А. Н. Тихонов • В. Я. Арсенин

Методы решения некорректных задач

22.19
Т46
УДК 519.6

Методы решения некорректных задач. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е.

Книга посвящена методам построения устойчивых приближенных решений широкого класса некорректно поставленных математических задач. К этому классу задач относится большой круг так называемых обратных задач, к которым приводят проблемы обработки и интерпретации экспериментальных наблюдений. Освещаются вопросы нахождения обобщенных решений обратных задач, так как в классической постановке эти задачи могут не иметь решений.

Предыдущее издание выходило в 1974 г.

Предназначена для студентов и аспирантов по специальности «Прикладная математика», а также для научных работников и инженеров.

Т $\frac{20204-156}{053(02)-79}$ БЗ 10-19-79. 1702070000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа, по существу, являются плохо поставленными. Они принадлежат к классу некорректно поставленных задач.

Если исходные данные известны приближенно, то упомянутая неустойчивость приводит к практической неединственности решения в рамках заданной точности и к большим трудностям в выяснении смысла получаемого приближенного решения. В силу этих особенностей долгое время считалось, что некорректно поставленные задачи не могут иметь практического значения.

Однако можно указать некорректно поставленные задачи, относящиеся как к классическим разделам математики, так и к различным классам практически важных прикладных задач. Это позволяет судить о широте рассматриваемого класса задач. Названия глав и приводимые в книге примеры показывают не только широту этого класса задач, но и многообразие их применения. К числу важных задач относятся задачи создания систем автоматической математической обработки результатов эксперимента (включая интерпретацию), задачи оптимального управления и оптимального проектирования систем.

Одним из существенных этапов обработки является решение задач, неустойчивых к малым изменениям исходных данных. Поэтому не вызывает сомнения необходимость разработки методов решения таких задач. При этом приближенные решения, получаемые по приближенным исходным данным, должны быть устойчивыми к малым изменениям последних.

За последние годы в различных журналах появилось большое количество работ, посвященных этим вопросам. Назрела необходимость написания книги, посвященной методам решения некорректно поставленных задач, в которой в доступной для широкого круга читателей форме излагались бы основные идеи и вопросы, связанные с построением решений таких задач по приближенным данным, устойчивых к малым изменениям последних. Такую книгу мы и предлагаем вниманию читателей.

Исходные данные некорректно поставленных задач, получаемые обычно в результате измерений, содержат случайные погрешности. Поэтому при построении приближенных решений и при оценке их погрешности, в зависимости от характера исходной информации, возможен как детерминированный подход, так и вероятностный. В предлагаемой книге мы ограничиваемся, как правило (кроме гл. V и VI), детерминированным подходом. Вероятностный подход рассматривается, например, в работах [69, 70, 95, 107, 133, 137, 138, 190].

В книге развивается метод регуляризации построения приближенных решений некорректно поставленных задач, разработанный в [165—170].

Мы не ставили перед собой цели дать обзор имеющейся литературы по некорректно поставленным задачам. Поэтому приводимый в конце книги список литературы не претендует на полноту. Обзор литературы читатель может найти, например, в [130].

Книга предназначается для студентов и аспирантов физико-математических специальностей, а также для инженеров и научных работников, интересующихся вопросами математической обработки и прогнозирования экспериментов.

Выражаем глубокую благодарность А. В. Лукшину за многочисленные ценные замечания.

Акад. А. Н. Тихонов,
проф. В. Я. Арсенин

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания книга была значительно переработана. Наиболее существенной переработке подверглись гл. II и III.

Они, по существу, написаны заново. Глава II, посвященная описанию метода регуляризации нахождения приближенных решений функциональных уравнений, значительно расширена. В главе III, посвященной применению метода регуляризации к приближенному решению систем линейных алгебраических уравнений, речь идет о нахождении приближений к нормальному решению системы. При этом используется такое понятие обобщенного нормального решения, которое существует у любой системы — вырожденной или невырожденной, разрешимой или неразрешимой (несовместной). Алгоритм нахождения приближений к нормальному решению (т. е. регуляризованных решений) оказывается одинаковым для любых систем. Некоторой переработке подверглись и другие главы.

Один из классов некорректных задач составляют интегральные уравнения первого рода. К ним приводится большое число прикладных задач, в том числе задач математической обработки (интерпретации) результатов измерений в физических экспериментах. Чтобы сделать методы их решения доступными более широкому кругу читателей, написана глава IV, в которой дается подробное изложение метода регуляризации нахождения приближенных решений интегральных уравнений первого рода, независимое от главы II. При этом используются лишь достаточно известные из математического анализа сведения. При чтении главы IV из главы II надо использовать лишь §§ 1, 4.

В пределах каждой главы дается своя нумерация теорем и лемм. В нумерации соотношений и формул указываются номера главы, параграфа и формулы (соотношения).

А. В. Гончарский, А. В. Лукшин, А. И. Прилепко, Б. Л. Рождественский и Е. Д. Соломенцев высказали ряд ценных замечаний по рукописи. Н. П. Марецкая оказала нам помощь в оформлении рукописи. Всем этим товарищам выражаем глубокую благодарность.

А. Н. Тихонов,
В. Я. Арсенин

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. О некоторых аспектах в постановке математических задач

1. Быстро растущее использование вычислительной техники требует развития вычислительных алгоритмов для решения широких классов задач. Но что надо понимать под «решением» задачи? Каким требованиям должны удовлетворять алгоритмы нахождения «решений»?

Классические концепции и постановки задач не отражают многих особенностей встречающихся на практике задач. Мы покажем это на примерах.

2. Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода с ядром $K(x, s)$

$$\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \qquad c \leqslant x \leqslant d, \qquad (\text{В}; 1,1)$$

где $z(s)$ — искомая функция из пространства F, $u(x)$ — заданная функция из простраства U. Будем полагать, что ядро $K(x, s)$ по переменной x является непрерывной функцией с непрерывной частной производной $\partial K/\partial x$. Оператор $\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds$ для краткости обозначим через Az.

Решение $z(s)$ будем искать в классе непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Уклонения правых частей друг от друга будем оценивать в квадратической метрике, т. е. по формуле

$$\rho_U(u_1, u_2) = \left\{\int_c^d [u_1(x) - u_2(x)]^2\, dx\right\}^{1/2}$$

(метрика L_2), а уклонения решений $z(s)$ — в равномерной метрике, т. е. по формуле

$$\rho_F(z_1, z_2) = \max_{s\in[a,b]} |z_1(s) - z_2(s)|$$

(метрика C).

К уравнениям вида (В; 1,1) приводится ряд физических задач. Рассмотрим, например, задачу об изучении спектрального состава светового излучения (задача спектроскопии). Пусть наблюдаемое излучение неоднородно и распределение плотности энергии по спектру характеризуется функцией $z(s)$, где s — частота (или энергия). Пропуская это излучение через измерительную аппаратуру, мы получаем экспериментальный спектр $u(x)$. Здесь x может быть частотой, а может выражаться также в терминах напряжений или силы тока измерительной аппаратуры. Если измерительная аппаратура линейна, то функциональная связь между $z(s)$ и $u(x)$ дается формулой

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x),$$

где $K(x, s)$ — аппаратная функция, предполагаемая известной. Она представляет экспериментальный спектр (как функция x), если на прибор падает монохроматическое излучение частоты s единичной интенсивности (это есть δ-функция $\delta(s-x)$). Здесь a и b — границы спектра.

К интегральному уравнению первого рода приводится классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа, если ее решение искать в виде потенциала простого слоя. В самом деле, пусть требуется найти функцию $u(M)$ точки M, удовлетворяющую уравнению $\Delta u = 0$ в конечной трехмерной области D, принимающую заданные значения $\varphi(M)$ на границе S области D и непрерывную в $\bar{D} = D + S$. Будем искать такую функцию в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_S \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\, d\sigma_P, \qquad (В;\ 1,2)$$

в котором функция $\rho(P)$ подлежит определению. Как известно из курса уравнений математической физики*),

*) См., например, Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1972.

потенциал простого слоя с произвольной непрерывной функцией $\rho(P)$ гармоничен в D и непрерывен в $\overline{D}$. Из последнего свойства и условий задачи следует, что для произвольной точки M границы S должно выполняться равенство

$$\int_S \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\, d\sigma_P = \varphi(M). \qquad \text{(B; 1,3)}$$

Из этого соотношения определяется функция $\rho(P)$, подставляя которую в формулу (В; 1,2) получим искомую функцию $u(M)$. Таким образом, задача нахождения функции $u(M)$ сводится к решению интегрального уравнения первого рода (В; 1,3).

3. Пусть для некоторой правой части $u = u_1(x)$ функция $z_1(s)$ является решением уравнения (В; 1,1), т. е.

$$\int_a^b K(x, s)\, z_1(s)\, ds \equiv u_1(x).$$

Если вместо функции $u_1(x)$ нам известно лишь ее приближение $u(x)$, мало отличающееся (в метрике L_2) от $u_1(x)$, то речь может идти лишь о нахождении приближенного к $z_1(s)$ «решения» уравнения (В; 1,1).

При этом правая часть $u(x)$ может быть получена в эксперименте, например, с помощью самописца и иметь «угловые» точки, в которых функция $u(x)$ не имеет производной. При такой правой части $u(x)$ уравнение (В; 1,1) не имеет решения, понимаемого в классическом смысле, т. е. определяемого по формуле $z = A^{-1}u$, где A^{-1} — оператор, обратный оператору A в уравнении (В; 1,1), так как ядро $K(x, s)$ имеет непрерывную производную по x и, следовательно, правая часть также должна иметь непрерывную производную по x.

Значит, в качестве приближенного к $z_1(s)$ «решения» уравнения (В; 1,1) нельзя брать точное решение этого уравнения с приближенно известной правой частью $u(x) \neq u_1(x)$, так как такого решения может не существовать. Возникает принципиальный вопрос: что надо понимать под приближенным «решением» уравнения (В; 1,1) с приближенно известной правой частью?

Очевидно, уравнение (В; 1,1) имеет решение, понимаемое в классическом смысле, только для таких правых частей $u(x)$, которые принадлежат образу AF множества

F функций $z(s)$ при отображении

$$u = Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds, \qquad z(s) \in F.$$

4. Кроме того, решение уравнения (В; 1,1), понимаемое в классическом смысле, т. е получаемое по правилу

$$z = A^{-1}u,$$

где A^{-1} — оператор, обратный оператору A в уравнении (В; 1,1), не обладает свойством устойчивости к малым изменениям «исходных данных» (правой части $u(x)$).

В самом деле, функция $z_2(s) = z_1(s) + N \sin \omega s$ является решением уравнения (В; 1,1) с правой частью

$$u_2(x) = u_1(x) + N \int_a^b K(x, s) \sin \omega s\, ds.$$

Очевидно, что для любого числа N при достаточно больших значениях ω уклонение

$$\rho_U(u_1, u_2) = |N| \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s) \sin \omega s\, ds \right]^2 dx \right\}^{1/2}$$

можно сделать сколь угодно малым, в то время как уклонение соответствующих решений $z_1(s)$ и $z_2(s)$ равно

$$^F\rho(z_1, z_2) = \max_{s \in [a,b]} |z_2(s) - z_1(s)| = \max_{s \in [a,b]} |N \sin \omega s| = |N|$$

и может быть сколь угодно большим. При этом мы оценивали уклонение функций $z_1(s)$ и $z_2(s)$ в метрике C.

Если уклонение решений оценивать в метрике L_2, то решение уравнения (В; 1,1) также неустойчиво к малым изменениям правой части $u(x)$. Действительно,

$$\rho_F(z_1, z_2) =$$

$$= \left\{ \int_a^b |z_1(s) - z_2(s)|^2 ds \right\}^{1/2} = |N| \left\{ \int_a^b \sin^2 \omega s\, ds \right\}^{1/2} =$$

$$= |N| \sqrt{\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin \omega (b-a) \cos \omega (b+a)}. \quad \text{(В; 1,4)}$$

Легко видеть, что числа ω и N могут быть выбраны так, что при сколь угодно малых уклонениях правых частей $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уклонение соответствующих им решений, вычисляемое по формуле (В; 1,4), может быть произвольным.

Однако во многих случаях необходимо находить лишь устойчивые к малым изменениям правой части решения уравнения (В; 1,1), так как это требование связано с физической детерминированностью явления, описываемого этим уравнением, с возможностью физической интерпретации решения.

В условиях, когда вместо точной правой части $u_т$ уравнения (В; 1,1) нам известны лишь некоторое ее приближение u_δ и число $\delta > 0$ такие, что $\rho_U(u_т, u_\delta) \leqslant \delta$, то в качестве возможных приближенных решений естественно брать функции $z(s) \in F$, для которых $\rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \delta$. Как мы видели, таких функций много и среди них есть такие, которые в метрике пространства F могут как угодно сильно уклоняться друг от друга. Следовательно, в этих условиях задача решения интегрального уравнения (В; 1,1) является недоопределенной и неустойчивой к малым изменениям правой части.

Таким образом, надо не только дать ответ на вопрос: что понимать под приближенным «решением» уравнения (В; 1,1), но и указать такой алгоритм его построения, который обладает свойством устойчивости к малым изменениям «исходных данных» $u(x)$.

Рассмотренная на этом примере ситуация является типичной для некорректно поставленных задач.

5. Мы рассмотрели случай, когда априори известно, что существует точное решение (понимаемое в классическом смысле) $z_т(s)$ уравнения (В; 1,1), отвечающее правой части $u_т(s)$, и требуется найти приближение к нему, если вместо функции $u_т(x)$ нам известно ее приближение $u(x)$ такое, что $\rho_U(u_т, u) \leqslant \delta$.

В случае, когда у нас нет информации о существовании точного решения уравнения (В; 1,1), но имеется информация о классе возможных правых частей U, можно также ставить задачу о нахождении приближенного «решения» уравнения (В; 1,1). Но под приближенным решением надо понимать некоторое обобщенное решение.

Определим понятие *обобщенного решения (квазирешения)* уравнения (В; 1,1) на множестве F как такого элемента $\tilde{z}$ из F, на котором расстояние $\rho_U(Az, u)$

достигает точной нижней границы [78, 79], т. е.

$$\rho_U(A\tilde{z}, u) = \inf_{z \in F} \rho_U(Az, u),$$

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds.$$

Очевидно, если при $u = u_т$ уравнение (В; 1,1) имеет обычное решение $z_т \in F$, то оно совпадает с обобщенным решением уравнения $Az = u_т$.

Возникает задача нахождения таких алгоритмов построения обобщенных решений, которые устойчивы к малым изменениям правой части $u(x)$.

Пример 2. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Az = u, \qquad \text{(В; 1,5)}$$

где z — искомый вектор, u — известный вектор, $A = \{a_{ij}\}$ — квадратная матрица с элементами a_{ij}.

Если система (В; 1,5) невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$, то она имеет единственное решение, которое можно найти по известным формулам Крамера или другими способами *).

Если система (В; 1,5) вырожденная, то она имеет решение (притом не единственное) лишь при выполнении условий разрешимости, состоящих из равенств нулю соответствующих определителей.

Таким образом, прежде чем решить систему (В; 1,5), надо проверить, вырожденная она или нет. Для этого требуется вычислить определитель системы $\det A$.

Если n — порядок системы, то для вычисления $\det A$ требуется выполнить около n^3 операций. С какой бы точностью мы ни производили вычисления, при достаточно большом значении n, вследствие накопления ошибок вычисления, мы можем получить значение $\det A$, как угодно отличающееся от истинного. Поэтому желательно иметь (построить) такие алгоритмы нахождения решения системы (В; 1,5), которые не требуют предварительного выяснения вырожденности или невырожденности системы (В; 1,5).

*) Курош А. Г. Курс высшей алгебры.—10-е изд. М.: Наука, 1971.

Кроме того, в практических задачах часто правая часть u и элементы матрицы A, т. е. коэффициенты системы уравнений (В; 1,5), известны нам приближенно. В этих случаях вместо системы (В; 1,5), мы имеем дело с некоторой другой системой $\tilde{A}z=\tilde{u}$ такой, что $\|\tilde{A}-A\| \leqslant h$, $\|\tilde{u}-u\| \leqslant \delta$, где смысл норм обычно определяется характером задачи. Имея вместо матрицы A матрицу $\tilde{A}$, мы тем более не можем высказать определенного суждения о вырожденности или невырожденности системы (В; 1,5).

В этих случаях о точной системе $Az=u$ нам известно лишь то, что для матрицы A и правой части u выполняются неравенства $\|\tilde{A}-A\| \leqslant h$ и $\|\tilde{u}-u\| \leqslant \delta$. Но систем с такими исходными данными (A, u) бесконечно много, и в рамках известного нам уровня погрешности они неразличимы. Среди таких «возможных точных систем» могут быть и вырожденные.

Поскольку вместо точной системы (В; 1,5) мы имеем приближенную систему $\tilde{A}z=\tilde{u}$, то речь может идти лишь о нахождении приближенного решения. Но приближенная система может быть и неразрешимой. Возникает вопрос: что надо понимать под приближенным решением системы (В; 1,5)? Оно должно быть также устойчивым к малым изменениям исходных данных (A, u).

§ 2. Понятие корректно поставленных и некорректно поставленных задач

1. Различают корректно поставленные и некорректно поставленные задачи. Понятие корректной постановки задач математической физики было введено Ж. Адамаром [204, 205] в связи с желанием выяснить, какие типы граничных условий наиболее естественны для различных типов дифференциальных уравнений (для эллиптических, например,— задача Дирихле и ей аналогичные, для гиперболических — задача Коши).

Решение всякой количественной задачи обычно заключается в нахождении «решения» z по заданным «исходным данным» u, $z=R(u)$. Мы будем считать их элементами метрических пространств F и U с расстояниями между элементами $\rho_U(u_1, u_2)$, $\rho_F(z_1, z_2)$; $u_1, u_2 \in U$; $z_1, z_2 \in F$. Метрика обычно определяется постановкой задачи.

2. Пусть определено понятие «решения» и каждому элементу $u \in U$ отвечает единственное решение $z = R(u)$ из пространства F.

Задача определения решения $z = R(u)$ из пространства F по исходным данным $u \in U$ называется *устойчивой* на пространствах (F, U), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_F(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon$, где

$$z_1 = R(u_1), \quad z_2 = R(u_2); \quad u_1, u_2 \in U; \quad z_1, z_2 \in F.$$

Задача определения решения z из пространства F по «исходным данным» u из пространства U называется *корректно поставленной на паре метрических пространств* (F, U), если удовлетворяются требования (условия):

1) для всякого элемента $u \in U$ существует решение z из пространства F;

2) решение определяется однозначно;

3) задача устойчива на пространствах (F, U).

В математической литературе длительное время существовала точка зрения, согласно которой всякая математическая задача должна удовлетворять этим требованиям [100].

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются *некорректно поставленными.*

Следует отметить, что определение некорректно поставленных задач относится к данной паре метрических пространств (F, U), так как в других метриках та же задача может быть корректно поставленной (см. примеры 2 и 3 § 3 настоящего введения).

Замечание. Метричность пространств F и U используется здесь для выражения близости элементов, как средство описания окрестностей пространств F и U. Основные результаты, приводимые ниже, имеют место и для топологических пространств F и U (см. [80]).

Если класс U исходных данных выбран «естественно» для рассматриваемой задачи, то условия 1) и 2) характеризуют ее математическую определенность. Условие 3) связывается с физической детерминированностью задачи, а также с возможностью применения численных методов ее решения по приближенным исходным данным.

В самом деле, какую физическую интерпретацию может иметь решение задачи, если сколь угодно малым возмущениям исходных данных могут соответствовать большие изменения решения?

3. Корректная постановка задачи часто трактовалась как условие, которому должна удовлетворять всякая математическая задача, соответствующая какой-либо физической или технической задаче. Это поставило под сомнение целесообразность изучения некорректно поставленных задач. Однако такая точка зрения, совершенно естественная в применении к некоторым явлениям, развивающимся во времени, не может быть перенесена на все задачи. Ниже (§ 3) будут приведены примеры некорректно поставленных задач, относящихся как к основному аппарату математики, так и к широкому классу прикладных задач.

4. Задача нахождения приближенного решения некорректно поставленной задачи вида

$$Az = u, \quad u \in U, \qquad \text{(B; 2,1)}$$

в естественном классе элементов F является, как мы видели в § 1, п. 4, практически недоопределенной *). Исходными данными здесь являются правая часть уравнения u и оператор A.

Предположим, что оператор A нам известен точно, а правая часть уравнения (B; 2,1) известна с точностью δ, т. е. вместо ее точного значения $u_т$ нам известны элемент $\tilde{u}$ и число δ такие, что $\rho_U(u_т, \tilde{u}) \leqslant \delta$. По этим данным, т. е. по $(\tilde{u}, \delta)$, требуется найти такой элемент $z_\delta \in F$, который стремился бы (в метрике F) к $z_т$ при $\delta \to 0$. Такой элемент мы будем называть *приближенным* (к $z_т$) *решением* уравнения $Az = \tilde{u}$.

Элементы $z \in F$, удовлетворяющие условию $\rho_U(Az, \tilde{u}) \leqslant \delta$, будем называть *сопоставимыми по точности* с исходными данными $(\tilde{u}, \delta)$. Пусть Q_δ — совокупность всех таких элементов $z \in F$. Естественно приближенные решения уравнения $Az = \tilde{u}$ искать в классе Q_δ элементов z, сопоставимых по точности с исходными данными $(\tilde{u}, \delta)$.

---

*) Эта задача является некорректно поставленной, например, в случаях, когда A — вполне непрерывный оператор. Тогда обратный ему оператор A^{-1}, вообще говоря, не будет непрерывным на U и решение уравнения (B; 2, 1) не будет устойчивым к малым изменениям правой части u (в метрике пространства U).

Однако в ряде случаев этот класс элементов слишком широк. Как показано в примере 1 § 1, среди этих элементов (функций $z(s)$) есть такие, которые могут сильно отличаться друг от друга (в метрике пространства F). Поэтому не все элементы класса Q_δ можно брать в качестве приближенного решения уравнения (B; 2,1).

Необходим принцип отбора возможных решений. Для этого надо использовать обычно имеющуюся дополнительную информацию о решении. Такая информация может иметь количественный или качественный характер. Стремление использовать дополнительную информацию количественного характера приводит к понятию квазирешения [78, 79], о котором подробнее речь будет идти в гл. I.

Использование дополнительной информации, носящей качественный характер (например, гладкость решения), требует иного подхода к построению приближенных решений уравнения (B; 2,1). Этот подход содержится в работах [165—170] и будет описан в гл. II.

§ 3. Примеры некорректно поставленных задач

1. Пример 1. Задача решения интегрального уравнения первого рода

$$\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x).$$

Мы подробно рассмотрели этот пример в § 1, где показали отсутствие устойчивости его решения к малым изменениям правой части $u(x)$.

Пример 2. Задача дифференцирования функции $u(t)$, известной приближенно. Пусть $z_1(t)$ есть производная функции $u_1(t)$. Функция $u_2(t) = u_1(t) + N \sin \omega t$ в метрике C отличается от $u_1(t)$ на величину $\rho_C(u_1, u_2) = |N|$ при любых значениях ω. Однако производная $z_2(t) = u_2'(t)$ отличается от $z_1(t)$ в метрике C на величину $|N\omega|$, которая может быть произвольно большой при достаточно больших значениях $|\omega|$.

Заметим, что задача нахождения производной n-го порядка $z(t)$ от функции $u(t)$ такой, что $u(0) = u'(0) = ... = u^{n-1}(0) = 0$, сводится к решению относительно $z(t)$ интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^t \frac{1}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} z(\tau)\,d\tau = u(t).$$

Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости, что приводит к большим затруднениям при приближенном вычислении производных.

Замечание 1. Если на множествах F и U (или на одном из них) брать другие метрики, то задача дифференцирования функции $u(t)$, известной приближенно, может быть и корректно поставленной на паре метрических пространств (F, U).

Так, если U есть множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций и если расстояние между функциями $u_1(t)$ и $u_2(t)$ из U вычислять по формуле

$$\rho_U(u_1, u_2) = \sup_{t\in[a,b]} \{ |u_1(t) - u_2(t)| + |u_1'(t) - u_2'(t)| \},$$

а расстояние между функциями $z_1(t)$ и $z_2(t)$ из F оценивать в метрике C, то, очевидно, задача дифференцирования будет корректно поставленной на такой паре метрических пространств (F, U).

Однако указанные требования к функциям $u(t)$ в практических задачах часто непроверяемы. Поэтому приведенная выше метрика оценки уклонения функций $u(t) \in U$ не является естественной для задачи дифференцирования.

Пример 3. Численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2. Пусть $f_1(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt$. Если вместо a_n брать коэффициенты $c_n = a_n + \varepsilon/n$ для $n \geqslant 1$ и $c_0 = a_0$, получим ряд $f_2(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cos nt$. Коэффициенты этих рядов отличаются (в метрике l_2) на величину

$$\varepsilon_1 = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2\right\}^{1/2} = \varepsilon \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right\}^{1/2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}},$$

которую выбором числа ε можно сделать сколь угодно малой. Вместе с этим разность

$$f_2(t) - f_1(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt$$

может быть сколь угодно большой (при $t = 0$ последний ряд расходится).

Таким образом, если уклонение суммы ряда брать в метрике C, суммирование ряда Фурье не является устойчивым.

Замечание 2. Если уклонение функций $f(t)$ из F оценивать в метрике L_2, то задача суммирования рядов Фурье с приближенно заданными (в метрике l_2) коэффициентами будет корректно поставленной на такой паре метрических пространств (F, U).

В самом деле, по теореме Парсеваля имеем

$$\left\{\int_0^{\pi} [f_1(t) - f_2(t)]^2 \, dt\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} (c_n - a_n)^2\right\}^{1/2} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Пример 4. Задача Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае (пример Адамара [205]). Она состоит в нахождении решения уравнения $\Delta u(x, y) = 0$ по начальным данным, т. е. в нахождении решения, удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции.

Если положить $f_1(x) \equiv 0$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{a} \sin ax$, то решением задачи Коши будет функция

$$u_1(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin ax \operatorname{sh} ay, \quad a > 0.$$

Если положить $f_2(x) = \varphi_2(x) \equiv 0$, то решением такой задачи Коши будет функция $u_2(x, y) \equiv 0$.

Если уклонения начальных данных и решений оценивать в метрике C, то имеем

$$\rho_C(f_1, f_2) = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0,$$

$$\rho_C(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = 1/a.$$

Последняя величина при достаточно больших значениях a может быть сделана сколь угодно малой. Однако уклонение решений

$$\rho_C(u_1, u_2) = \sup_x |u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \\ = \sup_x \left| \frac{1}{a^2} \sin ax \operatorname{sh} ay \right| = \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ay$$

при любом фиксированном $y > 0$ может быть произвольно большим при достаточно больших значениях числа a.

Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости и, следовательно, является некорректно поставленной.

Однако задача Коши для уравнения Лапласа встречается в приложениях [75—77, 82, 92, 101, 103, 210, 212, 213]. В качестве примера можно указать задачу о продолжении потенциала силы тяжести, наблюдаемой на поверхности земли ($y = 0$) в направлении гравитирующих масс *).

Пример 5. Задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Пусть D — конечная область, E — дуга кривой, принадлежащей области D. Тогда задача аналитического продолжения функции, заданной на дуге кривой E, на всю область D является неустойчивой.

В самом деле, пусть z_0 — точка на границе области D, расстояние которой до E равно $d > 0$, и $f_1(z)$ — аналитическая в D функция. Функция $f_2(z) = f_1(z) + \varepsilon/(z - z_0)$, где ε — заданное положительное число, также аналитична в D. На множестве E эти функции отличаются одна от другой на величину $\varepsilon/(z - z_0)$, модуль которой не превосходит ε/d, т. е. $|f_2(z) - f_1(z)| \leqslant \varepsilon/d$ на множестве E. Величина ε/d может быть сделана произвольно малой путем выбора соответствующего значения числа ε.

Однако в области D разность функций $f_2(z) - f_1(z) = \varepsilon/(z - z_0)$ не ограничена по модулю (см. также [85, 197, 199]).

Пример 6. Обратная задача гравиметрии. Пусть имеется тело, плотность которого отлична от плотности окружающей среды. Определить форму тела по аномалии

---

*) Потенциал гравитационного поля Земли удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

напряжения силы тяжести, создаваемой им на поверхности Земли (см. [41—43, 45, 46, 157, 174]).

Предположим, что среда, находящаяся под поверхностью Земли ($z=0$), состоит из масс с известными плотностями ρ_1 и ρ_2, разделенных границей $z(x)$ (рис. 1).

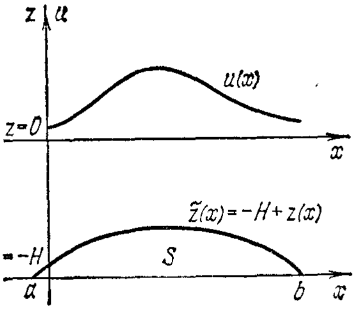

Рис. 1.

Пусть $\tilde{z}(x) = -H$ всюду, кроме отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, на котором $\tilde{z}(x) = -H + z(x)$. Такая конфигурация масс создает на поверхности Земли аномалию напряжения силы тяжести $\Delta g = -\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}$, где V — потенциал масс с плотностью $\rho = \rho_2 - \rho_1$, заполняющих область S (см рис. 1). Так как

$$V = \int\limits_S \frac{\rho}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2}$, то

$$\Delta g = -\frac{\rho}{2\pi} \int\limits_a^b \int\limits_{-H}^{-H+z(\xi)} -\frac{\partial}{\partial \eta} \ln\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta\, |_{z=0} =$$

$$= \frac{\rho}{2\pi} \int\limits_a^b \ln \frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi.$$

Аномалия напряжения силы тяжести на поверхности Земли может быть измерена.

Таким образом, задача определения функции $z(x)$ сводится к решению нелинейного интегрального уравнения первого рода

$$Az \equiv \int\limits_a^b \ln \frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi = u(x),$$

где $u(x) = \frac{2\pi}{\rho} \Delta g$. Здесь A — нелинейный интегральный оператор. Нетрудно показать неустойчивость решения этого уравнения к малым изменениям в правой части $u(x)$.

По вопросам единственности решения обратной задачи гравиметрии имеется обширная литература [47, 102, 134, 140—149].

Укажем еще некоторые классы математических задач, в которых имеются некорректно поставленные задачи: решение систем линейных алгебраических уравнений (в условиях равного нулю определителя системы) (см. гл. III); некоторые задачи линейного программирования (см. гл. IX); задачи минимизации функционалов, когда из сходимости значений минимизируемого функционала к его наименьшему значению не следует сходимость минимизирующей последовательности (см. гл. VIII); некоторые задачи оптимального управления (см. гл. VIII), дифференциальных игр и многие другие [111].

2. Важным классом некорректно поставленных задач, имеющих большое прикладное значение, являются задачи проектирования оптимальных систем, конструкций. Ниже приводится одна из таких задач.

Рассмотрим одну из задач синтеза физических систем. К этому классу относятся задачи синтеза оптических систем с заданными «коэффициентами пропускания» (отражения). Такие системы могут быть получены, например, путем создания многослойных покрытий, наносимых в виде тонких пленок на поверхность «подложки».

Рассмотрим неограниченную плоскую неоднородную пластину толщины H с показателем преломления n. Пусть на пластину падает нормально монохроматическая плоская световая волна с длиной $\lambda = 2\pi c/\omega$, а координатная ось переменной z перпендикулярна к пластине. Начало отсчета на ней возьмем на поверхности пластины так, чтобы внутри пластины удовлетворялись неравенства $0 < z < H$.

Предположим, что:

а) полупространства $\{z < 0\}$ и $\{z > H\}$ по обе стороны пластины однородны и имеют одинаковые показатели преломления, равные n_0 и $n_H = n_0$;

б) в пластине и в этих полупространствах отсутствует поглощение.

