

Пфаффианы и перечисление паросочетаний

М. Н. Вялый

Дубна, 19 – 30 июля 2004 года

Аннотация

Основной задачей, которая будет обсуждаться в курсе, является подсчет укладок домино на прямоугольную доску. Для этой задачи есть замечательный ответ, выражающий искомое число укладок через длины диагоналей правильных многоугольников.

Количество способов укладки домино на прямоугольную доску размера $m \times n$ при условии, что используется r вертикальных домино и s горизонтальных, равно коэффициенту при $v^r h^s$ в выражении

$$D_{mn}(v, h) = 2^{mn/2} \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \left(\left(\cos^2 \frac{j\pi}{m+1} \right) v^2 + \left(\cos^2 \frac{k\pi}{n+1} \right) h^2 \right)^{1/4}. \quad (!)$$

Заметим, что из (!) сразу получаются такие следствия:

- а) $D_{mn}(v, h)$ — многочлен;
- б) $D_{mn}(1, 1)$ — целое число (количество способов укладки домино на доску $m \times n$).

Увидеть эти свойства $D_{mn}(v, h)$ непосредственно из формулы (!) не очень просто.

Рассказ будет идти в основном про многочлены, известные как детерминант, пфаффиан и перманент. В качестве побочной темы планируется обсудить сложность вычисления этих многочленов. Будет рассказано, почему вычисление детерминанта — простая задача, и сформулировано, что означает трудность вычисления перманента. Будет также объяснено, почему подсчет числа паросочетаний в графе значительно упрощается, если граф можно нарисовать на плоскости без самопересечений.

Знание линейной алгебры сильно облегчает понимание этого курса, но не является обязательным для почти всех затрагиваемых в нем вопросов.

1. Предварительные замечания. Знак перестановки и паросочетания. Детерминант

1.1. Предварительные замечания

Доказательство формулы (!) будет длинным и непростым. Естественный вопрос: а нельзя ли получить эту формулу более простым или хотя бы более прямым способом? Ответ на этот вопрос уклончивый: пока это никому не удалось сделать. Можно ограничиться даже случаем доски $(2 \times n)$.

1.1: Докажите, что количество способов уложить домино на доску $(2 \times n)$ равно числу Фибоначчи F_{n+1} ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = F_2 = 1$).

1.2*: Докажите, что

$$F_{n+1}^2 = \prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 + 4 \cos^2 \frac{k\pi}{n+1} \right),$$

не используя (!).

Звездочкой я буду обозначать задачи, которые вы не сумеете решить. Это не значит, что нужно решать только такие задачи — среди остальных много простых упражнений, но они крайне полезны для понимания. Простые упражнения и задачи, решение которых требует либо смекалки, либо знаний, сознательно никак не разделяются.

Чтобы доказать формулу (!), мы рассмотрим более общую задачу подсчета числа *совершенных паросочетаний* в графе. Совершенное паросочетание — это такое разбиение множества вершин графа на пары, каждая из которых связана ребром в графе. Укладкам домино взаимно однозначно соответствуют совершенные паросочетания на графе прямоугольной решетки, как можно увидеть из рис. 1.

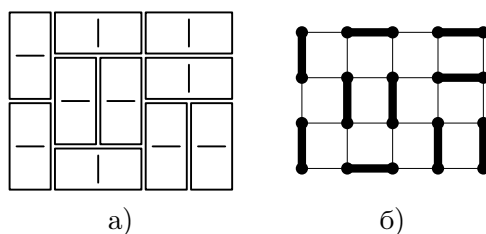


Рис. 1. Переход от укладки домино к совершенному паросочетанию в графе прямоугольной решетки

Формулу (!) придумали физики. Зачем им она понадобилась — отдельная тема, которую я затрагивать не буду. Коротко говоря, при попытках вычислить величины, характеризующие вещества (температура плавления, скажем), физики приходят к слишком трудным задачам, решить которые они не могут. Тогда они упрощают задачу и получают красивые формулы (наподобие (!)), которые дают ответ в случае несуществующих в природе веществ («сухая вода», «двумерный лед»). Остается надежда, что когда-нибудь изучение красивых формул натолкнет физиков на мысль, как же разобраться с реальными веществами.

Задача подсчета числа паросочетаний в произвольном графе вычислительно трудна. Наша цель — найти такие графы, для которых эта задача решается относительно легко (хотелось бы также, чтобы граф прямоугольной решетки оказался среди таких «хороших» графов). Для достижения этой цели мы сопоставим графу с e ребрами некоторый многочлен от e переменных, значение которого *всегда* легко вычислить. В *некоторых случаях* это значение равно числу совершенных паросочетаний. Граф прямоугольной решетки окажется среди этих случаев.

1.2. Знак перестановки и паросочетания

Сначала напомним некоторые хорошо известные факты о перестановках.

Перестановка множества $\{1, \dots, v\}$ — это взаимно однозначное отображение этого множества на себя. Множество всех перестановок обозначим через S_v . Перестановки можно перемножать: произведение перестановок — это композиция отображений. Произведение перестановок будем обозначать знаком \circ .

Тождественная перестановка id оставляет все элементы на месте.

1.3: Для каждой перестановки π однозначно определена обратная π^{-1} , для которой выполняется равенство $\pi \circ \pi^{-1} = \text{id}$.

Можно задать перестановку, указав ее разложение на циклы:

$$\pi = (a_1^1 a_2^1 \dots a_{k_1}^1)(a_1^2 a_2^2 \dots a_{k_2}^2) \dots (a_1^{c(\pi)} a_2^{c(\pi)} \dots a_{k_{c(\pi)}}^{c(\pi)}). \quad (1)$$

Внутри каждой пары скобок числа переставляются циклически: $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3$, ..., $\pi(a_k) = a_1$. Разложение на циклы определено с точностью до циклических сдвигов чисел внутри скобок. Это легко понять, если проследить за *орбитой* числа, т.е. образами числа при последовательных применениях π . Циклы длины 1, т.е. неподвижные точки перестановки, при записи в виде произведения циклов обычно пропускаются.

Знак $\text{sgn}(\pi)$ перестановки π — это число $(-1)^{n+k}$, где n — число элементов, k — число циклов (включая циклы длины 1!). Перестановка называется *четной*, если ее знак равен $+1$, в противном случае она называется *нечетной*.

Перестановки (jk) , меняющие местами пару чисел j и k , называются *транспозициями*.

