Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина

В. С. Рыжий, И. Г. Николенко

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

В 2 частях

Часть 1

Математика в древности и в средние века

Учебное пособие

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

В. С. Рыжий
И. Г. Николенко

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

В 2 частях

Часть 1. Математика в древности и в средние века

Учебное пособие

Харьков – 2013

УДК 51 (091)
ББК 22.1г
Р93

Рецензенты:

В. А. Резуненко – кандидат физ.-мат. наук, доцент Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина;

А. И. Даниленко – доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Физико-технического института низких температур имени Б. И. Веркина НАН Украины.

Утверждено к печати решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 7 от 27.06.2013 г.)

Рижий В. С.

Р93 Історія математики. У 2 ч. Ч. 1: Математика у давнині і в середні віки: навчальний посібник / В. С. Рижий, І. Г. Ніколенко. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2013. – 184 с.

ISBN 978-966-285-011-6

У частині 1 посібника викладено у хронологічній послідовності у формі нарисів біографічні відомості та основні досягнення видатних математиків давнини та середніх віків. Подано широку бібліографію з історії математики для забезпечення самостійної роботи. Посібник призначено для студентів, викладачів і наукових працівників математичних спеціальностей.

Рыжий В. С.

Р93 История математики. В 2 ч. Ч. 1: Математика в древности и в средние века: учебное пособие / В. С. Рыжий, И. Г. Николенко. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2013. – 184 с.

ISBN 978-966-285-011-6

В части 1 пособия изложены в хронологической последовательности в виде очерков биографические сведения и основные достижения выдающихся математиков древности и средних веков. Приведена обширная библиография по истории математики для обеспечения самостоятельной работы. Пособие предназначено для студентов, преподавателей и научных работников математических специальностей.

УДК 51 (091)
ББК 22.1г

ISBN 978-966-285-011-6 (Ч. 1)
ISBN 978-966-623-768-5 (Ч. 2)

ПРЕДИСЛОВИЕ

На большую важность изучения прошлого для лучшего понимания настоящего и будущего указывали многие выдающиеся ученые. Г. В. Лейбниц писал: «Кто хочет ограничиться настоящим без знания прошлого, тот никогда его не поймет...». А. Пуанкаре в работе «Наука и метод», гл. II, утверждает: «Лучший метод для предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук». Более того, изучение истории развития науки является очень увлекательным занятием. Дж. К. Максвелл писал: «Наука захватывает нас, когда, заинтересовавшись жизнью великих исследователей, мы начинаем следить за историей их открытий».

В конце XIX в. и особенно в XX в. очень усилился интерес математиков к истории математики, вызванный, в частности, дискуссиями по преодолению противоречий в основаниях математики. Только за последние несколько десятилетий вышло много книг по истории математики, издано более 40 выпусков сборника «Историко-математические исследования». Однако истории математики уделяется весьма скромное место в системе обучения математике. В учебниках математики исторические сведения либо отсутствуют, либо сообщаются в слишком лаконичном виде. Книги по истории математики, в том числе учебники по этому предмету, имеются в библиотеках в лучшем случае в количестве нескольких экземпляров. В подавляющем большинстве вузов история математики не входит в число учебных предметов. Но общеизвестно, что понятия и факты, изложенные вне всякой связи с их происхождением и развитием, усваиваются недостаточно полно и зачастую формально. В связи с этим представляется очевидной необходимость пособия по истории математики. Предлагаемое пособие имеет целью дать широкую панораму развития математики от древности до начала XX века, повысить интерес к изучению математики и ее истории, углубить понимание материала и расширить свой кругозор, а также стимулировать изучение математики и самостоятельные математические исследования на примерах самоотверженного труда многих выдающихся математиков прошлого. Пособие может послужить поводом к более серьезному знакомству с их жизнью и произведениями по указанной ниже литературе. Приведенные сведения будут полезны также преподавателям математики, так как история математики дает очень много интересного и поучительного материала, который можно успешно использовать в преподавании различных математических дисциплин, чтобы сделать изложение живым, а не формальным. Выдающийся французский математик, физик и философ XVII века Блез Паскаль писал: «Предмет математики настолько серьезен, что не следует упускать случая сделать его немного занимательным».

В настоящем пособии материал излагается следующим образом. В хронологическом порядке главным образом в виде очерков или справок приводятся краткие биографические сведения о многих выдающихся математиках прошлого и освещаются наиболее значительные их достижения. Этот способ изложения позволяет дать целостное представление о яркой творческой роли каждого из самых знаменитых математиков. Академик С. И. Вавилов писал: «История науки не может ограничиваться развитием идей – в равной мере она должна касаться живых людей с их особенностями, талантами, зависимостью от социальных условий, страны, эпохи». Нетрудно проследить и историю развития какой-либо отдельной математической дисциплины, просматривая пособие и используя имеющиеся в тексте ссылки на предшественников и последователей выдающихся математиков в разработке данной дисциплины. Пособие состоит пока из двух частей.

Первая часть представляет собой краткий обзор истории развития математики в древности и в средние века. Особое внимание здесь уделяется математике в древней Греции, где она получила небывало высокое развитие и впервые оформилась как дедуктивная наука.

Вторая часть посвящена математике XVII и XVIII веков. Это период становления математики Нового времени в ее классическом виде, во многом без строгого обоснования. Наибольшее внимание в этой части уделяется развитию математического анализа и дисциплин, возникших в его «недрах».

Третья часть пособия еще не закончена, она посвящена истории развития математики в XIX в. и в начале XX в., это период становления современной математики.

Основными источниками при написании пособия являлись: трехтомная «История математики с древнейших времен до начала XIX ст.» под редакцией А. П. Юшкевича [1] и ее продолжение – три книги «Математика XIX века» [107–109] под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича; «Хрестоматия по истории математики …» под редакцией А. П. Юшкевича [2; 3]; «Пробуждающаяся наука …» Б. Л. ван дер Вардена [24]; «История математики в средние века» А. П. Юшкевича [43]; «История математики в XVI и XVII веках» Г. Г. Цейтена [61]; «История математики от Декарта до середины XIX ст.» Г. Вилейтнера [69]; «Краткий очерк истории математики» Д. Я. Стройка [7]; «Лекции о развитии математики в XIX ст.» Ф. Клейна [140]; учебное пособие К. А. Рыбникова «История математики» [5]; биографические справочники [14–17] и книги биографического характера о выдающихся математиках; книги по истории развития отдельных математических дисциплин, а также некоторые статьи в сборниках «Историко-математические исследования» [21] (издаются с 1948 г.). За несколькими исключениями, в список литературы не включены собрания сочинений и сборники научных трудов математиков. Ссылки на эти материалы содержатся в указанной в пособии литературе по истории математики. Уже в части 1 пособия этот список доведен вплоть до начала XX в., что позволяет, имея в распоряжении только часть 1 пособия, изучать по приведенной литературе историю математики в объеме, далеко выходящем за рамки части 1 пособия.

В 2003 г. кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ХНУ им. В. Н. Каразина В. С. Рыжий, читавший студентам мехмата курс «История математики», опубликовал часть 1 пособия «История математики» [210]. Для нынешнего издания эта часть пособия исправлена и дополнена В. С. Рыжим совместно с кандидатом физико-математических наук, доцентом кафедры математического анализа ХНУ им. В. Н. Каразина И. Г. Николенко. Часть 2 пособия опубликована ими в 2011 году [234].

Пособие адресовано не только студентам, но и преподавателям, научным работникам и всем, кто интересуется историей математики.

МАТЕМАТИКА В ДРЕВНОСТИ

Принято считать древним периодом время до V века н. э. включительно. Первыми высокоразвитыми древними цивилизациями, от которых до нас дошли письменные математические сведения, были древневавилонская и древнеегипетская. Они начали развиваться более чем за три тысячи лет до нашей эры. В число обязанностей царских писцов в то время входило умение производить математические расчеты в связи с финансовыми и хозяйственными потребностями. Особенно искусно владели приемами вычислений древневавилонские писцы. Они обладали уже и некоторыми элементарными геометрическими знаниями, полученными из опыта измерений. Позже математика получила развитие в Греции, Китае и Индии. Основное внимание в рассматриваемом периоде будет уделено математике в древней Греции, где она достигла несравненно более высокого уровня развития, чем в других странах древнего мира, а ее значение для дальнейшего развития математики было поистине огромным.

Очень подробно изложена история математики в древних Египте, Вавилоне и Греции в книге выдающегося голландского алгебраиста и историка математики и астрономии Б. Л. ван дер Вардена [24]. Арифметике и алгебре в этих странах в древности посвящена также обстоятельная книга М. Я. Выгодского [25]. Дополнительные библиографические сведения будут приведены в дальнейшем изложении.

О возникновении систем счисления

Необходимость считать предметы появилась на ранних ступенях развития человеческого общества. Некоторое представление о ранних этапах возникновения счета дают нам этнография и языкознание. Первоначально у первобытных племен не было настоящего счета предметов, а предметы при обмене просто располагались в два ряда, как, например, у австралийских племен при обмене рыбы на коренья. Позже для счета предметов стали использовать пальцы рук и ног. Некоторые племена, в частности в Африке, вели счет с помощью пальцев одной руки. Так возникла пятеричная система счисления, ее следы сохранились и в скандинавских языках. У большинства народов позже счет был связан с десятью пальцами на руках. Это привело уже в древности к десятичной системе счисления (у древних египтян, индусов, греков, китайцев и др.). Индейцы майя в Америке и папуасы Новой Гвинеи вели счет в двадцатеричной системе – по числу пальцев на руках и ногах. Следы этой системы сохранились в грузинском языке, где называют: 10 – *ати*, 20 – *оци*, 30 – *оцдаати* (20+10), 40 – *ормоци* (2×20), 50 – *ормоцдаати* (2×20+10) и т. д. Во французском языке следы двадцатеричной системы счисления сохранились в виде исключения в следующих числительных: 70 – *soixante-dix* (60+10), 80 – *quatre-vingt* (4×20) и 90 – *quatre-vingt-dix* (4×20+10). Древние вавилоняне уже более чем за XX веков до н. э. пользовались позиционной шестидесятеричной системой счисления. Ее следы сохранились у нас в делении часа на минуты и секунды, а также в градусном измерении углов. Древние египтяне пользовались непозиционной десятичной системой счисления.

Для изображения или записи чисел уже в древности применялись разные способы. Первоначально это были черточки (зарубки) на кости или дереве. В древнеегипетской нумерации числа от 1 до 9 записывались в виде вертикальных черточек, а единицы дальнейших разрядов – в виде специальных иероглифов. Вертикальные черточки в записи некоторых чисел используются и в римской нумерации: I – 1, II – 2, III – 3, IV – 4, V – 5, VI – 6, VII – 7, VIII – 8, IX – 9. Полагают, что знак V является условным изображением кисти руки с оттопыренным большим пальцем, а знак X – двух кистей. Приведем еще примеры записи чисел в римской нумерации: XL = 40, L = 50, LX = 60, XC = 90, C = 100, CX = 110, CXL = 140, CC = 200, CD = 400, D = 500, DC = 600, M = 1000. Запись MDCLXXXII означает 1682. О записи чисел в математике древнего Вавилона и древнего Египта см. ниже на с. 13–14, 19.

Как и в современной математике, изображения (знаки) для чисел у древних вавилонян и египтян произошли не от названий чисел. В римской нумерации C и M являются первыми буквами слов, соответственно, *centum* – «сто» и *mille* – «тысяча».

У древних греков до н. э. было две системы обозначения чисел – аттическая (геродианова) и ионийская. Ионийцы – одно из основных древнегреческих племен, оно населяло Аттику (область, где находятся Афины), острова в Эгейском море, часть западного побережья Малой Азии (область Ионии, ныне в Турции), побережье Мраморного моря и значительную часть побережья Черного моря.

Древнейшие из аттических изображений чисел на каменных плитах относятся к VI в. до н. э. Эта система записи чисел продержалась до начала I в. н. э. Она имеет связь с греческим алфавитом, но не является алфавитной. Числа от 1 до 4 в аттической системе записываются в виде вертикальных палочек, а прописными («большими») буквами обозначаются следующие числа: $\Gamma = 5$, $\Delta = 10$, $\mathrm{H} = 100$, $\mathrm{X} = 1000$, $\mathrm{M} = 10000$. (Прописные буквы удобнее вырезать на камне, чем строчные.) Эти буквы являются первыми буквами наименований соответствующих числительных в аттической записи [25, с. 235–236, 242–245]. Далее писали

$$\Gamma\mathrm{I} = 6, \quad \Gamma\mathrm{II} = 7, \quad \Gamma\mathrm{III} = 8, \quad \Gamma\mathrm{IIII} = 9.$$

Числа, бóльшие десяти, записывались по десятичной системе, но с использованием «комбинированных» знаков

$$\ulcorner^{\Delta} = 50, \quad \ulcorner^{\mathrm{H}} = 500, \quad \ulcorner^{\mathrm{X}} = 5000.$$

Например:

$$\Delta\Delta = 20, \quad \Delta\Delta\Delta\Gamma = 35, \quad \ulcorner^{\Delta}\Delta\Delta\Gamma\mathrm{I} = 76, \quad \mathrm{HHHH}\Delta\mathrm{III} = 413,$$

$$\ulcorner^{\mathrm{H}}\mathrm{H} = 600, \quad \ulcorner^{\mathrm{X}}\mathrm{XXX}\ulcorner^{\mathrm{H}}\mathrm{HH}\ulcorner^{\Delta}\Delta\mathrm{II} = 8762.$$

Аттическая нумерация напоминает римскую, но в римской нумерации применяется еще и «принцип вычитания», например: IV = 5 – 1 = 4, XL = 50 – 10 = 40 и т. д.

Алфавит в древней Греции имеет в основном финикийское происхождение. Начертание букв и их порядок в алфавите у греков установились на рубеже V и IV вв. до н. э. Примерно тогда же в малоазиатских греческих поселениях возникла алфавитная система обозначения чисел – ионийская система. При раскопке г. Галикарнасса в Малой Азии найден камень, на одной из граней которого в V в. до н. э. записаны числа в аттической системе нумерации, а на трех – в алфавитной [25, гл. 3, §4, 5]. Древнегреческий алфавит состоял из 27 букв, первые 9 из них использовались для записи чисел первого десятка, следующие 9 – для записи десятков, остальные 9 – для сотен. Прописные буквы для чисел позже были заменены строчными. Чтобы отличить числа от букв, перед числами ставили двоеточие или черту над числом. Приведем примеры: $\overline{\alpha}=1$, $\overline{\beta}=2$, $\overline{\gamma}=3$, $\overline{\delta}=4$, $\overline{\varepsilon}=5$, $\overline{\eta}=8$, $\overline{\vartheta}=9$, $\overline{\iota}=10$, $\overline{\varkappa}=20$, $\overline{\lambda}=30$, $\overline{\nu}=50$, $\overline{o}=70$, $\overline{\rho}=100$, $\overline{\sigma}=200$, $\overline{\tau}=300$, $\overline{\varphi}=500$, $\overline{\varpi}=800$. Тогда, например, $\overline{\sigma\lambda\eta}=238$, $\overline{\tau\iota}=310$. Для записи тысяч использовались буквы со штрихом слева внизу: ${}_{/}\alpha=1000$, ${}_{/}\beta=2000$ и т. д., тогда, например, ${}_{/}\delta\omega\varkappa\gamma=4823$. Самой крупной единицей счета у древних греков (до Архимеда) было число $\mathrm{M}=10000$, т. е. «мириада» – $\mu\upsilon\rho\iota$άς, тогда $\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}{}_{/}\eta\sigma\beta=58202$, а число 258202 древний грек мог записать в виде $\overset{\varkappa\varepsilon}{\mathrm{M}}{}_{/}\eta\sigma\beta$, или $\varkappa\varepsilon.{}_{/}\eta\sigma\beta$ (т. е. 25 мириад 8202), или в виде ${}_{/}\sigma\nu\eta\sigma\beta$ (т. е. 258 тысяч 202). Как видим, числа в ионийской (алфавитной) системе записывались более кратко, чем в аттической, но вычисления в них, как и в римской нумерации, были трудными. Древнерусская алфавитная система нумерации была основана с некоторыми изменениями на ионийской системе (см. ниже с. 130–131). Ионийская и римская нумерации продержались в европейских странах долго, пока в XIII–XIV вв. постепенно не были вытеснены нынешней позиционной десятичной системой записи чисел.

Используемые в древности системы записи чисел, кроме шестидесятеричной в древнем Вавилоне, не были позиционными. В позиционной системе одно и то же число единиц разряда в любом из разрядов записывается одинаково. Например, в десятичной позиционной системе число 5 в первом разряде означает число единиц, во втором – число десятков и т. д. Почти позиционной была десятичная система у древних китайцев, где имелись иероглифы для девяти цифр и нуля. Но в каждом десятичном разряде, кроме числа единиц разряда, ставился еще свой иероглиф, означавший, что речь идет о единицах, десятках, сотнях и т. д. В древней Индии система счисления издавна была десятичной, а позиционной она стала не позже VI в. н. э. В средние века она была позаимствована (с изменением обозначения цифр) арабами, а от них перешла к европейцам.

Ввиду неудобств, связанных с записью чисел и действиями над ними, в древности вычисления проводились с помощью различных вспомогательных средств. Наиболее распространенным приспособлением для этого была счетная доска – абак, разграфленная на колонки или квадраты, позже использовалась доска и с перегородками. Вычисления велись на ней обычно с помощью камешков. В древности, а особенно в средние века, использовался «пальцевый счет», при котором числа изображались с помощью загибаний пальцев на руках. Особой популярностью вплоть до недавнего времени пользовались счеты с костяшками на проволоках, имевшие разный вид в Китае, Японии и Европе. Коренные жители Южной Америки – инки – применяли веревочно-узловой счет: к длинной и более толстой веревке привязывали много тонких веревочек, на которых можно было завязывать узелки. Древние вавилоняне при вычислениях в шестидесятеричной системе использовали заранее составленные таблицы умножения, таблицы обратных чисел и др., записанные на глиняных табличках.

В результате счета предметов возникли различные системы счисления и появилось абстрактное понятие натурального числа. Понятие «нуль» и признание его числом, равноправным с другими числами, имеет длинную историю – вплоть до XVII в. н. э.

Древние вавилоняне на протяжении более 2000 лет до н. э. в записи чисел в шестидесятеричной системе вместо пустых разрядов оставляли пробел, а специальный символ для нуля (см. ниже с. 13) на месте пустых разрядов появился у них только в III–I вв. до н. э. Древнегреческие астрономы позаимствовали у них шестидесятеричную систему счисления. Ее удобство для вычислений в астрономии состояло в том, что число 60 имеет больше делителей, чем число 10, а при записи чисел количество разрядов дробной части короче, чем в десятичной системе. Древнегреческий астроном Птолемей (II в. н. э.) записывает углы и длины частей диаметра в круге в шестидесятеричной системе, обозначая при этом пустые дробные разряды буквой o, напоминающей наш 0. Например, $12°0'24''$ он пишет в виде $\overline{\iota\beta}o'\varkappa\delta''$. Полагают, что его символ для нуля является первой буквой слова $o\upsilon\delta\acute{\varepsilon}\nu$ – «ничто». Целые числа Птолемей записывает в ионийской системе, там $\bar{o} = 70$. У индусов нуль как число в десятичной системе счисления появляется на несколько веков позже, когда они уже познакомились с греческой астрономией. Может показаться удивительным тот факт, что древние греки с их высоко развитой математикой не перешли к позиционной десятичной системе счисления, а это сделали индусы, имея не очень развитую математику. Древним грекам была не совсем чуждой идея позиционной записи чисел, у них числа тысяч обозначались теми же буквами, что и числа от 1 до 9. Для введения позиционной десятичной системы грекам достаточно было взять в качестве цифр первые 9 букв алфавита и какой-нибудь знак для нуля. Но для греков было бы неестественным вводить в качестве числа нуль (в их понимании – «ничто») в свою арифметику, так как, в отличие от индусов, они много внимания уделяли обоснованию понятия числа, строгому построению арифметики и геометрии, не заботясь о совершенствовании техники арифметических вычислений.

Математика в древнем Вавилоне

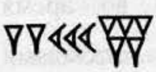
Во второй половине XIX века и первой половине XX века французские, британские и американские археологи при раскопках древних городов и храмов в междуречье Тигра и Евфрата (в Месопотамии, на территории нынешнего Ирака) в числе многих археологических находок обнаружили древние библиотеки с клинописными текстами на глиняных табличках. К настоящему времени найдено несколько сотен тысяч таких табличек, в том числе несколько сотен табличек с чисто математическими текстами, они относятся к двум периодам. Большая часть математических табличек была изготовлена древними вавилонянами (потомками шумеров) во время династии Хаммурапи (XVIII–XVI вв. до н. э.), а меньшая – потомками вавилонян в эпоху Селевкидов (III–I вв. до н. э.). В нижних помещениях храмов были обнаружены школы писцов с учебными пособиями по грамматике, математике и астрономии. Тексты писали трехгранной палочкой на табличках из сырой глины размером меньше страницы, затем таблички обжигали. Шумеры и вавилоняне пользовались шестидесятеричной позиционной системой счисления для записи натуральных чисел и дробей и были самыми искусными вычислителями древнего мира.

В первой половине XX века почти все эти тексты были расшифрованы. Наибольшее участие в расшифровке и публикации древневавилонских математических текстов приняли немецкий математик О. Нейгебауэр и французский математик Ф. Тюро-Данжен.

Относительно происхождения шестидесятеричной системы счисления мнения историков математики расходятся. Кажется наиболее правдоподобным мнение О. Нейгебауэра, согласно которому эта система счисления возникла из денежно-весовой системы мер: 1 талант равен 60 мин, 1 мина равна 60 шекелям [25, с. 99–104].

Для записи чисел использовались символы: «клин» , «угол» , а позже, в эпоху Селевкидов, появился символ , означавший нуль (до этого вместо нуля оставляли в соответствующем разряде пустое место). Натуральные числа от 1 до 59, т. е. в пределах одного шестидесятеричного разряда, записывались в десятичной системе со значениями знаков  = 1, = 10; например,  означает 35. Если в разряд входит 4 или 5 знаков , обозначающих десятки, то они записывались не подряд, а компактно. Например, запись  означает

$$1\cdot 60^3+16\cdot 60^2+41=273641.$$

Значения знаков  и  изменяются в $60^{\pm k}$ раз в зависимости от того, в каком шестидесятеричном разряде они находятся. Например, запись  вообще означает различные числа: если известно, что она изображает натуральное число в пределах первых двух шестидесятеричных разрядов, то это число $2\cdot 60+35=155$, а если она изображает число между 2 и 3, то это $2+35\cdot 60^{-1}=2\frac{7}{12}$, и т. д. Аналогично, запись  можно прочесть как число $1\cdot 60^2+0\cdot 60+4=3604$, или же как число $1+0\cdot 60^{-1}+4\cdot 60^{-2}=1\frac{1}{900}$, и т. д. Эта неоднозначность чтения записи чисел не вызывает неудобства, если известно, с числами каких разрядов имеют дело. Следуя Нейгебауэру, в современной записи шестидесятеричные разряды отделяют друг от друга запятой, а целую часть от дробной – точкой с запятой; например:

$$2{,}35=2\cdot 60+35=155;$$

$$2{,}35{,}0=2\cdot 60^2+35\cdot 60+0\cdot 1=9300;$$

$$2;35=2+35\cdot 60^{-1}=2\frac{7}{12}.$$

Математические глиняные таблички у вавилонян были двух видов: одни представляли собой таблицы умножения, таблицы обратных величин, квадратов, кубов, квадратных и кубических корней и пр., а другие – задачники, содержащие формулировки и решения задач, или сборники задач без решений. Как видим, уже в древности широко применялся табличный способ задания функциональной зависимости. Об очень высоком уровне искусства вычислений потомков вавилонян в эпоху Селевкидов говорит, например, тот факт, что для потребностей деления тогда была составлена таблица свыше 150 обратных величин вида $\frac{1}{n}$, где числа n имели до шести разрядов, а $\frac{1}{n}$ – иногда до 12 шестидесятеричных разрядов.

Древние вавилоняне рассматривали не квадратные уравнения, а равносильные им системы уравнений, и умели находить положительные их решения по установленным ими правилам. Формул в общем виде для решений системы $\begin{cases} x+y=p, \\ xy=q \end{cases}$, равносильной квадратному уравнению $x^2-px+q=0$, они не приводят, а действуют при конкретных значениях p и q следующим образом. Пусть $x=\frac{p}{2}+z$, $y=\frac{p}{2}-z$, тогда, $x+y=p$, $\left(\frac{p}{2}-z\right)\left(\frac{p}{2}+z\right)=q$, т. е. $\frac{p^2}{4}-z^2=q$, откуда $z=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, следовательно, $x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $y=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

На одной из табличек эпохи Селевкидов решается в шестидесятеричных дробях эта система при $p=2;0,0,33,20$ и $q=1$ и получается ответ $x=1;0,45$, $y=0;59,15,33,20$, что свидетельствует об очень высоком уровне древневавилонской техники вычислений. В [24] указывается ряд примеров решения вавилонянами систем уравнений, приводящихся к квадратным уравнениям. На одной из табличек из эпохи Хаммурапи (XVIII–XVI вв. до н. э.) решается система

$$\begin{cases} xy+x-y=183, \\ x+y=27 \end{cases}$$

(мы записали здесь числа в десятичной системе).

Задавая систему, шумер вместо наших x, y, xy говорит, соответственно, о длине, ширине и площади. С помощью замены $y = v - 2$ исходная система сводится к системе

$$\begin{cases} xv = 210, \\ x + v = 29, \end{cases}$$

т. е. к системе стандартного вида с $p = 29$, $q = 210$ и v вместо y. Далее выполняются вычисления по схеме, приведенной выше, и получается, что $x = 15$, $v = 14$. Следовательно, $x = 15$, $y = 12$. В конце делается проверка подстановкой этих значений x и y в исходную систему [24, с. 87–88].

В качестве еще одного примера приведем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y) - \frac{1}{60}(x-y)^2 = 15, \\ xy = 600. \end{cases}$$

С помощью замены $x = u + v$, $y = u - v$ она сводится к квадратному уравнению для u. Ответ: $x = 30$, $y = 20$ [24, с. 95–96].

Вавилоняне знали формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = = a^2 - b^2$, им была также известна приближенная формула $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ $(a > 0)$ при малых $\frac{b}{a^2}$. Они умели суммировать геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и знали формулу $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n)(1 + 2 + \ldots + n)$.

Что касается геометрии, то древние вавилоняне умели вычислять площадь прямоугольника, треугольника и трапеции, а площадь круга и длину окружности они вычисляли приближенно, заменяя круг правильным вписанным шестиугольником. Они умели вычислять объем призмы и находить приближенно объем цилиндра. А «теорему Пифагора» они знали еще за 1200 лет до Пифагора. Более того, один из клинописных текстов содержит таблицу из пятнадцати наборов трех рациональных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению

$x^2+y^2=z^2$, которые вычислялись по формулам $x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $z=p^2+q^2$. В целом математика древних вавилонян имела ярко выраженный арифметико-алгебраический и прикладной характер.

Древневавилонская вычислительная техника развивалась в тесной связи с астрономией, которая была подчинена астрологии. Планеты обожествлялись и считалось, что они оказывают решающее влияние на судьбы людей. Для составления гороскопов требовалось вычислять расположение планет в определенные моменты времени. Уже с VIII в. до н. э. на протяжении более 5 веков вавилоняне вели регулярные дневниковые записи на глиняных табличках положения Солнца, Луны и планет, а также появления затмений. Систематизировав наблюдения в виде таблиц, они установили периодичность небесных явлений и могли предсказывать затмения. При расчетах положений планет использовалась линейная интерполяция. От вавилонян астрология и астрономия распространились на весь Ближний и Средний Восток, а также в Грецию.

Математика в древнем Египте

Невиданный и поражающий воображение расцвет строительной техники, требовавшей развитых математических знаний, был достигнут в Египте в XXVII–XXVI вв. до н. э. при сооружении гигантских пирамид. Самыми крупными из них являются: пирамида Хеопса (Хуфу) со стороной квадратного основания $a\approx 230$ м и высотой $h\approx 147$ м и Хефрена (Хафра), у которой $a\approx 215$ м и $h\approx 144$ м. Они построены из плотно подогнанных прямоугольных блоков известняка весом обычно в 2–3 тонны, но некоторые блоки весят более 150 тонн.

Дошедшие до нас древнейшие египетские математические тексты написаны на папирусах в эпоху Среднего царства (XX–XVIII вв. до н. э.). Один из таких папирусов находится в Москве. Самым известным и большим является математический папирус из коллекции Райнда (Rhind) в Британском музее, составленный около XVII в. до н. э. писцом Ахмесом в качестве учебника для писцов. В нем содержатся 84 задачи арифметического и геометрического содержания с решениями. Папирусы показывают, что в то время геометрия в Египте была примерно на таком же уровне развития, как и в древнем Вавилоне. Но древние египтяне вычисляли площадь круга более точно. Для этого они брали 8-угольник, который получается, если разделить стороны описанного квадрата на три равные части и соединить точки деления (рис. 1). Площадь этого

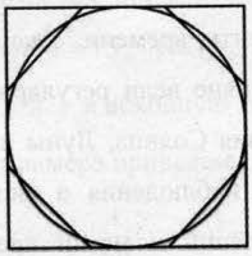


Рис. 1

8-угольника, очевидно, равна $d^2-2\left(\frac{d}{3}\right)^2=\frac{7}{9}d^2=\frac{63}{81}d^2$, где d – диаметр круга.

Затем этот 8-угольник приближенно заменяли квадратом, имеющим площадь $\frac{64}{81}d^2=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, и эту площадь принимали в качестве площади круга. (При этом, как легко видеть, для числа π получается приближение, равное $\left(\frac{16}{9}\right)^2\approx 3{,}16$, с избытком около 0,02.) Высшим достижением древних египтян в геометрии было то, что они уже знали формулу $V=(a^2+ab+b^2)\frac{h}{3}$ для объема правильной усеченной пирамиды с квадратными основаниями, где a и b – длины сторон оснований, h – высота усеченной пирамиды. Вычисление площади круга с помощью 8-угольника содержится и в Московском папирусе (задача 10) и в папирусе Райнда (задача 50), а вычисление объема пирамиды – в Московском папирусе.

Однако техника арифметических вычислений у древних египтян очень сильно уступала древневавилонской. Египтяне пользовались десятичной системой счисления, однако не позиционной, так как единица каждого десятичного разряда имела свое обозначение: 𓏺 – 1, 𓎆 – 10, 𓍢 – 100, 𓆼 – 1000, 𓂭 – 10000 и т. д. Писали чаще всего справа налево; запись, например, 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢 означает 236. Но главная сложность заключалась в том, что, кроме дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, для обозначения которых имелись специальные иероглифы, египтяне использовали исключительно дроби вида $\frac{1}{n}$ (аликвотные дроби). У них не было дробей с числителями и знаменателями, как у нас, а вместо $\frac{1}{n}$ они писали число n со знаком 𓂋 над ним, означавшим «часть». Умножение чисел и, частично, деление основывалось у них на удвоении чисел, в частности дробей. Но дробь вида $\frac{2}{n}$ они понимали не как $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$, так как при таком понимании новое удвоение дало бы $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$ и т. д., что становится неудобным при многократном удвоении. Древние египтяне выражали $\frac{2}{n}$ в виде суммы дробей вида $\frac{1}{k}$ с различными k, для этого были составлены таблицы удвоений дробей. В начале папируса Райнда приведена таблица, в которой дроби вида $\frac{2}{n}$ для нечетных n от 5 до 101 представлены как суммы не более четырех различных дробей вида $\frac{1}{k}$ (аликвотных дробей), например: $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$; $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$; $\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$; $\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$; $\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$ и т. п. Описание техники древнеегипетских вычислений имеется в [24; 25]. Подобные вычисления требовали больших усилий и сообразительности.

Проиллюстрируем технику древнеегипетского деления на простых примерах, взятых из папируса Райнда, при этом используем обозначения вроде $\overline{3}=\frac{1}{3}$, $\overline{\overline{3}}=\frac{2}{3}$. Для древних египтян наше $2:5=\frac{2}{5}$ означало найти, какую долю составляет 2 от 5 в виде суммы аликвотных дробей. Чтобы это получить, параллельно выполнялось деление числа 1 и числа 5=3+2 соответственно на 3 и на 15, вычисления записывались в виде таблички из двух столбцов:

1	5
$\overline{3}$	$1+\overline{\overline{3}}$
$\overline{15}$	$\overline{3}$

Таким образом, число $2=1+\overline{\overline{3}}+\overline{3}$ составляет от числа 5 такую же долю, как $\overline{3}+\overline{15}$ от 1, т. е. $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.

Аналогично, в случае деления 2 на 19=12+4+3 составляем табличку

1	19
/ $\overline{12}$	$1+\overline{3}+\overline{4}$
$\overline{19}$	1
/ $\overline{76}$	$\overline{4}$
/ $\overline{114}$	$\overline{6}$

Здесь $2=(1+\overline{3}+\overline{4})+\overline{4}+\overline{6}$ составляет от 19 такую же долю, как $\overline{12}+\overline{76}+\overline{114}$ от числа 1, т. е. $\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$. Числа, которые нужно взять из таблички, отмечаются наклонной чертой. Заметим, что такое представление, вообще говоря, неоднозначно; в данном примере аналогично можно получить: $\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{57}+\frac{1}{228}$.

Приведем решение задачи из папируса Райнда, состоящей в делении 6 буханок хлеба поровну на 10 человек. Для того составляем табличку

1	10
$\overline{2}$	5
$\overline{10}$	1

Здесь 6=5+1 составляет от 10 такую же долю, как $\overline{2}+\overline{10}$ от 1, т. е. $\frac{6}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$. Таким образом, каждому из 10 человек приходится по $\frac{1}{2}$ буханки и еще по $\frac{1}{10}$ буханки хлеба.

Математика древних Египта, Вавилона и Греции подробно рассмотрена в [24], см. также [1, т. 1] и [25–28].

Математика в древней Греции

Древнюю греко-римскую историю, культуру и науку принято называть античностью. Древнегреческая математика была уникальным явлением в античном мире. Здесь она оформилась как дедуктивная наука и получила глубокое развитие. Идеи, методы и содержание древнегреческой математики оказали решающее влияние на развитие и характер математики средневековья в арабских странах и в Новое время – в Европе. Рассмотрим кратко основные этапы развития математики в древней Греции.

VI век до н. э.

Фалес

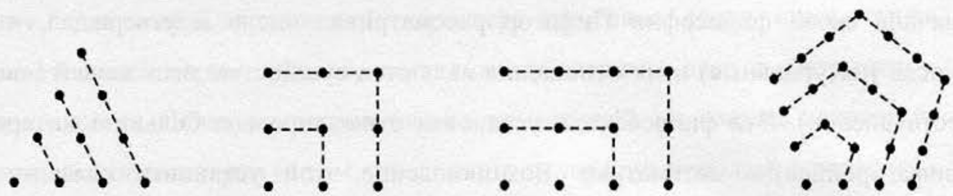
На этот век приходится начальный период развития древнегреческой математики. Ее родоначальником считается математик, астроном и философ **Фалес (ок. 625–547 гг. до н. э.)**, один из «семи мудрецов» древности. Он основал философскую школу в г. Милете в Ионии, т. е. на западном побережье Малой Азии, которое тогда принадлежало грекам. Фалес был знаком с древнеегипетской математикой, так как некоторое время проживал в Египте. Она имела прикладной характер, греческое слово «геометрия» означает «землемерие». Фалес, по-видимому, первым ввел в математику доказательства. Пользуясь наложением и симметрией, он доказал некоторые теоремы из планиметрии (о том, что диаметр делит круг пополам; о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; признак равенства треугольников по стороне и прилегающим к ней углам; о том, что угол, опирающийся на диаметр, – прямой, и др.). В школьных учебниках геометрии имя Фалеса носит теорема: если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне. Идея, состоящая в том, чтобы логически доказывать математические факты, даже наглядно очевидные, была революционной, так как превращала математику из набора эмпирических фактов в дедуктивную науку. Большое впечатление на современников произвел Фалес своим предсказанием солнечного затмения 585 г. до н. э. По-видимому, ему была известна периодичность повторения затмений, которую обнаружили вавилонские астрономы, ведя многолетние записи наблюдений за движением Луны. О Фалесе: [24, с. 119–124].

Пифагор

Одним из наиболее известных греческих мыслителей античного мира является **Пифагор (ок. 580 – ок. 500 гг. до н. э.)**, родившийся на о. Самос вблизи Милета. Он сочетал в себе черты религиозно-этического реформатора и философа, математика и политика. Говорят, что он якобы провел некоторое время в Египте и Вавилоне, где знакомился с математикой и религией. После возвращения основал в греческой колонии на юге Италии в г. Кротоне замкнутую религиозно-этическую общину, члены которой жили в соответствии с многочисленными его предписаниями. Письменных источников от

Пифагора, как и от Фалеса, до нас не дошло, но о философии, образе жизни и математике пифагорейцев позже писал Аристотель и многие другие античные авторы [29; 31]. Согласно этим свидетельствам, в качестве основного начала своей философии Пифагор рассматривал число и утверждал, что числа (натуральные) и их отношения являются сущностью всех вещей («все есть число»). Эта философская установка стимулировала большой интерес пифагорейцев к математике. Возникновение этой установки связывают с открытием Пифагором математических закономерностей для музыкальных интервалов в виде некоторых отношений натуральных чисел (1:2 для октавы, 3:4 для кварты, 2:3 для квинты) и создание на этой основе теории музыки. Это якобы и послужило стимулом для поисков числовых закономерностей в математике, астрономии и других сферах жизни. Пифагор впервые пришел к выводу, что книга природы написана на языке математики. Через 2000 лет эту мысль ярко выразил Галилей (1564–1642). Идея Пифагора о небесной гармонии оказала влияние на немецкого астронома и математика XVII в. И. Кеплера (1572–1630), открывшего законы движения планет. Сам термин «математика» (от греч. $\mu\alpha\theta\eta'\mu\alpha$ – наука, знание) возник у пифагорейцев. По утверждению последователя пифагорейцев Архита, под словом $\mu\alpha\theta\eta'\mu\alpha\tau\alpha$ понимали 4 науки, изучаемые в школе Пифагора: геометрию, арифметику, астрономию и гармонику (теорию музыки). Математика пифагорейцев была составной частью их религии. Они считали, что постижение гармонии мира, выраженной в гармонии чисел, очищает душу и приближает к богам. Пифагорейцы пришли к мнению, что Земля шарообразна, и к мысли о суточном вращении Земли.

По сравнению с современной десятичной системой греческие системы записи чисел с помощью букв алфавита были менее удобными для техники вычислений; обычно числовые вычисления производились на счетной доске. Древние греки стали заниматься теоретическими вопросами арифметики, положив начало теории чисел. Пифагор ставил себе в заслугу то, что он поставил арифметику выше интересов торговца. В школе Пифагора некоторым числам и их свойствам приписывали мистический, магический смысл. Пифагорейцы изображали некоторые числа в виде геометрических конфигураций точек («фигурные» числа):



Треугольное число Четырехугольное число Прямоугольное число Пятиугольное число

Отсюда пифагорейцы приходили к суммированию некоторых арифметических прогрессий (для конкретных значений n):

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2;$$

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1);$$

$$1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1).$$

Пифагор разрабатывал теорию пропорций. Ему были известны средние для чисел a и b: арифметическое $\frac{a+b}{2}$, геометрическое $\sqrt{ab}$ и гармоническое $\frac{2ab}{a+b}$, они связаны, соответственно, с равенствами: $a-c=c-b$, $a:c=c:b$, $\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ (вместо последнего равенства писали пропорцию $(a-c):(c-b)=a:b$).

Пифагорейцы изучали делимость чисел, нашли некоторые совершенные и дружественные числа. Совершенным числом называется натуральное число, равное сумме своих правильных делителей, т. е. делителей, включающих число 1 и меньших самого числа. Например, $6=1+2+3$,

$28=1+2+4+7+14$. Совершенные числа имеют египетское происхождение, связанное с суммированием аликвотных дробей. Например, $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$, откуда получаем: $28=14+7+4+2+1$.

В IV в. до н. э. Евклид доказал теорему: если число 2^n-1 – простое, то число $2^{n-1}(2^n-1)$ – совершенное. Л. Эйлер (1707–1783) доказал, что все четные совершенные числа находятся по теореме Евклида. Таким образом, отыскание четных совершенных чисел сводится к отысканию тех из чисел вида 2^n-1, которые являются простыми, т. е. чисел Мерсенна, названных по имени французского математика XVII в. М. Мерсенна, который доказал простоту 2^n-1 при $n=19$. Древние греки знали 4 совершенных числа: 6, 28, 496 и 8128, теорема Евклида дает их, соответственно, при $n=2,3,5,7$. Дальнейшие совершенные числа получаются при $n=13$ (Региомонтан, XV в.), $n=17$ (Шейбель, XVII в.), $n=19$ (Мерсенн, XVII в.). Только в 1885 г. Зеельгоф нашел следующее совершенное число при $n=61$ с 37 цифрами, не заметив совершенного числа при $n=31$. В XX в. было найдено несколько совершенных чисел уже с применением ЭВМ, например совершенное число $2^{n-1}(2^n-1)$ при $n=86243$ (Д. Славинский, 1979 г.). В настоящее время известно около 30 совершенных чисел. До сих пор остаются нерешенными проблемы: а) конечно или бесконечно множество совершенных чисел; б) существуют ли нечетные совершенные числа (известно, что таковых нет в интервале от 1 до 10^{50}).