Пусть электрическое поле падающей в полупространстве $\{z < 0\}$ волны имеет вид $E_{\text{пад}} = \mathscr{E}_0(z)\, e^{i\omega t}$, где $\mathscr{E}_0(z) = E_0 e^{-i\frac{\omega}{c} n_0 z}$ — амплитуда волны. Амплитуда электрического поля $\mathscr{E}(z)$ в рассматриваемых условиях удовлетворяет уравнению (см. [40])

$$\mathscr{E}'' + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \mathscr{E} = 0.$$

В полупространстве $\{z < 0\}$ электрическое поле будет складываться из полей падающей и отраженной волн. Амплитуда $\widetilde{\mathscr{E}}_0(z)$ совокупного поля в этой области будет равна

$$\widetilde{\mathscr{E}}_0(z) = \mathscr{E}_0(z) + c_1 e^{\frac{\omega}{c} n_0 z}.$$

Амплитуда электрического поля прошедшей через пластину волны равна

$$\mathscr{E}_H(z) = c_2 \mathscr{E}_0(z).$$

Амплитуда поля $\mathscr{E}(z)$ внутри пластины будет решением краевой задачи (см. [40])

$$\mathscr{E}'' + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(z) \mathscr{E} = 0, \quad 0 < z < H, \tag{B; 3,1}$$

$$\mathscr{E}'(0) - i\frac{\omega}{c} n_0 [\mathscr{E}(0) - 2E_0] = 0, \tag{B; 3,2}$$

$$\mathscr{E}'(H) + i\frac{\omega}{c} n_0 \mathscr{E}(H) = 0. \tag{B; 3,3}$$

Если $n(z)$ — кусочно-непрерывная на промежутке $(0, H)$ функция, то в точках ее разрыва z_i должны выполняться условия сопряжения вида

$$\mathscr{E}(z_i - 0) = \mathscr{E}(z_i + 0), \quad \mathscr{E}'(z_i - 0) = \mathscr{E}'(z_i + 0).$$

Пропускательная способность такой системы (пластины) характеризуется «коэффициентом пропускания»

$$T = \frac{n(H)}{n_0} \left| \frac{\mathscr{E}(H)}{\mathscr{E}_0(0)} \right|^2. \tag{B; 3,4}$$

Очевидно, что для заданной системы (пластины) он является функцией длины λ падающей на систему волны, $T = T(\lambda)$ *).

Прямая задача состоит в нахождении коэффициента пропускания $T(\lambda)$ по заданным $\mathscr{E}_0$, $n(z)$, H и сводится

*) В ряде случаев вместо $T(\lambda)$ рассматривают «коэффициент отражения» $R(\lambda) = 1 - T(\lambda)$.

к решению краевой задачи (В; 3, 1) — (В; 3, 3) относительно $\mathscr{E}(z)$.

Часто надо решать задачу, обратную по отношению к этой. Она состоит в том, чтобы по заданной функции $\widehat{T}(\lambda)$ определить систему $(n(z), H)$, т. е. найти показатель преломления $n(z)$ пластины и ее толщину H. Эту задачу называют *задачей синтеза.*

Она не является корректно поставленной, так как может не существовать системы $(n(z), H)$ (пластины толщины H с показателем преломления $n(z)$), имеющей априори заданный коэффициент пропускания. Возможно также, что данному коэффициенту пропускания $\widehat{T}(\lambda)$ могут отвечать различные системы. Кроме того, не всякая система практически реализуема.

Представляет интерес рассмотреть задачу синтеза для слоистых систем, когда искомая функция $n(z)$ кусочно-постоянна. В этом случае показатель преломления $n(z)$ имеет постоянное значение n_j в j-м слое ($j=1, 2, \ldots, N$), толщины слоев d_j произвольны, число слоев N не является заданным. К таким задачам относится и практически важная задача о синтезе многослойных покрытий. Рассмотрим подробнее математическую постановку этой задачи, являющейся дискретным аналогом рассмотренной задачи синтеза оптических систем.

Систему из N слоев будем описывать $2N$-мерным вектором $x = \{d_1, d_2, \ldots, d_N; n_1, n_2, \ldots, n_N\}$, координатами которого являются толщины d_j и показатели преломления n_j слоев. Решение задачи (В; 3, 1) — (В; 3, 3) однозначно сопоставляет по формуле (В; 3, 4) любому $2N$-мерному вектору x коэффициент пропускания $T(\lambda)$. Таким образом, на некоторой совокупности $2N$-мерных векторов x определен нелинейный оператор

$$A(x, \lambda) = T(\lambda), \quad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2. \qquad \text{(В; 3, 5)}$$

Пусть $\mathbf{R}^{2N}$ — $2N$-мерное евклидово векторное пространство, D_{2N} — замкнутая область в нем, определяемая условиями

$$D_{2N} \equiv \{x \in \mathbf{R}^{2N};\ d_j \geqslant 0,\ n_{\min} \leqslant n_j \leqslant n_{\max};\ j = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Отклонение функций $T(\lambda)$ будем оценивать в метрике $L_2(\lambda_1, \lambda_2)$ *).

*) Вместо метрики L_2 можно брать и метрику C.

Пусть $\widehat{T}(\lambda)$ — заданная на отрезке $[\lambda_1, \lambda_2]$ функция из $L_2(\lambda_1, \lambda_2)$.

Полагаем

$$\delta_N = \inf_{x \in D_{2N}} \| A(x, \lambda) - \widehat{T}(\lambda) \|_{L_2}.$$

Очевидно, $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_m \geqslant \ldots \geqslant 0$. Число $\delta_0 = \lim_{m \to \infty} \delta_m$ будем называть *предельно достижимой точностью*.

Задача синтеза состоит в нахождении N-слойной системы с заданным коэффициентом пропускания $\widehat{T}(\lambda)$. При этом требуется найти систему с наименьшим числом слоев N_0 и с минимальной общей толщиной $d = \sum_{j=1}^{N} d_j$. Эти дополнительные требования обусловлены требованиями устойчивости к внешним воздействиям (при большом числе слоев системы легко разрушаются), возможностями напылительной аппаратуры для нанесения покрытий и др.

Математическая постановка этой задачи состоит в нахождении приближенного решения уравнения

$$A(x, \lambda) = \widehat{T}(\lambda), \qquad \text{(В; 3,6)}$$

минимизирующего N и $d = \sum_{j=1}^{N} d_j$, для которого $\| A(x, \lambda) - \widehat{T}(\lambda) \|_{L_2} \leqslant \delta$, где δ — заданное число $(\delta \geqslant \delta_0)$. Эту задачу можно решать следующим образом. Последовательно увеличивая число слоев N, находим наименьшее значение $N = N_0$, при котором в D_{2N} существует такой вектор x_{N_0}, для которого $\| A(x_{N_0}, \lambda) - \widehat{T}(\lambda) \|_{L_2} \leqslant \delta$.

Определив таким образом число N_0, в классе векторов x из D_{2N_0}, удовлетворяющих условию $\| A(x, \lambda) - T(\lambda) \|_{L_2} \leqslant \delta$, ищем вектор x, минимизирующий $d = \sum_{j=1}^{N_0} d_j$. Решение такой задачи, очевидно, существует, так как D_{2N_0} — замкнутое выпуклое множество конечномерного евклидова пространства. В [40] даются примеры численного решения таких задач.

3. Рассмотренная задача синтеза оптических систем есть задача определения коэффициента $n(z)$ уравнения (В; 3,1) по известному функционалу $T(\lambda)$ от решения

этого уравнения. Это одна из обратных задач математической физики.

Во многих других случаях физические задачи также приводят к задачам определения коэффициентов дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) по некоторым известным функционалам от их решений. К таким задачам относится, например, обратная кинематическая задача сейсмики. Физическая ее постановка заключается в следующем. В заданной области D, ограниченной поверхностью S, рассматривается волновой процесс (т. е. процесс, описываемый волновым уравнением), порожденный источниками, действующими в точках поверхности S. В других точках границы S регистрируется время прохождения волн через эту область. Требуется по этим данным найти скорость $a = a(M)$ распространения волн внутри области как функцию точки M. Можно указать и ряд других физических задач, приводящих к такого типа обратным задачам. Изучение задач этого класса содержится в работах [22, 108—110, 119, 150—152].

4. Широким классом некорректно поставленных задач, возникающих в физике, технике и в других отраслях знаний, являются так называемые *обратные* задачи определения интересующих нас количественных характеристик явления по результатам измерений их косвенных проявлений.

Пусть изучаемый объект (явление) характеризуется элементом $z_т$ (функцией, вектором), принадлежащим множеству F. Часто $z_т$ недоступен для прямого изучения и исследуется некоторое его проявление $Az_т = u_т$ ($u_т \in AF$, где AF — образ множества F при отображении, осуществляемом оператором A). Очевидно, что уравнение

$$Az = u \qquad \text{(В; 3.7)}$$

имеет решение на F только для таких элементов u, которые принадлежат множеству AF. Элемент $u_т$ обычно получается путем измерений и потому известен нам приближенно. Пусть $\tilde{u}$ — это приближенное значение. В этих случаях речь может идти лишь о нахождении приближенного (к $z_т$) решения уравнения

$$Az = \tilde{u}. \qquad \text{(В; 3,8)}$$

При этом $\tilde{u}$, вообще говоря, не принадлежит множеству AF. Оператор A во многих случаях таков, что обратный ему оператор A^{-1} не является непрерывным (например, когда A — вполне непрерывный оператор, в частности, интегральный оператор примера 1). В этих условиях нельзя в качестве приближенного решения брать точное решение уравнения (В; 3, 7) с приближенной правой частью, т. е. нельзя в качестве приближенного решения брать элемент $z = A^{-1}\tilde{u}$, так как:

а) такого решения может не существовать на множестве F, поскольку $\tilde{u}$ может не принадлежать множеству AF (не выполняется требование 1) корректности);

б) такое решение, если даже оно существует, не будет обладать свойством устойчивости, поскольку обратный оператор A^{-1} не является непрерывным (в то время как условие устойчивости решения задачи (В; 3,7) обычно является следствием ее физической детерминированности, и потому приближенное решение должно обладать этим свойством). Таким образом, не выполняется требование 3) корректности. Следовательно, задача (В; 3,7) является некорректно поставленной.

Отсутствие устойчивости во многих случаях затрудняет физическую интерпретацию результатов измерений. Наличие этого свойства необходимо также для использования численных методов решения по приближенным исходным данным. Таким образом, для обратных задач возникает принципиальной важности вопрос: *что надо понимать под «приближенным решением» таких задач*? Если дан ответ на этот вопрос, то возникает задача нахождения таких алгоритмов построения приближенных решений этих задач, которые обладают свойством устойчивости к малым изменениям исходных данных.

5. Пусть в уравнении (В; 3,7) элементы z и u суть функции точки M и времени t (скалярные или векторные), а оператор A, определяемый характером преобразователя от z к u,— линейный. Если нам известна реакция (отклик) преобразователя на δ-функцию, обращающуюся в бесконечность при $M = P$ и $t = \tau$, т. е. функция $A\delta(M, P; t, \tau) = K(M, P; t, \tau)$, то для произвольной функции $z(M, t)$ из F

$$Az \equiv \int K(M, P; t, \tau)\, z(P, \tau)\, dv_P d\tau,$$

где интеграл берется по всей области определения функции $z(P, t)$. Функция $K(M, P; t, \tau)$ называется *импульсной переходной функцией*, короче,— *импульсной функ-*

цией преобразователя (системы). Ее часто называют также *аппаратной функцией* системы. В этом случае уравнение (В; 3,7) сводится к интегральному уравнению первого рода.

6. Если z зависит лишь от времени и преобразователь (аппаратура) однороден во времени, то функция $K(M, P; t, \tau)$ будет зависеть лишь от разности $t - \tau$, т. е.

$$K(M, P; t, \tau) = K(t - \tau).$$

В этом случае оператор Az имеет вид

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t - \tau) z(\tau) d\tau,$$

а уравнение (В; 3,7) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t). \qquad \text{(В; 3,9)}$$

Это интегральное уравнение первого рода типа свертки. К уравнению (В; 3,9) сводятся, например, следующие задачи.

а) Задача определения формы радиоимпульса $z(t)$, излученного источником, по результатам записи его на больших расстояниях от источника $u(t)$, если известна импульсная функция трассы распространения $K(t)$. Уравнение для $z(t)$ имеет вид

$$Az \equiv \int_{0}^{t} K(t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t).$$

б) Задача определения формы электрического импульса на входе кабеля $z(t)$ по результатам записи его на выходе кабеля $u(t)$,

$$\int_{0}^{t} K(t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t),$$

где $K(t)$ — импульсная функция кабеля (см. гл. II).

в) Вычисление производных функции, известной приближенно. Для производной n-го порядка $z(x)$ от $u(x)$, для которой $u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0$, имеем уравнение

$$\int_0^x \frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}z(t)\,dt = u(x).$$

г) Задачи автоматического регулирования, например, определение переходных функций $k(t)$ линейных преобразователей по входному и выходному сигналам $x(t)$ и $y(t)$,

$$Ak \equiv \int_0^t x(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau = y(t),$$

и многие другие (см. [157, 173]).

7. К числу важных задач относится задача создания систем автоматической математической обработки результатов физического эксперимента. Одним из этапов обработки является решение обратных задач вида $Az = u$ относительно z.

Большое число современных экспериментальных установок для исследования различных физических явлений и объектов являются сложными и дорогостоящими комплексами (ускорители элементарных частиц, установки для получения и исследования высокотемпературной плазмы, для исследования свойств вещества при сверхнизких температурах и др.).

Желание иметь надежную информацию об исследуемом явлении, изучение «редких» и «слабых» эффектов часто приводит к необходимости многократного повторения единичного эксперимента. Автоматизация проведения эксперимента и способов регистрации его результатов позволяют получать за короткое время весьма большой объем необходимой информации (десятки и сотни тысяч снимков, осциллограмм, показаний детекторов и т. п.). Для получения из этой информации необходимых характеристик изучаемого явления или объекта требуется последующая обработка результатов наблюдений. Во многих случаях эту обработку надо производить практически одновременно с проведением эксперимента или с небольшим допустимым сдвигом по времени. Такую обработку, требующую переработки большого объема информации, можно произвести лишь с помощью ЭВМ.

Для широкого класса экспериментальных установок можно выделить следующие этапы обработки результатов наблюдений [72].

Первый этап. Снятие информации с регистрирующей аппаратуры или с постоянного носителя (например, с фото- и кинопленки); перевод ее в числовой код и засылка в память ЭВМ.

Второй этап. Первичная обработка. Она может включать нормировку данных наблюдения, приведение к определенной системе отсчета, статистическую обработку с оценкой степени доверия, фильтрацию и т. д. Целью ее является получение «выходных результатов» («выходной кривой») эксперимента.

Третий этап. Интерпретация результатов, полученных на втором этапе обработки. Она состоит обычно в оценке искомых характеристик модели изучаемого явления или объекта.

Так как в физическом эксперименте регистрируются, как правило, не интересующие нас характеристики явления z, а лишь их некоторые проявления $u = Az$, то задача интерпретации обычно сводится к решению уравнения $Az = u$. Во многих случаях эта задача является некорректно поставленной.

Программное обеспечение всего комплекса обработки (от первого до третьего этапа) обычно называют *полной системой математической обработки* результатов наблюдений, или, короче,— *системой обработки*. Система обработки может работать как «в режиме диалога», так и автоматически, без вмешательства человека на промежуточных стадиях. Описанная процедура автоматической математической обработки результатов наблюдений требует использования в системе обработки таких алгоритмов решения уравнений $Az = u$ (в том числе и некорректно поставленных задач), которые легко реализуются на ЭВМ.

В [38, 185, 188] содержится описание систем автоматической математической обработки результатов физических экспериментов, относящихся к изучению взаимодействия γ-квантов с нейтронами и протонами и к диагностике плазмы.

8. В дальнейшем основное внимание будет уделено методам решения некорректно поставленных задач вида (В; 3,7). К таким уравнениям относятся, например, системы линейных алгебраических уравнений, а также интегральные уравнения Фредгольма первого рода. В первом случае оператор A есть матрица, элементами которой являются коэффициенты системы, во втором —

оператор A есть интегральный оператор

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds.$$

§ 4. Некоторые наиболее употребительные понятия

Значительная часть книги посвящена рассмотрению методов решения функциональных уравнений вида $Az = u$. Напомним некоторые основные понятия функционального анализа, которые используются при этом.

Определение 1. Множество M метрического пространства F называется *компактным* на F (или в F), если из всякой его последовательности $\{z_n\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из F.

Как известно из курса функционального анализа*), необходимым и достаточным условием компактности множества M из n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ является его ограниченность.

Достаточное условие компактности множества M из пространства $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций дается следующей теоремой.

Теорема (Арцела). *Если функции множества M из $C[a, b]$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, то из всякой последовательности $\{z_n\}$ функций z_n из M можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой непрерывной на $[a, b]$ функции.*

Определение 2. Если из всякой последовательности $\{z_n\}$ элементов из M можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу $z \in M$, то множество M называется *компактным в себе*.

Каждое компактное в себе множество можно рассматривать как отдельное метрическое пространство (компакт).

Для того чтобы компактное в метрическом пространстве F множество M было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто в F.

---

*) См., например, Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.

Всякий компакт M содержит конечное или счетное всюду плотное на M множество.

Определение 3. Совокупность элементов z метрического пространства F, для которых расстояние до элемента z_0 меньше числа r, т. е. $\rho_F(z_0, z) < r$, называется *открытой сферой* (*шаром*) радиуса r с центром в z_0.

Определение 4. Элемент z_0 метрического пространства F называется *точкой соприкосновения множества* M из F, если любая открытая сфера с центром в z_0 содержит хотя бы один элемент множества M.

Определение 5. Совокупность всех точек соприкосновения множества M называется его *замыканием* и обозначается $\bar{M}$ или $[M]$.

Определение 6. *Отрезком* линейного метрического пространства F, соединяющим элементы z_1 и z_2, называется совокупность элементов z вида $z = \alpha z_1 + \beta z_2$, где α и β — любые числа такие, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Определение 7. Множество M линейного метрического пространства F называется *выпуклым*, если с каждыми двумя элементами z_1, z_2 множества M ему принадлежат и все элементы отрезка, определяемого парой z_1, z_2.

Определение 8. Числовая функция (т. е функция, значениями которой являются числа), определенная на элементах множества M, называется *функционалом*, а множество M — его *областью определения*.

Определение 9. Функционал $f(z)$ называется *выпуклым*, если он определен на выпуклом множестве M и для любых элементов z_1, z_2 из M и любых чисел α, β таких, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha z_1 + \beta z_2) \leqslant \alpha f(z_1) + \beta f(z_2).$$

Определение 10. Выпуклый функционал $f(z)$ называется *строго выпуклым*, если для любых элементов z_1, z_2 из $M (z_1 \neq z_2)$ и любых чисел α, β, таких, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha z_1 + \beta z_2) < \alpha f(z_1) + \beta f(z_2).$$

Определение 11. Функционал $f(z)$, определенный на множестве M метрического пространства F, называется *непрерывным* на M, если, каковы бы ни были элемент z_0 из M и последовательность $\{z_n\} \subset M$, сходящаяся (в метрике F) к z_0, последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к $f(z_0)$.

Определение 12. Функция $f(x)$ одной вещественной переменной x называется *непрерывной справа* в точке x_0, если

$$\lim_{\substack{h>0\\ h\to 0}} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Аналогично определяется непрерывность слева.

Определение 13. Последовательность $\{z_n\}$ элементов метрического пространства F называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для любых $n, m \geqslant N(\varepsilon)$

$$\rho_F(z_n, z_m) \leqslant \varepsilon.$$

Определение 14. Метрическое пространство F называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность $\{z_n\}$ элементов этого пространства сходится к элементу из F.

Определение 15. Пространство F называется *линейным*, если для любых его двух элементов z_1, z_2 определен третий элемент $z_1 + z_2 \in F$, который называется их *суммой*, и для любого $z \in F$ и любого числа β определен элемент $\beta z \in F$, который называется *произведением элемента z на число* β, причем операции сложения и умножения на число удовлетворяют требованиям:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения);

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (ассоциативность сложения);

3) существует элемент $0 \in F$ (нуль пространства F) такой, что для любого $z \in F$, $z + 0 = z$;

4) для любого элемента $z \in F$ существует элемент $-z$ такой, что $z + (-z) = 0$;

5) для любых чисел α, β и произвольного $z \in F$ $\alpha(\beta z) = (\alpha\beta) z$ (ассоциативность умножения на число);

6) для любого $z \in F$, $1 \cdot z = z$;

7) для любых чисел α, β и произвольного $z \in F$ $(\alpha + \beta) z = \alpha z + \beta z$ (дистрибутивность);

8) для любого числа β и произвольных z_1, $z_2 \in F$ $\beta(z_1 + z_2) = \beta z_1 + \beta z_2$ (дистрибутивность).

Определение 16. *Нормой* в линейном пространстве F называется функционал $\|z\|$, определенный для любого $z \in F$, принимающий лишь конечные вещественные значения и обладающий следующими свойствами:

1) $\|z\| \geqslant 0$ для любого $z \in F$;

2) $\|z\| = 0$ только для $z = 0$;

3) для любых $z_1, z_2 \in F$ $\|z_1 + z_2\| \leqslant \|z_1\| + \|z_2\|$ (неравенство треугольника);

4) для любого числа β и произвольного $z \in F$ $\|\beta z\| = |\beta| \cdot \|z\|$.

Если на пространстве F задана норма, то его можно сделать метрическим, положив $\rho_F(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|$. Полученное пространство называется линейным *нормированным пространством.*

Примеры линейных нормированных пространств.

1. Пространство $\mathbf{R}^1$ вещественных чисел z,

$$\|z\| = |z|.$$

2. n-мерное евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ групп чисел $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$,

$$\|z\| = \left\{\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right\}^{1/2}.$$

3. Пространство l_2 сходящихся последовательностей чисел $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$,

$$\|z\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} z_k^2\right\}^{1/2}.$$

4. Пространство $L_2[a, b]$ функций $z(x)$, интегрируемых с квадратом,

$$\|z\| = \left\{\int_a^b z^2(x)\,dx\right\}^{1/2}.$$

5. Пространство $L_1[a, b]$ функций $z(x)$, интегрируемых с модулем,

$$\|z\| = \int_a^b |z(s)|\,ds.$$

6. Пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций $z(x)$,

$$\|z\| = \max_{x \in [a, b]} |z(x)|.$$

7. Пространство $W_2^1[a, b]$ функций $z(x)$, имеющих обобщенную производную, интегрируемую с квадратом,

$$\|z\| = \left\{ \int_a^b z^2(x)\,dx + \int_a^b \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Определение 17. Линейное пространство F называется *гильбертовым,* если, во-первых, на нем задана вещественная числовая функция (z_1, z_2), $z_1, z_2 \in F$, называемая *скалярным произведением*, удовлетворяющая условиям:

а) для любых $z_1, z_2 \in F$, $(z_1 z_2) = (z_2, z_1)$;

б) для любых z_1, z_2, z_3 из F $(z_1 + z_2, z_3) = (z_1, z_2) + (z_2, z_3)$ (аддитивность);

в) для любых z_1, $z_2 \in F$ и произвольного вещественного числа β $(\beta z_1, z_2) = \beta(z_1, z_2)$ (однородность);

г) $(z, z) \geqslant 0$, причем $(z, z) = 0$ только для $z = 0$,

и, во-вторых, такое, что если в F ввести метрику

$$\rho_F(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = \sqrt{(z_1 - z_2, z_1 - z_2)},$$

то пространство F с такой метрикой будет полным.

Определение 18. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым.*

Все приведенные выше пространства являются банаховыми, а пространства 1—4 и 7 — гильбертовыми.

Глава I

МЕТОД ПОДБОРА. КВАЗИРЕШЕНИЯ

Возможность определения приближенных решений некорректно поставленных задач, устойчивых к малым изменениям исходных данных, основывается на использовании дополнительной информации относительно решения. Возможны различные типы дополнительной информации.

В первой категории случаев дополнительная информация, носящая количественный характер, позволяет сузить класс возможных решений, например, до компактного множества, и задача становится устойчивой к малым изменениям исходных данных. Во второй категории случаев для нахождения приближенных решений, устойчивых к малым изменениям исходных данных, используется лишь качественная информация о решении (например, информация о характере его гладкости) (см. [165—170, 184]).

В настоящей главе будет рассмотрен метод подбора, имеющий широкое практическое применение, метод квазирешения, а также метод замены исходного уравнения близким ему и метод квазиобращения. В качестве некорректно поставленной задачи мы будем рассматривать задачу решения уравнения

$$Az = u \tag{1; 0,1}$$

относительно z, где $u \in U$, $z \in F$; U и F — метрические пространства. Оператор A отображает F на U. Предполагается, что существует обратный оператор A^{-1}, но он не является, вообще говоря, непрерывным.

Уравнение (1; 0,1) с оператором A, обладающим указанными свойствами, будем называть *операторным уравнением первого рода*, или, короче,— *уравнением первого рода*.

§ 1. Метод подбора решения некорректно поставленных задач

1. Широко распространенным в вычислительной практике способом приближенного решения уравнения (1; 0,1) является метод подбора. Он состоит в том, что для элементов z некоторого заранее заданного подкласса возможных решений M $(M \subset F)$ вычисляется оператор Az, т. е. решается прямая задача. В качестве приближенного решения берется такой элемент z_0 из множества M, на котором невязка $\rho_U(Az, u)$ достигает минимума, т. е.

$$\rho_U(Az_0, u) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, u).$$

Пусть правая часть уравнения (1; 0,1) известна точно, т. е. $u = u_т$, и требуется найти его решение $z_т$. Обычно в качестве M берется множество элементов z, зависящих от конечного числа параметров, меняющихся в ограниченных пределах так, чтобы M было замкнутым множеством конечномерного пространства. Если искомое точное решение $z_т$ уравнения (1; 0,1) принадлежит множеству M, то $\inf\limits_{z \in M} \rho_U(Az, u) = 0$ и достигается эта нижняя граница на точном решении $z_т$. Если уравнение (1; 0,1) имеет единственное решение, то элемент z_0, минимизирующий $\rho_U(Az, u)$, определен однозначно.

Практически минимизация невязки $\rho_U(Az, u)$ производится приближенно и возникает следующий важный вопрос об эффективности метода подбора, т. е. о возможности как угодно приблизиться к искомому точному решению.

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность элементов, для которой $\rho_U(Az_n, u) \to 0$ при $n \to \infty$. При каких условиях можно утверждать, что при этом и $\rho_F(z_n, z_т) \to 0$, т. е. что $\{z_n\}$ сходится к $z_т$?

Это вопрос обоснования эффективности метода подбора.

2. Стремление обосновать успешность метода подбора привело к установлению общефункциональных требований, ограничивающих класс возможных решений M, при которых метод подбора является устойчивым и $z_n \to z_т$ [164]. Эти требования заключаются в компактности множества M и основываются на приводимой ниже известной топологической лемме.

Лемма. *Пусть метрическое пространство F отображается на метрическое пространство U и U_0 — образ множества F_0, $F_0 \subset F$, при этом отображении. Если отображение $F \to U$ непрерывно, взаимно однозначно и множество F_0 компактно на F, то обратное отображение $U_0 \to F_0$ множества U_0 на множество F_0 также непрерывно по метрике пространства F.*

Доказательство. Пусть z — элементы множества F $(z \in F)$, а u — элементы множества U $(u \in U)$. Пусть функция $u = \varphi(z)$ осуществляет прямое отображение $F \to U$, а функция $z = \psi(u)$ — обратное отображение $U \to F$.

Возьмем произвольный элемент u_0 из U_0. Покажем, что функция $\psi(u)$ непрерывна на u_0. Предположим, что это неверно. Тогда существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что для всякого $\delta > 0$ найдется элемент $\tilde{u}$ из U_0, для которого $\rho_U(\tilde{u}, u_0) < \delta$, в то время как $\rho_F(\tilde{z}, z_0) \geqslant \varepsilon_1$. Здесь $\tilde{z} = \psi(\tilde{u})$, $z_0 = \psi(u_0)$ и $\tilde{z} \in F_0$, $z_0 \in F_0$.

Возьмем последовательность $\{\delta_n\}$ положительных чисел δ_n, сходящуюся к нулю при $n \to \infty$. Для каждого δ_n найдется элемент $\tilde{u}_n$ из U_0, для которого $\rho_U(\tilde{u}_n, u_0) < \delta_n$, но $\rho_F(\tilde{z}_n, z_0) \geqslant \varepsilon_1$, где $\tilde{z}_n = \psi(\tilde{u}_n)$. Очевидно, последовательность $\{\tilde{u}_n\}$ сходится к элементу u_0. Так как $\tilde{z}_n$ принадлежат компактному на F множеству F_0, то из последовательности $\{\tilde{z}_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\left\{\tilde{z}_{n_k}\right\}$, сходящуюся по метрике F к некоторому элементу $\tilde{z}_0 \in F$. При этом $\tilde{z}_0 \neq z_0$, так как для всякого n_k $\rho_F\left(\tilde{z}_{n_k}, z_0\right) \geqslant \varepsilon_1$, следовательно и $\rho_F(\tilde{z}_0, z_0) \geqslant \varepsilon_1$. Этой подпоследовательности $\left\{\tilde{z}_{n_k}\right\}$ отвечает последовательность элементов $\tilde{u}_{n_k} = \varphi\left(\tilde{z}_{n_k}\right)$ из U_0, сходящаяся к $\tilde{u}_0 = \varphi(\tilde{z}_0)$ и являющаяся подпоследовательностью последовательности $\{\tilde{u}_n\}$. Так как последовательность $\{\tilde{u}_n\}$ сходится к $u_0 = \varphi(z_0)$, то

$$\tilde{u}_0 = \varphi(\tilde{z}_0) = u_0 = \varphi(z_0),$$

т. е. $\varphi(\tilde{z}_0) = \varphi(z_0)$. В силу взаимной однозначности отображения $F \to U$ $\tilde{z}_0 = z_0$, что противоречит ранее установленному неравенству $\tilde{z}_0 \neq z_0$. Лемма доказана.

Эту лемму можно сформулировать короче.

Если отображение $F_0 \to U_0$ компакта F_0 на множество U_0 взаимно однозначно и непрерывно, то обратное отображение $U_0 \to F_0$ также непрерывно.

Эквивалентность этих формулировок следует из того, что замыкание $\overline{F}_0$ множества F_0, компактного на F, является компактом.

Таким образом, минимизирующая последовательность $\{z_n\}$ в методе подбора сходится к $z_т$ при $n \to \infty$, если:

а) $z_т$ принадлежит классу возможных решений M;

б) множество M — компакт.

Пусть оператор A непрерывен и вместо точной правой части $u_т$ мы имеем элемент u_δ такой, что $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$, причем u_δ принадлежит множеству AM (образу множества M при отображении его с помощью оператора A) и M есть компакт. Пусть $\{\delta_n\}$ — последовательность положительных чисел таких, что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого n методом подбора можно найти такой элемент z_n^δ, что $\rho_U\left(Az_n^\delta, u_\delta\right) \leqslant \delta_n$. Элементы z_n^δ будут близки к решению $z_т$ уравнения $Az = u_т$. В самом деле, при отображении с помощью непрерывного оператора образ AM компакта M есть компакт и, следовательно, по лемме обратное отображение, осуществляемое оператором A^{-1}, непрерывно на AM. Так как

$$\rho_U\left(Az_n^\delta, u\ \right) \leqslant \rho_U\left(Az_n, u_\delta\right) + \rho_U\left(u_\delta, u_т\right),$$

то

$$\rho_U\left(Az_n^\delta, u_т\right) \leqslant \delta_n + \delta = \gamma_n^\delta.$$

Из этого неравенства и из непрерывности обратного отображения $AM \to M$ следует, что $\rho_F\left(z_n^\delta, z_т\right) \leqslant \varepsilon\left(\gamma_n^\delta\right)$, причем $\varepsilon\left(\gamma_n^\delta\right) \to 0$ при $\gamma_n^\delta \to 0$. Таким образом, при нахождении приближения z_n^δ к $z_т$ надо учитывать уровень погрешности δ правой части u_δ.

