последовательность (x_n) такова, что существует предел (конечный или нет)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\,, \tag{1.2.1}$$

то таков же предел имеет последовательность отношений $\frac{x_n}{y_n}$.

Доказательство здесь не приводится, его можно найти, например, у Фихтенгольца [32, с.67 – 68]. В частном случае $y_n=n$ эту теорему историки математики обнаружили ранее у О. Коши. Его результат: если последовательность (x_n) имеет предел, то тот же предел имеет и последовательность средних арифметических $\frac{x_1+...+x_n}{n}$ (а обратное не верно. Например, взять $x_n=(-1)^n$).

Рассмотрим некоторые полезные для дальнейшего примеры.

Пример 1.2.1. К шкале роста функций натурального аргумента примера 1.1.3. сейчас будет сделано добавление:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

Действительно, при $x_n=\log_a n, \quad y_n=n$ придем к пределу

$$\lim_{n\to\infty}\log_a\frac{n}{n-1}=\log_a\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=\log_a 1=0.$$

Внимательный читатель может спросить, на каком основании здесь знаки предела и логарифма были поменены местами? Ответ: в силу непрерывности логарифмической функции. См. об этом далее в разделе 2. Верен и более общий результат:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^p}=0 \quad (p>0).$$

Таким образом, логарифмическая функция натурального аргумента на бесконечности растет медленнее любой степенной функции. Как говорил своим аспирантам нобелиат Лев Ландау, «курица – не птица, логарифм – не бесконечность!».

Пример 1.2.2. Пусть H_n задано как в задаче 1.1.1. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{H_n}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=1$$

в силу неравенств (1.1.3). Получили еще одно доказательство того, что последовательность (H_n) бесконечно большая: ведет себя как $\ln n$ при $n\to\infty$.

Возникает вопрос : как ведет себя разность $H_n - \ln n$ $(n \to \infty)$? Ответ обсуждается в разделе 8.1.

Пример 1.2.3. Пусть

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ясно, что $S_n \to \infty$ (это видно хотя бы из того, что $S_n > H_n$). Какова асимптотика этой последовательности при $n \to \infty$?

Наблюдения за известными частностями

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty) \quad ,$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \frac{1^2 + 2^2 + \ldots n^2}{n^3} \to \frac{1}{3} \quad (n \to \infty)$$

подводят к предположению, что отношение

$$\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > -1)$$

при $n \to \infty$ ведет себя как $\dfrac{1}{p+1}$. Оказывается, что это действительно так. Убедимся в этом на нашем примере, когда $p = -\dfrac{1}{2}$. Согласно (1.2.1) при $x_n = S_n$, $y_n = n^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 2,$$

что находится в согласии с выдвинутым предположением. Итак,

$$S_n \sim 2\sqrt{n} \; (n \to \infty).$$

Задачи к разделу 1.2

1.2.1. Пусть последовательность положительных чисел a_n сходится к a. Тогда последовательность средних геометрических $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ также сходится к a. Верно ли обратное утверждение?

1.2.2. Дано: $a_n > 0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to a$. Тогда и $\sqrt[n]{a_n} \to a$. Верно ли обратное?

1.2.3. Дано: $a_{n+1} - a_n \to a$. Тогда и $\dfrac{a_n}{n} \to a$. Верно ли обратное?

1.2.4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1}\right)$.

1.2.5. Пусть задано $k \in N$. Найти предел последовательности с общим членом

$$u_n = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}.$$

1.3. Индукция

Метод математической индукции применяется в тех случаях, когда нужно доказать, что некоторое утверждение справедливо для любого натурального числа. В таких случаях достаточно проверить справедливость этого утверждения при $n = 1$ (это – база индукции; она может начинаться и с некоторого $n > 1$) и доказать, что для любого натурального числа n из справедливости утверждения при n (индуктивное предположение) вытекает его справедливость при $n + 1$ (индукционный переход).

Этот метод, называемый также принципом математической индукции, широко отражен в школьной учебной и методической литературе (см., например, [14, параграф 2] или [2, гл.8, параграф 1]. Поэтому здесь мы ограничимся лишь двумя примерами, важными для дальнейшего.

Пример 1.3.1. Верно ли, что $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$?

При $n=2$ неравенство верное. Предположим, что при заданном $n\geq 2$ оно остается справедливым. Проверим его истинность при $n+1$, то есть что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1},$$

или что

$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1}.$$

Но это так. Ответ: рассматриваемое неравенство верно при $n\geq 2$.

Пример 1.3.2. Доказать, что при $n>10$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^n. \qquad (1.3.1)$$

Проверяем левое неравенство. База начинается с 1. В индуктивном переходе надо доказать, что

$$(n+1)!>\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Так как $(n+1)!=n!(n+1)$, то обосновываем неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n(n+1)>\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \quad\Leftrightarrow\quad e>\frac{(n+1)^n}{n^n}=(1+\frac{1}{n})^n.$$

Но последнее неравенство верное согласно (1.1.2).

Аналогично доказывается правое неравенство (1.3.1); следует проверить его при $n=11$ и применить тот факт, что $e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

Из неравенств (1.3.1) вытекает, что $n!$ есть среднее взвешенное геометрическое левой и правой частей с весами соответственно $1-\theta, \theta$. То есть

$$n!=n^{\theta}(\frac{n}{e})^n, \theta\in(0,1).$$

Более точное поведение факториала будет дано позже.

Задачи к разделу 1.3

1.3.1. Известно неравенство Бернулли: если числа $x_1, x_2, ..., x_n \in (-1, +\infty)$ одного и того же знака, то $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \ge 1 + x_1 + ... + x_n$. Докажите это в частном, но практически важном случае, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$.

1.3.2. Докажите, что

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ... (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

1.3.3. Доказать, что при $n \ge 2$

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

1.3.4. Поставьте нужные знаки неравенств между

$$(2000)^{2000} ? (2001)^{1999}, \quad 1999^{2000} ? 2000^{1999}.$$

1.3.5. Обоснуйте неравенства

$$n! > n^{\frac{n}{2}} \ (n \ge 2), \quad n! < (\frac{n}{2})^n \ (n \ge 6).$$

1.4. Рекуррентные последовательности

Термин «рекуррентность» (от лат. recurrens – возвращающийся) ввел А.Муавр (1720 г.). Последовательность (x_n) называется рекуррентной порядка p, если она удовлетворяет рекуррентному соотношению (рекуррентной формуле)

$$x_{n+p} = F(n; x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p-1}), \tag{1.4.1}$$

которое позволяет вычислить любой член последовательности, если заданы ее первые p членов. Например, если $x_{n+1} = x_n + d$, имеем рекуррентное соотношение первого порядка, определяющее арифметическую прогрессию. Рекуррентная формула $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ второго порядка задает последовательность Фибоначчи, играющую важную роль во многих прикладных и теоретических задачах. Если функция F в формуле (1.4.1) линейная относительно $x_n, ..., x_{n+p-1}$, то говорят, что последовательность (x_n) является возвратной. Такие последовательности наиболее часто встречаются на практике, к ним иногда с помощью подстановок сводятся нелинейные рекуррентные последовательности.

Исторически идея рекуррентности возникла более двух тысяч лет назад при вычислении длины окружности посредством вписанных и описанных многоугольников. Зададим какое-нибудь целое $N \geq 3$ и обозначим через $p_n \, (n \geq 0)$ периметр правильного $N \cdot 2^n$ – угольника, вписанного в круг диаметра 1, а через q_n – периметр соответствующего описанного многоугольника с тем же числом сторон. Архимед с помощью геометрических рассуждений получил рекуррентные соотношения

$$q_{n+1} = H(q_n, p_n), \quad p_{n+1} = G(q_{n+1}, p_n). \tag{1.4.2}$$

Применяя их при $N = 3$ последовательно пять раз со стартовыми значениями $p_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $q_0 = 3\sqrt{3}$, он дошел до правильного 96 – угольника и получил оценки

$$3\frac{10}{71} < p_5 < \pi < q_5 < 3\frac{1}{7},$$

показывающие нам, что π найдено с погрешностью приблизительно 0.002. На основе метода удвоения числа сторон после Архимеда многие геометры последовательно наращивали количество верных знаков числа π. Рекорд принадлежит ван Цейлену (35 знаков). Заметим, что вместо двумерного рекуррентного соотношения (1.4.2) можно рассматривать две рекуррентные последовательности первого порядка

$$q_{n+1} = \frac{q_n}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + (\frac{q_n}{N2^n})^2}}, \quad p_{n+1} = \frac{p_n}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - (\frac{p_n}{N2^n})^2}}}.$$

Заметим, что в своих вычислениях Архимеду пришлось оценивать $\sqrt{3}$. Например, он брал приближения $\frac{265}{153}$ и $\frac{1351}{780}$ соответственно с недостатком и избытком :

$$\sqrt{3}-\frac{265}{153}=0.00002466..., \quad \frac{1351}{780}-\sqrt{3}=0.00000047....$$

Как Архимед мог получить такие точные приближения? Об этом можно только догадываться. По-видимому, использовался метод, известный ранее пифагорейцам. Он основан на рекуррентных формулах

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_n = 3x_{n-1} + y_{n-1}; \quad n \geq 1, x_0 = 1, y_0 = 1.$$

Оказывается, отношение $z_n = \frac{y_n}{x_n}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению первого порядка

$$z_n = \frac{3+z_{n-1}}{1+z_{n-1}}$$

и стремится к $\sqrt{3}$ (докажите !).

После метода Архимеда вычисления числа π следующим исторически важным был метод Герона извлечения квадратного корня, основанный на рассмотрении рекуррентной последовательности первого порядка

$$(x_n): x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \quad n = 0,1,2,..., \tag{1.4.3}$$

где a – положительное число, из которого нужно извлечь квадратный корень, x_0 – какое - нибудь начальное приближение к корню. Несложный анализ показывает, что при $n \geq 1$ последовательность убывает, ограничена снизу и сходится к $\sqrt{a}$. Об этом «рассказывает» нам рис 1.

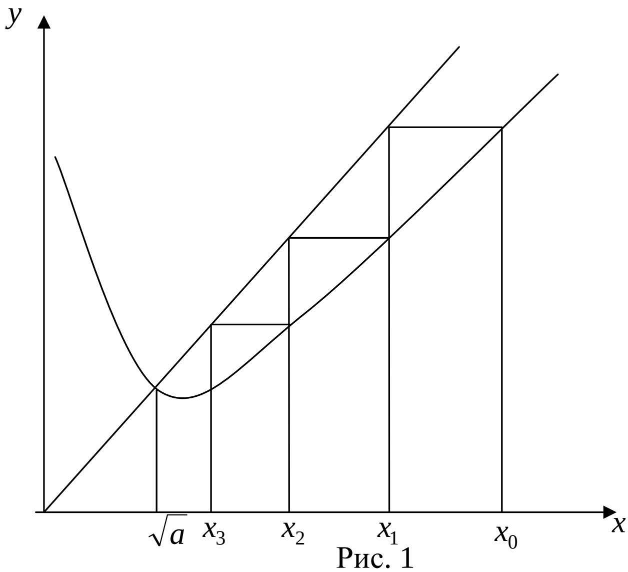


Рис. 1

Для оценки скорости сходимости положим $\delta_n = x_n - \sqrt{a}$, тогда $\delta_{n+1} \le \frac{\delta_n^2}{2\sqrt{a}}$, т.е. на каждой последующей итерации погрешность пропорциональна квадрату погрешности на предыдущей итерации (iteratio – результат неоднократного применения какой-нибудь математической операции, в данном случае вычислений согласно равенству (1.4.3)). Таким образом, метод Герона высокоскоростной, он и сейчас используется в компьютерных вычислениях.

Идея рекуррентности часто наблюдается при решении комбинаторных задач, когда, пользуясь рекуррентным соотношением, задачу об n предметах можно свести к задаче об $n-1$ предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую легко решить. Соответствующие многочисленные примеры можно найти в великолепной книге Виленкиных [6].

Решить рекуррентное соотношение (1.4.1) – это значит найти формулу общего члена $x_n = f(n)$. Для решения этой задачи общего правила нет. Но для весьма часто встречающегося класса линейных рекуррентных соотношений, особенно с постоянными коэффициентами, теория хорошо развита. Ее кратко и без выводов изложим ниже в частном случае, когда порядок равен двум.

Пример 1.4.1. Пусть $x_0 = a, x_1 = b$ – заданные числа и при $n \geq 2$

$$x_n = (1 - \frac{1}{n}) \cdot x_{n-1} + \frac{1}{n} \cdot x_{n-2}.$$

Требуется решить это линейное рекуррентное соотношение второго порядка.

В решении запишем исходное равенство в виде

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{n}(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Из него последовательно находим

$$x_2 - x_1 = -\frac{1}{2}(b-a), \quad x_3 - x_2 = (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{2})(b-a), \ldots,$$

$$x_n - x_{n-1} = (-\frac{1}{n}) \cdot (-\frac{1}{n-1}) \ldots (-\frac{1}{2})(b-a)$$

Складывая эти равенства, получим

$$x_n - x_1 = \left[-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \right](b-a) \Rightarrow x_n = b + (b-a)\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}.$$

Формула общего члена выведена. Каков от нее прок? Оказывается она позволяет найти предел рассматриваемой последовательности. При $n \to \infty$ сумма в правой части, как увидим позже, устремится к $-e^{-1}$. Поэтому предел

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{e}a + (1 - \frac{1}{e})b$$

есть среднее арифметическое взвешенное начальных значений с указанными весами.

Пример 1.4.2. Дано: $F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0)$. Найти формулу общего члена.

Рассмотрим частный случай (1.4.1):

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad n \geq 0,$$

где a, b – заданные числа. Для решения этого рекуррентного соотношения сначала надо решить так называемое характеристическое уравнение $t^2 = at + b$. Возможны следующие случаи.

1). Уравнение имеет два различных действительных корня t_1, t_2 (дискриминант положительный). Формула общего члена тогда

$$x_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n\ , \quad C_1, C_2 \in R\,.$$

Если при этом начальные значения x_0, x_1 известны, то константы однозначно определяются.

2). Дискриминант равен нулю. Тогда $x_n = (C_1 + C_2 n)\cdot(\frac{a}{2})^n$.

3). Дискриминант отрицательный : характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни. Запишем их в тригонометрической форме $t = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$. Тогда формула общего члена

$$x_n = C_1 r^n \cos n\varphi + C_2 r^n \sin n\varphi\,.$$

Эти факты изложены на школьном уровне в работе [2, гл.8, параграф 2], они могут быть доказаны индукцией. Их глубокие обобщения см., например, в работе [8].

Вернемся к примеру 1.4.2. Характеристическое уравнение $t^2 = t + 1$ имеет корни

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Общим решением будет

$$F_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n\,.$$

Но ведь по условию начальные значения заданы. Используя их, будем иметь

$$C_1 + C_2 = 0,\ C_1 t_1 + C_2 t_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Получили так называемую формулу Бине (1843 г.) для чисел Фибоначчи

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

но, как оказалось, она была ранее опубликована Д.Бернулли в 1728 г.

Задачи к разделу 1.4

1.4.1. Найдите формулы общих членов последовательностей $(x_n),(y_n)$, если $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$, $y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$; $n \ge 1, x_0 = y_0 = 1$. Тем самым Вы докажете, что диофантово уравнение $y^2 - 2x^2 = \pm 1$ имеет бесконечное множество решений в целых числах (задача, которой занимались пифогорейцы).

1.4.2. Оказывается, что методом Архимеда можно вычислять не только число π, но и значения некоторых элементарных функций. Зададим пару положительных чисел a,b и построим последовательности $(a_n),(b_n), n \ge 0$ по формулам, аналогичным (1.4.2) : $a_{n+1} = H(a_n, b_n)$, $b_{n+1} = G(a_{n+1}, b_n)$; $a_0 = a$, $b_0 = b$. Докажите, что они сходятся к некоторому общему пределу. Он называется средним Архимеда исходных чисел a,b и обозначается $\alpha(a,b)$. Докажите, что при $x > 0$

$$\ln x = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})\,\alpha\,(\frac{2x}{x^2+1}, 1).$$

1.4.3. Найдите формулы общего члена последовательностей, заданных следующими условиями :

1). $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}$ $(n \ge 2)$.

2). $a_1 = 1$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}^2 + 1}$ $(n \ge 2)$.

1.4.4. Найдите указанные ниже пределы в случаях:

1). $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + (\dfrac{2}{3})^n$ $(n \ge 1)$; $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{3}{2})^n x_n = ?$

2). $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ $(n \ge 2)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = ?$

1.4.5. Даны три положительных числа a,b,c. Пусть

$$a_{n+1} = A(b_n, c_n), \quad b_{n+1} = A(a_n, c_n), \quad c_{n+1} = A(a_n, b_n); \quad n \ge 0.$$

Найдите общий предел этих трех последовательностей. Каков аналогичный результат, если вместо A использовать оператор G ?

ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

К понятию предела вплотную подошли еще древнегреческие геометры при вычислении площадей и объемов некоторых фигур с помощью метода исчерпывания. Но в явном виде понятие предела в древнегреческой математике не было сформулировано. Существенные шаги вперед в развитии представления о пределе были сделаны в эпоху создания математического анализа. Современная теория пределов начала формироваться в начале 19-го века в связи с изучением свойств различных классов функций, прежде всего непрерывных, а также в связи с доказательствами существования основных объектов анализа (интегралов, сумм рядов и т.д.). Впервые в работах Коши понятие предела стало основой построения дифференциального и интегрального исчисления. Им были получены признаки существования, основные теоремы о пределах. Окончательное понятие предела функции оформилось на базе теории действительного числа в работах Больцано и Вейерштрасса.

В большинстве учебных пособий понятие непрерывности функции строится на основе понятия ее предела. Есть и источники, в которых, наоборот, за основу берется понятие непрерывности функции в точке (например, на языке окрестностей), а понятие предела тогда выводное. Мы придерживаемся традиционного подхода. В настоящее время вышла многочисленная литература учебно-методического характера по введению в анализ. Для школьников это, например, источники [14, 16]. Поэтому мы здесь не излагаем теорию, а демонстрируем ее на задачах. От читателя предполагается знание азов: что такое предел функции в точке и ее непрерывность (по Коши и по Гейне), знание свойств пределов, локальных и глобальных свойств непрерывных функций.

2.1. Применение непрерывности функций при вычислении пределов

Часто непрерывность функции мы, сами того не замечая, используем для нахождения предела. Вот простой пример. Требуется найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}-1).$$

Здесь «подлимитное» выражение преобразуется к виду $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$, после чего дается ответ: $\dfrac{1}{2}$. Почему? В силу непрерывности полученной функции в точке 0:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\frac{1}{2}.$$

Другой пример: найти предел последовательности с членами

$$x_1=\sqrt{2},\quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ldots$$

(у x_n n радикалов). Ясно, последовательность возрастает и ограничена сверху, например, двойкой. Поэтому предел a существует. Для его нахождения в рекуррентной формуле $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ напишем слева и справа по знаку предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_n}.$$

Знаки предела и радикала поменяем местами. Это можно сделать ввиду непрерывности функции $f(x)=\sqrt{x}$. Получим $a=\sqrt{2+a}\Rightarrow a=2$.

Продолжим список примеров. Из определения числа e

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

на основе понятия предела функции на языке последовательностей (по Гейне) отсюда выведено, что

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e,\quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

([32, с.124-125]). Отсюда получены часто используемые пределы

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{a^a-1}{\alpha}=\ln a,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^p-1}{\alpha}=p \qquad (2.1.1).$$

Например, первое равенство получается из $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ логарифмированием обеих частей с последующей переменой местами знаков логарифма и предела (опять же в силу непрерывности логарифмической функции).

Задачи к разделу 2.1

2.1.1. Найти пределы последовательностей с общими членами

$$x_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+1}),\quad y_n=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}).$$

2.1.2. Найдите предел $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ в случаях $f(x)=\sin x, \cos x, tgx$.

2.1.3. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$ при $x\to 0,\quad x\to+\infty$.

2.1.4. Функция $f:R\to R$ непрерывна в точке 0, $f(0)=1$ и

$$f(2x)=f(x)\cdot\cos x\quad \forall x.$$

Сможете ли Вы ее указать?

2.1.5. Даны положительные числа a,b. Функция

$$M(t)=\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$$

не определена в точке $t=0$. Как ее доопределить, чтобы в ней функция была непрерывной?

2.2. Свойства непрерывных функций

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $a\in R$ и $f(a)>0$, то знак неравенства сохранится и в некоторой окрестности точки a.

Это локальное свойство может послужить доказательством глобального свойства – теоремы о нуле непрерывной функции $f:[a,b]\to R$: если $f(a)<0,\ f(b)>0$, то существует точка $c\in(a,b)$ со свойством $f(c)=0$. В учебных пособиях для доказательства обычно приводится метод половинного деления (дихотомия Больцано), служащий основой приближенного решения уравнения $f(x)=0$. Положим $X=\{x\in[a,b]: f(x)<0\}$. Это множество непустое и ограниченное, поэтому существует его верхняя грань c. То есть выполняются два условия :

1). $x\le c \quad \forall x\in X$. 2). Для любого $\varepsilon>0$ существует $x_\varepsilon\in X$, $x_\varepsilon>c-\varepsilon$.

Проверим, что $f(c)=0$. От противного: пусть $f(c)\ne 0$. Рассмотрим сначала случай $f(c)<0$. По непрерывности знак неравенства сохранится и при некотором $x_0>c$. Получаем противоречие с условием 1). Если $f(c)>0$, то знак неравенства сохранится в некоторой левой полуокрестности $(c-\varepsilon, c]$, свободной от точек X.

Получили противоречие с условием 2). Следовательно, $f(c)=0$.

Заметим, что теорема о нуле равносильна теореме о промежуточном значении : любое число между $f(a)$ и $f(b)$ служит значением функции в некоторй точке $c\in(a,b)$.