Дружественными числами называется пара натуральных чисел, каждое из которых является суммой правильных делителей другого. Пифагору была известна пара дружественных чисел 220 и 284. Число 220 имеет правильные делители 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, их сумма равна 284. А число 284 имеет правильные делители 1, 2, 4, 71, 142, их сумма равна 220. Арабский математик Сабит ибн Корра (836–901), работавший в Багдаде, доказал довольно сложную теорему, позволяющую находить некоторые пары дружественных чисел. Арабский математик Ибн ал-Банна (1256–1321) и французский математик П. Ферма (1601–1665) нашли еще одну пару дружественных чисел: 17296 и 18416, а французский математик Р. Декарт (1596–1650) – пару 9363584 и 9437056. После этого Эйлер в 1747–1750 гг. нашел сразу 59 пар дружественных чисел. С тех пор до XX в. было найдено всего 18 пар дружественных чисел, а затем их отыскание пошло быстрыми темпами: бельгиец Пуле в 1929–1948 гг. нашел 108 таких пар, американец Эскотт в 1946 г. – 219 пар, а американец Ли уже с применением ЭВМ в 1968–1972 гг. нашел 390 пар дружественных чисел. В настоящее время известно более 1000 пар дружественных чисел. Укажем на нерешенные проблемы: а) конечно или бесконечно множество пар дружественных чисел; б) неизвестна формула или теорема, позволяющая получать все дружественные числа. Подробнее об увлекательной истории поисков совершенных чисел и дружественых чисел см. в статье В. Боро в [32], а также в гл. 28 «Краткий трактат о бесполезной красоте совершенных чисел» в сборнике американского математика М. Гарднера «Математические новеллы». – М.: Мир, 1974.

В геометрии Пифагору приписывают открытие теоремы, которая носит его имя и утверждает, что в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. По-видимому, он нашел и с помощью вычислений доказал эту известную еще древним вавилонянам и египтянам теорему, которые непосредственно могли убедиться в ее справедливости, например, из рис. 2, где в квадрате расположены двумя способами

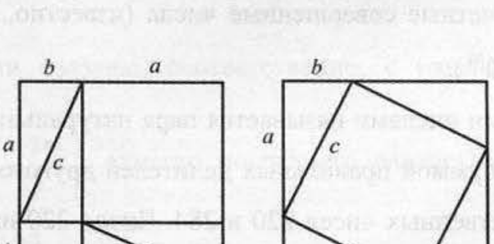


Рис. 2

4 прямоугольных треугольника с катетами a, b и гипотенузой c, откуда видно, что $a^2+b^2=c^2$.

В схолии (примечании к тексту) к 13-й книге «Начал» Евклида, написанных в конце IV в. до н. э., говорится, что в школе Пифагора знали только три правильных многогранника из пяти: куб, тетраэдр и додекаэдр. То, что пифагорейцы открыли додекаэдр (правильный 12-гранник), вполне вероятно, так как при раскопках вблизи Падуи (на севере Италии, где жили этруски) была обнаружена модель додекаэдра, которая датируется временем ранее 500 г. до н. э. Грани додекаэдра являются правильными пятиугольниками, а диагонали такого многоугольника образуют остроконечную пятиугольную звезду. Она служила у пифагорейцев символом здоровья и их опознавательным знаком.

Самой большой заслугой пифагорейцев считают открытие того факта, что сторона и диагональ квадрата несоизмеримы, т. е. открытие иррациональности $\sqrt{2}$. Вопреки философской установке Пифагора оказалось, что не все в мире поддается описанию с помощью натуральных чисел и их отношений – положительных рациональных чисел.

Некоторое время члены пифагорейской общины, занимавшиеся наукой, сохраняли свои открытия в тайне от непосвященных. Греческий философ-неоплатоник Ямвлих (Ямблих), живший во II–III вв. н. э. в Сирии, написал несколько сочинений о секте пифагорейцев. В частности, он говорит: «Как сообщают, к тому, кто первым открыл недостойным посвящения в учения природу соизмеримости и несоизмеримости, [пифагорейцы] прониклись такой ненавистью и отвращением, что не только изгнали его из своего общества и общежития, но и соорудили ему гробницу в знак того, что они считают своего бывшего товарища ушедшим из жизни. Другие говорят, что само божество разгневалось на того, кто разгласил учение Пифагора: дескать, тот, кто выдал конструкцию… додекаэдра, одной из так называемых телесных фигур, [и показал], что она вписывается в сферу, погиб в море как нечестивец. Некоторые же утверждали, что это случилось с тем, кто разгласил учение об иррациональности и несоизмеримости» [29, с. 152].

В конце VI в. до н. э. заговор против пифагорейцев положил конец существованию пифагорейской общины в Кротоне. Последователи Пифагора перебрались на материковую Грецию и продолжали свою деятельность и в следующем веке. О Пифагоре и его школе: [31; 24, с. 127–154; 29, с. 138–155, с. 468–505].

V век до н. э.

«Золотым веком» древнегреческой цивилизации называют V век до н.э. – время высокой классики, просвещения и рационализма. Это эпоха расцвета демократических Афин, в частности под руководством Перикла. В этом веке жили знаменитые историк Геродот, скульптор Фидий, великие трагики Эсхил, Софокл и Еврипид, философы Сократ, Демокрит и Зенон Элейский, математики Гиппократ Хиосский и Феодор, медик Гиппократ. В этом же веке в Афинах был построен величественный храм Парфенон – шедевр древнегреческой архитектуры.

В математике в это время осуществляется переход к геометрической алгебре и разработка планиметрии, были поставлены три знаменитые задачи древности, возникла идея находить площадь круга с помощью бесконечной последовательности вписанных многоугольников, обнаружены затруднения при описании движения. Рассмотрим кратко эти вопросы.

Пифагореец **Феодор из Кирены (V в. до н. э.)**, один из учителей Платона, занимался математикой, астрономией и теорией музыки. Он начал разрабатывать теорию иррациональных величин, в частности, доказал иррациональность $\sqrt{n}$ для тех $n = 3, 5, 6, \ldots, 17$, которые не являются квадратами. Об этом говорится в диалоге Платона «Теэтет», происходящем якобы между Сократом и молодым, талантливым учеником Феодора Теэтетом, который жил в IV в. до н. э. и создал первую теорию иррациональностей. В диалоге Платона сообщается, что после открытия Феодором иррациональных величин греки перешли к геометрическому представлению чисел. О Феодоре: [24, с. 197–202].

О том, что иррациональные числа не сразу стали рассматриваться как настоящие числа, говорит и то, что латинский термин «иррациональное», сперва означавший «не отношение» (целых чисел), приобрел также смысл «неразумный». Древние вавилоняне не задумывались над тем, например, что такое $\sqrt{2}$, а довольствовались его приближениями. Древние греки, будучи не в состоянии строго обосновать иррациональности с помощью рациональных чисел (строгая теория действительных чисел была построена лишь в XIX веке), не стали рассматривать иррациональности как числа. Для них уравнение $x^2=2$ было не разрешимо в числах (рациональных), но разрешимо с помощью отрезка – диагонали единичного квадрата. Это и позволило грекам построить весьма строгую геометрическую теорию величин, включая и иррациональные, в которой в качестве величин рассматривались отрезки, прямоугольники, параллелепипеды. При этом складывать и вычитать разрешалось лишь величины одинаковой размерности. Произведение ab отрезков a и b как величин означало прямоугольник, построенный на этих отрезках. Решить уравнение означало указать способ построения его решения в виде некоторого отрезка. При этом в качестве допустимых средств построения принимались: линейка (без мерных делений) и циркуль. Например, задача о решении уравнения $x^2+px=ab$ на языке геометрической алгебры означает построение такого отрезка x, чтобы квадрат со стороной x и прямоугольник со сторонами p и x имели вместе заданную площадь ab (по тогдашней терминологии – чтобы «избыток» над прямоугольником был квадратом). Для решения задачи рассматривали прямоугольник $ABCD$ со сторонами $x+p$ и x и квадрат $EGCN$ со стороной $x+\dfrac{p}{2}$ (рис. 3). Тогда $S_{ABCD}=S_{EGCN}-S_{EFLK}$, то есть $(x+p)x=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$, откуда в силу исходного уравнения получается $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2=\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+ab$. Таким образом, $x+\dfrac{p}{2}$ – гипотенуза прямоугольного

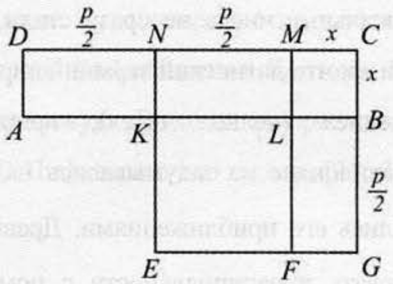


Рис. 3

треугольника с катетами $\frac{p}{2}$ и $\sqrt{ab}$. Эти катеты можно построить с помощью циркуля и линейки. Вычитая из гипотенузы отрезок $\frac{p}{2}$, получаем искомый отрезок x. Отрицательный корень не рассматривается, так как у древних греков вплоть до III в. н. э. не было отрицательных величин.

Гиппократ Хиосский

В V в. до н. э. наиболее известным математиком был **Гиппократ Хиосский**. Он жил во второй половине этого века на о. Хиос в Эгейском море, недалеко от побережья Малой Азии. (Не следует путать этого математика с его современником Гиппократом, «отцом медицины», который жил на о. Кос, находящемся в Эгейском море.) Считают, что Гиппократ был автором первого систематического руководства по планиметрии («Начала»), которое до нас не дошло, но, как полагают, составило материал для первых четырех книг (т. е. глав) «Начал» Евклида, написанных век спустя. Для нас Гиппократ наиболее известен тем, что ему удалось квадрировать (найти площадь) некоторых луночек, ограниченных дугами окружностей. О нем: [24, с. 183–190; 69, с. 385].

Три знаменитые задачи древности

В V веке до н. э. греки поставили три знаменитые задачи древности: об удвоении куба, о трисекции угла и о квадратуре круга [33; 34]. Нужное построение требовалось выполнить с помощью линейки без мерных делений и циркуля (по точному выражению древних греков – «посредством прямых и окружностей»). В задаче об удвоении куба требовалось построить ребро куба, имеющего объем в два раза больший, чем у данного куба. В задаче о трисекции угла нужно было разделить произвольный острый угол на три равные части. В задаче о квадратуре круга требовалось построить квадрат, равновеликий данному кругу. До XIX в. продолжались многочисленные попытки решить эти задачи, пока не было доказано, что они неразрешимы с помощью линейки и циркуля. Эти попытки стимулировали развитие математики. Поскольку решить эти задачи с помощью линейки и циркуля не удавалось, то, начиная с V в. до н. э., был предложен ряд интересных и остроумных способов их решения с помощью иных вспомогательных средств. При этом были открыты некоторые новые кривые и изобретены приспособления для их вычерчивания.

Рассмотрим более подробно эти знаменитые задачи древности.

а) *Задача об удвоении куба* представляет собой задачу построения решения кубического уравнения $x^3 = 2a^3$, где a – ребро исходного куба, т. е. сводится к построению отрезка $x = a\sqrt[3]{2}$. Гиппократ свел эту задачу к планиметрической задаче о нахождении двух средних пропорциональных («вставок») x и y между a и $2a$, то есть отрезков x и y, удовлетворяющих пропорциям $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Легко видеть, что отсюда получается $x = a\sqrt[3]{2}$. Век спустя греческий философ Платон якобы предложил механизм для отыскания «вставок», состоящий из двух П-образных плотничих наугольников. Пифагореец Архит привел удивительно остроумное построение «вставок» с помощью пересечения кругового конуса, кругового цилиндра и вырожденного тора. По поводу решения Архита ван дер Варден пишет: «Разве это не замечательно? Архита должно быть осенило некое поистине божественное вдохновение, когда он нашел это построение» [24, с. 210]. Тогда же, в IV в. до н. э., греческий математик и астроном Менехм для решения задачи об удвоении куба использовал параболы и гиперболы, открыв в связи с этой задачей конические сечения (кривые второго порядка). В III в. до н. э. греческий ученый Эратосфен для механического построения «вставок» предложил прибор под названием «мезолябий», состоящий из трех равных прямоугольных треугольников (два из которых подвижные), расположенных между двумя рейками. Предлагались и другие решения.

б) *Задачу о трисекции угла*, т. е. о делении произвольного острого угла на три равные части, греческий математик **Гиппий из Элиды (V в. до н. э.)** решил с помощью открытой им кривой механического происхождения, которая позже была названа квадратрисой. Она определяется следующим образом (рис. 4). Пусть сторона OC квадрата $OABC$, как подвижный радиус,

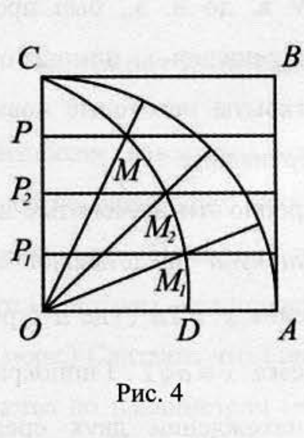


Рис. 4

равномерно вращается вокруг точки O до совмещения со стороной OA. За то же время пусть сторона CB равномерно перемещается, оставаясь параллельной ее исходному положению, до совмещения со стороной OA. Геометрическое место точек пересечений этих движущихся отрезков называется квадратрисой. Это первая в истории математики трансцендентная (т. е. неалгебраическая) кривая. Из определения квадратрисы вытекает следующее ее свойство: равным частям отрезка OC отвечают равные углы между соответствующими подвижными радиусами. Пусть квадратриса CD задана (ее можно построить с помощью механического прибора). Для трисекции угла AOM делаем следующие построения с помощью циркуля и линейки: проводим $PM \perp OC$, делим отрезок OP на три равные части точками P_1, P_2 и проводим перпендикуляры P_1M_1 и P_2M_2 к OC. Тогда по свойству квадратрисы углы AOM_1, M_1OM_2 и M_2OM равны, так как они соответствуют равным отрезкам OP_1, P_1P_2, P_2P. В III в. до н. э. задачу о трисекции угла решил Архимед при помощи линейки с двумя отметками на ней и циркуля. Предлагались ее решения и с помощью иных средств. В средние века арабскими математиками было замечено, что задача о трисекции угла сводится к построению корня кубического уравнения $4x^3 - 3x = a$, которое вытекает из формулы $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$, а построение корней кубических уравнений осуществляется с помощью конических сечений. И только в 1837 г. французский математик **П. Ванцель (1814–1848)** доказал, что задачи об удвоении куба и о трисекции угла неразрешимы с помощью циркуля и линейки вследствие неразрешимости соответствующих кубических уравнений в квадратных радикалах.

в) *Задача о квадратуре круга*, т. е. о построении квадрата, равновеликого данному кругу, заключается в том, чтобы с помощью циркуля и линейки построить отрезок $x = R\sqrt{\pi}$, дающий решение уравнения $x^2 = \pi R^2$, где R – радиус круга. Надежда на то, что удастся найти решение задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки, появилась после того, как Гиппократ Хиосский квадрировал некоторые луночки, образованные дугами окружностей, аналогичные той, которая изображена на рис. 5. Здесь ABC – треугольник с равными катетами AB и BC, точка O – середина его гипотенузы, BDC – дуга окружности с центром в точке A, BEC – с центром в точке O. Оказывается, что площадь луночки $BDCE$ равна площади треугольника ABC. Луночки Гиппократа были исторически первыми из криволинейных фигур, которые удалось точно квадрировать,

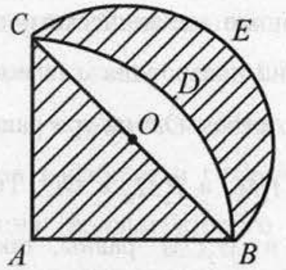


Рис. 5

т. е. найти их площадь. С тех пор и до XIX в. большое число «квадратуристов» пыталось решить задачу о квадратуре круга (см. книгу [53]). И только в 1882 г. немецкий математик **Ф. Линдеман (1852–1939)** доказал, что число π – трансцендентное, т. е. оно не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, а это означает, что квадратура круга с помощью циркуля и линейки невозможна. Она возможна с помощью иных средств. В IV в. до н. э. греческий математик Динострат решил ее с помощью квадратрисы Гиппия (отсюда происходит и название этой кривой). На решении Динострата мы еще остановимся, рассматривая математику IV в. до н. э. Подробнее о трех знаменитых задачах древности см. в [33; 34; 24, с. 194–226; 53].

К древности восходит и идея приближенного вычисления площади круга с помощью аппроксимации его многоугольниками. Древние вавилоняне приближали круг с помощью вписанного в него правильного 6-угольника. Древние египтяне заменяли круг невписанным 8-угольником, дающим хорошее приближение (рис. 1).

Греческий философ-софист **Антифонт (Антифон)** во второй половине V в. до н. э. предложил вписывать в круг правильные многоугольники, начиная с квадрата и удваивая с каждым шагом число сторон. При этом он считал, что решил задачу о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки, так как любой правильный многоугольник можно превратить в квадрат, используя только циркуль и линейку, а круг «исчерпывается» многоугольниками. Древние греки справедливо не признали решение Антифонта точным. Но метод вычисления площади круга с помощью аппроксимации его многоугольниками был важным шагом на пути к возникновению интегрального исчисления, элементы которого были развиты в III в. до н. э. величайшим греческим математиком и механиком Архимедом.

Зенон

Греческие философы в V в. до н. э. уже обсуждают вопросы, связанные с понятиями движения и континуума, при этом обнаруживаются большие трудности, возникающие при их описании. Древнегреческий философ **Зенон (ок. 490 – ок. 430 гг. до н. э.)** жил в греческом городе Элея в Италии и был учеником философа Парменида, утверждавшего, что в сфере истинного знания («сущего») все однозначно и неизменно, а множественным и переменчивым бытие является лишь в сфере чувственного восприятия («мнения»). Зенон выдвинул 40 «апорий», т. е. парадоксов, из которых до нас дошло менее десяти в основном в комментариях Аристотеля и Симпликия. Некоторые из них связаны с использованием бесконечного числа отрезков пути и отрезков времени при описании движения. Это первая в истории математики и философии попытка осмыслить затруднения, возникающие при описании движения.

Наиболее известными из его апорий являются «Дихотомия» (деление пополам) и «Ахиллес и черепаха». Содержание «Дихотомии» заключается в том, что тело, движущееся по отрезку прямой, прежде чем пройдет его до конца, должно пройти середину отрезка, а до этого – середину первой половины отрезка и т. д. А так как этот процесс деления отрезка продолжается потенциально бесконечно, то тело не сможет начать двигаться, следовательно, движения нет.

В апории «Ахиллес и черепаха» Зенон утверждает, что быстроногий Ахиллес не догонит черепаху, так как пока он добежит до места, из которого начала двигаться черепаха, она уползет вперед на какой-то, хотя и небольшой, отрезок пути. А за время преодоления Ахиллесом этого отрезка черепаха еще уползет вперед на какой-то новый отрезок, и т. д. Таких разделяющих Ахиллеса и черепаху отрезков, хотя и уменьшающихся по величине, будет бесконечно много, поэтому Ахиллес не догонит черепаху. Конкретно: пусть в начальный момент движения черепаха находится впереди Ахиллеса на расстоянии $a=1$, например 1 км, и Ахиллес бежит в $k=100$ раз быстрее черепахи. Когда Ахиллес пробежит расстояние 1, черепаха проползет расстояние $\frac{1}{k}$. А когда Ахоллес продвинется еще на $\frac{1}{k}$, то черепаха – на $\frac{1}{k^2}$, и т. д. Этот процесс повторяется бесконечно.

Эти парадоксы заключаются в том, что трудно себе представить бесконечную последовательность точек (и моментов времени) как уже завершенную совокупность, т. е. как актуальную бесконечность. С современной математической точки зрения парадокс «Дихотомия» решается рассмотрением ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$, а «Ахиллес и черепаха» (при $a=1$ и $k=100$) – ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{100^n}=1+\frac{1}{99}$. На математическом языке во время Зенона невозможно было строго обосновать тот факт, что сумма бесконечного числа слагаемых может оказаться конечной.

Теория пределов позволяет нам хотя и абстрактно, но логически строго описывать завершение сходящихся бесконечных процессов. Путем математической абстракции мы отвлекаемся от невозможности осуществления на практике счетного числа операций. Немецкий математик и физик Г. Вейль (1885–1955) привел пример к «Дихотомии»: представим себе вычислительную машину, которая выполняла бы первую операцию в $\frac{1}{2}$ минуты, вторую – в $\frac{1}{4}$ минуты, третью – в $\frac{1}{8}$ минуты и т. д. Такая машина должна к концу первой минуты «пересчитать» весь натуральный ряд (написать, например, счетное число единиц). Ясно, что работа над конструкцией такой машины обречена на неудачу [9, с. 237; 1, т. 1, с. 90]. Но смысл апорий не исчерпывается суммированием прогрессий, так как остаются еще вопросы о том, обладает ли пространство и время свойством бесконечной делимости, можно ли рассматривать континуум как совокупность точек и в каком смысле. Проблемы континуума приобрели особую актуальность в XX в. в связи с теорией множеств и квантовой физикой.

Д. Гильберт и П. Бернайс в книге «Основания математики» (М.: Наука, 1979, с. 40–41) пишут: «Обычно этот парадокс (т. е. «Дихотомию») пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временны́х интервалов все-таки сходится и, таким образом, дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить, … на самом деле все-таки должна завершиться». И далее: «на самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математическое пространственно-временно́е представление о движении является физически осмысленным также и в случае произвольно малых пространственных и временны́х интервалов. Более того, у нас есть все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты, взятые из определенной области опыта, а именно из области движений в пределах того порядка величин, который еще доступен нашему наблюдению…».

Апории Зенона на протяжении веков интересовали математиков и философов, проникли даже в художественную литературу. У А. С. Пушкина есть стихотворение, которое начинается так:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.

Л. Н. Толстой в «Войне и мире» (в начале 3-й части 3-го тома) приводит парадокс об Ахиллесе и черепахе и объясняет противоречие тем, что «произвольно были допущены прерывные единицы движения, тогда как движение и Ахиллеса и черепахи совершалось непрерывно». О Зеноне: [1, т.1, с. 89–93].

Демокрит

У истоков математического анализа стоит древнегреческий философ-материалист **Демокрит (ок. 460 – ок. 370 гг. до н. э.)**. Он развил идею своего учителя Левкиппа о том, что материя состоит из мельчайших неделимых частиц – атомов. Из сочинений Демокрита до нас дошли только их названия и отдельные цитаты у более поздних авторов. Они дают основание полагать, что геометрические тела он представлял себе, как состоящие из огромного числа параллельных слоев толщиной в атом. Возможно, исходя из таких представлений, Демокрит получил без строгого доказательства, что пирамида составляет третью часть призмы с теми же основаниями и высотой, а конус – третью часть цилиндра с теми же основаниями и высотой. Идея о том, чтобы разбивать фигуры на узкие полоски и тонкие слои оказалась очень плодотворной для возникновения интегрального исчисления. О Демокрите: [24, с. 192–193; 1, т. 1, с. 93–94].

«Золотой век» в Греции закончился поражением Афин в Пелопоннесской войне со Спартой, вместо рабовладельческой демократии установился режим олигархии (т. е. правление узкой группы наиболее богатых лиц).

IV век до н. э.

Платон и Аристотель

Политическая обстановка в Греции в этом веке характеризуется возрождением тирании и завоевательными походами Александра Македонского. И тем не менее, это век невиданного расцвета философии и науки, век Платона и Аристотеля, Евдокса и Евклида. Ученик Сократа, философ-идеалист **Платон (427–347 гг. до н. э.)** около 377 г. до н. э. основал в Афинах философскую школу – Академию. Не будучи сам математиком, он, однако, придавал математике первостепенное значение в образовании будущих философов. На дверях Академии была надпись: «Пусть не знающий геометрии не входит сюда». В его философской школе был полностью осознан абстрактный характер математических понятий, принято было давать им четкие определения и искать строгие доказательства, используя анализ и синтез. Было разработано понятие о геометрическом месте точек.

Учеником Платона был выдающийся греческий философ, логик и ученый-энциклопедист **Аристотель (384–322 гг. до н. э.)**, родившийся в г. Стагире в Македонии. Он 20 лет провел в Академии Платона, сначала в качестве слушателя, а затем – преподавателя. Несколько лет путешествовал, был воспитателем будущего царя Александра Македонского, а затем создал в Афинах свою философскую школу – Ликей, или школу перипатетиков. Многие из его произведений дошли до нашего времени. Его философия имела доминирующее влияние в христианских странах в XIII–XVI вв. По объему и детальности разработки главное значение в его философии занимает «физическая философия», т. е. наука о природе, имевшая в то время в основном умозрительный характер.

Огромное значение для математики имеет тот факт, что Аристотель дал первое систематическое построение логики (он называл ее «аналитикой») в ряде книг, входящих в свод его логических сочинений «Органон». Здесь в «Первой аналитике» он определил понятия высказывания, силлогизма, дал классификацию силлогизмов, а во «Второй аналитике» изложил теорию доказательств (силлогистику) в виде полуформального аксиоматико-дедуктивного метода (его «Аналитики» переведены и на русский язык).

Древнегреческие философы, в частности Аристотель, уделяли внимание обсуждению вопросов, связанных с понятиями бесконечности, непрерывного и дискретного. Уже тогда начали различать потенциальную и актуальную бесконечности. Потенциальная бесконечность – это бесконечные множества (совокупности) объектов как незавершенные, находящиеся в процессе построения, становления. Актуальная (завершенная) бесконечность – это бесконечные множества объектов, существующих одновременно, заданных сразу, независимо от процесса их построения. Аристотель не признавал актуальной бесконечности, так как если считать, что линия, поверхность, тело – это множества точек, то возникает парадокс: конечные части фигур имеют положительную меру, а состоят из точек, не имеющих меры. Страстная полемика вокруг этого парадокса продолжалась от античности до недавнего времени, но не преодолела его. Аристотель избегает этого парадокса следующим образом: он не представляет линии, поверхности, тела как состоящие из точек, а рассматривает их только как «места», где можно брать или отмечать точки (отсюда происходит термин «геометрическое место точек», которое в настоящее время является синонимом «множества точек» в геометрии). Он считает, что «непрерывное» (т. е. континуум) состоит из бесконечного числа частей, но «не в действительности, а в возможности», т. е. в смысле потенциальной бесконечности как возможности получения сколь угодно большого числа таких частей. В современной элементарной геометрии воздерживаются от высказывания, что геометрические фигуры суть множества точек. Об Аристотеле: [35].

Из древнегреческих математиков IV в. до н. э. большую роль в развитии геометрии сыграли Архит и Теэтет. Но особенно велики заслуги Евдокса как одного из предшественников возникновения математического анализа и Евклида как создателя систематического курса всей древнегреческой математики к концу IV в. до н. э. – знаменитой книги «Начала». Из учеников Евдокса известны братья Менехм и Динострат.

Архит и Теэтет

Архит (ок. 428 – ок. 365 гг. до н. э.) жил в г. Таренте – в греческой колонии на юге Италии. Он был главой лиги итальянских городов и 7 раз избирался стратегом (полководцем). Кроме того, он много занимался математикой, астрономией, музыкой и механикой, дружил с Платоном. Будучи последователем пифагорейцев, Архит развил теорию чисел и числовых пропорций – рациональных чисел. Ему были известны формулы вида

$x=\frac{1}{2}(m^2-1)$, $y=m$, $z=\frac{1}{2}(m^2+1)$ для отыскания так называемых «пифагоровых троек» рациональных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=z^2$. Кроме того, ему принадлежит очень остроумное и глубокое стереометрическое решение задачи об удвоении куба с помощью пересечения цилиндра, конуса и вырожденного тора. В древности Архита считали наиболее крупным математическим теоретиком музыки. Известно, что он первым из древних греков много занимался механикой. Об Архите: [24, с. 155–160, с. 208–212].

Теэтет (ок. 410 – ок. 369 гг. до н. э.) жил а Афинах, учился у Феодора, а затем у Платона, погиб на поле боя. О нем известно из одноименного диалога Платона. Теэтет дал очень глубокую и сложную геометрическую теорию иррациональных величин. Позже ее обработал и изложил Евклид в X книге своих «Начал». Другим важным вкладом Теэтета в математику является разработка теории пяти правильных многогранников, она изложена в XIII книге «Начал» Евклида. Теэтету приписывают открытие икосаэдра (двадцатигранника). О Теэтете: [24, с. 227–230, с. 239–243].

Евдокс

Многие математические понятия, особенно относящиеся к математическому анализу (действительное число, функция, предел, бесконечно малая, интеграл), прошли более чем двухтысячелетний период развития. Как известно, в основе математического анализа лежат теория действительных чисел и теория пределов. Первый крупный вклад в разработку этих понятий внес выдающийся древнегреческий математик и астроном **Евдокс (ок. 408 – ок. 355 гг. до н. э.)**. Он родился в г. Книде в Малой Азии, изучал математику у Архита в Таренте, философию в школе Платона в Афинах, 13 лет провел у жрецов в Египте, а затем в г. Кизике на берегу Мраморного моря основал школу. В истории математики Евдокс является первым «аналитиком».

Древние греки отказались присоединять к системе рациональных чисел иррациональные числа как в силу пифагорейской традиции, так и из-за трудностей их логического обоснования. В построенной ими геометрической алгебре роль действительного числа играло отношение величин, при этом роль иррационального числа выполняло отношение несоизмеримых величин. В геометрической алгебре отношения $\frac{a}{b}$ составлялись из однородных величин: отрезков прямых или дуг окружностей, углов, плоских фигур, тел. Натуральные числа n здесь обычно выступали в роли кратности величин (na – величина, кратная величине a), но их изображали и отрезками, кратными единичного. Одной из аксиом отношения величин была следующая: «величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга», т. е. для любых величин a и b существуют натуральные числа n и m такие, что $na > b$ и $mb > a$. В настоящее время величины, удовлетворяющие этому определению, называются архимедовыми. Однако теория отношений величин была построена не сразу, и в этом смысле говорят о кризисе греческой математики, который продолжался более века после открытия иррациональных чисел. Заслуга преодоления этого кризиса принадлежит Евдоксу. Его теория отношений величин – это шедевр древнегреческой математики. Труды Евдокса до нас не дошли, но некоторые древнегреческие математики говорят, что Евклид (живший несколько позже Евдокса) включил общую теорию пропорций (равенств отношений величин) Евдокса после соответствующей переработки в книгу V своих «Начал».

В теории Евдокса (в книге V «Начал» Евклида) равенство отношений величин a,b и c,d вводится через сравнения соответствующих кратных этих величин: говорят, что $a:b = c:d$, если для любых натуральных m и n выполняются условия:

1) либо $ma > nb$ и $mc > nd$,
2) либо $ma = nb$ и $mc = nd$,
3) либо $ma < nb$ и $mc < nd$

(в тексте «Начал» это выражено в словесном виде). Ван дер Варден [24, с. 250] пишет: «Это удивительное определение… позволяет Евдоксу мастерски и в полной общности развить теорию пропорциональности для произвольных величин».

Строгая теория действительных чисел была создана (и даже в трех вариантах) немецкими математиками Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором лишь во второй половине XIX в. Оказывается, что теория отношений Евдокса во многом аналогична тому варианту теории действительных чисел, который был построен Р. Дедекиндом и опубликован в 1872 г. Дедекинд определял действительные числа с помощью сечений множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел $\frac{m}{n}$, то есть разбиений множества рациональных чисел на два непустых непересекающихся класса A и B таких, что любой элемент класса A меньше любого из элементов класса B. По существу, из теории отношений Евдокса вытекает, что каждая пара величин a и b, участвующих в отношении $a:b$, разбивает пары натуральных чисел m и n (т. е. положительных рациональных чисел $\frac{m}{n}$) на два класса: те пары (m,n), для которых $ma > nb$, можно отнести в один класс, а в другой – те пары (m,n), для которых $ma < nb$. Если существует пара (m_0,n_0), для которой $m_0a = n_0b$, то ее можно отнести в любой из указанных выше классов. Но теория Евдокса не эквивалентна теории Дедекинда как в силу особенностей геометрической алгебры, так и ввиду отсутствия введенной Дедекиндом аксиомы полноты (непрерывности) множества действительных чисел, согласно которой любое сечение множества рациональных чисел определяет действительное число. У Евдокса отношение величин производит сечение рациональных чисел (пар натуральных чисел), но ниоткуда не следует, что произвольному сечению множества рациональных чисел будет соответствовать пара величин a, b, определяющая отношение $a:b$.

Фундаментальным понятием математического анализа является понятие предела. Впервые в строгом виде предельный переход (для некоторых последовательностей геометрических величин) используется в «методе исчерпывания» – еще одном шедевре античной математики, создание которого Архимед приписывает Евдоксу. Этот метод, изложенный в XII книге «Начал» Евклида, сыграл большую роль в возникновении интегрального исчисления. Из нескольких разновидностей этого метода опишем кратко типичную схему его применения для вычисления площадей (объемов) криволинейных фигур с помощью вписанных в фигуру и описанных вокруг нее простейших фигур с известными площадями (объемами). При этом заранее нужно было знать предполагаемое значение площади (объема) фигуры, которое получали из каких-либо нестрогих соображений. По методу исчерпывания доказывалась единственность решения, а именно, что искомое решение не больше и не меньше предполагаемого. Метод основан на приведенной в X книге «Начал» Евклида следующей лемме Евдокса: если даны две неравные величины a и b $(0 < b < a)$ и из большей величины вычитается часть, большая ее половины, а из остатка – снова часть, большая его половины и т. д., то после некоторого числа шагов останется величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин. Другими словами, это означает, что после некоторого числа шагов получится остаток α_n такой, что $0 < \alpha_n < \dfrac{a}{2^n} < b$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Таким образом, в этой лемме в неявной форме, по существу, речь идет о пределе последовательности $\dfrac{a}{2^n}$ на языке неравенств. Но общее понятие предела тогда введено не было. Эта лемма выводилась из «аксиомы Архимеда»: если $0 < A < B$, то найдется такое натуральное n, что $nA > B$. Присвоение имени Архимеда этой аксиоме исторически неоправданно, так как Архимед жил после Евдокса и Евклида и сам приписывает ее Евдоксу.

Не имея понятия предела и теорем о пределах, древние греки, например, при вычислении площади криволинейной фигуры по методу исчерпывания действовали следующим образом. Строились две монотонные последовательности P_n, Q_n – площади вписанных в фигуру и описанных многоугольников таких, что $P_n < S < Q_n$ для любого n, где S – заранее известное предполагаемое значение площади фигуры, причем P_n и Q_n сколь угодно мало отличаются от S (здесь и далее – наши обозначения). Искомое значение X площади фигуры также удовлетворяет неравенствам $P_n < X < Q_n$. Равенство $X = S$ доказывалось двойным рассуждением от противного. Если $X > S$, то $X - S > 0$ и по лемме будет $X - P_n < X - S$ при некотором n, откуда $P_n > S$, вопреки предположению. Обратно, допустим, что $X < S$, тогда $S - X > 0$ и по лемме $Q_n - X < S - X$, откуда $Q_n < S$ при некотором n, вопреки предположению. Подобное двойное рассуждение от противного использовалось в каждой из решаемых по этому методу задач. Термин «метод исчерпывания» (довольно неудачный) появился в XVII в., а древние греки называли этот метод «апагогическим доказательством». Нестрогость заключалась в том, что в древности не давали определений понятиям площади, объема для криволинейных фигур. Соответствующие строгие определения появились лишь в XIX в. Своим методом Евдокс доказал теоремы о вычислении объемов пирамиды и конуса, которые ранее получил Демокрит нестрогими рассуждениями. Об этом упоминает Архимед, который век спустя использовал метод исчерпывания для обоснования своих многочисленных результатов вычисления площадей и объемов фигур. В течение более чем 2000 лет этот метод считался образцом строгого доказательства.

В свое время Евдокс был хорошо известен и как астроном. Он построил замечательную модель геоцентрической планетной системы (см. ниже с. 76–77). О Евдоксе: [24, с. 243–261; 1, т. 1, с. 94–102].

Менехм

Древнегреческий математик и астроном **Менехм (IV в. до н. э.)**, ученик Евдокса, открыл конические сечения и решил задачу об удвоении куба с помощью двух парабол, а также с помощью параболы и гиперболы. Действительно, легко видеть, что как из системы $\begin{cases} x^2 = ay, \\ y^2 = 2ax \end{cases}$, так и из системы

$\begin{cases} x^2 = ay, \\ xy = 2a^2 \end{cases}$, следует, что $x^3 = 2a^3$. Термины «парабола», «гипербола» и «эллипс» были введены в III в. до н. э. знаменитым древнегреческим геометром Аполлонием, о котором речь будет позже. Менехм называет их, соответственно, сечениями прямоугольного, тупоугольного и остроугольного конусов, рассматривая сечения конусов вращения плоскостью, перпендикулярной к их образующей. Ему были известны уравнения конических сечений в виде равенств площадей некоторых прямоугольников, построенных на отрезках, связанных с этими кривыми.

Предполагают, что, например, уравнение параболы выводилось следующим образом (рис. 6). Пусть AOB – осевое сечение прямоугольного

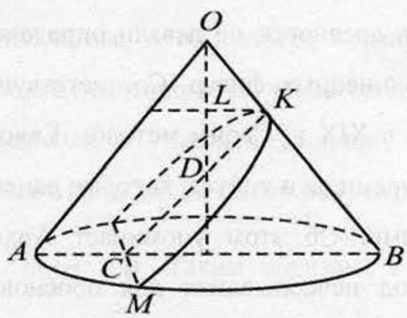


Рис. 6

кругового конуса, тогда $\angle AOB = \dfrac{\pi}{2}$. Через точку K образующей конуса проведем сечение его плоскостью, перпендикулярной к образующей. По свойству окружности $MC^2 = AC \cdot BC$. Но $AC^2 = 4LK^2 = 2DK^2$, $BC^2 = 2CK^2$. Следовательно, $MC^2 = 2DK \cdot CK$, это и есть уравнение (древнегреческий термин – «симптом», т. е. признак) параболы. В привычных для нас обозначениях, введенных Декартом в XVII в., его можно записать в виде $y^2 = 2px$. Древние греки трактовали уравнение $MC^2 = 2DK \cdot CK$ геометрически: квадрат на полухорде MC параболы равен прямоугольнику со сторонами $2DK$ и CK, построенному на отрезке CK. О Менехме: [24, с. 223–226, с. 262].

Динострат

В IV в. до н. э. жил древнегреческий геометр Динострат, родившийся в Афинах, брат Менехма, ученик Платона и Евдокса. Как уже упоминалось выше, он решил задачу о квадратуре круга с помощью квадратрисы Гиппия. Это можно сделать следующим образом. По определению квадратрисы ее ординаты пропорциональны углам, которые им соответствуют, поэтому $\frac{y}{R}=\frac{\varphi}{\pi/2}$, откуда получается уравнение квадратрисы в полярных координатах: $\rho=\frac{2R}{\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}$ $(0<\varphi\le\frac{\pi}{2})$. При $\varphi\to 0$ в силу равенства $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}=1$ получаем, что абсцисса конца квадратрисы (точка D на рис. 4) равна $x_0=\frac{2R}{\pi}$, откуда $\frac{\pi}{2}=\frac{R}{x_0}$. Вместо этого равенства, по существу, равносильного первому замечательному пределу, Динострат для решения задачи о квадратуре круга использует равносильное равенство $\frac{\frac{1}{4}C}{R}=\frac{R}{x_0}$, где C – длина окружности радиуса R. Не имея полярного уравнения квадратрисы и теории пределов, Динострат не мог столь просто доказать это равенство, как это сделано выше. Сохранилось доказательство этого равенства двойным рассуждением от противного путем приведения к противоречию с принятыми в качестве очевидных геометрическими фактами, равносильными нашим неравенствам $\sin\varphi<\varphi<\operatorname{tg}\varphi$ при $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Это доказательство привел в III в. н. э. древнегреческий математик Папп [24, с. 263–264; 34, с. 55–56]. После этого задача о спрямлении окружности и о квадратуре круга решается следующим образом. Отрезок x_0 известен, если квадратриса задана. А тогда с помощью циркуля и линейки можно построить отрезок $C=\frac{4R^2}{x_0}$, т. е. «спрямить» окружность, а затем построить отрезок

$x = \sqrt{\frac{CR}{2}} = \sqrt{\pi R^2}$, т. е. сторону квадрата, равновеликого кругу радиуса R. О Диностратe: [24, с. 263–264].

Древнегреческий историк математики **Евдем Родосский (ок. 350 – ок. 290 гг. до н. э.)**, ученик Аристотеля, написал «Историю геометрии и астрономии». Некоторые важные извлечения из этой книги приводят более поздние авторы. В частности, он подробно описывает, как Гиппократ квадрировал различного вида луночки [24, с. 184–188]. Обзор истории древнегреческой математики до Евклида дает греческий философ-неоплатоник и математик Прокл (410–485).

О большом вкладе, который внес в математику Евклид, живший в IV–III вв. до н. э., будем говорить ниже.

Эллинистический период (конец IV в. – I в. до н. э.)

Завоевательные походы Александра Македонского в 334–323 гг. до н. э. закончились полным разгромом Персии и образованием крупнейшей мировой монархии, включающей Великую Грецию и весь Ближний и Средний Восток. После сметри Александра в 323 г. до н. э. она распалась на отдельные государства, тесно связанные с Грецией, в которых греческая культура получила широкое распространение. Поэтому 300-летний период от правления Александра и до окончательного завоевания в 30 г. до н. э. его бывших владений Римом называют эллинистическим (эллины – самоназвание греков).

В 332–331 гг. до н. э. Александр основал в дельте Нила город Александрию и сделал его своей столицей. Вскоре Александрия стала главным торговым, научным и культурным центром эллинистического мира. Это был город с правильной планировкой улиц, прекрасным портом и маяком высотой 111 м – одним из чудес света. Правители Египта – Птолемеи – покровительствовали развитию науки и искусства. В Александрии вскоре были основаны два знаменитых учреждения – Мусейон и Библиотека. Мусейон представлял собой крупный научный центр, где работали знаменитые ученые, находясь на полном государственном обеспечении, и получали хорошее образование многие юноши. Библиотека была уникальным хранилищем научных и литературных произведений, число свертков рукописей достигало в ней 700 тысяч.