3. На основе изложенных соображений М. М. Лаврентьев сформулировал [106] понятие *корректности по Тихонову*. В применении к уравнению (1; 0,1) задача называется *корректной по Тихонову*, если известно, что для точного значения $u = u_т$ существует единственное решение $z_т$ уравнения (1; 0,1), $Az_т = u_т$, принадлежащее заданному компакту M. В этом случае оператор A^{-1} непрерывен на множестве $N = AM$ и, если вместо элемента $u_т$ нам известен элемент u_δ такой, что $\rho_U(u_т, u_\delta) \leqslant \delta$ и

$u_\delta \in N$, то в качестве приближенного решения уравнения (1; 0,1) с правой частью $u = u_\delta$ можно взять элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$. При $\delta \to 0$ $(u_\delta \in N)$ z_δ будет стремиться к $z_т$. Множество F_1 $(F_1 \subset F)$, на котором задача нахождения решения уравнения (1; 0,1) является корректно поставленной, называют *классом корректности*. Так, если оператор A непрерывен и осуществляет взаимно однозначное отображение, то компакт M, к которому принадлежит $z_т$, является классом корректности для уравнения (1; 0,1). Таким образом, если задача (1; 0,1) корректна по Тихонову и правая часть уравнения $u \in AM$, то метод подбора с успехом может быть применен к решению такой задачи. На первый вопрос дан исчерпывающий ответ.

Рассмотрим задачу решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$A_1 z \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \quad u(x) \in L_2, \quad (1;1,1)$$

на множестве M_1 монотонно убывающих (возрастающих) и равномерно ограниченных функций $|z(s)| \leqslant B$. Она корректна по Тихонову, так как множество M_1 — компакт в пространстве L_2 [48].

Действительно, возьмем любую последовательность $E \equiv \{z_1(s), z_2(s), \ldots, z_n(s), \ldots\}$ из M_1. Согласно теореме Хелли о выборе *) существуют подпоследовательность

$$E_1 \equiv \{z_{n_1}(s), z_{n_2}(s), \ldots, z_{n_k}(s), \ldots\},$$

последовательности E и функция $\bar{z}(s)$ из множества M_1, $\bar{z}(s) \in L_2$, такие, что

$$\lim_{n_k \to \infty} z_{n_k}(s) = \bar{z}(s)$$

всюду, кроме, может быть, счетного множества точек разрыва функции $\bar{z}(s)$. Из поточечной сходимости подпоследовательности E_1 к функции $\bar{z}(s)$ всюду, кроме, может быть, счетного множества точек, следует, как

*) Титчмарш Е. Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями 2-го порядка.— М.: 1961.

известно*), сходимость подпоследовательности $\bar{E}_1$ к функции $\bar{z}(s)$ по метрике L_2.

Таким образом, в качестве приближенного решения на множестве M_1 уравнения (1; 1,1) с приближенно известной правой частью $\tilde{u} \in AM_1$ можно брать точное решение этого уравнения с правой частью $u = \tilde{u}$. Эта последняя задача, как известно, эквивалентна задаче нахождения на множестве M_1 функции, минимизирующей функционал

$$N[z, \tilde{u}] = \| A_1 z - \tilde{u} \|^2_{L_2}.$$

Пусть $\rho_U(u_т, \tilde{u}) \leqslant \delta$. Тогда, очевидно, в качестве приближенного решения уравнения (1; 1,1) можно брать функцию z_δ, для которой

$$\| A_1 z_\delta - \tilde{u} \|^2_{L_2} \leqslant \delta^2. \qquad (1;\,1{,}2)$$

В [48] дается подробное описание алгоритма нахождения приближенных решений уравнения (1; 1,1) в классе монотонных функций.

Если заменить интегральный оператор $A_1 z$ интегральной суммой на фиксированной сетке с n узлами и обозначить значения искомой функции в узловых точках через z_i, то задача построения приближенного решения уравнения (1; 1,1) сведется к задаче нахождения конечномерного вектора, минимизирующего функционал $N[z, \tilde{u}]$ и удовлетворяющего неравенству (1; 1,2).

В ряде других случаев компактные классы корректности можно указать эффективно, что дает возможность строить устойчивые приближенные решения.

4. В силу погрешности исходных данных элемент u может не принадлежать множеству AM. В этих условиях уравнение (1; 0,1) не имеет решения (классического) и возникает вопрос: что надо понимать под приближенным решением уравнения (1; 0,1)?

В этом случае вводится понятие квазирешения и метод подбора при условии компактности множества M позволяет найти приближение к квазирешению. В следующем

---

*) Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М.: Наука, 1966.

параграфе вопрос о квазирешении рассматривается подробнее. В монографии [88] дается исчерпывающее изложение теории квазирешений и методов приближенного нахождения их.

§ 2. Квазирешения

1. Пусть оператор A в уравнении (1; 0,1) — вполне непрерывный. Построение устойчивого к малым изменениям правой части u приближенного решения уравнения (1; 0,1) по формуле

$$z = A^{-1}u \qquad (1;\ 2,1)$$

возможно в тех случаях, как отмечалось в § 1, когда решение ищется на компакте $M \subset F$ и правая часть уравнения принадлежит множеству $N = AM$.

Обычно не существует эффективных критериев, позволяющих установить принадлежность элемента u множеству N. Это приходится предполагать известным априори. В практических задачах часто вместо точного значения правой части $u_т$ нам известно ее приближенное значение $\tilde{u}$, которое может не принадлежать множеству $N = AM$. В этих случаях нельзя строить приближенное решение уравнения (1; 0,1) по формуле (1; 2,1), так как символ $A^{-1}\tilde{u}$ может не иметь смысла.

2. Стремление устранить затруднения, связанные с отсутствием решения уравнения (1; 0,1) при неточной правой части, привело В. К. Иванова [78, 79] к понятию квазирешения уравнения (1; 0,1) — обобщению понятия решения этого уравнения.

Элемент $\tilde{z} \in M$, минимизирующий при данном u функционал $\rho_U(Az, u)$ на множестве M, называется *квазирешением* уравнения (1; 0,1) на M,

$$\rho_U(A\tilde{z}, u) = \inf_{z \in M} \rho_U(Az, u).$$

Если M — компакт, то квазирешение, очевидно, существует для любого $u \in U$ и если, кроме того, $u \in AM$, то квазирешение $\tilde{z}$ совпадает с обычным (точным) решением уравнения (1; 0,1). Квазирешение может быть и не одно. В этом случае под квазирешением будем разуметь любой элемент из множества квазирешений D.

Можно указать достаточные условия, при которых квазирешение единственно и непрерывно зависит от правой части u.

Напомним определение. Пусть элемент y и множество Q принадлежат пространству U. Элемент q множества Q называется *проекцией* элемента y на множество Q, $q = Py$, если выполняется равенство

$$\rho_U(y, q) = \rho_U(y, Q),$$

где

$$\rho^U(y, Q) = \inf_{h \in Q} \rho_U(y, h).$$

Теорема 1. *Если уравнение $Az = u$ может иметь на компакте M не более одного решения и проекция каждого элемента $u \in U$ на множество $N = AM$ единственна, то квазирешение уравнения* (2; 0,1) *единственно и непрерывно зависит от правой части u.*

Доказательство. Пусть $\tilde{z}$ — квазирешение и $\tilde{u} = A\tilde{z}$. Очевидно, $\tilde{u}$ есть проекция элемента u на множество $N = AM$. По условию теоремы она определяется однозначно. Отсюда, в силу взаимной однозначности отображения множества M на множество N, следует единственность квазирешения $\tilde{z}$.

Очевидно, что $\tilde{z} = A^{-1}\tilde{u} = A^{-1}Pu$. Согласно лемме о непрерывности обратного отображения компакта (§ 1) оператор A^{-1} непрерывен на N. Оператор проектирования P непрерывен на U*). Поэтому $A^{-1}P$ — непрерывный на U оператор и, следовательно, квазирешение $\tilde{z}$ непрерывно зависит от правой части u.

Таким образом, при переходе к квазирешению восстанавливаются все условия корректности, т. е. задача нахождения квазирешения уравнения (1; 0,1) на компакте M является корректно поставленной.

Если условие единственности решения уравнения (1; 0,1) не выполнено, то квазирешения образуют некоторое множество D элементов компакта M. В этом случае без упомянутых в теореме 1 ограничений на множество N имеет место непрерывная зависимость множества квазирешений D от u в смысле непрерывности многозначных отображений. Нетрудно провести доказательство этого утверждения (см. [79, 113]), для чего необходимо ввести

---

*) Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Гостехиздат, 1951.

ряд новых понятий. Мы не будем останавливаться на этом. Для случая, когда уравнение (1; 0,1) линейно, легко получить более общие результаты, содержащиеся в следующей теореме [79].

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1; 0,1) *линейно, однородное уравнение* $Az = 0$ *имеет только нулевое решение, множество* M *выпукло, а всякая сфера в пространстве* U *строго выпукла. Тогда квазирешение уравнения* (1; 0,1) *на компакте* M *единственно и непрерывно зависит от правой части* u.

Доказательство. Пусть $\tilde{z}$ — квазирешение и $\tilde{u} = A\tilde{z}$. Так как множество M выпукло, то в силу линейности оператора A множество $N = AM$ также выпукло. Очевидно, что $\tilde{u}$ есть проекция элемента u на множество N. В силу того, что сфера в пространстве U по условию теоремы строго выпукла, проекция $\tilde{u}$ определяется однозначно. Далее доказательство завершается, как в теореме 1.

3. Пусть F и U — гильбертовы пространства, $M \equiv S_R$ — шар ($\|z\| \leqslant R$) в пространстве F и A — вполне непрерывный линейный оператор.

В этом случае квазирешение уравнения (1; 0,1) можно представить в виде ряда по собственным элементам (функциям, векторам) φ_n оператора A^*A, где A^* — оператор, сопряженный оператору A.

Известно, что A^*A — самосопряженный положительный вполне непрерывный оператор из F в F. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots$ — полная система его собственных значений, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — отвечающая им полная ортонормированная система его собственных элементов (функций, векторов). Элемент A^*u можно представить в виде ряда

$$A^*u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n. \qquad (1;2,2)$$

В этих условиях справедлива [79]

Теорема 3. *Квазирешение уравнения* (1; 0,1) *на множестве* S_R *выражается формулами:*

$$\tilde{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n} \varphi_n, \qquad (1;2,3)$$

если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\lambda_n^2} < R^2, \qquad (1;2,4)$$

и

$$\tilde{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\beta + \lambda_n} \varphi_n,$$

если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\lambda_n^2} \geqslant R^2. \qquad (1;2,5)$$

Здесь β — *корень уравнения*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{(\lambda_n + \beta)^2} = R^2. \qquad (1;2,6)$$

Доказательство. Квазирешение минимизирует функционал

$$\rho_U^2(Az, u) = (Az - u, Az - u) \qquad (1;2,7)$$

(где (v, w) — скалярное произведение элементов v и w из U), уравнение Эйлера для которого имеет вид

$$A^*Az = A^*u. \qquad (1;2,8)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда по системе $\{\varphi_n\}$:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n. \qquad (1;2,9)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1; 2,8) и используя разложение (1; 2,2), находим $c_n = b_n/\lambda_n$. Следовательно, неравенство (1; 2,4) означает, что $\|z\| < R$ и речь идет о нахождении безусловного экстремума функционала (1; 2,7). Ряд (1; 2,3) и будет решением задачи.

Если же выполняется неравенство (1; 2,5), то это означает, что $\|z\| \geqslant R$ и надо решать задачу на условный экстремум функционала (1; 2,7) при условии, что $\|z\|^2 = R^2$. Методом неопределенных множителей Лагранжа эта задача сводится к нахождению безусловного экстремума функционала

$$(Az - u, Az - u) + \beta(z, z),$$

а последняя — к решению отвечающего ему уравнения Эйлера $A^*Az+\beta z=A^*u$. Подставляя сюда z в виде ряда (1; 2,9) и используя разложение (1; 2,2), находим

$$c_n=\frac{b_n}{\beta+\lambda_n}.$$

Параметр β определяем из условия $\|z\|^2=R^2$, которое эквивалентно (1; 2,6).

§ 3. Приближенное нахождение квазирешений

В предыдущем параграфе мы видели, что нахождение квазирешения связано с нахождением элемента в бесконечномерном пространстве. Для приближенного нахождения квазирешения естественно переходить к конечномерному пространству. Можно указать достаточно общий подход к приближенному нахождению квазирешений уравнения (1; 0,1) [66, 79], в котором A — вполне непрерывный оператор.

Будем полагать, что выполнены указанные в § 2 достаточные условия существования единственного квазирешения на заданном множестве M, т. е. полагаем, что множество M — выпуклый компакт и сфера в пространстве U строго выпукла. Пусть

$$M_1\subset M_2\subset\ldots\subset M_n\subset\ldots$$

— возрастающая цепочка компактных замкнутых множеств M_n такая, что замыкание их объединения $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ совпадает с M. Квазирешение уравнения (1; 0,1) существует на каждом множестве M_n. Но оно может быть не единственным. Обозначим через T_n совокупность всех квазирешений на множестве M_n.

Покажем, что в качестве приближения к квазирешению $\tilde{z}$ на множестве M можно брать любой элемент $\tilde{z}_n$ из T_n. При этом

$$\lim_{n\to\infty}\rho_F\left(\tilde{z}_n,\tilde{z}\right)=0.$$

Пусть $N_n=AM_n$ и B_n — множество проекций элемента u на множество N_n. Очевидно, что $B_n=AT_n$ и $N_1\subseteq N_2\subseteq\ldots\subseteq N_n$; тогда

$$\rho_U(u,\ N_1)\geqslant\ldots\geqslant\rho_U(u,\ N_n)\geqslant\ldots\geqslant\rho_U(u,\ N)=\rho_U(u,\ A\tilde{z}).\tag{1; 3,1}$$

Так как множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ всюду плотно на N, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$

$$\rho_U(u, N_n) < \rho_U(u, N) + \varepsilon. \qquad (1;\ 3,2)$$

Из (1; 3,1) и (1; 3,2) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho_U(u, N_n) = \rho_U(u, N). \qquad (1;3,3)$$

Поскольку

$$\rho_U(u, N_n) = \rho_U(u, B_n),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \rho_U(u, B_n) = \rho_U(u, A\tilde{z}). \qquad (1;3,4)$$

Каждое множество B_n есть компакт, так как оно является замкнутым подмножеством компакта N_n. Поэтому в B_n найдется такой элемент y_n, что

$$\rho_U(y_n, u) = \inf_{y\in B_n} \rho_U(y, u).$$

Последовательность $\{y_n\}$ имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую N, так как N — компакт. Пусть y_0 — какая-нибудь предельная точка множества $\{y_n\}$ и $\{y_{n_k}\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к y_0, т. е.

$$\lim_{n_k\to\infty} \rho_U(y_{n_k}, y_0) = 0.$$

Из (1; 3,3) и (1; 3,4) следует, что

$$\rho_U(u, y_0) = \lim_{n_k\to\infty} \rho_U(u, y_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} \rho_U(u, B_{n_k}) =$$
$$= \rho_U(u, A\tilde{z}) = \rho_U(u, N).$$

Таким образом,

$$\rho_U(u, y_0) = \rho_U(u, N).$$

Отсюда и из единственности квазирешения на множестве M следует, что

$$y_0 = A\tilde{z}.$$

Так как y_0 — произвольная предельная точка множества

$\{y_n\}$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится $A\tilde{z}$. Это и означает, что в качестве приближения к квазирешению можно брать любой элемент $\tilde{z}_n$ из множества T_n, так как в силу леммы § 1 $\tilde{z}_n \to \bar{z}$ при $n \to \infty$.

Если в качестве M_n брать конечномерные (n-мерные) множества, то задача нахождения приближенного квазирешения на компакте M сводится к минимизации функционала $\rho_U(Az, u)$ на множестве M_n, т. е. к нахождению минимума функции n переменных.

Квазирешения изучались также в работах [59, 60, 64, 65, 67, 81, 113].

§ 4. Замена уравнения $Az=u$ близким ему

Уравнения вида (1; 0,1), в которых правая часть u не принадлежит множеству $N = AM$, изучались М. М. Лаврентьевым [104—106]. Ему принадлежит идея замены исходного уравнения (1; 0,1) близким ему, в некотором смысле, уравнением, для которого задача нахождения решения устойчива к малым изменениям правой части и разрешима для любой правой части $u \in U$. В простейшем случае это делается следующим образом.

Пусть $F \equiv U \equiv H$ — гильбертовы пространства, A — линейный, ограниченный, положительный и самосопряженный оператор, $S_R \equiv \{x, \ \|x\| \leqslant R, \ x \in F\}$ есть шар радиуса R в пространстве F, B — вполне непрерывный оператор, определенный на S_R при любом $R > 0$. В качестве класса корректности M берется множество $D_R = BS_R$ — образ шара S_R при отображении с помощью оператора B. Предполагается, что искомое точное решение $z_т$ уравнения (1; 0,1) с правой частью $u = u_т$ существует и принадлежит множеству D_R. Уравнение (1; 0,1) заменяется уравнением

$$(A + \alpha E)z \equiv Az + \alpha z = u, \qquad (1;\ 4{,}1)$$

где $\alpha > 0$ — числовой параметр. Решение уравнения (1; 4,1)

$$z_\alpha = (A + \alpha E)^{-1}u, \qquad (1;\ 4{,}2)$$

при соответствующем выборе параметра α, принимается за приближенное решение уравнения (1; 0,1). Здесь E — единичный оператор.

Замечание. Для оценки уклонения $\rho_F(z_т, z_\delta)$ приближенного решения от точного можно использовать модуль непрерывности ω обратного оператора на N.

Пусть $u_1, u_2 \in N$ и $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \delta$. Тогда

$$\omega(\delta, N) = \sup_{u_1, u_2 \in N} \rho_F(A^{-1}u_1, A^{-1}u_2).$$

Очевидно, что если $\rho_U(u_т, u_\delta) \leqslant \delta$ и $z_\delta = A^{-1}u_\delta$, то

$$\rho_F(z_т, z_\delta) \leqslant \omega(\delta, N).$$

Вернемся к уравнению (1; 4,1). Если $\|Az\| \leqslant \delta$ и $\omega(\delta, D_R) = \sup_{D_R} \|z\|$, то легко получить оценку уклонения z_α от $z_т$. Очевидно, что

$$\|z_\alpha - z_т\| \leqslant \|\bar{z}_\alpha - z_т\| + \|z_\alpha - \bar{z}_\alpha\|, \qquad (1;\ 4{,}3)$$

где

$$\bar{z}_\alpha = (A + \alpha E)^{-1} u_т.$$

Следовательно,

$$\|z_\alpha - z_т\| \leqslant \omega(\delta, D_R) + \delta/\alpha. \qquad (1;\ 4{,}4)$$

Если известен модуль непрерывности $\omega(\delta, D_R)$ или его мажоранта, то из (1; 4,4) можно найти значение параметра α как функцию δ, при котором правая часть в неравенстве (1; 4,4) будет минимальной.

§ 5. Метод квазиобращения

1. Известно, что задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным течением времени является неустойчивой к малым изменениям начальных значений. Неустойчивость сохраняется и в случаях, когда решение подчиняется некоторым дополнительным граничным условиям. Для устойчивого решения таких задач разработан метод квазиобращения [111]. Мы изложим существо его для простейшего уравнения теплопроводности, не вдаваясь в вопросы обоснования. Подробное изложение в применении к более широкому классу задач содержится в [111].

2. Рассмотрим прямую задачу. Пусть D — конечная область n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S, а t — время. Пусть, далее, $\varphi(x)$ — заданная непрерывная в D функция. Прямая задача состоит в нахождении решения $u = u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad (1;\ 5{,}1)$$

в области $G \equiv \{x \in D,\ t > 0\}$, удовлетворяющего граничным условиям

$$u(x, t) = 0 \text{ при } x \in S \qquad (1;\ 5{,}2)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x). \qquad (1;\ 5{,}3)$$

Здесь

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Известно, что решение такой задачи существует. Каждой функции $\varphi(x) \in C$ отвечает решение задачи (1; 5,1) — (1; 5,3). Будем обозначать его через $u(x, t; \varphi)$.

Обратная задача состоит в нахождении функции $\varphi(x)$ по известной функции $u(x, t; \varphi)$. В реальных задачах функция $u(x, t; \varphi)$ обычно получается в результате измерений и, следовательно, известна приближенно. Будем полагать, что $u \in L_2$. Такая функция может и не соответствовать никакой «начальной» функции $\varphi(x)$. Таким образом, может не существовать в классе функций C решения обратной задачи. Поэтому будем рассматривать задачу нахождения некоторого обобщенного решения обратной задачи.

Пусть заданы число $T > 0$ и функция $\psi(x)$, определенная в области D, $\psi(x) \in L_2$. На функциях $\varphi(x)$ класса C определен функционал

$$f(\varphi) = \int_D |u(x, t; \varphi) - \psi(x)|^2 dx.$$

Обобщенным решением обратной задачи будем называть функцию $\varphi(x)$, на которой достигается

$$f_0 = \inf_{\varphi \in C} f(\varphi).$$

Замечание. «Естественный» подход к решению этой задачи — выбрать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы $f(\varphi) = 0$.

Для этого достаточно найти решение прямой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0;$$

$$u(x, t) = 0 \text{ для } x \in S,\ 0 < t < T;$$

$$u(x, T) = \psi(x)$$

и положить $\varphi(x) = u(x, 0)$. Но такая задача при заданной функции $\psi(x)$ из L_2, вообще говоря, неразрешима и, кроме того, неустойчива к малым изменениям функции $\psi(x)$.

На некотором классе обобщенных функций $\varphi(x)$ $f_0 = 0$ (см. [111]). Поэтому рассматривается задача нахождения приближенного значения f_0 с заданным уровнем погрешности.

Для заданного числа $\varepsilon > 0$ *найти функцию* $\varphi_\varepsilon(x)$, *на которой* $f(\varphi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Эта задача и решается методом квазиобращения.

Идея метода квазиобращения состоит в том, что вместо оператора теплопроводности $\partial/\partial t - \Delta$ находится «близкий» ему оператор B_α, для которого задача с обращением отсчета времени

$$B_\alpha u_\alpha = 0,\ x \in D,\ t < T, \quad \alpha > 0;$$

$$u_\alpha(x, T) = \psi(x);$$

$$u_\alpha(x, t) = 0 \text{ для } x \in S, \quad t < T$$

устойчива. Решив эту задачу, полагают $\varphi(x) = u_\alpha(x, 0)$. Обычно в качестве оператора B_α берут оператор $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \alpha\Delta^2$ и решают прямую задачу

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \Delta u_\alpha - \alpha\Delta^2 u_\alpha = 0, \quad x \in D, \quad t < T, \quad \alpha > 0;$$

$$u_\alpha(x, T) = \psi(x);$$

$$u_\alpha(x, t) = 0 \text{ для } x \in S, \quad 0 < t \leqslant T;$$

$$\Delta u_\alpha = 0 \text{ для } x \in S,\ 0 < t \leqslant T.$$

Затем полагают

$$\varphi(x) = u_\alpha(x, 0).$$

Следует отметить, что u_α не сходится в обычном смысле при $\alpha \to 0$.

Описанный метод квазиобращения применим для более широкого класса задач, относящихся к эволюционным уравнениям (см. [111]).

Глава II

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В главе I рассмотрены случаи, когда класс возможных решений уравнения (1; 0,1) является компактом. Однако для ряда прикладных задач характерна ситуация, когда этот класс F не является компактом, и, кроме того, изменения правой части уравнения

$$Az = u, \qquad (2;\ 0,1)$$

связанные с ее приближенным характером, могут выводить за пределы множества AF — образа множества F при отображении его с помощью оператора A. Такие задачи будем называть *существенно некорректными*. В [165, 166] разработан новый подход к решению некорректно поставленных задач, позволяющий строить приближенные решения уравнения (2; 0,1), устойчивые к малым изменениям исходных данных, для существенно некорректных задач. В основе этого подхода лежит фундаментальное понятие регуляризирующего оператора (Р. О.) [166]. Для упрощения изложения в настоящей главе, кроме специально оговоренных мест, мы будем полагать, что в уравнении (2; 0,1) приближенной может быть лишь правая часть u, а оператор A известен точно.

§ 1. Понятие регуляризирующего оператора

1. Пусть оператор A в уравнении (2; 0,1) таков, что обратный ему оператор A^{-1} не является непрерывным на множестве AF и множество возможных решений F не является компактом.

Пусть $z_т$ есть решение уравнения $Az = u_т$, т. е. $Az_т = u_т$. Часто вместо $u_т$ мы имеем некоторый элемент u_δ и известное число $\delta > 0$ такие, что $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$, т. е. вместо точных исходных данных $(u_т, A)$ мы имеем приближенные исходные данные (u_δ, A) и оценку их погрешности δ. Задача состоит в том, чтобы по известным исходным данным (u_δ, A, δ) найти приближение z_δ к элементу $z_т$, обладающее свойством устойчивости к малым изменениям u_δ. Очевидно, что в качестве приближенного решения z_δ уравнения (2; 0,1) нельзя брать точное решение этого уравнения с приближенной правой частью $u = u_\delta$, т. е. элемент z_δ, определяемый по формуле

$$z_\delta = A^{-1}u_\delta,$$

так как оно существует не для всякого элемента $u \in U$ и не обладает свойством устойчивости к малым изменениям правой части u.

Числовой параметр δ характеризует погрешность правой части уравнения (2; 0,1). Поэтому представляется естественным определить z_δ с помощью оператора, зависящего от параметра, значения которого надо брать согласованными с погрешностью δ исходных данных u_δ. Эта согласованность должна быть такой, чтобы при $\delta \to 0$, т. е. при приближении (в метрике пространства U) правой части u_δ уравнения (2; 0,1) к точному значению $u_т$, приближенное решение z_δ стремилось бы (в метрике пространства F) к искомому точному решению $z_т$ уравнения $Az = u_т$.

Пусть элементы $z_т \in F$ и $u_т \in U$ связаны соотношением $Az_т = u_т$.

Определение 1. Оператор $R(u, \delta)$, действующий из пространства U в пространство F, называется *регуляризирующим* для уравнения $Az = u$ (относительно элемента $u_т$), если он обладает свойствами:

1) существует такое число $\delta_1 > 0$, что оператор $R(u, \delta)$ определен для всякого δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_1$, и любого $u_\delta \in U$ такого, что

$$\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta;$$

2) для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, u_\delta) \leqslant \delta_1$ такое, что из неравенства

$$\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta \leqslant \delta_0$$

следует неравенство

$$\rho_F(z_\delta, z_т) \leqslant \varepsilon,$$

где

$$z_\delta = R(u_\delta, \delta).$$

Здесь не предполагается, вообще говоря, однозначность оператора $R(u, \delta)$. Через z_δ обозначается произвольный элемент из множества $\{R(u_\delta, \delta)\}$ значений оператора $R(u_\delta, \delta)$.

2. В ряде случаев целесообразнее пользоваться другим определением регуляризирующего оператора (Р. О.).

Определение 2. Оператор $R(u, \alpha)$, зависящий от параметра α и действующий из U в F, называется *регуляризирующим* для уравнения $Az = u$ (относительно элемента u_T), если он обладает свойствами:

1) существуют такие числа $\delta_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$, что оператор $R(u, \alpha)$ определен для всякого α, принадлежащего промежутку $(0, \alpha_1)$, и любого $u \in U$, для которого

$$\rho_U(u, u_T) \leqslant \delta_1;$$

2) существует такой функционал $\alpha = \alpha(u, \delta)$, определенный на множестве $U_{\delta_1} \equiv \{u;\ \rho\ (u, u_T) \leqslant \delta_1\}$ элементов $u \in U$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) \leqslant \delta_1$ такое, что если $\tilde{u} \in U$ и $\rho_U(\tilde{u}, u_T) \leqslant \delta \leqslant \delta(\varepsilon)$, то

$$\rho_F(z_T, z_\alpha) \leqslant \varepsilon,$$

где

$$z_\alpha = R(\tilde{u}, \alpha(\tilde{u}, \delta)).$$

В этом определении не предполагается однозначность оператора $R(\tilde{u}, \alpha(\tilde{u}, \delta))$. Следует отметить, что при $\alpha = \delta$ получаем определение 1 *).

3. Если $\rho_U(u_T, u_\delta) \leqslant \delta$, то согласно [165, 166] в качестве приближенного решения уравнения (2; 0,1) с приближенно известной правой частью u_δ можно брать элемент $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha)$, полученный с помощью регуляризирующего оператора $R(u, \alpha)$, где $\alpha = \alpha(u_\delta) = \alpha_1(\delta)$ согласовано с погрешностью исходных данных u_δ. Это решение называется *регуляризованным решением* уравнения (2; 0,1). Числовой параметр α называется *параметром регуляризации*. Очевидно, что всякий регуляризирующий оператор вместе с выбором параметра регуляризации α, согласованного с погрешностью исходных данных u_δ, $\alpha = \alpha(u_\delta)$, определяет устойчивый к малым изменениям правой части u метод построения приближенных решений уравнения (2; 0,1). Если известно, что $\rho_U(u_T, u_\delta) \leqslant \delta$, то согласно определению регуляризирующего оператора можно так выбрать значение параметра регуляризации $\alpha = \alpha(u_\delta)$,

---

*) В дальнейшем при пользовании определениями 1 и 2 мы будем опускать слова «относительно элемента u_T».

что при $\delta \to 0$ регуляризованное решение $z_\alpha = R(u_\delta, \alpha(u_\delta))$ стремится (в метрике F) к искомому точному решению $z_т$, т. е. $\rho_F(z_т, z_{\alpha(u_\delta)}) \to 0$. Это и оправдывает предложение брать в качестве приближенного решения уравнения (2; 0,1) регуляризованное решение.

Таким образом, задача нахождения приближенного решения уравнения (2; 0,1), устойчивого к малым изменениям правой части, сводится:

а) к нахождению регуляризирующих операторов;

б) к определению параметра регуляризации α по дополнительной информации о задаче, например, по величине погрешности, с которой задается правая часть u_δ.

Описанный метод построения приближенных решений называется *методом регуляризации*.

4. Отметим, что регуляризирующие операторы, зависящие от параметра, использовались в математике со времен Ньютона. Так, классическая задача приближенного вычисления производной $z = \frac{du(x)}{dx}$ по приближенным (в метрике C) значениям $u(x)$ может решаться с помощью оператора

$$R(u, \alpha) = \frac{u(x+\alpha) - u(x)}{\alpha}.$$

В самом деле, пусть вместо точных значений функции $u(x)$ мы имеем приближенные значения $u_\delta(x) = u(x) + v(x)$, где $|v(x)| \leqslant \delta$ для всякого x. Тогда

$$R(u_\delta, \alpha) = \frac{u(x+\alpha) - u(x)}{\alpha} + \frac{v(x+\alpha) - v(x)}{\alpha}.$$

При $\alpha \to 0$ первая дробь стремится к производной du/dx. Оценим вторую дробь

$$\left|\frac{v(x+\alpha) - v(x)}{\alpha}\right| \leqslant \frac{2\delta}{\alpha}.$$

Если брать $\alpha = \delta/\eta(\delta)$, где $\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то $2\delta/\alpha = 2\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и, следовательно, при

$$\alpha = \alpha_1(\delta) = \frac{\delta}{\eta(\delta)} \quad R(u_\delta, \alpha_1(\delta)) \to \frac{du}{dx}.$$

Другая классическая задача — задача восстановления функции по ее приближенно известным коэффициентам Фурье (задача суммирования рядов Фурье) — также решается с помощью регуляризирующих операторов.