1.4: Транспозиция — нечетная перестановка.

1.5: Любую перестановку можно разложить в произведение транспозиций.

1.6: Умножение перестановки на транспозицию (jk) меняет количество циклов на 1: увеличивает, если j и k входят в один цикл; уменьшает, если j и k входят в разные циклы.

Отсюда получаем следующую полезную лемму.

Лемма 1. *Четность числа транспозиций одинакова для всех разложений данной перестановки в произведение транспозиций.*

1.7: При перемножении перестановок их знаки тоже перемножаются:

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (2)$$

Приведем еще несколько фактов о четности перестановок.

1.8: *Инверсия* (беспорядок) перестановки π — это такая пара (j, k) , что $j < k$, а $\pi(j) > \pi(k)$. Четность перестановки совпадает с четностью числа инверсий.

1.9: Четность перестановки совпадает с четностью числа циклов четной длины.

1.10: Четность перестановки совпадает с четностью обратной к ней перестановки.

Пусть теперь v четно. *Совершенным паросочетанием* на множестве $\{1, \dots, v\}$ назовем разбиение этого множества на пары (слово «совершенный» иногда будем опускать). Множество всех паросочетаний на множестве $\{1, \dots, v\}$ обозначим P_v .

Как приписать знаки паросочетаниям? Паросочетания естественно отождествляются с *инволюциями без неподвижных точек*, т.е. такими перестановками, которые разлагаются в произведение циклов длины 2. Но знак любой такой перестановки равен $(-1)^{v/2}$, так что нужно придумать что-нибудь похитрее.

Если в каждой паре, входящей в паросочетание, задать порядок (т.е. указать, какая из вершин является первой), получим *ориентированное паросочетание*. Перенумерация определяет *действие* перестановок на множестве ориентированных паросочетаний:

$$\pi((p_1, p_2), \dots, (p_{v-1}, p_v)) = ((\pi(p_1), \pi(p_2)), \dots, (\pi(p_{v-1}), \pi(p_v))). \quad (3)$$

Пусть перестановка π переводит какое-то ориентированное паросочетание в себя. Тогда π разлагается в произведение перестановок, меняющих местами первые и вторые вершины одинаковым образом (см. рис. 2). Четность этих перестановок одинакова, поэтому π четна.

Отсюда следует, что четность перестановок, переводящих одно ориентированное паросочетание в другое, одинакова: если π, σ — две такие перестановки, то $\pi\sigma^{-1}$ переводит исходную перестановку в себя.

Поскольку знак произведения перестановок равен произведению знаков, корректно следующее определение.

Два ориентированных паросочетания имеют одинаковые знаки, если одно переводится в другое четной перестановкой; разные знаки, если одно переводится в другое нечетной перестановкой.

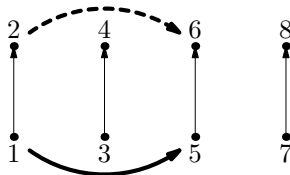


Рис. 2. Если перестановка сохраняет ориентированное паросочетание и переводит 1 в 5, то она должна переводить 2 в 6.

Мы определили лишь отношение знаков двух ориентированных паросочетаний. Если нужно однозначно определить знаки ориентированных паросочетаний, достаточно выбрать какое-то и приписать ему знак «+». Обычно полагают, что паросочетание $(1, 2)(3, 4) \dots ((v - 1), v)$ имеет знак «+».

Чтобы приписать знаки неориентированным паросочетаниям, зададим *ориентацию* на парах чисел, т. е. для каждой пары чисел укажем, какое из чисел является первым в этой паре. Тогда каждому паросочетанию однозначно соответствует ориентированное паросочетание с теми же парами вершин.

Пусть задана ориентация и два паросочетания p, q . Возьмем v точек и занумеруем их числами $1, 2, \dots, v$. Пары, входящие в паросочетание p , соединим тонкими линиями, а пары, входящие в q , — жирными. Нарисуем ориентации: поставим стрелки, ведущие от первой вершины в паре ко второй (см. пример на рис. 3). Из каждой точки выходит ровно две линии, так что получили набор циклов четной длины.

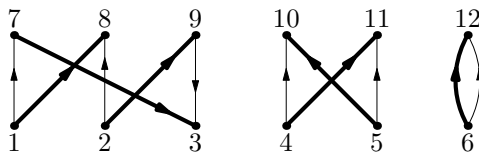


Рис. 3. Пример паросочетаний разного знака

Пусть a — общее количество ребер, ориентированных по циклу, а b — ориентированных против. Для циклов четной длины четность a и b одинакова. Число $(-1)^{1+b}$ будем называть *знаком цикла* F и обозначать $s(F)$.

Замечание 1. Заметим, что знак цикла определен не только для циклов четной длины. Для циклов нечетной длины $s(F) = (-1)^{1+b} = (-1)^a$ и знак цикла зависит от направления обхода цикла.

Лемма 2. *Знаки паросочетаний различаются на произведение знаков циклов, образованных этими паросочетаниями.*

Доказательство. Получим одно паросочетание из другого в два приема. Вначале применим перестановку, сдвигающую числа вдоль циклов, образованных паросочетаниями. Четность этой перестановки совпадает с четностью количества циклов. Теперь согласуем ориентации транспозициями чисел, входящих в пары второго паросочетания. Четность количества требуемых транспозиций совпадает с четностью числа ребер, ориентированных по циклам. Это легко увидеть, рассмотрев следующую таблицу, в которой ребра разбиты на пары: ребро из паросочетания p и то ребро, паросочетания q , в которое оно переходит.

ребер по циклу:	1	1	2	0
требуется транспозиций:	1	1	0	0

Итак, четность перестановки, переводящей одно (ориентированное) паросочетание в другое равна суммарной четности количества циклов и количества ребер, ориентированных по циклам. Но это и есть произведение знаков циклов. \square

1.2.1. Транзитивная ориентация

Это такая ориентация множества чисел, при которой первым считается меньшее число в паре. Транзитивная ориентация часто используется. Нам она не нужна, но желающие могут выполнить пару простых упражнений, чтобы научиться считать знаки паросочетаний.

1.11: Знак паросочетания $(j_1, k_1), (j_2, k_2), \dots$ (предполагается, что $j_a < k_a$) относительно транзитивной ориентации равен знаку перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ j_1 & k_1 & j_2 & k_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Построим диаграмму паросочетания следующим образом. На прямой отметим последовательно точки с номерами $1, 2, \dots, v$. Если пара точек j, k входит в паросочетание, соединим соответствующие точки дугой в верхней полуплоскости.