Описанное локальное свойство сохранения знака справедливо и в «глобальном» варианте : если функция непрерывна на промежутке и не обращается на нем в ноль, то она сохраняет знак на этом промежутке. На этом свойстве базируется широко используемый «метод интервалов».

2.3. Применения теоремы о нуле в алгебре и геометрии

На вопрос о том, сколько корней имеет уравнение $2^x=4x$, чаще всего дается ответ : один. Да вот же он : $x=4$. Между тем, непрерывная функция $f(x)=2^x-4x$ на концах отрезка $[0,\frac{1}{2}]$ принимает значения разных знаков, поэтому кроме указанного корня есть еще один – между 0 и 0.5.

Рассмотрим далее одну геометрическую задачу. Имеется треугольная призма с достаточно большой высотой. Можно ли плоским сечением из нее вырезать правильный треугольник?

Сначала рассечем призму плоскостью, перпендикулярной какому-нибудь ребру. Пусть a,b,c – длины сторон полученного треугольника и $a > b > c$. На противоположном к большей стороне ребре через выбранную точку A проведем секущую плоскость произвольно. Разрежем призму вдоль ребра, содержащего A, развернем призму на плоскости. Если в сечении – правильный треугольник, то после разворотки длина его стороны, как явствует из рис. 2, удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - c^2}\,. \qquad (2.2.1)$$

Функция

$$f(x) = \sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - c^2}$$

на концах отрезка $[a, \sqrt{a^2 + b^2}]$ принимает значения разных знаков. Уравнение (2.2.1) имеет решение, поэтому ответ на вопрос задачи положительный.

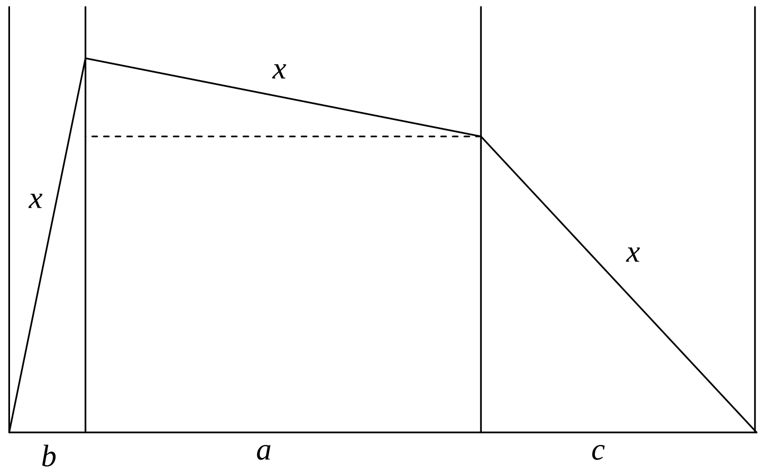


Рис. 2.

Задачи к разделам 2.2 и 2.3

2.2.1. Из теоретической астрономии на страницы задачников пришло уравнение

$$x-\varepsilon\sin x=y \quad (0<\varepsilon<1)$$

(уравнение Кеплера). Доказать, что при любой заданной правой части оно имеет единственное решение.

2.2.2. Функция $f:R\to R$ непрерывная и принимает значения разных знаков. Доказать, что найдутся члены a,b,c $(a<b<c)$ некоторой арифметической прогрессии со свойством $f(a)+f(b)+f(c)=0$.

2.2.3. Функция $f:R\to R$ непрерывна в нуле и

$$2f(2x)=f(x)+x \quad \forall x\in R.$$

Найти эту функцию.

2.2.4. а). Функция $f:[0,1]\to[0,1]$ непрерывная. Существует ли неподвижная точка?

б). Дана функция $f:R\to R$. Докажите, что если уравнение $f(x)=x$ не имеет корней, то уравнение $f(f(x))=x$ – также.

2.2.5. Математик с дочкой приехали к теще на блины. После визита возникли следующие задачи.

1). На столе лежит первый блин (как всегда, комом). Можно ли его прямолинейным разрезом ножа, параллельным краю стола, разрезать на две равновеликие (по площади) части? Вариант: разрез должен проходить через данную точку стола.

2). Дочка на географической карте разглядывает Каспийское море. Можно ли около него описать квадрат?

3). Тещин кот свернулся клубочком не кейсе математика. Можно ли кота вписать в куб?

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная – основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции $f(x)$ при изменении аргумента x. Для каждого x – это, по определению, есть предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

если он существует. Термин «Производная» ввел Лагранж (1797 г.) и использовал обозначения y', $f'(x)$. Ранее Лейбниц (1675 г.) применял символ dy/dx. От читателя требуются знания таблицы производных и правил дифференцирования, свойств поведения функции в терминах производных. Соответствующий теоретический материал досконально изложен в многочисленной учебной и методической литературе, поэтому мы ограничиваемся лишь некоторыми примерами.

3.1. Применение производной к доказательству тождеств

Пример 3.1.1. Докажем биномиальную теорему :

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k \quad (n\in N). \tag{3.1.1}$$

Видно, что выражение $(1+x)^n$ должно быть многочленом степени n от x:

$$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n.$$

При $x=0$ имеем $a_0=1$. Обе части равенства почленно дифференцируем по x один, два, три и т.д. раз. Получим тождества

$$n(1+x)^{n-1}=a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1},$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=2a_2+3\cdot 2a_3x+...+n\cdot(n-1)a_nx^{n-2},$$

$$\dots$$

При $x=0$ из них получаем

$$a_1 = n, \quad a_2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \quad a_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \dots .$$

И вообще

$$a_k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k\,!} = C_n^k .$$

Используемый здесь метод неопределенных коэффициентов будет неоднократно применен в дальнейшем.

Дифференцирование помогает установить ряд свойств биномиальных коэффициентов. Например, известны равенства

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n\, 2^{n-1}, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kC_n^k = 0 .$$

Как их получить? Дифференцируйте почленно равенство (3.1.1), после чего берите $x = \pm 1$.

Пример 3.1.2. Доказать тождество

$$\arcsin x = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) .$$

Решение стандартное: введем функцию $f(x)$ как разность между левой и правой частью и найдем ее производную. Увидим, что она равна нулю во всякой точке $x \in (-1, 1)$. Но тогда функция постоянная: $f(x) = C$. Полагая $x = 0$, получим $C = 0$, откуда вытекает нужное нам равенство. В вычислительной практике оно используется обычно при $|x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. Иначе применяют формулу

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

вывод которой проводится совершенно аналогично.

3.2. Применение производной к доказательству неравенств

Пример 3.2.1. Доказать, что $e^x \ge 1 + x$ (знак равенства имеет место лишь при $x = 0$).

Полезно, выполнив чертеж, уяснить себе геометрический смысл неравенства. В аналитическом доказательстве схема действий как и в предыдущем примере: исследуем функцию $f(x) = e^x - 1 - x$ на монотонность. Так как $f'(x) = e^x - 1 > 0$ при $x > 0$, то на $[0, +\infty)$ функция строго возрастает: из неравенства $0 < x$ следует $f(0) < f(x) \Rightarrow 0 < e^x - 1 - x$. Аналогично при $x < 0$ производная отрицательная, значит, на промежутке $(-\infty, 0]$ функция строго убывает. Из неравенства $x < 0$ вытекает $f(x) > f(0)$, откуда следует результат.

Из этого простого модельного примера вытекает ряд полезных следствий. Основываясь на нем, Д.Пойа придумал интересное доказательство неравенства

$$A = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \geq G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел. Полагая $x_i = \frac{a_i}{A} - 1$, перемножим почленно неравенства

$$\exp(x_i) \geq \frac{a_i}{A} \quad (i = 1,...,n).$$

Получим

$$\exp(\sum_i x_i) \geq \frac{a_1 ... a_n}{A^n}.$$

Но слева число e возводится в нулевую степень. Отсюда и результат. Заметим, что здесь знак равенства возможен лишь при нулевых x_i, то есть когда $x_1 = ... = x_n = 0$.

Из неравенства примера 3.2.1 легко вывести неравенства

$$1 - t \leq e^{-t} \leq \frac{1}{1+t} \quad (t \geq 0), \tag{3.2.1}$$

которые пригодятся в дальнейшем. Полагая $x = e^t - 1$, отсюда, в свою очередь, получим оценки логарифма

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x \quad (x \geq 0),$$

которые мы наблюдали в частном случае $x=\frac{1}{n}$ ранее. Но есть и более узкий «коридор»:

$$\frac{2x}{2+x}\le \ln(x+1)\le \frac{x(2+x)}{2(1+x)} \quad (x\ge 0), \tag{3.2.2}$$

где, как и выше, знаки равенства имеют место лишь при $x=0$. Эти оценки существенно будут использованы позже при выводе формулы Стирлинга.

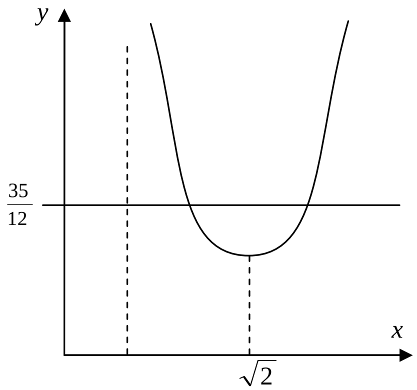
3.3. Применение производной в алгебре и геометрии

Пример 3.3.1. Сколько решений имеет уравнение $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$?

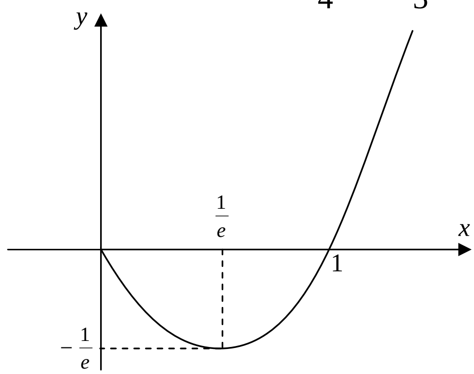
В решении нарисуем график функции $f(x)$ – левой части данного уравнения в очевидной области допустимых значений $x>1$. Производная

$$f'(x)=1+\frac{-1}{(x^2-1)^{3/2}}$$

обратится в ноль только при $x=\sqrt{2}$. Несложный анализ показывает, что в этой стационарной точке функция имеет минимум, равный $2\sqrt{2}$. Так как дробь $\frac{35}{12}$ больше этого значения, то горизонталь $y=\frac{35}{12}$ пересечет график функции два раза (рис. 3 а)). Абсциссы точек пересечения найти нетрудно: $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{3}$.



а)



б)

Рис. 3

Таким графическим методом можно решать многие задачи с параметром. Например, уравнение Зоммерфельда $x\ln x = a$ в зависимости от правой части имеет один корень при $a \geq 0, a = \frac{1}{e}$, два корня при $\frac{1}{e} < a < 0$, не имеет корней при $a < \frac{1}{e}$. График левой части уравнения представлен на рис. 3 б).

Пример 3.3.2. Длина наибольшей стороны равнобедренной трапеции равна 13, а периметр 28.

а). Найти стороны трапеции, если ее площадь равна 27.

б). Может ли площадь такой трапеции равняться 27.001 ?

Пусть AD – большее основание, а BH – высота (рис. 4). Тогда $AD = 13$. Действительно, в противном случае $AB = CD = 13,\ AD + BC = 2$ и площадь составила бы $BH \cdot \frac{AD + BC}{2} < 27$. Пусть $AB = x$, тогда $BC = 15 - 2x,\ AH = x - 1,\ BH = \sqrt{2x - 1}$. Поэтому площадь будет такой:

$$S = \sqrt{2x - 1} \cdot (14 - x).$$

Осталось подобрать $x \in (\frac{1}{2}, 14)$ так, чтобы $S = 27$. Вопрос задачи б) настораживает, наводит на мысль, что площадь более 27 сделать нельзя. Поэтому исследуем функцию площади на экстремум по стандартной методике. Опуская детали, которые читатель восстановит самостоятельно, укажем ответ : $x = 5$ – точка максимума, а максимальное значение равно 27. Итак, $AB = BC = CD = 5$.

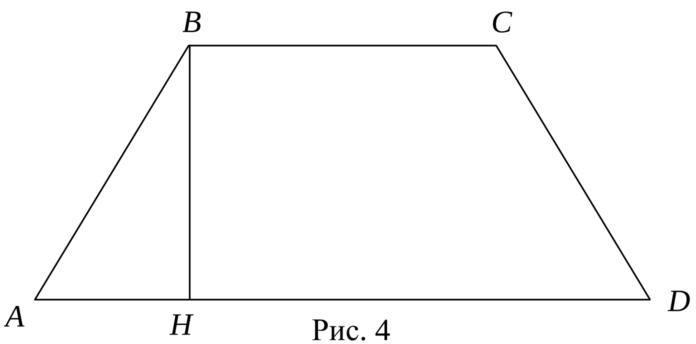


Рис. 4

3.4. Применение производной для решения функциональных уравнений

Функциональным уравнением называют равенство, выражающее определенное свойство искомой функции, по которому она должна быть найдена. Примерами таких уравнений являются $f(x)=f(-x)$, $f(x+T)=f(x)$, выражающие свойства четности и периодичности.

Функция $f(x)$ называется решением данного функционального уравнения, если она удовлетворяет ему при всех значениях аргумента в области ее определения. Например, функции $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$ являются решениями приведенных соответственно выше уравнений. Решить данное функциональное уравнение – значит найти все его решения (их множество может оказаться и пустым).

Рассматриваемая тема нашла свое отражение в школьной математике. Так, в пособии [28, с.27-29] указаны некоторые решения функциональных уравнений (метод Коши, метод подстановки). В этом разделе пособия к ним добавим еще один. Сначала – материал для поля деятельности.

А. $f(x+y)=f(x)+f(y) \quad (x,y\in R)$.

Б. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad (x,y\in R)$.

В. $f(xy)=f(x)+f(y) \quad (x,y>0)$.

Г. $f(xy)=f(x)\cdot f(y) \quad (x,y>0)$.

Д. $f(y+x)+f(y-x)=2f(x)\cdot f(y) \quad (x,y\in R)$.

В скобках указаны области допустимых значений.

Эти уравнения впервые были рассмотрены Коши, который и дал их решения на классе непрерывных функций. Подробности можно найти в работе [32, с.157-162]. Теперь попытаемся их решить на более узком классе дифференцируемых функций. Идея будет состоять в том, чтобы от уравнения функционального перейти к уравнению дифференциальному. Поясним сказанное на примере уравнения А.

При $x = y = 0$ из равенства А следует $f(0) = 0$. Считая $y \neq 0$, запишем уравнение в виде

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y}$$

и выполним предельный переход при $y \to 0$. Придем к дифференциальному уравнению $f'(x) = f'(0)$. Так как производная в любой точке одна и та же, то функция линейная : $f(x) = Cx + D$. Но так как $f(0) = 0$, то $D = 0$. Итак, единственной дифференцируемой функцией $f : R \to R$, удовлетворяющей условию А, является линейная функция $f(x) = Cx$.

Задачи к разделу 3

3.1. а). Постройте график функции $f(x) = arctgx + arctg\frac{1}{x}$.

б). Находя некоторый неопределенный интеграл $I = \int f(x)dx$, студент получил:

$$I = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Заглянув в ответ задачника, увидел там $arcctgx + C$. Неужели была ошибка?

3.2. Даны уравнения

а). $8^x(3x+1) = 4$; б). $(\frac{1}{16})^x = \log_{\frac{1}{16}} x$.

На вопрос: «Каковы их решения?» учащиеся давали ответы угадыванием: корни соответственно $x = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}$. Возможны ли другие верные ответы?

3.3. а). Что больше: $\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{7}$ или $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}$? б). e^{π} или π^{e} ?

Ответ дать без применения средств вычислений.

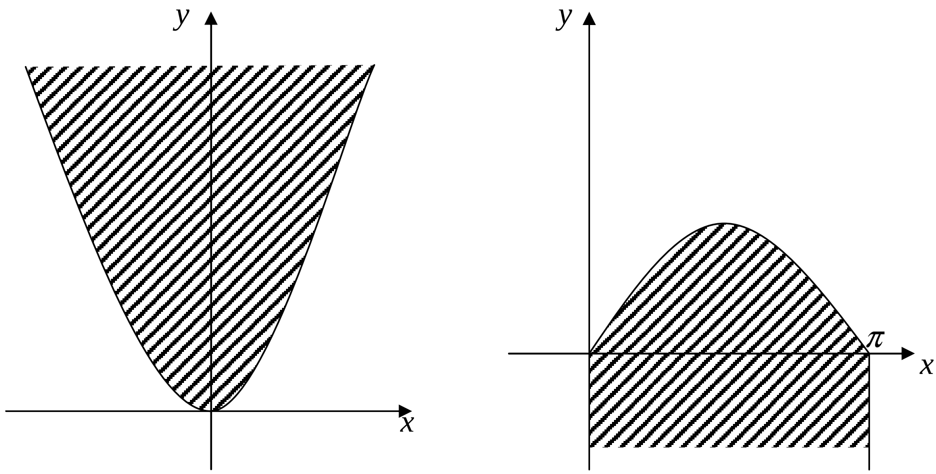
3.4. Докажите равенства (3.2.2).

3.5. Решите функциональные уравнения Б, В, Г, Д сведением их к дифференциальным.

ГЛАВА 4. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ. НЕРАВЕНСТВО ИЕНСЕНА

Искусством доказывать неравенства овладеть далеко не просто – требуется опыт, интуиция, умение применять различные технические приемы. В данном разделе излагается один из них, основанный на понятии выпуклости функции. Относительно него в учебной литературе нет однозначности : часто из двух авторов один под выпуклостью понимает то, что другой – под вогнутостью.

Нарисуем график функции $y = x^2$. Мы видим (рис. 5 а)), что надграфик (сам график и все лежащие выше него точки) является выпуклым множеством – вместе с любыми своими двумя точками он содержит весь отрезок с концами в них. Выпуклым является и подграфик функции $y = \sin x,\ x \in [0, \pi]$ (рис. 5 б)).

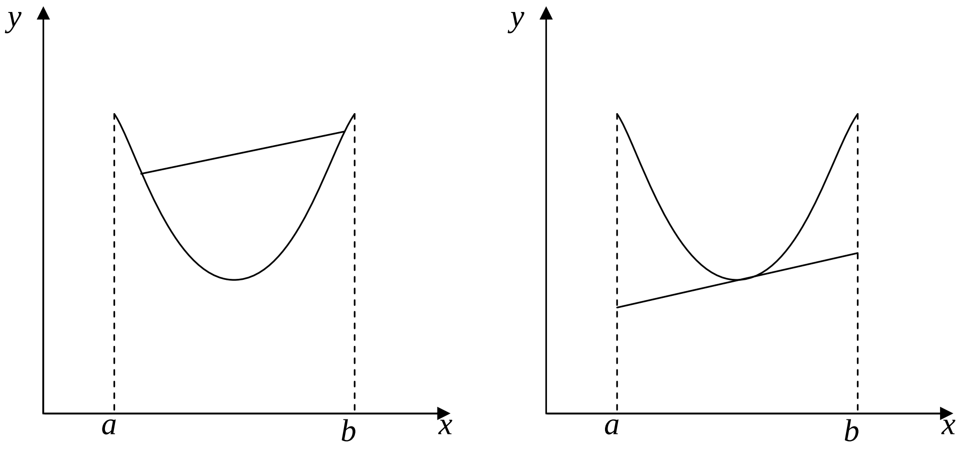


а) б)

Рис. 5

Эти наблюдения приводят к важному определению. Скажем, что функция выпуклая на промежутке, если ее надграфик выпуклый; если же выпуклым является подграфик, то функцию назовем вогнутой.

Отсюда как следствие получается, что у выпуклой функции $f:[a,b] \to R$ любая хорда графика лежит не ниже его (рис. 6 а)). Если лишь концы хорды принадлежат графику (остальные точки – выше), то говорят, что функция строго выпуклая. Доказано, что если функция непрерывна на $[a,b]$, дважды дифференцируема на (a,b), $f''(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$, то этого достаточно для строгой выпуклости. При этом касательная в любой точке графика (кроме его концов) лежит ниже графика (рис. 6 б)).



а) б)

Рис. 6

Читатель без труда переформулирует эти факты для случая вогнутости. Подробности см., например, в учебнике [32, с.294-303]. Приведем некоторые примеры.

Пример 4.1. На графике функции $f(x)=\ln x$ выберем какие-нибудь две различные точки (рис. 7).

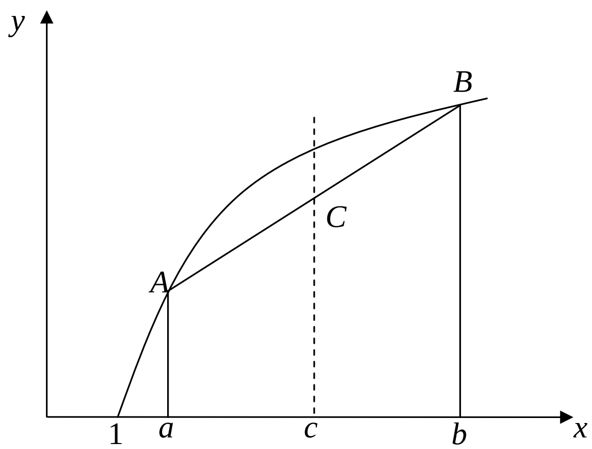


Рис. 7

Пусть C – середина хорды AB. В силу строгой вогнутости (ибо $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) имеем

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} < f(c) = f(\frac{a+b}{2}).$$

То есть

$$\frac{\ln a + \ln b}{2} < \ln\frac{a+b}{2} \Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Получили в очередной раз известное неравенство о средних разных чисел с равными по $\frac{1}{2}$ весами. С помощью тех же рассуждений неравенство можно без труда обобщить на произвольные веса: для положительных чисел

$$a^{\alpha}b^{\beta} \le \alpha a + \beta b \quad (\alpha + \beta = 1).$$

Это неравенство часто «работает» в решении школьных задач. Например, для положительных чисел x, y требуется доказать, что $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y} \ge 5\sqrt[5]{xy}$. При $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = \frac{3}{5}, a = \sqrt{x}, b = \sqrt[3]{y}$ результат получается немедленно.