В самом деле, пусть для всякого x, принадлежащего некоторому конечному промежутку, $z(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\varphi_k(x)$ есть ряд Фурье функции $z(x)$ по полной ортонормированной системе функций $\{\varphi_k(x)\}$ таких, что для всякого k $\sup\limits_{x}|\varphi_k(x)|\leqslant M$*). Пусть вместо последовательности $u\equiv\{u_k\}$ коэффициентов Фурье нам известны их приближенные значения $\tilde{u}\equiv\{\tilde{u}_k\}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k-\tilde{u}_k)^2\leqslant\delta^2,$$

и

$$\tilde{z}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k\varphi_k(x).$$

Как было показано во Введении, в метрике C функции $z(x)$ и $\tilde{z}(x)$ в фиксированной точке x_0 могут различаться как угодно сильно. Поэтому нельзя брать в качестве приближенного значения функции $z(x)$ в точке x_0 значение $\tilde{z}(x_0)$. Устойчивое (к малым изменениям δ) приближенное значение $z(x)$ дается с помощью оператора $R(\tilde{u},\alpha)=$ $=R\left(\tilde{u},\frac{1}{n}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{u}_k\varphi_k(x_0)\left(\alpha=\frac{1}{n}\right)$, если n брать равным целой части функции $\frac{\eta(\delta)}{\delta^2}$, т. е. $n=n(\delta)=\left[\frac{\eta(\delta)}{\delta^2}\right]$, где при $\delta\to 0$ $\eta(\delta)\to 0$, а $n(\delta)\to\infty$.

В самом деле, так как для всякого k $|\varphi_k(x)|\leqslant M$, то

$$\left|z(x_0)-\sum_{k=1}^{n(\delta)}\tilde{u}_k\varphi_k(x_0)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n(\delta)}(u_k-\tilde{u}_k)\varphi_k(x_0)\right|+\left|\sum_{k=n(\delta)+1}^{\infty}u_k\varphi_k(x_0)\right|.$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k\varphi_k(x_0)$ сходится, то его остаток $\sum\limits_{k=n(\delta)+1}^{\infty}u_k\varphi_k(x_0)$ стремится к нулю при $n(\delta)\to\infty$. Далее, применяя неравенство Коши — Буняковского,

*) Это условие обычно выполняется. Например, оно выполняется для систем тригонометрических функций $\{\sin kx, \cos kx\}$.

получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n(\delta)}\left(u_k-\tilde{u}_k\right)\varphi_k(x_0)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n(\delta)}\left|u_k-\tilde{u}_k\right|\left|\varphi_k(x_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n(\delta)}\left(u_k-\tilde{u}_k\right)^2 \sum_{k=1}^{n(\delta)}\varphi_k^2(x_0)\right\}^{1/2} \leqslant M\left\{n(\delta)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{n(\delta)}\left|u_k-\tilde{u}_k\right|^2\right\}^{1/2} \leqslant M\sqrt{n(\delta)\,\delta^2} = M\sqrt{\left[\frac{\eta(\delta)}{\delta^2}\right]\delta^2} \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Операторы $R(u, \alpha)$, зависящие от числового параметра α, использовались в математике и при рассмотрении ряда других задач.

5. Описанные в п. 4 примеры применения регуляризирующих операторов, зависящих от параметра, обобщают хорошо известные правила практических вычислений. В математике издавна приближенные значения производных вычислялись как разностные отношения. При этом приращения аргументов брались не слишком малыми по сравнению с погрешностью значений функции. Суммировались и ряды Фурье с приближенными коэффициентами. При этом в качестве приближенной суммы ряда брались частные суммы ряда с не слишком большим числом членов. Это была интуитивная регуляризация, регуляризация по здравому смыслу.

Аналогично, т. е. с регуляризацией по здравому смыслу, решались и некоторые другие неустойчивые задачи. Описанный выше метод регуляризации, основанный на использовании понятия регуляризирующего оператора, можно рассматривать как формализацию и обоснование давно используемой регуляризации по здравому смыслу и распространение такого подхода к построению приближенных решений на широкий класс задач.

§ 2. Вариационный принцип отбора возможных решений. Существование регуляризирующих операторов.

1. Будем предполагать, что уравнение $Az = u_т$ с непрерывным оператором A имеет единственное решение $z_т$ и вместо $u_т$ нам дан элемент u_δ. Пусть известно, что уклонение правой части u_δ от $u_т$ не превосходит δ, т. е. $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$. Тогда приближенные решения естественно искать в классе Q_δ элементов $z \in F$, сопоставимых по

точности с исходными данными, т. е. таких, что $\rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \delta$. Класс Q_δ есть множество возможных решений. Однако нельзя брать в качестве приближенного решения уравнения (2; 0,1) с приближенной правой частью $u = u_\delta$ произвольный элемент z_δ из Q_δ, так как такое «приближенное решение» не будет, вообще говоря, устойчивым относительно малых изменений правой части. Множество Q_δ — слишком широкое. Необходим п р и н ц и п о т б о р а возможных решений, обеспечивающий получение в качестве приближенного решения такого элемента (или элементов) из Q_δ, который был бы устойчивым к малым изменениям правой части. В качестве такого принципа можно брать описываемый ниже вариационный принцип, который также применим и для построения приближений к квазирешению $\tilde{z}$, если такое существует.

Отбор можно осуществлять с помощью специальных, заранее задаваемых функционалов $\Omega[z]$, входящих в постановку задачи.

Неотрицательный функционал $\Omega[z]$, определенный на всюду плотном в F подмножестве F_1 множества F, называется *стабилизирующим функционалом*, если:

а) элемент $z_т$ принадлежит его области определения;

б) для всякого числа $d > 0$ множество $F_{1,d}$ элементов z из F_1, для которых $\Omega[z] \leqslant d$, компактно на F.

2. Упомянутый выше отбор возможных решений можно осуществлять с помощью стабилизирующих функционалов, и реализуется он следующим образом.

Пусть $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на подмножестве F_1 множества F (F_1 может совпадать с F *)). Будем рассматривать только такие элементы множества Q_δ, на которых определен функционал $\Omega[z]$, т. е. будем рассматривать лишь элементы z множества $F_{1,\delta} = F_1 \cap Q_\delta$. Среди элементов этого множества найдем такой (такие) элемент z_δ, который минимизирует функционал $\Omega[z]$ **). Элемент z_δ можно рассматривать как результат применения к правой части $u = u_\delta$ уравнения (2; 0,1) некоторого оператора $\widetilde{R}$, зависящего от параметра δ, т. е.

$$z_\delta = \widetilde{R}(u_\delta, \delta).$$

*) Например, в конечномерном случае.

**) Существование такого элемента будет доказано ниже (стр. 62) при дополнительных ограничениях на $\Omega[z]$.

Предположим, что такой элемент существует для любых $\delta > 0$ и $u_\delta \in U$; тогда

$$z_\delta = \tilde{R}(u_\delta, \delta)$$

можно брать в качестве приближенного решения уравнения $Az = u_\delta$, так как при этих условиях справедлива

Теорема 1. *Оператор $\tilde{R}(u, \delta)$ является регуляризирующим оператором для уравнения $Az = u$.*

Для доказательства этой теоремы воспользуемся определением 1 регуляризирующего оператора. Мы предположили, что для всякого $\delta > 0$ и любого $u_\delta \in U$ существует элемент $z_\delta \in F_1$, минимизирующий функционал $\Omega[z]$ на множества $F_{1,\delta} = Q_\delta \cap F_1$. Следовательно, оператор $\tilde{R}(u_\delta, \delta)$ определен для всякого $\delta > 0$ и любого $u_\delta \in U$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор $\tilde{R}(u, \delta)$ обладает свойством 2) определения.

Доказательство. Поскольку элемент z_δ минимизирует функционал $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$ и $z_т \in F_{1,\delta}$, то очевидно, что

$$\Omega[z_\delta] \leqslant \Omega[z_т].$$

Таким образом, элемент z_δ принадлежит компактному на F множеству

$$F_т \equiv \{z;\ \Omega[z] \leqslant \Omega[z_т]\}.$$

Пусть задана последовательность $\{u_n\}$ такая, что $\rho_U(u, u_n) \leqslant \delta_n$, где $\{\delta_n\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, т. е. $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого δ_n определено множество Q_{δ_n}. Пусть

$$F_{1,\delta_n} = Q_{\delta_n} \cap F_1.$$

В каждом из множеств F_{1,δ_n} по предположению существует элемент z_{δ_n}, минимизирующий функционал $\Omega[z]$ на этом множестве. Таким образом, последовательности чисел $\{\delta_n\}$ отвечает последовательность элементов $\{z_{\delta_n}\}$, принадлежащих компактному на F множеству $F_т$. Следовательно, из $\{z_{\delta_n}\}$ можно выделить сходящуюся (в метрике F) подпоследовательность

$$\{z_{\delta_{n_k}}\}.$$

Пусть

$$\tilde{z} = \lim_{n_k \to \infty} z_{\delta_{n_k}}.$$

Так как $z_{\delta_n} \in F_{1,\delta_n} \subset Q_{\delta_n}$, то для всякого элемента $z_{\delta_{n_k}}$ подпоследовательности выполняется неравенство

$$\rho_U \left(Az_{\delta_{n_k}}, u_{\delta_{n_k}} \right) \leqslant \delta_{n_k}.$$

Переходя в нем к пределу при $n_k \to \infty$ и используя непрерывность оператора A, получим

$$\rho_U (A\tilde{z}, u_т) = 0.$$

Следовательно, $A\tilde{z} = u_т$. В силу единственности решения уравнения (2; 0,1) с правой частью $u = u_т$ имеем $\tilde{z} = z_т$. Таким образом,

$$\lim_{n_k \to \infty} z_{\delta_{n_k}} = z_т.$$

И так для всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{z_{\delta_n}\}$. Отсюда следует, что для любой последовательности $\{\delta_n\}$ положительных чисел δ_n, сходящейся к нулю, соответствующая последовательность $\{z_{\delta_n}\}$ сходится (по метрике пространства F) к элементу $z_т$. Это и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что из неравенства $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta \leqslant \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\rho_F(z_\delta, z_т) \leqslant \varepsilon$.

Справедливость свойства 2) определения Р. О. для оператора $\overset{\infty}{R}(u, \delta)$ доказана и, следовательно, оператор $\tilde{R}(u, \delta)$ является регуляризирующим для уравнения (2; 0,1).

3. Доказательство существования элемента $z_\delta \in F_1$, минимизирующего функционал $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta} = Q_\delta \cap F_1$, можно провести, например, при описываемых ниже дополнительных требованиях на стабилизирующий функционал $\Omega[z]$.

Пусть F — метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$. Будем говорить, что неотрицательный функционал $\Omega[z]$, определенный на множестве $F_1 \subset F$, *порождает метризацию* множества F_1 с мажорантной метрикой $\rho_1(\cdot, \cdot)$, если на элементах $z \in F_1$ функционал $\|z\|_1 = \{\Omega[z]\}^{1/2}$ обладает свойствами нормы, причем для любых z_1, z_2 из F_1

$$\rho_1(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|_1 \geqslant \rho(z_1, z_2).$$

Пусть $\widehat{F}_1$ — пространство с такой метрикой на множестве F_1. Пространство $\widehat{F}_1$ будем называть пространством, *порожденным* функционалом $\Omega[z]$.

Теорема 2. *Пусть F — линейное метрическое пространство с метрикой $\rho(z_1, z_2)$ и стабилизирующий функционал $\Omega[z]$, определенный на множестве $F_1 \subset F$, порождает на F_1 гильбертово пространство $\widehat{F}_1$ с мажорантной метрикой $\rho_1(\cdot, \cdot)$.*

Тогда, каково бы ни было $\delta > 0$, на множестве $F_{1,\delta}$ существует элемент z_δ, реализующий точную нижнюю грань функционала $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$.

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из приводимой ниже леммы. Напомним, что функционал $f[z]$, определенный на метрическом пространстве F, называется *непрерывным* на F, если для всякой последовательности $\{z_n\} \subset F$, сходящейся по метрике F к элементу $\tilde{z} \in F$, последовательность его значений $\{f[z_n]\}$ сходится к $f[\tilde{z}]$.

Лемма. *Пусть F — линейное метрическое пространство, B — его замкнутое множество и $f[z]$ — неотрицательный функционал, определенный и непрерывный на F. Пусть, далее, $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на множестве $F_1 \subset F$ и порождающий на F_1 гильбертово пространство $\widehat{F}_1$ с мажорантной метрикой.*

Тогда точная нижняя грань на множестве $F_{1,B} = B \cap F_1$ функционала $\tilde{\Omega}[z] = f[z] + \alpha\Omega[z]$, где $\alpha > 0$, реализуется на элементе $\tilde{z} \in F_1$.

Доказательство. Так как $\tilde{\Omega}[z]$ — неотрицательный функционал, то существуют

$$\tilde{\Omega}_0 = \inf_{z \in F_{1,B}} \tilde{\Omega}[z]$$

и минимизирующая последовательность $\{z_n^\alpha\} \subset F_{1,B}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\Omega}[z_n^\alpha] = \tilde{\Omega}_0$. Пусть $\tilde{\Omega}[z_n^\alpha] \equiv \tilde{\Omega}_n$. Не ограничивая общности результатов, можно полагать, что для $\forall\, n > 1$ $\tilde{\Omega}_n \leqslant \tilde{\Omega}_{n-1}$. Следовательно, для $\forall\, n > 1$ $\tilde{\Omega}[z_n^\alpha] \leqslant \tilde{\Omega}_1$. Таким образом, последовательность $\{z_n^\alpha\}$ принадлежит множеству элементов z из F_1, для которых $\alpha\Omega[z] \leqslant \tilde{\Omega}_1$.

Так как это множество, согласно определению стабилизирующего функционала $\Omega[z]$, компактно на F, то из последовательности $\{z_n^\alpha\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся (по метрике F) к некоторому элементу $z_\alpha \in F$. Ради упрощения записей сохраним для элементов этой подпоследовательности те же обозначения, т. е. пусть $\{z_n^\alpha\}$ сходится (по метрике F) к z_α.

Покажем, что последовательность $\{z_n^\alpha\}$ сходится по норме пространства $\hat{F}_1$. Предположим, что это неверно. Тогда существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такие последовательности целых положительных чисел $\{m\}$ и $\{p_m\}$, что для всех m и p_m из этих последовательностей

$$\left\| z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha \right\|_1 \geqslant \varepsilon_0.$$

Здесь $\|z\|_1$ — норма элемента z в пространстве $\hat{F}_1$.

Пусть $\beta_m = z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha$ и $\xi_m = 0{,}5\left(z_m^\alpha + z_{m+p_m}^\alpha\right)$. Очевидно, что $\xi_m = z_m^\alpha - 0{,}5\beta_m = z_{m+p_m}^\alpha + 0{,}5\beta_m$ и

$$\tilde{\Omega}[\xi_m] = f[\xi_m] + \alpha\left[\left\| z_m^\alpha \right\|_1^2 - \left(z_m^\alpha, \beta_m\right)_1 + \right.$$
$$\left. + 0{,}25\|\beta_m\|_1^2\right] \geqslant \tilde{\Omega}_0. \qquad (2;2,1)$$

Так как $\rho_F(\xi_m, z_\alpha) \to 0$ и $\rho_F(\xi_m, z_m^\alpha) \to 0$ при $m \to \infty$, то в силу непрерывности $f[z]$ имеем

$$f[\xi_m] = f\left[z_m^\alpha\right] + \Delta'_m, \qquad (2;2,2)$$

где $\Delta'_m \to 0$ при $m \to \infty$. Учитывая сходимость последовательности $\{\tilde{\Omega}_m\}$ к $\tilde{\Omega}_0$, из (2; 2,1) и (2; 2,2) получаем

$$\alpha\left[-\left(z_m^\alpha, \beta_m\right)_1 + 0{,}25\|\beta_m\|_1^2\right] \geqslant \tilde{\Omega}_0 - \tilde{\Omega}_m - |\Delta'_m| = -\Delta''_m, \qquad (2;2,3)$$

где $\Delta''_m > 0$ и $\Delta''_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Аналогично, пользуясь формулой $\xi_m = z_{m+p_m}^\alpha + 0{,}5\beta_m$, получим неравенство

$$\alpha\left[\left(z_{m+p_m}^\alpha, \beta_m\right)_1 + 0{,}25\|\beta_m\|_1^2\right] \geqslant -\Delta'''_m, \qquad (2;2,4)$$

где $\Delta'''_m > 0$ и $\Delta'''_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Складывая неравенства (2; 2,3), (2; 2,4) почленно, получаем

$$\alpha\left[-\left(z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha, \beta_m\right)_1 + 0,5\|\beta_m\|_1^2\right] =$$

$$= \frac{-\alpha}{2}\|\beta_m\|_1^2 \geqslant -\left(\Delta_m'' + \Delta_m'''\right).$$

Следовательно,

$$\|\beta_m\|_1^2 = \left\|z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha\right\|_1^2 \leqslant \frac{2}{\alpha}\left(\Delta_m'' + \Delta_m'''\right).$$

Так как $\Delta_m'' + \Delta_m''' \to 0$ при $m \to \infty$, то найдется такое $m(\varepsilon_0)$, что для $m \geqslant m(\varepsilon_0)$ будем иметь

$$\left\|z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha\right\|_1^2 < \varepsilon_0/2,$$

что противоречит предположению.

Таким образом, последовательность $\{z_n^\alpha\}$ является фундаментальной по норме пространства $\widehat{F}_1$. В силу полноты пространства $\widehat{F}_1$ она сходится по метрике $\widehat{F}_1$ (а тем самым и по метрике F) к некоторому элементу $\widetilde{z}_\alpha \in F_1$. Но поскольку последовательность $\{z_n^\alpha\}$ сходится по метрике F к элементу z_α, то $z_\alpha = \widetilde{z}_\alpha$. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 достаточно применить эту лемму для случая, когда $f[z] \equiv 0$ и $\alpha = 1$.

Таким образом доказывается существование регуляризирующих операторов для любого уравнения вида (2; 0,1) с непрерывным оператором A, действующим из линейного метрического пространства F, обратный к которому A^{-1} может быть определенным не на всяком элементе $u \in U$ и не является непрерывным.

Замечание. Если решение уравнения $Az = u_т$ не единственно, то описанным методом также строится регуляризирующий оператор. В этом случае всякая сходящаяся подпоследовательность $\{z_{\delta_n}\}$ сходится к одному из решений уравнения (2; 0,1) с правой частью $u = u_т$, хотя различные подпоследовательности могут сходиться к различным решениям.

4. Таким образом, при описанном подходе, т. е. при использовании вариационного метода нахождения регуляризованного приближенного решения уравнения (2; 0,1) с приближенной правой частью $u = u_\delta$, $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$, за-

дача нахождения приближенного решения z_δ состоит в нахождении элемента z_δ минимизирующего функционал $\Omega[z]$ на множестве

$$F_{1,\delta} = Q_\delta \cap F_1 = \{z;\ z \in F_1,\ \rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \delta\},$$

где $Q_\delta \equiv \{z;\ \rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \delta\}$.

Задачи такого типа можно решать различными прямыми методами минимизации функционалов. Следует, однако, отметить, что численное решение их прямыми методами на ЭВМ в ряде случаев затруднительно. Поэтому целесообразно рассмотреть и другие методы решения таких задач. В следующем параграфе рассматривается один из таких методов. Он состоит в редукции при некоторых условиях исходной вариационной задачи с ограничениями в виде неравенств к вариационной задаче с ограничениями классического типа (в виде равенств $\rho_U(Az, u_\delta) = \delta$) и последующем применении метода неопределенных множителей Лагранжа (короче, метода Лагранжа).

§ 3. Метод Лагранжа построения регуляризирующих операторов

1. Пусть M_0 есть множество всех элементов z из F_1, на которых функционал $\Omega[z]$ достигает своей точной нижней грани Ω_0 на множестве F_1, т. е. $M_0 \equiv \{z;\ \Omega[z] = \Omega_0\}$, где

$$\Omega_0 = \inf_{z \in F_1} \Omega[z].$$

Предположим для простоты, что M_0 состоит из одного элемента z_0*). Допустимы две возможности: 1) множества M_0 и $F_{1,\delta}$ пересекаются, т. е. $\rho_U(Az_0, u_\delta) \leqslant \delta$; 2) множества M_0 и $F_{1,\delta}$ не пересекаются, т. е. $\rho_U(Az_0, u_\delta) > \delta$.

Рассмотрим обе возможности. В первом случае решением вариационной задачи на минимум функционала $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$ является элемент z_0. Это решение устойчиво к малым изменениям u_δ. В самом деле, при любом $\varepsilon > 0$ оно принадлежит компактному на F множеству D_ε элементов z, для которых $\Omega[z] \leqslant \Omega_0 + \varepsilon$. Отображение, осуществляемое оператором A, непрерывно и

*) В случае, когда множество M_0 состоит более чем из одного элемента, устойчивость решения понимается в смысле непрерывности многозначных отображений.

взаимно однозначно. Следовательно, согласно лемме гл. I, § 1, обратное ему отображение также непрерывно. В дальнейшем будем полагать, что $F_{1,\delta}$ не содержит точек множества M_0.

Прежде чем рассматривать вторую возможность, введем следующее определение. Стабилизирующий функционал $\Omega[z]$ будем называть *квазимонотонным* *), если каков бы ни был элемент $\tilde{z}$ из F_1, не принадлежащий множеству M_0, в любой его окрестности найдется элемент z_1 из F_1, для которого $\Omega[z_1] < \Omega[\tilde{z}]$, т. е. если функционал не имеет локальных минимумов на множестве $F_1 \setminus M_0$.

Обратимся к рассмотрению второй возможности. В этом случае задачу минимизации функционала $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$ можно свести к классической задаче на условный экстремум функционала $\Omega[z]$, значительно более удобной для численного решения на ЭВМ. Это можно сделать с помощью следующей леммы.

Лемма. *Точная нижняя грань на множестве $F_{1,\delta}$ квазимонотонного функционала $\Omega[z]$ такого, что множество $M_0 \cap F_{1,\delta}$ пусто, достигается на элементе z_δ, для которого $\rho_U(Az_\delta, u_\delta) = \delta$.*

Доказательство. Допустим, что

$$\inf_{z \in F_{1,\delta}} \Omega[z]$$

достигается на элементе z_δ из $F_{1,\delta}$, для которого

$$\rho_U(Az_\delta, u_\delta) = \beta < \delta.$$

По условию, наложенному на величину погрешности δ, $z_0 \notin F_{1,\delta}$, т. е.

$$\rho_U(Az_0, u_\delta) > \delta.$$

Следовательно, $z_\delta \neq z_0$. В силу непрерывности оператора A на F существует такая окрестность $O(z, z_\delta)$ элемента z_δ, для всех элементов которой

$$\rho_U(Az, Az_\delta) < \frac{\delta - \beta}{2}.$$

Для всякого z из этой окрестности выполняется неравенство

$$\rho_U(Az, u_\delta) < \delta,$$

*) М. М. Лаврентьев и другие авторы использовали этот термин ранее, вкладывая в него другое содержание.

так как

$$\rho_U(Az, u_\delta) \leqslant \rho_U(Az, Az_\delta) + \rho_U(Az_\delta, u_\delta) <$$
$$< \frac{\delta-\beta}{2} + \beta = \frac{\delta+\beta}{2} < \delta.$$

Следовательно,

$$O(z, z_\delta) \subset Q_\delta.$$

Из квазимонотонности стабилизирующего функционала $\Omega[z]$ следует существование в окрестности $O(z, z_\delta)$ элемента $z_{\delta,1}$ из F_1, для которого

$$\Omega[z_{\delta,1}] < \Omega[z_\delta]. \qquad (2;\ 3{,}1)$$

Так как элемент $z_{\delta,1}$ принадлежит множествам Q_δ и F_1, а следовательно, и множеству $F_{1,\delta}$, то неравенство (2; 3,1) противоречит тому, что на z_δ функционал $\Omega[z]$ достигает своей нижней грани на множестве $F_{1,\delta}$. Лемма доказана.

2. Пользуясь этой леммой, вместо задачи минимизации функционала $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$ можно искать решение задачи на минимум функционала $\Omega[z]$ на множестве F_1 при условии, что на искомом элементе z выполняется равенство

$$\rho_U(Az, u_\delta) = \delta.$$

Это классическая задача вариационного исчисления на условный минимум. Будем решать ее методом неопределенных множителей Лагранжа, т. е. будем искать элемент z_α, на котором функционал

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \rho_U^2(Az, u_\delta) + \alpha\Omega[z] \qquad (2;\ 3{,}2)$$

достигает своей точной нижней грани, а параметр α — определять из условия

$$\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta. \qquad (2;\ 3{,}3)$$

Число $\rho_U(Az, u_\delta)$ часто называют *невязкой* уравнения $Az = u_\delta$ на элементе z.

3. Будем говорить, что метод Лагранжа реализуется, если для всякого $u_\delta \in U$ и любого $\alpha > 0$, принадлежащего некоторому промежутку $(0, \alpha_1)$,

а) существует элемент z_α из $F_{1,\delta}$, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$;

б) существует такое значение α, для которого $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$.

Ниже доказывается существование элемента z_α (см. теорему 3), минимизирующего функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$, для произвольного непрерывного оператора A, действующего из линейного метрического пространства F в метрическое пространство U, и любого стабилизирующего функционала $\Omega[z]$, определенного на множестве $F_1 \subset F$, порождающего гильбертово пространство $\widehat{F}_1$ с мажорантной метрикой. В следующем параграфе рассматриваются условия разрешимости уравнения $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$ относительно α. В частности, доказывается однозначная разрешимость его для линейных непрерывных операторов A, если пространство U гильбертово, функционал $\Omega[z]$ при всяком $z \in F_1$ имеет не равную нулю (при $z \neq 0$) производную Фреше $\Omega'[z]$ и $\delta < \rho_U(Az_0, u_\delta)$, где $z_0 \in M_0$. Таким образом, в этих условиях устанавливается реализуемость метода Лагранжа.

Теорема 3. *Пусть A — непрерывный оператор из линейного метрического пространства F в метрическое пространство U и $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на множестве $F_1 \subset F$, порождающий гильбертово пространство $\widehat{F}_1$ с мажорантной метрикой. Тогда для всякого элемента $u \in U$ и любого $\alpha > 0$ существует элемент $z^\alpha \in F_1$, на котором функционал*

$$M^\alpha[z, u] = \rho_U^2(Az, u) + \alpha\Omega[z]$$

достигает своей точной нижней грани на множестве F_1, т. е.

$$M_0^\alpha = \inf_{z \in F_1} M^\alpha[z, u] = M^\alpha[z_\alpha, u].$$

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из леммы § 2, если положить в ней $B \equiv F_1$ и $f[z] = \rho_U^2(Az, u)$.

Таким образом, на элементах $u \in U$ и для всех положительных чисел $\alpha > 0$ определен оператор $R_1(u, \alpha)$ со значениями из F_1 такой, что элемент

$$z_\alpha = R_1(u, \alpha)$$

минимизирует функционал $M^\alpha[z, u]$.

Замечание. Если A есть линейный интегральный оператор с ядром $K(x, s)$, то уравнение $Az = u$ имеет вид

$$\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \quad c \leqslant x \leqslant d.$$

Если в качестве F брать пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций, а стабилизирующий функционал $\Omega[z]$ взять вида

$$\Omega[z] = \int_a^b \left\{ q(s) z^2 + p(s) \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right\} ds,$$

где $q(s)$ и $p(s)$ — заданные непрерывные на $[a, b]$ функции, такие, что $q(s) \geqslant 0$, $p(s) \geqslant p_0 > 0$, то для этого случая справедлива теорема 3 (см. также гл. IV).

Можно указать достаточные условия, при которых элемент z_α — единственный. Это справедливо, например, если оператор A — линейный, F — гильбертово пространство и $\Omega[z]$ — квадратический стабилизирующий функционал. В частности, это справедливо для линейных интегральных уравнений.

В самом деле, предположим, что существуют два элемента $z_\alpha^{(1)}$ и $z_\alpha^{(2)}$, на которых достигается точная нижняя грань функционала $M^\alpha[z, u]$. Рассмотрим элементы пространства F_1, расположенные на отрезке прямой (пространства F), соединяющей $z_\alpha^{(1)}$ и $z_\alpha^{(2)}$:

$$z = z_\alpha^{(1)} + \beta \left(z_\alpha^{(2)} - z_\alpha^{(1)} \right).$$

Функционал $M^\alpha[z, u]$ на элементах этой прямой есть неотрицательная квадратическая функция от β; следовательно, она не может достигать наименьшего значения при двух различных значениях β: $\beta = 0$ $\left(z = z_\alpha^{(1)}\right)$ и $\beta = 1$ $\left(z = z_\alpha^{(2)}\right)$. Для нелинейного оператора A элемент z_α может быть неединственным.

4. Если метод Лагранжа реализуем, т. е. существует такое α, что $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$, то исходная вариационная задача эквивалентна задаче на минимум функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$. В самом деле, если α выбрано так, что $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$, то решение исходной вариационной задачи z_δ также дает минимум функционалу $M^\alpha[z, u_\delta]$, и, наоборот, если z_α минимизирует функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$ при условии $\rho_U(Az, u_\delta) = \delta$, то на том же элементе z_α достигается минимум функционала $\Omega[z]$.

Элемент z_α можно рассматривать как результат применения к правой части $u = u_\delta$ уравнения (2; 0,1) некоторого оператора R_1, зависящего от параметра α, т. е.

$$z_\alpha = R_1(u_\delta, \alpha), \qquad (2;\ 3,4)$$

в котором $\alpha = \alpha(\delta)$ определяется по невязке, т. е. из соотношения $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$.

В силу эквивалентности исходной вариационной задачи задаче минимизации функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ с определением параметра α по невязке оператор $R_1(u_\delta, \alpha(\delta))$ согласно § 2 является регуляризирующим для уравнения $Az = u$.

5. Следует заметить, что функционал $M^\alpha[z, u]$ можно ввести в рассмотрение формально, не связывая его с задачей на условный экстремум функционала $\Omega[z]$, и искать элемент z_α, минимизирующий его на множестве F_1. При этом возникает задача нахождения параметра регуляризации α, как такого функционала от u, $\alpha = \alpha(u)$, для которого оператор $R_1(u, \alpha(u))$, определяющий элемент

$$z_\alpha = R_1(u, \alpha(u)),$$

минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u]$, был бы регуляризующим для уравнения (2; 0,1). При определенных условиях (см. § 4) такой функционал является функцией от δ, $\alpha = \alpha(\delta)$, которая может быть найдена, например, из соотношения $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$. Из последующих рассмотрений (см. § 6) будет видно, что существует множество таких функций $\alpha(\delta)$. Возможность использования различных функций $\alpha(\delta)$ в регуляризующем операторе $R_1(u, \alpha(\delta))$ связана с неединственностью регуляризирующего оператора для уравнения (2; 0,1).

В связи со сказанным, естественной представляется задача нахождения оптимального (в заранее определенном смысле) значения параметра регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$. Для некоторых операторов A типа свертки эта задача будет рассмотрена в гл. VI.

6. Следует отметить, что в то время как исходная задача (2; 0,1) не обладает свойством устойчивости, задача минимизации функционала $M^\alpha[z, u]$, как было показано, обладает устойчивостью к малым изменениям правой части u. Эта устойчивость была достигнута сужением класса возможных решений с помощью введения в рассмотрение функционала $\Omega[z]$ с описанными выше свойствами. Он играет, таким образом, стабилизирующую роль. Поэтому его и называют *стабилизирующим функционалом* для задачи (2; 0,1), или *стабилизатором*.