1.12: Знак паросочетания относительно транзитивной ориентации совпадает с четностью числа пересечений дуг в диаграмме паросочетания.

1.3. Детерминант

Детерминант и пфаффиан, к рассмотрению которых мы переходим, имеют естественные определения на языке линейной алгебры. Но начнем мы с прямого комбинаторного определения. Свойства детерминанта, которые нам потребуются в вычислениях, мы рассмотрим позже.

Рассмотрим матрицу A размера $v \times v$, в j -й строке и k -м столбце которой находится переменная $a_{j,k}$. *Детерминант* A по определению равен

$$\det A = \sum_{\pi \in S_v} \operatorname{sgn}(\pi) A(\pi), \quad \text{где } A(\pi) = \prod_{k=1}^v a_{k, \pi(k)}. \quad (4)$$

Итак, детерминант — это многочлен степени v от v^2 переменных. В формулу (8) входит $v!$ слагаемых. Однако, чтобы вычислить значение детерминанта, не нужно делать так много операций.

1.13: Докажите, что значение детерминанта числовой $v \times v$ матрицы можно найти за $O(v^3)$ арифметических операций.

В формуле (8) используются только сложения и умножения. Поэтому детерминант определен и в тех случаях, когда деление не всегда определено (например, когда элементы матрицы — многочлены или целые числа). Поэтому следующая задача имеет самостоятельный интерес.

1.14*: Докажите, что значение детерминанта можно найти за $\operatorname{poly}(v)$ операций умножения и сложения (вычитание — это умножение на -1 и сложение).

1.4. Задачи вычисления детерминанта

Число укладок домино мы будем выражать через детерминант некоторой матрицы. Чтобы получить формулу (!), нужно уметь считать детерминанты. Есть много приемов подсчета детерминантов, часть из них отражена в следующих задачах. Поэтому крайне рекомендуется их порешать (спустя некоторое время мы разберем решения большинства из них, но намного полезнее решить их самостоятельно). При решении полезно знание линейной алгебры, но часть задач решается «в лоб» — непосредственно из данного выше определения.

1.16: Матрица (a_{jk}) называется (верхней) треугольной, если все ее элементы под главной диагональю равны 0, т. е. при $j > k$ выполнено $a_{jk} = 0$. Докажите, что для треугольной матрицы $\det(a_{jk}) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

1.17: Пусть матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix},$$

матрица M — квадратная. Докажите, что $\det A = (\det M)^2$.

Найти детерминанты матриц (палочки вокруг матрицы обозначают детерминант)

$$\mathbf{1.18:} \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{1.19:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Найти детерминанты симметричных матриц

$$\mathbf{1.20:} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{1.21:} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.22: Матрица H_n состоит из 2^n строк и 2^n столбцов. Занумеруем строки и столбцы словами из 0 и 1 длины n . Элемент $(H_n)_{\alpha\beta}$ равен $(-1)^{\alpha \cdot \beta}$, где $\alpha \cdot \beta$ обозначает количество таких позиций j , что $\alpha_j = \beta_j = 1$. Найдите детерминант H_n .

2. Пфаффиан

Далее считаем v четным. Рассмотрим *кососимметричную* матрицу A размера $v \times v$, т. е. матрицу, для которой $a_{j,k} = -a_{k,j}$. Нам будет удобно выделить в кососимметричной матрице «знаки» и «абсолютные величины». Сделаем это так. Введем переменные $a_{(jk)}$, зависящие от неупорядоченной пары индексов, и некоторую ориентацию. По ориентации построим кососимметричную матрицу ε : $\varepsilon_{jk} = 1$, если в паре (j, k) первой является вершина j ; $\varepsilon_{jk} = -1$, если первой является вершина k ; по диагонали стоят нули: $\varepsilon_{kk} = 0$.

Теперь полагаем $a_{j,k} = a_{(jk)}\varepsilon_{jk}$.

Пфаффиан A равен

$$\text{Pf}(A) = \sum_{p \in P_v} \varepsilon(p) \tilde{A}(p), \quad (5)$$

где $\tilde{A}(p)$ — произведение $a_{(jk)}$ по всем парам (jk) , входящим в паросочетание p , а $\varepsilon(p)$ — знак паросочетания p относительно ориентации ε .

Имеет место замечательное соотношение:

$$\det A = (\text{Pf } A)^2. \quad (6)$$

Поскольку детерминант вычислять легко, то и пфаффиан вычислять тоже легко. На самом деле, даже легче, чем кажется из формулы (6).

2.1*: Укажите способ вычисления пфаффиана $v \times v$ матрицы, который использует полиномиальное от v количество операций умножения и сложения и не использует деления и вычисления квадратного корня.

Формулу (6) проще доказать «по-научному», используя более осмысленные определения детерминанта и пфаффиана. Однако элементарное доказательство в стиле «раскроем скобки и приведем подобные», хотя и более громоздкое, также весьма поучительно. Его идея состоит в том, что перестановки с циклами нечетной длины дают нулевой вклад в детерминант кососимметричной матрицы, а перестановки из циклов четной длины естественно отождествляются с парами паросочетаний. При этом знаки согласуются.

Разберем это рассуждение подробнее. Слагаемые в формуле (8), по которой вычисляется значение детерминанта, разделим на три группы:

А: содержащие неподвижную точку (т. е. цикл длины 1);

В: не содержащие неподвижных точек, но содержащие цикл нечетной длины;

С: состоящие только из циклов четной длины.

Запишем слагаемые, составляющие детерминант, через ориентации и симметричные переменные $a_{(jk)}$. Получаем равенство

$$\text{sgn}(\pi)A(\pi) = \prod_F s(F)A(F), \quad (7)$$

где произведение берется по циклам перестановки π , а $A(F)$ — произведение $a_{(jk)}$ вдоль цикла F .

Слагаемые из группы А равны 0, так как $a_{jj} = -a_{jj} = 0$ по определению кососимметричной матрицы.

Слагаемые из группы В можно разбить на пары с противоположными значениями, так что их общий вклад в детерминант равен 0. Чтобы описать такое разбиение на пары, выделим в перестановке цикл нечетной длины, который содержит наименьшее из чисел, входящих в циклы нечетной длины. Назовем этот цикл минимальным нечетным. Изменение направления обхода минимального нечетного цикла задает требуемое разбиение слагаемых на пары. В силу (7) эти слагаемые имеют противоположные значения.