Евклид

В Александрии работал знаменитый древнегреческий математик **Евклид**. Предполагают, что он жил во время около 340–280 гг. до н. э. Евклиду принадлежит фундаментальный труд «Начала» в 13 книгах (книгами раньше называли главы). Этот труд подводит итог более чем 200-летнему развитию древнегреческой математики. Знаменитый голландский математик Б. Л. ван дер Варден, занимавшийся также историей математики и астрономии древнего мира, на основе замечаний некоторых древних ученых и проведенного им анализа «Начал» Евклида считает, что «Начала» в основном являются систематической обработкой сочинений греческих математиков V–IV вв. до н. э.: Гиппократа, Евдокса, Архита, Теэтета. Заметим, что ни одна научная книга в истории человечества не пользовалась таким огромным успехом, как «Начала». До настоящего времени она выдержала очень много изданий, широко использовалась в обучении, на протяжении свыше 2000 лет считалась образцом строгого изложения.

Дадим краткий обзор этого замечательного труда. «Начала» построены на аксиоматической основе – сначала приведены определения, 5 аксиом и 5 постулатов. Некоторые определения имеются и в других книгах труда.

Определения Евклида можно разбить на две группы. К первой из них относятся описательные, которые далее в «Началах» не используются. Например:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же – длина без ширины.
3. Границы же линии – точки.
4. Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.
5. Границы же поверхности – линии.

Даются также описательные определения прямой, плоскости, угла между прямыми, пространственной фигуры. Эти описательные определения подвергались, особенно в недавнее время, суровой критике как наивные, туманные, опирающиеся, в частности, на понятия «длина», «ширина», которые никак не определялись. В настоящее время, следуя немецкому математику Д. Гильберту (1862–1943), такие основные понятия геометрии, как «точка», «прямая», «плоскость», являются «бессодержательными», т. е. они определяются только теми логическими связями, которые устанавливает между ними четкая система аксиом. Но Евклид, прежде чем перейти к логическому построению геометрии, не мог не дать какого-то интуитивного представления о ее основных понятиях, иначе бы его не поняли.

Ко второй группе относятся определения Евклида основных геометрических фигур (углов – прямого, острого и тупого; треугольников и четырехугольников различного вида и др.), параллельных прямых. Эти определения очень близки к принятым в наше время.

За определениями книги I идут 5 постулатов («требований»), они имеют геометрическое содержание:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Последний из этих постулатов – это знаменитый V постулат Евклида. Его формулировка является очень сложной по сравнению с другими постулатами и аксиомами Евклида. О многочисленных попытках вывести его из других постулатов и аксиом речь будет ниже на с. 120–123.

За постулатами идут 5 аксиом, которые Евклид называет «общими понятиями», они имеют универсальный характер, т. е. применимы не только к геометрии:

1. Равные одному и тому же равны друг другу.
2. Если к равным прибавить равные, то целые равны.
3. Если от равных отнять равные, то остатки равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны друг другу.
5. Целое больше части.

Четвертая аксиома – единственная, в которой речь идет о возможности движения – совмещении. Выбор Евклидом постулатов и аксиом является удачным, но их недостаточно для строгого построения геометрии.

Первые 6 книг (т. е. глав) «Начал» – планиметрические. В I книге рассматриваются основные построения, свойства треугольников, прямоугольников и параллелограммов, теорема Пифагора и обратная к ней. Во II книге излагается геометрический аппарат для интерпретации алгебраических тождеств и решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, т. е. элементы геометрической алгебры. Произведение двух отрезков здесь представляет прямоугольник, построенный на этих отрезках, а произведение трех отрезков – прямоугольный параллелепипед. Книга III посвящена вопросам, связанным с кругом и окружностью, а книга IV – свойствам правильных многоугольников и построению правильных n-угольников при $n = 3, 4, 5, 10, 15$. В V книге приведена принадлежащая Евдоксу теория отношений любых величин – прообраз теории действительных чисел. В VI книге – теоремы об отношении площадей фигур, о подобии фигур, а также обобщение методов решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, с помощью геометрической алгебры.

Книги VII–IX «Начал» – арифметические, здесь излагается теория натуральных и положительных рациональных чисел. Она имеет отличия от теории в книге V, где речь идет о величинах – соизмеримых и несоизмеримых. В арифметике Евклида вместо натуральных чисел нашей арифметики рассматриваются отрезки, кратные единичного отрезка. Число 1 (и единичный отрезок) у древних греков не считалось числом, а говорилось, что единица порождает все числа. Нашему отвлеченному натуральному числу у Евклида отвечает кратность отрезка по отношению к единичному отрезку. Числа-отрезки Евклид обозначает одной или двумя прописными буквами, а для кратности у него нет специального обозначения, о ней говорится словами. Он не использует в своих математических рассуждениях в «Началах» обозначений чисел, принятых в греческой системе нумерации для «логистики» – практики вычислений с конкретными числами, поэтому не приводит числовых примеров, иллюстрирующих теорию. Его оперирование с числами-отрезками имеет общий характер, как и в наших рассуждениях, использующих буквенную символику. Но мы обозначаем буквами отвлеченные числа, а Евклид – отрезки. Евклид использует термин «измеряет» вместо нашего термина «делит». Произведение чисел-отрезков в арифметике Евклида отличается от произведения отрезков-величин в геометрической алгебре: произведением AB чисел A и B Евклид называет «наименьшее число, измеряемое числами A и B».

В начале VII книги приводится алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, затем излагается теория пропорций для отношений натуральных чисел, характерная для математиков пифагорейской школы, в частности для Архита, исследуются свойства умножения. Далее излагается теория простых (по терминологии Евклида – «первых») чисел, а последующие предложения книги VII посвящены теории нахождения наименьшего общего кратного двух натуральных чисел.

В VIII книге рассматриваются свойства так называемой непрерывной пропорции, которую в наших обозначениях можно записать в виде $\frac{x_0}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_n}$, она сходна с нашей геометрической прогрессией, но ее членами у Евклида служат отрезки, изображающие числа.

В начале IX книги рассматривается непрерывная пропорция с $x_0=1$. В геометрической алгебре n-я и $\frac{1}{n}$-я $(n\in\mathbb{N})$ степени отрезков не имеют смысла при $n>3$, эти степени заменяет непрерывная пропорция с $x_0=1$, так как из нее, как легко видеть, следует, что $x_n=x_1^n$, $x_1=\sqrt[n]{x_n}$. В книге IX (предложение 11 и его следствие) в терминах непрерывной пропорции приводится утверждение, равносильное соотношению $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, где m, n – натуральные числа.

Наиболее важные предложения IX книги относятся к теории простых чисел. Здесь устанавливается единственность разложения составных чисел на простые множители. Это утверждение (предложение 14 книги IX) Евклид формулирует следующим образом: «Если число будет наименьшим измеримым [данными] первыми числами, то оно не измеряется никаким иным первым числом, кроме первоначально измерявших его». На нашем математическом языке это означает: произведение $p_1p_2\ldots p_n$ различных простых чисел не имеет других делителей, кроме $p_1,p_2,\ldots,p_n$.

Далее доказывается, что простых чисел бесконечно много, приводится теорема о том, что если число $p=1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}(=2^n-1)$ простое, то число $q=p\cdot 2^{n-1}$ совершенное (т. е. равно сумме своих делителей, включая единицу, но исключая себя). Эту свою теорему Евклид доказывает на основе полученной им в предыдущем (35-м) предложении формулы для суммы конечного числа членов геометрической прогресси. Он доказывает утверждение, равносильное нашей формуле $a+aq+aq^2=\dfrac{aq^3-a}{q-1}$, и по аналогии заключает о ее справедливости для любого числа членов (метод математической индукции древними греками не формулировался явно, вместо него использовалась аналогия).

Уникальной как по содержанию, так и по сложности является X книга «Начал» Евклида. Здесь излагается очень тонкая и глубокая геометрическая теория иррациональностей, которую начал разрабатывать Теэтет, а закончил Евклид. «Выразимыми» Евклид называет отрезки двух типов: 1) соизмеримый по длине с некоторым выбранным в качестве единицы длины отрезком,

2) соизмеримый во второй степени, т. е. отрезок несоизмерим с единичным по длине, но построенный на нем квадрат соизмерим с единичным квадратом. Отрезки типа 2) соответствуют иррациональным квадратным корням из рациональных чисел и допускают построение с помощью циркуля и линейки. Сейчас отрезки типа 1) – 2) называют рациональными по Евклиду. Он рассматривает и отрезки типа 3), которые не являются отрезками первых двух типов, но допускают построение с помощью циркуля и линейки (такова, например, «медиаль» $x=\sqrt{ab}$, где $a=\sqrt{r_1}$, $b=\sqrt{r_2}$ – иррациональные, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$). Только в XX в. было выяснено (см. статью А. Е. Раик в [21, 1948, вып. 1, с. 344–384]), что иррациональности в X книге соответствуют положительным действительным корням биквадратных и квадратных уравнений с рациональными по Евклиду коэффициентами. Системы вида $\begin{cases} x^2+y^2=p, \\ xy=q \end{cases}$ выполняют у Евклида роль биквадратных уравнений $x^4-px^2+q=0$, для их положительных корней справедлива формула

$$\sqrt{\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}=\sqrt{\frac{p}{4}+\frac{\sqrt{q}}{2}}\pm\sqrt{\frac{p}{4}-\frac{\sqrt{q}}{2}} \quad (=u\pm v).$$

Представляя биквадратичные и квадратичные иррациональности в виде канонической суммы (разности) $u\pm v$, Евклид классифицирует их в зависимости от того, соизмеримо u^2 с v^2 или нет, а также рациональна по Евклиду или нет каждая из величин u^2+v^2 и uv. Таким способом он получает 12 канонических типов биквадратичных, а затем столько же квадратичных иррациональностей. Не располагая алгебраической символикой, в частности обозначением радикала, Евклид дает наименование каждому из 24 типов иррациональностей вида $u\pm v$. Он приводит построение циркулем и линейкой всех этих иррациональностей, доказывает единственность их разложения на составные части. Это потребовало огромной работы, учитывая обилие типов иррациональностей, отсутствие в то время символа для радикала, а также довольно сложный вид некоторых из иррациональностей Евклида в его классификации. Например, иррациональность $\sqrt{a}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}$, которую

Евклид называет «большей», он представляет в виде канонической суммы $u+v$, где $u=\sqrt[4]{a}\sqrt{t_1}$, $v=\sqrt[4]{a}\sqrt{t_2}$, а t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения

$$t^2-\sqrt{a}t+\frac{a}{4(1+k^2)}=0$$

(a – рациональное, не являющееся квадратом рационального числа, k – рациональное). Здесь $u^2=t_1\sqrt{a}$ и $v^2=t_2\sqrt{a}$ несоизмеримы между собой, $u^2+v^2=a$ – рациональное, uv – иррациональное по Евклиду («медиальное»). Теория иррациональностей Евклида – самая глубокая и трудная из всех созданных древними греками математических теорий. По выражению ван дер Вардена, книга X «совершенно неудобочитаема». Известный нидерландский математик С. Стевин в 1585 г. назвал ее «крестной казнью математиков». С отказом в Новое время (с XVII в.) от геометрической алгебры и понятия «выразимости» отрезков по Евклиду теория иррациональностей Евклида утратила свое значение.

В X книге «Начал» Евклида также приведена принадлежащая Евдоксу основная лемма «метода исчерпывания», дается способ нахождения «пифагоровых троек» целых чисел ($x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $z=p^2+q^2$), удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=z^2$.

Книги XI–XIII – стереометрические. В частности, в XII книге найдены отношения объемов пирамид, конусов, цилиндров и шаров с помощью метода исчерпывания, принадлежащего Евдоксу. В последней, XIII книге «Начал», результаты которой, как показывает ван дер Варден, принадлежат в основном Теэтету, дается построение пяти правильных многогранников и доказывается, что других правильных многогранников не существует.

Содержание нынешних школьных учебников геометрии мало выходит за рамки книг I–IV и XI–XIII «Начал» Евклида, но теперь доказательства основаны на развитой аксиоматике. В то же время «Начала» Евклида содержат (в геометрическом виде) арифметику, начатки алгебры и теории чисел, а также некоторые элементы, относящиеся к математическому анализу. В 1948–1950 гг. «Начала» Евклида изданы на русском языке в переводе и с комментариями Д. Д. Мордухай-Болтовского, а в 1880 г. – в переводе и с комментариями М. Е. Ващенко-Захарченко. О «Началах» Евклида: [21, вып. 1, с. 217–384; 24, гл. 5, 6; 1, т. 1, гл. 4, 5].

Архимед

Элементы математического анализа получили дальнейшее глубокое развитие в работах древнегреческого математика и механика **Архимеда (ок. 287–212 гг. до н. э.)** – величайшего математика и механика древности. Он родился в греческом городе Сиракузы на о. Сицилия в семье математика и астронома Фидия, приходился родственником царю Гиерону. Архимед получил основательное математическое образование у своего отца, а затем продолжил обучение в Александрии. Вернувшись в Сиракузы, он фактически выполнял обязанности военного инженера, занимаясь укреплением своего родного города. Он вел переписку с александрийскими учеными, посылая им свои работы и предлагая задачи для решения. Благодаря этому до нас дошли 10 его работ, каждая из которых является шедевром древнегреческой математики. Он является основателем статики и гидростатики. Широкую известность в древности получили его инженерные изобретения (военные метательные машины, системы рычагов и блоков для поднятия тяжестей, водоподъемный механизм и др.). Большим достижением его в астрономии был построенный им «звездный глобус» – полая вращающаяся сфера с механизмом, воспроизводящим движение Солнца и пяти планет, солнечные и лунные затмения. Древнегреческий историк Плутарх (ок. 45 – ок. 127 гг. н. э.) подробно описывает, как во время второй Пунической войны Архимед умело организовал оборону своего родного города Сиракузы от римских войск, применив созданную им мощную военную технику, что вынудило римлян вести длительную осаду. Предание гласит, что во время последнего штурма города Архимед был убит римским воином, которого встретил словами: «Не трогай моих чертежей». На надгробии Архимеда был изображен цилиндр с вписанным в него шаром. Архимед нашел, что их объемы, а также площади их поверхностей, относятся как 3:2, и очень ценил это свое открытие. И вообще, он больше всего ценил свои математические достижения. Архимед является одним из главных предшественников создания интегрального исчисления. Кроме того, у него имеются и некоторые элементы дифференциального исчисления. Большинство математических работ Архимеда посвящено нахождению площадей, объемов, площадей поверхностей и центров тяжести фигур (в [79] приведен список из 23 таких задач, решенных Архимедом). Методы решения Архимедом ряда из этих задач подробно изложены, например, в [24]. Многие из своих результатов он получил сначала нестрого с помощью своего «механического» метода, а затем доказал по методу исчерпывания, т. е. двойным рассуждением от противного. «Механический» метод Архимеда заключается в том, что исходная фигура рассматривается как состоящая из бесконечного числа обладающих весом параллельных сечений, каждое из которых затем уравновешивается по правилу рычага с соответствующим сечением другой фигуры, площадь или объем которой известны, а отсюда уже получается результат для исходной фигуры. Архимед демонстрирует свой «механический» метод на примерах вычисления площади сегмента параболы, объема шара и его сегмента, а также сегментов параболоида вращения, эллипсоида, цилиндра, центров тяжести этих сегментов. Он излагает это в послании, которое обычно называют «Эфод» («Метод»), адресованном александрийскому ученому Эратосфену. Послание Архимеда было обнаружено лишь в 1906 г. в одном иерусалимском монастыре. Оно было написано на пергаменте – палимпсесте, где под более поздним христианским текстом сохранился не очень тщательно смытый текст Архимеда, который удалось прочесть знаменитому датскому историку математики Гейбергу.

В работе «Квадратура параболы» Архимед сначала обосновывает с помощью метода исчерпывания видоизменение своего «механического» способа вычисления площади сегмента параболы, уравновешивая не сечения, а одинаковой ширины соответствующие полоски сегмента параболы и некоторого треугольника, поскольку греческая математика отвергала идею о составлении фигуры из бесконечного числа линий или плоскостей. Однако он не довольствуется этим, а приводит также геометрическое доказательство по следующей схеме метода исчерпывания (рис. 7). Используя свойства

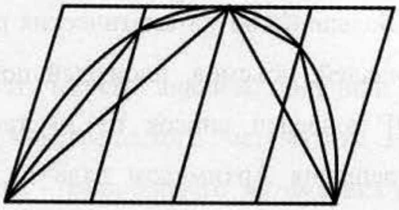


Рис.7

параболы, Архимед вписывает в ее сегмент некоторую монотонную последовательность многоугольников P_n, начиная с треугольника P_1, имеющего основанием хорду этого сегмента, а высотой – высоту сегмента. Площадь многоугольника P_n в наших обозначениях имеет вид $S_n = A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \ldots + \frac{A}{4^{n-1}}$, где $A = S_1$ есть площадь исходного треугольника P_1, а каждое следующее слагаемое представляет величину, на которую увеличивается площадь многоуголника в результате удвоения его сторон, не совпадающих с основанием треугольника P_1. Таким образом, вычисление площади сегмента параболы сводится к нахождению суммы бесконечной геометрической прогресии со знаменателем $\frac{1}{4}$. Избегая суммирования бесконечного числа членов, Архимед приводит формулу вида $S_n + \frac{1}{3}\frac{A}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}A$, которую доказывает двойным рассуждением от противного [24; 6]. Итак, площадь параболического сегмента равна $\frac{4}{3}A$, где A – площадь треугольника, имеющего с сегментом общие основание и высоту.

По-видимому, до Архимеда из подобия фигур было видно, что отношение длины окружности к ее диаметру одно и то же для всех окружностей. Это число в 1706 г. английский математик У. Джонс обозначил буквой π, а после систематического употребления Эйлером этого обозначения оно стало общепринятым. Древние греки вместо π рассматривали отношение длины окружности к ее диаметру без какого-либо обозначения для этого отношения. Они обходились без формул, содержащих число π. Поскольку числовые значения геометрических величин (длины, площади, объема) могут быть как рациональными, так и иррациональными, а древние греки в качестве чисел признавали лишь рациональные числа, то вместо отыскания числовых значений геометрических величин принято было находить отношения соизмеримых фигур. Иными словами, выясняли, какую рациональную часть составляет данная фигура от какой-либо иной подходящей фигуры, или, в частности, какой уже хорошо известной фигуре равновелика данная фигура.

В работе «Измерение круга» Архимед доказал методом исчерпывания теорему: площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен длине окружности, а другой – ее радиусу. Вписывая в окружность правильный 96-угольник, он нашел, что отношение длины окружности к ее диаметру (т. е. число π) заключено между $3\frac{10}{71} \approx 3{,}1408$ и $3\frac{1}{7} \approx 3{,}1428$. И сейчас для π часто используют приближение Архимеда $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}14$. История числа π увлекательно изложена в [53].

В работах «Квадратура параболы» и «Измерение круга» речь шла о вычислени площади сегмента параболы и круга путем аппроксимации их вписанными многоугольниками. Но в работах Архимеда «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах» речь идет уже о настоящем интегрировании, хотя еще и без понятия интеграла. Огромной заслугой Архимеда является то, что здесь он впервые ввел верхние и нижние суммы, которые в настоящее время связывают с именем французского математика XIX в. Дарбу.

В работе «О спиралях» Архимед кинематически определяет спираль (она носит сейчас его имя), как траекторию точки, которая равномерно движется по лучу, выходя из его начала O, в то время как луч равномерно вращается вокруг точки O. Затем Архимед вычисляет площадь, ограниченную первым витком спирали и начальным положением луча, разбивая эту фигуру лучами, исходящими из точки O, на мелкие криволинейные секторы с равными углами в точке O. В каждый такой сектор он вписывает и описывает вокруг него круговые секторы (рис. 8). Площадь фигуры содержится между суммой

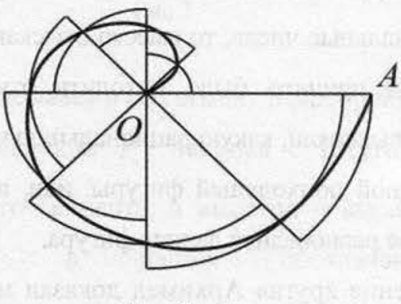


Рис. 8

площадей вписанных круговых секторов и суммой площадей описанных секторов, т. е. между нижней и верхней интегральными суммами. Он показывает, что разность этих сумм становится сколь угодно малой при измельчении разбиения. Вычисление предела этих сумм требует знания того факта, что $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \to \frac{1}{3}$ при $n \to \infty$. Архимед устанавливает это с помощью выведенной им (в предложении X) формулы вида $3(1+2^2+\ldots+n^2) = (n+1)n^2 + \frac{1}{2}(n+1)n$ и получает, что искомая площадь составляет $\frac{1}{3}$ площади круга радиуса $R = OA$. Доказательство проводится по методу исчерпывания. Он вычисляет и площадь сектора, образованного двумя произвольными радиусвекторами и дугой первого витка спирали, а также площади между дальнейшими витками спирали. Так как уравнение спирали Архимеда в полярных координатах имеет вид $\rho = a\varphi$, то действия Архимеда равносильны вычислению интеграла $\frac{a^2}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2 d\varphi$ с помощью нижних и верхних сумм.

Архимед называл коноидами параболоиды вращения и отдельные полости двуполостных гиперболоидов вращения, а сфероидами – эллипсоиды вращения. В работе «О коноидах и сфероидах» он вычислил объемы многих тел, полученных при вращении дуг конических сечений. Для этого он разлагает тела на тонкие слои, которые затем заменяет вписанными и описанными цилиндрическими слоями, как это делается и в настоящее время при выводе формулы для вычисления объемов тел вращения с помощью интеграла. Используя различные методы, он вычисляет площади поверхностей цилиндра, конуса, шара и его сегмента, а также центры тяжести плоских фигур и сегментов тел вращения. С современной точки зрения все квадратуры и кубатуры, найденные Архимедом с помощью верхних и нижних сумм, сводятся к вычислению интегралов вида $\int_a^b x^2 dx$ или $\int_a^b x dx$. В работе «О шаре и цилиндре» он установил в геометрическом виде также соотношение, равносильное формуле $\int_0^{\alpha}\sin\varphi d\varphi = 1-\cos\alpha$. Однако Архимед не подошел к общему понятию определенного интеграла. Оно было введено лишь во второй половине XVII в. Ньютоном и Лейбницем, когда уже накопился большой запас квадратур и кубатур.

Архимед является также одним из предшественников дифференциального исчисления, возникновение которого тесно связано с изучением вопроса о касательных к кривым. В работе «О спиралях» Архимед с помощью полярной подкасательной к своей спирали спрямляет окружности и их дуги (предложения XVIII–XX). При этом он использует бесконечно малый полярный треугольник MNP (рис. 9), образованный касательной к спирали в точке M,

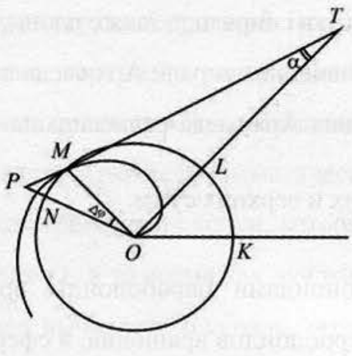


Рис. 9

продолженным до встречи в точке P с касательной радиус-вектором, близким к радиус-вектору OM, и дугой MN окружности с центром O, проходящей через точку касания M. Треугольник MNP приближенно подобен треугольнику TOM, где $TO \perp OM$ (отрезок TO называется полярной подкасательной). Это позволяет угадать результат с помощью нестрогих соображений. Из соответствия равномерного движения точки по лучу и равномерного вращения луча (последнее измеряется дугой окружности с центром в точке O) следует, что $\frac{OM}{\smile KLM} \approx \frac{NP}{\smile MN}$, а из приближенного подобия треугольников MNP и TOM – приближенное равенство $\frac{NP}{\smile MN} \approx \frac{OM}{TO}$. Поэтому возникает следующая гипотеза: $\smile KLM = TO$. Ряд лемм в работе «О спиралях» Архимеда посвящен доказательству того факта, что при достаточно малом угле MOP отношение $\frac{NP}{\smile MN}$ сколь угодно близко к $\frac{OM}{TO}$ (т. е., что $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha = \angle OTM$, или, что $\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg}\alpha$ для кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где α – угол между касательной в точке M и полярной подкасательной). Затем Архимед доказывает точное равенство $\smile KLM = TO$, используя двойное рассуждение от противного. Таким образом, он «спрямляет» дугу окружности, т. е. находит ее длину, указывая равновеликий ей отрезок прямой – полярную подкасательную к спирали. Идея Архимеда, состоящая в рассмотрении бесконечно малого треугольника, будет использована многими математиками XVII в. в задачах на касательные и вычисление длин дуг кривых, но уже для кривых $y = f(x)$ в прямоугольной системе координат. Эта идея сыграла большую роль в создании дифференциального и интегрального исчисления. Ньютон писал: «Проводя касательные к спирали, Архимед дал пример ... метода флюксий» (т. е. производных).

Рассмотрим еще одно достижение Архимеда, оно связано с отысканием экстремума с помощью касательной. Уже Евклид в «Началах» путем выделения полного квадрата устанавливает, что произведение $x(a-x)$ достигает максимума при $\frac{a}{2}$. Считают, что Архимед впервые полностью исследовал условия существования положительных корней кубического уравнения $x^2(a-x) = pqr$ (он трактует это уравнение как равенство объемов). Для этого ему потребовалось найти наибольшее значение произведения $x^2(a-x)$ $(0 < x < a)$. Архимед показывает, что если оно имеет максимум, равный pbc, то точка x_0 экстремума является абсциссой точки касания параболы $y = \frac{x^2}{p}$ и гиперболы $y = \frac{bc}{a-x}$. Используя свойства параболы и гиперболы, он находит, что $x_0 = \frac{2a}{3}$ [1, т. 1 с. 127]. Метод Архимеда обладает большой общностью: существование общей касательной у кривых $y = f(x)$ и $y = \frac{k}{g(x)}$ – это геометрический аналог необходимого условия экстремума произведения $f(x)g(x)$, т. е. условия $[f(x)g(x)]' = 0$. Действительно, в точке касания выполнены равенства

$$f(x_0) = \frac{k}{g(x_0)}, \quad f'(x_0) = -\frac{kg'(x_0)}{[g(x_0)]^2},$$

откуда, исключая k, получаем

$$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = 0,$$

т. е. $\left[f(x)g(x)\right]' = 0$ в точке x_0. Не располагая понятием производной, Архимед с присущей ему проницательностью обнаружил, хотя и на частном примере, геометрический аналог необходимого условия экстремума произведения функций.

Математики XVII в., создававшие математический анализ, были хорошо знакомы с работами Архимеда. Они развили его интегральные методы, а также его метод использования касательных для «спрямления» кривых с помощью бесконечно малого треугольника и в теории экстремумов.

Важной особенностью математического творчества Архимеда является связь теоретических исследований с практикой. Он преодолел господствовавшее в то время мнение относительно якобы «низменности» прикладных знаний. Его предшественники в древней Греции с аристократическим пренебрежением относились к практической арифметике (так называемой «логистике»), предоставляя ее купцам. Но Архимед уделял большое внимание приближенным вычислениям, как показывает его работа «Измерение круга». Греческая алфавитная система обозначения чисел не была приспособлена для записи больших чисел. В этой нумерации высшей единицей счета было число 10000 («мириада»). Это позволяло удобно называть числа до 10^8 («мириада мириад», или, говоря по-современному, – «октада»).

В работе «Исчисление песчинок» («Псаммит») Архимед изобрел способ называть сколь угодно большие числа, разработав позиционную систему с основанием $A = 10^8$. Числа от 1 до $A-1$ он называет первыми, единицу чисел вторых у него составляет A чисел первых, единицу чисел третьих – A чисел вторых и т. д., единица A-х чисел в A раз больше единицы предыдущего разряда. На этом первый период чисел у Архимеда заканчивается. Для чисел, записанных в нашей десятичной системе, разряд Архимеда состоит из восьми знаков. Аналогично можно называть числа второго и дальнейших периодов. Если использовать наши обозначения степеней, введенные в XVII в. Декартом, то первый период у Архимеда составляют числа: первые – от 1 до $A-1 = 10^8 - 1$, вторые – от A до $A^2-1=10^{16}-1$, третьи – от A^2 до $A^3-1=10^{24}-1,\ldots$, A-е от A^{A-1} до $A^A-1=10^{8\cdot10^8}-1$. Второй период состоит из чисел от A^A до $A^{2A}-1$ и делится на A разрядов, как и первый период, и т. д.

Затем Архимед вычисляет количество песчинок, которыми можно было бы заполнить шар радиуса, равного расстоянию от Земли до «сферы неподвижных звезд». Песчинки он берет очень маленькие, полагая, что в шарике («маковом зерне») диаметром ≈ 0.6 мм содержится 10^4 («мириада») песчинок. Для удобства вычислений Архимед считает песчинки кубиками, а шары заменяет кубами. Расстояния, кроме сторон песчинок, он выражает в стадиях, длина стадии приближенно равна 154 м. (Современное слово «стадион» происходит от названия стадии.) Планета по гречески означает «блуждающая» (звезда), в отличие от «неподвижных» звезд, не меняющих (как тогда считалось) расположения относительно друг друга. Общепринятой в то время была геоцентрическая гипотеза: Земля покоится в центре Вселенной, вокруг нее обращаются Луна, Солнце и планеты, а также «неподвижные» звезды, которые якобы находятся на прозрачной сфере.

Древнегреческий астроном и математик **Аристарх Самосский (ок. 310 – ок. 250 гг. до н. э.)** определил, хотя еще довольно грубо, размеры Солнца и Луны, а также расстояния до них от Земли. До нас дошел его трактат «О размерах и расстояниях Солнца и Луны». Он нашел, что Солнце по объему не менее чем в 300 раз больше Земли. В своих вычислениях он использовал некоторые неравенства, сходные с нашими тригонометрическими. Архимед был знаком с результатами Аристарха и в своей работе «Исчисление песчинок» пишет: «Он (Аристарх) полагает, что неподвижные звезды и Солнце не меняют своего места в пространстве, что Земля движется по окружности вокруг Солнца, находящегося в центре, и что центр шара неподвижных звезд совпадает с центром Солнца». За эту свою гелиоцентрическую систему Аристарх был обвинен в ереси и изгнан из Афин. Аристарх является предшественником Коперника. Об Аристархе: [24, с. 280–283].

Измерение расстояний до звезд, не считая Солнца, стало доступным для астрономов только в XIX в., когда появились мощные телескопы. Аристарх считал, что звезды находятся очень далеко, иначе они были бы видны как диски. Архимед в «Исчислении песчинок» ссылается (с уточнением) на предположение Аристарха о том, что диаметр сферы неподвижных звезд так относится к диаметру орбиты Земли («диаметру мира»), как диаметр орбиты Земли относится к диаметру Земли. Это отношение Архимед принимает равным «мириаде», т. е. 10^4. Диаметр Земли он оценивает сверху в 10^6 («сто мириад») стадий, это примерно в 10 раз больше действительного. Тогда для диаметра орбиты Земли получается оценка в 10^{10} стадий, что примерно в 5 раз больше действительного, а для диаметра сферы неподвижных звезд – оценка в 10^{14} стадий $\approx 154 \cdot 10^{11}$ км. Следовательно, согласно Архимеду, сфера неподвижных звезд удалена от Земли на расстояние около $77 \cdot 10^{11}$ км. Интересно, что этот результат Архимеда, основанный на указанном выше предположении, лишь примерно в 5 раз меньше, чем расстояние от Земли до ближайшей к ней после Солнца звезды Проксима Центавра, равное $\approx 404 \cdot 10^{11}$ км. Свет от этой звезды идет к Земле около 4,27 лет.

Далее Архимед, пользуясь своей системой нумерации с основанием $A = 10^8$, показывает, что в одной кубической стадии содержится меньше, чем 10^{21} песчинок. В результате получается, что количество песчинок, заполняющих шар до «неподвижных звезд», меньше, чем тысяча мириад единиц чисел восьмых первого периода, т. е. $1000 \cdot 10^4 \cdot A^7 = 10^{63}$.

В этой же работе Архимед для «непрерывно пропорциональных» (т. е. членов x_n геометрической прогрессии с $x_0 = 1$) приводит в более удобных выражениях, чем в формулировке Евклида, свойство $x_m x_n = x_{m+n}$, равносильное правилу $a^m a^n = a^{m+n}$ (m, n – натуральные). При отсутствии в то время обозначения степени с показателем и индексов член последовательности определялся словесно его местом среди других членов последовательности. Архимед обозначает члены геометрической прогрессии буквами А, В, Г, Δ, Е и т. д., где $A = 1$, и утверждает, что произведение двух членов этой последовательности есть член этой последовательности, удаленный от большего из сомножителей на столько членов, на сколько меньший удален от единицы. Это утверждение Архимеда становится нам ясным, если записать геометрическую прогрессию в виде последовательности

$$1, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}, \ldots,$$

тогда $x_m x_n = x_{n+m}$. Математики в древности и много позже использовали словесные выражения вместо наших формул, поэтому чтение их произведений является для нас нелегким делом, если не использовать современные комментарии.

На русском языке работа Архимеда «Исчисление песчинок» издавалась как отдельной книгой, так и в его собрании сочинений [36].

Огромную славу принесли Архимеду его достижения в строительной механике, статике (закон рычага, нахождение центров тяжести), гидростатике (закон Архимеда, а также детальное математическое исследование положений равновесия погруженного в воду параболического сегмента в книге «О плавающих телах») и др. Из его геометрических достижений отметим также тот факт, что он нашел 13 полуправильных многогранников.

Идеи и методы Архимеда оказали огромное влияние на становление математики Нового времени в XVII в., в особенности математического анализа. В [8, с. 173] читаем: «… первое печатное издание Архимеда на греческом и латинском языках [3а] было выпущено Герватиусом из Базеля только в 1544 г. На математиков той эпохи (поглощенных алгебраическими исследованиями) они не оказали заметного влияния, и только в эпоху Галилея и Кеплера, которые оба были скорее астрономами и физиками, нежели математиками, это влияние стало ощутимым. С этого времени и до 1670 г. не было ни одного имени, которое бы столь же часто упоминалось в работах творцов исчисления бесконечно малых, как имя Архимеда. Появилось много переводов и комментариев его работ. Все, начиная от Ферма и кончая Барроу, без конца его цитируют; все утверждают, что творения Архимеда являются для них образцом и источником вдохновения». Лейбниц писал: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометров». Лагранж и Деламбр в 1806 г. писали: «За Архимедом сохранилась репутация одного из самых удивительных гениев, которые когда-либо посвятили себя математике. Ни один из геометров древности не сделал таких многочисленных и важных открытий, но, несмотря на это, в настоящее время находим мало читателей, знакомых с сочинениями Архимеда ...». Собрание сочинений Архимеда представляет собой солидный том. Об Архимеде: [36; 37; 24; 1, т.1; 30; 27; 3; 9].

Эратосфен

Древнегреческий ученый **Эратосфен (ок. 276–194 гг. до н. э.)** родился в Кирене (ныне Шаххат в Ливии). Образование получил в Александрии и Афинах. Заведовал Александрийской библиотекой. Занимался многими областями науки, в том числе математикой и астрономией. До нас дошли только отрывки его сочинений. Архимед посылал ему свои математические работы.

В области математики известен способ нахождения простых чисел, называемый «решетом Эратосфена», состоящий в следующем. Для нахождения всех простых чисел, не превосходящих n, запишем все числа от 2 до n. Число 2, как простое, оставляем, а все остальные четные числа зачеркиваем. Первое незачеркнутое число – это простое число 3. Оставляем его и зачеркиваем все числа, кратные 3, и т. д. Если найдено простое число $p > \sqrt{n}$, то на этом процесс зачеркивания заканчивается, т. к. все составные числа, не превосходящие n, уже зачеркнуты. Например, простыми числами, меньшими 50, являются: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Выше упоминалось, что для механического решения задачи об удвоении куба Эратосфен предложил специальный прибор («мезолябий») [24, с. 317–318; 33, с. 25–26; 34, с. 18–20]. (Схема этого прибора изображена и на обложке книги [24].) Эратосфену принадлежит арифметическая теория различного рода средних (или средних пропорциональных). Выше говорилось, что уже пифагорейцы рассматривали три вида средних (арифметическое, геометрическое и гармоническое). Евдокс добавил еще три вида средних пропорциональных: $(a-c):(c-b)=b:a$, $(a-c):(c-b)=b:c$, $(a-c)(c-b)=c:a$. Позже были добавлены и другие средние пропорциональные, вроде $(a-b):(a-c)=a:c$ и т. д. Устанавливались некоторые их связи между ними с помощью линейных преобразований переменных a,b,c [24, с. 318–320].

Но наиболее известен Эратосфен своим довольно точным измерением земного меридиана. Идея этого измерения очень проста, но нужно было подобрать условия для ее реализации. Было известно, что в г. Сиене (ныне Асуан в Египте) в день летнего солнцестояния (22 июня) в полдень Солнце находится в зените (освещает дно колодцев). Город Александрия, где жил Эратосфен, находится практически на одном меридиане с Сиеной севернее на расстоянии, равном около 5000 стадий. По высоте обелиска в Александрии и его тени в полдень 22 июня Эратосфен нашел, что лучи Солнца образуют с обелиском угол $(7,2)^\circ=\frac{1}{50}\cdot 360^\circ$. Следовательно, большая окружность Земли в 50 раз больше расстояния между Сиеной и Александрией, т. е. длина большой окружности Земли равна $50\cdot 5000=250000$ стадий. В то время в разных частях Греции величина стадии несколько отличалась, и в Египте, по некоторым соображениям, она составляла 157,5 м. Следовательно, по Эратосфену, длина большой окружности Земли равна $0{,}1575\cdot 250000=39375$ км. И на самом деле, как известно, длина земного экватора равна примерно 40075 км. Указанное выше расстояние в 5000 стадий (около 787 км) между Александрией и Сиеной не совсем точное, длина стадии могла немного отличаться, поэтому результат Эратосфена придется изменить на несколько процентов. Но это был замечательный результат!

До этого древнегреческие ученые, современники Эратосфена, считали длину земного экватора в 10 раз большей, чем в действительности. Об Эратосфене: [24, с. 314–320; 15; 198, т. 2].

Аполлоний

Последним великим математиком эллинистического периода был **Аполлоний (ок. 262 – ок. 190 гг. до н. э.)**, родившийся в г. Перге в Малой Азии и работавший в основном в Александрии. Ему принадлежит фундаментальный труд «Конические сечения» в 8 книгах, где приведено около 400 теорем об аналитических и некоторых проективных свойствах конических сечений (кривых второго порядка). До Аполлония пользовались известностью не дошедшие до нас «Начала теории конических сечений» Евклида и книга Аристея о конических сечениях. Уже Архимеду были известны диаметры конических сечений, а также уравнения этих кривых, отнесенные к диаметру и касательной в его конце. Знал Архимед и о наличии асимптот у гиперболы, ему были известны некоторые свойства конических сечений, в том числе касательных к ним.

В I книге «Конических сечений» Аполлоний выводит уравнения конических сечений – эллипса, параболы и гиперболы, он впервые ввел эти термины. Термин «парабола» буквально означает «приложение», так как на оси абсцисс параболы $y^2 = px$ (разумеется, в других обозначениях отрезков) Аполлоний строил («прилагал») прямоугольник со сторонами x и p. «Эллипс» означает «недостаток» (к px) из-за записи Аполлонием уравнения эллипса в виде $y^2 = x\left(p - \frac{p}{a}x\right)$, а «гипербола» означает «избыток» (над px) из-за записи ее уравнения в виде $y^2 = x\left(p + \frac{p}{a}x\right)$. Аполлоний впервые стал получать все конические сечения из кругового конуса любого вида, проводя сечения плоскостью, расположенной под любым углом к образующей. Он трактует уравнения конических сечений (кривых второго порядка) в терминах равенств площадей, используя диаметры и сопряженные к ним хорды конических сечений в качестве абсцисс и ординат, т. е., по существу, рассматривает эти кривые в косоугольной системе координат, а прежде их относили к прямоугольной.