Выбор стабилизирующего функционала $\Omega[z]$ часто подсказывается характером задачи (см., например, гл. III). Однако в ряде случаев выбор его неоднозначен.

Функционал $M^\alpha[z, u]$ будем называть *сглаживающим.*

7. Основные результаты, изложенные в §§ 1—3, распространены разными авторами на другие классы операторов: замкнутые, замыкаемые, монотонные (в том числе и разрывные), а также на более широкий класс пространств (см., например. [113, 116, 127]).

Рассматривались и другие способы построения регуляризованных решений (см., [17, 18, 21, 98, 99, 111]), в том числе проекционные методы (см. [85, 156]).

§ 4. Определение параметра регуляризации по невязке

Вопрос об определении параметра регуляризации мы будем рассматривать здесь лишь для регуляризирующих операторов $R_1(u, \alpha)$, получаемых вариационным способом (см. §§ 1—3).

При рассмотрении конкретных задач, как правило, затруднительно фактически найти параметр регуляризации α как такую функцию погрешности исходных данных δ. $\alpha = \alpha(\delta)$, для которой оператор $R_1(u, \alpha(\delta))$ является регуляризирующим. Во многих случаях мы знаем число δ, характеризующее погрешность исходной информации. И задача состоит в том, чтобы найти отвечающее ему значение параметра регуляризации α из числа допустимых значений, т. е. таких, которые являются значениями одной из функций $\alpha = \alpha(\delta)$, для которой оператор $R_1(u, \alpha(\delta))$ является регуляризирующим. Выбор допустимого значения параметра регуляризации существенно зависит от той информации, которую мы имеем относительно приближенной исходной информации. В литературе описаны различные способы нахождения такого значения α. Ниже мы рассмотрим некоторые из них.

1. Определение α по невязке. Пусть мы имеем приближенную правую часть u_δ уравнения (2; 0,1) с известной погрешностью δ, т. е. $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$. Тогда при некоторых ограничениях (см. ниже) параметр регуляризации α можно определять по невязке, т. е. из соотношения

$$\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta. \qquad (2;\ 4{,}1)$$

Рассмотрим условия разрешимости этого уравнения. Обозначим через $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ значения $M^\alpha[z_\alpha, u]$, $\rho_U^2(Az_\alpha, u)$, $\Omega[z_\alpha]$. При этом, если множество элементов $F^\alpha \equiv \{z_\alpha\}$, на которых достигается $\inf M^\alpha[z, u]$, состоит более чем из одного элемента, то $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ будут многозначными функциями. Рассмотрим некоторые свойства функций $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$.

Лемма 1. *Функции $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ являются монотонными функциями, $m(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ — неубывающими, а $\psi(\alpha)$ — невозрастающей.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$ и

$$\varphi_i = \rho_U^2\left(Az_{\alpha_i}, u\right), \quad \psi_i = \Omega\left[z_{\alpha_i}\right], \quad m_i = M^{\alpha_i}\left[z_{\alpha_i}, u\right],$$
$$i = 1, 2,$$

причем z_{α_i} — любой элемент из множества F^{α_i}. Имеют место неравенства

$$m_2 = \varphi_2 + \alpha_2\psi_2 \geqslant \varphi_2 + \alpha_1\psi_2 \geqslant \varphi_1 + \alpha_1\psi_1 = m_1, \quad (2;\ 4{,}2)$$

из которых следует монотонность функции $m(\alpha)$. Далее, $\varphi_1 + \alpha_1\psi_1 \leqslant \varphi_2 + \alpha_1\psi_2$ и $\varphi_2 + \alpha_2\psi_2 \leqslant \varphi_1 + \alpha_2\psi_1$.

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\psi_1 \leqslant (\alpha_1 - \alpha_2)\psi_2.$$

Так как $\alpha_1 < \alpha_2$, то $\psi_1 \geqslant \psi_2$. Из этого результата и из второго неравенства (2; 4,2) следует, что $\varphi_2 \geqslant \varphi_1$ *).

Замечание. Если множество $F^\alpha \equiv \{z_\alpha\}$ состоит более чем из одного элемента, то, хотя функция $m(\alpha)$ по своему определению однозначна, функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ могут быть многозначными, так как на разных элементах z_α из F^α в $m(\alpha) = \varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha)$ слагаемые $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ могут иметь различные значения. Монотонность, доказанная в лемме, относится к любым значениям этих функций.

Лемма 2. *Если для всякого $u \in U$ и любого $\alpha > 0$ элемент z_α, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u]$ на множестве F_1,— единственный, оператор A — линейный, пространство U — гильбертово и функционал $\Omega[z]$ при всяком $z \in F_1$ имеет не равную нулю (при $z \neq 0$) производную Фреше $\Omega'[z]$, то функции $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ $\psi(\alpha)$ строго монотонны.*

Доказательство. Как и прежде, можно полагать, что z_α не принадлежит множеству M_0 (см. стр. 65); следовательно, для всякого $\alpha > 0$ $\psi(\alpha) = \Omega[z_\alpha] > 0$.

---

*) Рахматуллина А. Х. Некорректно поставленные задачи и методы их решения.— М.: ИПМ АН СССР, 1972.

Пусть $\alpha_2 > \alpha_1$. Тогда

$$m(\alpha_2) = \varphi(\alpha_2) + \alpha_2\psi(\alpha_2) > \varphi(\alpha_2) + \alpha_1\psi(\alpha_2) \geqslant \geqslant \varphi(\alpha_1) + \alpha_1\psi_1(\alpha_1) = m(\alpha_1),$$

т. е. $m(\alpha_2) > m(\alpha_1)$.

Покажем, далее, что $z_{\alpha_1} \neq z_{\alpha_2}$. В самом деле, на элементах z_{α_1} и z_{α_2} удовлетворяется необходимое условие минимума функционала $M^\alpha[z, u]$, т. е. удовлетворяется уравнение Эйлера. Таким образом,

$$A^*Az_{\alpha_1} + \alpha_1\Omega'[z_{\alpha_1}] = A^*u, \quad A^*Az_{\alpha_2} + \alpha_2\Omega'[z_{\alpha_2}] = A^*u.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим

$$A^*Az_{\alpha_1} - A^*Az_{\alpha_2} = \alpha_2\Omega'[z_{\alpha_1}] - \alpha_1\Omega'[z_{\alpha_1}]. \qquad (2;\ 4{,}3)$$

Если $z_{\alpha_1} = z_{\alpha_2}$, то $(\alpha_2 - \alpha_1)\Omega'[z_{\alpha_1}] = 0$. Так как по условию $\Omega'[z_{\alpha_1}] \neq 0$ и $\alpha_2 > \alpha_1$, то последнее равенство невозможно, следовательно, $z_{\alpha_1} \neq z_{\alpha_2}$.Из единственности элемента z_α, минимизирующего функционал $M^\alpha[z, u]$, и несовпадения элементов z_{α_1} и z_{α_2} при $\alpha_1 < \alpha_2$ следует, что $M^{\alpha_1}[z_{\alpha_1}, u] < M^{\alpha_1}[z_{\alpha_2}, u]$, т. е.

$$\varphi(\alpha_1) + \alpha_1\psi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2) + \alpha_1\psi(\alpha_2) \qquad (2;\ 4{,}4)$$

и, аналогично,

$$\varphi(\alpha_1) + \alpha_2\psi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2) + \alpha_2\psi(\alpha_2).$$

Из этих неравенств получаем

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\psi(\alpha_1) < (\alpha_1 - \alpha_2)\psi(\alpha_2).$$

Так как $\alpha_1 < \alpha_2$, то отсюда получаем $\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2)$. Пользуясь этим неравенством и тем, что $\psi(\alpha_1) > 0$ и $\psi(\alpha_2) > 0$, из (2; 4,4) находим $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)$. Лемма доказана.

Отметим, что для доказательства неравенства $m(\alpha_1) < m(\alpha_2)$ нам понадобилось лишь одно условие леммы — единственность элемента z_α (это условие выполняется, например, в случаях, когда A — линейный оператор, U — гильбертово пространство и $\Omega[z]$ — квадратичный функционал (см. стр. 69)).

Докажем полунепрерывность слева и справа функций $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$. Для этого предварительно докажем следующую лемму.

Пусть последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$ сходится к $\alpha_0 > 0$ и $\{z_{\alpha_n}\}$ — некоторая последовательность соответствующих элементов z_{α_n} из множеств F^{α_n}.

Лемма 3. *Если последовательность $\{z_{\alpha_n}\}$ — сходящаяся, то она сходится к элементу из F^{α_0}, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} z_{\alpha_n} = \bar{z} \in F^{\alpha_0}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} M^{\alpha_n}\left[z_{\alpha_n}, u\right] = M^{\alpha_0}\left[\bar{z}, u\right],$$

так как слагаемые функционала $M^{\alpha}[z, u]$ непрерывны по z и α. Допустим, что элемент $\bar{z}$ не принадлежит множеству F^{α_0}, т. е. не реализует минимума функционала $M^{\alpha_0}[z, u]$. Тогда существует элемент $z^1_{\alpha_0} \in F^{\alpha_0}$ такой, что

$$M^{\alpha_0}\left[z^1_{\alpha_0}, u\right] = M^{\alpha_0}\left[\bar{z}, u\right] - \beta, \text{ где } \beta > 0.$$

Это предположение приводит к противоречию, так как в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0}, u] = M^{\alpha_0}[z_{\alpha_0}, u] = M^{\alpha_0}\left[\bar{z}, u\right] - \beta$$

и, тем самым, начиная с некоторого $n(\beta)$, для всех $n \geqslant n(\beta)$

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0}, u] < M^{\alpha_0}\left[\bar{z}, u\right] - \beta/2.$$

С другой стороны,

$$M^{\alpha_n}\left[z_{\alpha_n}, u\right] > M^{\alpha_0}\left[\bar{z}, u\right] - \beta/2.$$

Следовательно,

$$M^{\alpha_n}\left[z_{\alpha_n}, u\right] > M^{\alpha_n}[z_{\alpha_0}, u],$$

что противоречит определению элемента z_{α_n}. Лемма доказана.

Лемма 4. *Функции $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ полунепрерывны слева и справа при каждом $\alpha > 0$.*

Так как доказательства этих утверждений одинаковы, приведем доказательство полунепрерывности функции $\varphi(\alpha)$ слева.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — возрастающая и сходящаяся к $\alpha_0 > 0$ последовательность положительных чисел. Ей отвечает последовательность множеств $\{F^{\alpha_n}\}$ элементов z_{α_n}, минимизирующих функционал $M^{\alpha_n}[z, u]$. Рассмотрим произвольную последовательность элементов $\{z_{\alpha_n}\}$, $z_{\alpha_n} \in F^{\alpha_n}$. Эта последовательность принадлежит компактному множеству (начиная с некоторого n, $z_{\alpha_n} \in \in \{z;\ \Omega[z] \leqslant \Omega[z_{\alpha_0-\varepsilon}],\ \varepsilon > 0\}$. Следовательно, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не меняя обозначений, будем считать, что $\{z_{\alpha_n}\}$ и есть эта подпоследовательность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\alpha_n} = \bar{z}$. По лемме 3 $\bar{z} \in \in F^{\alpha_0}$. Тогда

$$\rho_U\left(Az_{\alpha_n}, u\right)$$

сходится к

$$\rho_U\left(Az_{\alpha_0}, u\right).$$

Согласно лемме 1 последовательность $\{\varphi(\alpha_n)\}$ — неубывающая. Она сходится к некоторому числу $\bar{\varphi}$, которое является нижней границей множества значений $\{\varphi(\alpha_0)\}$. Если бы это было не так, то существовало бы такое значение $\tilde{\varphi}(\alpha_0)$, которое меньше $\bar{\varphi}$. Тогда для достаточно больших n найдутся элементы z_{α_n} из F^{α_n}, для которых $\varphi(\alpha_n)$ будет также меньше $\bar{\varphi}$, что нарушает монотонность функции $\varphi(\alpha)$. Отсюда следует, что для любой подпоследовательности исходной последовательности $\{z_{\alpha_n}\}$ соответствующая подпоследовательность $\{\varphi(\alpha_n)\}$ сходится к $\bar{\varphi}$. Это означает, что и вся последовательность $\{\varphi(\alpha_n)\}$ сходится к $\bar{\varphi}$. Полунепрерывность слева доказана.

Принимая во внимание, что

$$m(\alpha) = M^{\alpha}[z_\alpha, u]$$

по своему определению является однозначной функцией переменной α, непосредственно получаем

Следствие. *Функция $m(\alpha)$ является непрерывной неубывающей функцией α.*

Отметим, что если множество AF всюду плотно на U, то $m(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$ (и $m(0) = 0$). Это следует из того, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такой элемент

z^1 и такое $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, что

$$M^\alpha [z^1, u] = \rho_U^2 (Az^1, u) + \alpha\Omega [z^1] < \varepsilon$$

при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Для этого z^1 следует выбрать так, чтобы

$$\rho_U^2 (Az^1, u) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \alpha(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2\Omega [z^1]}.$$

Возможность этого следует из того, что AF всюду плотно на U.

Отметим также, что $\varphi(0) = 0$. Это следует из того, что

$$\varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha) = m(\alpha) \to 0 \text{ при } \alpha \to 0.$$

Из приведенных лемм непосредственно следует

Теорема 4. *Если $\varphi(\alpha)$ — однозначная функция, то для всякого положительного числа*

$$\delta < \rho_U (Az_0, u), \text{ где } z_0 \in \left\{z; \Omega [z] = \inf_{Y \in F_1} \Omega [Y]\right\}$$

существует $\alpha(\delta)$ такое что $\rho_U (Az_{\alpha(\delta)}, u) = \delta$.

Если оператор A — линейный, пространство U — гильбертово и функционал $\Omega[z]$ при всяком $z \in F_1$ имеет не равную нулю (при $z \neq 0$) производную Фреше $\Omega'[z]$ (например, если $\Omega[z]$ — квадратичный), то согласно лемме 2 $\alpha(\delta)$ определяется однозначно.

Отметим, что однозначность функции $\varphi(\alpha)$ имеет место, например, в случае, когда элемент z_α — единственный (см. стр. 69).

2. При сохранении всех перечисленных условий, кроме существования не равной нулю производной Фреше $\Omega'[z]$ у функционала $\Omega[z]$, параметр α из уравнения $\varphi(\alpha) = \delta^2$, может определяться неоднозначно. Это можно увидеть на приводимом ниже примере.

Пример. Пусть F и U — пространства неотрицательных вещественных чисел z и u с нормами $\|z\| = |z|$, $\|u\| = |u|$. Пусть, далее, $Az \equiv z$ и

$$\Omega [z] = \begin{cases} z_1^2 + \dfrac{1}{\alpha_0}\left[\Delta_1^2 - (z - z_0)^2\right], & 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ & \Delta_1^2 = (z_0 - z_1)^2, \\ z^2, & z > z_1, \end{cases}$$

где $\alpha_0 = (z_0^2 - \Delta_1^2)/z_1^2$, z_1 и z_0 — положительные числа,

$z_1 < z_0$. Очевидно, $\Omega[z]$ — непрерывный функционал, имеющий производную для любых z, кроме $z = z_1$. Будем искать приближенное решение уравнения $Az = u_0$,

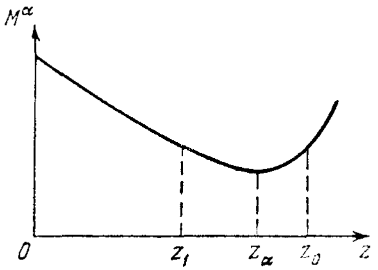

Рис. 2. $0 < \alpha < \alpha_1 = \dfrac{z_0 - z_1}{z_1}$; $z_\alpha = \dfrac{\alpha z_0}{1+\alpha}$.

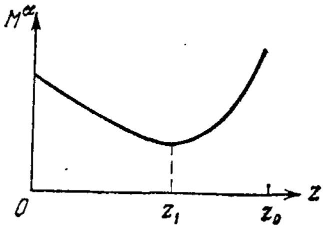

Рис. 3. $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$; $z_\alpha = z_1$.

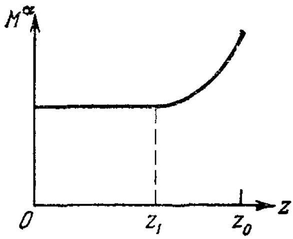

Рис. 4. $\alpha = \alpha_0$; z_α — любое число отрезка $[0, z_1]$.

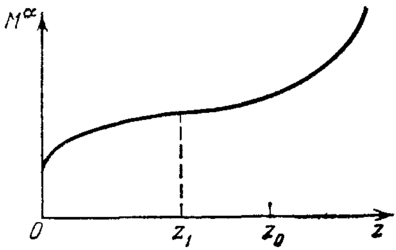

Рис. 5. $\alpha > \alpha_0$; $z_\alpha = 0$.

$u_0 > 0$, путем минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u_0]$, где $u_0 = z_0$. Нетрудно видеть, что

$$M^\alpha[z, u_0] = (z - z_0)^2 + \alpha\Omega[z],$$

$$M^\alpha[0, u_0] = z_0^2, \quad M^\alpha[z_1, u_0] = \Delta_1^2 + \alpha z_1^2,$$

где

$$\Delta_1^2 = (z_1 - z_0)^2,$$

$$M^\alpha[z_0, u_0] = \alpha z_0^2.$$

На рис. 2—5 приводятся графики $M^\alpha[z, u_0]$ как функции z для различных значений α. График функции

$$\varphi(\alpha) = (z_\alpha - z_0)^2 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} z_0^2, & 0 < \alpha \leqslant \alpha_1, \\ \Delta_1^2, & \alpha_1 < \alpha < \alpha_0, \\ \text{не определена}, & \alpha = \alpha_0, \\ z_0^2, & \alpha > \alpha_0, \end{cases}$$

представлен на рис. 6.

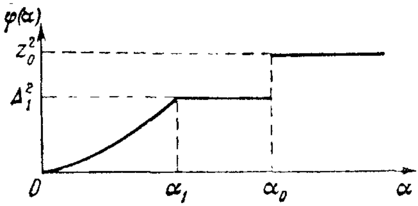

Рис. 6.

Очевидно, при $\delta = |\Delta_1|$ уравнение $\varphi(\alpha) = \delta^2$ имеет множество решений; при значениях δ, $|\Delta_1| < \delta < z_0$, уравнение $\varphi(\alpha) = \delta^2$ не имеет решения.

3. В вычислительной практике определение α по невязке можно, например, осуществлять так. Пусть δ — погрешность правой части u_δ уравнения (2; 0,1). Берется конечный отрезок монотонной последовательности чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, например, отрезок геометрической прогрессии $\alpha_k = \alpha_0 q^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $q > 0$. Для каждого значения α_k находится элемент (функция) z_{α_k}, минимизирующий функционал

$$M^{\alpha_k}[z, u_\delta],$$

и вычисляется невязка $\rho_U\left(Az_{\alpha_k}, u_\delta\right)$. В качестве искомого значения α берется такое число α_{k_0}, для которого с требуемой точностью выполняется равенство

$$\rho_U\left(Az_{\alpha_{k_0}}, u_\delta\right) = \delta.$$

Приближенное решение уравнения $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \varphi(\alpha) = \delta$ относительно α можно находить также методом касательных Ньютона. Действительно, в [123, 128] установлено, что функция $\varphi_1(\beta) = \varphi(1/\beta)$ является убывающей и выпуклой вниз функцией. Поэтому метод касательных Ньютона применим к решению уравнения $\varphi(1/\beta) = \delta$ относительно β, и он сходится при любом начальном приближении $\beta_0 > 0$. Найдя решение $\bar{\beta}$ уравнения $\varphi(1/\beta) = \delta$, определяем искомое $\alpha = 1/\bar{\beta}$. Приближения β_n к искомому решению вычисляются при этом по формулам *)

$$\beta_n = \beta_{n-1} - \frac{\varphi_1(\beta_{n-1})}{\varphi_1'(\beta_{n-1})}.$$

Необходимая при пользовании методом Ньютона производная функция $\varphi_1(\beta)$ будет выражаться через производную $y_\alpha = dz_\alpha/d\alpha$ регуляризованного решения z_α по параметру α. Эта последняя находится как решение уравнения, отличающегося от уравнения Эйлера функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ лишь правой частью.

В самом деле, пусть z_α минимизирует функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$. Тогда z_α является решением уравнения Эйлера

$$A^*Az + \alpha Bz = A^*u_\delta, \qquad (2;\ 4{,}5)$$

где $Bz = \Omega'[z]$ — производная функционала $\Omega[z]$ (по Фреше). Следовательно,

$$A^*Az_\alpha + \alpha Bz_\alpha \equiv A^*u_\delta.$$

Дифференцируя это тождество по α, находим, что $y_\alpha = dz_\alpha/d\alpha$ является решением уравнения

$$A^*Ay + \alpha By = -Bz_\alpha, \qquad (2;\ 4{,}6)$$

отличающегося от уравнения Эйлера (2; 4,5) лишь правой частью.

4. В ряде работ рассматривалась возможность определения параметра α из соотношения $m(\alpha) = \chi(\delta)$, где $\chi(\delta)$ ограничена сверху некоторой константой и $\chi(\delta) \geqslant c\delta^2$ $(c > 1)$ и $\chi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. В [127] рассматривалась возможность такого способа определения $\alpha(\delta)$ для линейных уравнений вида $Az = u_\delta$ (при этом установлена слабая сходимость $z_{\alpha(\delta)}$ к $z_т$), а в [112] дано обоснование такой возможности для уравнений с произвольным непрерывным (линейным или нелинейным) или с усиленно замкнутым оператором A.

*) См. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. II, М.: Наука, 1968.

Вопросы определения параметра регуляризации рассматриваются в [28, 54, 57]. Имея в виду потребности вычислительной практики, приведем некоторые оценки пригодных значений параметра регуляризации.

Если стабилизирующий функционал $\Omega[z]$ имеет вид $\Omega[z] = (Lz, z)$, то для значения параметра регуляризации, определяемого по невязке, справедливы оценки*)

$$\alpha \leqslant \frac{\|A^*AL^{-1}A^*\|\,\delta}{\|A^*u_\delta\| - \|A^*\|\,\delta},$$

$$\alpha \leqslant \frac{\|AL^{-1}A^*\|\,\delta}{\|u_\delta\| - \delta},$$

$$\alpha \leqslant \frac{\|A^*AL^{-1}\|\,\|A^*\|\,\|u_\delta\|}{2\|A^*u_\delta\| - \|A^*\|\,\|u_\delta\|}.$$

При некоторых дополнительных предположениях можно пользоваться оценкой

$$\alpha \leqslant \frac{\delta\|A\|^2}{\|u_\delta\| - \delta}.$$

§ 5. Пример нелинейного уравнения. Обобщенный метод Лагранжа

1. В случае нелинейных уравнений вида (2; 0,1) невязка $\varphi(\alpha) = \rho_U^2(Az_\alpha, u_\delta)$, вообще говоря, не является непрерывной функцией α и она может быть не строго монотонной. Поэтому уравнение $\varphi(\alpha) = \delta^2$ относительно α может не иметь решения или может иметь множество решений. Приводимый ниже пример (см. [55]) подтверждает возможность таких ситуаций.

Пусть F есть множество вещественных чисел z с нормой $\|z\| = |z|$, F есть метрическое пространство с расстоянием $\rho_F(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Пусть, далее, α_0 — некоторое фиксированное положительное число, а $\bar{z}$ и $\bar{u}$ — фиксированные положительные числа, связанные соотношением $\bar{u} = \sqrt{\alpha_0}\bar{z}$.

Рассмотрим следующий нелинейный оператор A, определенный на всем пространстве F и действующий

*) См. П. Н. Заикин. Докт. диссертация. ОИЯИ. 1978 г.; А. С. Меченов. Канд. диссертация. МГУ, 1976 г.

из F в F (т. е. $U \equiv F$):

$$Az = \begin{cases} 2\bar{u} & \text{для} \quad z \leqslant 0, \\ \sqrt{\bar{u}^2 - \alpha_0 z^2} + \bar{u} & \text{для} \quad 0 < z \leqslant \bar{z}, \\ 2\sqrt{\alpha_0}\, z - \bar{u} & \text{для} \quad z > \bar{z}. \end{cases}$$

На рис. 7 приводится график значений оператора A на F, т. е. график функции $u = Az$. Уравнение $Az = \bar{u}$ при $u = \bar{u}$ имеет, очевидно, единственное решение $z = \bar{z}$.

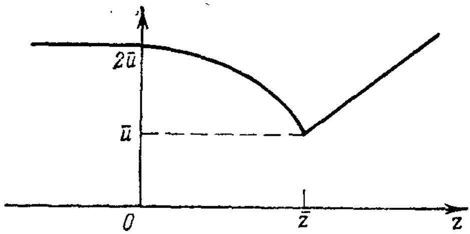

Рис. 7.

Пусть δ — произвольное фиксированное число, удовлетворяющее условиям, $0 < \delta < \|\bar{u}\|_U = \bar{u}$. Будем считать, что каждому такому числу δ соответствует правая часть уравнения $u_\delta = \bar{u}$ (следовательно, $\rho_U(u_\delta, \bar{u}) = 0 < \delta$).

Приближенные решения уравнения $Az = u_\delta$ будем строить путем минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ и последующего определения параметра α. Легко видеть, что

$$\rho_U^2(Az, u_\delta) = \begin{cases} \bar{u}^2 & \text{для} \quad z \leqslant 0, \\ \bar{u}^2 - \alpha_0 z^2 & \text{для} \quad 0 < z \leqslant \bar{z}, \\ 4(\sqrt{\alpha_0}\, z - \bar{u})^2 & \text{для} \quad z > \bar{z}. \end{cases}$$

Возьмем в качестве стабилизирующего функционала $\Omega[z] = z^2$. Тогда

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \begin{cases} \bar{u}^2 + \alpha z^2 & \text{для} \quad z \leqslant 0, \\ \bar{u}^2 + (\alpha - \alpha_0) z^2 & \text{для} \quad 0 < z \leqslant \bar{z}, \\ 4(\sqrt{\alpha_0}\, z - \bar{u}) + \alpha z^2 & \text{для} \quad z > \bar{z}. \end{cases}$$

На рис. 8—10 приводятся графики значений функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ для следующих трех случаев: $\alpha < \alpha_0$, $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha > \alpha_0$.

Из приводимых графиков видно, что: а) при $\alpha < \alpha_0$ имеется единственный элемент (число) z_α, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$, равный $\bar{z}$;

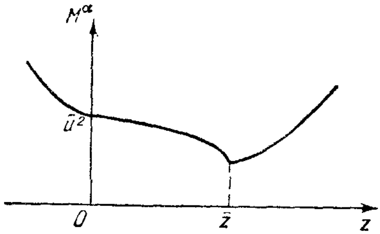

Рис. 8. $\alpha < \alpha_0$.

б) при $\alpha = \alpha_0$ имеется бесконечное множество элементов z_α, минимизирующих функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$: ими являются все числа из отрезка $[0, \bar{z}]$;

в) при $\alpha > \alpha_0$ имеется единственный элемент $z_\alpha = 0$, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$.

Таким образом,

$$z_\alpha = \begin{cases} \bar{z}, \text{ если } 0 < \alpha < \alpha_0; \\ z_1, \text{ где } z_1 \text{ — любое число из } [0, \bar{z}], \text{ если } \alpha = \alpha_0; \\ 0, \text{ если } \alpha > \alpha_0, \end{cases}$$

а невязка $\varphi(\alpha) = \rho_U^2(A_0 z_\alpha, u_\delta)$ равна

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 < \alpha < \alpha_0, \\ \bar{u}^2, \text{ если } \alpha \geqslant \alpha_0. \end{cases}$$

Итак, невязка $\varphi(\alpha)$ является разрывной и не строго

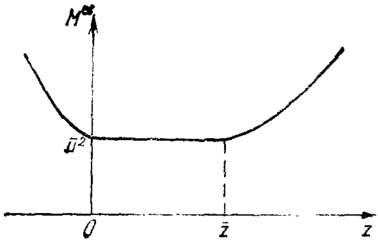

Рис. 9. $\alpha = \alpha_0$.

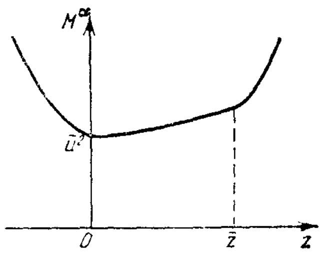

Рис. 10. $\alpha > \alpha_0$.

монотонной функцией и уравнение относительно α

$$\varphi(\alpha) = \delta^2$$

не имеет решения для всякого $\delta < \|\bar{u}\|_U = \bar{u}$. Следовательно, для таких δ не существует приближенного решения уравнения $Az = u_\delta$, получаемого с помощью минимизации функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ с определением α по невязке.

2. Если уравнение $\varphi(\alpha) = \delta^2$ разрешимо, но для некоторых значений δ разрешимо неоднозначно, то для нахождения приближенных решений уравнения (2; 0,1) с приближенной правой частью $u = u_\delta$, уровень погрешности которой δ известен, можно пользоваться обобщенным методом Лагранжа, состоящим в следующем:

1) находим элемент z_α, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$;

2) определяем α по невязке, т. е. из соотношения $\varphi(\alpha) = \delta^2$, беря при этом любое решение этого уравнения, например, наименьшее из них.

3. Таким образом, при построении приближенных решений нелинейных уравнений вида $Az = u$ с помощью минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u]$, вообще говоря, нельзя определять α по невязке.

Однако, если пространства F и U — банаховы, а оператор A — выпуклый, т. е. такой, что для любых z_1 и z_2 из F выполняется неравенство

$$\left\| A\frac{z_1 + z_2}{2} - u_\delta \right\|_U^2 \leqslant \frac{1}{2}\left\{ \| Az_1 - u_\delta \|_U^2 + \| Az_2 - u_\delta \|_U^2 \right\},$$

то, как указывается в [54], в этих случаях параметр α можно определять по невязке, т. е. из соотношения $\varphi(\delta) = \delta^2$. В той же работе [54] для произвольных непрерывных операторов A (линейных или нелинейных) обосновывается так называемый альтернативный способ выбора параметра α.

§ 6. О построении регуляризирующих операторов с помощью минимизации сглаживающего функционала

Как мы уже отмечали в § 3, сглаживающий функционал $M^\alpha[z, u]$ можно ввести ф о р м а л ь н о, не связывая его с вариационной задачей на условный экстремум функционала $\Omega[z]$, и строить регуляризирующий оператор путем решения задачи на минимум функционала $M^\alpha[z, u]$. При этом α надо брать как соответствующую функцию от δ, согласно определению 2 регуляризирующего оператора. В настоящем параграфе будет показано, что таким образом можно получить широкий класс регуляризирующих операторов.

Пусть $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на множестве $F_1 \subset F$, всюду плотном на F, и T_{δ_1} — класс неубывающих неотрицательных функций, непрерывных на отрезке $[0, \delta_1]$. Тогда справедлива

Теорема 5. *Пусть A — непрерывный оператор из F в U и z_T — единственное решение уравнения $Az = u_T$. Пусть далее, для произвольного $u \in U$ и любого $\alpha > 0$ существует элемент $z_\alpha \in F_1$, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u]$ на множестве F_1.*

Тогда, каковы бы ни были положительное число $\varepsilon > 0$ и фиксированные функции $\beta_1(\delta)$ и $\beta_2(\delta)$ из класса T_{δ_1} такие, что $\beta_2(0) = 0$ и

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \beta_2(\delta),$$

существует такое $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \beta_1, \beta_2)$, что для любых $\tilde{u} \in U$ и $\delta \leqslant \delta_0$ из условия $\rho_U(\tilde{u}, u_T) \leqslant \delta$ для всех α, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \beta_2(\delta),$$

следует неравенство $\rho_F(\tilde{z}_\alpha, z_T) \leqslant \varepsilon$, где $\tilde{z}_\alpha = R_1(\tilde{u}, \alpha)$.