Теперь перейдем к слагаемым из группы С. Сопоставим перестановкам, состоящим из циклов четной длины, упорядоченные пары паросочетаний. Циклу длины $(a_1 \dots a_{2k})$, конечно, соответствуют паросочетания $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2k-1}, a_{2k})$ и $(a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{2k}, a_1)$. Как их упорядочить? Будем считать, что a_1 — наименьшее из чисел a_1, \dots, a_{2k} , а паросочетание, включающее (a_1, a_2) , — первое. Это определение неприменимо к циклу длины 2, но в этом случае паросочетания совпадают и потому их порядок неважен.

Итак, мы сократили часть слагаемых в левой части равенства (6), а остальным взаимно однозначно сопоставили какие-то слагаемые в правой части (6) (разумеется, после раскрытия скобок). Описанное выше соответствие гарантирует, что соответствующие слагаемые содержат одни и те же переменные $a_{(jk)}$, причем в одинаковой степени. А знаки у соответствующих слагаемых совпадают по правилу определения знака паросочетания и в силу формулы (7).

3. Пфаффовы ориентации

3.1. Хороший случай

Попробуем вычислить количество совершенных паросочетаний в графе, используя пфаффиан. Для этого занумеруем вершины графа и ориентируем его ребра, после чего сопоставим графу *ориентированную матрицу смежности*: $A_{j,k} = \pm 1$, если пара (jk) является ребром графа (знак определяется ориентацией); $A_{j,k} = 0$, если пара (jk) не является ребром графа. Пфаффиан такой матрицы равен сумме знаков совершенных паросочетаний графа.

Граф назовем *пфаффовым*, если существует ориентация его ребер, относительно которой знаки всех паросочетаний в этом графе равны. (Такую ориентацию будем называть *пфаффовой*.)

Итак, подсчет числа совершенных паросочетаний в пфаффовом графе сводится к вычислению пфаффиана (или квадратного корня из детерминанта) ориентированной матрицы смежности.

3.2. Паросочетания в плоском графе

Важным частным случаем пфаффовых графов, с которого и началась вся эта теория, являются планарные графы.¹⁾ *Планарный* граф можно нарисовать на плоскости так, чтобы линии, изображающие его ребра, не пересекались (естественно, за исключением концов). Саму картинку, изображающую граф указанным выше способом, будем называть *плоским графом*. *Грань* плоского графа — это цикл, внутри которого не лежит ни одной вершины. *Бесконечная грань* — это цикл, вне которого не лежит ни одной вершины.

Теорема 1. *Плоский граф является пфаффовым.*

Прежде чем доказывать теорему 1, сделаем несколько упрощающих замечаний и докажем две леммы.

Заметим, что отношение знаков паросочетаний определяется знаками циклов. Поэтому достаточно рассмотреть только связные плоские графы без мостов. (*Мост* — это ребро графа, через которое не проходит ни одного цикла. Ориентации мостов не влияют на знаки паросочетаний.) Если в плоском связном графе нет мостов, то каждое его ребро смежно в точности с двумя гранями (конечными или бесконечной).

Лемма 3. *Пусть в ориентированном плоском связном графе без мостов n внутренних вершин (не лежащих на бесконечной грани). Тогда знак бесконечной грани равен произведению знаков конечных граней, умноженному на $(-1)^n$.*

Доказательство. Фиксируем направление обхода против часовой стрелки. Каждое ребро, не входящее в бесконечную грань, проходится в противоположных направлениях при обходах смежных с ним граней. Поэтому вклад в

¹⁾По-видимому, теорему 1 впервые сформулировал и доказал П. Кастелейн.

произведение ориентаций от такого ребра всегда равен -1 . Пусть в графе m ребер на бесконечной грани, k внутренних ребер и f конечных граней.

Произведение знаков конечных граней равно $(-1)^{k+f}a$, где a — произведение ориентаций ребер вдоль бесконечной грани. Знак бесконечной грани равен $-a$. По теореме Эйлера

$$(n + m) - (m + k) + (f + 1) = 2,$$

поэтому

$$-a = (-1)^{n-k+f}a = (-1)^n(-1)^{k+f}a,$$

что и требовалось доказать. \square

Лемма 4. *Существует ориентация плоского связного графа без мостов и с четным числом вершин, относительно которой знаки всех граней равны $+1$.*

Доказательство. Лемму проще доказать, переходя к двойственному графу. Напомним построение двойственного графа. В каждой грани исходного графа лежит ровно одна вершина двойственного графа, вершины двойственного графа соединим ребром, пересекающим ребро исходного графа, которое лежит на обеих гранях, соответствующих выбранным вершинам (а если такого ребра нет, не будем соединять вершины ребром).

По ориентации графа построим ориентацию двойственного графа: потребуем, чтобы кратчайший поворот от ориентированного ребра исходного графа к ориентированному ребру двойственного происходил против часовой стрелки.

Посмотрев на рис. 4, легко понять, что утверждение леммы равносильно такому: в связном плоском графе, имеющем четное число граней, можно так ориентировать ребра, чтобы из каждой вершины выходило нечетное число ребер. Докажем это последнее утверждение.

Возьмем произвольную ориентацию. Поскольку граней — четное количество, в силу теоремы Эйлера четность числа вершин и четность числа ребер совпадают. Пусть v_0, v_1 — количество вершин, из которых выходит соответственно четное или нечетное количество ребер. Тогда $e = v_1 \pmod{2}$ и $v_0 + v_1 = e \pmod{2}$ в силу четности числа граней. Значит, v_0 — четно. Разобьем все вершины, из которых выходит четное количество ребер, на

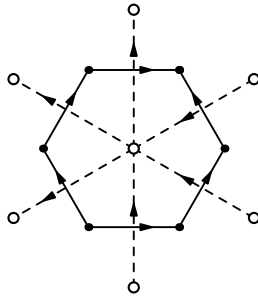


Рис. 4.