Пример 4.1 является наводящим к следующему результату. Если функция $f(x)$ выпуклая на интервале и заданы две его точки x_1, x_2, то для любых положительных чисел w_1, w_2 с суммой 1 имеет место равенство

$$f(w_1x_1 + w_2x_2) \quad \le \quad w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2). \tag{4.1}$$

В случае вогнутой функции (как в примере) знак неравенства противоположный.

Неравенство (4.1) называется неравенством Иенсена. Любопытно, что оно обобщается на случай n чисел (естественно, с n весами). Мы его здесь умышленно не выписывем, предоставляя это читателю. Все классические неравенства (Коши, Гельдера, Минковского и др.) являются его следствием. Соответствующие выводы и примеры применения можно найти в работах [10, 32]. К ним в заключение добавим еще один.

Пример 4.2. В задаче 2.1.5 рассматривалось среднее степенное двух чисел. Его обобщением на несколько положительных чисел $a_1,...,a_n$ является величина

$$M(a_1,...,a_n;t)=\left(\frac{a_1^t+...+a_n^t}{n}\right)^{1/t} \quad (t\neq 0).$$

Это среднее часто используется в доказательствах неравенств. Соответствующие многочисленные примеры школьного характера можно найти в работе [28, с.35-46]. При этом особо важную роль играет свойство монотонности :

$$\alpha\le\beta \Rightarrow M(a_1,...,a_n;\alpha) \quad \le \quad M(a_1,...,a_n;\beta).$$

Сейчас мы это свойство докажем. В целях большей обозримости и меньших затрат на записи рассмотрим, на примере задачи 2.1.5 (случай $n=2$), заменяя $a_1=a, a_2=b$. Проверим, что функция $M(t)$ строго монотонно возрастает при $a\neq b$. Для этого достаточно проверить, что так ведет себя логарифм $\ln M(t)$. Его производная, в чем нетрудно убедиться, равна

$$\frac{1}{t^2}\frac{2}{a^t+b^t}\left[\frac{a^t\ln a^t+b^t\ln b^t}{2} \quad - \quad \frac{a^t+b^t}{2}\ln\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)\right].$$

В квадратных скобках первое выражение – это среднее арифметическое значений функции $f(x)=x\ln x$ в точках $x=a^t, y=b^t$. От него вычитается значение функции в средней точке $(x+y)/2$. Так как вторая производная функции больше нуля, то функция строго выпуклая. По неравенству Иенсена выражение в квадратных скобках положительное, что и доказывает нужную монотонность.

Пример 4.3. Вы произвольно выбираете 10 натуральных чисел с суммой, равной 1000. Какова наилучшая верхняя оценка суммы квадратных корней из выбранных чисел?

Докажем более общий результат: если $x_i > 0, k \ge 1, x_1 + ... + x_n = a$, то

$$x_1^{1/k} + ... + x_n^{1/k} \le n \cdot (\frac{a}{n})^{1/k}.$$

Но это так в силу неравенства $M(\frac{1}{k}) \le M(1)$ при $k \ge 1$. Для ответа на вопрос в примере положите $n = 10, k = 2, a = 1000$.

Задачи к разделу 4

4.1. Каково наибольшее значение: а) суммы синусов внутренних углов треугольника; б) произведения этих синусов ?

4.2. Доказать, что если все фигурирующие ниже числа положительные, то

а) $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \le \frac{3}{2}$;

б) $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$.

4.3. В примере 4.3 какова наилучшая нижняя оценка суммы чисел, обратных к выбранным?

4.4. Пусть p – полупериметр треугольника со сторонами a, b, c. Верно ли, что

а) $p(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}) \ge \frac{9}{4}$;

б) $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \ge 2\,(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \ge \frac{9}{p}$?

4.5. а). Пусть $a > 0, b > 0, a + b = 1, q > 0$. Доказать, что

$$(a + \frac{1}{a})^q + (b + \frac{1}{b})^q \ge \frac{5^q}{2^{q-1}} ;$$

б). Докажите, что при всех $x > 0$

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \ge 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Здесь от читателя предполагается, что он знаком с понятиями первообразной и неопределенного интеграла, понятием определенного интеграла, его интерпретациями и основными свойствами. Например, умение бегло применять формулу интегрирования по частям

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

или, что более кратко,

$$\int_a^b udv = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b vdu .$$

5.1. Вывод формулы Тейлора для основных элементарных функций

Используем формулы для производных высших порядков:

$$(e^x)^{(k)} = e^x, \quad (\ln x)^{(k+1)} = (-1)^k k!\, x^{-k-1};$$

$$(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \frac{\pi}{2}k), \quad (\cos x)^{(k)} = \cos(x + \frac{\pi}{2}k);$$

$$(x^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)\, x^{\alpha-k},$$

где $k \geq 0$ целое, производной нулевого порядка считается сама функция.

Начнем с экспоненты. Так как дифференцируемая функция является первообразной для своей производной, то при фиксированном $x \neq 0$ согласно формуле Ньютона – Лейбница с последующим интегрированием по частям имеем

$$\int_0^x (e^t)' dt = e^t|_0^x = e^x - 1 = -\int_0^x (e^t)' d(x-t) = -\left[(e^t)' \cdot (x-t)|_0^x - \int_0^x (x-t)(e^t)'' dt \right],$$

откуда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \int_0^x \frac{x-t}{1}(e^t)'' dt .$$

Возникший интеграл представим в виде

$$-\int_0^x (e^t)'' d\,\frac{(x-t)^2}{2}$$

и выполним интегрирование по частям. Получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\,(e^t)'''\,dt\,.$$

Подмечается закономерность (и ее можно обосновать индукцией):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,(e^t)^{(n+1)}dt\,.$$

Обратите внимание на то, как были получены коэффициент при x^k : он были равен

$$-\frac{(x-t)^k}{k!}(e^t)^{(k)}\,\Big|_0^x,$$

т.е. значению производной k – го порядка в точке $t=0$, деленной на $k!$.

Описанную конструкцию можно повторить в общем виде и получить следующий результат: если функция $f(x)$ определена в окрестности U точки $x_0 = 0$ и имеет в этой окрестности непрерывные производные до $(n+1)$ – го порядка включительно, то для любого $x \in U$ справедливо равенство

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \quad (5.1)$$

Вот мы и познакомились с одной из версий формулы Тейлора – с представлением функции в виде суммы ее многочлена Тейлора степени n $(n = 0,1,2,\ldots)$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и остаточного (дополнительного) члена

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

в интегральной форме. Заметим, что существуют и другие его формы (Лагранжа, Шлемильха – Роша, Коши). Формула (5.1) естественно обобщается на случай произвольной точки x_0 (запишите ее !). Она играет исключительно важную роль как в плане теоретическом, так и в практическом. Она позволяет изучение свойств достаточно «гладких» функций свести к существенно более простой задаче изучения этих свойств у соответствующего многочлена Тейлора. На этом и основаны разнообразные применения формулы (5.1). Например, для приближенного вычисления значений функций, пределов функций, исследования их экстремумов, промежутков выпуклости (вогнутости) и т.д. На практике обычно используются следующие свойства остаточного члена, которые, как правило, обычно выполняются.

1). Функция имеет производные любого порядка и для фиксированного x при $n \to \infty$ наблюдаем $r_n(x) \to 0$. Так обстоит дело, например, с экспонентой, ибо по теореме о среднем для некоторой точки θx $(0 < \theta < 1)$ между 0 и x будем иметь

$$r_n(x) = x \cdot \frac{(x - \theta x)^n}{n!} e^{\theta x},$$

но $\frac{a^n}{n!} \to 0$. Тогда, переходя в (5.1) к пределу при $n \to \infty$, получим справа так называемый степенной ряд Тейлора функции $f(x)$ с центром в точке $x_0 = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \; \ldots .$$

Представление функции степенным рядом – один самых важных разделов анализа.

2). При заданном n пусть $x \to 0$. Обычно тогда конкретное поведение остаточного члена безразлично, важно лишь, чтобы $r_n(x) = o(x^n)$, где o –

символ Э. Ландау. Такое стремление остаточного члена к нулю мы видим в случае экспоненты: для нее

$$r_n(x) = x^n \cdot \alpha(x), \quad \alpha(x) = \frac{x(1-\theta)^n}{n!} e^{\theta x} \to 0 \quad (x \to 0).$$

Равенство $f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad (x \to 0)$ называют формулой Тейлора с остаточным (или дополнительным) членом в форме Пеано. Ее многочисленные приложения имеют «локальный» характер, т.е. относятся к самой точке x_0. Для «глобального» применения формулы Тейлора требуется более или менее аккуратная оценка остаточного члена во всей области рассматриваемых значений аргумента. Эти «темные» места мы поясним на некоторых примерах. Но предварительно убедитесь, что помимо разобранного случая в духе Пеано при $x \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

имеют место также равенства

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n-1}), \quad \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n),$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n),$$

где в последнем равенстве

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Пример 5.1.1. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\ln(1-x)}$.

Применяя указанные формулы, важно, с одной стороны, не потерять членов нужного порядка, занижая степень многочлена Тейлора. С другой стороны, нет смысла выписывать лишних слагаемых, так как это загромождает и затрудняет выкладки. Поэтому при вычислении пределов следует заранее оценить, какого порядка малости погрешность уже не влияет на предел соответствующего выражения. В нашем примере

$$\ln(1-2x) = -2x + o(2x)\,, \quad \sin 5x = 5x + o(5x)\,, \quad \sin 3x = 3x + o(3x)\,,$$

поэтому искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+o(x)}{-2x+o(x)} = -1$.

Пример 5.1.2. При каком $k>0$ предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \ln(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8})}{x^k}$ существует, конечен и отличен от нуля?

Будем последовательно выписывать многочлены Тейлора функции $f(x)$, стоящей в числителе, до тех пор, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка имеем

$$f(x) = \sin x - \ln(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}) = (\,x+o(x)\,) - (x+o(x)\,) = o(x)\,,$$

т.е. $P_1(x) \equiv 0$. Для второго порядка

$$f(x) = (x+o(x^2)) - [x+\frac{1}{2}x^2 + (-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2))] = o(x^2) \Rightarrow P_2(x) \equiv 0\,.$$

Для третьего порядка

$$f(x) = (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)) - [x+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(x^2+x^3) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)] = o(x^3) \Rightarrow P_3(x) \equiv 0\,.$$

Аналогично (убедитесь в этом), $P_4(x) \equiv 0$, но (обязательно проверьте!) $P_5(x) = -\dfrac{1}{15}x^5$. Поэтому ответ: $k = 5$.

Пример 5.1.3. На отрезке $[-1,1]$ функцию $f(x)=e^x$ требуется заменить многочленом с погрешностью $\varepsilon=0.01$. Укажите какой-нибудь многочлен.

Выше мы выписывали остаточный член формулы Тейлора для этой функции. Так как по условию $|x|\le 1$, то $\left|r_n(x)\right|\le \frac{3}{n!}$. Потребуем, чтобы $\frac{3}{n!}<\varepsilon$. Достаточно взять $n=6$. Тогда искомый многочлен – это $P_6(x)$ (один из вариантов ответа).

5.2. Интеграл в неравенствах

Как известно, функциональное неравенство дифференцировать, вообще говоря, нельзя. А вот почленно интегрировать можно, и этот прием часто эффективен – позволяет из какого-нибудь очевидного неравенства получить вполне неочевидное. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5.2.1. Неравенство $\cos x\le 1$, считая фиксированным $x>0$, почленно проинтегрируем на отрезке $[0,x]$. Применяем, как и далее, формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^x \cos t\,dt \le \int_0^x 1\cdot dt \quad\Rightarrow\quad \sin x\le x.$$

Интегрируя полученное неравенство, придем к

$$-\cos t\,|_0^x \le \frac{t^2}{2}\,|_0^x \quad\Rightarrow\quad 1-\frac{x^2}{2}\le \cos x.$$

Отсюда

$$(t-\frac{1}{2}\frac{t^3}{3})\,|_0^x \le \sin t\,|_0^x \quad\Rightarrow\quad x-\frac{x^3}{2\cdot 3}\le \sin x.$$

Повторяя процесс, придем к неравенствам

$$1-\frac{x^2}{2!}\le \cos x\le 1,\quad x-\frac{x^3}{3!}\le \sin x\le x\ ;$$

$$1-\frac{x^2}{2!}\le \cos x\le 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!},\quad x-\frac{x^3}{3!}\le \sin x\le x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ \text{и т.д.}$$

Источником получения некоторых неравенств являются оценки интеграла от строго выпуклой функции. Из рис. 8 видим, что площадь под кривой не более площади под хордой AB и не менее площади под касательной к графику в точке C с абсциссой $c = \dfrac{a+b}{2}$. Применяя дважды формулу площади трапеции, запишем это в виде

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a).$$

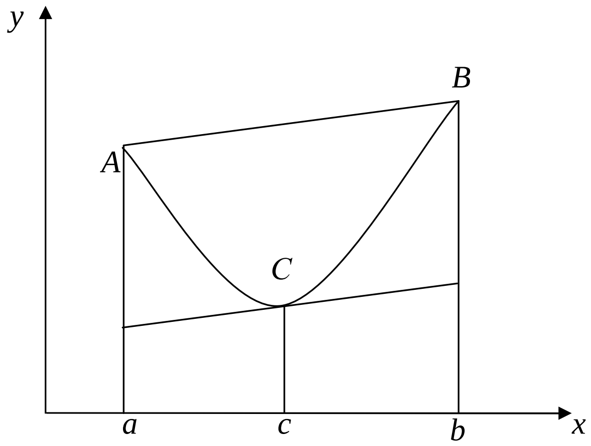


Рис. 8

Ясно, что для строго вогнутой функции знаки неравенства надо поменять на противоположные. Например, при $a = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ будем иметь $f''(x) > 0$. Поэтому

$$\frac{1}{1+\frac{b}{2}} \cdot b \le \ln(1+b) \le \frac{1+\frac{1}{1+b}}{2} \cdot b.$$

Полагая $b = x > 0$, получим неравенства

$$\frac{2x}{2+x} \le \ln(1+x) \le \frac{2+x}{2(1+x)} \cdot x,$$

которые ранее (см. (3.2.2)) предлагалось получить с помощью производной.

Пример 5.2.2. Не прибегая к вычислениям интегралов, установите нужный знак неравенства

$$\int_0^1 \sin x dx + \int_0^1 \arcsin x dx \quad ? \quad 1.$$

В решении используется так называемое неравенство Юнга: если непрерывные взаимно обратные возрастающие функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены при всех допустимых $x \geq 0$ и $f(0) = 0$, то для положительных чисел a, b

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx \geq ab.$$

На рис. 9 первое слагаемое изображает площадь фигуры, заштрихованной горизонтально. Вертикальной штриховкой покрыта фигура, площадь которой представляет второе слагаемое. Рис. 9.а) соответствует условию $b < f(a)$, случай противоположного неравенства изображен на рис. 9.б). В неравенстве Юнга знак равенства имеет место при $b = f(a)$.

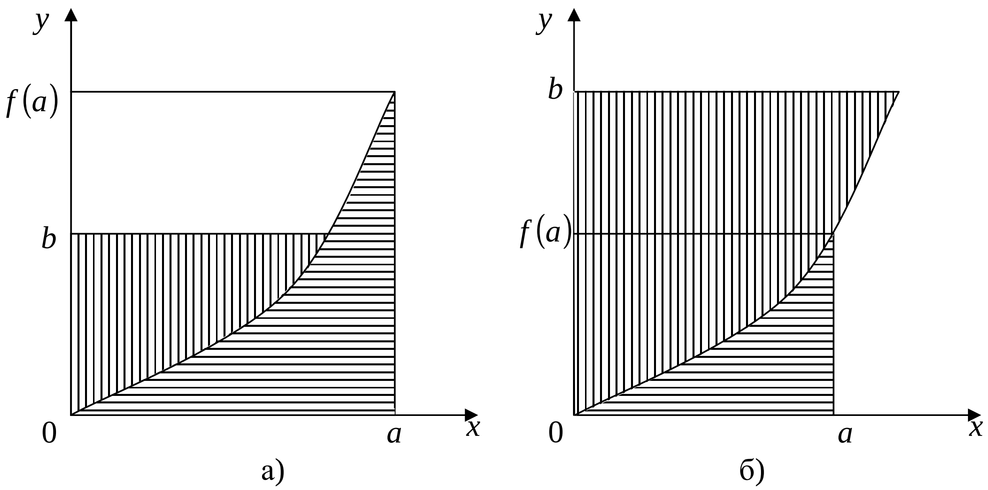


Рис. 9

В нашем примере, применяя неравенство Юнга с функциями $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$, $a = b = 1$, получим, что сумма интегралов больше 1. Как показали вычисления в Mathcad, она приближенно равна 1.03.

5.3. Нахождение пределов сумм с помощью интегралов

Здесь предполагается знание определения определенного интеграла как предела интегральных сумм.

Пример 5.3.1. Требуется найти предел последовательности с общим членом $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+1}$.

Имеем:

$$y_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Получили интегральную сумму по отрезку $[0,1]$ функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$ при разбиении отрезка на n равных частей точками $x_i = \frac{i}{n}\ (i = 0, \ldots, n)$ с выбором «средней» точки $\xi_i \in [x_i\ x_{i+1}]$ i - го отрезка в качестве его правого конца ($i = 0, 1, \ldots, n-1$). В силу интегрируемости функции (она ведь непрерывная)

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\,\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Следующий пример посложнее и предполагает знакомство с несобственным интегралом второго рода. Например, если функция $f : (a,b] \to R$ непрерывная и существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (\varepsilon > 0),$$

то его обозначают тем же символом, что и в случае непрерывности на всем отрезке.

Пример 5.3.2. Найти предел $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Пусть $y_n = \ln x_n$, где $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$. Тогда

$$y_n = \frac{1}{n}(\ln\frac{n^n}{n!}) = \frac{1}{n}(\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n}).$$

Видно, что y_n есть интегральная сумма на $(0,1]$ функции $f(x) = \ln\frac{1}{x}$ с теми же узлами, что и выше, с теми же «средними» точками. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln\frac{1}{x} + x \right)\Big|_\varepsilon^1 = 1 .$$

Следовательно, искомый предел равен e.

Для закрепления этого материала следующие суммы преобразуйте в интегральные, выпишите соответствующие интегралы и вычислите их.

а) $S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$;

б). $S_n = \frac{1^2}{n^3+1^3} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3+n^3}$;

в). $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$.

5.4. Гармонические числа и интегралы

Гармонические числа – это суммы

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Эти числа так часто возникают в анализе алгоритмов, что специалистам понадобилось для них специальное обозначение и название. Если в записанной сумме взять три последовательных слагаемых, то среднее из них является средним гармоническим своих соседей. Буква H происходит от слова harmonic.

Аналогично вводятся гармонические числа порядка s, или обобщенные гармонические числа:

$$H_n^{(s)} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s}.$$

В дискретной математике обычно $s \in N$, но мы будем здесь предполагать $s > 0$. При $s > 1$ такие числа – это частичные суммы ряда

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

который называется дзета – функцией Римана и который играет исключительно важную роль в теории чисел.

Наша цель здесь – указать очевидные оценки гармонических чисел. Считая заданным порядок s, нарисуем график функции $y = \frac{1}{x^s}$. Как явствует из рис. 10 а), площадь столбчатой заштрихованной фигуры равна $H_n^s - 1$ и меньше площади между графиком и отрезком $[1, n]$. Из рис. 10 б) мы видим, что площадь аналогичной столбчатой фигура равна H_n^s и больше площади между графиком и отрезком $[1, n+1]$. Следовательно,

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^s} dx \quad < \quad H_n^s \quad < \quad 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^s} dx. \tag{5.4.1}$$

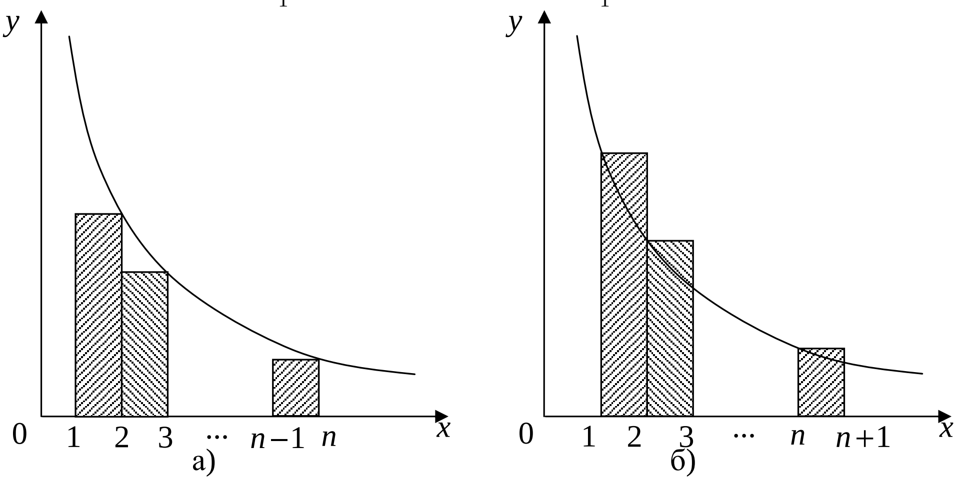


Рис. 10

Отсюда можно получить много полезных следствий. Например, при $s = 1$

$$\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln n.$$

Левое неравенство показывает, что $H_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Этот факт мы устанавливали ранее; он может иногда проявить себя самым удивительным образом.

Например, пусть имеется неограниченное количество одинаковых кирпичей. Они кладутся друг на друга с некоторым сдвигом так, чтобы не падали. Какой длины «крышу» можно таким образом получить?