Доказательство. Поскольку функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}]$ достигает минимума при $z = \tilde{z}_\alpha$, то

$$M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[z_T, \tilde{u}].$$

Поэтому

$$\alpha\Omega[\tilde{z}_\alpha] \leqslant M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[z_T, \tilde{u}] =$$
$$= \rho_U^2(Az_T, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_T] = \rho_U^2(u_T, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_T] \leqslant$$
$$\leqslant \delta^2 + \alpha\Omega[z_T] = \alpha\left\{\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega[z_T]\right\}.$$

Из неравенства $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha$ следует, что $\frac{\delta^2}{\alpha} \leqslant \beta_1(\delta) \leqslant \beta_1(\delta_1)$ и $\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega[z_T] \leqslant \beta_1(\delta_1) + \Omega[z_T] = H_0$.

Таким образом,

$$\Omega[\tilde{z}_\alpha] \leqslant H_0 \quad \text{и} \quad \Omega[z_T] \leqslant H_0.$$

Следовательно, элементы $z_т$ и $\tilde{z}_\alpha$ принадлежат компактному на F множеству F_{H_0} элементов z из F_1, для которых

$$\Omega[z] \leqslant H_0.$$

Пусть U_{H_0} есть образ множества F_{H_0} при отображении $u = Az$. Поскольку отображение $F_{H_0} \to U_{H_0}$ непрерывно (так как оператор A — непрерывный), решение уравнения $Az = u$ единственно для всякого $u \in U_{H_0}$ и множество F_{H_0} компактно на F, то согласно лемме гл. I обратное отображение $U_{H_0} \to F_{H_0}$ также непрерывно (в метрике F). Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\gamma(\varepsilon) > 0$, что из неравенства

$$\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \gamma(\varepsilon) \qquad u_1, u_2 \in U_{H_0},$$

следует неравенство

$$\rho_F(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon,$$

если $u_1 = Az_1$, $u_2 = Az_2$.

Далее, для $\tilde{u}$ и $\tilde{u}_\alpha = A\tilde{z}_\alpha$ имеем

$$\begin{aligned}\rho_U^2(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}) = \rho_U^2(A\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}) \leqslant M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}] \leqslant \\ \leqslant M^\alpha[z_т, \tilde{u}] = \rho_U^2(Az_т, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_т] = \\ = \rho_U^2(u_т, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_т] \leqslant \delta^2 + \alpha\Omega[z_т].\end{aligned} \qquad (2;6,1)$$

Пользуясь неравенством $\alpha \leqslant \beta_2(\delta)$, получаем

$$\rho_U(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}) \leqslant \{\delta^2 + \beta_2(\delta)\Omega[z_т]\}^{1/2} = \varphi(\delta),$$

где $\varphi(\delta)$ — непрерывная на $[0, \delta_1]$ монотонно возрастающая функция и $\varphi(0) = 0$. Очевидно, что

$$\rho_U(\tilde{u}_\alpha, u_т) \leqslant \rho_U(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}) + \rho_U(\tilde{u}, u_т). \qquad (2;\ 6,2)$$

Используя (2; 6,1) и неравенство

$$\rho_U(\tilde{u}, u_т) \leqslant \delta,$$

получим

$$\rho_U(\tilde{u}_\alpha, u_т) \leqslant \delta + \varphi(\delta) = \psi(\delta), \qquad (2;\ 6,3)$$

где $\psi(\delta)$ — непрерывная на $[0, \delta_1]$ монотонно возрастающая функция, для которой $\psi(0) = 0$. Полагая $\delta_0 = \psi^{-1}(\gamma(\varepsilon))$, где $\psi^{-1}(y)$ — функция, обратная функции $y = \psi(\delta)$, и используя непрерывность отображения $U_{H_0} \to F_{H_0}$, получаем, что из неравенства

$$\rho_U(\tilde{u}, u_т) \leqslant \delta \leqslant \delta_0$$

для всех α, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \beta_2(\delta),$$

следует неравенство

$$\rho_F(z_т, \tilde{z}_\alpha) \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Часто на искомое решение $z_т(x)$ по смыслу задачи накладываются ограничения типа неравенств $\varphi_1(x) \leqslant z_т(x) \leqslant \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — заданные функции. Например, решение должно быть неотрицательным ($\varphi_1(x) \equiv 0$). В таких случаях в качестве пространства возможных решений F надо брать функции $z(x)$, удовлетворяющие тем же неравенствам. Теоремы 3 и 5 настоящей главы справедливы и в этих случаях и их доказательства остаются прежними.

Доказанная выше теорема показывает, что при построении регуляризирующих операторов путем минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u]$ параметр регуляризации α, как функция погрешности правой части δ, определяется неоднозначно. Эту функцию можно определять не только по невязке, т. е. из условия $\rho_U\left(Az_\alpha^\delta, u_\delta\right) = \delta$, как указывалось в § 4, но и другими способами. Некоторые из них рассматриваются в §§ 7 и 8. Выбор того или иного способа определения параметра регуляризации определяется характером имеющейся информации об исходных данных.

§ 7. Квазиоптимальное значение параметра регуляризации и другие

В ряде задач вместо точной правой части $u_т$ уравнения (2; 0,1) мы имеем ее приближение $\tilde{u}$, уровень погрешности которого, т. е. $\rho_U(\tilde{u}, u_т)$, нам неизвестен. В таких случаях приближения к $z_т$ также можно находить путем минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, \tilde{u}]$, но очевидно, при этом не представляется возможным находить параметр регуляризации α по невязке. В таких задачах можно пользоваться квазиоптимальным значением α или значением α, определяемым по отношению двух норм ($\alpha_{отн}$).

В настоящем параграфе дается краткое (реферативное) описание алгоритмов нахождения таких значений α.

1. Рассмотрим сначала квазиоптимальные значения, $\alpha_{\text{кв.о}}$. Этот способ нахождения α был предложен в [169]. Обоснование его для некоторых классов задач содержится в [112].

Предположим, что пространство F — нормированное. По определению, содержащемуся в [169], *квазиоптимальным значением* параметра α называется такое значение α, которое реализует

$$\inf_{\alpha} \sup_{\rho_U(u_\delta, u_T) < \delta} \left\| \alpha \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \right\|_F,$$

где sup берется по всем возможным правым частям u_δ уравнения (2; 0,1), удовлетворяющим неравенству $\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta$.

Для приближенного нахождения $\alpha_{\text{кв.о}}$ требуется находить регуляризованные решения z_α, отвечающие большому числу возможных правых частей u_δ. В реальных задачах часто мы имеем только одну, конкретную правую часть u_δ. В этих случаях мы можем найти лишь значение α, реализующее

$$\inf_{\alpha > 0} \left\| \alpha \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \right\|_F.$$

Это значение также называют квазиоптимальным. Если таких значений несколько, то в качестве $\alpha_{\text{кв.о}}$ берут наименьшее из них. Это ослабленная форма квазиоптимального α.

На модельных примерах показана (см. [73, 169, 174]) эффективность этого способа определения параметра α для некоторых классов задач. В [112] дается обоснование возможности такого способа выбора параметра регуляризации при решении вырожденных (и плохо обусловленных) систем линейных алгебраических уравнений. При этом уточняется определение $\alpha_{\text{кв.о}}$ в исходной и ослабленной формах. Приведем основные результаты из [112].

2. Пусть A — неотрицательно определенная симметричная матрица размерности $n \times n$, а z и u — n-мерные векторы евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим вырожденную систему линейных алгебраических уравнений относительно z:

$$Az = u, \tag{2; 7,1}$$

где $z,\ u \in \mathbf{R}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Полагаем $\|z\| = \left\{\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right\}^{1/2}$, $\|u\| = \left\{\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right\}^{1/2}$.

Пусть правой части $u = \bar{u}$ отвечает множество решений F_A. *Нормальным решением* системы (2; 7,1) называется такой вектор $\bar{z}_0 \in F_A$, что $\|\bar{z}_0\| = \inf_{z \in F_A} \|z\|$ *).

Пусть вместо $\bar{u}$ мы имеем вектор $\tilde{u} \in \mathbf{R}^n$, и пусть $\|\tilde{u} - \bar{u}\| = \delta$. Требуется найти приближение $\tilde{z}$ к вектору $\bar{z}_0$ такое, что $\|\tilde{z} - \bar{z}_0\| \to 0$ при $\delta \to 0$. В качестве искомого приближения можно брать решение уравнения [109]

$$Az + \alpha z = \tilde{u}, \quad \alpha > 0, \tag{2; 7,2}$$

при соответствующем $\alpha = \alpha(\tilde{u})$, зависящем от $\tilde{u}$.

Уравнение (2; 7,2) имеет единственное решение z_α при всяком векторе $\tilde{u} \in \mathbf{R}^n$ и любом $\alpha > 0$ [132]. Непосредственной проверкой убеждаемся, что вектор $v_\alpha = \alpha \frac{dz_\alpha}{d\alpha}$ является решением уравнения

$$Av + \alpha v = Az_\alpha - \tilde{u}.$$

Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ — ненулевые собственные значения матрицы A, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ — ортонормированная система соответствующих собственных векторов. Хорошо известно **), что векторы $\tilde{u}$ и $\bar{u}$ единственным образом можно представить в виде

$$\tilde{u} = \mu + \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_k \varphi_k, \quad \bar{u} = \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_k \varphi_k, \tag{2;7,3}$$

где $\|\mu\| \leqslant \delta$ и $\mu \in F_A$.

3. Рассмотрим ослабленную форму выбора квазиоптимального значения параметра регуляризации.

Пусть $\psi(\alpha) = \|v_\alpha\|^2$. В качестве квазиоптимального значения α (в ослабленной форме) берется $\alpha = \alpha_0(\tilde{u})$, являющееся наименьшим из значений α, при котором функция $\psi(\alpha)$ имеет локальный минимум. Отметим, что таким значением может быть и $\alpha = 0$.

---

*) См. также гл. III.

**) См., например, Колмогорова А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.

Справедливы следующие свойства функции $\psi(\alpha)$:

1) $\psi(\alpha)$ и ее производная $\psi'(\alpha)$ непрерывны при $\alpha > 0$;

2) если $\mu = 0$, то $\lim\limits_{\alpha \to +0} \psi(\alpha) = 0$; следовательно, можно полагать, что $\psi(0) = 0$;

3) если $\mu \neq 0$, то $\lim\limits_{\alpha \to +0} \psi(\alpha) = +\infty$.

Мы не будем останавливаться на их доказательстве. С помощью этих свойств доказывается

Теорема 6. *Для любой правой части* $\tilde{u}$ *и* $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, *где* δ_0 — *некоторое положительное число, существует единственное* $\alpha_{\text{кв. о}} = \alpha_0(\tilde{u})$.

Отметим, что в случае $\mu = 0$ $\alpha_0(\tilde{u}) = 0$.

Справедливы также следующие теоремы.

Теорема 7. *Пусть последовательность векторов* $\{\tilde{u}_n\}$ *сходится к вектору* $\bar{u}$ *при* $n \to \infty$ *и для каждого* n *соответствующий вектор* μ_n *в представлении* u_n *в виде* (2; 7,3) *не равен нулю, т. е.* $\mu_n \neq 0$. *Тогда при* $n \to \infty$ $z_{\alpha_0}(\tilde{u}_n) \to \bar{z}_0$, *где* $\alpha_0(\tilde{u}_n)$ — *квазиоптимальное значение* α, *отвечающее правой части* $\tilde{u}_n$.

Теорема 8. *Пусть последовательность векторов* $\{\tilde{u}_n\}$ *сходится к вектору* $\bar{u}$ *при* $n \to \infty$ *и для всякого* n *соответствующий вектор* μ_n *в представлении* $\tilde{u}_n$ *в виде* (2; 7,3) *равен нулю, т. е.* $\mu_n = 0$, *и поэтому* $\alpha_{\text{кв.о}} = \alpha_0(\tilde{u}_n) = 0$.

Если в качестве приближенного решения системы (2; 7,1) *с правой частью* $u = \tilde{u}_n$ *брать вектор* $z^0(\tilde{u}_n) = \lim\limits_{\alpha_0 \to +0} z_{\alpha_0}(\tilde{u}_n)$, *то последовательность* $\{z^0(\tilde{u}_n)\}$ *сходится к* $\bar{z}_0$ *при* $n \to \infty$ *и*

$$\|z^0(\tilde{u}_n) - \bar{z}_0\| \leqslant \tilde{c}\delta_n,$$

где $\tilde{c}$ — *константа, не зависящая от* δ_n *и* $\delta_n = \|\tilde{u}_n - \bar{u}\|$.

4. В [112] рассматривается также «глобальная» форма выбора квазиоптимального значения α, состоящая в следующем. Пусть δ — заданное число. Рассмотрим следующую задачу на условный экстремум:

найти вектор $\breve{u}_\delta^\alpha \in R^n$ такой, что при фиксированных α и δ $(\alpha > 0,\ \delta > 0)$

$$\|v_\alpha(\breve{u}_\delta^\alpha)\|^2 = \sup_{\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta} \|v_\alpha(u_\delta)\|^2.$$

Если $\|\bar{u}\| > \delta$, то она эквивалентна такой задаче: найти вектор $\tilde{u}_\delta^\alpha \in \mathbf{R}^n$ такой, что при фиксированных α и δ $(\alpha > 0,\ \delta > 0)$

$$\| v_\alpha(\tilde{u}_\delta^\alpha) \|^2 = \sup_{\|u_\delta - \bar{u}\| = \delta} \| v_\alpha(u_\delta) \|^2.$$

Устанавливается, что при условии $\|\bar{u}\| > \delta$ для всех $\alpha > 0$ определена функция

$$\Psi_\delta(\alpha) = \max_{\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta} \| v_\alpha(u_\delta) \|^2 = \max_{\|u_\delta - \bar{u}\| = \delta} \| v_\alpha(u_\delta) \|^2.$$

Под квазиоптимальным в «глобальной» форме значением $\alpha_0(\delta)$ параметра регуляризации α понимается наименьшее из чисел $\alpha > 0$, реализующих локальные минимумы функции $\Psi_\delta(\alpha)$.

Справедливы следующие теоремы, на доказательстве которых мы не будем останавливаться (см. [112]).

Теорема 9. *Если δ_0 — достаточно малое число, то для любого δ, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, существует единственное $\alpha_0(\delta)$ и*

$$B_1\sqrt{\delta} \leqslant \alpha_0(\delta) \leqslant B_2\sqrt{\delta},$$

где B_1 и B_2 — константы, не зависящие от α и δ.

Теорема 10. *Регуляризованное решение $z_{\alpha_0(\delta)}$ уравнения (2; 7,2), отвечающее параметру $\alpha = \alpha_0(\delta)$, сходится к z_0 при $\delta \to 0$.*

Если матрица A не является неотрицательно определенной и симметричной, то вместо уравнения $Az = u$ надо рассматривать уравнение $A^*Az = A^*u$, а вместо уравнения (2; 7,2) — брать уравнение

$$A^*Az + \alpha z = A^*\tilde{u},$$

являющееся уравнением Эйлера для функционала $M^\alpha[z, \tilde{u}]$, и применять теоремы 6—10 к этому уравнению. При этом v_α является решением уравнения

$$A^*Av + \alpha v = A^*(Az_\alpha - \tilde{u}).$$

Эти теоремы позволяют утверждать, что оператор $R_2(u, \alpha)$ нахождения вектора z_α, минимизирующего функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}]$, с определением α как квазиоптимального значения (в ослабленной или в «глобальной» формах), является регуляризующим.

5. Рассмотрим другой способ определения $\alpha = \alpha(\tilde{u})$ — по отношению норм $\|v_\alpha\|$ и $\|z_\alpha\|$*). Этот способ был предложен в [73] и с успехом применялся при решении некоторых классов задач. В работе [112] дается обоснование его для систем линейных алгебраических уравнений. При этом в качестве $\alpha(\tilde{u})$ берется наименьшее из значений $\alpha > 0$, при которых достигается локальный минимум функции $\xi(\alpha)$:

$$\xi(\alpha) = \frac{\|Av_\alpha - (Az_\alpha - \tilde{u})\|^2}{\|Az_\alpha - \tilde{u}\|^2} = \frac{\|v_\alpha\|^2}{\|z_\alpha\|^2} = \frac{\psi(\alpha)}{\|z_\alpha\|^2}.$$

Это значение $\alpha(\tilde{u})$ будем обозначать через $\tilde{\alpha}_0(\tilde{u})$.

Справедливы следующие свойства функции $\xi(\alpha)$:

1) $\xi(\alpha)$ и ее производная $\xi'(\alpha)$ непрерывны при $\alpha > 0$.

2) Если $\mu \neq 0$, то $\lim\limits_{\alpha \to +0} \xi(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to \infty} \xi(\alpha) = 1$.

3) Если $\mu = 0$, то $\lim\limits_{\alpha \to +0} \xi(\alpha) = 0$.

Следовательно, можно положить $\xi(0) = 0$.

Теорема 11. *Для всякого вектора $\tilde{u}$ существует единственное $\tilde{\alpha}_0(\tilde{u})$.*

Справедливы также теоремы, аналогичные теоремам 7 и 8. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих теорем и свойств функции $\xi(\alpha)$.

Подобно «глобальному» выбору квазиоптимального α можно сформулировать определение «глобального» выбора α на основе функции $\xi(\alpha)$. Для этого вместо функции $\xi(\alpha)$ надо рассматривать функцию

$$\Phi_\delta(\alpha) = \sup_{\|u_\delta - \tilde{u}\| < \delta} \frac{\|A^*Av_\alpha(u_\delta) - A^*(Az_\alpha(u_\delta) - u_\delta)\|^2}{\|Az_\alpha(u_\delta) - u_\delta\|^2}.$$

Пусть $\tilde{\alpha}_0(\delta)$ — соответствующее α. Его свойства аналогичны свойствам «глобального» квазиоптимального $\alpha_0(\delta)$.

Приведенные результаты позволяют утверждать, что оператор $R_2(\tilde{u}, \alpha)$ нахождения вектора z_α, минимизирующего функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}]$, с определением α с помощью функции $\xi(\alpha)$ или $\Phi_\delta(\alpha)$, является регуляризирующим.

---

*) Матрица A, как и в п. 2, предполагается симметричной и неотрицательно определенной.

Следует отметить, что описанные здесь способы не требуют знания числа δ для определения значений $\alpha_0(\tilde{u})$, $\alpha_0(\delta)$ и $\tilde{\alpha}_0(\tilde{u})$, $\tilde{\alpha}_0(\delta)$ параметра регуляризации.

§ 8. Еще об одном классе задач, приводящих к минимизации сглаживающего функционала. Связь регуляризованных решений с квазирешением

1. Пусть A — непрерывный оператор, действующий из F в U, обратный к которому A^{-1} не является непрерывным, и $z_т$, $u_т$ — элементы из F и U, связанные соотношением $Az_т = u_т$. Пусть вместо элемента $u_т$ задано некоторое его приближение $\tilde{u} \in U$, на котором обратный оператор A^{-1} может быть и не определенным. Пусть, далее, $\Omega[z]$ — неотрицательный непрерывный функционал, определенный на множестве F_1, всюду плотном на F. Рассмотрим следующую задачу:

среди элементов множества F_1, удовлетворяющих условию $\Omega[z] \leqslant R^2$, где R — известное число, найти элемент z_R, на котором достигается

$$\inf_{z \in F_1} \rho_U^2 \left(Az, \tilde{u}\right).$$

К таким задачам приводится широкий класс задач синтеза систем (конструкций). В самом деле, пусть z — совокупность компонент (элементов) системы и $Az = u$ — интересующие нас характеристики на «выходе» системы. Обычно требуется создать систему с заданными характеристиками на «выходе», т. е. с заданным u. Полагаем, что z и u являются элементами метрических пространств F и U с расстояниями $\rho_F(\cdot, \cdot)$ и $\rho_U(\cdot, \cdot)$.

При заранее заданном $u = \tilde{u}$ может не существовать элементов z из F, для которых $Az = \tilde{u}$. Поэтому естественно задачу синтеза системы с заданными характеристиками $\tilde{u}$ на ее «выходе» ставить так:

найти элементы (или элемент) $z \in F$, на которых функционал $\rho_U(Az, \tilde{u})$ достигает своей точной нижней грани на F.

Однако решение такой задачи может достигаться на элементах $\tilde{z}$ (т. е. совокупностях компонент системы), не реализуемых или трудно реализуемых на практике. Поэтому обычно ставят дополнительные условия — ограничения на сложность совокупности компонент z. Во многих случаях мерой сложности элементов z могут служить значения неотрицательного функционала $\Omega[z]$, определенного на множестве $F_1 \subset F$, и упомянутые дополнительные условия можно записать в виде неравенства $\Omega[z] \leqslant R^2$, где R — известное число. Множество $F_{1,R} \equiv \{z\colon \Omega[z] \leqslant R^2\}$ есть множество допустимых элементов z, т. е. совокупностей компонент системы. Таким образом, задачу синтеза системы можно поставить так:

среди элементов $z \in F_{1,R}$ найти элемент $\tilde{z}$, минимизирующий функционал $\rho_U(Az, \tilde{u})$ на множестве $F_{1,R}$, т. е. такой, что

$$\rho_U(A\tilde{z}, \tilde{u}) = \inf_{z \in F_{1,R}} \rho_U(Az, \tilde{u}).$$

Задачами такого рода являются некоторые задачи синтеза антенн с приближенно заданной диаграммой направленности $\tilde{u}$, элементы которых z должны удовлетворять требованиям, выражаемым неравенством (см. гл. VIII) $\Omega[z] \leqslant R^2$.

Пусть F и U — полные нормированные пространства и $\Omega[z]$ — неотрицательный функционал, определенный на множестве $F_1 \subset F$, всюду плотном на F, и обладающий свойствами:

а) он строго выпуклый;

б) $\Omega[0] = 0$;

в) для всякого фиксированного $z \neq 0$ из множества F_1 $\varphi(\beta) = \Omega[\beta z]$ есть строго возрастающая функция переменной β такая, что

$$\lim_{\beta \to +\infty} \varphi(\beta) = +\infty;$$

г) для всякого $R > 0$ множество $F_{1,R} \equiv \{z;\ z \in F_1,\ \Omega[z] \leqslant R^2\}$ есть компакт на F.

Тогда элемент z_R, на котором достигается точная нижняя грань функционала $\rho_U(Az, \tilde{u})$ на множестве $F_{1,R}$ принадлежит $F_{1,R}$ и удовлетворяет условию $\Omega[z_R] = R^2$ (см. [66]). Поэтому исходная задача в этих условиях сводится к классической задаче на условный экстремум функционала $\rho_U(Az, \tilde{u})$ при условии $\Omega[z] = R^2$. Ее можно решать методом неопределенных множителей Лагранжа, т. е. находить элемент z_α, минимизирующий сглаживающий функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}]$, а параметр α определять из условия $\Omega[z_\alpha] = R^2$.

Так как функция $\omega(\alpha) = \Omega[z_\alpha]$, как показано в § 4, невозрастающая (а если A — линейный оператор и $\Omega[z]$ имеет не равную нулю производную Фреше, то строго убывающая), уравнение $\omega(\alpha) = R^2$ разрешимо (следовательно, метод Лагранжа реализуем).

В вычислительной практике значение α можно приближенно находить как подбором из заданной совокупности значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (как описано в § 4 п. 3), так и методом касательных Ньютона, так как в [123, 124] установлено, что функция $\omega_1(\beta) = \omega(1/\beta)$ является выпуклой вниз и потому метод Ньютона сходится при любом начальном приближении $\beta_0 > 0$. Необходимая при этом производная $y_\alpha = dz_\alpha/d\alpha$ является решением уравнения (2; 4, 6).

Мы рассмотрели возможность построения приближенных регуляризованных решений путем минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u]$ с последующим определением параметра α тем или иным способом (соответственно имеющейся исходной информации) для уравнений $Az = u$, в которых оператор A — непрерывный. В ряде работ аналогичные вопросы рассматривались для уравнений, в которых оператор A является замкнутым или замыкаемым (см. [116]).

2. Ранее были определены понятия квазирешений и регуляризованных решений уравнения $Az = u$. Здесь мы укажем связь между этими понятиями, установленную в [81]. Пусть

$$Az = u, \tag{2; 8,1}$$

$z \in F$, $u \in U$, где F и U — банаховы пространства, A — линейный оператор из F в U с всюду плотной в U областью значений $R(A)$ такой, что обратный ему оператор A^{-1} существует, но не является непрерывным.

Пусть $\Omega[z]$ — непрерывный неотрицательный выпуклый функционал, определенный на всюду плотном на F линейном многообразии F_1 и удовлетворяющий условиям (см. [81]):

а) $\Omega[0] = 0$;

б) для всякого фиксированного элемента z из F_1, $z \neq 0$, $\varphi(\beta) = \Omega[\beta z]$ есть строго возрастающая функция переменной β такая, что $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \varphi(\beta) = +\infty$;

в) для $d \geqslant 0$ множество $F_d^1 \equiv \{z, z \in F_1, \ \Omega[z] \leqslant d\}$ есть компакт на F.

Очевидно, что $\Omega[z]$ является стабилизирующим функционалом для уравнения (2; 8,1) и

$$F_1 = \bigcup_{d>0} F_d^1.$$

Пусть z_d — квазирешение уравнения (2; 8,1) на компакте F_d^1, т. е. z_d есть элемент, минимизирующий функционал $\|Az - u\|^2$ на компакте F_d^1. В работе [86] показано, что $\Omega[z_d] = d$. Следовательно, при заданном $d > 0$ задача нахождения квазирешения z_d на компакте F_d^1 сводится к минимизации функционала

$$\rho_U^2 (Az, u) = \|Az - u\|^2$$

при условии $\Omega[z] = d$, т. е. к задаче на безусловный минимум функционала

$$M^\alpha [z, u] = \rho_U^2 (Az, u) + \alpha\Omega [z]$$

на множестве F_d^1. Если число d известно, то параметр α определяется из условия $\Omega[z_\alpha] = d$ (ср. с п. 1 настоящего параграфа).

Пусть элемент z_α минимизирует функционал $M^\alpha[z, u]$. Согласно § 3 элемент z_α есть регуляризованное решение уравнения (2; 8,1) на множестве F_d^1. Таким образом, квазирешение уравнения (2; 8,1) на компакте F_d^1 есть регуляризованное решение этого уравнения. При подстановке элемента z_α в уравнение (2; 8,1) получаем невязку $\rho_U(Az_\alpha, u) = \delta_\alpha$.

Три числовых параметра: d, α и δ_α связаны двумя соотношениями:

$$\Omega[z_\alpha] = d, \quad \rho_U (Az_\alpha, u) = \delta_\alpha. \qquad (2;\ 8,2)$$

Задавая один из них, мы найдем два других параметра из соотношений (2; 8,2). В методе регуляризации заданным обычно является параметр δ_α — величина погрешности правой части уравнения (2; 8,1).

Так как при $d_1 < d_2$, $F_{d_1}^1 \subset F_{d_2}^1$, то регуляризованное решение уравнения (2; 8,1) на множестве $F_{1,\delta} = F_1 \cap Q_\delta$ (см. § 2 гл. II) принадлежит множеству $F_1 = \bigcup\limits_{d\geqslant 0} F_d^1$.

Таким образом, семейство регуляризованных приближенных решений уравнения (2; 8,1) состоит из квазирешений на семействе расширяющихся компактов F_d^1.

3. Регуляризованное решение уравнения $Az = u$ можно также строить в виде ряда. Пусть F и U — гильбертовы пространства и A — вполне непрерывный линейный оператор из F в U. Пусть F_1 — гильбертово подпространство пространства F с такой мажорантной нормой $\|z\|_1$, что для любого $d > 0$ множество элементов z из F_1, для которых $\|z\|_1 \leqslant d$, компактно в F. Тогда в качестве стабилизатора можно брать функционал $\Omega[z] = \|z\|_1^2 = (Lz, z)$, где L — линейный оператор. В этом случае уравнение Эйлера для сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u]$ имеет вид

$$A^*Az + \alpha Lz = A^*u. \qquad (2;\ 8{,}3)$$

A^*A — самосопряженный оператор. Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная система его собственных элементов, а $\{\lambda_n\}$ — отвечающие им собственные значения.

Как известно, A^*u можно представить в виде ряда

$$A^*u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n.$$

Если решение уравнения искать в виде ряда

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n,$$

то для коэффициентов его получаем формулы

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n + \alpha g_n},$$

где g_n — коэффициенты разложения Lz в ряд по элементам φ_n. Параметр α определяется по невязке (ср. с теоремой 4 на стр. 76).

Вариационные методы решения некорректно поставленных задач рассматриваются также в [24]. Оценки погрешностей приближенных решений приводятся в [27, 29].

4. Задачу решения уравнения $Az = u$ можно рассматривать как задачу вычисления оператора $z = A^{-1}u$. Построение регуляризованных приближенных решений уравнения $Az = u$ можно трактовать как задачу нахождения семейства непрерывных операторов $R(u, \alpha)$, определенных на всех элементах $u \in U$ и аппроксимирующих значение оператора A^{-1} на элементах $u_т \in AF$. Пользуясь

такой трактовкой задачи решения уравнения $Az = u$, можно решить вопрос об условиях его регуляризуемости. В [26] показано, что для регуляризуемости уравнения $Az = u$ необходимо и достаточно, чтобы оператор A^{-1} принадлежал первому бэровскому классу. Этот результат аналогичен известной теореме математического анализа о представлении функций первого бэровского класса в виде пределов последовательностей непрерывных функций.

5. Мы описали один из способов построения регуляризирующих операторов, основанный на вариационном принципе. Будем называть его в дальнейшем *вариационным способом* построения регуляризирующих операторов (Р. О.).

Можно указать и другие способы построения регуляризирующих операторов. Один из способов, основанный на использовании спектра оператора A, содержится, например, в работах [17, 19, 20] (см. также работы [111, 191, 192]). Для операторов A типа свертки в гл. V дается способ построения Р. О. с помощью использования интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Меллина и др. В [5—7] и [158] также рассматриваются Р. О. для уравнений типа свертки. В следующем параграфе рассматривается возможность построения регуляризирующих операторов методом итераций.

§ 9. Метод итераций нахождения приближенных решений уравнений вида $Az = u$

1. Приближенные решения уравнения $Az = u$, устойчивые к малым изменениям исходных данных, можно также строить методом итераций (см. [18, 98, 99, 106, 120, 125, 160, 162]) вида

$$z_n = R(u, z_{n-1}, \ldots, z_{n-k}), \quad k < n.$$

Чтобы они были устойчивыми к малым изменениям исходных данных, номер итерации z_n, которая принимается за приближенное решение, надо брать согласованным с уровнем погрешности исходных данных. Так, если оператор A задан нам точно, а правая часть u известна с погрешностью δ, то надо брать n зависящим от δ, $n = n(\delta)$. Здесь параметром регуляризации является номер итерации, т. е. $\alpha = n$.

Иногда можно получить априорную оценку уклонения z_n от $z_т$ (см. [106, 125]):

$$\rho_F(z_n, z_т) \leqslant B(\delta, n)$$

и, минимизируя $B(\delta, n)$, найти $n(\delta)$. В ряде случаев $n(\delta)$ находится по невязке. Ниже приводится краткое (реферативное) описание некоторых итерационных алгоритмов.