Современные термины «абсцисса» и «ордината» произошли от соответствующих терминов Аполлония «отсеченная на диаметре» и «по порядку приложенная». В конце I книги Аполлоний доказывает, что тип уравнения конического сечения не меняется при переходе к другому диаметру и сопряженным с ним хордам (т. е. к другой системе координат). Во второй книге Аполлоний излагает теорию сопряженных диаметров и главных диаметров, а также асимптот гипербол, в частности получает уравнение $xy = \mathrm{const}$ гиперболы «в асимптотах». В III книге большинство результатов являются новыми. Здесь рассматриваются «теоремы о площадях», которые в переводе на наш алгебраический язык касаются уравнений конических сечений общего вида $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \mathrm{const}$, а также их частных случаев. Доказывается также теорема, которую иногда называют теоремой Ньютона о степени точки: если через точку P проведены две хорды AB, CD (секущие PBA, PDC) конического сечения, то $\dfrac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD} = \mathrm{const}$; для окружности эта постоянная равна единице. Несколько теорем книги III касаются современной теории полюсов и поляр, относящейся уже к проективной геометрии, например: если из точки P (полюса) проведены касательные PM и PN и секущая PBA к коническому сечению, то поляра MN и секущая PBA пересекаются в точке C такой, что $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AP}{PB}$. В настоящее время в проективной геомерии рассматриваются ориентированные отрезки. Отношение двух отрезков считается положительным, если направления отрезков совпадают, а в противном случае – отрицательным. Тогда $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -1$. Кратко это равенство записывают в виде $(ABCP) = -1$ и говорят, что точки A, B, C, P на прямой образуют гармоническую четверку, или что пара точек (A, B) гармонически сопряжена паре (C, P). Отношения вида $(ABCP)$ называют двойными отношениями для четырех точек на прямой. В III книге Аполлоний рассматривает также некоторые теоремы о касательных, тесно связанные с проективной геометрией, которые затем применяет в теории фокусов эллипса и гиперболы. Но о фокусе параболы Аполлоний не упоминает. Книга IV посвящена в основном доказательству того, что два конических сечения не могут иметь более четырех общих точек. В знаменитой V книге Аполлоний изучает элементарными средствами вопрос о проведении нормалей PM к коническому сечению, где P – произвольная точка, а M – точка сечения. Он исследует, когда в зависимости от положения точки P и вида конического сечения будет одна, две, три или четыре нормали, а также когда отрезок PM нормали будет наибольшим и когда наименьшим. Здесь Аполлоний предвосхищает понятие об эволюте конического сечения. Книга VI представляет мало интереса, в ней рассматриваются вопросы о равенстве и подобии конических сечений. Основными результатами VII книги являются теоремы: сумма квадратов на сопряженных диаметрах эллипса равна сумме квадратов на главных осях, аналогичная теорема о разности квадратов в случае гиперболы, а также теорема о том, что параллелограмм, построенный на двух сопряженных диаметрах эллипса (гиперболы), имеет постоянную площадь. Книга VIII утеряна.

Теория конических сечений является одной из наиболее глубоко разработанных математических теорий в древней Греции. «Конические сечения» Аполлония имели огромное значение для создания в XVII в. французскими математиками Декартом и Ферма основ аналитической геометрии. Долгое время конические сечения не получали применения, кроме как в задаче об удвоении куба. И только в начале XVII в. обнаружилось их огромное значение в астрономии и механике, когда Кеплер открыл, что планеты движутся по эллипсам, а Галилей показал, что траектория брошенного тела (например, снаряда) представляет собой параболу. «Конические сечения» Аполлония крайне трудны для чтения, доказательства на языке геометрической алгебры доступны лишь очень одаренному математику. Считают, что Аполлоний нашел для числа π приближение 3,1416. Об Аполлонии: [24, с. 325–356].

После Аполлония греческая математика в течение следующих двух веков приходит в упадок, в это время не было получено никаких значительных результатов. Это объясняется, прежде всего, ограниченными возможностями и трудностью изложения математики на языке геометрической алгебры, позволявшей получать и описывать факты, связанные в основном с уравнениями первой и второй степени. Куб величины интерпретировался как объем, но кубические уравнения были слишком трудным объектом для исследования при отсутствии удобной символики, а степени, начиная с четвертой, фактически не имели смысла в геометрической алгебре, вместо них можно было рассматривать только «непрерывно пропорциональные». Поэтому после Аполлония, необычайно глубоко изучившего кривые второго порядка, трудно было получать новые результаты, пользуясь языком геометрической алгебры. Второй причиной упадка греческой математики в последние два века до н. э. было завоевание эллинистических стран римлянами.

Греческих математиков последних двух веков до н. э. называют эпигонами великих математиков Архимеда, Евклида и Аполлония. Греческий математик **Никомед (III–II вв. до н. э.)** для решения задачи об удвоении куба ввел кривую, которая позже была названа конхоидой (т. е. похожей на раковину). В полярной системе координат она имеет уравнение $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm b$. Позже, в III в. н. э., Папп использовал ее для решения задачи о трисекции угла.

Греческий математик **Диокл (II в. до н. э.)** для решения задачи об удвоении куба ввел кривую, названную циссоидой (т. е. похожей на плющ). Ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$. Диокл определял ее геометрически, используя окружность.

Зенодор

Греческий математик **Зенодор (ок. 200 – ок. 140 гг. до н. э.)** написал интересную книгу об изопериметрических фигурах. На плоскости это фигуры с равными периметрами, в пространстве – с равными площадями поверхностей. Требуется выяснить, какая из таких фигур имеет наибольшую площадь (объем).

Ответ здесь обычно интуитивно очевиден, но его нелегко доказать. Зенодор доказывает 14 предложений об изопериметрических свойствах фигур. В результате он, хотя и не вполне строго, показывает, что из всех фигур одинакового периметра (под всеми фигурами он имел в виду многоугольники и круги) наибольшую площадь имеет круг. Он высказывает и теорему о том, что из всех тел с одинаковой площадью поверхности наибольший объем имеет шар (эту теорему высказывал также и Архимед). Лишь в 1886 г. изопериметрические свойства круга и шара строго доказал немецкий математик Г. Шварц. Изопериметрические задачи относятся к вариационному исчислению, которое, как видим, берет начало в древней Греции. О Зенодоре: [21, вып. 2, 1949, с. 356 – 376].

Древнегреческая математика в римскую эпоху (I–IV вв. н. э.)

Как уже упоминалось выше, одной из причин упадка древнегреческой математики явилось завоевание эллинистических стран римлянами: Греции – в 146 г. до н. э., Месопотамии – в 64 г. до н. э., Египта – в 30 г. до н. э. Римляне совершенно не интересовались теоретическими вопросами математики, а ограничились узко практическими ее применениями, например, в землемерии и строительстве.

Герон

После завоевания римлянами эллинистических стран Рим не стал научной столицей, ею по-прежнему оставалась Александрия. В I в. н. э. в Александрийской школе снова проявляется интерес к математике, но характер ее меняется в сторону приложений. В это время в Александрии жил математик и механик **Герон (ок. 10 – ок. 75 гг.)**. Его работы представляют собой возврат к древним вавилонским и египетским традициям и напоминают технические справочники по прикладной математике, а самого Герона считают ее основоположником. В лучшей из своих работ – «Метрике» – он дает правила точного и приближенного вычисления площадей многоугольников, объемов усеченных пирамиды и конуса, численного решения квадратных уравнений, а также правила приближенного вычисления квадратных и кубических корней. В частности, там содержится «формула Герона» $\sqrt{A} \approx \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$, где a – начальное приближение для $\sqrt{A}$. Ее знали ранее вавилоняне и Архимед. При $A = a^2 + b$, она, как легко видеть, превращается в формулу $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$. Там же приводится (с доказательством) «формула Герона» $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где S – площадь треугольника, p – его полупериметр, a, b, c – стороны. Она ранее встречается у Архимеда. Обычно Герон дает правила без доказательств, иллюстрируя примерами. Он привел также некоторые сведения из механики, описал конструкцию некоторых механизмов. В римское время и в средние века книги Герона пользовались большой популярностью ввиду их элементарного содержания. О Героне: [24, с. 372–374, с. 449–450].

Менелай

Прогресс математики в I–II вв. связан с началом развития сферической и плоской тригонометрии для потребностей астрономии, которая в то время была очень тесно связана с астрологией. В то время в Риме жил древнегреческий математик и астроном **Менелай Александрийский (ок. 70 – ок. 130)**. До нас дошло в арабском переводе его сочинение «Сферика» в 6 книгах, где он излагает сферическую тригонометрию. В частности, там приведена теорема, которая сейчас носит его имя, в следующей формулировке (рис. 10 с другими буквенными обозначениями): пусть на плоскости даны прямые AB и AB', точка C лежит на AB', точка C' – на AB и прямые BC и $B'C'$ пересекаются в точке A', тогда $\frac{BC'}{AC'} = \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'}$ (то есть $\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1$).

В современной формулировке теоремы Менелая говорится о пересечении сторон треугольника ABC (или их продолжений) прямой в точках A',

B', C', отрезки рассматриваются направленные, а равенство Менелая записывается в виде $\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1$. О Менелае: [24, с. 369–371; 51, с. 9–14; 47, с. 33–36, с. 83].

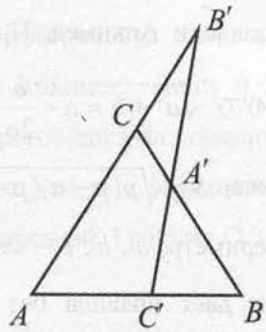


Рис. 10

Птолемей

Знаменитый древнегреческий астроном **Клавдий Птолемей (ок. 85 – ок. 165 гг.)**, который жил в Александрии, написал большой труд по астрономии «Математическое построение (“синтаксис”) в 13 книгах». Позже этому произведению арабы дали название «Альмагест» (от греческого слова $\mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau\eta$ – «величайшее»). На русском языке книга «Альмагест» Птолемея издана в 1998 г. Древнегреческие астрономы придерживались в основном геоцентрической системы движения планет, согласно которой в центре находится неподвижная Земля, а Луна, Солнце, планеты и «сфера неподвижных звезд» обращаются вокруг нее. Считалось почти очевидным, что если бы Земля вращалась вокруг своей оси и двигалась по орбите в пространстве, то из-за большой скорости движения все предметы на ней улетели бы в сторону, противоположную движению (об инерции тогда еще мало знали). В IV в. до н. э. Евдокс, выполнив сложные математические вычисления, построил геоцентрическую систему движения планет с помощью 27 концентрических сфер с центром в Земле.

Движение каждой планеты он моделировал с помощью четырех некоторым образом связанных между собой сфер, движущихся с различными скоростями в соответствующих направлениях. Ввиду большой сложности теория Евдокса была трудной для практического использования.

Но были и другие точки зрения. Древнегреческий ученый Гераклид Понтийский в IV в. до н. э., исходя из того, что Венера и Меркурий на небосводе не бывают очень удалены от Солнца и переодически меняют свой блеск, считал, что они обращаются вокруг Солнца, а Солнце с ними и другие планеты обращаются вокруг Земли с Луной. Это уже не совсем геоцентрическая система. **Аристарх Самосский** в III в. до н. э., проанализировав обстоятельства лунного затмения, пришел к выводу, что Солнце намного больше Земли, и предложил гелиоцентрическую систему (см. с. 65).

Одним из величайших астрономов древнего мира является **Гиппарх (ок. 190 – ок. 120 гг. до н. э.),** живший на о. Родос. Он открыл явление прецессии (перемещение примерно на 1° за 70 лет точки весеннего равноденствия навстречу видимому движению Солнца по эклиптике), а также получил ряд других очень точных результатов в астрономии. Он же составил замечательный каталог 850 звезд, разделив их на шесть классов по блеску. Многие из результатов Гиппарха были включены Птолемеем в «Альмагест». Считают, что звездный каталог (1022 звезды) в этом труде является подправленным каталогом Гиппарха.

В начале своей книги Птолемей приводит некоторые факты за и против геоцентрической гипотезы. Имея в виду практическое применение, он выбирает ее как более понятную для многих, ибо, как пишет он, «все, что трудно понимаемо, представляется широким кругам непригодным для практического применения». Свою теорию он называет математической, оставляя в стороне вопрос о физической картине мира. Его кинематико-геометрическая теория описывала движения небесных светил с точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле и считающего Землю неподвижной. В средние века и в XVII в. христианская церковь предписывала безоговорочно принимать геоцентрическую гипотезу в качестве реальной физической картины мира как такую, которая не противоречит Священному Писанию.

Наблюдателю, находящемуся на Земле, видно, что планета движется по небосводу на фоне звезд по кривой, не слишком отличающейся от окружности, но эта кривая ежегодно в течение некоторого времени делает петлю. Например, Юпитер делает полный оборот вокруг Солнца за 12 лет, его путь на фоне звезд за это время делает 12 петель. Петля образуется в то время, когда Земля на орбите находится более близко к планете. Целью Птолемея было дать математическое описание видимого с Земли движения светил по небосводу. Ему были известны периоды обращения и другие характеристики движения планет по небосводу, а также приближенные (заниженные) расстояния от Земли до Луны, Солнца и планет. Он указывает порядок расположения планет, отличающийся от действительного тем, что вместо Солнца в центре ставит Землю, а вместо орбиты Земли – орбиту («сферу») Солнца. Расстояния от Земли до планет в теории Птолемея фактически не играют роли.

В геоцентрической теории Птолемея видимое с Земли движение планеты описывается геометрически путем сложения двух равномерных круговых движений, а именно: предполагается, что планета движется по небольшой окружности (эпициклу), центр которой при этом совершает движение по большой окружности (деференту) с центром в Земле или поблизости от Земли. (Латинское *deferens* означает «несущий».) Таким образом, видимое с Земли движение планеты, прямое и попятное, описывается приближенно кривой типа удлиненной эпициклоиды. Модель движения планеты строилась по трем параметрам: угловая скорость ω движения центра эпицикла по деференту; угловая скорость σ движения планеты по эпициклу; отношение радиуса эпицикла к радиусу деферена, т. е. $\delta = \frac{b}{a}$. В модели Птолемея для Солнца эпицикл не вводился, оно двигалось по эксцентру – окружности с центром на определенном расстоянии от Земли. Модель эксцентра для Солнца была удобнее эпициклической. Для определения параметров движения планет Птолемей провел длительные наблюдения. Две очень важные теоремы о сложении круговых движений доказал Аполлоний. Птолемей проявил большое искусство при построении моделей движения Луны, Солнца и планет.

Для Марса теория Птолемея позволяла с очень хорошей точностью вычислять его положение на десятки лет вперед и назад. Для Меркурия и Венеры точность была несколько хуже, а для Юпитера и Сатурна промежуточная. На протяжении многих веков «Альмагест» Птолемея был настольной книгой астрономов. Может возникнуть вопрос, почему теория Птолемея, основанная на центральном положении Земли, а не Солнца в нашей планетной системе, давала правильные результаты. Дело здесь в относительности движения. Истинное движение Земли отражается у Птолемея в деферентах Меркурия и Венеры и в эпициклах других планет.

Теория Птолемея продержалась до середины XVI в., когда гениальный польский астроном Николай Коперник в книге «О вращениях небесных сфер», опубликованной в 1543 г., дал гелиоцентрическую теорию движения планет, которая близко соответствовала физической картине Солнечной системы. Эта теория привела к революции в естествознании и научном мировоззрении. Эпициклическую теорию Птолемея Коперник заменил своей. Но математический аппарат в книге Коперника тем не менее оставался сложным и давал видимое с Земли положение планет в общем менее точное, чем у Птолемея. Неравномерное движение планеты по орбите вокруг Солнца невозможно с хорошей точностью описать как движение по одной окружности с центром в Солнце. Сохранив принцип сложения равномерных круговых движений, Коперник «для спасения явлений» ввел модели движения планет как комбинации пар окружностей – эксцентров и эпициклов. И только после того, как выдающийся немецкий астроном и математик И. Кеплер в начале XVII в. установил, что каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце, окружности из теории Коперника были устранены, а теория конических сечений, глубоко разработанная древнегреческими геометрами, нашла свое практическое применение. С современной точки зрения сложение круговых движений в теориях Евдокса, Птолемея и Коперника представляет начатки гармонического анализа в геометрическом виде. О Копернике см. и на с. 147–148.

Важное значение для математики имеет тот факт, что Птолемей в своем труде приводит сведения по плоской и сферической тригонометрии и развивает ее глубже. Пользуясь своей теоремой о том, что во всяком вписанном в окружность четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон, он выводит для хорд круга, используемых греками вместо наших синусов, формулы, аналогичные нашим формулам $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$. Ему были известны для хорд аналоги наших формул $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. Находя значения хорд для углов $\frac{60^\circ}{2^n}$, $\frac{90^\circ}{2^n}$, $\frac{72^\circ}{2^n}$, а затем хорды углов $\alpha \pm \beta$ по известным хордам углов α, β, Птолемей строит в шестидесятеричной системе таблицу хорд для углов от 0° до 180° через $\frac{1}{2}$ градуса с точностью до $1''$. Эта таблица равнозначна нашей таблице синусов для углов от 0° до 90° через $\frac{1}{4}$ градуса с точностью до 5 десятичных знаков. Ею пользовались астрономы в течение многих веков. Птолемей приводит и хорошее приближенное значение $3;8'30''$ для числа π в шестидесятеричной системе, т. е. $\pi \approx 3\frac{17}{120} = \frac{377}{120} \approx 3{,}14167$ с избытком менее 10^{-4}. Отметим, что плоская тригонометрия исторически развивалась, в общем, позже сферической, так как основным объектом применения тригонометрии долго была астрономия. Об истории развития тригонометрии: [47].

Занимаясь картографией, Птолемей в работе «Отображение сферы на плоскость» (эту работу обычно называют «Планисферий») приводит стереографическую проекцию сферы, т. е. проекцию сферы из одной ее точки («полюса») на плоскость, касающуюся сферы в диаметрально противоположной точке. В одной его книге о телах впервые упомянуты три взаимно перпендикулярные оси – прообраз современной прямоугольной системы координат в пространстве.

Американский астроном Роберт Ньютон в своей книге «Преступление Клавдия Птолемея» (М.: Наука, 1985. – 384 с., англ. издание 1978 г.) сначала приводит сведения о планиметрии Птолемея, об измерении Земли Эратосфеном, общие сведения об эпициклической системе и др. Далее он критически анализирует содержание «Альмагеста» Птолемея, находит много якобы грубых ошибок в наблюдениях, выполненных Птолемеем, и заявляет, что Птолемей «сфабриковал все свои наблюдения» с тем, чтобы они соответствовали его теории. Поэтому Птолемея он называет «самым удачливым обманщиком в истории науки».

Ю. Д. Красильников в работе 1998–1999 гг. «“Преступление” Роберта Ньютона», помещенной в Википедии, проверил с помощью современной программы результаты вычислений Р. Ньютона в главе V, где речь идет о движении Солнца по небосводу. Оказалось, что даты и время равноденствий и солнцестояний (они являются базовыми в астрономии) Птолемей привел для своей эпохи существенно более точные, чем вычисленные Р. Ньютоном. Допускает Р. Ньютон в этой главе и другие ошибки, в том числе связанные с длительностями сезонов (времен) года. Автор статьи приходит к выводу, что обвинения Р. Ньютоном Птолемея в фальсификациях несостоятельны, а вычисления Р. Ньютона требуют тщательнейшей проверки.

В книге И. А. Климишина «Открытие Вселенной» (М.: Наука, 1987. – 320 с.) на с. 31–72 рассматривается «Математический синтаксис», т. е. «Альмагест» Птолемея. Автор также выступает против нападок Р. Ньютона на Птолемея и пишет: «Вне всякого сомнения Птолемей является одним из самых выдающихся математиков древнего мира. Ведь лишь гиганту была под силу столь огромная и кропотливая работа – синтез всех достижений астрономии и построение на этой основе стройной геометрической модели мира» (с. 57).

О Птолемее: книги, указанные выше в очерке, а также [1, т. 1, с. 142–143; 47, с. 16–20, с. 36–39]; Бронштэн В. А. Клавдий Птолемей. – М.: Наука, 1988. – 240 с.

Диофант

В Александрии жил древнегреческий математик **Диофант** – один из величайших математиков древности. Из стихотворной задачи, которая была приведена на его надгробии, видно, что он прожил 84 года, но когда точно – неизвестно. На основании некоторых данных считают, что он жил, вероятно, в III в. Совершенно уникальным в древнегреческой математике является его замечательный труд «Арифметика» в 13 книгах, из которых до нас дошли шесть на греческом языке. Недавно найдено еще четыре книги на арабском языке, которые в основном являются переработкой первых четырех книг «Арифметики» Диофанта. В его труде античная алгебра достигла своего высшего развития. Здесь Диофант решительно порывает с геометрической алгеброй. Несомненно принадлежащие Диофанту 6 книг «Арифметики» представляют собой сборник из 189 задач с решениями. Здесь ищутся решения в положительных рациональных (в частности натуральных) числах разнообразных уравнений и систем уравнений первых шести степеней. Начиная со второй книги, большая часть уравнений и систем – неопределенные (теперь их обычно называют диофантовыми), а именно: в них неизвестных больше числа уравнений.

В «Арифметике» Диофант впервые вводит буквенную символику: обозначение ς для неизвестной (или $\varsigma\varsigma$, если неизвестная входит с коэффициентом, отличным от единицы), M° – для нулевой степени, буквенные обозначения для первых шести положительных степеней неизвестной ($\Delta^{\upsilon} = x^2$, $K^{\upsilon} = x^3$, $\Delta\Delta^{\upsilon} = x^4$, $\Delta K^{\upsilon} = x^5$, $KK^{\upsilon} = x^6$) и первых шести отрицательных степеней – с помощью знака χ (например, $\Delta^{\upsilon\chi}$ означает x^{-2}). Он вводит знак $\pitchfork$ («минус») и $\iota\sigma$ («равно»). Знака для сложения он не вводит, а выписывает подряд сначала все положительные члены уравнения, а затем, после знака $\pitchfork$, все отрицательные. Например, уравнение $x^3 - 2x^2 + 10x - 3 = x$ в его обозначениях имело бы вид $K^{\upsilon}\overline{\alpha}\varsigma\varsigma\overline{\iota} \pitchfork \Delta^{\upsilon}\overline{\beta}M^{\circ}\overline{\gamma}\iota\sigma\varsigma\overline{\alpha}$ (здесь $\overline{\alpha} = 1$, $\overline{\beta} = 2$, $\overline{\gamma} = 3$, $\overline{\iota} = 10$). Диофант вводит правила умножения введенных им степеней, аналогичные нашим $x^m x^n = x^{m+n}$, $x^m x^{-m} = 1$, формулирует правило знаков при умножении отрицательного одночлена на отрицательный и на положительный, а также приводит правило переноса слагаемого в другую часть уравнения и правило уничтожения равных членов.

Задачи он формулирует словесно, поскольку у него имеется обозначение лишь для одной неизвестной. Например: «Найти такие три числа, чтобы квадрат суммы всех трех, вычтенный из каждого числа, давал квадрат». В нашей записи это задача о решении системы трех уравнений с шестью неизвестными, т. е. $x_i - (x_1 + x_2 + x_3)^2 = y_i^2$, $i = 1,2,3$, в положительных рациональных числах. Детальное изложение методов Диофанта имеется в [39–41], см. также книгу: Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу [68]. Укажем лишь на некоторые общие приемы Диофанта. Он вводит одну неизвестную s, а искомые неизвестные выражает как рациональные функции от s и некоторых параметров, которым придает подходящие числовые значения, и в результате получает искомые неизвестные в виде положительных рациональных чисел. Например, в указанной выше задаче Диофант полагает $s = x_1 + x_2 + x_3$, $x_i = (\alpha_i^2 + 1)s^2$, $i = 1,2,3$ (в качестве параметров он берет здесь конкретно $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$; иногда в подобных случаях он оговаривает, что можно взять и другие значения параметров). Тогда $s = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 3)s^2$, откуда $s = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 3)^{-1}$, при этом $y_i^2 = (\alpha_i^2 + 1)s^2 - s^2 = (\alpha_i s)^2$, $i = 1,2,3$. Иногда он расчленяет решение задачи на части, в каждой из которых вводит свою неизвестную, обозначая ее снова через s. Диофант искусно выбирает подстановки в уравнениях с таким расчетом, чтобы уничтожились все члены уравнения, кроме двух членов последовательных степеней, откуда неизвестная выражается рационально. Например, уравнение $y^2 = a^2x^2 + bx + c$ он «рационализирует» с помощью подстановки $y = ax + s$, а уравнение $y^2 = ax^2 + bx + c^2$ – с помощью подстановки $y = sx + c$, где s – новая неизвестная. При этом получаются уравнения первой степени для определения x. Эти две подстановки носят имя Л. Эйлера, который в XVIII веке использовал их для вычисления интегралов от квадратичных иррациональностей.

На примерах задач первых книг «Арифметики» Диофант показывает, если использовать современную терминологию, что рациональные решения неопределенных уравнений вида $F(x, y) = 0$ второй степени выражаются как рациональные функции $x = \varphi(k)$, $y = \psi(k)$ от одного параметра k. Для неопределенных уравнений порядка выше второго это уже, вообще говоря, не так, поэтому требуются другие методы, их указывает Диофант в книге IV (метод касательной и метод секущей для уравнения 3-го порядка, метод парабол для уравнения 4-го порядка). Эти методы были так названы в XIX в. в связи с введением геометрической интерпретации соответствующих подстановок Диофанта: новая рациональная точка алгебраической кривой получается как пересечение с кривой касательной, секущей или параболы, проведенных через известную рациональную точку кривой.

Диофант является одним из главных предшественников в создании алгебры и теории чисел. Его книга «Арифметика» оказала большое влияние на творчество арабских математиков в средние века и европейских математиков, начиная с XVI в., в особенности на исследования в теории чисел великого французского математика П. Ферма (1601–1665). В замечаниях ко многим задачам «Арифметики» Диофанта он высказал ряд глубоких теорем из теории чисел [68]. Дальнейшей разработкой теории решения диофантовых уравнений занимались в XVIII в. Эйлер и Лагранж, а в начале XIX в. – Коши.

Из задач о решении неопределенных уравнений и систем в дальнейшем выросла область математики под названием «диофантов анализ» (сейчас ее также называют диофантовой геометрией). В 1834 г. немецкий математик К. Г. Якоби заметил связь между диофантовым анализом и теоремой Эйлера о сложении эллиптических интегралов и довольно близко подошел к открытию структуры множества рациональных точек эллиптической кривой. Но его работа до XX в. оставалась незамеченной, а в 1901 г. появился мемуар замечательного французского математика А. Пуанкаре «Об арифметических свойствах алгебраических кривых». Здесь Пуанкаре определил операцию, равносильную операции сложения рациональных точек эллиптической кривой (эти точки образуют коммутативную группу), а затем привел классификацию алгебраических кривых вида $f(x,y)=0$ порядка m и рода 0 и 1 на основе бирациональных преобразований [41]. Один из разделов теории чисел называется «диофантовы приближения», в нем изучаются решения в целых числах неравенств и систем неравенств с действительными коэффициетами. Об истории диофантова анализа до Ферма см. [40; 39], начиная с Ферма – указанную выше книгу [68], а также [41] и [21, вып. 20, с. 104–124].

Папп

Во второй пловине III в. в Александрии жил древнегреческий математик **Папп**. У него есть также и свои достижения в математике, но больше он известен как знаток и замечательный комментатор трудов по математике, механике и астрономии эллинистического периода. Многие достижения древнегреческой математики и механики (в частности, из не дошедших до нас сочинений Евклида и Аполлония) Папп изложил вместе в своем главном произведении « Математическое собрание» в 8 книгах, дополнив их комментариями и некоторыми своими результатами.

После Архимеда Папп является первым известным нам математиком, который занимался также квадратурами и кубатурами, их у Паппа около пятнадцати. Многие из них рассматривал уже Архимед, но некоторые получены по-новому. Например, для отыскания площади фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда и полярной осью, Папп в IV книге изображает спираль Архимеда в виде прямой фактически в прямоугольной системе координат φ, ρ, а затем вместо интегральных сумм рассматривает некоторые простанственные построения, что дает ему возможность обойтись без использования суммы квадратов первых n натуральных чисел. Папп в этой книге обобщил спираль Архимеда, рассмотрев спираль на полусфере как траекторию точки, выходящей из полюса и движущейся равномерно по меридиану, который равномерно вращается. Он рассмотрел задачу о вычислении площади криволинейной фигуры на сфере, ограниченной этой спиралью и меридианом. В VII книге «Собрания» Паппа приведена формулировка (без доказательства) теорем об отыскании объемов и площадей поверхностей вращения с помощью центров тяжести фигур [79, с. 39–41]. Эти теоремы были заново установлены (без строгого доказательства) в XVII в. швейцарским математиком П. Гульдином, имя которого они носят. Об интеграционных методах Паппа см., например, в [79]. В V книге Папп излагает работу Зенодора об изопериметрических фигурах с некоторыми своими дополнениями.

В VII книге Папп приводит важные результаты, относящиеся уже к проективной геометрии. Прежде всего, это по-иному сформулированная теорема, которую доказал в XVII веке французский математик Дезарг (рис. 11):

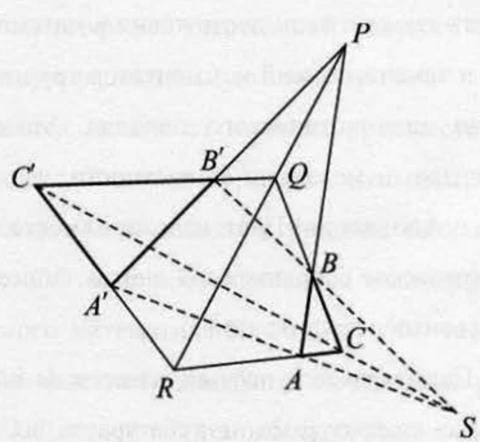


Рис. 11

если соответственные стороны (или их продолжения) двух треугольноков ABC и $A'B'C'$ пересекаются в точках P, Q, R, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке S и обратно. Папп говорит, что эта теорема следует из (не дошедших до нас) предложений Евклида («поризмов»). Затем Папп виртуозно доказывает ряд лемм, касающихся свойств рассматриваемого в проективной геометрии так называемого двойного отношения для четырех точек на прямой, а из них выводит свою знаменитую теорему, которая в современных обозначениях утверждает (рис. 12): если на двух прямых взять, соответственно, точки

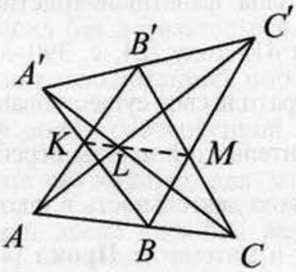


Рис. 12

A, B, C и A', B', C', отличные от точки пересечения этих прямых, то точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, AC' и $A'C$ лежат на одной прямой [24, с. 387–390]. Эта теорема является вырожденным случаем теоремы Паскаля (XVII в.), в которой точки A, B, C и A', B', C' берутся на коническом сечении. О Паппе: [79; 24; 27].

«Математическое собрание» Паппа – это последний большой трактат по древнегреческой математике и ценный источник по ее истории. После Паппа математика в древней Греции окончательно приходит в упадок. Если в последние два века до нашей эры основными причинами упадка математики был ее геометрический характер и высокий стандарт строгости ее изложения, требующий больших усилий для его достижения, а также неблагоприятные условия из-за римского владычества, то в первые века нашей эры к этому добавилось резко нетерпимое отношение христианской церкви к античному наследию как языческому и чуждому христианству. Последовали декреты об упразднении языческих храмов и школ. В 391 г. фанатичная толпа христиан разгромила и сожгла знаменитую александрийскую библиотеку, находившуюся в египетском языческом храме. Александрийская школа оказалась под угрозой закрытия.

Греческий математик и астроном второй половины IV в. **Теон Александрийский (Теон Младший)** известен своими ценными комментариями к трудам Евклида и Птолемея. Его дочь **Гипатия (Ипатия, 370–415)** – первая в истории женщина-математик, она славилась своей ученостью, красноречием, обаянием и безупречной жизнью. Говорят, что она написала комментарии к трудам Аполлония и Диофанта, преподавала в Александрийской школе философию Платона и Аристотеля. Толпа фанатиков-христиан, побуждаемая епископом Кириллом, растерзала ее в 415 году [24, с. 390–391]. Александрийская школа после смерти Гипатии прекратила свое существование.

Уцелевшие представители этой школы перебрались в Афины и там некоторое время продолжали свою деятельность в школе неоплатоников. В Афинах жил философ-неоплатоник и математик **Прокл (410–485)**, автор ряда книг по философии. Для нас представляют интерес его комментарии к I книге «Начал» Евклида, в которых Прокл дает обзор истории древнегреческой геометрии до Евклида. В начале VI в. жил один из последних представителей неоплатоновской школы – **Евтокий**, он написал комментарии к некоторым сочинениям Архимеда и Аполлония. Последним представителем афинской школы неоплатонизма был философ **Симпликий (I половина VI в.)**, знаменитый комментатор Аристотеля. В частности, Симпликий привел отрывки из трактата Гиппократа Хиосского о квадрировании луночек. В это время Греция была составной частью Византии, т. е. Восточной Римской империи (IV в. – середина XV в.) со столицей в Константинополе, официальным греческим языком и православной религией. При императоре Юстиниане в VI в. Византия превратилась в крупную средиземноморскую державу. Но при этом продолжалось наступление церкви на науку. В 529 г. Юстиниан запретил преподавать греческую философию и закрыл Академию в Афинах. На этом античный период в истории закончился. Труды древнегреческих математиков были преданы забвению в европейских странах до XII века, а математика в этих странах в VI–XI вв. опустилась до жалкого уровня. О древнегреческой математике: [24; 1, т. 1; 4; 25–41].

Математика в древнем Китае

Китайская цивилизация возникла за 20 веков до н. э. Математика в древнем Китае достигла довольно высокого уровня в связи с потребностями хозяйственной жизни и запросами астрономии. Уже в XIV в. до н. э. китайцы успешно согласовывали лунный и солнечный календари. Математика в древнем Китае, как и в Вавилоне и Египте, носила догматический характер, представляя собой набор правил без доказательств. С IV в. до н. э. китайцы изображали числа с помощью расположенных определенным образом палочек и кружочков на счетной доске, расчерченной на квадраты. Эти конфигурации палочек и кружочков служили не для записи чисел, а только для счета, вычисления на счетной доске китайцы вели в десятичной системе счисления. При сложении и вычитании они использовали и отрицательные числа («фу»), составляя их из палочек и кружочков иного цвета. Даже после изобретения китайцами около II в. до н. э. бумаги вычисления по-прежнему велись ими на счетной доске или на китайских счетах «суан-пан». Для записи чисел китайцы создали иероглифическую нумерацию, установившуюся к III в. до н. э. и используемую и в настоящее время, хотя в научной литературе сейчас она вытеснена «арабскими» цифрами. Она была десятичной, но не вполне позиционной, так как для записи, например, числа 263 нужно было писать иероглифы чисел 2, 100, 6, 10, 3. Уже во II в. до н. э. в Китае применялась десятичная система мер и были изобретены десятичные дроби, но еще не в отвлеченной форме, а связанные с системой мер.

Сведения о древнекитайской математике нам известны из трактата «Математика в 9 книгах», который составил во II в. до н. э. финансовый чиновник **Чжан Цань** на основе более ранних сочинений. Трактат содержит 246 задач, включающих формулировку задачи, ответ, решение в сжатой форме. Это энциклопедия знаний по землемерию, строительству, финансовым расчетам и т. п. Геометрические сведения не выделены, а сообщаются в различных книгах трактата. В книге IV приведен алгоритм приближенного извлечения квадратных и кубических корней путем последовательного нахождения цифр десятичных разрядов корня. Позже, в XIII в., китайцы обобщили его на приближенное вычисление действительных корней уравнений n-й степени (метод «тянь-юань»). Его излагает **Цинь Цзюшао** в трактате «Математика в 9 книгах» (1247). Метод заключается в том, что для уравнения $f(x)=0$ степени n, действительный корень которого в десятичной записи имеет вид $x=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, сначала подбором находят целую часть α_0 корня. Затем с помощью замены $y=10(x-\alpha_0)$ переходят к новому уравнению $f_1(x)=0$, имеющему корень $y=\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\ldots$, и т. д. При этом переход от предыдущего уравнения к следующему осуществляется по схеме деления многочлена на двучлен, которая сейчас носит имя английского математика **В. Горнера (1786–1837)**. В европейской математике этот метод вычисления корней открыл и опубликовал в 1804 г. итальянский математик П. Руффини, а называется он обычно методом Горнера.

В книге VII «Избыток и недостаток» приводятся методы решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, в частности с помощью правила двух ложных положений, которое заключается в следующем. Для неизвестной x берут два значения x_1, x_2, по ним из первого уравнения системы находят y_1, y_2. По результатам (недостатку, избытку), полученным при подстановке (x_i,y_i), $i=1,2$ во второе уравнение системы, и значениям x_1 и x_2 находят точное решение. Но вершиной достижений китайских математиков в древности явилась книга VIII трактата, где излагается метод решения линейной системы n уравнений с n неизвестными на счетной доске путем приведения матрицы коэффициентов системы к треугольному виду. В европейской математике этот метод предложил в XIX в. немецкий математик **К. Ф. Гаусс (1777–1855)**. О вычислительных способностях китайских математиков древнего периода можно судить по приближенному вычислению ими числа π. Китайский комментатор трактата «Математика в 9 книгах» в III в. нашел приближение $\pi\approx 3{,}14159$ с помощью вписанного в окружность 3072-угольника. А замечательный китайский математик **Цзу Чунчжи** в V в. вычислил π с шестью точными знаками после запятой, приведя приближение $\frac{355}{113} \approx 3{,}1415929$. Этот результат был превзойден лишь через 1000 лет работавшим в Самарканде математиком Джемшидом ал-Каши, который вычислил число π с 17 верными знаками. О математике в Китае: [42; 43, гл. 1; 1, т. 1].

Математика в древней Индии (до VI в. н. э.)

Во втором тысячелетии до н. э. первоначальное население Индии было завоевано племенами индоевропейской языковой группы – ариями, говорившими на санскрите, который вскоре стал в Индии языком религии и науки. На нем было написано большинство научных трактатов и религиозных книг. Первые сведения о математике в древней Индии известны из древних священных философско-религиозных книг брахманов «Веды» («Знания»). Одна из них – «Шулва сутра» («Правила веревки») – написана, как полагают, в VII–V вв. до н. э. В ней говорится о правилах построения алтарей и храмов, а также о необходимых для этого существенных геометрических знаниях. Древние индусы применяли пять видов прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, из которых составляли некоторые другие фигуры. С помощью теоремы Пифагора по данному квадрату строили квадраты удвоенной и утроенной площади, преобразовывали прямоугольник в квадрат. В «Правилах веревки» сообщается и о некоторых приближенных приемах квадратуры круга и циркулятуры квадрата.

В Индии издавна счет был десятичным, хотя система счисления там не сразу стала позиционной. Характерной чертой идийской космогонии было оперирование огромными интервалами времени, поэтому санскрит имеет названия степеней вида 10^n для n порядка нескольких десятков. Уже в древнем эпосе «Махабхарата», оформившемся к V в. до н. э., встречаются числа до 10^{17}, а в эпической поэме «Рамаяна», принявшей современный вид ко II в. до н. э., – числа до 10^{40}. Начиная с VI в. до н. э., индусы записывали числа с помощью цифр письма «брахми», еще без нуля. Позже на основе этих цифр были введены цифры письма «деванагари», от которых произошли арабские цифры, появился нуль. Арабские цифры имеют две формы записи – западноарабскую и восточноарабскую. В XI–XII вв. западноарабские цифры были позаимствованы европейцами у испанских арабов (мавров). Ряду санскритских числительных родственны числительные в славянских и многих западноевропейских языках. Примеры санскритских названий числительных: *эка* – 1, *дви*, *две* – 2, *трайа* – 3, *чатвара* – 4, *панча* – 5, *шаш* – 6, *сапта* – 7, *ашта* – 8, *нава* – 9, *даса* – 10, *сатам* – 100 [43, с. 119]; *пурва* – «первый», *уттара* – «второй». Неизвестно точно, когда индийская десятичная система счисления стала позиционной, но это произошло не позже VI в. н. э. Изобретение десятичной позиционной системы счисления является одним из важнейших достижений индусов.

Интенсивное развитие математики в Индии начинается ближе к концу древнего периода, в IV–V вв., когда были созданы пять астрономо-математических трудов – «сиддхант» («учений»), одним из которых является «Сурья сиддханта» («Солнечное учение») неизвестного автора. Здесь сообщаются также и математические сведения, при этом заметно греческое влияние, используются некоторые греческие термины. Древние индусы впервые ввели синусы (полухорды), тогда как греки пользовались хордами круга. Индусы ввели также косинус – геометрически, как отрезок прямой в круге. В «Сурья сиддханте» приведена таблица синусов через $3^\circ 45'$. Термин «синус» имеет следующее происхождение. У индусов хорда круга называлась «джива», т. е. «тетива лука». При заимствовании арабы записывали слово «джива» (или «джия») согласными буквами как «джб» и стали произносить как «джайб», что по-арабски означало: пазуха, впадина, залив. На латинский язык оно было переведено словом «синус», имеющим то же значение, что и у арабов. Индийская математика достигла расцвета в средние века, о чем будет речь ниже. Об индийской математике в древности: [43, с. 106–130].

Краткие итоги развития математики в древности

В древнем Вавилоне и в древнем Египте математика начала развиваться в III–II тысячелетиях до н. э., – раньше, чем в других странах. У древних вавилонян было уже довольно развитое понятие числа (натуральные числа, положительные рациональные числа и некоторые иррациональности). Изобретение шестидесятеричной позиционной системы счисления явилось огромным достижением древних вавилонян (шумеров). Слабее было развито понятие числа в древнеегипетской математике. Писцы в древнем Вавилоне и Египте широко пользовались разнообразными математическими таблицами. Геометрические познания в этих странах были еще небольшими и сводились в основном к вычислению площадей и объемов некоторых простейших фигур и применению «теоремы Пифагора», известной за 1200 лет до Пифагора. Большим достижением было умение решать линейные и квадратные уравнения, некоторые системы уравнений, сводящиеся к квадратным, а также некоторые неопределенные уравнения. В древности математика в Вавилоне, Египте, Индии, Китае представляла собой набор правил без доказательств. Дальнейшее бурное развитие математики в древней Греции сначала испытало на себе влияние вавилонской и египетской математики.