Это – известная популярная задача; вместо кирпичей могут фигурировать кости домино или игральные карты. В случае n кирпичей можно построить «крышу» длиной $H_{n-1}/2$ (см., например, работу [14, с.160]). Известна и «Задача об улитке», которая ползет от левого края полоски резины исходной длины 7 см со скоростью 1 $\frac{см}{мин}$ к другому краю. Но некто расстраивает ее планы, растягивая резинку еще на 7 см по прошествии каждой минуты. Сможет ли улитка достичь правого края полоски?

Пусть x_n – расстояние от улитки до левого края (пройденный путь) в конце n – ой минуты, l_n – длина резинки в этот момент. Оказывается, что (докажите!)

$$\frac{x_n}{l_n} = \frac{1}{7}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}).$$

Вычисления показывают, что $H_n > 7$ при $n = 616$ (но H_{615} немного меньше 7). Поэтому ответ: может.

Последовательности гармонических чисел порядка $s > 1$ сходящиеся; в этом можно убедиться из оценок (5.4.1) прямым вычислением интегралов. Эти оценки позволяют установить асимптотику бесконечно больших последовательностей $(H_n^{(s)})$ при $s < 1$. Например, $H_n^{(1/2)} \sim 2\sqrt{n}$ $(n \to \infty)$ – результат, который был получен ранее с помощью теоремы Штольца.

5.5. Функциональные и рекуррентные соотношения в интегрировании

Основные методы интегрирования (неопределенного или определенного) –это метод замены переменной (подстановки) и метод интегрирования по частям. Например, часто применяется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx. \qquad (5.5.1)$$

Помимо формального доказательства (подстановкой $x = a+b-t$ один интеграл сводится к другому) полезно уяснить наглядный геометрический смысл этого равенства. Например, требуется найти площадь S плоской фигуры (рис. 11 а)). Для этого ортогонально спроектируем фигуру на какую-нибудь числовую прямую. Пусть $[a,b]$ – ее проекция и $l(x)$ – длина поперечного сечения. Будем x перемещать слева направо. При условии непрерывности длины тогда

$$S = \int_a^b l(x)dx.$$

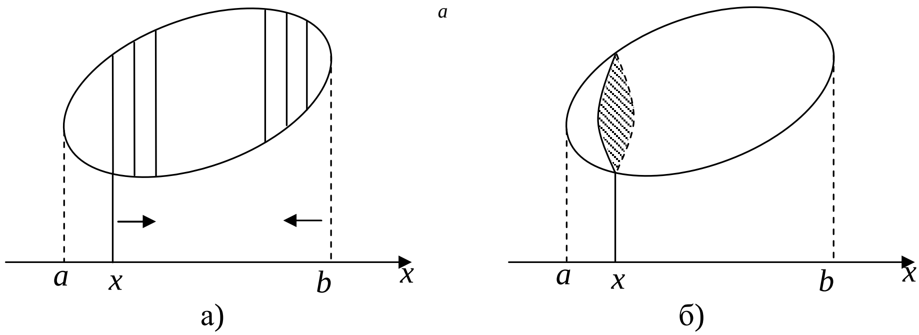


Рис. 11

Но ведь интуитивно ясно, что таков же ответ при перемещении x справа налево. Вот вам «наивная» интерпретация равенства (5.5.1). Кстати, у него есть полезный пространственный аналог. Пусть (рис. 11 б)) отрезок $[a,b]$ – ортогональная проекция некоторого тела на ось и для произвольной точки $x \in [a,b]$ известна площадь $S(x)$ поперечного сечения тела. Тогда при условии непрерывности этой функции объем тела равен

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Но вернемся к теме, анонсированной в заголовке. Функциональные соотношения (уравнения) широко применяются в интегрировании. Например, если функция $f : R \to R$ удовлетворяет свойствам нечетности или четности, т.е. соответственно

$$f(x) + f(-x) = 0, \quad f(x) - f(-x) = 0 ,$$

то для них при любом $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx .$$

Для проверки проще всего интеграл разбить на сумму двух. Например, в первом случае

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ведь значение интеграла не зависит от имени переменной). В первом интеграле выполним подстановку $t = -x$, получим

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-x)d(-x) + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx = \int_{0}^{a} 0\, dx = 0 .$$

Эту идею разовьем далее на следующих примерах.

Пример 5.5.1. Найти интеграл

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)(1+x^2)} dx .$$

Здесь подынтегральная функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению (и в этом «изюминка»!)

$$f(x) + f(-x) = \frac{2}{1+x^2} .$$

Интегрируя как выше, получим

$$I = \int_{0}^{1} [f(x) + f(-x)]dx = 2arctgx|_0^1 = \pi / 2 .$$

По аналогии находится интеграл

$$\int_{-1}^{1} x^9 \ln(1+e^x)dx .$$

Здесь подынтегральная функция удовлетворяет условию $f(x)+f(-x)=x^{10}$.

Известен следующий результат: для нечетной функции $\varphi(x)$

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\varphi(x)+\sqrt{1+\varphi^2(x)}} dx = a .$$

На этот раз подынтегральная функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x)+f(-x)=1 .$$

Если в интегрировании с помощью функционального уравнения применялся метод подстановки, то при вычислении интеграла на основе рекуррентной формулы чаще всего используется интегрирование по частям (с целью получения формулы).

Пример 5.5.2. Рассмотрим интегралы

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx , \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Предполагая $n > 1$, выполним интегрирование по частям:

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\, d(-\cos x) = (-\sin^{n-1} x \cos x)\big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, d(\sin^{n-1} x) .$$

Здесь справа внеинтегральное слагаемое равно нулю, а интеграл будет равен

$$(n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx .$$

Заменяя $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, получим

$$J_n = (n-1)(J_{n-2} - J_n) \Rightarrow \quad J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} .$$

Будем последовательно применять эту рекуррентную формулу сначала для $n = 2m$, затем для $n = 2m + 1$, где $m = 1,2,\ldots$. Получим

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ldots \frac{1}{2} \cdot J_0, \quad J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \ldots \frac{2}{3} \cdot J_1.$$

Так как $J_0 = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = 1$, то отсюда

$$J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, \quad J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \tag{5.5.2}$$

Задачи к разделу 5

5.1. Параболическим сегментом называется фигура, ограниченная параболой и прямой, перпендикулярной ее оси. Расстояние от вершины параболы до этой прямой называется высотой сегмента, а длина отрезка прямой, высекаемого параболой – основанием сегмента. Архимед доказал, что площадь сегмента составляет (рис. 12 а)) $\frac{2}{3}$ площади описанного прямоугольника тех же размеров. Сможете ли Вы это проверить?

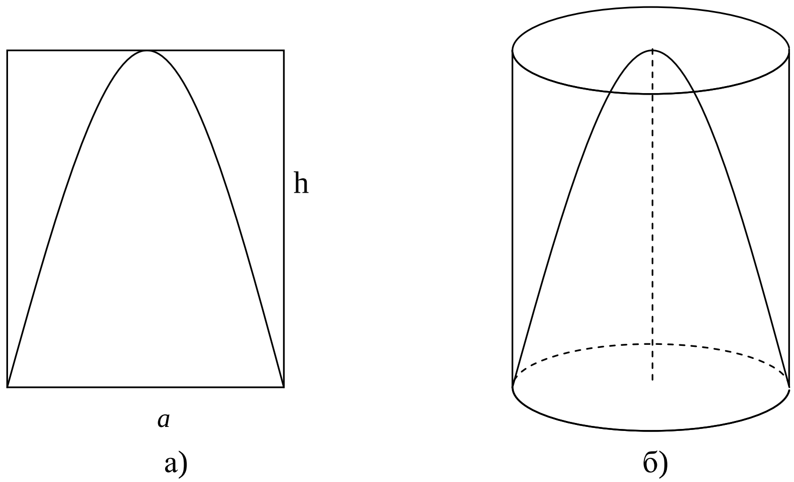


Рис. 12

Вращая этот сегмент вокруг оси параболы, получим параболоидный сегмент. Докажите, вслед за Архимедом, что его объем равен половине объема цилиндра тех же размеров (рис. 12 б)).

5.2. Не вычисляя интегралов, докажите, что

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\, dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\, dx < 9.001 .$$

5.3. а). Пусть

$$L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\, dx .$$

Докажите, что $2L_n = L_{n-1} \quad (n = 1,2,...)$.

б). Пусть

$$J_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x\, dx .$$

Найдите $J_0 + J_1 + ... + J_{11}$.

5.4. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int_0^{\pi} \frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \quad ; \text{б)} \int_0^2 \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-5x+7}}{\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-3x+3}} dx .$$

5.5. Найти пределы последовательностей с общими членами

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n^2+k^2)^{3/2}}, \quad y_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)} .$$

ГЛАВА 6. ФОРМУЛА ВАЛЛИСА

Эта формула выражает первую константу в виде

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\ldots. \tag{6.1}$$

Она впервые встречается у Дж. Валлиса (1655 г.) в его вычислениях площади круга и является одним из первых примеров бесконечного произведения. Существуют и другие варианты этой формулы, например,

$$\sqrt{\pi}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}. \tag{6.2}$$

В таком виде она будет использована в дальнейшем при получении окончательного вида формулы Стирлинга.

Используем формулы (5.5.2). При $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ имеем

$$\sin^{2m+1}x\le\sin^{2m}x\le\sin^{2m-1}x,$$

причем знаки равенств лишь на концах промежутка. Поэтому
$J_{2m+1}<J_{2m}<J_{2m-1}$. Отсюда и из равенств (5.5.2) получим

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}<\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!},$$

откуда

$$\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m}. \tag{6.3}$$

Если обозначить

$$x_m=\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m+1},\quad y_m=\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m},$$

то видно, что

$$o<y_m-x_m<\frac{\pi}{2}\frac{1}{2m}.$$

Следовательно, обе введенные последовательности сходятся к $\frac{\pi}{2}$. Из равенства

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1}$$

получаем равенство (6.1). Далее в равенстве

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot ...(2m-2)}{3\cdot 5...(2m-1)}\sqrt{2m}$$

числитель и знаменатель умножим на произведение $(2m-2)!!\cdot(2m)\cdot(2m)$. Получим

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot ...(2m)^2}{(2m)!\cdot(2m)}\sqrt{2m}\,.$$

Отсюда придем к формуле (6.2).

Заметим, что к интегралам J_m сводится большое число других. Например,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = J_{2n+1}\,, \quad \int_0^{+\infty} (1+x^2)^{-n}\,dx = J_{2n-2}\,.$$

Советуем читателю убедиться в этом, выполнив в первом интеграле подстановку $x=\cos t$, а во втором положить $x = ctgt$. Эти факты мы применим ниже для вывода равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Этот интеграл встречается в теории вероятностей, математической статистике, в некоторых задачах математической физики. С.Пуассон предложил простой прием для вычисления интеграла, поэтому его иногда называют интегралом Пуассона. Впервые он был вычислен Л.Эйлером (1729 г.).

Положим

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad (6.4)$$

и решим равносильную задачу: покажем, что $I = \sqrt{\pi}/2$. Будем исходить из неравенств (3.2.1.)

$$1-t \le e^{-t} \le 1/(1+t) \quad (t \in [0,1]).$$

Согласно им

$$1-x^2 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1-x^2)^n \le e^{-nx^2} \le \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Отсюда

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \le \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \le \int_0^{+\infty} (1+x^2)^{-n} dx.$$

Подстановкой $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ интеграл после строгого знака неравенства сводится к $\frac{I}{\sqrt{n}}$. При возведения в квадрат из этих неравенств получим

$$J_{2n+1}^2 \le \frac{I^2}{n} \le J_{2n-2}^2.$$

Положим, как и выше,

$$x_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1},$$

тогда будем иметь

$$\frac{n}{2n+1} x_n \le I^2 \le \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{1}{x_{n-1}} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Выполнив здесь предельный переход при $n \to \infty$, получим $I^2 = \frac{\pi}{4}$, откуда следует результат $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Задачи к разделу 6

6.1. Найти предел последовательности (a_n) с общим членом

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

6.2. Исследовать на сходимость ряд с общим членом a_n^2, где a_n определено выше.

6.3. Вычислить произведения

$$\prod_{n\geq 1}\left[1-\frac{1}{(2n)^2}\right], \quad \prod_{n\geq 1}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right].$$

6.4. Пусть $x \in (0,1)$. Найти сумму ряда

$$\sum_{n\geq 0} x^{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

6.5. Вычислить интегралы

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx, \quad \int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx.$$

ГЛАВА 7. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Речь пойдет о *формуле*

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad (n\to\infty), \tag{7.1}$$

являющейся одной из важных в анализе. В очень многих приложениях, особенно в теории вероятностей и математической статистике, встречается необходимость в приближенном представлении $n!$ с помощью элементарной функции от n. Вместо того, чтобы перемножать много целых чисел, можно просто вычислить выражение Стирлинга с помощью логарифмов; число операций будет много меньше.

В литературе имеется много способов вывода рассматриваемой формулы и ее различных версий; часть из них основана на рассмотрении площади под логарифмической кривой и ее оценках (см., например, работу [17, с.422-425]). Мы пойдем тем же путем: примем за основу неравенства

$$\frac{2t}{2+t} < \ln(1+t) < \frac{t(2+t)}{2(1+t)} \quad (t>0),$$

полученные в разделе 5.2. Из них при $t=\dfrac{1}{n}$ имеем

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)} \Rightarrow 1 < (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{n^2+n}.$$

Здесь величина в правой части равна $1+\dfrac{1}{4n(n+1)}$, поэтому при потенцировании получим

$$e < (1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{4n(n+1)}},$$

откуда

$$1 < \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}{e} < e^{\frac{1}{4n(n+1)}}. \tag{7.2}$$

Определим две последовательности $(x_n),(y_n)$, полагая

$$x_n = e^n n! n^{-(n+\frac{1}{2})}, \quad y_n = x_n e^{-\frac{1}{4n}}.$$

Вычисляя отношение $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$, увидим, что оно больше 1 согласно левой части неравенства (7.2). Аналогично ведет себя отношение $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ (на этот раз в силу правой части неравенства (7.2)). Следовательно, последовательности сходятся навстречу друг к другу к некоторому пределу. Обозначим его через c, тогда имеем

$$x_n e^{-\frac{1}{4n}} < c < x_n.$$

Следовательно, неизвестная величина c является средневзвешенной геометрической левой и правой частей этих неравенств с некоторыми весами соответственно $\theta, 1-\theta$. Поэтому имеем

$$c = x_n e^{-\frac{\theta}{4n}}, \ \theta \in (0,1).$$

Отсюда

$$n! = c\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta}{4n}}. \tag{7.3}$$

Для нахождения c воспользуемся формулой (6.2) предыдущего раздела

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}$$

с заменой в ней m на n, дважды применяя формулу (7.3). Величину $e^{\frac{\theta}{4m}}$ при вычислении факториала в числителе и ей аналогичную при записи факториала в знаменателе опускаем, так как обе стремятся к 1. После сокращения множителей получим

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2\pi},$$

что доказывает асимптотику (7.1) и ее уточненный вариант (7.3). Еще более точный вариант, основанный на степенном разложении функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$, находим у Фихтенгольца [33, с.369-371], чаще всего упоминаемый в приложениях:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Используется также версия, получаемая отсюда почленным логарифмированием. Итак, формула Стирлинга имеет большое теоретическое значение. Но и практически она очень полезна для приближенного вычисления больших факториалов. Так, например, при $n = 10$ точное значение 3628800 отличается от приближенного 3598700 с относительной ошибкой около 0,83 %.

Задачи к разделу 7

7.1. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}$.

7.2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

7.3. В опыте с подбрасыванием монеты 100 раз какова вероятность выпадения гербов ровно 50 раз?

7.4. Доказать, что $\ln(n!) \sim n\ln(n)$ $(n \to \infty)$.

7.5. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n>1}(n\ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1)$.

ГЛАВА 8. ЗНАМЕНИТЫЕ КОНСТАНТЫ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Речь пойдет о трех математических постоянных – числах π, e, γ. Их вычисления были связаны с большими трудностями, но они найдены с огромным числом десятичных знаков. Читатель может спросить, зачем нужно было преодолевать эти трудности и вычислять, скажем, π с точностью до миллиона десятичных знаков? Ведь первых десяти достаточно для решения практических задач. Что заставляло тратить огромные усилия на достижение точности, не являющейся необходимой? Побудительных мотивов несколько. Например, желание знать, является ли данное число рациональным ? Если – нет, то являются ли десятичные цифры случайными или нет? Встречается ли каждая цифра бесконечное число раз в десятичном разложении? И т.д. Пока нет точных ответов на подобные вопросы, и поэтому неудивительно, что прибегают к экспериментам в надежде найти ответы.

8.1. Первая константа – число π

Это, по всеобщему признанию, конечно же, число π – отношение длины окружности к ее диаметру. Это обозначение (вероятно, от слова, написанного по-гречески, обозначающего периферию) стало общепринятым после работы Л.Эйлера (1736 г.), однако оно впервые было употреблено У.Джонсом (1706 г.). Нужды практических расчетов, относящихся к круглым телам, заставили уже в глубокой древности искать для π рациональные приближения. Так, довольно грубое приближение $\pi \approx \frac{25}{8}$ применял римский архитектор Витрувий (1-й век до н.э.) при проектировании крупных сооружений (например, знаменитого Римского театра). В 5-ом веке н.э. в Китае было получено приближение $\pi \approx \frac{355}{113}$, вновь найденное в Европе лишь в 16-ом в.; оно дает ошибку лишь в седьмом десятичном знаке. Историю числа можно условно разбить на три этапа.

1). Эра вписанных и описанных многоугольников. В течение почти восемнадцать веков применялся метод Архимеда вычисления числа π. С ним мы кратко ознакомились в разделе 1.4.

2). Эра математического анализа. Она началась с 1671 г., когда Дж. Грегори открыл степенное разложение арктангенса

$$arctgx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \quad (|x| \le 1). \tag{8.1.1}$$

В учебных пособиях есть несколько выводов этого равенства. Например, на основании известного тождества

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1-z} \quad (z \ne 1)$$

при $z = -t^2$ и $|t| < 1$ имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + R_n, \; R_n = (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

Интегрируя это равенство от 0 до $x \in (-1,1)$, получаем

$$arctgx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + r_n(x), \quad r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt.$$

Ясно, что здесь остаточный член стремится к нулю с возрастанием n. Отсюда предельным переходом получается равенство (8.1.1) при $|x| < 1$. Но оно остается верным и при $x = \pm 1$ (докажите!). В частности, при $x = 1$ получается знаменитый ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Коль скоро появился удобный инструмент (8.1.1), вычислители тотчас им воспользовались. Ряд Лейбница мало пригоден: сходится очень медленно (чтобы, например, получить π с двумя верными знаками после запятой (десятичной точки), надо сложить 50 членов ряда). Но если же в формуле (8.1.1) положить $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то получится ряд

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + ...)$$

с гораздо более быстрой сходимостью (обратите внимание, как быстро увеличиваются знаменатели). Этим разложением воспользовался А.Шарп (1699 г.) для получения 70 знаков константы.

Следующая «хитрость», которой воспользовались вычислители, состояла в подборе комбинаций арктангенсов, каждый из которых вычисляется довольно быстро. Например, были использованы равенства

$$arctg 1 = 4 arctg \frac{1}{5} - arctg \frac{1}{239}, \quad arctg 1 = arctg \frac{1}{2} + arctg \frac{1}{3}.$$

Первое из них, раскладывая каждый из арктангенсов в ряд Грегори, применял Дж. Мэчин (1706 г.) и вычислил 100 десятичных знаков числа π. По его следам вычислял У.Шенкс и в 1873 г. опубликовал 707 знаков (это – рекорд, но его результат, как оказалось поздне, после 527 – го знака оказался ошибочным).

3). Новая эра. Она началась с изобретением компьютера. В 1949 г. Дж. фон Нейман и его сотрудники нашли 2037 знаков на первой ЭВМ ENIAC. Рубеж в сто тысяч знаков был достигнут в 1961 г. Канадские математики Джонатан и Питер Борвейны, работая в области так называемых эллиптических интегралов и тета – функций, в 1987 г. предложили алгоритм расчета десятичных знаков числа π, имеющий фантастическую скорость: каждый шаг его выполнения уточняет количество верных цифр более чем вчетверо. Пользуясь этим алгоритмом, в 1999 г. в Японии вычислили 206 158 430 000 цифр первой константы.

Марафон продолжается ….

8.2.Вторая константа – число *e*

В 17-ом и 18-ом столетиях большое внимание оказывалось изучению закона сложных процентов

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt},$$

где P – основной капитал, r – доля годового прироста, n – число раз в году, когда начисляется этот прирост, а A – величина капитала через t лет. Таково «финансовое» происхождение числа

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n,$$

которое можно рассматривать как сумму, получающуюся по истечении одного года из вклада в 1 рубль при 100% годового прироста, добавляемого непрерывно. С тех пор появился интерес к вычислению этой константы, но он был невелик по сравнению с вычислениями числа π. В 1727 г. Эйлер вычислил e с 23 верными десятичными знаками, применив степенное разложение для экспоненты. В равенстве

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt$$

при $x=1$ остаточный член менее $\frac{3}{n!}$, что дает возможность подбирать нужное число слагаемых факториальной суммы при вычислении константы с требуемой точностью. В работе [32, с.80] мы найдем равенство

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n\cdot n!} \quad (0<\theta<1), \qquad (8.2.1)$$

на основе которого далее было вычислено e при $n=10$, приближенно равное 2.71828181. В компьютерную эпоху еще в 1949 г. в США по инициативе Дж. фон Неймана на ЭВМ ENIAC вычислено около 2500 десятичных знаков, а в 1964 г. их было найден более миллиона.