Пусть в уравнении

$$Az = u \tag{2; 9,1}$$

A есть линейный, самосопряженный, положительно определенный и вполне непрерывный оператор. В [189] предложен следующий итерационный алгоритм:

$$z_{n+1} = z_n + \lambda[u - Az_n], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2; 9,2}$$

Если правая часть u известна точно, то справедлива

Теорема 12. *Пусть оператор A действует из гильбертова пространства H в H (т. е. z, $u \in H$). Тогда последовательность $\{z_n\}$ сходится к решению уравнения (2; 9,1) при любом $z_0 \in H$ и произвольном λ, $0 < \lambda \leqslant 2\lambda_1$, где λ_1 — наибольшее собственное значение оператора A.*

Если правая часть в уравнении (2; 9,1) задана с погрешностью δ, т. е. вместо $u_т$ имеем u_δ, $\|u_\delta - u_т\| \leqslant \delta$ и

$$z_{n+1} = z_n^\delta + \lambda\left[u_\delta - Az_n^\delta\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то справедлива оценка [189]

$$\left\|z_n^\delta - z_т\right\| \leqslant \|z_n - z_т\| + c(n)\,\delta,$$

где $c(n) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \|E - \lambda A\|^k$, а E — единичный оператор. Используя теорему 12 и выбирая $n = n(\delta)$ так, чтобы $c(n(\delta))\delta$ стремилось к нулю при $\delta \to 0$, получим сходимость z_n^δ к $z_т$ [189].

Если оператор A не является самосопряженным, то вместо уравнения (2; 9,1) надо рассматривать эквивалентное уравнение

$$A^*Az = A^*u.$$

2. В [99] рассмотрен следующий итерационный алгоритм для построения приближенных решений уравнения (2; 9,1) при тех же предположениях об операторе A (см. п. 1):

$$Az_{n+1} + Bz_{n+1} = Bz_n + u \tag{2; 9,3}$$

или, в эквивалентной форме,

$$z_{n+1} = Cz_n + (A+B)^{-1}u, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $C = (A+B)^{-1}B$, а B — линейный ограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, действующий из H в H. Справедлива

Теорема 13. *Если $Az_т = u_т$ и в уравнении* (2; 9,1) $u = u_т$, *то последовательность* $\{z_n\}$, *получаемая по правилу* (2; 9,3), *сходится к* $z_т$.

Если вместо $u_т$ мы имеем u_δ и $\|u_\delta - u_т\| \leqslant \delta$, то для элементов z_n^δ, получаемых по правилу (2; 9,3), справедлива оценка [99]

$$\|z_n^\delta - z_т\| \leqslant M_0(n) + \frac{\delta n}{m_B},$$

где $m_B = \inf\limits_{\|z\|=1}(z, Bz) > 0$, а $M_0(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Выбирая $n = n(\delta)$ так, чтобы $\delta n(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, получим $z_{n(\delta)}^\delta \to z_т$.

Если в уравнении (2; 9,1) оператор A задан также с погрешностью, т. е. вместо $A = A_0$ имеем $A = A_0 + \Delta A$ и $\|\Delta A\| \leqslant M\delta$, $\|u_\delta - u_т\| \leqslant \delta$, то в предположении, что $(A+B)^{-1}\Delta A\| < 1$ и $\|u_\delta\| \leqslant N$, справедлива оценка [99]

$$\|z_n^\delta - z_т\| \leqslant M_0(n) + \frac{\delta n}{m_B}[T + o(\delta)],$$

где T — число, не зависящее от n и δ. Выбирая $n = n(\delta)$ так, чтобы $\delta n(\delta) \to 0$ при $n \to \infty$, получим $z_{n(\delta)}^\delta \to z_т$.

§ 10. О построении приближенных решений уравнения $Az = u$ в случаях, когда приближенно заданы правая часть и оператор A

Мы рассмотрели методы построения приближенных решений уравнений вида $Az = u$, устойчивых к малым изменениям исходной информации, когда неточно заданной была лишь правая часть уравнения, а оператор A предполагался известным точно. В настоящем параграфе мы рассмотрим задачу построения приближенных решений уравнений $Az = u$ в случаях, когда приближенными могут быть как правая часть, так и оператор A. Такая задача рассматривалась в [52].

1. Пусть $z_т$ единственное решение уравнения $A_0 z = u_т$, где $z_т \in F$, $u_т \in U$ и оператор A_0 осуществляет непрерывное отображение из F в U. Пусть вместо точных исходных данных $\{A_0, u_т\}$ мы имеем приближенные исходные данные $\{A_h, h; u_\delta, \delta\}$ характеризуемые положительными числами h и δ следующим образом.

Число δ характеризует погрешность правой части u_δ неравенством $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$. Число h может характеризовать погрешность A_h по-разному.

Первый способ. Если A_0 и A_h — линейные операторы на F и F — нормированное пространство, то можно полагать, что

$$\| A_h - A_0 \|_U = \sup_{\|z\|=1} \rho_U(A_h z, A_0 z) \leqslant h.$$

Второй способ. Пусть $\Omega[z]$ — фиксированный неотрицательный функционал, определенный на множестве $F_1 \subset F$. Тогда можно полагать, что

$$\| A_h - A_0 \|_\Omega = \sup_{\substack{z \in F_1 \\ \Omega[z] \neq 0}} \frac{\rho_U(A_h z, A_0 z)}{\{\Omega[z]\}^{1/2}} \leqslant h.$$

т. е.

$$\rho_U^2(A_h z, A_0 z) \leqslant h^2 \Omega[z]$$

на элементах $z \in F_1$, для которых $\Omega[z] \neq 0$. Для определенности мы будем в дальнейшем пользоваться этой последней оценкой A_h. Отметим еще раз, что вместо точных исходных данных $(A_0, u_т)$ нам даны не только их приближения A_h и u_δ, но также и пара чисел $\gamma = (h, \delta)$ характеризующих погрешности этих приближений.

При наличии такой информации об уравнении $A_0 z = u_т$ можно говорить лишь о нахождении приближений z_γ к $z_т$, притом таких, что z_γ стремится к $z_т$ при δ и h, независимо стремящихся к нулю. Мы будем выражать это также словами: найти приближенные к $z_т$ решения z_γ уравнения $A_h z = u_\delta$, сходящиеся к $z_т$ при $\delta \to 0$ и $h \to 0$.

Итак, задача состоит в нахождении приближенных к $z_т$ решений z_γ уравнения

$$A_h z = u_\delta,$$

если известно, что $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$, $\| A_h - A_0 \|_\Omega \leqslant h$ и известны также числа δ и h.

2. В качестве таких приближенных решений можно брать регуляризованные решения, получаемые с помощью регуляризирующих операторов. Дадим определение Р. О. для рассматриваемых задач.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство операторов A действующих из F в U, содержащее оператор A_0.

Определение. Оператор $R(u, A, \alpha)$, зависящий от параметра α, со значениями из F, называется *регуляризирующим оператором* для уравнения $Az = u$ (относительно элемента $u_т$ и оператора A_0), если он обладает свойствами:

1) существует такая пара положительных чисел (h_1, δ_1), что оператор $R(u_\delta, A_h, \alpha)$ определен для всякого $\alpha > 0$ и любых $u_\delta \in U$ и $A_h \in \mathfrak{A}$ таких, что

$$\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta \leqslant \delta_1, \quad \|A_h - A_0\|_\Omega \leqslant h \leqslant h_1;$$

2) существует такая функция от $\gamma = (h, \delta)$, $\alpha = \alpha(\gamma)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара чисел $\gamma(\varepsilon) = (h(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$ такая, что если $u_\delta \in U$, $A_h \in \mathfrak{A}$ и $\|A_h - A_0\|_\Omega \leqslant h \leqslant h(\varepsilon)$,

$$\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta \leqslant \delta(\varepsilon), \quad \text{то} \quad \rho_F(z_\alpha, z_т) \leqslant \varepsilon,$$

где

$$z_\alpha = R(u_\delta, A_h, \alpha(\gamma)).$$

В этом определении не предполагается однозначность оператора $R(u, A, \alpha)$. Отметим, что функция $\alpha(\gamma)$ зависит также от u_δ и A_h.

Если вместо $u_т$ и A_0 нам известны их приближения u_δ и A_h, а также числа δ и h, характеризующие степень близости u_δ к $u_т$ и A_h к A_0, то в качестве приближенных решений уравнения $A_h z = u_\delta$ можно брать значения регуляризирующего оператора, т. е.

$$z_\alpha = R(u_\delta, A_h, \alpha(\gamma)),$$

в котором параметр $\alpha = \alpha(\gamma, u_\delta, A_h)$ согласован с погрешностью γ исходных данных (u_δ, A_h). Получаемые таким образом приближенные решения, очевидно, устойчивы к малым изменениям исходных данных.

3. Доказательство существования регуляризирующих операторов, получаемых вариационным способом путем минимизации стабилизирующих функционалов $\Omega[z]$, проводится совершенно аналогично рассмотренному ранее случаю, когда оператор A известен точно. При этом удобно воспользоваться определением Р. О., аналогичным

определению 1 на стр. 54. Мы не будем здесь приводить доказательства теоремы, аналогичной 2 почти дословно совпадающего с рассуждениями, изложенными на стр. 62—64.

4. Регуляризирующие операторы для рассматриваемого здесь случая, как и в § 3, можно строить с помощью минимизации сглаживающего функционала вида

$$M^{\alpha}[z, u_{\delta}, A_h] = \rho_U^2(A_h z, u_{\delta}) + \alpha\Omega[z],$$

где $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на множестве F_1, всюду плотном на метрическом пространстве F, u_{δ} — элемент метрического пространства U, $\rho_U(u_{\delta}, u_T) \leqslant \delta$, а $A_h \in \mathfrak{A}$ и $\| A_h - A_0 \|_{\Omega} \leqslant h$.

Для функционала $M^{\alpha}[z, u_{\delta}, A_h]$ справедливы теоремы, аналогичные теоремам 3 из § 3 и 5 из § 6.

Теорема 14. *Пусть A_h — непрерывный оператор из линейного метрического пространства F в метрическое пространство U и $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, порождающий гильбертово пространство $\widehat{F}_1$ с мажорантной метрикой.*

Тогда для всякого элемента $u \in U$ и любого $\alpha > 0$ существует элемент $z_{\alpha} \in F_1$, на котором функционал

$$M^{\alpha}[z, u, A_h] = \rho_U^2(A_h z, u) + \alpha\Omega[z]$$

достигает своей точной нижней грани на множестве F_1.

Доказательство этой теоремы проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 3, поэтому мы не будем приводить его. Так же, как в случае теоремы 3, показывается, что если оператор A_h — линейный, F — гильбертово пространство, а $\Omega[z]$ — строго выпуклый (например, квадратический) функционал, то элемент z_{α} — единственный.

Элемент z_{α} можно рассматривать как результат действия оператора $R_2(u_{\delta}, A_h, \alpha)$, определенного для всех $\alpha > 0$ и любых $u_{\delta} \in U$ и $A_h \in \mathfrak{A}$. Из приводимой ниже теоремы 15 непосредственно следует, что оператор $R_2(u_{\delta}, A_h, \alpha)$ является регуляризирующим для уравнения $Az = u$, однако этот оператор определяется неоднозначно, так как зависит от выбора функции $\alpha = \alpha(\sigma)$.

5. Пусть $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, $\mathfrak{A}$ — семейство операторов A_h, зависящих от параметра h, $0 \leqslant h \leqslant h_1$.

Обозначим через T_{σ_1} класс неотрицательных, неубывающих и непрерывных на отрезке $[0, \sigma_1]$ функций $\beta(\sigma)$. Справедлива следующая

Теорема 15. *Пусть $z_т$ — решение уравнения $A_0 z = u_т$, A_0 и $A_h \in \mathfrak{A}$ — непрерывные операторы из метрического пространства F в метрическое пространство U и $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал с областью определения $F_1 \subset F$. Пусть, далее, для любого $\alpha > 0$ и произвольных $u_\delta \in U$ и $A_h \in \mathfrak{A}$ таких, что $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta \leqslant \delta_1$, $\|A_h - A_0\|_\Omega \leqslant h \leqslant h_1$, где δ_1 и h_1 — заданные числа, существует элемент $z^\alpha = R_2(u_\delta, A_h, \alpha)$, $z^\alpha \in F_1$, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u_\delta, A_h] = \rho_U^2(A_h z, u_\delta) + \alpha\Omega[z]$ на множестве F_1.*

Тогда, каковы бы ни были функции $\beta_1(\sigma)$ и $\beta_2(\sigma)$ из класса T_{σ_1} такие, что $\sigma^2/\beta_1(\sigma) \leqslant \beta_2(\sigma)$ и $\beta_2(0) = 0$, для всякой положительной на $(0, \sigma_1)$ функции $\alpha(\sigma)$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{\sigma^2}{\beta_1(\sigma)} \leqslant \alpha(\sigma) \leqslant \beta_2(\sigma), \quad \sigma \leqslant \sigma_1 = h_1 R + \delta_1,$$

элементы $z^{\alpha(\Delta)} = R_2(u_\delta, A_h, \alpha(\Delta))$, где $\Delta = hR + \delta$, сходятся к $z_т$ при $\gamma \equiv (h, \delta) \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\gamma \to 0} \rho_F(z^{\alpha(\Delta)}, z_т) = 0$. Здесь R — произвольное фиксированное число, такое, что $\Omega[z_т] \leqslant R^2$.

Доказательство. Пусть элемент z^α минимизирует функционал $M^\alpha[z, u_\delta, A_h]$. Тогда для всякого $\alpha > 0$

$$M^\alpha[z^\alpha, u_\delta, A_h] \leqslant M^\alpha[z_т, u_\delta, A_h].$$

Поэтому

$$\alpha\Omega[z^\alpha] \leqslant M^\alpha[z^\alpha, u_\delta, A_h] \leqslant M^\alpha[z_т, u_\delta, A_h] = \rho_U^2(A_h z_т, u_\delta) + \alpha\Omega[z_т] \leqslant$$
$$\leqslant \{\rho_U(A_h z_т, A_0 z_т) + \rho_U(A_0 z_т, u_т) + \rho_U(u_т, u_\delta)\}^2 + \alpha\Omega[z_т].$$

Поскольку $\rho_U(A_h z_т, A_0 z_т) \leqslant h\{\Omega[z_т]\}^{1/2}$ и $\rho_U(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$, то

$$\alpha\Omega[z^\alpha] \leqslant (h\{\Omega[z_т]\}^{1/2} + \delta)^2 + \alpha\Omega[z_т].$$

Следовательно,

$$\Omega[z^\alpha] \leqslant \frac{\Delta^2}{\alpha} + \Omega[z_т],$$

где

$$\Delta = hR + \delta.$$

Пользуясь условием $\Delta^2 \leqslant \alpha(\Delta)\beta_1(\Delta)$, получим

$$\Omega[z^{\alpha(\Delta)}] \leqslant \beta_1(\Delta) + \Omega[z_т] \leqslant \beta_1(\sigma_1) + \Omega[z_т]. \quad (2;\ 10{,}1)$$

Неравенство (2; 10,1) справедливо для любой положительной на $(0, \sigma_1]$ функции $\alpha = \alpha(\Delta)$, удовлетворяющей для всех $\Delta \in [0, \sigma_1]$ условию $\Delta^2 \leqslant \beta_1(\Delta)\alpha(\Delta)$. В дальнейших рассуждениях $\alpha = \alpha(\Delta)$ будем считать фиксированной функцией такого типа.

Пусть $\{u_{\delta_n}\}$ — последовательность элементов $u_{\delta_n} \in U$, а $\{A_{h_k}\}$ — последовательность операторов, осуществляющих непрерывное отображение F на U таких, что последовательности чисел $\rho_U(u_{\delta_n}, u_т) = \delta_n$, $\|A_{h_k} - A_0\|_\Omega = h_k$ сходятся к нулю при $n, k \to \infty$. Этим последовательностям отвечает последовательность элементов $z^{\alpha_{n,k}}$, $\alpha_{n,k} = \alpha(\Delta_{n,k})$, $\Delta_{n,k} = h_k R + \delta_n$, принадлежащих компактному на F множеству

$$Q \equiv \{z;\ \Omega[z] \leqslant \beta_1(\sigma_1) + \Omega[z_т]\}.$$

Следовательно, из последовательности $\{z^{\alpha_{n,k}}\}$ можно выделить сходящуюся к элементу множества F подпоследовательность $\{z^{\alpha_{n_r,k_s}}\}$.

Пусть

$$\lim_{n_r, k_s \to \infty} z^{\alpha_{n_r,k_s}} = \tilde{z}.$$

Введем обозначения: $z^{\alpha_{n_r,k_s}} = z_{r,s}$, $\alpha_{n_r,k_s} = \alpha^{r,s}$. Для всяких n_r и k_s имеем

$$\begin{aligned}
&\rho_U(A_0 z_{r,s}, u_т) \leqslant \\
&\leqslant \rho_U\left(A_{h_{k_s}} z_{r,s}, u_{\delta_{n_r}}\right) + \rho_U\left(A_{h_{k_s}} z_{r,s}, A_0 z_{r,s}\right) + \rho_U\left(u_{\delta_{n_r}}, u_т\right) \leqslant \\
&\leqslant \rho_U\left(A_{h_{k_s}} z_{r,s}, u_{\delta_{n_r}}\right) + h_{k_s}\{\Omega[z_{r,s}]\}^{1/2} + \delta_{n_r} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{M^{\alpha^{r,s}}\left[z_{r,s}, u_{\delta_{n_r}}, A_{h_{k_s}}\right]} + h_{k_s}\{\Omega[z_{r,s}]\}^{1/2} + \delta_{n_r} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{M^{\alpha^{r,s}}\left[z_т, u_{\delta_{n_r}}, A_{h_{k_s}}\right]} + h_{k_s}\{\Omega[z_{r,s}]\}^{1/2} + \delta_{n_r} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{\rho_U^2\left(A_{h_{k_s}} z_т, u_{\delta_{n_r}}\right) + \alpha^{r,s}\Omega[z_т]} + h_{k_s}\{\Omega[z_{r,s}]\}^{1/2} + \delta_{n_r} \leqslant \\
&\leqslant \left\{\left[\rho_U\left(A_{h_{k_s}} z_т, A_0 z_т\right) + \rho_U(A_0 z_т, u_т) + \rho_U\left(u_{\delta_{n_r}}, u_т\right)\right]^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$+\alpha^{r,s}\Omega[z_т]\}^{1/2}+h_{k_s}\{\Omega[z_{r,s}]\}^{1/2}+\delta_{n_r}\leqslant$$

$$\leqslant\{(h_{k_s}\{\Omega[z_т]\}^{1/2}+\delta_{n_r})^2+\alpha^{r,s}\Omega[z_т]\}^{1/2}+h_{k_s}\{\Omega[z_{r,s}]\}^{1/2}+\delta_{n_r}=$$

$$=\left(\Delta^2_{n_r,k_s}+\alpha^{r,s}\Omega[z_т]\right)^{1/2}+h_{k_s}\{\Omega[z_{r,s}]\}^{1/2}+\delta_{n_r}.$$

Используя условие $\alpha^{r,s}\leqslant\beta_2(\Delta_{n_r,k_s})$ и оценку (2; 10,1) с заменой $z^{\alpha(\Delta)}$ на $z_{r,s}$, получим

$$\rho_U(A_0z_{r,s},u_т)\leqslant\left(\Delta^2_{n_r,k_s}+\beta_2(\Delta_{n_r,k_s})\Omega[z_т]\right)^{1/2}+$$
$$+h_{k_s}\{\beta_1(\Delta_{n_r,k_s})+\Omega[z_т]\}^{1/2}+\delta_{n_r}.$$

Это неравенство выполняется для всякой пары чисел n_r, k_s. Переходя в нем к пределу при $n_r\to\infty$ и $k_s\to\infty$, получим $\rho_U(A_0\tilde{z},u_т)=0$. Следовательно,

$$A_0\tilde{z}=u_т.$$

Из условия единственности решения уравнения $A_0z=u_т$ следует, что $\tilde{z}=z_т$. И так для всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{z^{\alpha_{n,k}}\}$. Следовательно, последовательность $\{z^{\alpha_{n,k}}\}$ сходится к решению $z_т$ уравнения $A_0z=u_т$. А тем самым и $z^{\alpha(\Delta)}$ сходится к $z_т$ при $\gamma\equiv(\delta,h)\to0$. Теорема доказана.

6. Из этой теоремы следует, что существует бесконечное множество регуляризирующих операторов для уравнения $Az=u$. Множественность их определяется как возможностью выбора различных стабилизирующих функционалов $\Omega[z]$, так и существованием различных функций $\alpha=\alpha(\gamma)$ от погрешностей исходных данных при любом фиксированном стабилизирующем функционале $\Omega[z]$, используемом в сглаживающем функционале $M^\alpha[z,u_\delta,A_h]$.

Допустим, что мы выбрали некоторый фиксированный стабилизатор $\Omega[z]$ и, находя элементы $z_\alpha\in F_1$, минимизирующие сглаживающий функционал, строим приближенные (к $z_т$) решения уравнения $A_hz=u_\delta$.

Как при этом можно выбирать параметр α? Применим ли в таких задачах широко используемый и удобный для реализации на ЭВМ (в форме, описанной в § 4) способ выбора параметра α по невязке, т. е. из соотношения $\rho_U(A_hz_\alpha,u_\delta)=\delta$?

Ответы на эти вопросы даны в [51, 52] и прежде, чем их излагать, приведем следующие рассмотрения.

7. Предположим, что при любом $h \geqslant 0$ оператор $A_h \in \mathfrak{A}$ осуществляет непрерывное отображение F на U и замыкание образа F совпадает с U, т. е. $\overline{A_h F} = U$.

Пусть $A_0 z_т = u_т$, $\Omega[z]$ — квазимонотонный стабилизирующий функционал, определенный на F_1 ($\overline{F}_1 = F$) и z_0 — единственный элемент из F_1, на котором достигается $\inf\limits_{z \in F_1} \Omega[z]$.

Так как по условию задачи $\rho_U(u_т, u_\delta) \leqslant \delta$, то естественно искать приближенные решения среди элементов z, удовлетворяющих условию $\rho_U(A_0 z, u_\delta) \leqslant \delta$. Но вместо оператора A_0 мы имеем оператор A_h, для которого, очевидно, справедливы неравенства

$$\rho_U(A_h z, u_\delta) \leqslant \rho_U(A_h z, A_0 z) + \rho_U(A_0 z, u_\delta),$$
$$\rho_U(A_h z, A_0 z) \leqslant h\{\Omega[z]\}^{1/2}.$$

Следовательно, для возможных решений выполняется неравенство

$$\rho_U(A_h z, u_\delta) \leqslant \delta + h\{\Omega[z]\}^{1/2}. \qquad (2;\ 10{,}2)$$

Имея это в виду и следуя идее метода отбора возможных приближенных решений, изложенной в § 2, задачу нахождения приближенного решения уравнения $A_h z = u_\delta$ можно поставить так:

среди элементов z множества

$$F_{1,\gamma} = \{z;\quad z \in F_1;\quad \rho_U^2(A_h z, u_\delta) \leqslant (\delta + h\ \{\Omega[z]\}^{1/2})^2\}$$

найти элемент z_γ, $\gamma \equiv (h, \delta)$, реализующий точную нижнюю грань функционала $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\gamma}$.

Подобно тому, как это было сделано в § 3, нетрудно доказать, что справедлива следующая

Лемма. *Точная нижняя грань квазимонотонного функционала $\Omega[z]$ на множестве*

$$F_{1,\gamma} \equiv \{z;\quad z \in F_1,\quad \rho_U^2(A_h z, u_\delta) \leqslant (\delta + h\{\Omega[z]\}^{1/2})^2\}$$

достигается на элементе z_γ из F_1, для которого выполняется равенство

$$\rho_U^2(A_h z_\gamma, u_\delta) = \delta^2 + h^2 \Omega[z_\gamma].$$

Доказательство. В самом деле, допустим, что $\inf\limits_{z \in F_1} \Omega[z]$ достигается на элементе $z_0 \in F_1$, для которого

$$\rho_U^2(A_h z_0, u_\delta) = \delta_0^2 < \delta^2 + h^2 \Omega[z_0] = \Delta_0^2.$$

В силу непрерывности оператора A_h (из F в U) для всякого числа δ_1 такого, что $\delta_0 < \delta_1 < \Delta_0$, существует окрестность элемента z_0, $O_1(z, z_0)$, для всех элементов z которой выполняется неравенство $\rho_U(A_h z;\ u_\delta) < \delta_1$. Так как функционал $\Omega[z]$ непрерывен, то существует окрестность элемента z_0, $O_2(z, z_0)$, для всех элементов z которой выполняется неравенство $\delta_1^2 < \delta^2 + h^2\Omega[z]$. Следовательно, для всех элементов z, принадлежащих пересечению окрестностей $O_1(z, z_0)$ и $O_2(z, z_0)$, выполняется неравенство

$$\rho_U^2(A_h z, u_\delta) < \delta^2 + h^2\Omega[z]. \qquad (2;10{,}3)$$

Поскольку функционал $\Omega[z]$ — квазимонотонный, то в любой окрестности элемента z_0, $O_3(z, z_0)$, принадлежащей пересечению $O_1(z, z_0) \cap O_2(z, z_0)$, существует элемент z_1, для которого выполняется неравенство $\Omega[z_1] < \Omega[z_0]$. Так как для элемента z_1 выполняется неравенство (2; 10,3), то это означает, что на элементе z_0 не достигается $\inf\limits_{z\in F_1} \Omega[z]$. Это противоречит предпосылке. Лемма доказана.

8. Согласно этой лемме задача минимизации квазимонотонного функционала $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\gamma}$ сводится к задаче минимизации $\Omega[z]$ при условии

$$\rho_U^2(A_h z, u_\delta) = (\delta + h\{\Omega[z]\}^{1/2})^2$$

и решается методом неопределенных множителей Лагранжа, описанным в § 3, путем минимизации на F_1 соответствующего сглаживающего функционала

$$M^\alpha[z, u_\delta, A_h] = \rho_U^2(A_h z, u_\delta) + \alpha\Omega[z]$$

с определением α по «невязке», т. е. из условия

$$\rho_U^2\left(A_h z_\gamma^\alpha, u_\delta\right) = \left(\delta + h\{\Omega\left[z_\gamma^\alpha\right]\}^{1/2}\right)^2, \qquad (2;10{,}4)$$

где z_γ^α — элемент из F_1, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, u_\delta, A_h]$.

Введем следующие функции, определенные для всех $\alpha > 0$ при любой фиксированной паре γ неотрицательных чисел δ и h, $\gamma = (h, \delta)$:

$$\varphi_\gamma(\alpha) = \rho_U^2\left(A_h z_\gamma^\alpha, u_\delta\right),$$
$$\omega_\gamma(\alpha) = \Omega\left[z_\gamma^\alpha\right],$$
$$m_\gamma(\alpha) = M^\alpha\left[z_\gamma^\alpha, u_\delta, A_h\right] = \varphi_\gamma(\alpha) + \alpha\omega_\gamma(\alpha).$$

Тогда условие (2; 10,4) запишется в виде

$$\tilde{\Delta}_\gamma(\alpha) \equiv \varphi_\gamma(\alpha) - (\delta + h\sqrt{\omega_\gamma(\alpha)})^2 = 0.$$

Функции $\varphi_\gamma(\alpha)$ и $m_\gamma(\alpha)$ при всяком фиксированном γ монотонно не убывают, а $\omega_\gamma(\alpha)$ монотонно не возрастает (см. § 4).

Впервые способ нахождения приближенных (к $z_т$) решений уравнений вида $A_h z = u_\delta$ путем минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u_\delta, A_h]$ с определением α из уравнения (2; 10,4) был предложен и обоснован в [51, 52]. Функция $\tilde{\Delta}_\gamma(\alpha)$ была названа *обобщенной невязкой*. Если $\overline{A_h F} \neq U$, то вместо $\tilde{\Delta}_\gamma(\alpha)$ надо брать обобщенную невязку вида

$$\Delta_\gamma(\alpha) = \varphi_\gamma(\alpha) - (\delta + h\sqrt{\omega_\gamma(\alpha)})^2 - \mu_\gamma,$$

где

$$\mu_\gamma = \inf_{z \in F} \rho_U^2 (A_h z, u_\delta),$$

и определять α из уравнения

$$\Delta_\gamma(\alpha) \equiv \varphi_\gamma(\alpha) - (\delta + h\sqrt{\omega_\gamma(\alpha)})^2 - \mu_\gamma = 0.$$

В случаях, когда операторы A_h $(0 \leqslant h \leqslant h_1)$ линейны, непрерывны и осуществляют взаимно однозначное отображение F на U, F и U — гильбертовы пространства, $\Omega[z]$ — квадратичный функционал и $\delta^2 + \mu_\gamma < \|u_\delta\|_U^2$, в [52] показано, что при фиксированной паре $\gamma = (h, \delta)$ функция $\Delta_\gamma(\alpha)$ непрерывна, строго монотонно возрастает и исчерпывает интервал $(-\delta^2, \|u_\delta\|_U^2 - \delta^2 - \mu_\gamma)$. Следовательно, уравнение $\Delta_\gamma(\alpha) = 0$ имеет единственное решение $\alpha = \alpha(\gamma)$.

Элемент z_γ^α можно рассматривать как результат действия некоторого оператора $R_2(u_\delta, A_h, \alpha)$. При перечисленных выше условиях в [51, 52] показано, что оператор $R_2(u_\delta, A_h, \alpha)$ с определением α из уравнения $\Delta_\gamma(\alpha) = 0$ является регуляризирующим для уравнения $Az = u$ и $R_2(u_\delta, A_h, \alpha(\gamma)) \to z_т$ при $\gamma \to 0$.

Как отмечается в [52], если $\mu_\gamma < \delta^2$, то для определения α вместо уравнения $\Delta_\gamma(\alpha) = 0$ можно пользоваться уравнением $\tilde{\Delta}_\gamma(\alpha) = 0$. Если вместо величины μ_γ известна ее оценка сверху μ_γ^ε такая, что

$$0 \leqslant \mu_\gamma^\varepsilon - \mu_\gamma < \varepsilon_1$$

то уравнение для определения α по обобщенной невязке можно брать в виде

$$\varphi_\gamma(\alpha) - \left(\delta + h\sqrt{\omega_\gamma(\alpha)}\right)^2 - \mu_\gamma^\varepsilon = 0.$$

В [56] указываются рекуррентные формулы приближенного вычисления μ_γ.

Замечание. Изложенный метод регуляризации применим и для решения корректно поставленных задач вида $Az = u$, например, для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

В ряде работ рассматриваются различные вопросы, относящиеся к некорректно поставленным задачам [1, 4, 8, 23, 61, 89, 96, 118, 121, 131, 156, 159, 161, 163, 178, 183, 196, 198, 201—203, 207, 209, 213, 216, 217, 218, 219].

Глава III

О РЕШЕНИИ ВЫРОЖДЕННЫХ И ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Известно, с какими трудностями связано решение так называемых плохо обусловленных *) систем линейных алгебраических уравнений: малым изменениям правых частей таких систем могут отвечать большие (выходящие за допустимые пределы) изменения решения.

Рассмотрим систему уравнений

$$Az = u, \tag{3; 0,1}$$

где A — матрица с элементами a_{ij}, $A = \{a_{ij}\}$, z — искомый вектор с координатами z_j, $z = \{z_j\}$, u — известный вектор с координатами u_i, $u = \{u_i\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Система (3; 0,1) называется *вырожденной*, если определитель системы равен нулю, $\det A = 0$. В этом случае матрица A имеет равные нулю собственные значения. У плохо обусловленных систем такого вида матрица A имеет близкие к нулю собственные значения.

Если вычисления производятся с конечной точностью, то в ряде случаев не представляется возможным установить, является ли заданная система уравнений вырожденной или плохо обусловленной. Таким образом, плохо обусловленные и вырожденные системы могут быть неразличимыми в рамках заданной точности. Очевидно, такая ситуация имеет место в случаях, когда матрица A имеет достаточно близкие к нулю собственные значения.