пары и соединим каждую пару путем в графе. Поменяем ориентации ребер вдоль всех выбранных путей. Четность количества выходящих ребер в промежуточных вершинах не изменится (поскольку меняется у четного числа ребер), а конечных — изменится. Получаем искомую ориентацию. \square

Ориентацию, относительно которой знаки всех граней положительны, назовем *однородной*. Лемма 4 гарантирует существование однородной ориентации для плоского графа. Мы завершим доказательство теоремы 1, если докажем, что однородная ориентация плоского графа является пфаффов. Для этого используем лемму 3.

Итак, пусть паросочетания в плоском связном графе различаются на циклы F_1, \dots, F_m . Внутри каждого такого цикла находится четное количество вершин (они ведь разбиты на пары паросочетанием), поэтому в силу леммы 3 знаки этих паросочетаний относительно однородной ориентации совпадают.

Теорема 1 доказана.

3.3. Графы ограниченного рода

Любой граф можно нарисовать без самопересечений на какой-нибудь ориентированной поверхности. Ориентированная поверхность — это сфера с g ручками, число g называется родом поверхности. Наименьший род поверхности, на которой можно нарисовать граф, называется родом графа. Число паросочетаний в графе можно сравнительно легко найти, если род поверхности не слишком велик. В частности, число паросочетаний графа на поверхности рода g можно записать в виде линейной комбинации 2^g пфаффианов. Есть и другой способ вычисления числа паросочетаний для этого случая, использующий полиномиальные матрицы инциденций.

3.1*: Постройте полиномиальный алгоритм подсчета числа совершенных паросочетаний в графе ограниченного рода.

4. Как считать детерминанты

4.1. Элементарные вычисления

Если матрица содержит много нулей, то часть слагаемых в формуле

$$\det A = \sum_{\pi \in S_v} \operatorname{sgn}(\pi) A(\pi), \quad \text{где } A(\pi) = \prod_{k=1}^v a_{k, \pi(k)}, \quad (8)$$

пропадает.

Решение 1.16. В случае треугольной матрицы формула (8) состоит из одного слагаемого, отвечающего единичной перестановке. Чтобы доказать это, нужно проверить такой факт: если в перестановке $j \leq \pi(j)$, то перестановка единичная (значит, $j = \pi(j)$). Это просто: возьмем любой цикл длины больше 1, а в нем — наибольшее число m . Тогда $m > \pi(m)$. Значит, в рассматриваемой перестановке все циклы имеют длину 1.

Решение 1.17. Обозначим число строк в матрице A через $2n$. Пусть $A(\pi) \neq 0$. Тогда из вида матрицы A можно заключить, что $\pi(j) = n + \pi_1(j)$, а $\pi(n + j) = \pi_2(j)$ ($1 \leq j \leq n$), где π_1, π_2 — произвольные перестановки на множестве n элементов. Подсчитаем знак перестановки через количество инверсий:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\pi) &= (-1)^{\text{число инверсий } \pi} = \\ &= (-1)^{n^2} (-1)^{\text{число инверсий } \pi_1} (-1)^{\text{число инверсий } \pi_2} = \\ &= (-1)^n \operatorname{sgn}(\pi_1) \operatorname{sgn}(\pi_2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{sgn}(\pi) A(\pi) = (-1)^n \operatorname{sgn}(\pi_1) M(\pi_1) (-1)^n \operatorname{sgn}(\pi_2) M(\pi_2),$$

так что

$$\det A = \sum_{\pi_1, \pi_2} \operatorname{sgn}(\pi_1) M(\pi_1) (-1)^n \operatorname{sgn}(\pi_2) M(\pi_2) = \det M \cdot \det M.$$

Решение 1.18. (Элементарнейшее.) Можно убедиться, что в формулу для детерминанта будут входить ровно два слагаемых, так что

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \lambda & 1 & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \lambda & \dots \end{vmatrix} = \lambda^n + (-1)^{n+1} \quad (9)$$

(Последний знак — это четность циклической перестановки $(12 \dots)$). Проще всего это увидеть на рис. 5, где стрелки обозначают ненулевые элементы матрицы. Ненулевым слагаемым детерминанта отвечают такие множества ребер, что из каждой вершины выходит и в каждую вершину заходит ровно одно ребро (остовные наборы циклов). Теперь ясно, что если мы

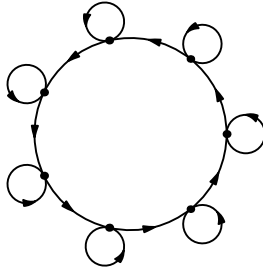


Рис. 5. Случай $n = 7$

включаем в такой набор любую петлю, то должны включить и соседние петли.

Матрица, которая получается заменой строк на столбцы и наоборот, называется транспонированной. В формулу для детерминанта транспонированной матрицы входят те же слагаемые, только перестановка заменяется на обратную. Поскольку четность перестановки совпадает с четностью обратной к ней, то детерминант транспонированной матрицы совпадает с детерминантом исходной. И вообще, почти во всех утверждениях про детерминанты есть симметрия относительно замены строк на столбцы. Далее мы приводим утверждения про строки, а пользоваться ими будем и для строк, и для столбцов.

4.1.1. Разложение по строке

Обозначим через $A \setminus (j; k)$ $(j; k)$ -минор, т.е. матрицу, которая получается из A вычеркиванием j -й строки и k -го столбца (минор). Детерминант линеен по каждой переменной. Записывая его как линейную функцию от элементов первой строки, получаем

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{1k} (-1)^{k+1} \det A \setminus (1; k). \quad (10)$$

Знак учитывает изменение четности перестановки при переходе к минору. Формула (10) дает индуктивный способ вычисления детерминанта, который так же плох с вычислительной точки зрения, как и определение (8). Но зато эту формулу удобно использовать в рассуждениях по индукции.

Аналогично можно разлагать по j -й строке, только вместо множителя $(-1)^{k+1}$ будет множитель $(-1)^{k+j}$.

Отметим важное следствие из формулы (10): если в матрице есть нулевая строка или нулевой столбец, то детерминант этой матрицы равен 0.

Решение 1.18. (Элементарное.) Разлагая по первой строке, получаем сумму двух детерминантов от треугольных матриц (ясно, что для детерминанта нижних треугольных матриц верна та же формула, что и для детерминанта верхних треугольных). Получаем в итоге

$$\det A = \lambda \cdot \lambda^{n-1} - (-1)^n \cdot 1.$$

Решение 1.20. Обозначим детерминант матрицы интересующего нас вида с n строками через P_n . Разлагая по первой строке, а затем — по первому столбцу, получаем $P_n = -P_{n-2}$. Первые члены в последовательности P_n легко вычислить непосредственно: $P_2 = -1$, $P_3 = 0$. Поэтому $P_{2n+1} = 0$, $P_{2n} = (-1)^n$.