Заметим, что равенство (8.2.1) может служить для доказательства иррациональности числа e. Рассуждая от противного, допустим, что оно представимо в виде $\frac{m}{n}$, $m,n \in N$. Запишем для такого n формулу (8.2.1) и умножим обе части на $n!$. Слева получим целое число, справа – дробное $\frac{\theta}{n}$. Полученное противоречие доказывает то, что требовалось.

8.3. Третья константа – эйлерова постоянная γ

Как и выше, в разделе 5.4., используем обозначение

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ранее (см., например, раздел 5.4.) мы наблюдали, что при $n \to \infty$ эта величина ведет себя как $\ln n$. Естественно возникает вопрос о том, как ведет себя разность

$$x_n = H_n - \ln n.$$

Ответ заранее не очевиден: ведь разность двух бесконечно больших может иметь самое разное поведение. Будем использовать полученные ранее неравенства

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}.$$

Имеем

$$x_n - x_{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} = \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} > 0$$

согласно левому неравенству. В соответствии с правым неравенством имеем

$$x_n > \ln(1+\frac{1}{1}) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3}) + \ldots + \ln(1+\frac{1}{n}) \quad - \quad \ln n.$$

Но здесь правая часть равна

$$\ln(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}) = \ln\frac{n+1}{n} > 0\,.$$

Таким образом, последовательность (x_n) убывает и ограничена снизу нулем. Следовательно, она сходится. Предел

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \tag{8.3.1}$$

и называется третьей константой. Это название не является общеупотребительным, обычно ее называют эйлеровой постоянной или постоянной Эйлера – Маскерони. Ее можно определить также как сумму ряда

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k})\,.$$

Л.Эйлер (1740 г.) вывел формулу, позволяющую вычислить эту константу с любой точностью. Он обозначал ее буквой C и нашел 15 верных знаков:

$$C = 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ \ldots.$$

Используемый им аппарат предполагает глубокие и тонкие свойства гамма – функции

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \quad (a>0)\,,$$

которые мы не приводим. Их изложение можно найти, например, в учебнике [33, с.753-793] ; соответствующий материал может быть включен в рефераты или курсовые работы.

Позже (1790 г.) итальянский математик Л. Маскерони вычислил 32 знака константы и предложил современное обозначение γ, которое чаще всего и используется. Дж.Адамс (1878 г.) нашел 260 знаков постоянной. Известны различные представления γ в форме интегралов, рядов и пределов. Например,

$$-\gamma = \int_0^{\infty}\ln x\, e^{-x}dx\,, \quad \gamma = \int_0^1(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\ln x})dx$$

или

$$1-\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\zeta(n)-1), \quad \lim_{x\to 1}(\zeta(x)-\frac{1}{x-1}),$$

где $\zeta(x)$ – дзета – функция Римана.

Арифметическая природа третьей константы до конца не изучена. Например, до сих не установлено, является ли эта константа рациональным числом. В одной из работ по цепным дробям доказано, что если γ – рациональная дробь, то ее знаменатель больше 10^{242080}.

Равенство (8.3.1) можно переписать в виде

$$H_n=\ln n+\gamma+\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Известно более точное поведение:

$$\varepsilon_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}\cdot\theta_n \quad (\theta_n\in(0,1))$$

На практике с целью более компактных записей часто равенство (8.3.1) применяют с использованием символа Ландау: $H_n=\ln n+\gamma+o(1)$. Например,

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n})=\lim_{n\to\infty}(H_{2n}-H_n)=\lim_{n\to\infty}(\ln 2n-\ln n+o(1))=\ln 2.$$

Задачи к разделу 8

В первых двух задачах используются обозначения раздела 1.4.

8.1. а). Докажите формулы Архимеда (1.4.2). б). Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n-\pi}{\pi-p_n}=2, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\pi-p_{n+1}}{\pi-p_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{q_{n+1}-\pi}{q_n-\pi}=\frac{1}{4}.$$

Каковы Ваши интерпретации этих пределов?

8.2. При заданном n разделим отрезок $[p_n, q_n]$ на три равные части, положим, следуя за Гюйгенсом,

$$u_n=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n.$$

а). Докажите, что π лежит в первой из этих частей, т.е. $p_n<\pi<u_n$.

б). Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-\pi}{u_n-\pi}=\frac{1}{16}.$$

8.3. Исследуйте на сходимость последовательности с общими членами

$$x_n = n\sin\frac{2\pi n!}{e}, \quad y_n = n\sin\frac{2\pi n!}{e}.$$

8.4. Пусть

$$e_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k,\ \ n=0,1,2,...$$

и $y_n = n![e-e_n(1)]$. Студент вывел рекуррентную формулу $y_{n+1}=(n+1)y_n-1$ (докажите!) и пытается вычислить по ней на 8-разрядном калькуляторе y_{11} при начальном значении $y_0 = e-1 \approx 2.7-1=1.7$ применением формулы в сторону возрастания n. Получился абсурдный ответ (какой?). Своими сомнениями студент поделился с приятелем, который посоветовал брать константу с большим числом знаков, например, $e \approx 2.71828$ (после семерки идет дата рождения Льва Толстого, что наш студент не помнит, а его приятель помнит). Но вычисления снова привели к явно неверному результату (какому?). «Это странное е так не нравится мне!» –сказал студент и пошел к преподавателю за консультацией. Каково Ваше объяснение несуразностей?

8.5. а). Исходя из определения третьей константы, докажите, что:

$$\gamma=\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}dx-\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx=\int_0^1\frac{1-e^{-x}-e^{-1/x}}{x}dx\ ;$$

б). Исходя из равенства

$$-\gamma=\int_0^{\infty}\ln x\, e^{-x}dx\ ,$$

докажите, что

$$\gamma=\int_0^1\ln(\ln\frac{1}{x})dx.$$

ГЛАВА 9. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Этот метод применяется для отыскания коэффициентов выражений, вид которых заранее не известен. В курсе анализа студенты знакомы с ним, например, при интегрировании рациональных функций. Так, в неопределенном интеграле $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x}dx$ подынтегральная функция представима в виде $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$.

Неизвестные коэффициенты находятся из системы $\begin{cases} A+B+C=3, \\ B-C=0, \\ A=1, \end{cases}$ после чего интеграл легко находится как сумма интегралов простейших дробей. В алгебре этот метод также иногда полезен.

Пример 9.1. Представить дробь $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ в виде суммы $A+B\sqrt{2}+C\sqrt{3}+D\sqrt{6}$ с рациональными коэффициентами.

Имеем $(A+B\sqrt{2}+C\sqrt{3}+D\sqrt{6})\,(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. После раскрытия скобок, приведения подобных членов и т.д. получим

$$(A-2B+3C)+(-A+B+3D)\sqrt{2}+(A+C-2D)\sqrt{3}+(B-C+D)\sqrt{6}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Отсюда $\begin{cases} A-2B+3C=1, \\ -A+B+3D=1, \\ A+C-2D=-1, \\ B-C+D=0, \end{cases}$, откуда $A=0$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=0$, $D=\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Особенно важен метод неопределенных коэффициентов в задачах, в которых число неизвестных коэффициентов бесконечно. К ним относятся задачи деления степенных рядов (соответствующие примеры можно найти в книге Д.Пойа [23, с. 121-126]), нахождения решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда и др. Например, пусть требуется найти наименьший по абсолютной величине действительный корень x_1 данного многочлена $Q(x)$, $Q(0) \neq 0$ Для этого Д.Бернулли и Л.Эйлер разлагали функцию $f(x) = \dfrac{1}{Q(x)}$ в степенной ряд $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Его радиус сходимости

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

является расстоянием от начала координат до ближайшей особой точки функции $f(x)$, т.е. $R = |x_1|$. Поэтому в качестве искомого корня можно взять дробь $\pm \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ с достаточно большим номером. Заменяя x на $\dfrac{1}{x}$ в исходном уравнении $Q(x) = 0$, можно аналогичным образом находить наибольший по модулю корень многочлена.

Пример 9.2. Многочлен $Q(x) = 1 - 3x + x^3$ имеет значения разных знаков на концах каждого из отрезов $[-2,-1], [0,1], [1,2]$ и, следовательно, имеет три корня. Корень $x_1 \in (0,1)$ искомый. Разложим дробь $\dfrac{1}{Q(x)}$ в степенной ряд с неизвестными пока коэффициентами a_n. Получим

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots)(1 - 3x + x^3) = 1.$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены, сравним коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства. Придем к системе равенств

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 - 3a_0 = 0, \\ a_2 - 3a_1 = 0; \\ a_3 - 3a_2 + a_0 = 0, \\ a_4 - 3a_3 + a_1 = 0, \\ a_5 - 3a_4 + a_2 = 0, \ldots \end{cases}.$$

Находя неизвестные, будем иметь

$$\frac{1}{Q(x)} = 1 + 3x + 9x^2 + 26x^3 + 75x^4 + 216x^5 + 622x^6 + 1791x^7 + 5157x^8 \dots .$$

Наблюдая отношение предыдущего коэффициента к последующему, видим сходимость процесса. Например, $\frac{75}{216}$ = 0.347222, $\frac{216}{622}$ = 0.347267 и т.д. С 6D искомый корень, полученный средствами Mathcad, равен 0.347296.

Пример 9.3. Найти дифференцируемую функцию $f : R \to R$ со свойствами

$$2f^2(x) + f'(2x) \equiv 1, \quad f(0) = 0.$$

В курсе дифференциальных уравнений студенты знакомятся с методами решения дифференциальных уравнений в степенных рядах. Но здесь уравнение смешанного типа: оно функционально-дифференциальное. Тем не менее попытаемся искать решение также в виде степенного ряда

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

(начальный член ряда $a_0 = 0$, так как по условию $f(0) = 0$). Для нахождения

$$f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$$

воспользуемся определением произведения рядов

$$\sum_{n \ge 1} a_n \cdot \sum_{n \ge 1} b_n = \sum_{n \ge 1} c_n, \quad c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

В исходном уравнении перенесем производную в правую часть. Получим равенство, в котором слева

$$2[a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + (2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) x^5 + (2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2) x^6 + \dots],$$

а справа

$$1 - [a_1 + 2a_2 \cdot 2x + 3a_3 \cdot (2x)^2 + 4a_4 \cdot (2x)^3 + 5a_5 \cdot (2x)^4 + 6a_6 \cdot (2x)^5 + \dots].$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях дает

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{3!},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{5!},\ a_6 = 0, \dots .$$

Следовательно, $f(x) = \sin x$.

Задачи к разделу 9

9.1. Вы помните формулу $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, но забыли аналогичную для суммы квадратов. Как ее восстановить? Если в «знакомой» формуле справа имеем квадратный трехчлен, то по аналогии естественно ожидать, что

$$1^2+2^2+...+n^2=a_0+a_1n+a_2n^2+a_3n^3.$$

Восстановите коэффициенты, разложите кубический многочлен на множители. После такой работы формула хорошо запомнится.

9.2. Давно замечено, что линейные размеры книги, почтовой открытки, рамки для фото и т.д. наиболее приятны для глаза, если отношение большего размера b к меньшему размеру a близко к числу $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, называемому золотым сечением, которое удовлетворяет квадратному уравнению $x^2=x+1$. Но в последние десятилетия была подмечена тенденция к «потолстению»: отношение $\frac{b}{a}$ близко к корню кубического уравнения $x^3=x^2+1$, называемому суперзолотым сечением. Найдите его приближенное значение методом Бернулли-Эйлера.

9.3. Найти дважды дифференцируемую функцию $f:R\to R$, для которой

$$f''(x)\equiv f(-x),\ f(0)=f'(0)=1.$$

9.4. Функцию $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ разложить в ряд по степеням x, найти радиус сходимости.

9.5. Пусть $k\in(-1,1), k\neq 0$. Функцию $f(t)=\frac{1}{1-k\cos t}$ требуется разложить в ряд по косинусам кратных дуг – представить ее в виде

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n\geq 1}a_n\cos nt, \qquad (9.5.1)$$

где коэффициенты подлежат нахождению.

ГЛАВА 10. ПРИВЛЕКАЕМ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В математике наиболее глубокие результаты получаются при использовании не одного, а нескольких методов. Здесь мы рассмотрим некоторые применения комплексных чисел. Предполагается, что читатель знаком с алгебраической и тригонометрической формой комплексного числа. Основой является формула Муавра: если $z = r(\cos t + i\sin t)$, то $z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$, где $r = |z|, n \in N, t \in R$. При $r = 1$ в левой части равенства

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt$$

раскроем скобки по биномиальной теореме и выделим действительную и мнимую части. Получим

$$\cos nt = \sum_{r=0}^{p}(-1)^r C_n^{2r}\cos^{n-2r}t\sin^{2r}t, \quad \sin nt = \sum_{r=0}^{q}(-1)^r C_n^{2r+1}\cos^{n-2r-1}t\sin^{2r+1}t, \qquad (10.1)$$

где p – целая часть числа $\frac{n}{2}$, а q – целая часть $\frac{n-1}{2}$. Получили равенства, обобщающие формулы косинуса и синуса двойного угла на случай произвольного кратного аргумента. Например,

$$\cos 4t = \cos^4 t - 6\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t, \quad \sin 4t = 4\cos^3 t\sin t - 4\cos t\sin^3 t.$$

Из формул (10.1) можно вывести много интересных фактов. Рассмотрим вторую из них, заменяя n на $2n+1$:

$$\sin(2n+1)t = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r C_{2n+1}^{2r+1}\cos^{2n-2r}t\sin^{2r+1}t.$$

Отсюда

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1}t} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r C_{2n+1}^{2r+1} ctg^{2n-2r}t.$$

Здесь левая часть обращается в ноль при $t_k = \frac{\pi k}{2n+1}, k = 1,...,n$. Следовательно, числа $y_k = ctg^2 t_k$ – это все нули многочлена от y

$$\sum_{r=0}^{n} a_r y^{n-r}, \quad a_r = (-1)^r C_{2n+1}^{2r+1}.$$

По теореме Виета сумма всех корней равна $-\frac{a_1}{a_0}$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} ctg^2 \frac{\pi k}{2n+1} = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3}. \qquad (10.2)$$

Так как $ctg^2 t + 1 = 1/\sin^2 t$, то из (10.2) следует

$$\sum_{k=1}^{n} (\sin \frac{\pi k}{2n+1})^{-2} = \frac{n(2n+2)}{3}. \qquad (10.3)$$

Заметим, что при $n = 2$ из (10.2) получается равенство

$$ctg^2 \frac{\pi}{5} + ctg^2 \frac{2\pi}{5} = 2.$$

Сможете ли Вы его доказать средствами традиционной тригонометрии?

Для чего приведены формулы (10.2), (10.3)? Для того, чтобы доказать один важный результат теории рядов, полученный впервые Эйлером:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (10.4)$$

Из очевидных неравенств

$$\sin t < t < tgt \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

следует

$$ctg^2 t < \frac{1}{t^2} < \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Подставляя сюда вместо t поочередно $\frac{\pi k}{2n+1}$, $k = 1,2,...,n$ и суммируя по k, получим согласно (10.2), (10.3)

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{n(2n+2)}{3}.$$

Для получения формулы (10.4) осталось в неравенствах

$$\pi^2\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \pi^2\frac{n(2n+2)}{3(2n+1)^2}$$

сделать предельный переход при $n \to \infty$.

Эйлер получил равенство (10.5) из разложения

$$\sin x = x(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})..., \qquad (10.5)$$

аналогичного разложению обычного многочлена на множители. Эта смелая и неожиданная аналогия между конечным и бесконечным привела Эйлера к великому открытию. Равенство (10.5), называемое Предположением Э., многократно подтверждалось, на его основе были получены различные важные следствия. См. об этом в книге Д.Пойа [23, с.51-54].

Формула (10.4) часто используется для вычисления некоторых подобных сумм, а также интегралов.

Пример 10.1. Вычислить $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

Так как $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$, то

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \int_0^1 (1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+...)dx = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+....$$

Полученную знакочередующуюся сумму представим в виде

$$(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...)+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...)-2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...) = S_1+S_2-2S_3.$$

Но

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi^2}{6}, S_3 = \frac{1}{2^2}(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots) = \frac{\pi^2}{24},$$

так что искомый интеграл равен $\frac{\pi^2}{12}$.

Далее привлечем геометрический ряд

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots, \quad |z| < 1.$$

Полагая $z = r(\cos t + i \sin t)$, получим, согласно формуле Муавра,

$$\frac{1}{(1 - r\cos t) - i \sin t} = 1 + \sum_{n \ge 1} r^n (\cos nt + i \sin nt).$$

Отсюда, сравнивая действительные и мнимые части слева и справа, находим, что

$$\frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} = 1 + \sum_{n \ge 1} r^n \cos nt, \quad \frac{r \sin t}{1 - 2r\cos t + r^2} = \sum_{n \ge 1} r^n \sin nt \quad (r < 1).$$

Эти формулы также находят многочисленные применения. Например, вычитая по $\frac{1}{2}$ из обеих частей первой из них, придем к равенству

$$\frac{1 - r^2}{2(1 - 2r\cos t + r^2)} = \frac{1}{2} + \sum_{n \ge 1} r^n \cos nt.$$

А это – одна из самых «рабочих» формул в теории многочленов и рядов Чебышева. Положим $k = \frac{2r}{1 + r^2}$. Тогда после очевидных преобразований получим

$$\frac{1}{1 - k\cos t} = 2\frac{1 + r^2}{1 - r^2}(\frac{1}{2} + \sum_{n \ge 1} r^n \cos nt) = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}}[\frac{1}{2} + \sum_{n \ge 1} (\frac{k}{1 + \sqrt{1 - k^2}})^n \cos nt].$$

Получили ответ на вопрос задачи 9.5 (см. формулу (9.5.1)).

Пример 10.2. Доказать, что

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nt \sin t}{1-2r\cos t + r^2} dt = \frac{\pi}{2} r^{n-1} \quad (0 < r < 1,\, n = 1,2,...)$$

В решении обе части равенства

$$\frac{r\sin t}{1-2r\cos t + r^2} = \sum_{m\geq 1} r^m \sin mt$$

умножим на $\sin mt$, после чего выполним почленное интегрирование по отрезку $[0,\pi]$. Как известно, интегралы от слагаемых $\sin nt \cdot \sin mt$ равны нулю при $m \neq n$, а интеграл от $\sin^2 nt = \frac{1-\cos 2nt}{2}$ легко находится – он равен $\frac{\pi}{2}$.

Задачи к разделу 10

10.1. Найдите суммы рядов

а). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$; б). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$; в). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$; г). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

10.2. Вычислить интегралы

а). $\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x}$; б). $\int_0^1 (1+\frac{x\ln x}{1-x}) \frac{dx}{1-x}$; в). $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\, dx$.

10.3. а). Доказать, что

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{1-2r\cos t + r^2} dt = \frac{\pi}{1-r^2} r^n \quad (0 < r < 1).$$

б). Вычислить интеграл Пуассона

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x + r^2) dx$$

как функцию от r в областях $0 < r < 1$ и $r > 1$.

в). Докажите, что

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} r^n \sin nt = arctg \frac{r\sin t}{1-r\cos t} \quad (|r| < 1).$$

ГЛАВА 11. АНАЛИЗ ПОМОГАЕТ ГЕОМЕТРИИ. ГЕОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АНАЛИЗУ

Применение евклидовой геометрии представляет самое обычное явление всюду, где определяются длины, площади и т.п. Техника, картография, астрономия, механика немыслимы без геометрии. Вспомним, что И.Кеплер открыл законы вращения планет, воспользовавшись тем, что эллипс был изучен еще древними геометрами. В самой математике положение и роль геометрии определяются прежде всего тем, что через нее вводилась непрерывность, с нею связано мышление, часто позволяющее охватить в целом то, что достигается анализом и выкладками лишь через длинную цепь шагов. В свою очередь геометрия широко использует методы других областей математики, в частности, интегральное и дифференциальное исчисления. Можно привести массу примеров, когда одна и та же математическая проблема может трактоваться либо аналитически, либо геометрически, или в соединении обоих методов. В целом взаимопроникновение геометрии и других областей столь тесно, что часто границы оказываются условными и связанными лишь с традицией.

Среди задач анализа, решаемых геометрически, рассмотрим лишь задачи, связанные с оценками и экстремумами. Среди многочисленных геометрических задач, решаемых средствами математического анализа, рассмотрим лишь задачи на геометрические неравенства, оценки и экстремумы. Чаще всего применяется метод решения задач на условный экстремум. В простейшем случае требуется найти максимум (минимум) целевой функции двух переменных $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$. Метод множителей Лагранжа сводит эту задачу к поиску безусловного экстремума функции $L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ (функции Лагранжа). Геометрически метод Лагранжа означает, что в точке оптимума кривой $\varphi(x, y) = 0$ градиенты функций f, φ коллинеарны. Поэтому среди линий уровня $f(x, y) = const$

следует выбрать те, которые касаются кривой $\varphi(x, y) = 0$. Точки касания, как правило, искомые – в них и достигается обычно искомый экстремум.

Сначала рассмотрим некоторые примеры, в которых геометрия помогает анализу.

Пример 11.1. Найти наибольшее значение выражения

$$6\sin x\cos y + 2\sin x\sin y + 3\cos x.$$

В решении введем векторы

$$\vec{m} = (6,2,3), \quad \vec{n} = (\sin x\cos y,\ \sin x\sin y,\ \cos x).$$

Их скалярное произведение не превосходит произведения длин (неравенство Коши-Буняковского), поэтому заданное выражение не более 7. Знак равенства достигается, например, при $\sin x = \frac{\sqrt{40}}{7}, \quad \cos x = \frac{3}{7}, \quad \sin y = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos y = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Пример 11.2. Каков минимум функции

$$f(x, y) = \sqrt{9 + x^2 - 3\sqrt{3}x} + \sqrt{x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy} + \sqrt{16 + y^2 - 4\sqrt{3}y} \ \ (x > 0, y > 0) \ ?$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами AC=3, BC=4 (рис. 13). Разделим прямой угол на три равные части и отложим на получившихся лучах отрезки CM=x, CN=y.