В древней Греции математика оформилась как самостоятельная, дедуктивная наука, т. е. построенная на основе доказательств. Именно в древней Греции были получены огромные достижения, которые определили дальнейшее развитие математики в течение многих веков. Начальный период развития древнегреческой математики связан с именами Фалеса и Пифагора (VI в. до н. э.). В школе Пифагора были получены некоторые результаты, связанные с делимостью чисел, «теоремой Пифагора», но главное – открыты иррациональные числа. Чтобы избежать трудностей, связанных с логическим обоснованием иррациональных чисел, древние греки геометризовали алгебраические уравнения, то есть перешли к «геометрической алгебре». В V в. до н. э. были поставлены три знаменитые задачи древности (об удвоении куба, о трисекции угла и о квадратуре круга) и, поскольку решить их при помощи циркуля и линейки не удавалось, были предложены решения другими средствами. Были также обнаружены трудности, возникающие при попытках описать движение с помощью бесконечных последовательностей отрезков пути и времени (апории Зенона). В IV в. до н. э. Аристотель дал первое систематическое построение логики. Тогда же Евдокс создал теорию отношений величин – античный аналог теории действительных чисел, а также «метод исчерпывания», т. е. метод доказательства, основанный на двойном рассуждении от противного и использовании неявного понятия предельного перехода, выраженного на языке неравенств. Это было важным шагом на пути к возникновению математического анализа. В IV в. до н. э. Менехм открыл конические сечения и применил их к решению задачи об удвоении куба. Высокого развития древнегреческая математика достигла в IV в. до н. э. (Евдокс, Архит, Теэтет, Менехм, Евклид), а особенно в III в. до н. э. (Архимед, Аполлоний). Фундаментальный труд «Начала» Евклида, жившего во второй половине IV в. до н. э., был итогом более чем двухвекового развития математики. Изложенный дедуктивно, на аксиоматической основе, он выдержал уже в Новое время (с XVII в.) огромное количество изданий. В течение более чем 20 веков «Начала» Евклида выполняли роль учебника, являясь образцом строгого изложения. Великий математик и механик Архимед, живший в III в. до н. э., внес огромный вклад в создание интегрального и дифференциального исчисления своими достижениями: введением верхних и нижних интегральных сумм, многочисленными квадратурами и кубатурами, введением бесконечно малого полярного треугольника, нахождением геометрического условия экстремума произведения функций. Однако общего понятия предела и интеграла в античное время сформулировано не было. Огромное значение для дальнейшего развития математики имела систематическая разработка Аполлонием теории конических сечений в III в. до н. э.

После периода упадка древнегреческой математики (II–I вв. до н. э.) снова наступает ее возрождение в I–III вв. н. э. Начинает развиваться прикладная математика (Герон). Возникает сферическая и плоская тригонометрия (Менелай, Птолемей). Во II в. Птолемей разработал кинематико-геометрическую геоцентрическую теорию движения планет. Замечательнй математик Диофант в III в. в своем труде «Арифметика» создал первую алгебраическую символику и с особенной проницательностью разработал методы решения неопределенных уравнений и систем в рациональных числах, создавая основу для дальнейшего развития теории чисел и алгебры. Математик и комментатор Папп в III в. получил некоторые результаты, относящиеся к интегральному исчислению, и некоторые важные теоремы проективной геометрии. После III в. математика в древней Греции прекращает свое развитие как из-за ограниченных возможностей геометрической алгебры, так и в силу наступления христианской церкви на античную науку. И лишь более чем через тысячу лет наступает возрождение математики в Европе. Критически усвоенная древнегреческая математика становится основой европейской научной революции XVII в.

В последние века до н. э. и первые века н. э. развивается математика в древнем Китае и древней Индии, имеющая догматический характер. Китайцы изобрели десятичную систему счисления для вычислений с помощью палочек на счетной доске, а также десятичные дроби. Они знали алгоритмы приближенного вычисления квадратных и кубических корней путем последовательного нахождения цифр десятичных разрядов корня. Наибольшим достижением китайских математиков во II в. до н. э. было умение решать системы линейных уравнений на счетной доске путем приведения их к треугольному виду, т. е. по методу, открытому в Европе в XIX в. знаменитым немецким математиком Гауссом.

Из достижений древнеиндийских математиков большое значение имело введение десятичной позиционной системы счисления, позаимствованной у них в средние века арабами, а от них – европейцами. Кроме того, в древней Индии были введены в математике в качестве отрезков синус и косинус. Китайская и индийская математика развивалась уже в период упадка математики в древней Греции, особенно в средние века.

Об истории математики в древности: [1, т. 1; 24; 4; 5; 6–28; 30–42; 2; 3].

МАТЕМАТИКА В СРЕДНИЕ ВЕКА

Математика в Индии в средние века

Период времени от VI в. до начала XVII в. называют средними веками. В основном на протяжении этого времени в Западной Европе зарождается, развивается и клонится к закату феодализм. В VI–XI вв. в христианских странах Европы математика находится в состоянии глубокого упадка. Центр научных исследований перемещается сначала в Индию, а затем в арабские страны. Здесь математика была неразрывно связана с астрономией, как это было и в древней Индии.

Ариабхата I

Большой вклад в развитие индийской математики и астрономии внес **Ариабхата I (476 – ок. 550)**. В его астрономическом сочинении «Ариабхатия» (499) изложены также математические сведения. Он обозначает цифры согласными буквами с добавлением к ним некоторых гласных. У него впервые в индийской математике описаны (в стихах) способы извлечения квадратных и кубических корней. Он решает квадратные уравнения в положительных числах, а также неопределенные уравнения вида $ax+b=cy$ в целых числах, приводит правила суммирования натуральных квадратов и кубов. Ариабхата высказывает догадку о вращении Земли вокруг оси и вокруг Солнца. Он приводит приближенное значение $\frac{62832}{20000}=3{,}1416$ для числа π и таблицу синусов, менее подробную и точную, чем таблица хорд у Птолемея. Об Ариабхате I: [45].

Брахмагупта

Крупным индийским асторономом и математиком VII в. был **Брахмагупта (598 – ок. 660)**. До нас дошла одна его сиддханта «Пересмотр учения Брахмы» (628), состоящая из 20 книг, из которых 12-я книга посвящена арифметике и геометрии, а 18-я – алгебре. Брахмагупта рассматривает уже и отрицательные числа, трактуя положительные числа как имущество, а отрицательные – как долг. Он приводит правила арифметических действий над отрицательными числами, и с тех пор эти числа систематически используются в индийской математике. Впервые он дает общее правило решения квадратных уравнений вида $ax^2 + bx = c$, $a > 0$, где коэффициенты b и c уже принимают и отрицательные значения, хотя он еще и не говорит о том, что здесь корней, вообще говоря, два. Брахмагупта подробно излагает метод решения неопределенных уравнений $ax + b = cy$ в целых числах, используя разложение отношения $\frac{a}{c}$ в цепную дробь. У него встречается приближение $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3{,}162$. Он приводит некоторые интерполяционные формулы, которые применяет, в частности, для вычисления синусов. Брахмагупта распространяет формулу Герона для площади треугольника, известную еще Архимеду, на четырехугольник (она справедлива для четырехугольников, вписанных в круг).

Индийский математик **Магавира (814/815–880)** написал книгу «Краткий курс математики» (ок. 850). Он говорит, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения, а из отрицательного – не существует. Магавира знает уже правило для отыскания обоих корней квадратного уравнения. Он суммирует квадраты и кубы членов арифметической прогрессии, решает в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, а также некоторые системы линейных уравнений.

Бхаскара II

Крупный индийский математик и астроном XII века **Бхаскара II (1114–1185)** написал около 1150 г. трактат «Сиддханта – широмани» («Венец учения»). Его первая часть «Лилавати» («Прекрасная») посвящена арифметике, вторая часть «Биджаганита» («Искусство вычисления») – алгебре, а остальные две части – астрономии. Бхаскара решает квадратные уравнения, приводит условия существования двух положительных корней таких уравнений. Решает он и некоторые системы уравнений (не только линейные), а также специально подобранные уравнения 3-й и 4-й степеней. Он освобождается от иррациональностей в знаменателе, преобразует квадратичные иррациональности с помощью правил

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \text{и} \quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Бхаскара приводит доказательство теоремы Пифагора в виде рисунка 13 с надписью «смотри». Геометрически здесь очевидно, что $c^2=(a-b)^2+4\cdot\frac{ab}{2}$, откуда $c^2=a^2+b^2$.

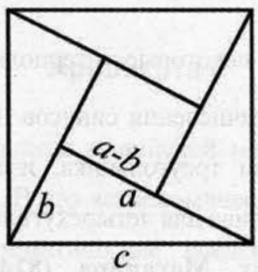


Рис. 13

Большим достижением в теории чисел являются разработанные Брахмагуптой и Бхаскарой очень тонкие методы решения в натуральных числах неопределенного уравнения $ax^2+b^2=y^2$ и его важного частного случая $ax^2+1=y^2$. Последнее уравнение носит имя английского математика XVII в. Дж. Пелля, которому Л. Эйлер по ошибке приписал один из способов решения этого уравнения. В Европе этим уравнением занимались: в XVII в. – Ферма, в XVIII в. – Эйлер и Лагранж. Сейчас это уравнение называют также уравнением Ферма. (Об этом уравнении см. в части 2 пособия на с. 188–189.)

Огромное значение имело изобретение десятичной позиционной системы счисления в Индии. Большим достижением индусов было также создание довольно развитой алгебраической символики. Если неизвестная была одна, то ее обозначали буквой, обозначавшей слог «*йа*», это сокращение от «*йават-тават*» (столько, сколько). Если неизвестных было несколько, то их сокращенно обозначали начальными буквами слов, выражающих различные цвета: «*ка*» («*калака*» – черный), «*ни*» («*нилака*» – голубой) и т. д. Степени обозначались с помощью сочетаний начальных букв слов «*варга*» – квадрат, «*гхана*» – куб и слова «*гхата*» – произведение: $x^2 = ва$, $x^3 = гха$, $x^4 = (x^2)^2 = ва\ ва$, $x^5 = x^2 \cdot x^3 = ва\ гха\ гхата$, $x^6 = (x^2)^3 = ва\ гха$, $x^7 = x^4 \cdot x^3 = ва\ ва\ гха\ гхата$ и т. д. Знак равенства у индусов отсутствовал, обе части уравнения писали одну под другой. Например, уравнение $10x - 8 = x^2 + 1$ записывалось в виде

$$\begin{array}{ccccccc} йа & ва & 0 & йа & 10 & ру & \dot{8} \\ йа & ва & 1 & йа & 0 & ру & 1 \end{array}$$

(здесь $йа\ ва = x^2$, $йа = x$, $ру$ – свободный член, точка над числом 8 означает минус). Индийское название нуля – «*шунья*» (пустое) арабы перевели имеющим то же значение словом «*сыфр*», отсюда происходит наш термин «*цифра*». Индийские математики сформулировали правила действий с обыкновенными дробями, аналогичные современным.

Диофант изложил способы получения рациональных решений неопределенных уравнений. Ариабхата I, Брахмагупта и Бхаскара II решали уравнения $ax + b = cy$ с целыми положительными коэффициентами в целых числах, используя цепные дроби. Этот способ более подробно был изложен Бхаскарой II, он заключается в следующем.

Пусть a, b, c – целые положительные числа, причем a и c взаимно простые и $a > c$. Отношение $\frac{a}{c}$ с помощью алгоритма Евклида разлагается в цепную дробь $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$. Дробь $\frac{P_k}{Q_k} = (q_0, q_1, \ldots, q_k)$ называется k-й подходящей дробью для $\frac{a}{c}$. Тогда $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{c}$, $\frac{P_{n-1}}{Qn-1} = (q_0, q_1, \ldots, q_{n-1})$. Все решения уравнения $ax + b = cy$ при указанных выше условиях выражаются равенствами

$$x = (-1)^n bQ_{n-1} + Q_n t, \qquad y = (-1)^n bP_{n-1} + P_n t,$$

где t может принимать любые целые значения.

Покажем, как с помощью алгоритма Евклида обыкновенная дробь $\frac{a}{c}$ преобразуется в цепную. Алгоритм Евклида заключается в цепочке последовательных делений положительных целых чисел (с остатками):

$$a = q_0 c + r_1 \quad (0 \le r_1 < c),$$
$$c = q_1 r_1 + r_2 \quad (0 \le r_2 < r_1),$$
$$r_1 = q_2 r_2 + r_3 \quad (0 \le r_3 < r_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n \quad (0 \le r_n < r_{n-1}),$$
$$r_{n-1} = q_n r_n \quad (r_{n+1} = 0).$$

Если эту цепочку равенств записать в виде

$$\frac{a}{c} = q_0 + \frac{r_1}{c},$$
$$\frac{c}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1},$$
$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}},$$
$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n,$$

то она дает разложение $\frac{a}{c}$ в цепную дробь

$$\frac{a}{c} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}} = (q_0, q_1, \ldots, q_n).$$

Приведем один из примеров, решенных Бхаскарой II. В уравнении

$$100x + 90 = 63y$$

коэффициенты $a = 100$ и $c = 63$ взаимно простые и $a > c$. Алгоритм Евклида

$$100 = 1 \cdot 63 + 37,$$
$$63 = 1 \cdot 37 + 26,$$
$$37 = 1 \cdot 26 + 11,$$
$$26 = 2 \cdot 11 + 4,$$
$$11 = 2 \cdot 4 + 3,$$
$$4 = 1 \cdot 3 + 1,$$
$$3 = 3 \cdot 1$$

дает представление $\frac{a}{c}$ в виде цепной дроби

$$\frac{a}{c} = \frac{P_6}{Q_6} = \frac{100}{63} = (1,1,1,2,2,1,3) =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}}.$$

Здесь $n = 6$, $\frac{P_5}{Q_5} = (1,1,1,2,2,1)$ получается отбрасыванием последнего звена (дроби $\frac{1}{3}$) в цепной дроби для $\frac{a}{c}$. Таким образом, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{27}{17}$, $P_5 = 27$, $Q_5 = 17$, следовательно,

$$x = 90 \cdot 17 + 63t = 1530 + 63t,$$

$$y = 90 \cdot 27 + 100t = 2430 + 100t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

При $t = -24$ получаются наименьшие положительные решения $x = 18$, $y = 30$. [1, т. 1, с. 194 – 196; 43, с. 143 – 147].

Нилаканта

Датский историк математики Г. Г. Цейтен в книге «История математики в древности и в средние века» [28], а некоторые западные историки математики и позже писали, что после Бхаскары II (XII в.) и до середины XIX в. индийские математики не создали ничего значительного, оригинального. Но в Европе, а затем и в США долго не было известно об успешном развитии математики в Индии в XV–XVI вв., когда центр математических исследований переместился на крайний юг Индии, не подверженный нашествиям завоевателей вроде Тимура (Тамерлана), захватившего в 1398 г. Северную Индию и разрушившего г. Дели.

С 1330 г. по 1565 г. на юге Индии процветало могущественное государство Виджайянагар с населением около 14 миллионов человек. Здесь были развиты горное дело, кораблестроение, строились большие плотины и каналы, на побережье было около 60 морских портов. Правители Виджайянагара сами были учеными и писателями, поощряли развитие науки. Сюда переселились многие ученые из Северной Индии.

В 30-х гг. XIX в. санскритолог Чарлз Уиш обнаружил в частных собраниях Южной Индии рукописи четырех индийских математических трактатов: «Научный справочник» (написан около 1501 г.), «Объяснительный комментарий» к нему (около 1639 г.), «Техника действий» (по-видимому, XV–XVI вв.), «Нить светящихся жемчужин» (XVII–XVIII вв.). Все они, кроме «Объяснительного комментария», содержали только формулировки результатов, изложенные для лучшего запоминания в стихах (не рифмованных, но с соблюдением размера) на санскрите, который и в то время в Индии был языком науки, как латинский в Западной Европе. Трактат «Объяснительный комментарий», вопреки традиции, был написан прозой на языке малаялам и содержал также доказательства результатов или хотя бы попытки доказать их.

Автором трактата «Научный справочник» является ученый брахман **Нилаканта (1444 – ок. 1544)**. (Брахманы – члены высшей сословной касты в древней и средневековой Индии.) Авторы остальных трех трактатов неизвестны. Нилаканта написал также комментарий к «Ариабхатии» – астрономическому сочинению Ариабхаты I.

Индийские математики в средние века большое внимание уделяли вопросу о вычислении длины окружности через ее диаметр. А поскольку выразить точно отношение окружности к диаметру (т. е. число π) не удавалось, они пришли к мысли, что окружность и ее диаметр несоизмеримы. На современном языке это означает, что число π – иррациональное. Нилаканта в комментарии к «Ариабхатии» так пишет об этом: «Нельзя измерить то и другое одной и той же единицей. Даже в результате длительных вычислений можно только сделать степень несоизмеримости очень малой, абсолютная же соизмеримость никогда не будет достигнута». Это и явилось причиной использовать для этих целей разложения в ряды.

Вершиной достижений индийских математиков в средние века было то, что они первыми в мире открыли в конце XV в. степенные ряды для арктангенса, синуса и косинуса, а также числовые ряды для числа π. Без вывода их приводит Нилаканта в «Научном справочнике» (около 1501 г.), а ряды для синуса и косинуса содержатся также в «Технике действий» неизвестного индийского автора XV–XVI вв.

Если в приведенном Нилакантой ряде положить радиус окружности $r=1$, то ряд для дуги единичной окружности при $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, т. е. ряд для арктангенса по степеням тангенса, в наших обозначениях можно записать в виде

$$\varphi=\operatorname{tg}\varphi-\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{5}-\ldots .$$

(Вместо $\operatorname{tg}\varphi$ Нилаканта использует $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.) Полагая $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, Нилаканта получает ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots .$$

В 1673 г. степенной ряд для арктангенса был получен немецким математиком Г. В. Лейбницем, обратившим внимание и на указанный выше ряд для $\dfrac{\pi}{4}$, который называют рядом Лейбница. В 1671 г. степенной ряд для арктангенса нашел шотландский математик Дж. Грегори. Степенные ряды для $\sin x$ и $\cos x$ получил И. Ньютон около 1666 г. Таким образом, европейскими математиками эти ряды были открыты лет на 170 позже, чем индийскими. Кроме того, индийские математики обладали в то время высокой техникой преобразования рядов.

Из-за медленной сходимости ряд Лейбница для $\dfrac{\pi}{4}$ непригоден для вычисления числа π. Нилаканта приводит следующие интересные примеры более быстро сходящихся рядов, полученных путем преобразования ряда Лейбница:

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} - \dots, \tag{1}$$

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^3 - 5} + \frac{1}{7^3 - 7} - \dots, \tag{2}$$

$$\frac{\pi}{16} = \frac{1}{1^5 + 4\cdot 1} - \frac{1}{3^5 + 4\cdot 3} + \frac{1}{5^5 + 4\cdot 5} - \dots \tag{3}$$

и другие.

Покажем, как Нилаканта получал ряды (1)–(3) и еще один ряд для числа π.

Для получения ряда (1) используется попарная группировка членов ряда Лейбница для $\frac{\pi}{4}$. (Как известно, если ряд сходится к сумме S, то ряд, полученный группировкой членов исходного ряда, сходится и притом к той же сумме S.) Группируя попарно члены ряда Лейбница, начиная с первого, получим

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\ldots=2\left(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{10^2-1}+\ldots\right).$$

Теперь группируем члены ряда Лейбница, начиная со второго:

$$\frac{\pi}{4}=1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)-\ldots=1-2\left(\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\ldots\right).$$

Складывая оба результата, получаем ряд (1).

Для получения из ряда Лейбница более быстро сходящихся рядов вида (2), (3) Нилаканта прибавляет к частичной сумме

$$S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

ряда Лейбница некоторые бесконечно малые поправки K_n. Пусть $A_n=S_n+K_n$, тогда рассматривается новый ряд

$$A_1+(A_2-A_1)+(A_3-A_2)+\ldots+(A_{n+1}-A_n)+\ldots=\lim_{n\to\infty}A_{n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Нилаканта указал для ряда Лейбница три вида поправок, постепенно улучшающих сходимость:

$$K_n^{(1)}=\frac{(-1)^n}{4n},\quad K_n^{(2)}=\frac{(-1)^n n}{4n^2+1},\quad K_n^{(3)}=\frac{(-1)^n(n^2+1)}{n(4n^2+5)}.$$

В случае поправки $K_n^{(1)}$ получаем:

$$A_{n+1}-A_n=S_{n+1}-S_n+K_{n+1}^{(1)}-K_n^{(1)}=$$

$$=(-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{4(n+1)}+\frac{1}{4n}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{4n(n+1)(2n+1)}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3-(2n+1)}.$$

Тогда $A_1 = S_1 + K_1^{(1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $A_2 - A_1 = \frac{1}{3^3 - 3}$, $A_3 - A_2 = -\frac{1}{5^3 - 5}, \ldots$,

$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^3 - 5} + \ldots$, т. е. ряд (2). В случае поправки $K_n^{(2)} = \frac{(-1)^n n}{4n^2 + 1}$

находим:

$$A_{n+1} - A_n = (-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{n+1}{4(n+1)^2+1} + \frac{n}{4n^2+1}\right) =$$

$$= \frac{4(-1)^n}{(2n+1)(4n^2+1)(4(n+1)^2+1)} = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^5 + 4(2n+1)}.$$

Тогда $A_1 = S_1 + K_1^{(2)} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = \frac{4}{1^2 + 4 \cdot 1}$, $A_2 - A_1 = -\frac{4}{3^5 + 4 \cdot 3}$, $A_3 - A_2 = \frac{1}{5^5 + 4 \cdot 5}, \ldots$,

и получаем ряд (3) для $\frac{\pi}{16}$.

Поправка $K_n^{(3)} = (-1)^n \frac{n^2+1}{n(4n^2+5)}$ дает

$$A_{n+1} - A_n = (-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)(4(n+1)^2+5)} + \frac{n^2+1}{n(4n^2+5)}\right).$$

Здесь уже возникает техническая трудность с приведением суммы дробей к общему знаменателю. Но индусы могли не делать этого в общем виде, а ограничиться вычислением суммы дробей для нескольких первых выражений $A_{n+1} - A_n$. Поправки так искусно подобраны, что после приведения суммы трех дробей к общему знаменателю получается дробь с постоянным числителем. В данном случае числитель равен 9, и в результате получаем следующий ряд:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{7}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9(-1)^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)(4n^2+5)(4(n+1)^2+5)}.$$

Никаланта получает для числа π приближенное значение с девятью верными знаками после запятой, выраженное дробью $\frac{104348}{33215}$. В Европе число π с десятью верными знаками после запятой вычислил французский математик Ф. Виет в 1579 г. Но еще в 1427 г. персидский математик ал-Каши вычислил число π с семнадцатью верными знаками после запятой, пользуясь вписанными многоугольниками.

Имеется следующее предположение о том, как можно было прийти к поправкам $K_n^{(1)}$ и $K_n^{(2)}$. Индусам в то время было известно приближение $\pi \approx \frac{377}{120}$, приведенное Птолемеем. Выпишем первые три частичные суммы (можно и больше) ряда Лейбница для числа $\frac{\pi}{4}$, т. е. $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{13}{15}$.

Приближения для разностей между этими суммами и числом $\frac{\pi}{4}$ разложим в цепные дроби:

$$S_1 - \frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{377}{480} = \frac{103}{480} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{35}{68}}},$$

$$\frac{\pi}{4} - S_2 \approx \frac{19}{160} = \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{8}}}, \qquad S_3 - \frac{\pi}{4} \approx \frac{13}{160} = \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}.$$

Для этих цепных дробей первыми подходящими дробями являются, соответственно, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, имеющие вид $\frac{1}{4n}$. Вторыми подходящими дробями являются $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{17}$, $\frac{3}{37}$, они имеют вид $\frac{n}{4n^2+1}$. Для выбора поправки $K_n^{(3)}$ этот способ не годится. Очевидно, что $\left|K_n^{(i)}\right| \sim \frac{1}{4n}$ при $n \to \infty$ $(i = 1,2,3)$. В выражении $4n^2 + 5$ в $K_n^{(3)}$ слагаемое 5 могло быть подобрано путем проб.

В работе «Объяснительный комментарий» неизвестного индийского математика XVII в., которая является комментарием к «Научному справочнику» Нилаканты, ряд для арктангенса выводится следующим образом (разумеется, в совсем других обозначениях). Рассматривается указанный на рис. 14 бесконечно малый треугольник BCD, подобный треугольнику OCA, где

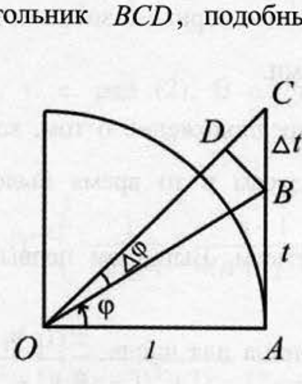


Рис. 14

$OA = 1$, откуда $\dfrac{BD}{1} = \dfrac{BC}{OC}$, $\Delta\varphi \approx \sin\Delta\varphi = \quad = \dfrac{BD}{OB} = \dfrac{BC}{OC \cdot OB} \approx \dfrac{BC}{OB^2} = \dfrac{\Delta t}{1+t^2}$.

Полученное приближенное равенство $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta t}{1+t^2}$ напоминает дифференциал арктангенса. Далее отрезок AB, равный $t = \operatorname{tg}\varphi$, делят на n равных частей $\Delta t = \dfrac{t}{n}$, при этом угол $\varphi = \operatorname{arctg} t$ разделится на части

$$\Delta\varphi_k = \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{kt}{2}\right)^2} = \frac{t}{n}\left[1-\left(\frac{kt}{n}\right)^2+\left(\frac{kt}{n}\right)^4-\ldots\right] = \frac{t}{n} - \frac{t^3}{n^3}k^2 + \frac{t^5}{n^5}k^4 - \ldots$$

Тогда

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1}\Delta\varphi_k = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{t}{n}}{1+\left(\frac{kt}{n}\right)^2} = t - t^3\cdot\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 + t^5\cdot\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n-1}k^4 - \ldots$$

Далее совершается предельный переход

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{k=0}^{n-1}k^m = \frac{1}{m+1},$$

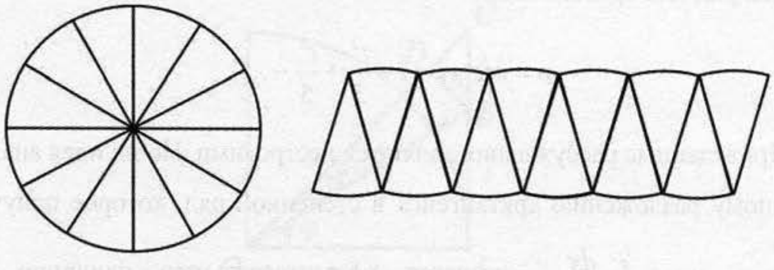
который индусы выводят, по-видимому, неполной индукцией из известных им формул для сумм некоторых степеней натуральных чисел. В итоге получается ряд для арктангенса:

$$\varphi = \operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \ldots .$$

Приведенные рассуждения являются нестрогими. Но их идея аналогична современному разложению арктангенса в степенной ряд, которое получают из равенства $\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$, разлагая подынтегральную функцию в ряд и интегрируя полученное разложение.

О том, как в Индии были получены ряды для синуса и косинуса, приведенные около 1500 г. без доказательства в «Научном справочнике» Нилаканты, пишет его индийский комментатор в «Объяснительном комментарии» в XVII в. Как и при выводе ряда для $\operatorname{arctg} t$, доказательство проводится по сходной схеме: теперь часть дуги окружности в первой четверти делится на n равных частей, дуги разбиения заменяются хордами, геометрически выводятся формулы, связанные с элементами разбиения, потом составляется выражение для интегральной суммы элементарных частей и затем эта интегральная сумма преобразуется в ряд. Подробно вопрос о выводе индийскими математиками рядов для синуса и косинуса рассматривается в статье Э. Я. Бахмутской в [21, вып. 13, 1960, с. 325–334]. О рядах Нилаканты для числа π и выводе индийскими математиками ряда для $\operatorname{arctg} t$ сообщается в [43, с. 160–167] и в работе Э. Я. Бахмутской в сборнике «Из истории науки и техники в странах Востока» (М.: Изд-во вост. литературы, 1961, вып. 2, с. 174–189).

Индийские методы разложения функций в степенные ряды, как видим, содержали элементы дифференцирования и интегрирования. Еще один прием, относящийся к интегрированию, использует индийский математик **Ганеша (XVI в.)** для вычисления площади круга. Он разбивает верхний и нижний полукруги на равное число одинаковых мелких секторов (рис. 15, *а*), затем разворачивает каждый из этих полукругов в пилообразную фигуру и соединяет эти две фигуры вместе (рис. 15, *б*). Если число секторов велико, то фигура на рис. 15, *б*, почти не отличается от параллелограмма, площадь которого



а *б*

Рис. 15

(а заодно и площадь круга) равна $\frac{C}{2}R$, где C – длина окружности, R – радиус круга.

Подводя итоги развития математики в средневековой Индии, необходимо отметить следующее. В арифметике важнейшее достижение индусов – введение десятичной позиционной системы – продолжало разрабатываться. Были введены отрицательные числа. В алгебре основным объектом изучения у индусов были квадратные уравнения, их изучали в VI–VII вв. Ариабхата и Брахмагупта, в XII в. – Бхаскара II и др. Было установлено наличие двух корней квадратного уравнения, рассматривались и отрицательные корни. Разрабатывались способы приближенного вычисления квадратных и кубических корней, преобразования иррациональностей. Следует отметить наличие у индусов довольно развитой алгебраической символики. В теории чисел индусы разработали очень тонкие методы решения неопределенных уравнений первого и второго порядка в целых числах. В тригонометрии примерно в IV в. индусы ввели синус и составили первые таблицы синусов. Индийская математика была составной частью астрономии. Большим достижением индусов явилось открытие ими на рубеже XV–XVI вв. степенных рядов для арктангенса, синуса и косинуса, а также числовых рядов для числа π (Нилаканта и др.).

Математические достижения индусов оказали большое влияние на развитие математики в средние века в странах ислама, а оттуда через арабов – на развитие математики в Западной Европе. Об индийской математике: [44; 43; 1, т. 1; 45; 14–17].

Математика в исламских странах в средние века

Мусульманская эра ведет начало с 622 г. (года «хиджры» – переселения пророка Мухаммеда и его сторонников из Мекки в Медину). Арабские завоевания в VII в. – начале IX в. стран Ближнего и Среднего Востока, Средней Азии, Северной Африки, Сицилии и почти всей Испании привели к созданию сильного государства – Арабского халифата. В 762 г. был основан Багдад, ставший его столицей и главным центром научных исследований. Многие арабские халифы покровительствовали ученым, в частности астрономам и математикам. В Багдаде был создан «Дом мудрости» (т. е. Академия наук) с большой библиотекой и обсерваторией. В исламских странах Ближнего и Среднего Востока начинается интенсивное развитие математики и астрономии, переводятся на арабский язык, служивший также языком науки, произведения индийских и греческих ученых, в частности труды Евклида, Архимеда, Аполлония, Диофанта и Птолемея.

Становление алгебры в исламских странах

ал-Хорезми

В IX в. в багдадском «Доме мудрости» работал знаменитый математик и астроном **Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми (783 – ок. 850)**, уроженец Хорезма – области в современном Узбекистане. Обычно с ал-Хорезми связывают становление алгебры как самостоятельной науки и сам термин «алгебра». Его алгебраический трактат «Краткая книга о восстановлении и противопоставлении» сохранился в арабской рукописи, которая сейчас находится в библиотеке Оксфордского университета. В этом трактате ал-Хорезми приводит классификацию алгебраических уравнений первого и второго порядков с положительными коэффициентами на 6 канонических типов ($ax = c$, $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$). Произвольные буквенные коэффициенты в то время в математике не рассматривались, поэтому, например, уравнение $ax^2 + bx = c$ с произвольными положительными коэффициентами ал-Хорезми выражает фразой «квадраты и корни равны числу». Для приведения уравнений к этим каноническим типам ал-Хорезми использует две операции. Одна из них – «ал-джабр» (восстановление, восполнение) означает перенос члена со знаком «минус» из одной части уравнения в другую со знаком «плюс», т. е. восстановление недостающего члена путем прибавления к обеим частям уравнения одинаковых членов. Отсюда произошел современный термин «алгебра». Другая операция – «ал-мукабала» (противопоставление), она заключается в уничтожении равных членов в обеих частях уравнения. Нашим обозначениям постоянной, x, x^2 у ал-Хорезми соответствуют: «число» (*дирхем*), «корень» (*джизр*), «квадрат» (*мал*). Позже в арабской литературе неизвестную величину стали называть словом «вещь» (*шай*). В отличие от Диофанта, использовавшего буквенную символику для неизвестной и некоторых ее степеней, ал-Хорезми, не будучи, по-видимому, знаком с «Арифметикой» Диофанта, использует для записи уравнений и правил их решения громоздкие словесные формулировки, что весьма характерно для средневековой математики. Ал-Хорезми рассматривает лишь положительные корни квадратных уравнений и указывает условия существования двух таких корней. Правила отыскания положительных корней квадратных уравнений он демонстрирует на конкретных примерах с помощью геометрической алгебры. В главе об умножении одночленов и двучленов ал-Хорезми приводит правило знаков, известное еще Диофанту. Одна из глав посвящена действиям над радикалами. Несколько глав представляют собой сборник алгебраических задач, в частности на раздел имущества. Геометрии посвящена отдельная глава, в которой довольно полно, хотя и без доказательств, приведены элементарные правила вычисления площадей и объемов фигур. В частности, при рассмотрении площади круга он дает три приближения для числа π, а именно: $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$ и $\frac{62832}{20000}$ (последнее приводил и Ариабхата I).

Арифметический трактат ал-Хорезми, который называют «Книгой об индийском счете», дошел до нас в переводах на латынь. Здесь ал-Хорезми приводит сведения об «индийских» цифрах (у нас их теперь называют арабскими), десятичной позиционной системе и правилах вычисления в ней, иллюстрируемых многими примерами. Он сообщает также правила вычисления с шестидесятеричными дробями, обыкновенными дробями и правило извлечения квадратного корня из числа. Нуль он обозначает кружком.

Труды ал-Хорезми в переводах на латынь в XII в. оказали большое влияние на становление западноевропейской математики. Его латинизированное имя Algorithmi сначала означало арифметику «индийских» (арабских) чисел, а позже – общее название (алгоритм) всякой системы вычислений по определенным правилам. Об ал-Хорезми см. в сборнике [48].

Абу Камил и ал-Караджи

У ал-Хорезми было много последователей-алгебраистов среди арабских математиков. Первый из них – **Абу Камил (ок. 850–930)**, работавший в Каире. Он также написал «Книгу о восстановлении и противопоставлении», в которой продвинулся дальше, чем ал-Хорезми. Абу Камил вводит степени неизвестного, вплоть до x^8 (в словесном виде), например: куб (*ка'б*) – x^3, квадрато-квадрат (*мал ал-мал*) – x^4, квадрато-квадрато-вещь (*мал мал шай*) – x^5, кубо-куб (*ка'б ал-ка'б*) – x^6 и т. д. Он рассматривает и некоторые уравнения степеней выше второй, например биквадратные. Используя известные еще индусам правила $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}$, Абу Камил уверенно оперирует с иррациональностями. Но наиболее глубокие исследования содержатся в третьей части книги Абу Камила, посвященной решению неопределенных уравнений и систем в рациональных числах. Здесь он приводит 38 задач в порядке возрастания сложности, которые непосредственно не повторяют задач из «Арифметики» Диофанта (см. [40]). Геометрический смысл их заключается в отыскании рациональных точек на алгебраических кривых рода 0 и рода 1. Нет прямых свидетельств о знакомстве Абу Камила с «Арифметикой» Диофанта, но оба они используют общие методы, свидетельствующие о большой глубине проникновения в рассматриваемые вопросы.

Знаменитый персидский математик-алгебраист **ал-Караджи (ал-Кархи, 953–1029)** написал наиболее полное в то время руководство по алгебре и диофантову анализу – трактат под названием «ал-Фахри». Он вводит произвольные целые степени неизвестной и формулирует правила действий над ними, распространяет формулы решения квадратных уравнений на уравнения высших степеней вида $ax^{2p}+bx^p=c$, оперирует с отрицательными числами, преобразует квадратные и некоторые кубические радикалы. Практическая часть трактата «ал-Фахри» состоит из более чем 250 алгебраических задач, взятых в основном из «Арифметики» Диофанта и алгебраического трактата Абу Камила. Два трактата ал-Караджи по арифметике содержат также и геометрические сведения. Об Абу Камиле и ал-Караджи: [40].

Последователем ал-Караджи был математик и астроном **ас-Самав'ал**, работавший в XI в. в Багдаде. Он также излагает правила действий с отрицательными величинами и степенями с любыми целыми показателями. В арабскую математику он ввел десятичные дроби и рассматривал приближения иррациональных чисел рациональными, в частности десятичными дробями. Ас-Самав'ал приводит треугольную таблицу биномиальных коэффициентов для $(a+b)^n$ до $n=12$, приписывая ее ал-Караджи. В Европе такую таблицу (до $n=9$) впервые рассматривал немецкий математик П. Апиан в 1527 г., применивший разложение бинома для вычисления корней 2-ой – 8-й степеней, а затем М. Штифель в 1544 г., Н. Тарталья в 1556–1560 гг. В XVII в. в Европе ее рассматривали Дж. Непер и Б. Паскаль.

Становление тригонометрии в исламских странах

Математики стран ислама IX–XI вв. сыграли большую роль в создании и разработке тригонометрии (плоской и сферической), которая тогда стала оформляться как наука [47]. **Ал-Хабаш (764–874)**, современник ал-Хорезми, происходил из г. Мерва (в Туркменистане), работал в Багдаде. Он первым ввел тангенс и котангенс, составил таблицу тангенсов. Тангенс и котангенс рассматривались как линии, связанные с гномоном (солнечными часами) – стержнем, установленным перпендикулярно горизонтальной площадке или на вертикальной стене перпендикулярно ей, и назывались, соответственно, «обращенной и прямой тенями». Тогда же были введены секанс и косеканс. Ученый-энциклопедист **ал-Фараби (870–950)**, родившийся в г. Фарабе (в Казахстане) и работавший в Багдаде и Дамаске, рассматривает синус, косинус, тангенс и котангенс уже только как линии в круге, радиус которого принимает равным 60.

Математики и астрономы стран ислама составили очень точные тригонометрические таблицы. **Абу-л-Вафа (940–998)**, живший в Багдаде, составил таблицу синусов через $15'$ с точностью до 60^{-4}. Он сформулировал теоремы, соответствующие формулам $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ и $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, доказал теоремы синусов и тангенсов в сферической тригонометрии. При решении квадратных уравнений он одним из первых применил отрицательные числа, трактуя их как «долг». Его ученик **Ибн Юнис (950 – 1009)**, работавший в Каире, был замечательным вычислителем. Он составил таблицу синусов с интервалом в $1'$ и точностью до 10^{-7}. Его таблицы тангенсов с интервалом в $1''$ еще не изучены ввиду их огромного объема. Такие вычисления без помощи разложения функций в ряды, которыми пользуются в наше время, требовали исключительных вычислительных способностей и огромного трудолюбия. При составлении таблиц широко использовалась интерполяция.

Выдающийся среднеазиатский ученый-энциклопедист **Абу Рейхан Бируни (973–1048)**, родившийся в Хорезме и работавший в городах Гургане и Ургенче (в Средней Азии) и в Газне (в Афганистане), является автором большого числа работ по всем отраслям тогдашней науки. Его монументальный труд «Канон Мас'уда» в 11 книгах – это наиболее полный свод астрономических знаний того времени. Здесь в третьей книге излагаются сведения о плоской и сферической тригонометрии, а также приведены таблицы синусов и тангенсов, в которых радиус круга принимается уже за единицу, а не за 60. При построении таблицы синусов Бируни использует рекуррентное соотношение для $\sin\frac{\alpha}{2^n}$, а вычисление $\sin 1^\circ$ сводит к задаче о трисекции угла и приводит несколько геометрических способов приближенной трисекции угла. Он высказывает предположение, что число π иррационально. О Бируни: [49].

Математики стран ислама внесли значительный вклад и в вычисление квадратур и кубатур. **Сабит ибн Корра (836–901)**, работавший в Багдаде и переведший на арабский язык 6 работ Архимеда, вычислил площадь сегмента параболы $y^2 = px$ по-иному, чем Архимед, разбивая ось сегмента на части, пропорциональные нечетным числам и суммируя площади соответствующих трапеций. Его действия равносильны вычислению интеграла $\int_0^a \sqrt{px}\,dx$. Это первый пример интегрирования функции x^n с дробным показателем $n = \frac{1}{2}$.

Ибн ал-Хайсам (Альхазен, 965–1039), уроженец Ирака, работавший в Каире, написал замечательный трактат об измерении параболоидов. Он вычислил объемы тел вращения различных сегментов параболы вокруг ее диаметров. Найдя, что $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$, он вычислил объем тела, полученного при вращении параболы $y^2 = px$ вокруг любой ограничивающей ее ординаты. Его действия равносильны вычислению $\int_0^a x^4 dx$. Арабские ученые формируют, хотя еще не четко, представление о мгновенной скорости неравномерного движения. Сабит ибн Корра и Бируни при изучении видимого движения Солнца приходят к выводу, что скорость этого движения наибольшая в перигее (т. е. при наименьшем удалении Земли от Солнца) и наименьшая в апогее (при наибольшем удалении).

Омар Хайям

Одним из самых выдающихся мыслителей в средние века был персидский и таджикский математик, астроном, поэт и философ **Омар Хайям (ал-Хайями, 1048–1131)**, родившийся в г. Нишапуре (в Персии). Он работал в Бухаре, Самарканде, но особенно плодотворным был для него период 1074–1092 гг., когда он руководил обсерваторией в г. Исфахане (в Персии). Огромную славу ему как поэту принесли несколько сотен его четверостиший (стихотворений из четырех строк – «рубаи»), покоряющих глубиной лирико-философских размышлений и блестящей афористической формой. Он являлся и одним из наиболее выдающихся математиков в средние века.