4.1.2. Антисимметричность

Обозначим j -ю строку матрицы A через \mathbf{a}_j и запишем детерминант как функцию от n строк:

$$\det A = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Строки можно почленно складывать и умножать на число. Относительно этих операций детерминант является линейной функцией. В частности, если умножить какую-нибудь строку на число, то и детерминант умножится на это число.

Лемма 5. При перестановке двух строк детерминант меняет знак.

Доказательство. Детерминант переставленной матрицы записывается почти в таком же виде, что и детерминант исходной. Нужно только умножить все перестановки на транспозицию, отвечающую переставляемым строкам. Это изменит знак. \square

Следствие 1. Если в матрице есть пара одинаковых строк, детерминант равен 0.

Следствие 2. Если добавить к строке другую строку, умноженную на некоторое число, то детерминант не изменится.

Решение 1.19. (Индуктивное.) Вычтем первую строку из остальных, потом — получившуюся вторую строку из остальных и т. д. Получаем цепочку равенств:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Решение 1.13. (Алгоритм Гаусса.) Алгоритм вычисления детерминанта использует сформулированные выше свойства. Дадим его краткое описание. Выберем ненулевой элемент матрицы и перестановкой строк и столбцов переместим его в первую строку и первый столбец (если нет ненулевого элемента, то определитель равен 0). Теперь добавляя первую строку

с подходящим множителем к строкам $2, \dots, n$, сделаем элементы первого столбца в строках $2, \dots, n$ равными 0. Повторим рекурсивно эту процедуру с минором, получающимся вычеркиванием первой строки и первого столбца. В итоге получим верхнетреугольную матрицу, детерминант которой с точностью до знака равен детерминанту исходной матрицы. Чтобы установить знак, нужно подсчитывать четность выполненных транспозиций строк и столбцов.

Замечание 2. Если вы решите запрограммировать алгоритм Гаусса и будете использовать числа фиксированной разрядности, вас может ожидать неприятный сюрприз. Все реальные вычисления проводятся по другим алгоритмам.

4.2. Произведение матриц

Матрицы можно почленно складывать и перемножать по следующему правилу:

$$(AB)_{jk} = \sum_{s=1}^n A_{js} B_{sk}. \quad (11)$$

Лемма 6. $\det(AB) = \det A \det B$.

Доказательство. Раскроем скобки и приведем подобные.

В правой части равенства (6) будут слагаемые вида

$$\operatorname{sgn}(\pi_1) \operatorname{sgn}(\pi_2) A(\pi_1) B(\pi_2),$$

ни одно из них не сокращается.

В левой части до приведения подобных будут слагаемые вида

$$S(\pi, f) = \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n A_{jf(j)} B_{f(j)\pi(j)},$$

где π — перестановка, а $f: [n] \rightarrow [n]$ — произвольная функция. Слагаемые, отвечающие тем f , которые не являются перестановками, сокращаются. Действительно, пусть $f(j) = f(m)$. Тогда $S(\pi, f) = -S(\pi \circ (jm), f)$. Если f — перестановка, обозначим $\pi_1 = f$, $\pi_2 = f^{-1} \circ \pi$. Тогда

$$S(\pi, f) = \operatorname{sgn}(\pi) A(\pi_1) B(\pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1) \operatorname{sgn}(\pi_2) A(\pi_1) B(\pi_2).$$

Мы установили взаимно однозначное соответствие между слагаемыми в левой и правой частях формулы (6). \square

Решение 1.19. (В одну строчку.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Собственные числа и собственные векторы

Многочлен $\det(\lambda I - A)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A . Его степень равна n , так что у него (с учетом кратности) ровно n корней (комплексных). Они называются *собственными числами* матрицы A . Из теоремы Виета получаем, что детерминант — это произведение собственных чисел.

Правильнее говорить не о матрицах, а об операторах на векторном пространстве. Пример векторного пространства — матрицы размера $n \times 1$ (вектор-столбцы). В общем случае от векторного пространства требуется, чтобы его элементы можно было складывать и умножать на число так, чтобы выполнялись следующие свойства (латинскими буквами обозначаем векторы, а греческими — числа):

$$\begin{aligned}x + y &= y + x; & x + (y + z) &= (x + y) + z; & x + 0 &= x; & (-x) + x &= 0; \\ \lambda(x + y) &= (\lambda x) + (\lambda y); & (\alpha + \beta)x &= (\alpha x) + (\beta x); & \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x; \\ 1 \cdot x &= x.\end{aligned}$$

Здесь 0 — выделенный вектор, $(-x)$ — вектор, противоположный x . Поскольку $0x = 0$, $(-1)x = -x$, используемые вольные обозначения не приводят к печальным следствиям.

Базис векторного пространства — такой набор векторов e_1, \dots, e_d, \dots , что любой другой вектор однозначно выражается в виде линейной комбинации

$$x = \sum_j \alpha_j e_j$$

(в этой сумме должно быть конечное число слагаемых). Пространство называется *конечномерным*, если у него есть конечный базис. Здесь мы всюду рассматриваем только конечномерные пространства, такие как пространство вектор-столбцов.

Условие однозначности разложения эквивалентно тому, что никакая нетривиальная (имеющая хотя бы один ненулевой коэффициент) линейная комбинация векторов не равна 0 .

Теорема (о базисе). *Количество элементов в любом базисе одинаково. Это число называется размерностью пространства.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_n$ и $e_1, \dots, e_d, g_1, \dots, g_m$ — два базиса. В разложении f_n по второму базису обязательно встретится один из векторов g_k (иначе первый набор не будет удовлетворять условию однозначности разложения). Без ограничения общности $f_n = \alpha g_m + a$. Но тогда $e_1, \dots, e_d, g_1, \dots, g_{m-1}, f_n$ — тоже базис. Таким образом, мы перешли к паре базисов, у которых на 1 больше общих векторов. Продолжая, приходим к паре e_1, \dots, e_{d+n} и $e_1, \dots, e_{d+n}, g_1, \dots$. Из однозначности разложения получаем, что базисы совпадают. \square

(Линейный) оператор — такое отображение A векторного пространства, что $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. Если зафиксировать базис e_1, \dots, e_d , то

действие оператора на вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_de_d$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} Ax &= y = y_1e_1 + \dots + y_de_d, \\ y &= \sum_{k=1}^d x_k Ae_k = \sum_{k=1}^d x_k \sum_{j=1}^d a_{jk} e_j, \\ y_j &= \sum_{k=1}^d a_{jk} x_k. \end{aligned}$$

Матрица (a_{jk}) называется матрицей оператора A в базисе e_1, \dots, e_d . Оператор однозначно определяется базисом и матрицей в этом базисе.