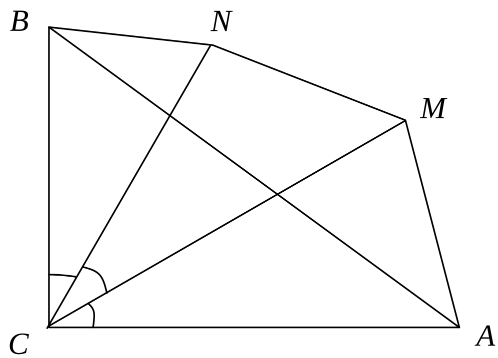


Рис. 13

По теореме косинусов слагаемые в формуле, задающей функцию, равны соответственно AM, MN, NB. Длина ломаной AMNB, очевидно, не менее длины гипотенузы, равной 5. Минимальное искомое значение 5 принимается при $x=\dfrac{24}{3+4\sqrt{3}}$, $\quad y=\dfrac{24}{4+3\sqrt{3}}$.

Пример 11.3. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ принадлежат отрезку $[a,b], 0<a<b$. Доказать неравенство

$$(x_1+x_2+...+x_n)\cdot(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n})\le\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2 .$$

Рассмотрим (рис. 14) дугу AB гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$ $a\le x\le b$. Разместим на ней в точках $(x_i, y_i), i=1,...,n$ одинаковые грузы. Центром масс полученной системы материальных точек является точка

$$(p,q)=(\frac{x_1+...+x_n}{n},\frac{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}{n}),$$

лежащая в пределах сегмента, ограниченного дугой гиперболы и отрезком, соединяющем ее концы. Ясно, что именно на этой хорде следует искать точку (p,q), для которой произведение pq наибольшее. А это уже более легкая задача. Укажем ответ: такой точкой является середина отрезка. Отсюда будет вытекать нужное неравенство.

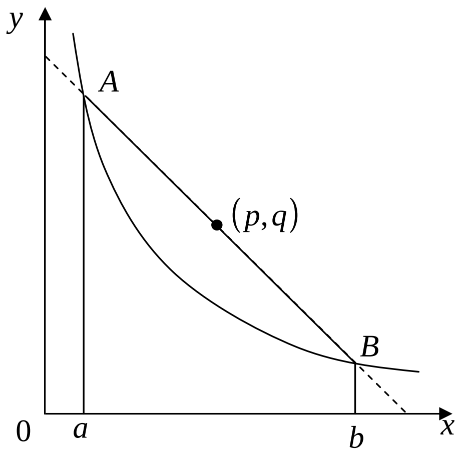


Рис. 14

Далее рассмотрим примеры, в которых, наоборот, средствами анализа решаются геометрические задачи.

Пример 11.4. В плоскости треугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

Этой задачей интересовались многие ученые (Ферма, Вивиани, Торричелли). Позже, в 19-ом столетии, Я.Штейнер занимался обобщенной задачей (вместо треугольника рассматривался, например, четырехугольник). Указанную в задаче точку в литературе обычно называют точкой Торричелли.

Для ее нахождения введем каким-нибудь образом систему координат, в которой вершины A, B, C треугольника имеют соответственно координаты $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$. Пусть (x_1, x_2) – координаты искомой точки D. Задача сводится к минимизации функции

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} + \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2} + \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2}\,.$$

Видно, что у нее частные производные существуют во всех точках, кроме вершин треугольника. Рассматриваем треугольник как замкнутую плоскую область (пластинку). Согласно известной теореме анализа, минимум функции существует и достигается либо во внутренней стационарной точке, либо на границе области (в частности, он может достигаться в одной из вершин треугольника). Пусть сначала точка минимума $D(x_1^0, x_2^0)$ не совпадает ни с одной из вершин. Обе частные производные рассматриваемой функции в этой точке равны нулю:

$$\frac{x_1^0 - a_1}{DA} + \frac{x_1^0 - b_1}{DB} + \frac{x_1^0 - c_1}{DC} = 0, \quad \frac{x_2^0 - a_2}{DA} + \frac{x_2^0 - b_2}{DB} + \frac{x_2^0 - c_2}{DC} = 0\,.$$

Геометрически это означает, что сумма трех единичных векторов

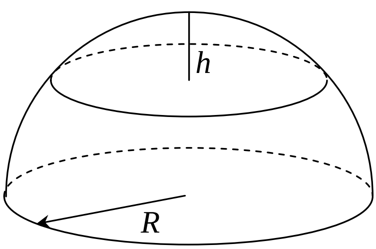
$$\vec{e}_1 = \frac{1}{DA} D\vec{A}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{DB} D\vec{B}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{DC} D\vec{C}$$

равна нулю. Такое возможно лишь тогда, когда концы векторов образуют вершины равностороннего треугольника, т.е. величины углов ADB, BDC, CDA все равны по 120 градусов. Значит, если точка D не совпадает с одной из вершин треугольника, то из точки D все стороны видны под углом 120 градусов. Но это возможно лишь при условии, что все углы треугольника менее 120^0. Иначе точка Торричелли совпадет с вершиной при угле не менее 120 градусов.

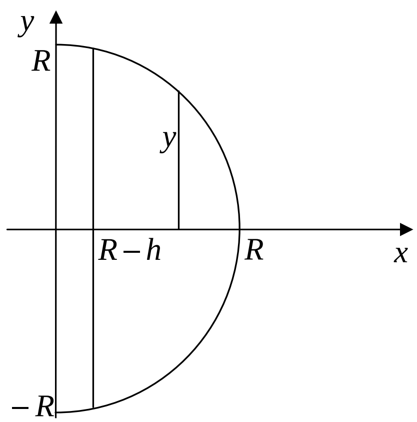
Пример 11.5. В сочинении Архимеда «О шаре и цилиндре» ставилась и решалась следующая проблема (изопифанная задача). Найти шаровой сегмент наибольшего объема при заданной площади сферической поверхности.

Решение. Если шар рассечь плоскостью, то одна из частей это и есть шаровой сегмент. Он определяется параметрами R, h на рис. 15 а). Его объем и площадь боковой поверхности в обозначениях рис. 15 б) найдем по известным формулам

$$V = \int_{R-h}^{R} \pi y^2 dx, \quad S = 2\pi \int_{R-h}^{R} y\sqrt{1+(y')^2}\, dx.$$



а)



б)

Рис. 15

Получим

$$V = \pi h^2 (R - \frac{h}{3}), \quad S = 2\pi Rh\,.$$

Несложный анализ показывает, что функция

$$V(h) = \pi h^2 (\frac{S}{2\pi h} - \frac{h}{3})$$

имеет максимум в точке $h_0 = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ и при этом $R = h_0$. Следовательно, говоря словами Архимеда, «из всех сферических сегментов, ограниченных равными поверхностями, наибольшим будет полушарие».

Задачи к разделу 11

11.1. а). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0, \frac{\pi}{2}]$, непрерывно дифференцируема на $(0, \frac{\pi}{2})$, причем $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Верно ли, что

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x + [f'(x)]^2}\, dx > 2.1 \text{ ?}$$

б). Пусть функции $f(x), g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Доказать, что

$$\sqrt{\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 + \left[\int_a^b g(x)dx\right]^2} \quad \le \quad \int_a^b \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}\, dx\,.$$

11.2. Пусть в треугольнике взята произвольно некоторая точка, x, y, z – расстояния от нее до сторон треугольника. При каком положении точки

а). Сумма расстояний минимальная?

б). Произведение расстояний максимальное?

11.3. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Каково множество значений

а). Суммы косинусов этих углов?

б). Суммы квадратов косинусов?

11.4. а). Найдите геометрическим методом минимум функции

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - \sqrt{3}\,x}\,.$$

б). Верно ли, что при всех допустимых x

$$2\sqrt{x} + 2\sqrt{1 + x} + \sqrt{3 - 2x} < 6\ ?$$

11.5. а). Дан круг радиуса 1. На диаметре AB дана точка F, через которую проводится хорда CD. При каком ее положении площадь четырехугольника ABCD максимальная?

б). Решите задачу оптимизации

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \quad \to \quad \min.$$

ГЛАВА 12. ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Речь пойдет о теореме, утверждающей существование и единственность неподвижной точки множества при некотором специальном отображении его в себя. Произвольное отображение A метрического пространства M в себя порождает в этом пространстве уравнение

$$Ax = x. \tag{12.1}$$

Действие отображения на точку x можно интерпретировать как перемещение ее в точку $y = Ax$. Точка x называется при этом неподвижной, если выполняется равенство (12.1). Тогда вопрос о разрешимости уравнения (12.1) является вопросом о нахождении неподвижных точек отображения A. Оно называется сжатым (сжимающим), если существует такое число $\alpha \in (0,1)$, что

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha \cdot \rho(x, y) \quad \forall x, y \in M,$$

где ρ – метрика на M. Принцип сжатых отображений утверждает следующее.

Теорема. Пусть M – полное метрическое пространство (т.е. в нем всякая фундаментальная последовательность сходится) и $A: M \to M$ – сжатое отображение. Тогда 1). Оно имеет единственную неподвижную точку. 2). Для любой начальной точки $x_0 \in M$ последовательность $(x_n)_{n\ge 0}$, определенная рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = Ax_n, \tag{12.2}$$

сходится к неподвижной точке x отображения A. При этом имеет место оценка погрешности

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \quad (n \ge 1).$$

Эта теорема, доказанная С.Банахом (1920 г.), позволяет единым методом устанавливать существование и единственность решений уравнений и их систем, решений дифференциальных, интегральных и других уравнений. В условиях ее применимости решение может быть с наперед заданной точностью вычислено согласно формуле (12.2) методом итераций (или, по-другому говоря, методом последовательных приближений). Таким образом, принцип сжатых отображений носит конструктивный характер: дает конкретный способ приближенного нахождения решения уравнения (12.1). Обратите внимание на то, что последовательные приближения (12.2) сходятся к точному решению независимо от выбора начального приближения. Это говорит об устойчивости вычислительного алгоритма по начальному приближению.

Здесь мы рассмотрим применение этого принципа в начальной стадии ознакомления с ним, когда решается на его основе отдельное скалярное уравнение или система уравнений.

Допустим, что у непрерывной функции $F: R \to R$ выявлен отрезок изоляции некоторого ее нуля c, т.е найден отрезок $[a,b]$ со свойствами : $c \in (a,b), F(a)F(b) < 0$ и других корней уравнения $F(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$, кроме точки c, уже нет. В этом случае данное уравнение заменяется равносильным $x = f(x)$, но так, чтобы функция $f(x)$ осуществляла сжатое отображение $f:[a,b] \to [a,b]$. Достаточным условием для сжатости является следующее: если функция непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и существует постоянная $\alpha \in (0,1)$ такая, что при всех x $|f'(x)| \le \alpha$, то отображение $f:[a,b] \to R$ сжимающее (докажите!). Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 12.1. Ваш калькулятор «умеет» вычислять косинус любого угла в радианах. Введите какое-нибудь число (например, год Вашего рождения) и последовательно нажимайте клавишу F cos каждый раз после окончания предыдущего вычисления. После 10-15 нажатий увидите результат, приблизительно равный 0.739. Таков же результат, если бы вначале вводили, скажем Ваш рост или вес. Как Вы объясните такое «упрямое» поведение косинуса?

После первого нажатия клавиши F cos вводимая величина перейдет в некоторое число отрезка $[-1,1]$, после второго нажатия получим некоторое число $x_0 \in [0,1]$. Далее «заработает» рассматриваемый принцип : отображение

$$f:[0,1] \to R,$$

осуществляемое функцией $f(x) = \cos x$, переводит отрезок [0,1] (а это – полное метрическое пространство) в себя и является сжатым, так как $|f^{'}(x)| \le \sin 1 < 1$. Число, равное приблизительно 0.739, и есть неподвижная точка этого отображения –корень уравнения $x = \cos x$. Результаты пробных вычислений с 6D по рекуррентной формуле (12.2), которая в данном случае принимает вид $x_{n+1} = \cos x_n$, приведены ниже в следующей таблице. За нулевое приближение была выбрана средняя точка отрезка : $x_0 = 0.5$

n	x_{2n}	x_{2n+1}
0	0,500000	0,877583
1	0,639012	0,802685
2	0,694778	0,768196
3	0,719165	0,752356
4	0,730081	0,745120
5	0,735006	0,741827
6	0,737236	0,740330
7	0,738246	0,739649
8	0,738705	0,739341
9	0,738912	0,739201

Здесь для удобства анализа итерационной последовательности ее члены расположены по два в строке. Видно, что последовательность скачет то вверх, то вниз по правилу: с возрастанием номера четные члены возрастают, а нечетные убывают, приближаясь навстречу друг к другу. То есть корень уравнения $x = \cos x$ лежит между четными и нечетными итерациями, причем первые дают его значение с недостатком, вторые – с избытком. Это позволяет легко контролировать точность, достигнутую после любого числа итераций: погрешность не превышает разности между последними вычисленными нечетным и четным членами. Например, мы остановили вычислительный процесс на 19-й итерации и можем оценить искомый корень:

$$x_{18} = 0.738912 < c < x_{19} = 0.739201,$$

т.е. указанные члены итерационной последовательности определяют корень с погрешностью $\varepsilon < x_{19} - x_{18} < 0.0004$. Визуализация вычислений легко усматривается из так называемой итерационной ломаной типа «спирали» (рис. 16).

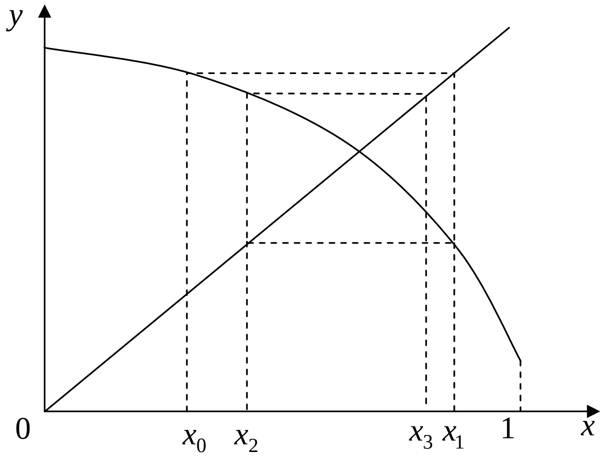


Рис. 16

Таков примерно вид итерационной ломаной в любом случае, когда производная функции $f(x)$ отрицательная. Иначе итерационная ломаная имеет вид «лестницы», наглядно демонстрирующей одностороннюю сходимость (например, в методе Герона извлечения квадратного корня ; см. рис. 1 из раздела 1.4).

Далее рассмотрим применение принципа к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными вида $\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$ в предположении только изолированных решений. Пусть одно из них (ξ, η) содержится в области $R = \{(x,y) : a \le x \le A,\ b \le y \le B\}$ и в ней других решений нет. Исходная система приводится к виду $x = f_1(x,y),\ y = f_2(x,y)$ так, чтобы отображение $(x,y) \to (\,f_1(x,y),\ f_2(x,y)\,)$ переводило R в себя и было сжатым. Тогда при любом начальном приближении $(x_0, y_0) \in R$ к искомому решению последовательность $(x_n, y_n)_{n\ge 0}$, определенная по формулам

$$x_{n+1} = f_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = f_2(x_n, y_n),$$

сходится к решению (ξ, η).

Для сжатости достаточно, чтобы итерирующие функции были гладкими в прямоугольнике R и у матрицы частных производных суммы модулей элементов по столбцам или по строкам была меньше 1.

Пример 12.2. Рассмотрим систему $\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0\,, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0. \end{cases}$

Построив графики уравнений (например, в системе Maple с помощью функции Implicitplot), увидим, что кривые пересекутся в двух точках с приближенными координатами (0.5 ; 0.5), (2 ; 1.5). С 3D будем из двух решений искать лежащее «юго-западнее». В качестве R берем квадрат $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Для применения метода итераций запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{x^3 + y^3}{6} + \dfrac{1}{2} = f_1(x,y)\,, \\ y = \dfrac{x^3 - y^3}{6} + \dfrac{1}{3} = f_2(x,y). \end{cases}$$

Легко проверить, что если $(x,y) \in R$, то точка $(\,f_1(x,y),\ f_2(x,y))$ не покидает R. Более того, она остается в прямоугольнике

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{6} \le y \le \frac{1}{2}.$$

Для точек этого прямоугольника у матрицы частных производных

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{2} & \dfrac{y^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{2} & -\dfrac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

строковые суммы модулей не превосходят $\frac{34}{72}$. Следовательно, в указанном прямоугольнике существует единственное решение и оно может быть найдено методом итераций. Полагая $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, будем иметь

$$x_1 = 0.542,\ y_1 = 0.333; \quad x_2 = 0.533,\ y_1 = 0.354\,.$$

Продолжая процесс, придем к ответу $(0.532; 0.351)$.

Задачи к разделу 12

12.1. Сходится ли последовательность $(x_n): x_n = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+...+\sqrt[3]{3}}}$ (n радикалов)? Если – да, то каков приблизительно ее предел?

12.2. Докажите, что уравнение $x^3 + 4x - 1 = 0$ имеет единственный действительный корень. Можно ли применить метод итераций, заменив уравнение равносильным

$$x = \frac{1}{4+x^2}\ ?$$

12.3. а). Пусть f – сжимающее отображение прямой в себя. Докажите, что имеется отрезок, который переводится этим отображением в себя.

б). Дано непрерывное отображение $f:[a,b] \to [a,b]$. Есть ли неподвижная точка?

12.4. Пусть требуется найти наибольший положительный корень уравнения

$$x^3 + x = 1000$$

с точностью до 0.0001. Уравнение можно переписать в нескольких видах, например,

$$x = 1000 - x^3, \quad x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad x = \sqrt[3]{1000 - x}.$$

Какой вариант наиболее выгодный?

12.5. Найдите с точностью до 0.001 решение системы уравнений

$$\begin{cases} y - \sin(x - 0.6) + 1.6 = 0, \\ 3x - \cos y - 0.9 = 0. \end{cases}$$

ГЛАВА 13. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решения задач главы 1

1.1.1. Имеем

$$H_{n+p}-H_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p}.$$

При $p=n$ отсюда $H_{2n}-H_n>\frac{1}{2}$. Зададим $\varepsilon<\frac{1}{2}$ и предположим последовательность сходящейся. Нашлось бы такое $n(\varepsilon)$, что $|H_{n+p}-H_n|<\varepsilon$ при всех $n>n(\varepsilon), p\in N$. Одно такое n зафиксируем и положим $p=n$. Получим противоречие $\frac{1}{2}<\varepsilon$, означающее расходимость последовательности. Причина ее в том, что (H_n) не является ограниченной. Проверим это при $n=2^k$. Отбросим первые два слагаемых и остальные разобьем на группы $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ (2 слагаемых), $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ (4 слагаемых), $\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}$ (8 слагаемых, …, $\frac{1}{2^{k-1}+1}+...+\frac{1}{2^k}$ (2^{k-1} слагаемых). Каждая сумма больше $\frac{1}{2}$, поэтому $H_{2^k}>k\cdot\frac{1}{2}$.

1.1.2. Рассмотрим члены последовательности сначала с четными номерами, затем с нечетными. Имеем

$$x_2=1-\frac{1}{2},\quad x_4=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}),\quad x_6=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}),....$$

Видно, что полученная подпоследовательность возрастает. Аналогично, находя

$$x_1=1,\quad x_3=1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}),\quad x_5=1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}),...,$$

наблюдаем убывание подпоследовательности с нечетными номерами. Обе они ограничены соответственно сверху и снизу, так как $x_{2n}<x_{2k-1}\ \forall n,k$. Так как $x_{2n-1}-x_{2n}\to 0$, то обе последовательности $(x_{2n}),(x_{2n-1})$ сходятся навстречу друг к другу к общему пределу. Каков он? Ответ : $\ln 2$.

1.1.3. Пусть $x_n = \dfrac{n^p}{a^n}$. Тогда имеем рекуррентную формулу $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{(1+\frac{1}{n})^p}{a}$. Так как $a > 1$, видим монотонное убывание последовательности, начиная с некоторого номера. Последовательность ограничена снизу нулем, поэтому ее предел x существует. Для его нахождения сделаем предельный переход в рекррентной формуле. Получим $x = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = 0$. Аналогично доказывается второе предельное равенство. Смысл их в том, что показательная функция натурального аргумента растет быстрее степенной функции. Но в свою очередь показательная функция растет медленнее факториала.

1.1.4. Общий член последовательности «зажат» между $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ и $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Но «милиция» стремится к 1.

1.1.5. Проверьте, что последовательность средних арифметических убывает, последовательность средних гармонических возрастает и обе сходятся навстречу друг к другу к общему пределу $\sqrt{ab}$ – среднему геометрическому исходных чисел. Причем эта сходимость быстрая, как показывает пример с $a = 3, b = 4$. Другими словами, требуется вычислить $\sqrt{12}$. Mathcad – вычисления с шестью десятичными знаками дали:

$a_1 = 3.5, b_1 = 3.428571;\quad a_2 = 3.464286, b_2 = 3.463918;\quad a_3 = 3.464102, b_3 = 3.464102.$

Оказывается, что такой способ извлечения квадратных корней равносилен известному методу Герона. Он рассмотрен в разделе 1.4.

1.2.1. Указание: рассмотрите логарифм среднего геометрического. Обратное не верно. Положите, например,

$$a_n = e^{(-1)^n}.$$

1.2.2. Указание: рассмотрите логарифм $\sqrt[n]{a_n}$. Обратное не верно. Пример:

$$a_n = 2 + (-1)^n.$$

1.2.3. Пусть $c_n = a_{n+1} - a_n$. Тогда $\frac{1}{n}(c_1 + ... + c_n) \to a$. Но выражение в скобках равно $a_{n+1} - a_1$. Отсюда результат.

1.2.4. Ответ: $\frac{1}{2}$.