Арабским математикам, несмотря на попытки, не удалось построить теорию решения кубических уравнений в радикалах (это сделали итальянские математики в XVI в.). Тем не менее, Хайяму в «Трактате о доказательствах восстановления и противопоставления» (1074) удалось построить геометрическую теорию решения кубических уравнений. Он приводит классификацию алгебраических уравнений первого–третьего порядков с положительными коэффициентами, состоящую из 25 канонических типов уравнений, из которых выделяет 14 типов кубических уравнений, не сводящихся к квадратным. У него впервые уравнения рассматриваются с произвольными коэффициентами, роль которых выполняют геометрические величины. Общие результаты он иллюстрирует также на конкретных примерах с числовыми коэффициентами, находя корни либо точные, либо приближенные.

Известно, что уже древнегреческий математик Менехм в середине IV в. до н. э. решал задачу об удвоении куба, сводящуюся к построению корня кубического уравнения $x^3 = 2a^3$ с помощью двух парабол ($x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$) или параболы и гиперболы ($x^2 = ay$, $xy = 2a^2$). Для каждого из 14 типов кубических уравнений, не сводящихся к квадратным, Хайям указывает соответствующую пару конических сечений такую, что положительный корень кубического уравнения является абсциссой одной из точек пересечения этих кривых, поэтому его можно построить с помощью приборов, вычерчивающих конические сечения. Он указывает на существование одного или двух положительных корней кубических уравнений при соответствующих условиях на коэффициенты уравнения, но упускает возможность открыть существование трех таких корней.

Например, для уравнения вида $x^3 + qx = px^2 + r$ при $r = pq$ корнем, очевидно, является $x = p = \frac{r}{q}$. В случае $\frac{r}{q} < p$ Хайям берет (рис. 16)

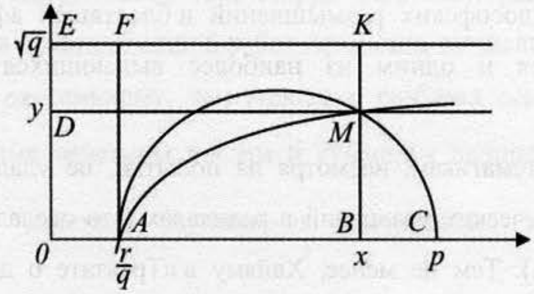


Рис. 16

полуокружность $y = \sqrt{\left(x - \frac{r}{q}\right)(p - x)}$ и одну ветвь гиперболы $xy = \sqrt{q}\left(x - \frac{r}{q}\right)$. Легко убедиться, что после исключения y из двух последних уравнений и сокращения полученного уравнения 4-го порядка на $x - \frac{r}{q}$ приходим к рассматриваемому кубическому уравнению, причем $\frac{r}{q}$ не является его корнем при $\frac{r}{q} \neq p$.

Изображая гиперболу, Хайям указывает ее асимптоты EO и EF и прямоугольники вида $OBMD$ и $ABKF$, равенство площадей которых геометрически выражает уравнение гиперболы. Ось абсцисс, в отличие от принятого у нас ее изображения, он направляет влево. В случае $p < \frac{r}{q}$ Хайям выбирает (рис. 17) полуокружность $y = -\sqrt{\left(\frac{r}{q} - x\right)(x - p)}$ и гиперболу

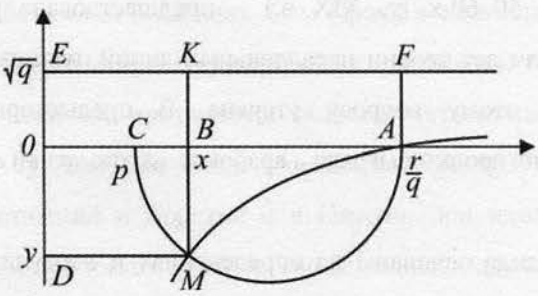


Рис. 17

$xy = \sqrt{q}\left(x - \frac{r}{q}\right)$, где $0 < p < x < \frac{r}{q}$. В этом случае будет только один положительный корень кубического уравнения. Но и в случае $\frac{r}{q} < p$ Хайям указывает только один корень, хотя при некоторых p, q, r кубическое уравнение может иметь три положительных корня на интервале $(\frac{r}{q}, p)$, т. е. полуокружность и одна ветвь гиперболы могут пересекаться в 4 точках, из которых точка с абсциссой $\frac{r}{q}$ не является корнем. С помощью рис. 16 этот факт заметить практически невозможно, что говорит об ограниченности геометрического метода. Таким свойством обладает, например, уравнение $x^3 - 5x^2 + 3x - \frac{1}{3} = 0$, имеющее корни $x_1 \approx 0{,}15$, $x_2 \approx 0{,}53$, $x_3 \approx 4{,}32$. При этом четыре точки пересечения полуокружности и одной ветви гиперболы можно изобразить, если взять рисунок размером в страницу. Хайям выражает надежду, что будущим математикам удастся построить теорию решения кубических уравнений в радикалах.

Теория параллельных линий в исламских странах

Созданию неевклидовых геометрий – Лобачевского (в 20–30-х гг. XIX в.) и Римана (в 50–60-х гг. XIX в.) – предшествовала разработка на протяжении двух тысяч лет теории параллельных линий, начиная с Архимеда, работа которого по этому вопросу утеряна. В предыстории геометрии Лобачевского важную роль сыграли арабские математики IX–XIII вв., в частности О. Хайям.

«Начала» Евклида основаны на определениях и постулатах, имеющих геометрическую природу, а также на аксиомах, вводящих отношения равенства и неравенства объектов, не обязательно геометрических. Евклид дает следующее определение параллельности: «параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются». Наиболее сложную формулировку имеет V постулат Евклида: если две прямые, пересекаясь с третьей, образуют с ней внутренние односторонние углы, сумма которых меньше $2d$, то эти две прямые пересекутся с той стороны, где сумма углов меньше $2d$ (через d обозначают прямой угол). Сложность этой формулировки и тот факт, что первые 28 теорем в «Началах» не зависят от V постулата, вызывала многочисленные попытки доказать его на основе остальных постулатов и аксиом.

В [51] приведен детальный обзор более трех десятков таких «доказательств», предпринятых на протяжении двух тысяч лет, вплоть до начала XIX в. Из них примерно половина принадлежит арабским математикам IX–XIII вв. Подавляющее большинство авторов при этом были уверены, что им удалось доказать V постулат Евклида, однако дальнейшая проверка показывала, что они неявно опирались на какое-либо утверждение, равносильное V постулату. В ряде работ определение параллельности, данное Евклидом, видоизменялось или дополнялось свойствами, равносильными V постулату. Приведем некоторые примеры.

Древнегреческий философ, математик и астроном **Посидоний (135–51 гг. до н.э.)**, который родился в Сирии, работал в Риме и был учителем Цицерона, при попытке доказать V постулат определял параллельные прямые как равноотстоящие друг от друга, что равносильно V постулату. Об этом говорит греческий философ-неоплатоник **Прокл (410–485)**, родившийся в Константинополе и работавший в Афинах. Сам Прокл в «доказательстве» V постулата использует равносильное ему утверждение: расстояние между параллельными прямыми на всем их протяжении остается ограниченным. Философ, врач и математик **Абу Али ибн Сина (Авиценна, 980–1037)**, родившийся вблизи Бухары и работавший в Хорезме и в Персии, при изложении теории параллельных в геометрическом разделе своей энциклопедической «Книги знания» определяет параллельные прямые как равноотстоящие друг от друга.

Сабит ибн Корра (в IX в.) и Ибн ал-Хайсам (в X–XI вв.), о вкладе которых в вычисление квадратур и кубатур говорилось выше, занимались также теорией параллельных. Считая определение параллельных, данное Евклидом, слишком общим, они определяют прямую, параллельную данной прямой, по-иному, кинематически, несмотря на то, что древние греки оспаривали законность использования движения в геометрии. У Ибн ал-Хайсама прямую, параллельную к данной прямой, описывает один из концов перпендикуляра к данной прямой, когда его второй конец движется по прямой. Затем доказывается существование прямоугольника. Ибн ал-Хайсам для этого берет четырехугольник $ABCD$, у которого три угла A, B, C – прямые, и с помощью своего определения параллельности доказывает, что $CD = AB$, следовательно, угол D – тоже прямой. Затем доказывается, что из этого следует V постулат Евклида.

Сабит ибн Корра и Ибн ал-Хайсам кинематически определяют параллельные прямые как равноотстоящие друг от друга, что равносильно V постулату. В одной из своих работ Ибн ал-Хайсам указывает, что V постулат равносилен утверждению: две пересекающиеся прямые не параллельны одной прямой. Это означает, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной (так в настоящее время в евклидовой геометрии формулируется аксиома параллельности). В геометрии Лобачевского это не так, поэтому линии, равноотстоящие от прямой, являются не прямыми, а кривыми (они называются эквидистантами).

Из математиков исламского Востока наиболее глубоко проник в теорию параллельных Омар Хайям. Он проанализировал ряд попыток своих предшественников доказать V постулат и пришел к выводу, что им не удалось этого сделать, так как они использовали в своих рассуждениях какое-либо равносильное ему утверждение. В основу своей теории параллельных Хайям впервые сознательно кладет принцип, который он приписывает Аристотелю, состоящий из двух предложений, каждое из которых равносильно V постулату, а именно: «две сходящиеся (т. е. сближающиеся) прямые линии пересекаются, и невозможно, чтобы две сходящиеся линии расходились в направлении схождения». На основе этого принципа он доказывает V постулат Евклида. Сначала Хайям доказывает существование прямоугольника, для этого он рассматривает четырехугольник $ABCD$ с $AD = BC$ и двумя прямыми углами A и B при основании. Он выдвигает три взаимоисключающие друг друга гипотезы о его верхних углах C и D: I) они оба острые, II) оба тупые, III) оба прямые. Эти гипотезы сыграли важную роль в предыстории неевклидовой геометрии. (Гипотеза I выполняется в геометрии Лобачевского, гипотеза II – в геометрии Римана, гипотеза III – в геометрии Евклида.) С помощью своего принципа, заменяющего V постулат Евклида, Хайям опровергает гипотезы острого и тупого углов. Следовательно, прямоугольник существует, а это влечет выполнение V постулата Евклида. Отсюда он также выводит, что параллельные в смысле Евклида (т. е. не пересекающиеся) прямые являются равноотстоящими друг от друга. Свою теорию параллельных Омар Хайям изложил в первой книге «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида» (1077).

Важным достижением Хайяма явилось построение в остальных двух книгах «Комментариев» новой теории действительных чисел, точнее говоря, отношений величин. Он разлагает отношение отрезков, в частности несоизмеримых, в цепные дроби и тем самым воскрешает соответствующий метод древних греков, пытавшихся построить теорию отношений с помощью алгоритма Евклида еще до того, как ее по-иному построил Евдокс, а Евклид включил в свои «Начала». Рациональным числам отвечают конечные цепные дроби, иррациональным – бесконечные. Хайям показывает, что его теория эквивалентна той теории отношений, которая изложена у Евклида. Заметим, что в христианских странах Западной Европы иррациональные числа получили признание только спустя 500 лет, а именно после появления в 1585 г. трактата голландского математика С. Стевина, посвященного десятичным дробям. О Хайяме: [50].

Насир ад-Дин ат-Туси

Выдающийся математик и астроном **Насир ад-Дин ат-Туси (1201–1274)** родился в Персии, руководил крупнейшей в то время обсерваторией с богатой библиотекой (свыше 400 тысяч рукописей) в г. Мараге в Персии. Он излагает теорию параллельных линий в «Трактате, исцеляющем сомнение по поводу параллельных линий». Здесь ат-Туси под влиянием «Комментариев» Хайяма также рассматривает четырехугольник Хайяма и опровергает гипотезы острого и тупого углов, но V постулат выводит отсюда по-иному. В другом труде ат-Туси выводит V постулат из предположения, что в любом треугольнике сумма углов равна двум прямым. В истории тригонометрии очень важное место занимает его «Трактат о полном четырехвершиннике» (1260), в котором тригонометрия впервые выступает как самостоятельная математическая дисциплина, а не как часть астрономии. Здесь рассматриваются плоская и сферическая теоремы Менелая для различных видов полного четырехвершинника, приводятся выражения элементов плоских и сферических треугольников через тригонометрические функции, точнее, через соответствующие линии, связанные с кругом. Большой популярностью в исламском мире в средние века пользовался труд Насир ад-Дина ат-Туси «Изложение Евклида» в 15 книгах (сохранилось 96 экземпляров рукописи). О нем: [21, вып. 13, с. 483–532].

Исследования арабских математиков в теории параллельных оказали влияние на итальянского математика **Дж. Саккери (1667–1733)**. В работе «Евклид, очищенный от всех пятен» (1733), Саккери со ссылкой на ат-Туси рассматривает четырехугольник Хайяма с двумя прямыми углами при основании и три гипотезы об остальных углах. Он продвигается существенно дальше, но в результате допущенной ошибки считает, что доказал V постулат Евклида на основе других постулатов и аксиом Евклида. После Саккери в XVIII в. более глубоко проник в теорию параллельных немецкий математик **И. Г. Ламберт (1728–1777)** в работе «Теория параллельных линий», опубликованной в 1786 г. Он рассматривает четырехугольник Ибн ал-Хайсама с тремя прямыми углами и исследует три гипотезы относительно четвертого угла. Получив ряд фактов неевклидовой геометрии и не придя к противоречию в случае гипотезы острого угла (третьей гипотезы), он пишет: «Я почти должен был бы сделать из этого вывод, что третья гипотеза имеет место на какой-нибудь мнимой сфере». Эта мысль подтверждается в неевклидовой геометрии Лобачевского. Исследования Хайяма кубических уравнений продолжил иранский математик XIII в. **Шараф ад-Дин ат-Туси (ок. 1135–1213)**. В своем «Трактате об уравнениях» он ищет экстремумы кубических многочленов с помощью выражений, представляющих первые производные многочленов, но не связывает с этими выражениями никакого общего понятия и не дает указаний на их происхождение. Он отметил также роль дискриминанта кубического многочлена, а для вычисления корней кубических уравнений разработал приближенный метод.

Нашествие монголов в XIII в. нанесло большой ущерб науке в исламских странах Ближнего и Среднего Востока. Лишь в XV в. наука ненадолго возрождается и достигает высокого расцвета в Самаркандской школе. Внук Тимура (Тамерлана), правитель Самарканда **Улугбек (1394–1449)**, был также крупным астрономом. Он построил в Самарканде лучшую в то время в мире астрономическую обсерваторию с гигантским квадрантом, имевшим радиус окружности около 40 метров, с помощью которого был составлен весьма точный каталог 1018 звезд. (Сохранившийся фундамент обсерватории и глубокую траншею для нижней части квадранта обнаружил и раскопал в 1908 г. археолог В. Л. Вяткин.) Улугбек разработал алгебраический метод для составления тригонометрических таблиц большой точности. Мусульманское духовенство было недовольно его занятиями наукой. После захвата власти его старшим сыном Улугбек был казнен, а его обсерватория разрушена. О нем: Голубев Г. Н. Улугбек. – М.: 1960. – 200 с.

ал-Каши

В Самаркандской обсерватории Улугбека около 1420–1429 гг. работал знаменитый математик и астроном **Джемшид ал-Каши (умер в 1429 г.)**, уроженец Персии. В его работе «Ключ к арифметике» (1427), отличающейся стройностью изложения, собрано большинство известных к тому времени арифметических и алгебраических методов, дополненных его собственными разработками. В частности, он приводит приемы извлечения корней любой степени с помощью формулы бинома для натуральных показателей, а также правила приближенного решения алгебраических уравнений. Впервые он систематически излагает десятичные дроби, их перевод в шестидесятеричные и обратно (в Европе десятичные дроби стали употребляться лет на 150 позже). Вершиной вычислительной техники того времени явилось вычисленное ал-Каши в «Трактате об окружности» (1427) значение 2π с 17 верными десятичными знаками с помощью вписанного в окружность правильного многоугольника с $3 \cdot 2^{28}$, т. е. с более чем $8 \cdot 10^8$ сторонами (это вычисление составляет 28 больших таблиц). В Европе такое же значение для π нашел через 170 лет голландский математик **А. ван Роумен (1561–1615)**.

Ученые, работавшие в Самаркандской обсерватории, составили очень точные таблицы синусов и тангенсов с шагом в $1'$. Для вычисления $\sin 1^\circ$ ал-Каши предложил оригинальный метод. Он выводит уравнение трисекции угла в виде $3x - 4x^3 = q$, где $x = \sin\frac{\alpha}{3}$, $q = \sin\alpha$, и предлагает удобный итерационный процесс вычисления его корня. Отсюда, используя значение $\sin 3^\circ$, которое находится элементарно, ал-Каши получает $\sin 1^\circ$ с точностью до $60^{-4} < 10^{-7}$. Об ал-Каши: [15, с. 236; 9, с. 136 – 137].

Деятельность Самаркандской научной школы явилась последним взлетом науки в исламских странах в средние века. С середины XV в. математика в этих странах приходит в упадок. Но уже в XII в. научную эстафету принимает у арабов Западная Европа.

Подводя итоги развития математики в странах ислама, отметим следующее. Она унаследовала достижения древнегреческих и восточных математиков, сохранив их труды в арабских переводах для будущих поколений. Интенсивное развитие математики стран ислама происходило в IX–XV вв. С ал-Хорезми (IX в.) связывают становление алгебры как самостоятельной математической дисциплины, а также и сам термин «алгебра». Большую роль сыграла его пропаганда индийских («арабских») цифр и десятичной позиционной системы счисления. Абу Камил (IX в.) и ал-Караджи (X в.) вводят названия степеней неизвестной, возрождают методы Диофанта решения неопределенных уравнений и систем в рациональных числах. Рассматриваются отрицательные числа, десятичные дроби, формула бинома с натуральными показателями, таблица биномиальных коэффициентов. О. Хайям (XI–XII вв.) классифицирует кубические уравнения и строит геометрическую теорию отыскания их корней с помощью пересечения пар конических сечений. В геометрии основные усилия математиков стран ислама были связаны с попытками доказать V постулат Евклида. Разрабатывая теорию параллельных, О. Хайям, Ибн ал-Хайсам и др. сыграли большую роль в предыстории возникновения неевклидовой геометрии. В тригонометрии в дополнение к введенным еще индусами синусу и косинусу математики стран ислама вводят как геометрические линии в круге тангенс, котангенс, секанс и косеканс, вычисляют для потребностей астрономии весьма точные таблицы синусов и тангенсов. Были получены многие важные формулы плоской и сферической тригонометрии. У Насир ад-Дина ат-Туси (XIII в.) она выступает уже как самостоятельная научная дисциплина. Обращение к творчеству Архимеда позволило арабским математикам X–XI вв. получить некоторые новые квадратуры, в частности равносильные вычислению $\int\limits_0^a x^n dx$ при $n=\frac{1}{2}$ (Ибн Корра) и $n=4$ (Ибн ал-Хайсам). Используя цепные дроби, О. Хайям разработал новую теорию отношений – аналог теории действительных чисел. Высокого расцвета достигли математика и астрономия в трудах и наблюдениях ученых, работавших в Самаркандской обсерватории Улугбека в первой половине XV в. (ал-Каши и др.).

По сравнению с богатством идей и методов в математике древней Греции достижения математиков стран ислама носят более частный характер. Но математика стран ислама оказала большое влияние на становление математики в Западной Европе, начиная с XII в. Через арабов (мавров) в Испании Западная Европа познакомилась как с сохраненным ими наследием древнегреческой математики, так и с математикой стран ислама.

Об истории математики в странах ислама: [1, т. 1; 43; 9; 28; 46–51; 14–18].

Математика в Европе в средние века

Начальный период развития (VI–XIV вв.)

В раннем средневековье (VI–XI вв.) математика в христианских странах Западной Европы находилась в состоянии глубокого упадка. Это объясняется прежде всего тем, что христианство, в отличие от ислама, нетерпимо относилось к эллинистическому научному наследию как к языческому.

В этот темный период в христианских странах наблюдаются лишь отдельные проблески научных знаний.

Традиционную хронологию древности и раннего средневековья составил главным образом богослов гугенот Жозеф Жюст Скалигер (1540–1609), основоположник современной хронологии, а завершил богослов иезуит Дионисий Петавиус (Петавий, 1583–1652). Ее критиковали многие ученые, считая, что эта хронология сильно растянута. И. Ньютон (1642–1737), занимавшийся в последние годы жизни и хронологией, считал, что ранняя история древних Египта и Греции должна быть приближена к нам лет на 300 по сравнению со скалигеровской. Русский ученый Н. А. Морозов (1854–1946) в своей 7-томной книге «Христос», изданной в 1924–1932 гг., подверг критике скалигеровскую хронологию древности и античности (вплоть до VI в.) и считал, что она слишком растянута вглубь по сравнению с реальностью.

Трудность датировок древних сочинений связана с тем, что до нас дошли не их подлинники, а только копии, составленные в IX–XI вв. и позже. Математик М. Я. Выгодский, например, пишет: «До нас не дошла ни одна античная рукопись «Начал» Евклида… Древнейшая известная нам рукопись представляет собой копию, сделанную в 888 г. …» [21, вып. 1, 1948, с. 224]. Известный математик, академик РАН А. Т. Фоменко вместе со своими коллегами по МГУ за последние более двадцати лет издал ряд книг, посвященных радикальной критике и пересмотру скалигеровской хронологии (см., например, книгу: Фоменко А. Т. Основания истории. – М.: РИМИС, 2005. – 560 с.). Там, в частности, на основе статистической обработки дошедших до нас старых текстов проводится идея о том, что «темного средневековья» в Европе фактически не было, а века античности и более древние нужно сдвинуть вверх к позднему средневековью – эпохе Возрождения (XV–XVI вв.). Мы в пособии придерживаемся традиционной хронологии, т. к. у ее критиков детальная датировка событий истории древней и средневековой математики не разработана.

Римский философ **Боэций (ок. 480–524)**, родившийся в Риме и обучавшийся в Афинах, был приближенным короля остготов Теодориха, завоевавших

Италию. Его математические труды не были оригинальными, но способствовали распространению математических знаний в Западной Европе. Он перевел на латынь логические сочинения Аристотеля «Органон» и снабдил их своими комментариями. «Геометрия» Боэция представляет собой вольный перевод первых трех книг «Начал» Евклида. Это было единственное сочинение по геометрии в христианских странах Западной Европы в VII–XI вв., а само имя Евклида оказалось там преданным забвению. Содержание «Арифметики» Боэция было заимствовано из одноименного сочинения древнегреческого философа I в. Никомаха. По обвинению в тайных сношениях с Византией Боэций был осужден и казнен. В тюрьме написал пользовавшуюся очень большой популярностью книгу «Утешение философией» (есть и русский перевод).

Ирландский монах **Бéда Достопочтенный (ок. 673–735)** написал хронологический трактат «О счете времени», содержащий, в частности, правила вычисления пасхалий. Там же он дал полное описание счета на пальцах, в котором различные загибы пальцев изображали единицы, десятки, сотни и тысячи, а жесты рук позволяли продлить счет до миллиона.

Другой ирландский ученый монах **Алкуин (ок. 735–804)** стал советником франкского короля Карла Великого, основателя «Священной Римской империи». По настоянию Алкуина были открыты начальные школы при монастырях. Он усовершенствовал орфографию и некоторые правила грамматики латинского языка. Большой популярностью пользовалось его руководство по математике «Задачи для изощрения ума юношей» арифметического и логического содержания (53 задачи), изложенные в увлекательной форме.

В XI–XII вв. ослабевает жесткое идеологическое давление христианской церкви, и наука начинает пробуждаться. Крестовые походы XI–XIII вв. также способствовали знакомству европейцев с достижениями восточной науки. Основную роль по передаче научных знаний от арабов в Западную Европу сыграла Испания, большая часть которой еще в VIII в. была захвачена арабами (маврами), образовавшими там Кордовский халифат. Наука в нем находилась на довольно высоком уровне, в Кордове была большая библиотека, насчитывающая

60 тысяч рукописей, в частности переводы на арабский язык многих произведений древнегреческих математиков. Проникновение математики в Италию происходило и из Сицилии, также занятой маврами.

Французский ученый монах **Герберт (ок. 930–1003)**, ставший в последние годы жизни папой Сильвестром II, в молодости изучал в Испании науку арабов. Ему принадлежит несколько математических сочинений, в частности книга о счетной доске – абаке. Заметим, что в его книге по геометрии приведены неправильные формулы для площади треугольника и четырехугольника, позаимствованные из сочинения Беды. Это говорит об упадке геометрии в Европе в VII–XI вв.

На Руси первое известное сочинение математико-астрономического содержания написал ученый монах **Кирик Новгородец (род. в 1110 г., умер после 1156–1158 гг.)**. Оно называется «Учение им же ведати человеку числа всех лет» и написано в 1136 г. (в 6644 г. «от Адама», т. е. от «сотворения мира», которое, как тогда полагали, произошло за 5508 лет до н. э.). В нем приведены правила и результаты вычислений количества лет, месяцев, дней и часов, прошедших за 6644 года, а также астрономические сведения о солнечном (28 лет) и лунном (19 лет) циклах, используемых, в частности, при расчете пасхалий. «Для любителей мудрости и для желающих все хорошо усвоить о так называемых дробных» приведены расчеты числа дробных долей, содержащихся в сутках, при условии, что в одном часе содержится 5^n дробных частей $(n = 1, 2, \ldots, 7)$. Кирик свободно оперирует числами в пределах трех десятков миллионов, что свидетельствует о высокоразвитой культуре арифметических вычислений в древней Руси. Здесь в то время использовалась алфавитная славянская нумерация (мало отличающаяся от греческой), в которой цифры обозначались буквами со значком ҃ («титло») над ними. Например: а҃ = 1, в҃ = 2, г҃ = 3, ч҃ = 90, ц҃ = 900. Перед тысячами ставился знак ҂, например: ҂ацч҃в = 1992 (это 7500-й год «от сотворения мира»). В так называемой «малой» системе древнерусской нумерации использовались следующие обозначения и названия высших разрядов: а $= 10^4$ (тьма), а $= 10^5$ (легион), а $= 10^6$ (леодр). В «большой» системе нумерации рассматривались и некоторые более высокие разряды. Нашествие монголов в XIII в. разрушило культурную и научную жизнь в Киевской Руси, находившуюся в состоянии подъема. Ценой больших потерь Русь задержала орды кочевников и обеспечила возможность интенсивного развития науки и культуры в Западной Европе. О Кирике Новгородце: [52; 21, вып. 6].

Веком великих переводов с арабского языка на латынь называют XII век. Самым знаменитым переводчиком в этом веке был итальянец **Герардо из Кремоны (1114–1187)**. Он перевел около 90 сочинений с арабского, в том числе и греческих авторов: «Начала» Евклида, «Измерение круга» Архимеда, «Конические сечения» Аполлония, «Альмагест» Птолемея, несколько сочинений Аристотеля, труды ал-Хорезми, Ибн-Корры, Ибн ал-Хайсама и др. В то время и работы древнегреческих авторов переводили с арабского языка, который знали лучше греческого.

В Европе открываются первые университеты: в XII в. – в Салерно, Болонье и Оксфорде; в XIII в. – в Кембридже (1209) и Париже (1215); в XIV в. – в Риме (1303), Флоренции (1321), Праге (Карлов ун-т, 1348), Кракове (Ягеллонский ун-т, 1364), Вене (1365) и др. городах; в XV в. – в Лейпциге (1409) и Базеле (1459). Университеты были общими для всей католической Европы. Обучаться в них начинали с 12–13 лет, сначала в течение 6 лет на факультете искусств, который играл роль подготовительного. На этом факультете было две ступени: тривиум (грамматика, риторика, диалектика) и квадривиум (арифметика, геометрия, астрономия, музыка). После испытаний можно было продолжать обучение в течение 8 лет на одном из факультетов: богословском, юридическом и медицинском, из которых богословский был самым влиятельным. Математика изучалась в небольшом объеме на факультете искусств. В университетах процветала схоластика (от лат. *scholasticus* – школьный) –тип религиозной философии, характеризующийся соединением теолого-догматических предпосылок с рационалистической методикой и интересом к формально-логическим проблемам. В XIII в. центром схоластики был Парижский университет. Тогда был снят запрет на философию Аристотеля, и вскоре она глубоко проникла в христианское мировоззрение. Мышление схоластов основывалось на дедукции от общего к частному и не стремилось открыть истину индуктивным путем через анализ опыта. Схоласты проявляют интерес к античному наследию, особенно к трудам Аристотеля по логике и его философии.

Леонардо Пизанский

Из университетов уже в XIII–XIV вв. вышло много видных ученых. Замечательный итальянский математик **Леонардо Пизанский (Фибоначчи, ок. 1170–1240)** первым освоил наследие арабской математики. Его основное произведение – «Книга абака» из 15 глав – было написано в 1202 г. и переработано в 1228 г. Слово «абак» у него означает не только счетную доску, но и арифметику вообще. Здесь он приводит подробные математические сведения, почерпнутые из арабского и античного наследия, дополненные собственными оригинальными задачами. Особое внимание он уделяет пропаганде индийских цифр, называемых сейчас арабскими, и десятичной системы, тогда как в Европе господствовала неудобная для вычислений римская нумерация. Он излагает способы решения линейных и квадратных уравнений, линейных систем, предлагает оригинальный способ извлечения кубических корней. В задаче о кроликах он впервые рассматривает возвратную (рекуррентную) последовательность, члены которой удовлетворяют условию $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $u_0 = u_1 = 1$. При решении системы 7 линейных уравнений с 8 неизвестными у него появляются и отрицательные числа, которые он трактует как «долг». В «Книге квадратов» Леонардо решает неопределенные уравнения второй степени. Переводя на латынь соответствующие арабские термины, он называет неизвестную x словом *res* (вещь), x^2 – *census* (имущество) или *quadratus* (квадрат), уравнения формулирует словесно. О его высоких вычислительных способностях говорит, например, тот факт, что для корня уравнения $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ он находит приближение (в шестидесятеричных дробях) $x \approx 1;22,7,42,33,4,40$, т. е. с точностью до $3 \cdot 10^{-11}$. Кроме того, он доказывает, что этот корень не может быть рациональным и не выражается через квадратичные иррациональности. Ему принадлежат также две книги по геометрии. Книги Леонардо Пизанского не нашли в то время широкого понимания из-за низкой математической культуры его современников, а получили признание лишь почти три века спустя, когда их переработал Лука Пачоли.

Большей популярностью в XIII в. пользовались менее оригинальные, но более элементарные книги, которые написал профессор Парижского университета **Иордан Неморарий (1225–1260)**. Это «Арифметика, изложенная в 10 книгах»; книга по алгебре «О данных числах» (4 книги, содержащие 115 задач на линейные и квадратные уравнения и их системы); «О треугольнике» (4 книги, где, в частности, приведено оригинальное решение задачи о квадратуре круга); «Объясненный алгоритм» (19 книг) и др. Неморарий уже более широко использует буквы для обозначения чисел и неизвестных. О Неморарии: [21, вып. 12, с. 559–688].

Испанский философ и богослов **Раймунд Луллий (Лулль, ок. 1235 – ок. 1315)**, работавший миссионером в Северной Африке, пришел к мысли механизировать процесс открытия новых истин. Это новое направление в науке он называет «великим искусством» и пытается разработать его в ряде своих сочинений, написанных на каталонском и арабском языках. Для практической реализации некоторых своих идей он строит машину, состоящую из многих кругов, несущих на себе различные понятия и знаки. Вращение кругов комбинирует эти понятия и знаки и может, по мнению Луллия, приводить к открытию новых истин. Его машина была примитивной и бесполезной, но его идеи были смутным предвосхищением возможности создания элементов математической логики и их применения в машинах.

В XIII–XIV вв. в английских и французских университетах проявляется интерес к механике и оптике, вызванный сочинениями Аристотеля и его последователей на арабском Востоке. **Роберт Гроссетест (ок. 1175–1258)** был лектором и первым канцлером Оксфордского университета. Он стоял на позициях математического атомизма и необходимости опытного исследования природы. Поставил вопрос о сравнении различных бесконечностей, например, сумм некоторых расходящихся рядов. Считал, что математика должна быть базисом для физики. «Все принципы природных действий, – писал он, – должны быть даны посредством линий, углов и фигур».

Более известен ученик Гроссетеста, монах францисканского ордена **Роджер Бэкон (ок. 1214–1294)**. Он учился в Оксфорде, преподавал там, в 1237–1250 гг. жил в Париже, а затем вернулся в Оксфорд. Бэкон – первый крупный критик схоластики, он считал, что естествознание должно основываться на наблюдениях и опыте, а не на текстах, одобренных церковью. В 1257–1267 гг. был в опале и жил в монастыре. За резкое обличение служителей церкви в 1278 г. был заключен в тюрьму, освобожден только в 1292 г. Его книга «Главный труд» с двумя приложениями представляет энциклопедию наук XIII в. В центре внимания Бэкона были физико-математические науки, в особенности оптика. Он указал принципы очков, телескопа и микроскопа. Часть IV его «Главного труда» называется «О пользе математики». Он был хорошо знаком с важнейшими произведениями древнегреческих математиков.

Брадвардин

Английский математик магистр **Томас Брадвардин (1290–1349)** учился и преподавал в Оксфордском университете, а под конец жизни стал архиепископом (в средние века разрешалось преподавать лишь лицам духовного звания). Он написал три сочинения по математике и одно по механике. «Теоретическая арифметика» Брадвардина представляет собой сокращение «Арифметики» Боэция, она пользовалась популярностью, с 1495 г. печаталась 12 раз. (Книгопечатание в Европе начало распространяться с середины XV в., т. е. через 100 лет после смерти Брадвардина.)

Более оригинальной является его «Теоретическая геометрия», состоящая из четырех отделов. К каждому отделу приведены определения. Она начинается с изучения звездчатых многоугольников, которые получаются (начиная с пятиугольника) из правильных выпуклых многоугольников путем продолжения их сторон. Это самостоятельный вклад Брадвардина в геометрию многоугольников. Далее излагаются изопериметрические свойства многоугольников, круга и шара, следуя анонимному переводу работы древнегреческого математика Зенодора на латынь с арабского. Говорится об иррациональности $\sqrt{2}$ как отношении диагонали квадрата к его стороне, упоминается «Измерение круга» Архимеда и приводится оттуда теорема Архимеда о площади круга и приближение $\pi \approx 22/7$. Говорится также о том, что существует только пять правильных многогранников, рассматривается вопрос о заполнении некоторыми из них всего пространства. Обсуждается проблема угла касания – «роговидного угла» (например, между окружностью и касательной к ней). Считать такой угол равным нулю не было принято, но было ясно, что его величина не удовлетворяет аксиоме Архимеда. Математики XIV–XV вв. высоко ценили «Теоретическую геометрию» Брадвардина, она была издана в 1495 г. и потом еще два раза.

Интересным является его «Трактат о континууме», написанный между 1328 и 1335 гг. Брадвардин приводит пять концепций континуума, распространенных в древности или в его время. Книга начинается с определений, а заключения формулируются как теоремы. Брадвардин отстаивает точку зрения Аристотеля на континуум (см. с. 40 пособия). Приводится определение континуума как количества, части которого взаимно связаны. Рассматривается пространственный и временной континуумы, а движение определяется как прохождение пространственного континуума во временно́м. Различаются актуальная и потенциальная бесконечности. Брадвардин решительно выступает против утверждения о том, что континуум (ограниченный) состоит из конечного числа неделимых. Иными словами, он выступает против атомистической точки зрения на континуум. Он приводит ряд примеров, указывающих на противоречивый характер атомистической концепции. Например, при ортогональном проектировании точек полуокружности на диаметр, на котором она построена, получается, что полуокружность и диаметр имеют равное количество точек. А если считать, что полуокружность и диаметр состоят из конечного числа неделимых «атомов», то выходит противоречие: полуокружность равна диаметру. (Аналогичная ситуация с гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника.) Проектированием из вершины треугольника показывается, что средняя линия треугольника и отвечающее ей основание имеют одинаковое количество точек, т. е. снова получаем парадоксальную ситуацию. Приводя эти и другие примеры, Брадвардин приходит к теоретико-множественным проблемам. Дискуссии о природе континуума оказали влияние на разработку исчисления бесконечно малых в XVII в. и теории множеств в конце XIX в.

В «Трактате об отношениях или об отношениях скоростей при движении» Брадвардин делает попытку выразить математически зависимость между скоростью v, движущей силой F и сопротивлением R, но здесь ему не удалось внести ясность. В связи с вопросами механики он говорит о составных отношениях и приближается к идее дробных показателей, рассматривая отношение $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ («половинное отношение»). Он, по-видимому, не знал, что уже Архимед говорил о «полуторном отношении» $\sqrt{a^3}:\sqrt{b^3}$. О Брадвардине: [21, вып. 13, с. 385–440; 1, т. 1, с. 270–273; 43, с. 388–393].

Суисет

В XIV в. в Оксфордском университете и в Парижском (Сорбонне) начали изучать различного вида движения (равномерное, равномерно-ускоренное, неравномерное), но пока еще без уравнений. Это было связано с философским понятием «формы» и ее изменений, восходящем к Аристотелю. Теория изменений форм находится на границе между физикой, механикой, математикой и философией. В Оксфорде этими вопросами занимался **Ричард Суисет (Суайнсхед)**, а в Париже – **Николь Орем**. Биографические сведения о Суисете очень скудны, как и о большинстве средневековых ученых. Полагают, что после окончания Оксфордского университета Суисет работал там в Мердок-колледже с 1340 по 1355 г.

Суисет является автором «Книги вычислений» («Liber calculationum»), написанной до 1346 г. Там нет вычислений в нашем смысле, изложение носит словесный абстрактно-философский характер. В отличие от Орема, у Суисета нет никаких рисунков, поясняющих изложение. Книга Суисета трижды была напечатана в Италии в 1477–1520 гг. В издании 1520 г. она состоит из 16 трактатов (глав). Кроме общих вопросов, связанных с «интенсией» (усилением) и «ремиссией» (ослаблением) изменений «форм» (качеств исследуемых явлений), рассматриваются конкретные примеры применения этой теории к вопросам о смесях, разрежении и густоте, силе освещенности, движении в среде без сопротивления и с сопротивлением и др. Он часто рассматривает вместе противоположные качества (например, тепло и холод), интенсия одного из них связана с ремиссией другого. Проще было бы говорить об изменениях одного из качеств, чем об их взаимном изменении. Значение, принимаемое каким-либо качеством, обычно называли «градусом», а значение, равное нулю – «неградусом». Раньше рассматривалась скорость движения за какое-то время, а у Суисета уже есть интуитивное представление о мгновенной, или точечной скорости (velositas punctualis). Точно определить это понятие в то время не было возможности. В средние века, как и в древней Греции, нельзя было делить путь на время (это неоднородные величины), для сравнения скоростей двух движений нужно было сопоставить либо пути, пройденные за одно и то же время, либо времена, за которые проходится один и тот же путь.

Суисет называет качество с равномерным изменением интенсивности (скорости) униформным, с равномерно-ускоренным изменением – униформно-дифформным, остальные – дифформными. До этого рассматривали только равномерное движение, т. е. с постоянной скоростью. Суисет доказывает теорему: униформно-дифформное качество равно униформному со средней интенсивностью. Иными словами, при равномерно-ускоренном изменении интенсивности средняя интенсивность на некотором промежутке равна среднему арифметическому начальной и конечной интенсивностей. Учитывая, что скорость равномерно-ускоренного изменения состояния (движения) имеет вид $v = at + b$, где t – время, мы можем, в отличие от Суисета, получить его теорему интегрированием:

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}(at+b)dt = \frac{v(t_1)+v(t_2)}{2}.$$

Но совсем просто, следуя Орему, это можно получить графически. Как видим, понятие интенсивности качества, выполнявшее роль функции, зависящей, например, от времени, позволило Суисету получить существенный результат – «теорему о среднем», которая представляет собой «зародыш» теоремы о среднем для интеграла.

Суисет приводит и пример довольно сложной дифформности (неравномерности). Пусть промежуток длины 1 разбит на последовательные участки с длинами $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$ в геометрической прогрессии, и пусть интенсивности на этих участках растут в арифметической прогрессии $1, 2, 3, \ldots$ Тогда, согласно Суисету, средняя интенсивность равна 2. (Ее можно считать средней, т. к. отрезок здесь имеет длину 1.) Он записывает этот результат в виде ряда

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 3 + \ldots = 2,$$

впервые встречающегося в схоластической науке. До этого знали только бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Суммирование этого ряда Суисет проводит формально, разбивая его на бесконечное число геометрических прогрессий со знаменателем $\frac{1}{2}$, из которых первая начинается с $\frac{1}{2}$ и имеет сумму 1, вторая – с $\frac{1}{2^2}$ и с суммой $\frac{1}{2}$, третья – с $\frac{1}{2^3}$ и с суммой $\frac{1}{2^2}$, и т. д.

Суисет иногда использует термин «течение» (fluxus), говоря об изменении качеств. Этот термин вошел в литературу по исчислению бесконечно малых в XVII–XVIII вв., особенно в «методе флюксий» Ньютона. И в настоящее время иногда используют термин «текущие координаты». Лейбниц в двух письмах 1670 и 1696 гг. отзывался о Суисете как об одном из первых ученых, который применил математику к физике и ввел математику в схоластическую науку. Одновременно с Суисетом в Оксфорде занимался «калькуляциями» У. Хейтесбери и др. О Суисете: [21, вып. 21, с. 129–142; 1, т. 1, с. 273–275; 43, с. 396–397].

Орем

Французский математик, магистр **Николь Орем (Оресм, ок. 1323–1382)** учился в Сорбонне, в 1348–1361 гг. преподавал в одном парижском колледже, затем жил в Руане, с 1377 г. – епископ в Лизье.