Лемма 7. *Характеристические многочлены матриц оператора в любом базисе одинаковы.*

Доказательство. Обозначим матрицы оператора в базисе $\{e_j\}$ через $A = (a_{jk})$, а в базисе $\{f_j\}$ через $A' = (a'_{jk})$. Через $B = (b_{jk})$ обозначим матрицу перехода от e к f : $f_k = \sum_s b_{sk} e_s$. Матрица B обратима: если матрицу перехода от f к e обозначить через C , то

$$f_k = \sum_s b_{sk} e_s = \sum_{s,r} b_{sk} c_{rs} f_r, \quad \text{т.е. } CB = I, \quad C = B^{-1}.$$

Вычислим двумя способами Ae_k :

$$\begin{aligned} Ae_k &= \sum_s a_{sk} e_s = \sum_{j,r} a_{sk} (b^{-1})_{rs} f_r, \\ Ae_k &= A \left(\sum_s (b^{-1})_{sk} f_s \right) = \sum_{s,r} (b^{-1})_{sk} A f_s = \sum_{s,r} (b^{-1})_{sk} a'_{rs} f_r. \end{aligned}$$

Другими словами, $A'B^{-1} = B^{-1}A$. Поэтому $A' = B^{-1}AB$.

Осталось использовать лемму 6:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A') &= \det(\lambda I - B^{-1}AB) = \det(B^{-1}(\lambda I - A)B) = \\ &= \det B^{-1} \det(\lambda I - A) \det B = \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

□

Оператор называется *диагонализуемым*, если в некотором базисе его матрица — диагональная. Другими словами это можно сказать так: у оператора есть базис из собственных векторов. *Собственный вектор* $x \neq 0$ удовлетворяет условию $Ax = \lambda x$ (λ — собственное число, соответствующее этому собственному вектору).

Лемма 8. *$\det A = 0$ тогда и только тогда, когда оператор A имеет собственный вектор с нулевым собственным числом. Другими словами последнее условие можно сформулировать так: существует $x \neq 0$, такое что $Ax = 0$.*

Доказательство. Условие $Ax = 0$ означает, что существует ненулевая комбинация столбцов A , равная 0. Но тогда один из столбцов A равен линейной комбинации остальных, поэтому $\det A = 0$.

Пусть для любого $x \neq 0$ выполнено $Ax \neq 0$. Выберем базис e_1, \dots, e_n . Линейная оболочка (все линейные комбинации) векторов Ae_1, \dots, Ae_n совпадает с подпространством векторов вида Ax , которое мы обозначим $\text{Im } A$. Если Ae_1, \dots, Ae_n не является базисом в $\text{Im } A$, то нарушается условие однозначности разложения, откуда получится ненулевой вектор x , для которого $Ax = 0$. Значит, Ae_1, \dots, Ae_n — базис в $\text{Im } A$. Аналогично теореме о базисе можно доказать, что базис любого подпространства продолжается до базиса всего пространства. Значит, L совпадает со всем пространством.

Таким образом, уравнение $y = Ax$ имеет решение для любого y . Это решение — единственное, поскольку из $y = Ax_1 = Ax_2$ следует $A(x_1 - x_2) = 0$. Поэтому определен обратный оператор A^{-1} . Но

$$\det I = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A \neq 0.$$

Значит, $\det A \neq 0$, что и требовалось доказать. \square

Следствие 3. Для любого собственного числа найдется хотя бы один собственный вектор.

Решение 1.18. (Важное.) Рассмотрим оператор циклического сдвига, который можно задать матрицей

$$C_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

в базисе e_j , $j = 0, \dots, n-1$. Прямым вычислением проверим, что вектор

$$x_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi jk/n} e_j$$

является собственным вектором для C_k :

$$C_n x_k = \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi jk/n} C_n e_j = \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi(j+1)k/n} e_j = e^{2\pi k} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi jk/n} C_n e_j = \lambda_k x_k.$$

Поэтому характеристический многочлен C_n равен $\prod_k (\lambda - \lambda_k) = \lambda^n - 1$. С точностью до $(-1)^n$ это совпадает с (9).

4.4. Симметричные и эрмитовы матрицы

Симметричная матрица не меняется при транспонировании. Родственное понятие — эрмитова матрица. Для эрмитовой матрицы H выполняются условия $H_{jk} = \bar{H}_{kj}$ (транспонирование и комплексное сопряжение).

Если матричные элементы — действительные, то понятия симметричной и эрмитовой матриц совпадают. Эрмитовы операторы тесно связаны со скалярным произведением, которое в случае вектор-столбцов задается следующей формулой

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_j \bar{x}_j y_j. \quad (12)$$

Здесь \bar{z} — комплексно сопряженное число. Как видно из (12), скалярное произведение полуторалинейно. Отличие от линейности в том, что при умножении первого сомножителя на число λ скалярное произведение умножается на $\bar{\lambda}$.

Докажем прямым вычислением, что $\langle x, Hy \rangle = \overline{\langle y, Hx \rangle}$:

$$\overline{\langle y, Hx \rangle} = \sum_{j,k} \bar{y}_j \overline{H_{jk} x_k} = \sum_{j,k} y_j \bar{H}_{jk} \bar{x}_k = \sum_{j,k} \bar{x}_k H_{kj} y_j = \langle x, Hy \rangle.$$

Отсюда получаем, что скалярное произведение $\langle x, Hx \rangle$ — действительное число, поскольку $\overline{\langle x, Hx \rangle} = \langle x, Hx \rangle$. И обратно, если для любого x выполняется $\langle x, Hx \rangle = \overline{\langle x, Hx \rangle}$, т. е.

$$\sum_{j,k} \bar{x}_j H_{jk} x_k = \sum_{j,k} \bar{x}_j \bar{H}_{kj} x_k,$$

то легко понять, что $H_{jk} = \bar{H}_{kj}$. Это показывает, что эрмитовость — свойство не матрицы, а оператора (не зависит от выбора базиса).