1.2.5. В определении u_n приведите разность к общему знаменателю. Применяйте теорему Штольца к

$$x_n = (k+1)(1^l + ... + n^k) - n^{k+1}, \quad y_n = n^k(k+1).$$

Используйте биномиальную теорему для вычисления $(n-1)^{k+1}, (n-1)^k$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

1.3.1. В индукционном переходе имеем

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Заметим, что при $n > 1, x > -1, x \neq 0$ знак неравенства строгий. Этот факт можно использовать, например, при доказательстве того, что последовательность $(x_n): x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ возрастает. Действительно, отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ представимо в виде

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n > \frac{n+2}{n+1}\left[1 + n\frac{-1}{(n+1)^2}\right] = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} > 1.$$

Аналогично проверяется, что последовательность с общим членом $y_n = x_n(1+\frac{1}{n})$ убывает. Для нее

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{n}{n+1}(1 + \frac{1}{n^2-1})^n > \frac{n}{n+1}(1 + n\frac{1}{n^2-1}) = \frac{n(n^2+n-1)}{(n+1)(n^2-1)} > 1.$$

1.3.2. Помимо решения индукцией рекомендуем разобраться в следующем. Почленно перемножим очевидные неравенства

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ldots,\quad \frac{2n-3}{2n-2}<\frac{2n-2}{2n-1},\quad \frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}.$$

Получим $x_n<\frac{1}{x_n}\frac{1}{2n+1}$, откуда результат.

1.3.4. Докажите, что $n^n>(n+1)^{n-1}$ $(n\geq 2)$, $\quad n^{n+1}>(n+1)^n$ $(n\geq 3)$.

1.4.1. Во втором рекуррентном соотношении заменим n на $n+1$:

$$y_{n+1}=2x_n+y_n=2x_{n-1}+2y_{n-1}+y_n.$$

Но ведь $2x_{n-1}=y_n-y_{n-1}$, поэтому от системы двух линейных рекуррентных соотношений первого порядка пришли к рекуррентному линейному соотношению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y_{n+1}=2y_n+y_{n-1},\quad n\geq 1;\ y_0=1,\quad y_1=3.$$

Отсюда (детали опущены)

$$y_n=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\right].$$

Аналогичные действия с (x_n) приводят к рекуррентному соотношению

$$x_{n+1}=2x_n+x_{n-1},\, n\geq 1;\quad x_0=1,\quad x_1=2,$$

откуда

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$$

1.4.2. Применяя формулы Архимеда, последовательно находим

$$a_1=\frac{4x}{(x+1)^2},\ b_1=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x+1};\quad a_2=\frac{8x}{(x+1)(x^{\frac{1}{2}}+1)^2},\quad b_2=\frac{4x^{\frac{3}{4}}}{(x+1)(x^{\frac{1}{2}}+1)}$$

и т.д. Возникает предположение, что

$$a_n=b_n\cdot c_n,\quad b_n=\frac{2^n x^{1-\frac{1}{2^n}}}{(x+1)\ldots(x^{\frac{1}{2^{n-1}}}+1)},\quad c_n=\frac{2x^{\frac{1}{2^n}}}{x^{\frac{1}{2^{n-1}}}+1}.$$

Так как $c_n \to 1$, то достаточно найти предел (b_n). Для этого числитель и знаменатель дроби b_n умножим на $x^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1$. Получим, что

$$b_n = \frac{2^n x^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}(x^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1)}{x^2 - 1}.$$

Но, как мы ранее видели,

$$2^{n-1}(x^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1) \to \ln x,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha(\frac{2x}{x^2+1}, 1) = \frac{2x}{x^2-1}\ln x,$$

откуда результат.

1.4.3. 1). Положите $b_n = \frac{1}{a_n}$. 2). Положите $b_n = a_n^2$.

1.4.4. 1). От исходного рекуррентного соотношения первого порядка перейдите к соотношению второго порядка

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{2}{9}x_n,\ n \geq 1; \quad x_1 = 1,\ x_2 = 1.$$

Отсюда $x_n = 3(\frac{2}{3})^n - 3(\frac{1}{3})^n$. Искомый предел равен 3.

2). Проверьте, что $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Искомый предел равен 3.

1.4.5. В случае оператора A ответ: $\frac{a+b+c}{2}$, в случае оператора G получим обычное среднее геометрическое чисел a, b, c.

Решения задач главы 2

2.1.1. Имеем:

$$x_n = \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n) + n\pi) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

По непрерывности синуса в нуле получим в ответе 0. Аналогичные действия с y_n приводят к ответу 1.

2.1.2. Используйте формулы преобразования разности в произведения. Например,

$$\sin(x+h)-\sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}.$$

Используйте первый замечательный предел. Ответы : $\cos x$, $-\sin x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$. Читатель, наверное, догадался, что были найдены производные функций соответственно $\sin x, \cos x, tgx$.

2.1.3. Оба предела равны по $\frac{1}{2}$.

2.1.4. Пусть $x \neq 0$. В исходном равенстве заменим x на $\frac{x}{2}$. Получим

$$f(x) = f(\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2}.$$

Действуем таким образом далее:

$$f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{4})\cos\frac{x}{4},$$

$$\ldots$$

$$f(\frac{x}{2^{n-1}}) = f(\frac{x}{2^n})\cos\frac{x}{2^n}.$$

Перемножим почленно все записанные равенства, получим

$$f(x) = f(\frac{x}{2^n})\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}.$$

Здесь при $n \to \infty$ первый множитель устремится к 1, а произведение косинусов – к $\frac{\sin x}{x}$.

2.1.5. Имеем

$$\ln M(t) = \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{t},$$

где

$$\alpha = \frac{a^t + b^t}{2} - 1 = \frac{(a^t - 1) + (b^t - 1)}{2}.$$

Далее применить равенства (2.1.1). Ответ: следует положить $M(0) = \sqrt{ab}$.

2.2.1. Функция $f(x) = x - \varepsilon \sin x - y$ $(y = const)$ везде непрерывна и принимает значения разных знаков, поэтому хотя бы один нуль у нее имеется. Чтобы проверить, что он единственный, достаточно доказать монотонность функции. Но это легко устанавливается и без применения производной на основе неравенства

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|.$$

2.2.2. Найдутся точки x_1, x_2 и их окрестности U_1, U_2 такие, что $f(x) > 0$ в U_1, $f(x) < 0$ в U_2. Знаки неравенств сохранятся и для некоторых возрастающих прогрессий с членами $a_i, b_i, c_i \in U_i$ $i = 1, 2$. Усредним их с весами $1 - t$, t, т.е. положим $a(t) = (1-t)a_1 + ta_2$, $b(t) = (1-t)b_1 + tb_2$, $c(t) = (1-t)c_1 + tc_2$. Тогда функция $F(t) = f(a(t)) + f(b(t)) + f(c(t))$ на концах отрезка $[0, 1]$ принимает значения разных знаков. Отсюда и нужный результат.

2.2.3. В исходном равенстве заменим x на $\frac{x}{2}$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2} f(\frac{x}{2}) + \frac{x}{4}.$$

Повторяя действие, придем к

$$f(x) = \frac{1}{2^n} f(\frac{x}{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{4^k},$$

откуда при $n \to \infty$ получим ответ : $f(x) = \frac{x}{3}$.

2.2.4. а). Существует.

2.2.5. Рассмотрим только случай 2). Пусть a_0, b_0 – размеры прямоугольника, описанного около нашей фигуры, $a_0 < b_0$. Зафиксируем какой-нибудь направленный луч, параллельный меньшей стороне прямоугольника. Обозначим через $a(t), b(t)$ размеры аналогичного прямоугольника, когда основание составит с лучом угол $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. В начальном положении $a(0) < b(0)$, в конечном – $a(\pi/2) > b(\frac{\pi}{2})$. Очевидно, функции $a(t), b(t)$ непрерывны, поэтому при некотором $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ будем иметь $a(t) = b(t)$. Ответ: можно.

Решения задач главы 3

3.1. а). В точке $x = 0$ функция не определена. В остальных $f(x) = \frac{\pi}{2} signx$, где второй множитель – знаковая функция.
б). Производные функции, полученной студентом, и функции, указанной в ответе, одинаковы. Сделайте отсюда вывод.

3.2. а). Исследуйте левую часть уравнения как функцию на монотонность и экстремум. В единственной стационарной точке $x_0 = -\frac{1}{3}(\frac{3}{\ln 8} + 1) \approx -0.81$ минимум, приблизительно равный -0.7. Вывод сделайте из графика на рис. 17 а). б). Кроме указанного решения есть еще одно: $x = \frac{1}{4}$. Но вывод о том, что решений только два, является ошибочным. Дело в том, что функции в левой и правой частях уравнения взаимно обратны, их графики симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. В некоторой ее точке графики пересекутся, ее абсцисса приблизительно равна 0.3642. На рис. 17 б) представлен график разности между левой и правой частями уравнения, построенный для $x \in [0.2; 0.6]$. Вопрос о числе общих точек кривых $y = a^x$, $y = \log_a x$ заинтересованный читатель найдет в заметке Н.Я. Виленкина «Три точки, три точки, три точки…» в журнале «Квант», №1, 1980, с.48-50.

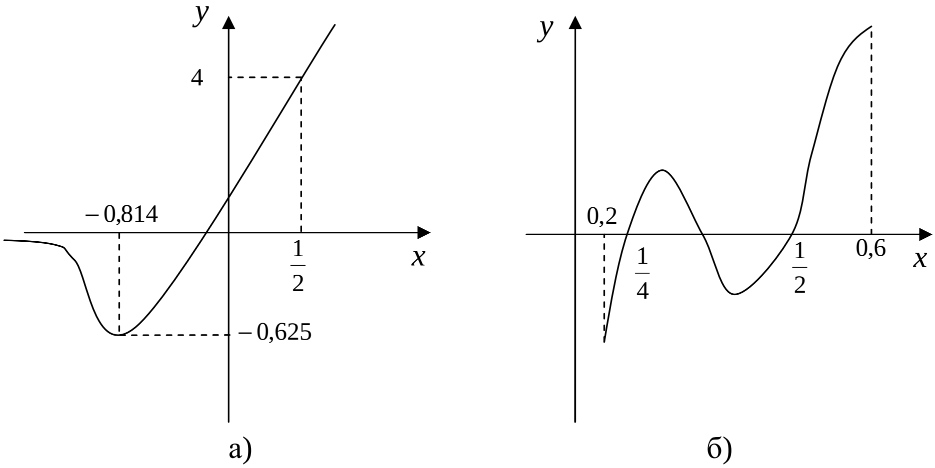


Рис. 17

3.3. Исследуйте на монотонность соответственно функции $f(x) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{10 - x}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

3.5. Рассмотрим только случай Б. Если предположить, что $f(0) = 0$, то $f(x) \equiv 0$, что тривиально. Поэтому предполагаем $f(0) \neq 0$. Но тогда $f(0) = 1$, поэтому предельный переход при $y \to 0$ в равенстве

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(x)[f(y) - 1]}{y}$$

дает дифференциальное уравнение $f'(x) = kf(x)$, где положено $k = f'(0)$. Очевидно, функция $g(x) = \exp(kx)$ ему удовлетворяет. Остается проверить, что любое другое решение $f(x)$ ему пропорционально. Для этого найдите производную частного $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Решения задач главы 4

4.1. а). Функция $f(x)=\sin x,\ x\in(0,\pi)$ вогнутая, поэтому, если A,B,C – углы треугольника, то при весах, равных по $\frac{1}{3}$, получим

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \quad\le\quad \sin\frac{A+B+C}{3} \quad=\quad \sin\frac{\pi}{3} \quad=\quad \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.2. а). Пусть $S=x+y+z$. Примените неравенство Иенсена к функции $f(t)=t/(S-t)$ с весами, равными по $\frac{1}{3}$, в точках x,y,z.

б). Применяем неравенство Иенсена к функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ в точках

$$x_1=\frac{b}{a},\quad x_2=\frac{c}{b},\quad x_3=\frac{a}{c}$$

с весами соответственно

$$w_1=\frac{a}{a+b+c},\quad w_2=\frac{b}{a+b+c},\quad w_3=\frac{c}{a+b+c}.$$

4.3. Используйте неравенство $M(-1)\le M(1)$.

4.4. а). Используйте неравенство Иенсена к функции $f(x)=\dfrac{1}{2p-x}$ с равными весами в точках c,a,b.

4.5. а). Используйте неравенство Иенсена к функции $f(x)=(x+\frac{1}{x})^q$ с равными весами в точках a,b.

Решения задач главы 5

5.1. Выберем систему координат как на рис. 18. Тогда уравнение параболы имеет вид

$$y^2=\frac{a^2}{4h}(h-x),$$

длина поперечного сечения

$$l(x) = 2\cdot\frac{a}{2\sqrt{h}}\sqrt{h-x} \Rightarrow S = \int_0^h l(x)dx = \frac{a}{\sqrt{h}}\left[-\frac{(h-x)^{3/2}}{3/2}\right]\Big|_0^h = \frac{2}{3}ah\,.$$

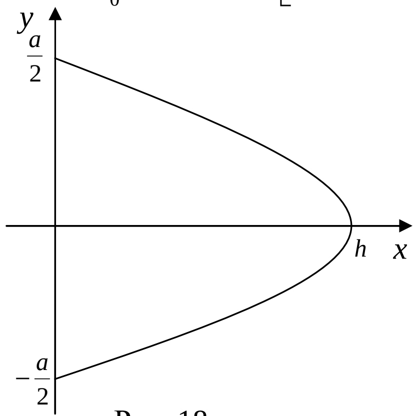


Рис. 18

При вращении сегмента вокруг оси абсцисс (тот же рис.) в поперечном сечении будет круг площади $S(x) = \pi y^2$. Тогда искомый объем

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \pi\frac{a^2}{4h}(h-x)dx = \frac{\pi a^2}{4h}\left[-\frac{(h-x)^2}{2}\right]\Big|_0^h = \frac{1}{2}\cdot\pi\,(\frac{a}{2})^2 h\,.$$

5.2. Подынтегральные функции взаимно обратные. Встанем на геометрическую точку зрения (рис. 19 а)). Сумма данных интегралов – это сумма площадей заштрихованных фигур, которая, очевидно, более 9. Вклад в бóльшую сторону делает площадь заштрихованного треугольника на рис. 19 б). Но она менее, чем

$$(3-\sqrt[4]{80})(\sqrt[4]{82}-3) < 0.001.$$

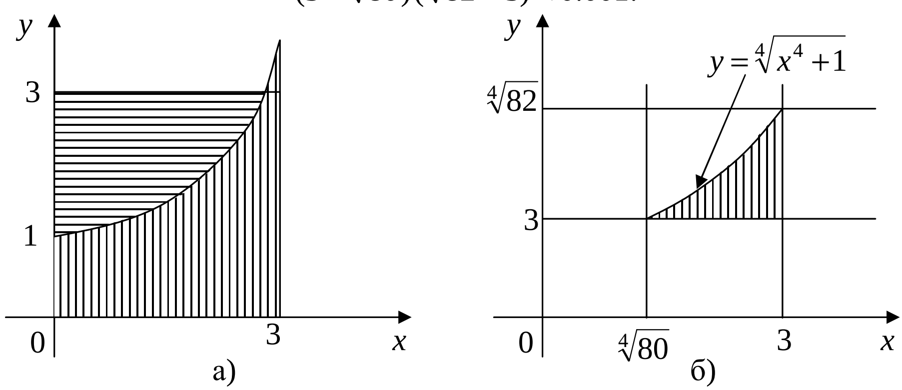


Рис. 19

5.3. а). Интегрируя по частям, при $n>0$ получим

$$L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n d\frac{\sin nx}{n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin nx \sin x \, dx .$$

Сложим это равенство с исходным почленно:

$$2L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\,(\sin nx \sin x + \cos x \cos nx)dx .$$

Но выражение в скобках равно $\cos(n-1)x$, откуда $2L_n = L_{n-1}$. Отсюда $L_n = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

б). Докажите, что $J_n + J_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$. Сумма интегралов равна

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10} \approx 2.077778 .$$

5.4. а). Если в интеграле

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$$

сделать подстановку $x = \pi - t$, то из нее получим $I = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$.

В рассматриваемом примере

$$I = \frac{\pi}{2}[\int_0^{\pi/2} f(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(t)dt], \quad f(x) = \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} .$$

Во втором интеграле выполните подстановку $t = \dfrac{\pi}{2} + x$. После сведения двух интегралов к одному под знаком интеграла получите 1. Ответ: $\dfrac{\pi^2}{4}$.

б). От промежутка интегрирования [0,2] перейдите к симметричному промежутку [–1,1] подстановкой … (догадайтесь, какой). Подынтегральная функция будет нечетной, поэтому интеграл равен...

5.5. а). Предел свести к интегралу $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

б). Предел логарифма y_n – это интеграл

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = \ln 4 - 1.$$

Решения задач главы 6

6.1. Из правого неравенства (6.3) получим $a_n < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} \Rightarrow a_n \to 0$.

6.2. Из левого неравенства (6.3) имеем $a_n^2 > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2n+1}$. Здесь правая часть больше $\frac{1}{4n}$ при всех $n > 1$. Так как гармонический ряд расходится, то и искомый ряд – также.

6.3. Частичные произведения равны соответственно

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 (2n+1), \quad \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Ответы: $\frac{2}{\pi}$, $\frac{\pi}{4}$.

6.4. Искомая сумма равна

$$S(x) = \sum_{n\ge 0} x^{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \; dt = \int_0^{\pi/2} x \sin t \cdot \left[\sum_{n\ge 0} (x \sin t)^2\right] dt.$$

Выражение в квадратных скобках есть $\frac{1}{1 - x^2 \sin^2 x}$. Интеграл нетрудно найти подстановкой $\cos t = z$; он будет равен

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Получили разложение

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,x^{2n+1}$$

при $0<x<1$. Но оно верно и при $-1<x\leq 0$. Для корректности решения осталось обосновать перемену местами знаков суммы и интеграла.

6.5. Пусть $I_n=\int\limits_0^\infty x^n e^{-x^2}dx$. Докажите, что $I_{2n}=\frac{2n-1}{2}I_{2n-2}$, $\quad I_{2n+1}=nI_{2n-1}$.

Ответы:

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad I_{2n+1}=\frac{n!}{2}.$$

Решения задач главы 7

7.1. Ответ: 1. Использовать известные ранее результаты:

$$\lim_{n\to\infty}a^{1/n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}n^{1/n^2}=1.$$

7.2. Ответ: e.

7.3. Применяем формулу для вычисления вероятности $P_n(m)$ того, что в n испытаниях Бернулли успех наступит m раз, понимая под успехом выпадение герба. Получим при $n=100, m=50$, что

$$P_{100}(50)=\frac{100!}{50!\,50!}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\approx\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}.$$

7.5. n -ю частичную сумму ряда можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)^k-1\right]=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+1)}{2k-1}\right)^k e^{-n}.$$

В результате под знаком логарифма получим выражение

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \left[\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\right] \frac{\sqrt{n}}{n!} (1+\frac{1}{2n})^n .$$

Здесь $n!$, стоящее в знаменателе дроби $\frac{\sqrt{n}}{n!}$, заменим по формуле Стирлинга. Выражение в квадратных скобках устремится к $\sqrt{\pi}$ согласно формуле Валлиса.

Ответ: сумма равна $\frac{1-\ln 2}{2}$.

Решения задач главы 8

8.1. Следует сделать чертеж : изобразить хордой сторону правильного $N \cdot 2^n$ – угольника, вписанного в круг единичного диаметра, и в виде отрезка касательной к окружности сторону аналогичного описанного многоугольника. Их длины соответственно равны

$$a_n = \sin x_n \, , b_n = tg x_n \, ,$$

где $x_n = \frac{\pi}{N 2^n}$ – половина центрального угла, опирающегося на сторону многоугольника. Тогда

$$p_n = \frac{\pi}{x_n} \sin x_n \, , \quad q_n = \frac{\pi}{x_n} tg x_n \, .$$

а). Проверим только первую формулу Архимеда, т.е. что

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}) .$$

Так как $x_{n+1} = x_n / 2$, то надо проверять тождество

$$ctg\frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x} + ctg x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}) ,$$

но оно легко доказывается с помощью формул школьной тригонометрии.

б). Используем разложения

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + ..., \quad tg x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + ... $$

Полагая $x_n = x$, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n-\pi}{\pi-p_n}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3))-x}{x-(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3!}}=2.$$

Геометрически это означает, что на отрезке $[p_n,q_n]$ точка π лежит примерно вдвое ближе к левому концу, чем к правому. Сходным образом находятся остальные пределы, равные по $\frac{1}{4}$. Равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_{n+1}-\pi}{q_n-\pi}=\frac{1}{4}$$

можно истолковывать как тот факт, что при вычислении числа π посредством периметров описанных многоугольников ошибка на последующем шаге примерно вчетверо меньше ошибки на предыдущем шаге. Вариант: последовательность $(q_n-\pi)$ сходится к нулю как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{4}$.

8.2. Усредняя степенные разложения синуса и тангенса с весами $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, получим

$$\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}tgx=x+\frac{1}{20}x^5+o(x^5).$$

Поэтому

$$u_n=\frac{\pi}{x_n}(x_n+\frac{1}{20}x_n^5+o(x_n^5))=\pi[1+\frac{1}{20}x_n^4+o(x_n^4)]$$

Так как выражение в квадратных скобках больше 1, то а) доказано.

Далее имеем

$$\frac{u_{n+1}-\pi}{u_n-\pi}=\frac{\frac{x_{n+1}^4}{20}+o(x_{n+1}^4)}{\frac{x_n^4}{20}+o(x_n^4)}\to\frac{1}{16},$$

так как $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}$. Таким образом, у Гюйгенса последовательность $(u_n-\pi)$ сходится к нулю вчетверо быстрее, чем у Архимеда $(q_n-\pi),(\pi-p_n)$.