В своем трактате «О конфигурации качеств», написанном до 1371 г., он рассматривает различные типы «качеств» (т. е. переменных величин), изображая графически скорость в зависимости от времени. По аналогии с небесными и географическими координатами он откладывает время в виде горизонтального отрезка как долготу, т. е. абсциссу, а скорость – перпендикулярно к нему как широту, т. е. ординату. Орем уже имеет представление о том, что при этом площадь под кривой, изображающей скорость, равна величине пути, пройденного движущейся точкой. (В случае равномерного движения это очевидно.) В случае равномерно-ускоренного движения это выразил также Галилей в 1638 г. Графическое изображение у Орема отличается от современного тем, что у него еще нет системы координат с указанием направления осей и начала координат. Вместо оси абсцисс у него постоянно используется некоторый «основной отрезок», который представляет собой, например, час. Скорость Орем задает не аналитически, а графически, поскольку тогда еще не была разработана символика.

Из трактата Орема «О конфигурации качеств» видно, что он был знаком с результатами Суисета, хотя, возможно, и не читал его рукописей. Орем придал этой теории большую простоту и наглядность. Он распределяет все качества на следующие три вида:

1) равномерные – с постоянной интенсивностью, они изображаются прямоугольником, нижняя его сторона выражает время, а верхняя – постоянную интенсивность качества;

2) равномерно-неравномерные – у них для любых двух точек разность широт пропорциональна разности долгот; такие качества изображаются, как мы говорим, трапецией, ограниченной осью абсцисс, двумя ординатами и верхним наклонным отрезком, выражающим интенсивность (скорость изменения)

качества. При нулевой начальной или конечной интенсивности это прямоугольный треугольник. В механике – это равномерно-ускоренное движение;

3) неравномерно-неравномерные – все остальные; они, как мы говорим, изображаются криволинейными трапециями, где верхняя кривая (линия интенсивности) выражает скорость изменения качества, она может состоять из одной или нескольких кривых линий (например, дуг окружностей) или кривых в сочетании с прямыми, а также в виде ступенчатых отрезков в случае скорости, которая меняется скачками. Орем приводит и примеры графического изображения конфигурации качеств в пространстве.

Качества второго типа у Орема – это качества с равномерно-ускоренной интенсивностью, они выражают, в частности, равномерно-ускоренное движение в механике. Для них он доказывает «теорему о среднем», которая была и у Суисета. Для ее доказательства Орем использует графическую иллюстрацию. Нижняя сторона трапеции выражает время, а верхняя – скорость равномерно-ускоренного движения. Пусть v_1 и v_2 – начальная и конечная скорости этого движения за время от t_1 до t_2. Орем заменяет трапецию равновеликим ей прямоугольником с основанием $t = t_2 - t_1$ и высотой $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$. Верхняя сторона прямоугольника выражает скорость равномерного движения. Теорема о среднем утверждает, что равномерно-ускоренное движение за промежуток времени от t_1 до t_2 равносильно равномерному движению со скоростью $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ за то же время. Если v_1 или v_2 равно нулю, то вместо трапеции будет прямоугольный треугольник, катет в его основании выражает время, гипотенуза – скорость равномерно-ускоренного движения, а верхняя сторона прямоугольника содержит среднюю линию треугольника, параллельную основанию. Но Орем идет дальше Суисета, придя к выводу, что при равномерно-ускоренном движении проходимый путь равен площади под линией интенсивности, т. е. под линией, изображающей скорость. Это уже шаг к интегральному исчислению. В рассматриваемой ситуации трапеция с нижней стороной $t = t_2 - t_1$ и двумя другими длины v_1 и v_2 равновелика прямоугольнику с основанием $t = t_2 - t_1$ и высотой $\overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$. При равномерном движении со скоростью $\overline{v}$ за время $t = t_2 - t_1$ проходится расстояние $s = \overline{v}t$, оно равно площади прямоугольника, а следовательно, и равновеликой ему трапеции. Впрочем, Орем не говорит в общем виде о том, что проходимое расстояние здесь равно площади, но несколько раз использует это в примерах даже в более общей ситуации. Говорить в то время о том, что расстояние равно площади, было некорректным, т. к. это неоднородные величины. Орем имеет в виду, что отношение расстояний равно отношению соответствующих площадей.

Отметим, что, кроме интуитивного понятия о скорости в точке, Орем имел и интуитивное представление об ускорении как интенсивности скорости и даже предложил для ускорения специальный термин, но тогда еще не было возможности использовать это понятие.

Случай, когда скорость кусочно-постоянная, т. е. меняется скачками, а скачков бесконечно много, Орем использует для составления из прямоугольников фигур неограниченной протяженности с конечной площадью и связывает эти фигуры с рядами. Рассматривая пример Суисета для кусочно-постоянной интенсивности на промежутке длины 1, где в результате получается ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$, Орем полагает, что тело движется со скоростью 1 в течение первой половины часа, со скоростью 2 в течение следующей $\frac{1}{4}$ часа, со скоростью 3 в течение $\frac{1}{8}$ часа и т. д. При графическом изображении получаем ступенчатую фигуру, неограниченно протяженную вверх, с конечной площадью, равной 2, а площадь под первой ступенькой равна $\frac{1}{2}$, что составляет $\frac{1}{4}$ часть от 2. Поэтому Орем делает вывод, что за 1 час будет пройдено расстояние в 4 раза большее, чем за первые полчаса. Таким образом, Орем связывает проходимое расстояние с суммарной площадью под ступеньками, изображающими скорость движения, хотя движение здесь не является ни равномерным, ни равномерно-ускоренным.

В ином примере он кинематически и графически иллюстрирует геометрическую прогрессию $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=2$, считая, что в 1-й день тело движется со скоростью 1, во 2-й – со скоростью $\frac{1}{2}$, в 3-й – со скоростью $\frac{1}{4}$ и т. д. Графически здесь на прямой строятся квадрат со стороной 1 и примыкающие к нему прямоугольники с основаниями, равными 1, и высотами, равными, соответственно, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$. Площадь полученной неограниченной фигуры равна 2, и Орем пишет, что тело «только за всю вечность пройдет путь вдвое больший того, который был пройден за 1-ю часть времени». Снова мы видим, что Орем связывает пройденный путь с соответствующей площадью. С точки зрения анализа можно сказать, что в предыдущем примере производится интегрирование ступенчатой функции на конечном промежутке, а в этом – на бесконечном. У Орема имеются и более сложные ряды, например ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\ldots=\frac{7}{4}.$$

Орем поясняет, как можно строить пространственные фигуры неограниченной протяженности с конечным объемом. Крупным достижением Орема является то, что впервые он доказал расходимость гармонического ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, замечая, что $\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}>2\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2^3}>4\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2}$ и т. д.

В работе «Вопросы по геометрии Евклида» Орем впервые получил следующий важный факт: при равномерно-ускоренном движении с начальной скоростью, равной нулю, пройденное расстояние пропорционально квадрату времени. Этот факт обычно связывают с Галилеем, получившим его лет на 250 позже. Равномерно-ускоренное движение с нулевой начальной скоростью Орем изображает прямоугольным треугольником, у которого катет, являющийся основанием, выражает время, а гипотенуза – скорость движения. Возьмем в этом треугольнике два подобных треугольника, проведя из любых двух точек гипотенузы отрезки, перпендикулярные основанию. Согласно теореме Евклида, приведенной в «Началах», площади подобных треугольников относятся как квадраты соответственных сторон, в частности соответственных катетов. При равномерно-ускоренном движении отношение пройденных расстояний равно отношению соответствующих площадей, поэтому пройденные расстояния пропорциональны квадратам соответствующих времен.

Как видим, у Суисета и Орема было уже довольно развитое представление о функции («интенсивности качества»), некоторая классификация функций, а у Орема – и графический способ задания, но не было еще формул для аналитического задания функций. Орем существенно продвинулся в изучении равномерно-ускоренного движения, связав пройденное расстояние с соответствующей площадью, а при нулевой начальной скорости – и с квадратом времени. Развитие этих его идей произошло только лет через 300, когда уже была удобная алгебраическая символика. Трактат Орема «О конфигурации качеств» получил широкое распространение в рукописях в конце XIV и в XV веках. Эту теорию стали преподавать в некоторых университетах. В переработанном виде под названием «Трактат о широтах форм» последователи Орема опубликовали его теорию трижды в конце XV в. в Италии, а в 1515 г. – в Вене.

В «Алгоризме отношений» и «Трактате об отношениях» (около 1350 г.) Орем словесно формулирует правила действий с дробными степенями вроде $a^{\frac{m}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{m}}$, $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$, $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ (m, n – натуральные) в других обозначениях. Он приблизился также и к понятию степени с иррациональным показателем, считая, что ее можно заключить между «достаточно близкими» целыми или дробными степенями. Об Ореме: [21, 1958, вып. 11, с. 601–731; 1, т. 1, с. 275–282; 43, с. 397–401].

Математика в Европе в эпоху Возрождения (XV – XVI вв.)

Средние века заканчиваются эпохой Возрождения. Это период в культурном, идейном и научном развитии Западной Европы с XV в. до первых десятилетий XVII в. (в Италии – с XIV в.). Он характеризуется повышенным интересом к античности, освобождением от узких рамок церковного мировоззрения и схоластической науки в эпоху феодализма. Возрождение с его раскрепощением творческой личности дало миру многих выдающихся художников, скульпторов, архитекторов, писателей. В это время были сделаны выдающиеся географические открытия, оживляется торговля. Феодальный строй клонится к упадку, зарождаются капиталистические отношения. Новый взгляд на строение Солнечной системы утверждает теория Коперника. Изобретение дешевой бумаги и возникновение в Европе в 40-х гг. XV в. книгопечатания сыграло большую роль в развитии науки и культуры.

Региомонтан

Первый крупный вклад в математику эпохи Возрождения внес немецкий математик и астроном **Иоганн Мюллер (1436–1476)**. Он писал под псевдонимом **Региомантан**, происходящим от латинского названия его родного города Кенигсберга. Региомонтан работал в Вене, Будапеште, а с 1471 г. заведовал обсерваторией в Нюрнберге. Он закончил начатый его учителем астрономом Пейрбахом перевод «Синтаксиса» («Альмагеста») Птолемея, а также перевел труды Аполлония, Герона и Архимеда. В своем труде «О треугольниках всех видов 5 книг», написанном около 1461 г., но опубликованном лишь в 1533 г., Региомонтан впервые в Европе систематически изложил тригонометрию (плоскую и сферическую) как самостоятельную математическую дисциплину, а не как часть астрономии. Его труд испытал некоторое влияние античной и арабской математики, но Региомонтан обогатил тригонометрию многими собственными результатами и доказательствами, а также мастерски изложил ее. С работами Насир ад-Дина ат-Туси он не был знаком. Региомонтан составил две таблицы синусов через $1'$ (одна из них – с точностью до 7 десятичных знаков), а также таблицу тангенсов через 1°. Он первым ввел в европейскую математику тангенс, хотя в книге «О треугольниках ...» еще им не пользуется. Он проявлял интерес и к теории чисел, где поставил ряд трудных задач. О Региомонтане: [55].

Пачоли

Математики эпохи Возрождения добились наибольших успехов в развитии алгебры. Крупнейшим математиком XV в. был итальянский монах **Лука Пачоли (ок. 1445 – ок. 1517)**. Он преподавал математику в университетах Рима, Неаполя, Милана, Флоренции, Болоньи и др. Его основной труд «Сумма (знаний) по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциям» написан в 1487 г. на итальянском языке и напечатан в 1494 г. в Венеции. Это была *первая печатная книга по математике*. Содержание «Суммы» Пачоли не выходит за пределы «Книги абака» и «Практической геометрии» Леонардо Пизанского и во многом их повторяет. Но книга Пачоли уже была встречена его современниками с пониманием.

Пачоли называет алгебру «правилом вещи» (regula della cosa) и «великим искусством» (arte maggiore). Для обозначения свободного члена и степеней неизвестной он использует сокращения итальянских слов: n° (numero – число) – для свободного члена; co (cosa – вещь) – для x; ce (censo – квадрат, «имущество») – x^2; cu (cubo – куб) – для x^3; $ce.ce$ – для x^4; $p^{\circ}r^{\circ}$ (primo relato) – для x^5; $ce.cu$ – для x^6; $2^{\circ}r^{\circ}$ (secundo relato) – для x^7 и т. д. (Степени, показатели которых не являются произведением чисел 2^m и 3^n, Пачоли обозначает сокращениями слов «первое», «второе» и т. д. и слова relato – «невыразимое».) Пачоли использует знак ℞ для квадратного корня (от лат. Radix – корень), знаки $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$ для сложения и вычитания, а также формулирует правила умножения отрицательных и положительных чисел. Выражение

$\sqrt{40-\sqrt{320}}$ он записывает в виде $R\!\!\!\!\!\;\;\; V40\tilde{m} R\!\!\!\!\!\;\;\; 320$. Здесь буква V означает сокращение слова universale – «общий» (в то время и вместо буквы U печатали V). Он отмечает, что для решения кубических уравнений «искусство алгебры еще не дало способа, как не дан еще способ квадратуры круга». Книга Луки Пачоли «О божественной пропорции» посвящена архитектуре и пропорциям человеческого тела. Под «божественной пропорцией» он имеет в виду пропорцию $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$, которая определяет «золотое сечение» $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0,62$, часто встречающееся в живописи, архитектуре и живой природе. Здесь он рассматривает также правильные и полуправильные многогранники. Их изображения на 59 таблицах выполнил для него знаменитый художник и инженер **Леонардо да Винчи (1452–1519)**, с которым Пачоли дружил. Леонардо да Винчи и другие художники эпохи Возрождения широко используют в своей живописи перспективу, излагают теорию ее применения. Знаменитый немецкий художник и график **А. Дюрер (1471–1528)**, кроме того, в учебных руководствах рассматривает проекции частей человеческого тела на три взаимно перпендикулярные плоскости, делая первый шаг к начертательной геометрии. О Пачоли: [1. т. 1; 43; 57].

Обозначения Пачоли для степеней неизвестных были неудобными. Иные обозначения использует бакалавр медицины **Н. Шюке (1445–1500)**, уроженец Парижа, работавший в Лионе, в своем рукописном труде «Наука о числах в трех частях» (1484). Например, одночлены 12, $12x$, $12x^2$, $12x^3$ он записывает в виде 12^0, 12^1, 12^2, 12^3, выражение $7x^{-1}$ – как $7^{1\cdot\tilde{m}}$. Наша запись $\sqrt{14+\sqrt{180}}$ у него имеет вид $R^2.14\tilde{p}R^2.180$, а вместо $\sqrt{4x^2+4x+2x+1}$ он пишет $R^2\underline{4^2\tilde{p}4^1\tilde{p}2^1\tilde{p}1}$. В средние века математики выражали умножение, деление и равенство словами. Из сопоставления арифметической прогрессии $1,2,\ldots,n$ и геометрической $a,a^2,\ldots,a^n$ Шюке делает вывод, что произведению членов геометричесокй прогрессии отвечает сумма соответствующих членов арифметической. Эта идея о связи арифметической и геометрической прогрессий привела в XVII в. к открытию логарифмов.

Коперник

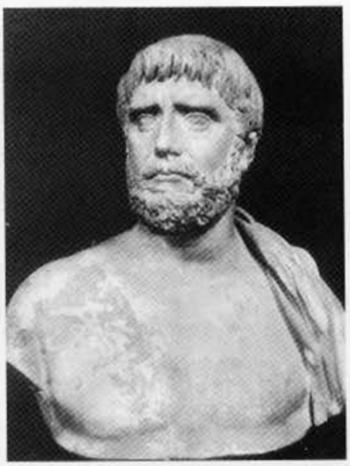
Великий польский астроном **Николай Коперник (1473–1543)** совершил революцию в астрономии и внес вклад в развитие тригонометрии. Он родился в г. Торуни, учился в Краковском университете, затем в течение девяти лет в университетах в Болонье, Риме и Падуе в Италии. После возвращения в Польшу работал, в основном, во Фромборке в должности каноника – члена совета из духовных лиц при епископе. В гениальном труде «О вращениях небесных сфер шесть книг», изданном впервые в Нюрнберге в 1543 г., Коперник строит гелиоцентрическую модель Солнечной системы. Его теория близко соответствовала физической картине мира. Но он не мог обойтись без сложения равномерных круговых движений по эксцентрам и эпициклам, поэтому в его книге, как и у Птолемея, механика движения Луны и планет опирается на довольно сложные геометрические построения. Но изложение теории Коперником выгодно отличается от приведенного Птолемеем. В теории Птолемея особенности движения планет по эпициклам или деферентам связаны с Солнцем, хотя Солнцу отводится там роль одной из планет. Теория Коперника, поменявшая местами Землю и Солнце, очень естественно объясняет наблюдаемые с Земли явления движением Земли вокруг Солнца. Кроме того, его теория дает относительные средние расстояния планет до Солнца, т. е. по отношению к расстоянию от Земли до Солнца (астрономической единице). Эти относительные расстояния у Коперника в основном с точностью до нескольких процентов совпадают с современными, а также со значениями параметра δ (для Меркурия и Венеры) и $\frac{1}{\delta}$ (для других планет) у Птолемея. (Параметр δ у Птолемея равен отношению радиуса эпицикла к радиусу деферента планеты.) Однако Птолемей не связывал параметр δ с расстоянием планет до Солнца. И только Коперник впервые указал относительные расстояния от известных в то время планет до Солнца и притом с высокой точностью. Сама же астрономическая единица долгое время была известна очень грубо: Птолемей, Коперник и даже Кеплер, установивший в начале XVII в. три закона движения планет, считали расстояние от Земли до Солнца примерно в 20 раз меньшим истинного. И только в 1672 г. Кассини и его сотрудники по Парижской обсерватории, измеряя с двух удаленных точек земной поверхности положение Марса во время его противостояния, впервые вычислили (с точностью до 6%) расстояние от Земли до Солнца (оно равно около 150 млн км).

В книге Коперника излагается плоская и сферическая тригонометрия, приводятся оригинальные доказательства теорем, а также пятизначная таблица синусов с шагом 10′. Книга Коперника была запрещена инквизицией с 1616 по 1828 г. Теория Коперника совершила переворот в научном естествознании и послужила исходным пунктом развития новой астрономии и механики. О Копернике: [54] и книга: Веселовский И. Н., Белый Ю. А. Николай Коперник. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

Ученик Коперника, первый популяризатор его учения, **Г. И. Ретик (1514–1574)** вместе со своим учеником **В. Ото** составил десятизначные таблицы всех шести тригонометрических функций через каждые 10″. Эта очень трудоемкая работа была завершена в 1596 г., уже после смерти Ретика.

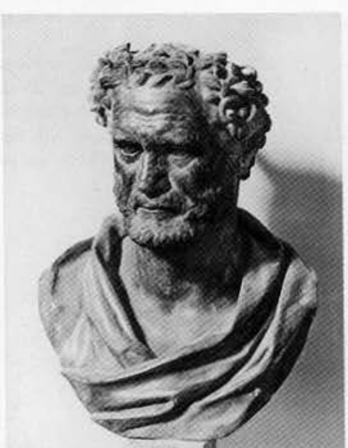
Коссисты

Существенные шаги в направлении создания алгебраической символики сделали немецкие алгебраисты XV–XVI вв. – «коссисты», которые называли алгебру словом «косс» (от итальянского слова cosa – «вещь», означавшего неизвестную величину). Один из них – **Ян Видман (1460 – ок. 1498)**, родившийся в Чехии и преподававший в Лейпцигском университете. В учебнике «Быстрый и красивый счет для всего купечества», напечатанном в 1489 г., он впервые ввел знаки + и –. Чешский математик **Криштоф Рудольф (ок. 1500–1545)**, работавший в Вене частным учителем математики, создал учебник алгебры под названием «Быстрый и красивый счет при помощи искусных



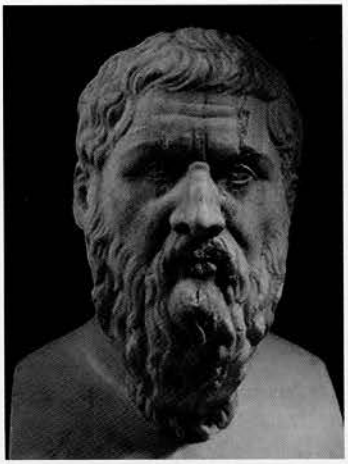
Фалес

Пифагор

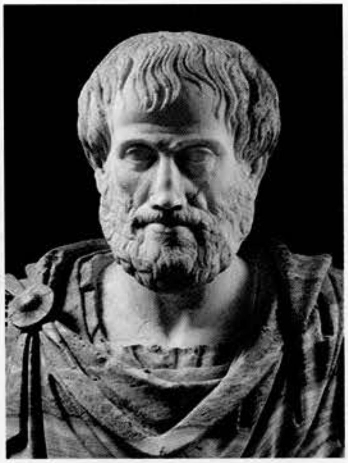


Демокрит

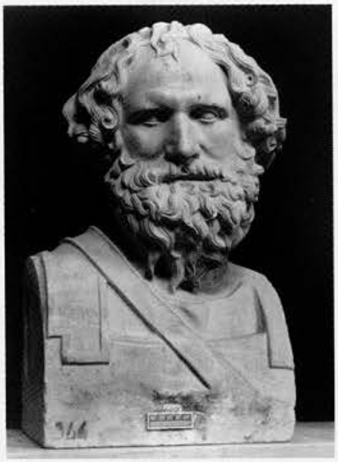
Архит



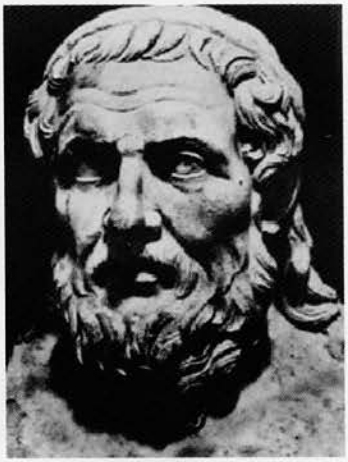
Платон



Аристотель



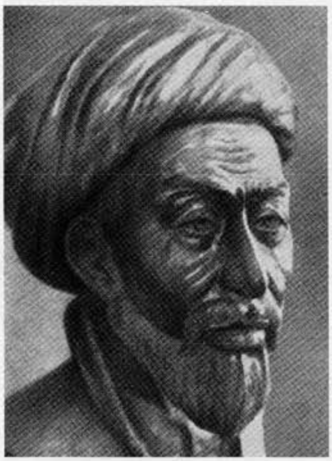
Архимед



Аполлоний

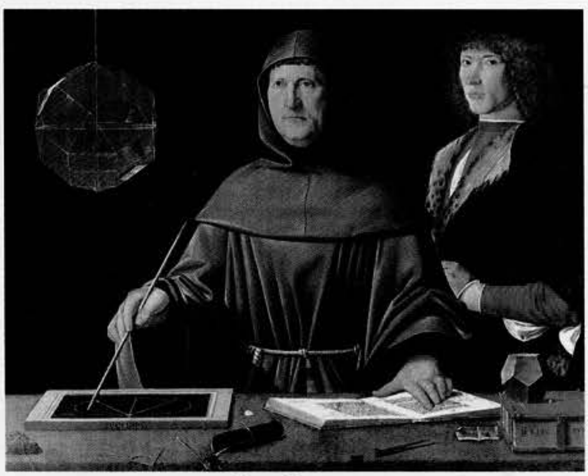
Историки математики не уверены в подлинности древних изображений математиков на большинстве приведенных выше иллюстраций (см., например, [24]). В ряде источников по истории математики приводятся так называемые апокрифические (явно не настоящие) рисованные изображения Пифагора, Евдокса, Евклида, Птолемея, выполненные в эпоху Возрождения (см., например, [11]), мы их не приводим.

Николь Орем

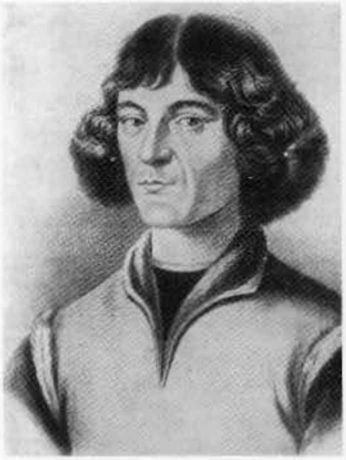


Улугбек

Региомонтан



Лука Пачоли



Николай Коперник

Никколо Тарталья

Джироламо Кардано

Франсуа Виет

Симон Стевин

правил алгебры, обычно называемых Косс» (1525), в котором ввел знак √ (без горизонтальной черты) для квадратного корня. В учебнике немецкого математика **Адама Ризе (1489–1559)** «Косс» (1524) и в учебнике Рудольфа используются следующие «коссические» обозначения степеней с помощью готических букв: $\mathfrak{r}$ – для неизвестной x (готическое r, от лат. res – вещь или radix – корень), $\mathfrak{z}$ – для x^2 (первая буква слова zensus), $\mathfrak{c}$ – для x^3 (первая буква слова cubus), $\mathfrak{zz}$ – для x^4, β – для x^5 (т. е. ss – от sursolidum), $\mathfrak{zc}$ – для x^6, $bi\beta$ – для x^7 (от bissursolidum), $\mathfrak{zzz}$ – для x^8 и т. д. Коссические названия степеней x^5 и x^7 (и им аналогичных), показатели которых не выражаются в виде произведений степеней чисел 2 и 3, происходят от сокращения слов surdum solidum (буквально «глухое тело»). Эти слова являются латинским эквивалентом арабского слова «асамм» (немой, глухой), которым арабы перевели греческое слово 'αλογος – «невыразимый». Отсюда видно, каким непростым был путь к современной алгебраической символике. О длительном существовании «коссической» символики говорит и тот факт, что ее использовал **Л. Ф. Магницкий** в своей «Арифметике» (1703) – первом печатном учебнике математики в России. Алгебраическую символику, почти не отличающуюся от нашей, ввел Декарт в 1637 г. в своей «Геометрии».

Крупнейшим из «коссистов» был немецкий математик **М. Штифель (1487–1567)**, лютеранский священник, а затем профессор Йенского университета. В книге «Полная арифметика» (1544) он систематически излагает арифметические и алгебраические сведения. Здесь он вводит нулевой и дробные показатели степени, а также термин «показатель», оперирует с отрицательными числами. Производя деления обыкновенных дробей, он по существу решает уравнения вида $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{729}{64}$ и $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$. Предвосхищая появление логарифмов, Штифель вслед за Шюке сопоставляет арифметической прогрессии $-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$ геометрическую $a^{-n}, \ldots, a^{-1}, 1, a, \ldots, a^n$, при этом он первым из европейских математиков рассматривает отрицательные числа как меньшие нуля. Он приводит бином с натуральным показателем и треугольную таблицу биномиальных коэффициентов. О коссистах: [1, т.1; 43].

Коссические названия степеней упростил профессор Парижского университета **Петр Рамус (Пьер де ла Раме, 1516–1572)**. Он был гугенотом (протестантом) и погиб во время массовой резни католиками гугенотов, известной как «Варфоломеевская ночь» 24 августа 1572 г. Он является автором «Курса математики в тридцать одной книге» (1569), где, в частности, привел упрощенное изложение «Начал» Евклида. В его «Двух книгах по арифметике и стольких же по алгебре» (1586) степени имели следующие обозначения и названия: l (latus – «сторона») – для x, q (quadratus) – для x^2, c (cubus) – для x^3, bq (biquadratus) – для x^4, s (solidus – «тело») – для x^5, qc (quadratocubus) – для x^6, bs (bisolidus) – для x^7, tq (triquadratus) – для x^8.

Итальянские алгебраисты XVI в.

Крупнейшим достижением математики в эпоху Возрождения было открытие в первой половине XVI в. итальянскими математиками методов решения кубических уравнений (дель Ферро, Тарталья, Кардано) и уравнений 4-й степени (Феррари) в радикалах. История этого открытия подробно и увлекательно описана в [56].

Около 1515 г. знаменитый профессор Болонского университета **Сципион дель Ферро (1465–1526)** открыл способ решения кубических уравнений вида $x^3 + ax = b$ ($a > 0$, $b > 0$) в радикалах. Это открытие стало известно, в частности, его ученику Фиоре.

Никколо Тарталья (Фонтана, ок. 1500–1557) родился в бедной семье конного почтальона в г. Брешии на севере Италии. Когда Никколо было шесть лет, французы захватили Брешию, ворвались в церковь, где укрывалось население, и устроили резню. Никколо был ранен в гортань, вследствие чего стал заикаться и получил прозвище Тарталья («заика»). Не имея средств платить за учебу, мать забрала Никколо из школы, когда он выучил алфавит до буквы «к».

Проявив большое усердие, Никколо самостоятельно освоил латинский и греческий языки, математику и стал зарабатывать на жизнь уроками, чтением публичных лекций и консультациями. Около 1535 г. он получил кафедру математики в Вероне. В то время нередко устраивались публичные диспуты. Победившие в них получали вознаграждение, а иногда и предложение занять престижную должность. Фиоре вызвал Тарталью на диспут. Соперники предложили друг другу по 30 заверенных у нотариуса задач, на решение которых отводился срок в 50 дней. Все задачи, которые предложил Фиоре, сводились к решению кубических уравнений вида $x^3+ax=b$ $(a>0,\ b>0)$. С большим трудом Тарталье удалось за 10 дней до срока самостоятельно открыть способ решения этого уравнения. Тарталья одержал блестящую победу в диспуте, через день решил и уравнение $x^3=ax+b$ $(a>0,\ b>0)$, а также заметил, что уравнение $x^3+b=ax$ $(a>0,\ b>0)$ заменой $x=-y$ сводится к предыдущему.

Итальянский математик и врач **Джироламо Кардано (1501–1576)** родился в семье дворянина, высокообразованного юриста, окончил медицинский факультет университета в Павии, недалеко от Милана. Преподавал медицину и занимался врачебной практикой в Милане, которая принесла ему славу лучшего врача в Европе. Кардано написал огромное число книг (в 1663 г. в Лионе вышло его 10-томное собрание сочинений). Они носят энциклопедический характер и содержат как реальные, так и фантастические – в духе представлений того времени – многочисленные сведения по различным вопросам науки, техники, а также обширные сведения по алхимии, астрономии, магии, хиромантии, музыке, карточным играм и пр.

Задумав написать книгу по алгебре, Кардано пытается уговорить Тарталью поделиться с ним секретом решения кубических уравнений. Тарталья соглашается не сразу, так как надеется со временем опубликовать его сам. Пообещав Тарталье покровительство при дворе маркиза и поклявшись, что не опубликует открытие Тартальи без его разрешения, Кардано в 1539 г. получает от Тартальи изложенные в стихах формулы (без доказательств) для корней неполных кубических уравнений вида $x^3+ax=b$ и $x^3+b=ax$ $(a>0,\ b>0)$.

Разобравшись в них и восстановив доказательства, Кардано в 1540–1545 гг. решает все 10 типов полных кубических уравнений (т. е. содержащих x^2) с положительными коэффициентами с помощью подстановок вида $x = y + \alpha$, которые уничтожают члены с x^2 и сводят эти уравнения к неполным кубическим уравнениям.

Луиджи (Лодовико) Феррари (1522–1565) родился в Болонье, его отца убили французы. Мальчик скитался по Италии, зарабатывая на жизнь умением хорошо читать и писать. Попав к Кардано, Феррари стал его лучшим учеником и секретарем. Феррари нашел способ решения уравнений 4-й степени вида $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ в радикалах. Побывав в Болонье, Кардано познакомился с рукописями дель Ферро и увидел, что не Тарталья первым открыл метод решения кубических уравнений в радикалах. Поэтому Кардано считает себя свободным от данной Тарталье клятвы не публиковать открытие и пишет большую книгу под названием «Великое искусство, или о правилах алгебры», в которой многие главы посвящены теории решения кубических уравнений, а 39-я глава – решению уравнений 4-й степени в радикалах. Книга была издана в 1545 г. В ней Кардано признает за дель Ферро и Тартальей честь открытия способа решения кубического уравнения $x^3 + ax = b$ $(a > 0,\ b > 0)$, а за Феррари – способа решения уравнения 4-й степени.

Тарталья был глубоко возмущен тем, что Кардано нарушил данную ему клятву. В своих письмах он осыпает Кардано оскорблениями и вызывает его на диспут, от которого Кардано уклоняется. В защиту Кардано выступил Феррари, не пожалевший также резких слов по адресу Тартальи. История сохранила материалы этой бурной полемики (см. [56]). В 1548 г. состоялся публичный диспут между Тартальей и Феррари, на котором Тарталья потерпел поражение.

В настоящее время формулу

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

для корней уравнения $x^3+px+q=0$ называют (не вполне оправданно) формулой Кардано. Однако заслуги Кардано в теории решения алгебраических уравнений вовсе не ограничиваются тем, что он свел кубические уравнения общего вида к уравнениям, не содержащим членов с x^2. Он дает не просто правила решения уравнений, а выводит их, пользуясь, однако, сложным языком геометрической алгебры. До Кардано отрицательные корни уравнений фактически не принимались во внимание, а Кардано всегда их учитывает. Он также отмечает, что корни могут быть кратными. Он указывает на наличие одного, двух (из которых один является двукратным) или трех действительных корней кубического уравнения $x^3+px+q=0$ в зависимости от того, будет ли выражение $D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ удовлетворять условию $D>0$, $D=0$ или $D<0$. В случае $D>0$ имеется еще два комплексно сопряженных корня, которых Кардано не учитывал. В случае $D<0$ будет три действительных корня кубического уравнения, причем в формуле для его решения приходится рассматривать квадратные корни из отрицательных чисел. Кардано называл эти квадратные корни «софистическими минусами». В то время казалось парадоксальным, что сумма двух «мнимостей» может быть действительным числом. Например, уравнение $x^3-7x=6$, которое рассматривал и Кардано, имеет корни $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=3$, причем $x_i=\sqrt[3]{3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$, $i=1,2,3$. Случай $D<0$ Кардано назвал «неприводимым», поскольку в этом случае путем непосредственного преобразования кубических корней ему не удавалось привести их сумму к действительному числу. *Именно из-за «неприводимого» случая кубических уравнений исторически впервые возникла необходимость рассмотрения комплексных чисел.* До Кардано квадратные корни из отрицательных чисел, возникавшие при решении квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом, не принимались во внимание, как бессмысленные. Кардано впервые вводит их в рассмотрение, хотя считает их, в общем, бесполезными.

Он значительно продвигается к пониманию природы комплексных чисел. Например, решая задачу о разбиении числа 10 на две части u и v такие, что $uv = 40$ (это равносильно решению уравнения $x(10-x) = 40$ или $x^2 - 10x + 40 = 0$), Кардано получает выражения $u = 5 + \sqrt{-15}$, $v = 5 - \sqrt{-15}$ и замечает, что если их складывать и умножать как обычные двучлены, считая, что $\left(\sqrt{-15}\right)^2 = -15$, то они удовлетворяют условию задачи, причем $u + v$ есть коэффициент при x в уравнении $x^2 + 40 = 10x$, а uv – свободный член. Для уравнения вида $x^3 + \alpha x = \beta x^2 + r$ он также указывает соотношение $x_1 + x_2 + x_3 = \beta$ между его корнями. Таким образом, Кардано предвосхищает формулы Виета. Почти за 100 лет до Декарта Кардано приходит к выводу (хотя и нестрого), что число положительных (отрицательных) корней «полного» уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ может быть равно числу перемен (сохранений) знака среди его коэффициентов. Уточняя, нужно сказать: равно или на четное число меньше. Кардано задает уравнения и проводит доказательства в словесно-геометрическом виде, а формулирует результаты, используя символику Луки Пачоли. Например, формулу для решения уравнения $x^3 + 6x = 20$, имеющую вид $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$, он записывает следующим образом:

$$\text{R}\!\!\!\!_{\times}.\mathrm{V}.cu.\text{R}\!\!\!\!_{\times}.108\,\tilde{p}10\,|\,\tilde{m}\,\text{R}\!\!\!\!_{\times}.\mathrm{V}.cu.\text{R}\!\!\!\!_{\times}108\tilde{m}10.$$

Историческая ценность «Великого искусства» Кардано заключается в том, что он не только привел здесь способы решения уравнений 3-го и 4-го порядков в радикалах, но и первым из математиков попытался сформулировать некоторые общие для алгебраических уравнений положения.

В книге «Об игре в кости» Кардано делает первые шаги к теории вероятностей. Он правильно подсчитал число всевозможных исходов выпадения очков при бросании двух и трех игральных костей. Он также отметил, что при увеличении числа испытаний количество появления каждого из возможных событий (выпадения очков) становится примерно одинаковым. Но у него еще нет понятия вероятности. О Кардано и Тарталье: [56].

Первым по-настоящему оценил пользу комплексных чисел итальянский инженер-гидравлик и математик **Рафаэль Бомбелли (1526–1572)**, родившийся и работавший в Болонье. Свою книгу «Алгебра» он написал около 1560 г. и издал в 1572 г. Здесь он впервые дал правила действий над комплексными числами, а также применил их для объяснения «неприводимого» случая в кубических уравнениях. Формулируя правила действий над числами, он называет положительное число «плюсом», отрицательное – «минусом», число $\sqrt{-a}$ $(a>0)$ – «плюсом от минуса», а число $-\sqrt{-a}$ $(a>0)$ – «минусом от минуса». Бомбелли постулирует 8 правил умножения таких чисел, например: «плюс от минуса на плюс от минуса дает минус», т. е. $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=-a$ и т. д. В наших обозначениях его правила обычно записывают в виде $1\cdot i=i$, $(-1)i=-i$, $i^2=-1$, $(-i)i=1$ и т. д., где i – мнимая единица.

Бомбелли во второй главе «Алгебры» исследует неприводимый случай кубического уравнения (т. е. случай, когда $D<0$) и показывает, почему в этом случае сумма кубических радикалов в формуле Кардано дает действительный корень. Его метод представляет собой первую, хотя и не очень удачную попытку извлечения кубического корня из комплексных чисел. Сначала он записывает предполагаемые равенства вида

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}=u+\sqrt{-v},\ \sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}=u-\sqrt{-v}.$$

Возводя их в куб и складывая, он приходит к равенству $a=u^3-3uv$, а перемножая, получает равенство $\sqrt[3]{a^2+b}=u^2+v$. Исключение v из последних двух равенств приводит к уравнению $4u^3=3cu+a$ $(c=\sqrt[3]{a^2+b})$, имеющему действительный корень u. Поэтому в формуле Кардано сумма кубических радикалов представляет собой действительный корень $x=2u$ исходного кубического уравнения.

Но приведенный Бомбелли метод извлечения кубического корня из комплексного числа не является полным и трудно осуществим на практике, так как содержит порочный круг: для уравнения $x^3+px+q=0$ будет $a=-\frac{q}{2}$, $b=-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$, $c=-\frac{p}{3}$, поэтому вспомогательное уравнение $4u^3=3cu+a$ заменой $u=\frac{x}{2}$ переводится в исходное уравнение $x^3+px+q=0$. Свой метод Бомбелли применил к некоторым конкретным уравнениям, в частности к уравнению $x^3=15x+4$, для которого вспомогательное уравнение $4u^3=15u+2$ имеет, как очевидно, корень $u=2$, так что формула Кардано дает корень $x=4$ исходного уравнения.

Тот факт, что корень n-й степени из числа, отличного от нуля, имеет n значений, из которых при n нечетном одно действительное, а при n четном может быть два действительных значения, впервые сформулировал французский математик М. Ролль в 1690 г. Вопрос об извлечении корня n-й степени из комплексных чисел решил английский математик французского происхождения А. де Муавр (1667–1754) в 1738 г. В более ранних его работах содержалась в неявном виде и формула $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, которая носит его имя. Знаменитый математик Л. Эйлер (1707–1783), швейцарец по происхождению, работавший в Петербургской и Берлинской академиях наук, приводит в 1748 г. формулу Муавра в современном виде.

Бомбелли в «Алгебре» привел также 143 задачи из «Арифметики» Диофанта, которую он переводил. Бомбелли пользуется символикой, сходной с той, которая была у Н. Шюке. Например, уравнение $x^3+5x=12$ записывалось бы в виде: $1\overset{3}{\smile}$ *p*. $5\overset{1}{\smile}$ *equale à* 12. О Бомбелли: [1, т. 1; 38].

Виет

Одним из крупнейших математиков эпохи Возрождения был французский математик, юрист по образованию **Франсуа Виет (1540–1603)**. С 1571 г. он проживал в Париже, где общался с местными математиками, в частности с профессором Парижского университета Рамусом, гугенотом, вскоре павшим жертвой католиков в Варфоломеевскую ночь 24 августа 1572 г. Брак ученицы Виета с принцем способствовал быстрой карьере Виета: он становится советником короля Генриха III, а затем – Генриха IV. При дворе Генриха III Виет прославился расшифровкой длительной секретной переписки противников короля с испанским двором (шифр состоял из примерно 500 знаков). Подлинной страстью Виета была математика, которой он занимался на досуге, а особенно много – в 1584–1589 гг., когда временно был отстранен от должности. Математические сочинения Виета после его смерти собрал видный голландский математик **Ф. ван Схоутен (Схоотен, 1615–1660)** и издал в 1646 г., но они были известны и раньше.