Эрмитовы операторы диагонализуются.

Теорема. Для любого эрмитова оператора есть ортогональный базис из собственных векторов, а собственные числа — всегда действительные.

Вот короткий набросок доказательства этой теоремы. Пусть $Hx = \lambda x$, тогда $\langle x, Hx \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$, значит λ — действительное. Собственные вектора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны: если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $Hx_k = \lambda_k x_k$, то

$$\lambda_1 \langle x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, Hx_1 \rangle = \overline{\langle x_1, Hx_2 \rangle} = \bar{\lambda}_2 \overline{\langle x_1, x_2 \rangle} = \lambda_2 \langle x_2, x_1 \rangle,$$

значит $\langle x_2, x_1 \rangle = 0$.

Пусть V_λ — подпространство собственных векторов с собственным значением λ . Ортогональное дополнение V_λ^\perp — множество векторов, ортогональных всем векторам из V_λ . Любой вектор x однозначно представляется в виде суммы $x_1 + x_2$, где $x_1 \in V_\lambda$, $x_2 \in V_\lambda^\perp$ — ортогональные проекции x на соответствующие подпространства. По определению, ортогональная проекция вектора x на подпространство L — это такой вектор $\ell \in L$, что для любого $\ell' \in L$ выполняется $\langle x, \ell' \rangle = \langle \ell, \ell' \rangle$. Почему ортогональная проекция существует и единственна? Заметим, что $\langle x, \cdot \rangle$ — линейный функционал на пространстве L . Линейные функционалы очевидным образом можно складывать и умножать на число, поэтому они образуют векторное пространство. Размерность этого пространства совпадает с размерностью

пространства L , а базисом являются функционалы, задающие умножение на вектора из некоторого базиса L . Значит, $\langle x, \cdot \rangle$ однозначно записывается в виде $\langle \ell, \cdot \rangle$, $\ell \in L$. Рутинным образом проверяется, что сумма ортогональных проекций x на взаимно ортогональные пространства равна x и что это представление единственно.

Пространство V_λ^\perp инвариантно для оператора H , т. е. для любого $x \in V_\lambda^\perp$ выполняется $Hx \in V_\lambda^\perp$:

$$\langle v, Hx \rangle = \overline{\langle x, Hv \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, x \rangle = 0.$$

Поэтому завершить доказательство теоремы можно индукцией по размерности, выделяя собственное подпространство и применяя к его ортогональному дополнению предположение индукции.

Решение 1.21. Обозначим симметричную матрицу из задачи через K_n . Прямым вычислением проверяется равенство $K_n^2 = (n-2)K_n + (n-1)I$. Это значит, что любое собственное число удовлетворяет уравнению $\lambda^2 - (n-2)\lambda - (n-1) = 0$, у которого два корня: -1 и $n-1$. Собственный вектор, отвечающий второму числу, угадывается моментально: это вектор $(1, 1, \dots, 1)$ (для простоты записи мы пишем столбец в строчку). Ортогональное дополнение к этому вектору состоит из векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0.$$

Но тогда $(K_n x)_k$ равно сумме всех x_j , кроме x_k , т. е. равно $-x_k$.

Итак, есть одно собственное число $n-1$ и $n-1$ собственных чисел -1 . Детерминант равен их произведению, т. е. $(-1)^{n-1}(n-1)$.

4.5. Тензорное произведение

Векторные пространства можно (тензорно) перемножать. Пусть L, M — два векторных пространства. Неформально говоря, векторы из тензорного произведения $L \otimes M$ являются линейными комбинациями *разложимых* векторов вида $x \otimes y$, $x \in L$, $y \in M$. Более точно, структура тензорного произведения — это пространство $L \otimes M$ и *билинейное* отображение $\otimes: L \times M \rightarrow L \otimes M$, удовлетворяющие *условию универсальности*: для любого билинейного отображения $\varphi: L \times M \rightarrow F$ существует единственное отображение $\alpha: L \otimes M \rightarrow F$, которое удовлетворяет условию $\varphi = \alpha \circ \otimes$.

Если $\{e_j\}$ — базис в L , а $\{f_k\}$ — базис в M , то $L \otimes M$ можно описать конструктивно как множество формальных линейных комбинаций

$$\sum_{j,k} x_{jk} e_j \otimes f_k.$$

Требуемое в определении билинейное отображение задается очевидным образом:

$$\otimes \left(\sum_j a_j e_j, \sum_k b_k f_k \right) = \sum_{jk} a_j b_k (e_j \otimes f_k). \quad (13)$$

Свойство универсальности следует из того, что на базисных векторах $e_j \otimes f_k$ отображение α определено однозначно: $\alpha(e_j \otimes f_k) = \varphi(e_j, f_k)$, на остальные вектора оно продолжается по линейности.

Из конструктивного определения тензорного произведения ясно, что размерность тензорного произведения равна произведению размерностей сомножителей.

Теперь используем сказанные выше абстрактные слова для вывода нескольких конкретных следствий.

Докажем, что любое множество вида $\{g_j \otimes h_k\}$, где g_j — базис в L , h_k — базис в M , является базисом в $L \otimes M$. Для этого подставим в свойство универсальности вместо F пространство линейных комбинаций $\{g_j \otimes h_k\}$ вместе с очевидным φ . Тогда α из свойства универсальности является отображением «на». С другой стороны, размерности пространств совпадают по построению. Значит, имеется обратное отображение, которое переводит базис в базис.

Рассмотрим два оператора $A: L \rightarrow L$, $B: M \rightarrow M$ и билинейное отображение $(A \otimes B): (u, v) \mapsto (Au) \otimes (Bv)$ в $L \otimes M$. Отображение α из свойства универсальности определяет оператор $A \otimes B: L \otimes M \rightarrow L \otimes M$, который называется тензорным произведением A и B .

В случае диагонализуемых операторов A, B очевидно, что собственные числа $A \otimes B$ — произведения собственных чисел A и B . На самом деле это верно всегда.

Решение 1.22. Матрица H_n является n -й тензорной степенью матрицы $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, собственные числа которой равны $\pm\sqrt{2}$. Поэтому собственные числа H_n равны $\pm 2^{n/2}$, причем положительных и отрицательных поровну. Поэтому $\det H_n = 2^{2^{n-1}n}$ при $n > 1$.