8.3. Пусть

$$e_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k,\ n=0,1,2,\dots.$$

По формуле Тейлора

$$e^x=e_n(x)+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+\frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}+r_{n+2}(x).$$

Здесь сумма двух последних слагаемых есть величина $o(\dfrac{1}{(n+1)!})$ при $x=const$ и $n\to\infty$. Тогда

$$n!e^x=n!e_n(x)+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+o(\frac{1}{n+1}).$$

Поэтому

$$x_n=n\sin(\frac{2\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n+1})),\quad y_n=n\sin(\frac{2\pi}{n+1}(-1)^{n+1}+o(\frac{1}{n+1})).$$

Отсюда видно, что последовательность (x_n) сходится к 2π, а предел последовательности (y_n) не существует. Действительно, подпоследовательности с нечетными номерами и с четными номерами сходятся к разным пределам.

8.4. В первом случае

$$y_0=1.7,\ y_1=0.7,\ y_2=0.4,\dots,\ y_9=-6634,\ y_{10}=-66341,\ y_{11}=-729752.$$

Во втором

$$y_0=1.71828,\ y_1=0.71828,\dots,\ y_{10}=-6.536,\ y_{11}=-72896.$$

Вычисления $y_n\ (n>0)$ проводились точно. Причина несуразностей только одна –погрешность в задании y_0, которая разрасталась в ходе вычислений. На каждом этапе она умножалась на число, не меньшее 1 (на 1, 2, …). Алгоритм студента, как говорят, численно неустойчив. Его следует применять в обратном направлении: перейти к рекурренции

$$y_n = \frac{1}{n+1}(1+y_{n+1}).$$

Так как $y_n \to 0$, то можно подбираться к y_{11}, начиная, например, с $y_{20} \approx 0$. На этот раз начальная ошибка будет не разрастаться, а, наоборот, подавляться. Убедитесь в этом, проделав соответствующие вычисления. Ответ с 6D:

$$y_{11} = 0.090234.$$

8.5. а). Имеем

$$1+t+...+t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} \Rightarrow H_n = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^n [1-(1-\frac{y}{n})^n]\frac{dy}{y}$$

(была сделана подстановка $t = 1-\frac{y}{n}$). Полученный интеграл разобьем на сумму интегралов по отрезкам $[0,1]$ и $[1,n]$. Тогда

$$H_n - \ln n = \int_0^1 [1-(1-\frac{y}{n})^n]\frac{dy}{y} + \int_1^n [1-(1-\frac{y}{n})^n]\frac{dy}{y} - \int_1^n \frac{dy}{y},$$

откуда

$$H_n - \ln n = \int_0^1 [1-(1-\frac{y}{n})^n]\frac{dy}{y} - \int_1^n (1-\frac{y}{n})^n \frac{dy}{y}.$$

Выражение в круглых скобках при $n \to \infty$ устремится к e^{-y} Если обозначим

$$A = \int_0^1 (1-e^{-y})\frac{dy}{y} - \int_1^\infty e^{-y}\frac{dy}{y},$$

то остается показать, что $H_n - A \to 0$. Подсказка: использовать неравенства

$$0 \le e^{-y} - (1-\frac{y}{n})^n \le e^{-y}\frac{y^2}{n}.$$

Решения задач главы 9

9.1. Полагая последовательно $n=1,2,3,4$, получим систему

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=1 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3=5 \\ a_0+3a_1+9a_2+27a_3=14 \\ a_0+4a_1+16a_2+64a_3=30 \end{cases} \Rightarrow \quad a_0=0,\, a_1=\frac{1}{6},\, a_2=\frac{1}{2},\, a_3=\frac{1}{3}.$$

9.2. У функции $f(x)=1+x^2-x^3$ в точке $x=0$ минимум, равный 1, и при $x=\frac{2}{3}$ максимум, равный $\frac{31}{21}$. На концах отрезка $[1,2]$ значения разных знаков, поэтому единственный действительный корень лежит между 1 и 2. Этот корень наибольший по модулю, так как произведение корней равно 1. Поэтому в уравнении надо заменить x на $\frac{1}{x}$ и находить наименьший по модулю корень уравнения $Q(x)=1-x-x^3=0$. Для коэффициентов разложения $\frac{1}{Q(x)}$ в ряд по степеням x нетрудно установить, что $a_{n+3}=a_n+a_{n+2}$; $n\geq 0$, $a_0=a_1=a_2=1$. Тогда

$$1/Q(x)=1+x+x^2+2x^3+3x^4+4x^5+6x^6+9x^7+13x^8+19x^9+28x^{10}+\dots.$$

Наименьший корень $Q(x)$ приближенно равен $\frac{19}{28}=0.678571$, а суперзолотое сечение соответственно $\frac{28}{19}=1.473684$. Более точное значение с 10 знаками равно 1.465571232.

9.3. Из начальных условий следует, что

$$f(x) = 1 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots .$$

Тогда сравнение коэффициентов при одинаковых степенях в равенствах

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \dots , \quad f(-x) = 1 - x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots$$

дает

$$2a_2 = 1, \quad 3\cdot 2a_3 = -1, \quad 4\cdot 3a_4 = a_2, \quad 5\cdot 4a_5 = -a_3, \dots .$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = -\frac{1}{3!}, a_4 = \frac{1}{4!}, a_5 = \frac{1}{5!}, \dots .$$

Группируя слагаемые отдельно с четными и отдельно с нечетными коэффициентами, получим

$$f(x) = (1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots) \quad + \quad (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots) \quad = \quad chx + \sin x .$$

9.4. Коэффициентами разложения являются числа Фибоначчи.

9.5. Указанное в задаче разложение перепишем в виде

$$1 + k\cos t\,(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\ge 1} a_n \cos nt) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\ge 1} a_n \cos nt .$$

Согласно тождеству

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

отсюда

$$1 + k\cos t \cdot \frac{1}{2}a_0 + \frac{k}{2}\sum_{n\ge 1} a_n[\cos(n-1)t + \cos(n+1)t] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\ge 1} a_n \cos nt .$$

Сравнение свободных членов и коэффициентов при одинаковых косинусах дает равенства

$$1 + \frac{k}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0; \ \frac{k}{2}a_0 + \frac{k}{2}a_2 = a_1, \ \frac{k}{2}a_1 + \frac{k}{2}a_3 = a_2, \dots .$$

Получаем, что

$$1 + \frac{k}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0 \ , \ a_{n+2} - \frac{2}{k}a_{n+1} + a_n = 0 \ \ (n \ge 0) .$$

Из полученного рекуррентного соотношения согласно технике раздела 1.4 имеем

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n\,, \quad C_1, C_2 \in R\,,$$

где $r_{1,2}$ – корни уравнения

$$r^2 - \frac{2}{k} r + 1 = 0; \quad r_1 = \frac{k}{1+\sqrt{1-k^2}}, \quad r_2 = \frac{1}{r_1}.$$

Если в равенстве (9.5.1) положить $t = 0$, то получим

$$\frac{1}{1-k} = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots.$$

Ввиду сходимости ряда справа $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$, что возможно лишь при $C_2 = 0$. Поэтому

$$a_1 + a_2 + \ldots = \frac{C_1 r_1}{1-r_1} = \frac{C_1 k}{1+\sqrt{1-k^2}-k}.$$

Для нахождения неизвестных a_0, C_1 осталось решить систему уравнений

$$1 + \frac{k}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_0\ , \ \frac{1}{1-k} = \frac{1}{2} a_0 + C_1 \frac{k}{1+\sqrt{1-k^2}-k},$$

где $a_1 = C_1 r_1$. Опуская детали, укажем ответ

$$\frac{1}{1-k\cos t} = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n\ge 1} \left(\frac{k}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^n \cos nt\right).$$

Решения задач главы 10

10.1. В случаях а), б), в) использовать равенство

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ответы соответственно

$$\frac{\pi^2}{6} - 1, \quad 2 - \frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

По поводу г) см. суммирование в примере 10.1.

10.2. а). Использовать разложение $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\;,|\,x\,|<1$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$.

В случае б) выполнить подстановку $1-x=t$, применить разложение

$$\ln(1-t)=-(t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\ldots).$$

В ответе $\frac{1}{6}\pi^2-1$.

В примере в) второй логарифм разлагать как выше, применять формулу

$$\int_0^1 \ln x\cdot x^k dx=-\frac{1}{(k+1)^2}$$

(легко выводится интегрированием по частям). Ответ: $2-\frac{\pi^2}{6}$.

10.3.а). См. решение примера 10.2.

б). В равенстве

$$\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}=\sum_{n\geq 1} r^n\sin nt \quad (0<r<1)$$

левая и правая части – это производные по t соответственно от функций

$$\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos t+r^2)\,,\quad \sum_{n\geq 1} r^n\frac{-\cos nt}{n}.$$

Они отличаются друг от друга на постоянную. Но эта константа равна нулю (достаточно положить $t=0$). При интегрировании равенства

$$\ln(1-2r\cos t+r^2)=-2\sum_{n\geq 1} r^n\frac{\cos nt}{n}$$

по отрезку $[0,\pi]$ справа приращения всех синусов на этом отрезке равны нулю. Итак, $I(r)=0$ при $0<r<1$. Если $r>1$, то

$$I(r)=\int_0^\pi \ln r^2(1-2\frac{1}{r}\cos t+\frac{1}{r^2})dt=\int_0^\pi \ln r^2 dt+I(\frac{1}{r})=2\pi\ln r.$$

в). Сделайте проверку дифференцированием.

Решение задач главы 11

11.1. а). Рассмотрим дугу

$$\{(x,y,z)\in R^3 : x=t,\ y=\sin t,\ z=f(t);\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\}.$$

Ее длина, равная данному в тексте интегралу, не меньше расстояния между концами (0,0,0), $(\frac{\pi}{2},1,1)$, которое составляет $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+2}$ и больше 2.1.

б). Рассмотрим кривую

$$\{(x,y)\in R^2 : x=F(t),\ y=G(t);\ a\le t\le b\},$$

где

$$F(t)=\int_a^t f(s)ds\,,\quad G(t)=\int_a^t g(s)ds\,.$$

Длина кривой между точками $(F(a),G(a)),(F(b),G(b))$ (а это правая часть неравенства) не меньше длины хорды с концами в этих точках (левой части), откуда и результат.

11.2. а). Пусть a,b,c – длины сторон треугольника, x,y,z – соответствующие до них расстояния, S – площадь треугольника. Требуется решить задачу

$$f(x,y,z)=x+y+z\to\max$$

при условиях $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x\ge 0,\ ax+by+cz=2S$. Если треугольник равносторонний, то решение очевидно: искомой точкой является любая точка треугольника. Поэтому предполагаем, что $a\le b\le c$ и одно из неравенств строгое. Пусть, например, $b<c$.

Тогда

$$x+y+z=x+y+\frac{2S-ax-by}{c}=\frac{1}{c}(2S+(c-a)x+(c-b)y)\ge\frac{2S}{c},$$

причем знак равенства достигается при $x=y=0$. Это означает, что искомая точка находится в вершине треугольника, противоположной большей стороне.

б). В работе Сивашинского [27, с.258] приведено решение, основанное на неравенстве о средних (геометрического и арифметического). Рассмотрим решение методом Лагранжа с целевой функцией $f(x,y,z)=xyz$ и уравнением связи $\varphi(x,y,z)=ax+by+cz-2S=0$. Так как вектор $gradf=(yz,xz,xy)$ коллинеарен вектору $grad\varphi=(a,b,c)$ в точке оптимума, то

$$\frac{yz}{a}=\frac{xz}{b}=\frac{xy}{c}\Rightarrow x=\frac{2S}{3a},\ y=\frac{2S}{3b},\ z=\frac{2S}{3c},$$

т.е. x,y,z – это третьи части соответствующих высот h_a,h_b,h_c. Отсюда вытекает, что искомая точка – это точка пересечения медиан.

11.3. Введем функции

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,\quad g(\alpha,\beta,\gamma)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$$

Проверим, что

$$1<f(\alpha,\beta,\gamma)\le\frac{3}{2},\quad \frac{3}{4}\le g(\alpha,\beta,\gamma)<3,$$

причем знаки равенства достижимы, а знаки строгого неравенства имеют место всегда. Покажем, например, что функция g не принимает наибольшего значения. Действительно, для любого набора углов α,β,γ треугольника найдется такое малое $\varepsilon>0$, что $\varepsilon<\alpha,\beta,\gamma<\pi-2\varepsilon\Rightarrow g(\alpha,\beta,\gamma)<g(\varepsilon,\varepsilon,\pi-2\varepsilon)$. Аналогично можно проверить, что у функции f нижняя оценка не достигается.

Перейдем к точным оценкам. Применяем метод Лагранжа с уравнением связи $\varphi(x,y,z)=\alpha+\beta+\gamma-\pi=0$. Имеем : $gradf \parallel grad\varphi$, $gradg \parallel grad\varphi$, или

$$\frac{-\sin\alpha}{1}=\frac{-\sin\beta}{1}=\frac{-\sin\gamma}{1},\quad \frac{-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{1}=\frac{-2\cos\beta\cdot\sin\beta}{1}=\frac{-2\cos\gamma\cdot\sin\gamma}{1}.$$

Отсюда в том и другом случае $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$. В этой точке знаки равенств в неравенствах достижимы. Остается проверить, что действительно у функции f в точке $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ имеется максимум, а у функции g – минимум. Пусть хотя бы два угла треугольника, скажем α,β не равны. Тогда

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)<2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1.$$

Но полученный справа квадратный трехчлен от косинуса имеет максимальное значение $\frac{3}{2}$. Сходным образом показывается, что $g_{\min}=\frac{3}{4}$.

11.4. а). См. решение примера 11.2.

б). См. решение примера 11.1.

11.5. а). Пусть (рис. 20) O – центр круга, точка F удалена от него на расстоянии a и φ – угол CFB. Вспомним, что площадь четырехугольника равна полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними. Одна диагональ известна: $AB=2$. Из прямоугольного треугольника со штрихованной гипотенузой и штрихованным катетом найдем квадрат половины CD, он равен $1-(a\cdot\sin\varphi)^2$. Приходим к задаче

$$S(\varphi)=2\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,\sin\varphi\to\max,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

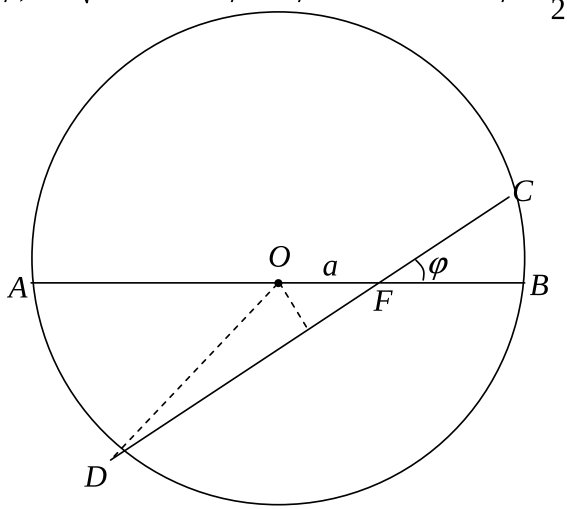


Рис. 20

Остальное, как говорится, «дело техники». Следует иметь в виду, что максимум достигается либо во внутренней стационарной точке отрезка, либо на его границе. Приведем ответ: если $a \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S_{\max} = S(\frac{\pi}{2}) = 2\sqrt{1-a^2}$; если же $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то

$$S_{\max} = S(\arcsin\frac{1}{a\sqrt{2}}) = \frac{1}{a}.$$

б). Эта функция есть сумма расстояний от точки (x, y) до вершин $A(0,0), B(4,0), C(3,3), D(0,2)$ выпуклого четырехугольника. Точкой минимума (точкой Штейнера) является пересечение диагоналей – это точка $(\frac{4}{3}, \quad \frac{4}{3})$.

Решения задач главы 12

12.1. Имеем рекуррентную числовую последовательность

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{3+x_n}, \ n \ge 0; \ x_0 = 0.$$

Ее пределом является неподвижная точка сжатого (докажите!) отображения $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, осуществляемого функцией $f(x) = \sqrt[3]{3+x}$. С 6D результаты пробных вычислений дали

$x_1 = 1.44225, x_2 = 1.644871, x_3 = 1.668374, x_4 = 1.671303, x_5 = 1.671653, x_6 = 1.671694.$

12.2. Можно, ибо функция $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ осуществляет сжатое отображение прямой в себя. Так как $f^{'}(x) = -\frac{2x}{(4+x^2)^{-2}}$, то модуль производной можно оценить сверху величиной

$$|\frac{2x}{1+x^2}| \cdot \frac{1+x^2}{4+x^2} \cdot \frac{1}{4+x^2} \le 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4},$$

так что постоянная сжатия $\alpha \le \frac{1}{4}$.

12.3. а). Зададим какое-нибудь число a, не являющееся неподвижной точкой, и положим $\varepsilon = \dfrac{|a - f(a)|}{1-\alpha}$, где α – постоянная сжатия. Покажем, что отрезок $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ переводится в себя. Имеем

$$|f(x)-a| = |f(x) - f(a) + f(a) - a| \le |f(x) - f(a)| + |f(a) - a| \le \alpha \cdot |x-a| + (1-\alpha)\varepsilon .$$

Так как точку x брали на указанном отрезке, то $|f(x)-a| \le \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon$.

б). Если один из концов отрезка переходит в себя, то есть неподвижная точка. Иначе рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$. Имеем $g(a) > 0, g(b) < 0$. По теореме о нуле существует $c \in (a,b) : g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$.

12.4. Последняя возможность наилучшая.

12.5. Визуализация системы позволяет сделать вывод, что графики уравнений пересекаются в одной точке с координатами приблизительно $(0.2; -2.0)$. Запишем систему в виде $\begin{cases} x = f(x,y), \\ y = g(x,y) \end{cases}$ с функциями

$$f(x,y) = \frac{1}{3}\cos(y) + 0.3, \quad g(x,y) = \sin(x-0.6) - 1.6 .$$

В области, описываемой неравенствами $0 \le x \le 0.3,\ -2.2 \le y \le -1.8$, у матрицы частных производных столбцевые суммы модулей элементов обе меньше 1. Условия сходимости выполнены. При $(x_0, y_0) = (0.2, -2.0)$ получим $(x_8, y_8) = (0.151, -2.034)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алимов Ш.А. Принцип сжатых отображений. –М.: Знание, 1983. –64 с.
2. Башмаков М.И. и др. Задачи по математике. Алгебра и анализ. –М.: Наука, 1982. –192 с.
3. Васильев Н.Б. и др. Заочные математические олимпиады. –М.: Наука, 1986. –176 с.
4. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. –М.: Наука, 1988. –288 с.
5. Виноградова И.А. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн.1. –М. Высш. шк., 2000. –725 с.
6. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. –М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. –400 с.
7. Гелбаум Б., Олмстед Д. Контрпримеры в анализе. –М.: Мир, 1967. –251 с.
8. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. –М.: Наука, 1967. –375 с.
9. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Рекуррентные соотношения и их применение.: Учебное пособие. –Омск: Изд-во ОмГПУ, 2005. –96 с.
10. Далингер В.А. Начала математического анализа в задачах : учебное пособие. –Омск: Изд-во ГОУ ОмГПУ, 2009. –312 с.
11. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Сборник прикладных задач на экстремум. –Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2007. – 60 с.
12. Двайт Г. Таблицы интегралов и другие математические формулы. –М.: Наука, 1973. –228 с.
13. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. –М.: Наука, 1977. –528 с.
14. Задачи по элементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы. –М.: Наука, 1965. –176 с.
15. Зарубежные математические олимпиады. –М.: Наука, 1987. –416 с.
16. Кириллов А.А. Пределы. –М.: Наука, 1973. –96 с.

17. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. –М.: Наука, 1967. –704 с.
18. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению задач школьной математики. –М.: Просвещение, 1976. –215 с.
19. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения. –СПб.: Лань, 1997. –160 с.
20. Макаров Б.М. и др. Избранные задачи по вещественному анализу. –М.: Наука, 1992. –432 с.
21. Математический энциклопедический словарь. –М.: Советская энциклопедия, 1988. –847 с.
22. Математика сегодня: Научный сборник. – Киев: Вища школа, 1982. –192 с.
23. Пойа Д. Математическое открытие. –М.: Наука, 1970. –452 с.
24. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. –М.: Наука, 1975. –464 с.
25. Садовничий В.А. и др. Задачи студенческих математических олимпиад. –М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. –310 с.
26. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. –М.:Наука, 1978. –208 с.
27. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967. –304 с.
28. Смышляев В.К. Практикум по решению задач школьной математики. Выпуск 5. –М.: Просвещение, 1978. –94 с.
29. Справочное пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл / Ляшко И.И. и др. –Киев: Вища шк., 1984. –566с.
30. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. –М.: Наука, 1986. –192 с
31. Туманов С.И. Поиски решения задачи. –М.: Просвещение, 1969. –280 с.
32. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. –М.: Наука, 1958. –607 с.

33. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. –М.: Наука, 1969. –800 с.
34. Шашкин Ю.А. Неподвижные точки. –М.: Наука, 1989. –80 с.
35. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике: Решение задач. –М.: Просвещение, 1991. –384 с.
36. Шклярский Д.О. и др. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. –М.: Наука, 1970. –336 с.

Далингер Виктор Алексеевич

Симонженков Сергей Дмитриевич

Избранные главы математического анализа в задачах

Учебное пособие

Учебное издание

Компьютерная верстка А.А. Козлова

Подписано к печати	Формат 62×94 / 16
Бумага офсетная	Способ печати оперативный
Уч. изд. л.	Усл. печ. л. 7,9
Тираж	Заказ

Издательство ООО «Амфора»

644001, г. Омск,ул. Лермонтова, 93

Тел./факс:(3812)56-31-28

E-mail:amfora2002@inbox.ru