Сочинения Виета посвящены алгебре, он называет ее «анализом», или «аналитическим искусством». Во «Введении в аналитическое искусство» (1591) Виет впервые построил буквенную символику, позволяющую записывать уравнения в общем виде. Произвольные положительные величины он обозначал прописными буквами: неизвестные – гласными A, E, I и т. д., а коэффициенты и произвольные постоянные – согласными B, C, D и т. д., ему принадлежит и сам термин «коэффициент», т. е. «содействующий». Введение произвольных коэффициентов явилось огромной заслугой Виета, так как дало возможность записывать уравнения в общем виде. Степени величин он обозначает буквами, приставляя к ним слово *quadratus, cubus* и т. д. Следуя древнегреческой традиции, Виет придерживается принципа однородности, согласно которому складывать и вычитать можно было лишь величины одной размерности: длину с длиной, площадь с площадью и т. д. Поэтому при записи коэффициентов он рядом с буквой указывает словесно размерность коэффициента: *plano* (плоский), *solido* (телесный), *plano-plano* и т. п. Его запись *A quad.+B2 in A aequatur Z plano* означает $A^2+2BA=Z$ и соответствует нашему уравнению $x^2+2bx=c$. Здесь *in*, т. е. «на», означает «умножить на», а вместо современного знака «=», который ввел английский врач и математик Рекорд в 1557 г., Виет пишет «*aequatur*» – «равняется». Запись Виета

A cubus + B plano 3 in A aequatur Z solido 2

соответствует нашему уравнению $x^3+3bx=2c$. Такие записи Виет относит к «видовой логистике». А при записи уравнений с числовыми коэффициентами (в «числовой логистике») Виет использует обозначения: N – первая степень неизвестной, Q – вторая, C – третья. Тогда, например, уравнение $x^3-6x^2+11x=6$ записывается в виде $1C-6Q+11N$ *aequatur* 6. Позже именно так записывал уравнения Ферма.

При исследовании уравнений Виет обычно ограничивается рассмотрением положительных корней, хотя у него встречается замена $x=-y$, меняющая знаки корней. В работе «Об анализе и усовершенствовании уравнений» он рассматривает вопросы преобразования уравнений. Образуя уравнения с данными корнями a_i путем перемножения двучленов вида $x-a_i$, Виет получает зависимость между корнями и коэффициентами уравнений (формулы Виета). Именно на примерах уравнений от 2-го до 5-го порядков со старшим коэффициентом, равным 1 или -1, он показывает, что коэффициенты при x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} и т. д. – это взятые с чередующимися знаками, соответственно, сумма корней, сумма произведений пар корней, троек корней и т. д. Кардано имел представление лишь о зависимости коэффициента при x^{n-1} от корней и то только для уравнений 2-го и 3-го порядков. Образование уравнений путем перемножения линейных сомножителей предвосхищало исследование вопроса о разложении многочлена на множители и получение «основной теоремы алгебры» о существовании корней алгебраического уравнения. Ее впервые сформулировал в 1629 г. голландский математик **А. Жирар (1595–1632)**, а доказал в 1799 г. **К. Ф. Гаусс (1777–1855)**.

Не рассматривая комплексных чисел, Виет, тем не менее, построил «исчисление треугольников», равносильное умножению комплексных чисел. Он исходит из тождества

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2)=(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=(xu+yv)^2+(xv-yu)^2,$$

имеющегося уже у Леонардо Пизанского и по существу известного еще Диофанту, с «Арифметикой» которого Виет был хорошо знаком. Заметим, что если обозначить $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то это тождество равносильно выполнению равенств $|z| \cdot |w| = |zw| = |z\overline{w}|$ (здесь и далее используем современные обозначения). Виет рассматривает не комплексные числа, а прямоугольные треугольники с катетами, соответственно, x и y, u и v (рис. 18) и по ним

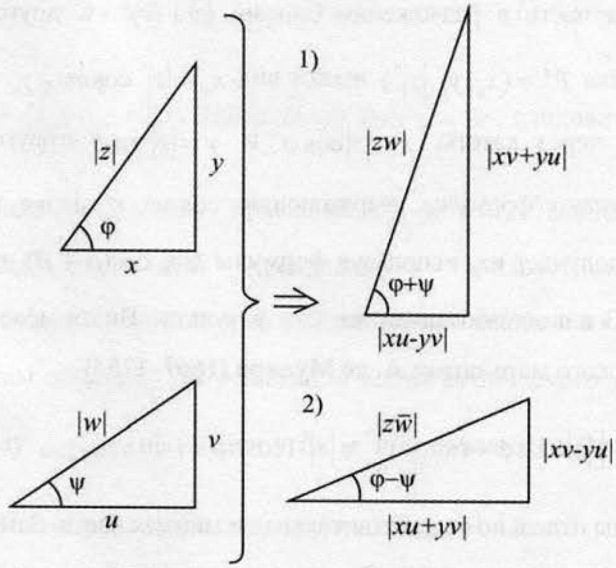


Рис. 18

строит прямоугольные треугольники, указанные на рис. 18 (случаи 1) и 2)). Треугольник в случае 1) соответствует произведению zw комплексных чисел $z = x + iy$ и $w = u + iv$, а в случае 2) – произведению $z\overline{w}$. Таким образом, не вводя явно комплексных чисел, Виет геометрически строит их произведения в виде соответствующих композиций треугольников. Далее он рассматривает треугольники T^n, которые получаются n-кратным умножением треугольника $T = (x, y, |z|)$ (это соответствует рассмотрению z^n) и последовательно находит:

$$T^2 = (x^2 - y^2, 2xy, |z|^2),$$

$$T^3 = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, |z|^3),$$

$$T^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3, |z|^4), \text{ и т. д.}$$

Для получения T^n Виет формулирует общее правило, используя члены разложения бинома $(x+y)^n$, но взятые с соответствующими знаками. В наших обозначениях катеты x_n, y_n треугольника $T^n = (x_n, y_n, |z|^n)$ получаются как действительная и мнимая части в разложении бинома $(x+iy)^n$. С другой стороны, катеты треугольника $T^n = (x_n, y_n, |z|^n)$ имеют вид $x_n = |z|^n \cos n\varphi$, $y_n = |z|^n \sin n\varphi$, они выражаются через катеты $x = |z|\cos\varphi$ и $y = |z|\sin\varphi$ треугольника T. Отсюда уже вытекают формулы, выражающие $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, но Виет получает их, используя формулы для $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$ [57, с. 105–106]. В наших обозначениях этот результат Виета можно выразить формулой английского математика **А. де Муавра (1667–1754)**

$$\left[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

а у Виета выписаны отдельно ее действительная и мнимая части. Заметим, что де Муавр получил свою формулу (в обозначениях, отличных от наших) только в первые десятилетия XVIII в. Интересно, что никто не догадался использовать треугольники Виета для геометрической интерпретации комплексных чисел. Ее впервые дали независимо друг от друга датский математик, по профессии землемер, **К. Вессель** в 1799 г. и швейцарский математик **Ж. Р. Арган** в 1806 г. Но их работы вначале оставались неизвестными, а обоснование и геометрическая интерпретация комплексных чисел в одной работе Гаусса 1828–1832 гг. получили широкую известность. Гауссу принадлежит и сам термин «комплексные числа», а Коши – термины «модуль» и «сопряженные числа». До Гаусса комплексные числа называли «мнимыми» или «воображаемыми» (от фр. imaginaire). Виет, следуя античной традиции, в которой корни уравнений отождествлялись с отрезками, не признавал комплексных корней и даже отрицательные корни не считал настоящими. Свое исчисление треугольников он применил к решению некоторых задач из «Арифметики» Диофанта.

Виет показал, что в неприводимом случае кубических уравнений, где формула Кардано содержит комплексные радикалы, можно найти корень и без ее помощи, отыскивая угол φ по известному $\cos 3\varphi$. Его метод заключается в следующем. Запишем уравнение $x^3 = px + q$ $(p > 0,\ q > 0)$ в виде $x^3 = 3r^2x + ar^2$ $(a > 0,\ \ r > 0)$, тогда $D = \left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{ar^2}{2}\right)^2 - r^6 = \left(\frac{a^2}{4} - r^2\right)r^4$. Здесь $D < 0$ при $a < 2r$, следовательно, a можно записать в виде $a = 2r\cos 3\varphi$. Уравнение $x^3 - 3r^2x = 2r^3\cos 3\varphi$ при $x = 2r\cos\varphi$ выполняется, так как превращается в известное соотношение $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \cos 3\varphi$ (которое усматривается также и из треугольника T^3 Виета). Таким образом, для отыскания корня кубического уравнения нужно по заданному $\cos 3\varphi = \frac{a}{2r}$ найти угол φ и положить $x = 2r\cos\varphi$. В качестве примера Виет рассматривает уравнение $x^3 - 3x = 1$, тогда $a = r = 1$, $\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 20^\circ$ и получаем корень $x = 2\cos 20^\circ$. Попутно отметим здесь, что уравнение $x^3 - 3x - 1 = 0$ не имеет рациональных корней и поэтому угол в 60° невозможно разделить на три равные части при помощи только циркуля и линейки. Задача о трисекции угла впервые была сведена к кубическим уравнениям математиками стран ислама, в частности, это делал, как упоминалось выше, ал-Каши в начале XV в.

Математик **Адриан ван Роумен (Роомен, 1561–1616)** родился в Бельгии, а работал в Амстердаме. Он прославился тем, что первым в Европе вычислил число π с 17 десятичными знаками (опубликовал в 1597 г.). В Европе не знали, что за 170 лет до этого аналогичный результат получил ал-Каши в Самарканде. В качестве вызова математикам мира ван Роумен предложил задачу: решить уравнение 45-й степени

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - \ldots + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a$$

при $a = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{6} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \frac{45}{64}}}}$. Виет ранее уже получил алгебраическое уравнение деления круга не только на 3 части, но и на 5, а также на 7 частей. Поэтому он сразу решил задачу ван Роумена и этим приобрел себе широкую известность среди математиков. Сохранились сведения о том, что Виет в тот же день, когда узнал об этой задаче, нашел, что a есть сторона правильного 15-угольника, вписанного в круг радиуса 1, т. е. хорда дуги в 24°, а по коэффициентам при x и x^{43} определил, что x является хордой $\frac{1}{45}$ этой дуги, т. е. дуги $\frac{8^\circ}{15}$. На другой день он нашел еще 22 корня этого уравнения, имеющие вид $2\sin\frac{360^\circ \cdot n + 12^\circ}{45}$ $(n = 1, 2, \ldots, 22)$. Остальные 22 корня – отрицательные, поэтому Виет их не учитывал.

В одной из своих работ, опубликованной в 1600 г., Виет предложил метод приближенного решения алгебраических уравнений, который применялся математиками до конца XVII в., а затем был вытеснен более удобным методом Ньютона.

Виету принадлежит еще одно замечательное достижение, а именно: открытие в 1593 г. бесконечного произведения

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots$$

Это *первый в истории математики пример бесконечного произведения*, он и сейчас входит в учебники математического анализа.

Изложим способ, которым Виет получил этот результат, но в современных обозначениях и короче. Он основан на рассмотрении отношений площадей вписанных в круг радиуса R правильных многоугольников с удваивающимся числом сторон. Площадь такого n-угольника можно вычислить по формуле $S_n = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha_n$, где $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$ есть центральный угол. Аналогично, $2n$-угольник, вписанный в круг радиуса R, имеет площадь $S_{2n} = 2n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha_{2n}$, где $\alpha_{2n} = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{\pi}{n}$. Отсюда

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{\sin\alpha_n}{2\sin\alpha_{2n}} = \frac{\sin\alpha_n}{2\sin(\alpha_n/2)} = \cos\frac{\alpha_n}{2} = \cos\frac{\pi}{n}\cdot$$

Положим здесь $n = 4, 8, \ldots 2^k$, тогда

$$\frac{S_4}{S_8} = \cos\frac{\pi}{4}, \quad \frac{S_8}{S_{16}} = \cos\frac{\pi}{8}, \quad \ldots, \quad \frac{S_{2^k}}{S_{2^{k+1}}} = \cos\frac{\pi}{2^k}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\frac{S_4}{S_{2^{k+1}}} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\ldots\cos\frac{\pi}{2^k}\cdot$$

Учитывая, что $S_4 = 2R^2$ и что круг «исчерпывается» вписанными в него правильными многоугольниками при неограниченном удвоении их сторон, т. е. $S_{2^{k+1}} \to \pi R^2$, Виет приходит к бесконечному произведению $\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots$ (Отметим, что в то время не было еще понятия сходимости последовательности, теорию пределов частично заменял «метод исчерпывания».) Косинусы в правой части, начиная с $\cos\frac{\pi}{8}$, Виет вычисляет с помощью формулы половинного угла: $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

и т. д. В настоящее время бесконечное произведение Виета легко получается без использования вписанных многоугольников. Именно, выражая n раз $\sin\varphi$ по формуле половинного угла и затем используя предел $\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$, убеждаемся в справедливости равенства $\frac{sin\varphi}{\varphi}=\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\ldots$, откуда при $\varphi=\frac{\pi}{2}$ вытекает равенство Виета $\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\ldots$.

В «Математическом каноне» (1579) Виет излагает плоскую и сферическую тригонометрии и впервые в Европе приводит таблицы синусов, тангенсов и котангенсов не в шестидесятеричных, а в десятичных дробях и решительно высказывается в пользу этих дробей. Там же он впервые в Европе вычисляет число π с десятью верными знаками. Но его обозначения десятичных дробей не получили распространения. Тогда в Европе еще не знали, что десятичные дроби и правила действий над ними систематически разработал и описал ал-Каши в книге «Ключ к арифметике» (1427). У арабских математиков иррациональные числа стали полноправными объектами алгебры, а десятичные дроби, как и шестидесятеричные, использовались для приближения иррациональных чисел. О Виете: [57; 1, т.1; 38].

В Европе десятичные дроби получили широкое распространение только после выхода в свет книги «Десятая» (1585) нидерландского математика и инженера **Симона Стевина (1548–1620)**. Он очень активно агитировал за введение этих дробей, а также десятичной системы мер. Стевин считал все положительные числа (а с некоторой осторожностью – и отрицательные) равноправными объектами алгебры. В 1594 г. он применил десятичные приближения для вычисления корня многочлена. В записи десятичных дробей Стевин отмечает последовательными цифрами в кружках целую часть и номера десятичных разрядов числа. Например, его запись $27_{⓪}8_{①}4_{②}7_{③}$ означает 27,847. Но уже ближайшие последователи Стевина перестали отмечать нумерацию разрядов, а целую часть от дробной отделяли точкой.

Вопросы, относящиеся к математическому анализу, получившие постановку и первоначальное развитие в древней Греции, особенно в работах Архимеда, вызывают интерес и у математиков эпохи Возрождения. В первой половине XVI в. были переведены на латинский язык и изданы труды Архимеда. Итальянские математики **Командино** (переводчик Паппа) и **Мавролико** (переводчик Архимеда) уже в 60-х гг. XVI в. решили ряд задач на нахождение центра тяжести геометрических фигур с проведением доказательств по методу исчерпывания. Дальнейшее глубокое развитие инфинитезимальных методов и становление математического анализа как науки произошло в XVII в. с наступлением Нового времени.

Подведем итоги развития математики в Западной Европе в средние века. В период раннего средневековья (VI–XI вв.) математические знания здесь находились на очень примитивном уровне. В XI–XII вв. в Западной Европе начинает проявляться живой интерес к наследию древнегреческих и арабских математиков. Особую роль по передаче этого наследия сыграла Испания, которую начали освобождать от владевших ею арабов. В XII–XIII вв. были переведены на латынь с арабского многие произведения древнегреческой и арабской математической литературы. В XII в. в Европе открываются первые университеты. Первым освоил наследие арабской математики итальянец Леонардо Пизанский (Фибоначчи), изложивший в начале XIII в. многие математические сведения в своей «Книге абака», где он, в частности, пропагандирует индийские (арабские) цифры и десятичную позиционную систему счисления. Его книга обогнала время, более простыми для усвоения в XIII в. были книги Иордана Неморария. В первой половине XIV в. в Оксфордском университете Т. Брадвардин, в частности, рассматривает различные точки зрения на природу континуума и возникающие при этом парадоксы, а Р. Суисет (Суайнсхед) приступает к абстрактному изучению различного рода движений в физике. Во второй половине XIV в. в Сорбонне изучением движений (особенно равномерно-ускоренного) занимается Н. Орем, изображает графически скорости движения в системе «широт и долгот», связывает движение с геометрической интерпретацией некоторых числовых рядов. Он доказывает расходимость гармонического ряда, формулирует правила действий с дробными степенями.

Эпоха Возрождения (XV–XVI вв.) с ее раскрепощением творческой личности ознаменовалась ускоренным развитием западноевропейской математики. И. Мюллер (Региомонтан) в 1461 г. первым из европейских математиков систематически изложил тригонометрию как самостоятельную математическую дисциплину. Теория Коперника, опубликованная в 1543 г., сыграла революционную роль в научном естествознании и, в частности, имела значение для развития тригонометрии. К концу XVI в. были вычислены десятизначные таблицы всех шести тригонометрических функций.

Особенно крупные успехи в математике эпохи Возрождения были связаны с развитием алгебры. Прежде всего следует отметить введение в XV в. алгебраической символики, хотя еще и несовершенной, в работах Луки Пачоли, Шюке и математиков школы «Косс» (Видман, Рудольф, Ризе, Штифель), позволившей более успешно преобразовывать уравнения. Это дало возможность итальянским математикам в первой половине XVI в. продвинуться в теории уравнений дальше, чем это удалось математикам стран ислама, а именно: решить в радикалах уравнения 3-й степени (дель Ферро, Тарталья, Кардано) и 4-й степени (Феррари). Были введены комплексные числа (Кардано), правила действий над ними (Бомбелли), десятичные дроби (Стевин). Большие достижения принадлежат крупнейшему математику эпохи Возрождения Ф. Виету (введение буквенных обозначений для коэффициентов уравнения и многих неизвестных; формулы связи между корнями и коэффициентами алгебраических уравнений; композиция треугольников и выражения $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, исследование неприводимого случая кубических уравнений; открытие бесконечного произведения для $\frac{2}{\pi}$, вычисление числа π с десятью верными знаками и др.).

Математический анализ, имея, по существу, геометрическое происхождение в древнегреческой математике, к концу XVI в. имел уже и алгебраическую основу для своего развития. В это время состоялось знакомство европейских математиков с античными интеграционными методами, созданы условия для возникновения понятия переменной величины и развития дифференциального и интегрального исчисления.

Об истории математики в средние века: [1, т. 1; 43; 5; 28; 9; 11; 14–19; 38; 44–58].

ЛИТЕРАТУРА

а) общая для всех периодов развития математики

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3-х т. / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970–1971. – Т. 1–3.
2. Хрестоматия по истории математики: Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Сост. И. Г. Башмакова и др. Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 320 с.
3. Хрестоматия по истории математики: Математический анализ. Теория вероятностей / Сост. И. Г. Башмакова и др. Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.
4. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. – Вып. 1–4. – М.; Л.: ГТТИ, 1932; 2-е изд. – М.; Л.: ОНТИ, 1935.
5. Рыбников К. А. История математики. – 2-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 454 с.
6. Рыбников К. А. Возникновение и развитие математической науки. – М.: Просвещение, 1987. – 160 с.
7. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. И. Б. Погребысского. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1990. – 254 с.
8. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963. – 291 с.
9. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты: Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986. – 432 с.
10. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. – Минск: Вышэйшая шк., 1974. – 367 с.
11. Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. – М.: Учпедгиз, 1940. – 179 с.
12. Глейзер Г. И. История математики в школе: Пособие для учителей: В 3-х кн. – М.: Просвещение, 1981–1983.
13. Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энцикл., 1988. – 848 с.
14. Боголюбов А. Н. Математики, механики: Биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 639 с.

15. Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник. – К.: Рад. шк., 1987. – 656 с.
16. Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. – К.: Рад. шк., 1979. – 608 с.
17. Бородін О. І., Бугай А. С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Рад. шк., 1973. – 552 с.
18. Конфорович А. Г. Колумби математики. – К.: Рад. шк., 1982. – 224 с.
19. Чистяков В. Д. Рассказы о математиках. – Минск: Вышэйшая шк., 1966. – 409 с.
20. Шеренга великих математиков. – Варшава: Наша ксенгарня, 1970. – 187 с.
21. Историко-математические исследования. – М. (Сборники выходили с 1948 г.)
22. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991. – 224 с.
23. Александрова Н. В. Математические термины. – М.: Высшая шк., 1978. – 189 с.

б) к периодам древности и средних веков

24. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. – М.: Физматгиз, 1959. – 459 с.
25. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: ГИТТЛ, 1967. – 368 с.
26. Нейгебауэр О. Точные науки в древности. – М.: Наука, 1968. – 224 с.
27. Кольман Э. Я. История математики в древности. – М.: Физматгиз, 1961. – 235 с.
28. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. – М.; Л.: ГТТИ, 1932 (1938). – 230 с.
29. Фрагменты ранних греческих философов. – Ч. I / Подготовил А. В. Лебедев. –М.: Наука, 1989. – §§ 11, 14, 18, 29, 42, 43, 58.
30. Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции. – [21], 1958. – Вып. 11. – С. 225–438.
31. Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа. – Л.: Наука, 1990. – 192 с.
32. Боро В. и др. Живые числа: Пять экскурсий. – М.: Мир, 1985. – 128 с.
33. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. – М.: Учпедгиз, 1963. – 96 с.

34. Прасолов В. В. Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. – М.: Наука, 1992. – 80 с.
35. Зубов В. П. Аристотель. – М.: Наука, 1963. – 366 с.
36. Архимед. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
37. Лурье С. Я. Архимед. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – 271 с.
38. Башмакова И. Г. Становление алгебры. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
39. Башмакова И. Г. Диофант Александрийский и его «Арифметика» // Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974. – С. 5–27.
40. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
41. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
42. Березкина Э. И. Математика древнего Китая. – М.: Наука, 1980. – 311 с.
43. Юшкевич А. П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961. – 448 с.
44. Володарский А. П. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977. – 183 с.
45. Володарский А. П. Ариабхата. – М.: Наука, 1977. – 112 с.
46. Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII–XVII вв.): В 3-х кн. – М.: Наука, 1983. – Кн. 1–3.
47. Матвиевская Г. П. Очерки по истории тригонометрии. – Ташкент: Фан, 1990. – 160 с.
48. Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми: Сборник статей к 1200-летию со дня рождения. – М.: Наука, 1983. – 264 с.
49. Кедров Б. М., Розенфельд Б. А. Абу Рейхан Бируни. – М.: Наука, 1973. – 55 с.
50. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. – М.: Наука, 1965. – 191 с.
51. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. – М.: Наука, 1976. – 413 с.
52. Симонов Р. А. Кирик Новгородец. – М.: Наука, 1980. – 112 с.
53. Кымпан Ф. История числа π. – М.: Наука, 1971. – 216 с.
54. Гребеников Е. А. Николай Коперник. – М.: Мол. гвардия, 1982. – 147 с.
55. Белый Ю. А. Иоганн Мюллер (Региомантан). – М.: Наука, 1985. – 128 с.

56. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джироламо Кардано. – М.: Знание, 1980. – 192 с.

57. Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI–XVII вв. – М.: Наука, 1979. – 208 с.

58. Никифоровский В. А. В мире уравнений. – М.: Наука, 1987. – 173 с.

в) к истории математики в Новое время

59. Юшкевич А. П. Из истории возникновения математического анализа. – М.: Знание, 1985. – 48 с.

60. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: В 2-х т. – М.: ГИТТЛ, 1955. – Т. 1. – С. 411–433; 1956. – Т. 2. – С. 176–178, 291–293, 356, 424–456. (Здесь содержатся очерки о возникновении и развитии математического анализа.)

61. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. – М.; Л.: ГТТИ, 1933 (1938). – 430 с.

62. Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов. – Х.: ХГУ им. А. М. Горького, 1952. – 32 с.

63. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джон Непер (1550 – 1617). – М.: Наука, 1980. – 224 с.

64. Белый Ю. А. Иоганн Кеплер (1571–1630). – М.: Наука, 1971. – 296 с.

65. Кузнецов Б. Г. Галилей. – М.: Наука, 1964. – 326 с.

66. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1938. – 296 с.

67. Матвиевская Г. П. Рене Декарт. – М.: Наука, 1976. – 271 с.

68. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. – М.: Наука, 1992. – 320 с.

69. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М.: Наука, 1966. – 506 с.

70. Замечательные ученые / Под ред. С. П. Капицы. – М.: Наука, 1980. – 192 с.

71. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: Наука, 1981. – 92 с.

72. Никифоровский В. А., Фрейман Л. С. Рождение новой математики. – М.: Наука, 1976. – 300 с.

73. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. – М.: Наука, 1968. – 216 с.

74. Белл Э. Т. Творцы ~~высшей~~ математики. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

75. Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И. Паскаль. – М.: Мысль, 1971. – 430 с.
76. Тарасов Б. М. Паскаль. – М.: Мол. гвардия, 1982. – 334 с.
77. Конфорович А. Г. У пошуках інтеграла. – К.: Рад. шк., 1990. – 256 с.
78. Никифоровский В. А. Путь к интегралу. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
79. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1974. – 424 с.
80. Песин И. Н. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1966. – 208 с.
81. Франкфурт У. И., Френк А. М. Х. Гюйгенс. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 327 с.
82. Вавилов С. И. Исаак Ньютон (1643–1727). – М.: Наука, 1989. – 272 с.
83. Карцев В. П. Ньютон. – М.: Мол. гвардия, 1987. – 416 с.
84. Исаак Ньютон: Сб. статей к 300-летию со дня рожд. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1943.
85. Юшкевич А. П. О математических рукописях Ньютона. – [21], 1977. – Вып. 22. – С. 127–192.
86. Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. – М.: Наука, 1989. – 96 с.
87. Погребысский И. Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1644–1716). – М.: Наука, 1971. – 320 с.
88. Юшкевич А. П. Лейбниц и основания исчисления бесконечно малых // Успехи матем. наук, 1948. – Т. 3. – Вып. 1(23). – С. 150–164. Там же: Избранные отрывки из матем. сочинений Лейбница / Составил и перевел А. П. Юшкевич. – С. 165–204.
89. Лопиталь Г. Ф. де. Анализ бесконечно малых. – М.; Л.: ГТТИ, 1935. – 432 с.
90. Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли. – М.: Наука, 1984. – 177 с.
91. Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д. Даниил Бернулли (1700–1782). – М.: Наука, 1981. – 319 с.
92. Тиле Р. Леонард Эйлер. – К.: Вища шк., 1983. – 192 с.
93. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер. – М.: Знание, 1982. – 64 с.
94. Котек В. В. Леонард Ейлер. – К.: Рад. шк., 1957. – 84 с.
95. Леонард Эйлер: Сб., посв. 250-летию со дня рожд. – М.: Наука, 1958. – 610 с.

96. Леонард Эйлер: Сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. – 239 с.

97. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. – М.: Наука, 1988. – 519 с.

98. Добровольский В. А. Д'Аламбер. – М.: Знание, 1968. – 31 с.

99. Тюлина И. А. Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). – М.: Наука, 1977. – 224 с.

100. Жозеф Луи Лагранж: Сб. статей к 200-летию со дня рожд. – М.: Наука, 1937. – 559 с.

101. О квадратуре круга / Сост. Ф. Рудио. Пер. с нем. под ред. и с примеч. С. Н. Бернштейна. – 3-е изд. – М.; Л.: Научтехиздат, 1936. – 235 с.

102. Юшкевич А. П. Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке // Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. – М.; Л.: ГТТИ, 1936.

103. Воронцов-Вельяминов Б. А. Лаплас. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

104. Боголюбов А. Н. Гаспар Монж (1746–1818). – М.: Наука, 1978. – 184 с.

105. Стройк Д. Я. Очерки истории дифференциальной геометрии до XX ст. – М.; Л.: Гостехиздат. – 1941. – 80 с.

106. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII в. и начале XIX в. – М.: Учпедгиз, 1963. – 262 с.

107. Математика XIX в.: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1978. – 255 с.

108. Математика XIX в.: Геометрия. Теория аналитических функций / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1981. – 269 с.

109. Математика XIX в.: Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1987. – 318 с.

110. Бюлер В. Гаусс. – М.: Наука, 1989. – 208 с.

111. Карл Фридрих Гаусс: Сб. статей к 100-летию со дня смерти / Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 311 с.

112. Кольман Э. Б. Бернард Больцано. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 224 с.

113. Добровольский В. А. Юность и зрелость Коши // Матем. в школе: Педагогика. – 1989. – № 6. – С. 2, 146–149.

114. Молодший В. Н. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века. – [21], 1978. – Вып. 23. – С. 32–55.

115. Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. – М.: Физматгиз, 1966. – 343 с.

116. Дальма А. Эварист Галуа – революционер и математик. – 2-е изд. – М.: Наука, 1984. – 112 с.

117. Инфельд Л. Эварист Галуа: Избранник богов. – М.: Мол. гвардия, 1965. – 352 с.

118. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука, 1968. – 591 с.

119. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. – 247 с.

120. История отечественной математики: В 4-х т., 5-ти кн. / Под ред. И. З. Штокало. – К.: Наук. думка, 1966–1970. – Т. 1–4.

121. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 304 с.

122. Каган В. Ф. Лобачевский. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 506 с.

123. Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия. – М.: Просвещение, 1976. – 112 с.

124. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

125. Конфорович А. Г., Сорока М. О. Остроградський. – К.: Молодь, 1980. – 216 с.

126. Прудников В. Е. Пафнутий Львович Чебышев. – Л.: Наука, 1976. – 282 с.

127. Демьянов В. П. Рыцарь точного знания. – М.: Знание, 1991. – 192 с.

128. Крылов А. Н. Пафнутий Львович Чебышев: Биографический очерк. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1944. – 31 с.

129. Монастырский М. И. Бернхард Риман. – М.: Знание, 1979. – 64 с.

130. Юшкевич А. П. Развитие понятия предела до Вейерштрасса. – [21], 1986. – Вып. 30. – С. 11–76.

131. Дорофеева Л. В., Чернова М. Л. Карл Вейерштрасс. – М.: Знание, 1985. – 48 с.

132. Кочина П. Я. Карл Вейерштрасс (1815–1897). – М.: Наука, 1985. – 271 с.

133. Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891). – М.: Наука, 1981. – 312 с.

134. Воронцова Л. А. Софья Ковалевская. – М.: Мол. гвардия, 1959. – 336 с.

135. Юшкевич А. П. О развитии понятия функции. – [21], 1966. – Вып. 17. – С. 123–150. (См. и статью Н. Н. Лузина «Функция» в [13]. – С. 797–804.)

136. Маркушевич А. И. Очерки по истории аналитических функций. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1957. – 191 с.

137. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1975. – 248 с.

138. Полищук Е. М. Софус Ли. – Л.: Наука, 1983. – 214 с.

139. Яглом И. М. Феликс Клейн и Софус Ли. – М.: Знание, 1977. – 64 с.

140. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – 455 с.

141. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х т. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. – 432 с.; Т. 2. Геометрия. – 416 с.

142. Ожигова Е. П. Шарль Эрмит (1822–1901). – Л.: Наука, 1982. – 288 с.

143. Пуркерт В., Ильгаудс Х. И. Георг Кантор. – Х.: Основа, 1991. – 128 с.

144. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1974. – 232 с.

145. Медведев Ф. А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX–XX вв. – М.: Наука, 1976. – 231 с.

146. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 160 с.

147. Виленкин Н. Я. В поисках бесконечности. – М.: Наука, 1983. – 161 с.

148. Бурова И. Н. Развитие проблемы бесконечности в истории науки. – М.: Наука, 1987. – 134 с.

149. Конфорович А. Г. Нескінченність у математиці. – К.: Рад. шк., 1978. – 94 с.

150. Пархоменко А. С. Что такое линия. – М.: Гостехиздат, 1957.

151. Тяпкин А. А., Шибанов А. С. Анри Пуанкаре. – М.: Мол. гвардия, 1985. – 416 с.

152. Панов М. П., Тяпкин А. А., Шибанов А. С. Анри Пуанкаре и наука начала XX века // Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – С. 522–559.

153. Цыкало А. Л. Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918). – М.: Наука, 1988. – 248 с.
154. Шибанов А. С. Александр Михайлович Ляпунов. – М.: Мол. гвардия, 1985. – 336 с.
155. Юшкевич А. П. Исторический очерк // Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – С. 428–458.
156. Добровольский В. А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1974. – 456 с.
157. Григорьян А. Т. Механика от античности до наших дней. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
158. Моисеев Н. Д. Очерки развития механики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961. – 478 с.
159. Геронимус Я. Л. Очерки о работах корифеев русской механики. – М.: Наука, 1970. – 520 с.
160. Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Ист. очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
161. Майстров Л. Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980.
162. Гнеденко Б. В. Из истории науки о случайном. – М.: Знание, 1981. – 64 с.
163. Игнациус Г. И. Владимир Андреевич Стеклов (1864–1926). – М.: Наука, 1967. – 212 с.
164. Тумаков И. М. Анри Леон Лебег. – М.: Наука, 1975. – 119 с.
165. Полишук Е. М. Вито Вольтерра. – Л.: Наука, 1977. – 114 с.
166. Полищук Е. М. Эмиль Борель (1871–1956). – Л.: Наука, 1980. – 168 с.
167. Рид К. Гильберт. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
168. Николай Николаевич Лузин: Сб. к 100-летию со дня рожд. – М.: Знание, 1983. – 64 с.
169. Добровольский В. А. Дмитрий Александрович Граве. – М.: Наука, 1968. 112 с.
170. Кравчук М. П. Математика та математики в Київському ун-ті за сто років (1834–1934) // Розвиток науки в Київському ун-ті за сто років. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1935. – С. 34–69.
171. Рыжий В. С. Из истории механико-математического факультета Харьковского университета. – Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2001. – 150 с., ил.

172. Штокало Й. З. Нарис розвитку математики на Україні за 40 років радянської влади. – К.: Вид-во АН УРСР, 1958. – 83 с.
173. Ученые записки матем. отделения физ.-мат. ф-та и Харьк. матем. об-ва, посв. 150-летию ун-та. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1956. – Т. 24, серия 4. – 116 с.
174. Бородин А. И. Советские математики. – К.; Донецк: Вища шк., 1982. – 133 с.
175. Очерк развития математики в СССР. – К.: Наук. думка, 1983. – 736 с.
176. Паплаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М.: 1966. – 276 с.
177. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с. (Первые две главы содержат исторические сведения.)
178. Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. – М.: Знание, 1968. – 47 с.
179. Клайн М. Математика: Утрата определенности. – М.: Мир, 1984. – 447 с.
180. Ивс Г., Ньюсом К. В. О математической логике и философии математики. – М.: Знание, 1968. – 48 с.
181. Наумов И. А. Дмитрий Матвеевич Синцов. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1955. – 72 с.
182. Яглом И. М. Герман Вейль. – М.: Знание, 1967. – 48 с.
183. Вейль Г. О философии математики. – М.; Л.: Гостехиздат, 1934. – 128 с.
184. Марков А. А. О логике конструктивной математики. – М.: Знание, 1972. – 48 с.
185. Тростников В. Н. Конструктивные процессы в математике. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
186. Дьедонне Ж. Дело Никола Бурбаки // Очерки о математике. – М.: Знание, 1973. – С. 44–45.
187. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 18 с. (То же в [8]. – С. 245–259.)
188. Закономерности развития современной математики: Методологические аспекты. – М.: Наука, 1987. – 236 с.
189. Українська математична бібліографія. – К.: Вид-во АН УРСР, 1963. – 384 с.
190. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.
191. Успенский В. А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. – М.: Знание, 1983. – 62 с.

192. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Чарльз Бэббедж. – М.: Знание, 1973. – 64 с.

193. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. От абака до компьютера. – М.: Знание, 1975. – 192 с.

194. Тадеев В. А. От живописи к проективной геометрии. – К.: Вища шк., 1988. – 232 с.

195. Об основаниях геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 528 с.

196. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. – М.: Учпедгиз, 1956. – 640 с.

197. Математическая энциклопедия: В 5-ти т. – М.: Сов. энцикл., 1977–1985. – Т. 1–5.

198. Биографический словарь деятелей естествознания и техники: В 2-х т. – М.: Изд-во БСЭ, 1958–1959. – Т. 1–2.

199. Математика в СССР за тридцать лет (1917–1947). – М.: Физматгиз, 1948. – 1044 с.

200. Математика в СССР за сорок лет (1917–1957): В 2-х т. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 1. – 1002 с.; Т. 2. – 820 с.

201. Математика в СССР (1958–1967): В 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – 820 с.; 1970. – Т. 2. – С. 821–1579.

202. Механіко-математичному факультету – 60 (Київський національний ун-т ім. Т. Шевченка). – К., 2000. – 248 с.

203. Очерк истории теории вероятностей // Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – С. 289–321.

204. Добровольский В. А. Основные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Знание, 1980. – 64 с.

205. Добровольский В. А. Василий Петрович Ермаков. – М.: Наука, 1981. – 89 с.

206. Добровольський В. О. Михайло Васильович Остроградський: Нарис життя та діяльності. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2001. – 88 с.

207. Михайло Васильович Остроградський в оцінках сучасників та нащадків: (До 200-річчя з дня народження) / Укладачі Б. П. Зайцев, С. І. Посохов, В. Д. Прокопова. – Х.: НМЦ «СД», 2001. – 96 с.

208. Вчені вузів Одеси: Бібліографічний довідник. Вип. 1. Природничі науки (1865–1945). Ч. 2. Математики. Механіки / Упорядник І. Е. Рикун. – Одеса, 1995. – 176 с.

209. Крехівський В. В., Мартинюк В. Т., Лавренчук В. П. З історії математичного факультету Чернівецького ун-ту. – Чернівці: Рута, 1998. – 19 с.

210. Рыжий В. С. История математики. Ч. 1. Математика в древности и в средние века (Пособие для самообразования). – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2003. – 115 с.

211. Біографічний словник науковців (1934–2004). – К.: Ін-т матем. НАН України, 2004. –124 с.

212. Колмогоров в воспоминаниях учеников / Ред.-сост. А. Н. Ширяев, подг. текста Н. Г. Химченко. – М.: МЦНМО, 2006. – 472 с.

213. Китчер Ф. и др. Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. –175 с.

214. Лишевский В. П. Охотники за истиной: Рассказы о творцах науки. – М.: Наука, 1990. – 288 с.

215. Ньютон И. Математические работы / Перевод с лат., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 452 с.

216. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Перевод с лат. и комментарии А. Н. Крылова. – М.: Наука, 1989. – 690 с.

217. Ворович И. И. Лекции по динамике Ньютона: Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие. – М.; Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2004. – 680 с.

218. Гродзенский С. Я. Андрей Андреевич Марков (1856–1922). – М.: Наука, 1987. – 257 с.

219. Игошин В. И. Михаил Яковлевич Суслин (1894–1919). – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 156 с.

220. Добровольская Э. М. Развитие теории цепных дробей в XVII–XVIII вв.: Автореферат дис. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. – М., 1992. – 17 с.

221. Добровольський В. О., Котек В. В. Роботи з історії математики на Україні за 110 років (1850–1960) // Історико-математичний збірник. – К., 1963. – Вип. 4. – С. 10–36.

222. Вирченко Н. А. и др. Михаил Филиппович Кравчук (к 75-летию со дня рождения) // Укр. матем. журнал, 1968. – Т. 20, № 1. – С. 85–91.

223. Добровольський В. О. М. П. Кравчук – український математик // Українознавство, 2002. – С. 242–256.

224. Добровольский В. А. Огюстен Луи Коши (к 200-летию со дня рожд.) // Юбилеи науки. – К.: Наук. думка, 1990. – С. 3–8.

225. Галай Г. І., Гриневич Г. Д. Учням про видатних математиків / За ред. доктора фіз.-мат. наук, проф. М. І. Кованцова. – К.: Рад. шк., 1976. – 160 с.

226. Віктор Якович Буняковський: Зб. до 200-річчя з дня народження / Ред. Г. Сита, М. Горбачук, А. Юрачківський. – К.: Ін-т математики НАН України, 2004. – 206 с.

227. Прудников В. Е. В. Я. Буняковский – ученый и педагог. – М.: Учпедгиз, 1954. – 88 с.

228. Ожигова Е. П. Егор Иванович Золотарев (1847–1878). – М.; Л.: Наука, 1966. – 141 с.

229. Йорн Штойдінг. Внесок Вороного в сучасну теорію чисел // Сучасні дослідження з теорії чисел у доступному викладі. – К.: Ін-т математики НАН України, 2009. – 90 с.

230. Георгій Вороний: Вчений, який випередив час на століття. – К.: Ін-т математика НАН України, 2010. – 68 с.

231. Урбанский В. М. Михаил Филиппович Кравчук. – М.: Наука, 2002. – 203 с.

232. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К.: Науковий світ, 2010. – 240 с.

233. Вірченко Н. О. Велет української математики. – К.: Науковий світ, 2012. – 64 с.

234. Рыжий В. С., Николенко И. Г. История математики. Ч. 2. Математика в XVII и XVIII веках. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2011. – 286 с., ил.

235. Гроссман Л. Математическая Одесса. Кн. 1. – Одесса: Optimum, 2011. – 131 с., илл.

236. Вірченко Н. Зернини з доріг життя мого… (Спомини). – К.: Задруга, 2011. – 760 с., іл.

237. Добровольський В. Події і факти: Біографічні нариси. – К.: Ін-т енцикл. досл. НАН України, 2012. – 354 с.

238. Понтрягин Л. С. Жизнеописание Льва Семеновича Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908, г. Москва. – 2-е изд. – М.: КомКнига, 2006. – 320 с.

239. Кочина П. Я. Наука. Люди. Годы: Воспоминания и выступления. – М.: Наука, 1988. – 624 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Рижий Володимир Семенович
Ніколенко Ірина Геннадіївна

ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ

У 2 частинах

Частина 1. Математика у давнині і в середні віки

Навчальний посібник

(Рос. мовою)

Коректор *А. І. Сєдих*
Комп'ютерне верстання *О. О. Літвінова*
Макет обкладинки *О. О. Літвінова*

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
61022, Харків, пл. Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09
Видавництво ХНУ імені В.Н. Каразіна
тел.: 705-24-32

Надруковано з готових оригінал-макетів у ФО-П Коротчаєвої І. О.
61103, м. Харків, вул. Двадцять третього серпня, 63, кв. 33.
Свідоцтво про реєстрацію АВ №505751 від 09.07.2013.