В практических задачах часто правая часть u и элементы матрицы A, т. е. коэффициенты системы (3; 0,1), известны приближенно. В этих случаях вместо системы (3; 0,1) мы имеем дело с некоторой другой системой $\tilde{A}z = \tilde{u}$ такой, что $\|\tilde{A} - A\| \leqslant h$, $\|\tilde{u} - u\| \leqslant \delta$, где смысл норм обычно определяется характером задачи. Имея

*) Следует заметить, что этот термин не имеет вполне установившегося определения.

вместо матрицы A матрицу $\tilde{A}$, мы тем более не можем высказать определенного суждения о вырожденности или невырожденности системы (3; 0,1).

В этих случаях о точной системе $Az = u$, решение которой надо определить, нам известно лишь то, что для матрицы A и правой части u выполняются неравенства $\|\tilde{A} - A\| \leqslant h$ и $\|\tilde{u} - u\| \leqslant \delta$. Но систем с такими исходными данными (A, u) бесконечно много, и в рамках известного нам уровня погрешности они неразличимы. Поскольку вместо точной системы (3; 0,1) мы имеем приближенную систему $\tilde{A}z = \tilde{u}$, то речь может идти лишь о нахождении приближенного решения. Но приближенная система $\tilde{A}z = \tilde{u}$ может быть неразрешимой. Возникает вопрос: что надо понимать под приближенным решением системы (3; 0,1) в описанной ситуации?

Среди «возможных точных систем» могут быть и вырожденные. Если они разрешимы, то имеют бесконечно много решений. О приближенном нахождении какого из них должна идти речь?

Таким образом, в большом числе случаев мы должны рассматривать целый класс неразличимых между собой (в рамках заданного уровня погрешности) систем уравнений, среди которых могут быть и вырожденные, и неразрешимые. Методы построения приближенных решений систем этого класса должны быть одними и теми же, общими. Эти решения должны быть устойчивыми к малым изменениям исходных данных (3; 0,1).

В основе построения таких методов лежит идея «отбора», изложенная в гл. II при рассмотрении метода регуляризации.

2. Итак, рассмотрим произвольную систему линейных алгебраических уравнений (короче — СЛАУ)

$$Az = u, \qquad (3;\ 0{,}2)$$

в которой z и u — векторы, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbf{R}^m$, A — матрица с элементами a_{ij}, $A = \{a_{ij}\}$, где $j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$, и число n не обязано быть равным числу m.

Эта система может быть однозначно разрешимой, вырожденной (и иметь бесконечно много решений) и неразрешимой.

Псевдорешением системы (3; 0,2) называют вектор $\tilde{z}$, минимизирующий невязку $\|Az - u\|$ на всем пространстве $\mathbf{R}^n$. Система (3; 0,2) может иметь не одно псевдорешение. Пусть F_A есть совокупность всех ее псевдорешений и z^1 — некоторый фиксированный вектор из $\mathbf{R}^n$, определяемый обычно постановкой задачи.

Нормальным относительно вектора z^1 решением системы (3; 0,2) будем называть псевдорешение z^0 с минимальной нормой $\|z - z^1\|$, т. е. такое, что

$$\|z^0 - z^1\| = \inf_{z \in F_A} \|z - z^1\|.$$

Здесь $\|z\| = \left\{\sum_{j=1}^{n} z_j^2\right\}^{1/2}$. В дальнейшем для простоты записи будем считать $z^1 = 0$ и нормальное относительно вектора $z^1 = 0$ решение называть просто *нормальным решением.*

Нетрудно показать, что для любой системы вида (3; 0,2) нормальное решение существует и единственно.

З а м е ч а н и е 1. Нормальное решение z^0 системы (3; 0,2) можно определить также как псевдорешение, минимизирующее заданную положительно определенную квадратичную форму относительно координат вектора $z-z^1$. Все излагаемые ниже результаты остаются при этом справедливыми.

З а м е ч а н и е 2. Пусть ранг матрицы $\bar{A}$ вырожденной системы (3; 0,1) равен $r < n$ и $\bar{z}_{r+1}, \bar{z}_{r+2}, \ldots, \bar{z}_n$ — базис линейного пространства N_A, состоящего из элементов z, для которых $Az = 0$, $N_A = \{z;\ Az = 0\}$. Решение $\bar{z}^0$ системы (3; 0,1), удовлетворяющее $n - r$ условиям ортогональности

$$(\bar{z}^0 - z^1, \bar{z}_s) = 0, \quad s = r+1, r+2, \ldots, n, \qquad (3;\ 0,3)$$

определяется однозначно и совпадает с нормальным решением.

3. Нетрудно видеть, что задача нахождения нормального решения системы (3; 0,2) является некорректно поставленной. В самом деле, пусть A — симметричная матрица. Если она невырожденная, то ортогональным преобразованием

$$z = Vz^*, \quad u = Vu^*$$

ее можно привести к диагональному виду и преобразованная система будет иметь вид

$$\lambda_i z_i^* = u_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где λ_i — собственные значения матрицы A.

Если симметричная матрица A — невырожденная и имеет ранг r, то $n-r$ ее собственных значений равны нулю. Пусть

$$\lambda_i \neq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

и

$$\lambda_i = 0 \quad \text{для} \quad i = r+1, r+2, \ldots, n.$$

Полагаем, что система (3; 0,2) разрешима. При этом $u_i^* = 0$ для $i = r+1, \ldots, n$.

Пусть «исходные данные» системы (A и u) заданы с погрешностью, т. е. вместо A и u заданы их приближения $\tilde{A}$ и $\tilde{u}$:

$$\|\tilde{A} - A\| \leqslant h, \quad \|\tilde{u} - u\| \leqslant \delta.$$

При этом

$$\|A\| = \left\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\right\}^{1/2}, \quad \|u\| = \left\{\sum_i u_i^2\right\}^{1/2}. \qquad (3;0,4)$$

Пусть $\tilde{\lambda}_i$ — собственные значения матрицы $\tilde{A}$. Известно, что они непрерывно зависят от A в норме (3; 0,4). Следовательно, собственные значения $\tilde{\lambda}_{r+1}, \tilde{\lambda}_{r+2}, \ldots, \tilde{\lambda}_n$ могут быть сколь угодно малыми при достаточно малом h.

Если они не равны нулю, то

$$\tilde{z}_i^* = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i} \tilde{u}_i^*.$$

Таким образом, найдутся возмущения системы в пределах любой достаточно малой погрешности $\tilde{A}$ и $\tilde{u}$, для которых некоторые $\tilde{z}_i^*$ будут принимать любые наперед заданные значения. Это означает, что задача нахождения нормального решения системы (3; 0,2) является неустойчивой.

Ниже дается описание разработанного в [175, 176] метода нахождения нормального решения системы (3; 0,2), устойчивого к малым (в норме (3; 0,4)) возмущениям правой части u и матрицы A, основанного на методе регуляризации.

§ 1. Метод регуляризации нахождения нормального решения

1. Пусть z^0 есть нормальное решение системы

$$Az = \bar{u}. \qquad (3;\ 1,1)$$

Сначала для простоты будем полагать, что приближенной может быть лишь правая часть, а оператор (матрица) A — точный.

Итак, пусть вместо $\bar{u}$ мы имеем вектор $\tilde{u}$, $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$, т. е. вместо системы (3; 1,1) имеем систему

$$Az = \tilde{u}. \qquad (3;\ 1,2)$$

Требуется найти приближение $\tilde{z}_\delta$ к нормальному решению системы (3; 1,1), т. е. к вектору z^0 такое, что $\tilde{z}_\delta \to z^0$ при $\delta \to 0$. Отметим, что векторы $\bar{u}$ и $\tilde{u}$ (один из них или оба) могут не удовлетворять классическому условию разрешимости.

Поскольку система (3; 1,1) может быть неразрешимой, то $\inf\|Az - \bar{u}\| = \mu \geqslant 0$, где inf берется по всем векторам $z \in \mathbf{R}^n$.

Естественно искать приближения z_δ в классе Q_δ векторов z, сопоставимых по точности с исходными данными, т. е. таких, что $\|Az - \bar{u}\| \leqslant \mu + \delta$. Но поскольку вместо вектора $\bar{u}$ мы имеем вектор $\tilde{u}$, то мы можем найти лишь $\tilde{\mu} = \inf\limits_{z \in \mathbf{R}^n} \|Az - \tilde{u}\|$.

Отметим, что из очевидных неравенств

$$\|Az - \tilde{u}\| \leqslant \|Az - \bar{u}\| + \|\tilde{u} - \bar{u}\|,$$

$$\|Az - \bar{u}\| \leqslant \|Az - \tilde{u}\| + \|\tilde{u} - \bar{u}\|$$

следуют оценки $\tilde{\mu} \leqslant \mu + \delta$, $\mu \leqslant \tilde{\mu} + \delta$, приводящие к неравенству $|\tilde{\mu} - \mu| \leqslant \delta$. Поэтому будем искать приближение $\tilde{z}_\delta$ к нормальному решению z^0 в классе $\tilde{Q}_\delta$ векторов z, для которых $\|Az - \tilde{u}\| \leqslant \tilde{\mu} + 2\delta$. Отметим, что если имеется информация о разрешимости системы (3; 1,1), то $\mu = 0$ и в качестве класса $\tilde{Q}_\delta$ можно брать класс векторов z, для которых $\|Az - \tilde{u}\| \leqslant \delta$. Класс $\tilde{Q}_\delta$ есть класс формально возможных приближенных решений, Но нельзя в качестве $\tilde{z}_\delta$ брать произвольный вектор из класса $\tilde{Q}_\delta$, так как такое «приближение» будет неустойчивым к малым изменениям правой части уравнения (3; 1,2). Необходим принцип отбора. Он естественным образом вытекает из постановки задачи. В самом деле согласно определению нормального решения искомое решение z^0 должно быть псевдорешением с минимальной нормой. Поэтому в качестве приближения к z^0 естественно брать вектор $\tilde{z}_\delta$ из $\tilde{Q}_\delta$, минимизирующий функционал $\Omega[z] = \|z\|^2$ на множестве $\tilde{Q}_\delta$.

Таким образом, задача сводится к минимизации функционала $\Omega[z] = \|z\|^2$ на множестве $\tilde{Q}_\delta$ векторов z, для которых выполняется условие $\|Az - \tilde{u}\| \leqslant \tilde{\mu} + 2\delta$.

2. Пусть z_δ — вектор из $\tilde{Q}_\delta$, на котором функционал $\|z\|^2$ достигает минимума на множестве $\tilde{Q}_\delta$. Его можно рассматривать как результат применения к правой части $\tilde{u}$ уравнения (3; 1,2) некоторого оператора $R_1(\tilde{u}, \delta)$, зависящего от параметра δ. Справедлива

Теорема 1. *Оператор $R_1(\tilde{u}, \delta)$ обладает следующими свойствами:*

1) *он определен для всякого $\tilde{u} \in \mathrm{R}^m$ и любого $\delta > 0$;*

2) *при $\delta \to 0$ $z_\delta = R_1(\tilde{u}, \delta)$ стремится к нормальному решению z^0 уравнения $Az = u$, т. е. он является регуляризирующим для уравнения $Az = u$* (см. определение 1, гл. II, § 1).

Доказательство. Так как $\Omega[z] = \|z\|^2$ — неотрицательный функционал, то существует его точная нижняя грань $\Omega_0 = \inf\limits_{z \in \tilde{Q}_\delta} \Omega[z]$ и такая последовательность $\{\tilde{z}_n\}$ векторов $\tilde{z}_n \in \tilde{Q}_\delta$, что $\Omega[\tilde{z}_n] = \|\tilde{z}_n\|^2 \to \Omega_0$ при $n \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что для всякого $n > 1$

$$\|\tilde{z}_n\|^2 \leqslant \|\tilde{z}_{n-1}\|^2 \leqslant \ldots \leqslant \|\tilde{z}_1\|^2, \quad \tilde{z}_1 \neq 0.$$

Таким образом, последовательность $\{\tilde{z}_n\}$ принадлежит множеству $\tilde{Q}_\delta$ и замкнутой шаровой области $\bar{D}_r$ радиуса $r = \|z_1\|$, для всех элементов z (т. е. векторов) которой $\|z\|^2 \leqslant \|z_1\|^2$. По теореме Больцано — Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\tilde{z}_{n_k}\}$. Пусть

$$\lim_{n_k\to\infty} \tilde{z}_{n_k} = z_\delta.$$

В силу замкнутости множества

$$F_{r,\delta} \equiv \{z;\ \|z\|^2 \leqslant r^2 = \|z_1\|^2,\quad z \in \tilde{Q}_\delta\},$$

которому принадлежит последовательность $\{\tilde{z}_n\}$, вектор z_δ также принадлежит множеству $F_{r,\delta}$, а слдовательно, и множеству $\tilde{Q}_\delta$, $z_\delta \in \tilde{Q}_\delta$. Так как

$$\Omega_0 = \lim_{n_k\to\infty} \|\tilde{z}_{n_k}\|^2 = \|z_\delta\|^2,$$

то свойство 1) доказано.

Докажем свойство 2). Поскольку вектор z_δ минимизирует функционал $\|z\|^2$ на множестве $\tilde{Q}_\delta$, то $\|z_\delta\|^2 \leqslant \|z^0\|^2$. Таким образом, вектор z_δ принадлежит ограниченному замкнутому множеству $F_\delta^0 \equiv \{z;\ \|z\|^2 \leqslant \|z^0\|^2,\ z \in \tilde{Q}_\delta\}$. И так для всякого $\delta > 0$.

Пусть задана последовательность векторов $\{\tilde{u}_k\}$ таких, что $\|\tilde{u}_k - \bar{u}\| = \delta_k$ и $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Для каждого δ_k определено множество $\tilde{Q}_{\delta_k}$. По доказанному свойству 1) в каждом множестве $\tilde{Q}_{\delta_k}$ существует вектор $z_{\delta_k} \in F_0 \equiv \{z;\ \|z\|^2 \leqslant \|z^0\|^2\}$, минимизирующий функционал $\Omega[z] = \|z\|^2$ на множестве $\tilde{Q}_{\delta_k}$. Таким образом, последовательности векторов $\{\tilde{u}_k\}$ отвечает последовательность векторов $\{z_{\delta_k}\}$, принадлежащих замкнутому ограниченному множеству $F_0 \equiv \{z;\ \|z\|^2 \leqslant \|z^0\|^2\}$, и последовательность чисел $\tilde{\mu}_k = \inf\limits_{z \in \mathbf{R}^n} \|Az - \tilde{u}_k\|$, сходящаяся к μ при $k \to \infty$.

По теореме Больцано — Вейерштрасса из последовательности $\{z_{\delta_k}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{z_{\delta_{k_s}}\}$. Пусть

$$\lim_{k_s\to\infty} z_{\delta_{k_s}} = \tilde{z}.$$

Так как $z_{\delta_k} \in \tilde{Q}_{\delta_k}$, то для всякого вектора $z_{\delta_{k_s}}$ выполняется неравенство

$$\|Az_{\delta_{k_s}} - \tilde{u}_{k_s}\| \leqslant \tilde{\mu}_{k_s} + 2\delta_{k_s}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k_s \to \infty$ и учитывая неравенства $|\tilde{\mu}_{k_s} - \mu| \leqslant \delta_{k_s}$, получим $\|A\tilde{z} - \bar{u}\| \leqslant \mu$. Так как для всякого z $\|Az - \bar{u}\| \geqslant \mu$, то $\|A\tilde{z} - \bar{u}\| \geqslant \mu$. Следовательно, $\|A\tilde{z} - \bar{u}\| = \mu$. Поскольку векторы z_{δ_k} обладают свойством минимальности нормы, таким же свойством обладает и вектор $\tilde{z}$. В силу этого из равенства $\|A\tilde{z} - \bar{u}\| = \mu$ и единственности нормального решения следует, что $\tilde{z} = z^0$.

Таким образом, подпоследовательность $\{z_{\delta_{k_s}}\}$ сходится к нормальному решению уравнения $Az = \bar{u}$. И так для всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{z_{\delta_k}\}$. Отсюда следует, что последовательность $\{z_{\delta_k}\}$ сходится к нормальному решению z^0 уравнения $Az = \bar{u}$. Свойство 2), а тем самым и теорема 1, доказаны.

3. Пусть z_δ — вектор, на котором функционал $\Omega[z] = \|z\|^2$ достигает минимума на множестве $\tilde{Q}_\delta$. Легко видеть из наглядных геометрических представлений, что вектор z_δ лежит на границе множества $\tilde{Q}_\delta$, т. е. $\|Az_\delta - \tilde{u}\| = \tilde{\mu} + 2\delta = \delta_1$*).

Задачу нахождения вектора z_δ можно поставить так: среди векторов z, удовлетворяющих условию $\|Az - \tilde{u}\| = \mu + 2\delta$, найти вектор z_δ с минимальной нормой, т. е. минимизирующий функционал $\Omega[z] = \|z\|^2$.

Последнюю задачу можно решать методом Лагранжа, т. е. в качестве z_δ брать вектор z^α, минимизирующий функционал

$$M^\alpha[z, \tilde{u}] = \|Az - \tilde{u}\|^2 + \alpha\|z\|^2, \quad \alpha > 0,$$

с параметром α, определяемым по невязке, т. е. из условия $\|Az^\alpha - \tilde{u}\| = \delta_1$. При этом параметр α определяется однозначно (см. гл. II, § 4).

4. Поскольку $M^\alpha[z, \tilde{u}]$ — квадратичный функционал, то для любых $\tilde{u} \in \mathbf{R}^m$ и $\alpha > 0$ существует лишь один минимизирующий его вектор z^α. В самом деле, допустим,

---

*) Это следует непосредственно также из того, что функционал $\Omega[z] = \|z\|^2$ является стабилизирующим и квазимонотонным (см. гл. II, § 3).

что существуют два вектора z^α и $\widehat{z^\alpha}$, минимизирующие его. Рассмотрим векторы z, расположенные на прямой (пространства R^n), соединяющей z^α и $\widehat{z^\alpha}$:

$$z = z^\alpha + \beta(\widehat{z^\alpha} - z^\alpha).$$

Функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}]$ на элементах этой прямой есть неотрицательная квадратичная функция от β. Следовательно, она не может достигать наименьшего значения при двух различных значениях β: $\beta = 0$ $(z = z^\alpha)$ и $\beta = 1$ $(z = \widehat{z^\alpha})$.

Компоненты z_j^α вектора z^α являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha z_k^\alpha + \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} z_j^\alpha = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

получающихся из условий минимума функционала $M^\alpha[z^\alpha, \tilde{u}]$:

$$\frac{\partial M^\alpha}{\partial z_j^\alpha} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь

$$\bar{a}_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} a_{ij}, \quad b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \tilde{u}_i.$$

Компоненты z_j^α могут быть определены и с помощью какого-нибудь другого алгоритма минимизации функционала $M^\alpha[z, \tilde{u}]$.

Вектор z^α можно рассматривать как результат применения к $\tilde{u}$ некоторого оператора $z^\alpha = R(\tilde{u}, \alpha)$, зависящего от параметра α. Так как в рассматриваемом случае выполнены условия применимости метода регуляризации, то согласно гл. II, § 2 оператор $R(\tilde{u}, \alpha)$ является регуляризирующим, и поэтому вектор $z^\alpha = R(\tilde{u}, \alpha)$ можно принимать в качестве приближенного нормального решения системы (3; 1,1).

Однако чтобы предоставить возможность читать эту главу независимо от гл. II, мы проведем здесь доказательство высказанного утверждения и ряда последующих независимо от доказательств аналогичных утверждений, содержащихся в гл. II.

Покажем, что оператор $R_0(\tilde{u}, \alpha)$ является регуляризирующим для системы (3; 1,1), т. е. обладает свойствами 1) и 2) определения 2 (см. гл. II, § 1). В п. 2 мы установили, что он определен для всяких $\tilde{u} \in \mathbf{R}^m$ и $\alpha > 0$ и, следовательно, обладает свойством 1). Теперь покажем справедливость свойства 2), т. е. существование таких функций $\alpha = \alpha(\delta)$, что векторы $z^{\alpha(\delta)} = R_0(\tilde{u}, \alpha(\delta))$ сходятся к нормальному решению z^0 системы (3; 1,1) при $\delta \to 0$. Это непосредственно следует из приводимой ниже теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть z^0 есть нормальное решение системы $Az = \bar{u}$ и вместо вектора $\bar{u}$ мы имеем вектор $\tilde{u}$ такой, что $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$. Пусть, далее, $\beta_1(\delta)$ и $\beta_2(\delta)$ — какие-либо непрерывные на $[0, \delta_2]$ и положительные на $(0, \delta_2]$ функции, монотонно стремящиеся к нулю при $\delta \to 0$ и такие, что*

$$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)} \leqslant \beta_2(\delta), \quad \beta_2(0) = 0.$$

Тогда для любой положительной на $(0, \delta_2]$ функции $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha(\delta) \leqslant \beta_2(\delta),$$

векторы $z^{\alpha(\delta)} = R_0(\tilde{u}, \alpha(\delta))$ сходятся к нормальному решению z^0 системы $Az = \bar{u}$ при $\delta \to 0$, т. е.

$$\lim_{\delta \to 0} \| z^{\alpha(\delta)} - z^0 \| = 0.$$

Доказательство. Системы $Az = \bar{u}$ и $Az = \tilde{u}$ могут не иметь классического решения. Поэтому

$$\inf_{z \in \mathbf{R}^n} \| Az - \bar{u} \| = \mu \geqslant 0, \quad \inf_{z \in \mathbf{R}^n} \| Az - \tilde{u} \| = \tilde{\mu} \geqslant 0.$$

Пусть на векторе z^α функционал

$$M^\alpha[z, \tilde{u}] = \| Az - \tilde{u} \|^2 + \alpha \| z \|^2$$

достигает своей точной нижней грани на $\mathbf{R}^n$. Тогда, очевидно, выполняются неравенства

$$\tilde{\mu}^2 + \alpha \| z^\alpha \|^2 \leqslant M^\alpha[z^\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[z^0, \tilde{u}] =$$
$$= \| Az^0 - \tilde{u} \|^2 + \alpha \| z^0 \|^2 \leqslant (\| Az^0 - \bar{u} \| + \| \tilde{u} - \bar{u} \|)^2 +$$
$$+ \alpha \| z^0 \|^2 \leqslant (\| Az^0 - \bar{u} \| + \delta)^2 + \alpha \| z^0 \|^2 =$$
$$= (\mu + \delta)^2 + \alpha \| z^0 \|^2,$$

так как $\|\tilde{u}-\bar{u}\| \leqslant \delta$ и $\|Az^0-\bar{u}\|=\mu$ по определению нормального решения уравнения $Ax=\bar{u}$.

Таким образом, для любого $\alpha>0$ и произвольного $u \in \mathrm{R}^m$ такого, что $\|\tilde{u}-\bar{u}\| \leqslant \delta$, имеем

$$\tilde{\mu}^2+\alpha\|z^\alpha\|^2 \leqslant (\mu+\delta)^2+\alpha\|z^0\|^2.$$

Учитывая, что $\mu \leqslant \tilde{\mu}+\delta$ (см. стр. 114), отсюда получаем

$$\|z^\alpha\|^2 \leqslant 4\frac{\delta}{\alpha}(\tilde{\mu}+\delta)+\|z^0\|^2.$$

Для значений α, удовлетворяющих условию $\delta/\alpha \leqslant \beta_1(\delta)$,

$$\|z^\alpha\|^2 \leqslant \beta_1(\delta)\,4(\tilde{\mu}+\delta)+\|z^0\|^2 \leqslant \beta_1(\delta)\,4(\mu+2\delta)+\|z^0\|^2,$$

или

$$\|z^\alpha\|^2 \leqslant \varphi(\delta)+\|z^0\|^2 \leqslant \varphi(\delta_2)+\|z^0\|^2, \tag{3;1,3}$$

где $\varphi(\delta)=4(\mu+2\delta)\beta_1(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Неравенство (3; 1,3) справедливо для любой положительной на промежутке $(0, \delta_2]$ функции $\alpha=\alpha(\delta)$, удовлетворяющей для всех $\delta \in [0, \delta_2]$ неравенству $\alpha(\delta) \geqslant \delta/\beta_1(\delta)$. В дальнейших рассуждениях $\alpha=\alpha(\delta)$ будет фиксированной функцией такого рода.

Пусть $\{\tilde{u}_k\}$ — последовательность векторов, таких, что последовательность чисел $\delta_k=\|\tilde{u}_k-\bar{u}_k\|$ сходится к нулю, т. е. $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Этой последовательности отвечает последовательность векторов z^{α_k}, $\alpha_k=\alpha(\delta_k)$, принадлежащих замкнутой шаровой области

$$D \equiv \{z;\ \|z\|^2 \leqslant \varphi(\delta_2)+\|z^0\|^2\}.$$

Из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\left\{z^{\alpha_{k_s}}\right\}$. Пусть $\lim\limits_{k_s \to \infty} z^{\alpha_{k_s}}=\tilde{z}$. Для всякого k, имеем

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \left\|Az^{\alpha_{k_s}}-\bar{u}\right\|-\mu \leqslant \left\|Az^{\alpha_{k_s}}-\tilde{u}_{k_s}\right\|+\delta_{k_s}-\mu \leqslant \\
\leqslant \sqrt{M^{\alpha_{k_s}}\left[z^{\alpha_{k_s}}, \tilde{u}_{k_s}\right]}-\mu+\delta_{k_s} \leqslant \sqrt{M^{\alpha_{k_s}}\left[z^0, \tilde{u}_{k_s}\right]}- \\
-\mu+\delta_{k_s}=\sqrt{\left\|Az^0-\tilde{u}_{k_s}\right\|^2+\alpha_{k_s}\|z^0\|^2}-\mu+\delta_{k_s} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{\left(\|Az^0-\bar{u}\|+\delta_{k_s}\right)^2+\alpha_{k_s}\|z^0\|^2}-\mu+\delta_{k_s}= \\
=\sqrt{(\mu+\delta_{k_s})^2+\alpha_{k_s}\|z^0\|^2}-\mu+\delta_{k_s},
\end{aligned}$$

так как $\|Az^0 - \bar{u}\| = \mu$. Используя условие $\alpha_{k_s} = \alpha(\delta_{k_s}) \leqslant \leqslant \beta_2(\delta_{k_s})$, получим

$$0 \leqslant \left\| Az^{\alpha_{k_s}} - \bar{u} \right\| - \mu \leqslant \sqrt{(\mu + \delta_{k_s})^2 + \beta_2(\delta_{k_s}) \|z^0\|^2} - \\ - \mu + \delta_{k_s} = \gamma(\delta_{k_s}),$$

где $\gamma(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, для всякого индекса k_s выполняется неравенство

$$0 \leqslant \left\| Az^{\alpha_{k_s}} - \bar{u} \right\| - \mu \leqslant \gamma(\delta_{k_s}).$$

Переходя к пределу при $k_s \to \infty$, получим $\| A\tilde{z} - \bar{u} \| = \mu$. Это означает, что $\tilde{z}$ является псевдорешением уравнения (3; 1,1). Оно обладает свойством минимальности нормы. А поскольку нормальное решение z^0 уравнения (3; 1,1) единственно, то $\tilde{z} = z^0$.

И так для всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{z^{\alpha_k}\}$. Следовательно, последовательность $\{z^{\alpha_k}\}$ сходится к нормальному решению z^0 системы $Az = \bar{u}$, а тем самым и $z^{\alpha(\delta)}$ сходится к z^0 при $\delta \to 0$. Теорема доказана.

Замечание. Обозначим через U_A линейное подпространство пространства $\mathbf{R}^m$, состоящее из множества всех образов векторов $z \in \mathbf{R}^n$, т. е.

$$U_A \equiv \{u; \quad u = Az, \quad z \in \mathbf{R}^n\}.$$

Пусть $Az = u$ — система линейных алгебраических уравнений, $z \in \mathbf{R}^n$. Если эта система несовместна, т. е. не имеет классического решения, обозначим через v_A проекцию вектора u на U_A. Как известно, вектор $v = u - v_A$ ортогонален подпространству U_A, поэтому для всякого $z \in \mathbf{R}^n$

$$\| Az - u \|^2 = \| Az - v_A \|^2 + \| u - v_A \|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\mu = \inf_{z \in \mathbf{R}^n} \| Az - u \| = \| u - v_A \|,$$

так как $\inf\limits_{z \in \mathbf{R}^n} \| Az - v_A \| = 0$.

§ 2. Приближенное нахождение нормального решения по неточно известным правой части и матрице

Теперь рассмотрим случай, когда неточно заданы как правая часть u, так и матрица A, т. е. пусть вместо системы уравнений $\bar{A}z = \bar{u}$ с нормальным решением z^0 мы имеем систему

$$\tilde{A}z = \tilde{u}, \quad z \in \mathbf{R}^n, \quad \tilde{u} \in \mathbf{R}^m, \qquad (3;\ 2{,}1)$$

где $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$ и $\|\tilde{A} - \bar{A}\| = \sup\limits_{\|z\|=1} \|\tilde{A}z - \bar{A}z\| \leqslant h$. Требуется найти векторы z_γ, $\gamma = (\delta, h)$, такие, что $\lim\limits_{\gamma \to 0} \|z_\gamma - z^0\| = 0$. Такие векторы z_γ мы будем называть *приближениями к нормальному решению* z^0 уравнения $\bar{A}z = \bar{u}$, а также *приближенными нормальными решениями*. Их можно находить путем минимизации сглаживающего функционала

$$M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}] = \|\tilde{A}z - \tilde{u}\|^2 + \alpha\|z\|^2, \qquad (3;\ 2{,}2)$$

подобно изложенному в § 1.

1. Итак, рассмотрим функционал (3; 2,2). Для него справедлива

Теорема 3. *Для всяких $\tilde{u} \in \mathbf{R}^m$, $\tilde{A}$ и $\alpha > 0$ существует единственный вектор z^α, минимизирующий функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$.*

Доказательство проводится совершенно так же, как и доказательство аналогичного утверждения для $M^\alpha[z, \tilde{u}]$, проведенное в § 1. Таким образом, для всяких $\alpha > 0$, $\tilde{u} \in \mathbf{R}^m$ и $\tilde{A}$ определен такой оператор $\tilde{R}(\tilde{u}, \tilde{A}, \alpha)$ со значениями из $\mathbf{R}^n$, что вектор

$$z^\alpha = \tilde{R}(\tilde{u}, \tilde{A}, \alpha)$$

минимизирует функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$ на $\mathbf{R}^n$.

Покажем, что оператор $\tilde{R}(\tilde{u}, \tilde{A}, \alpha)$ является регуляризирующим для системы (3; 2,1), т. е. обладает свойствами 1) и 2) определения (см. стр. 55). Справедливость свойства 1) только что установлена. Покажем справедливость свойства 2), т. е. существование таких функций $\alpha = \alpha(\delta, h)$, что векторы $z^{\alpha(\delta, h)} = \tilde{R}(\tilde{u}, \tilde{A}, \alpha(\delta, h))$ сходятся к нормальному решению z^0 системы $\bar{A}z = \bar{u}$ при

$\gamma \to 0$. Это непосредственно следует из приводимой ниже теоремы 4, аналогичной теореме 2.

Теорема 4. *Пусть z^0 — нормальное решение системы $\bar{A}z = \bar{u}$ и вместо $\bar{u}$ и $\bar{A}$ мы имеем $\tilde{u}$ и $\tilde{A}$ такие, что $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$, $\|\tilde{A} - \bar{A}\| \leqslant h$. Пусть, далее, σ_1 — заданное положительное число, $\beta_1(\sigma)$ и $\beta_2(\sigma)$ — какие-либо непрерывные на отрезке $[0, \sigma_1]$ и положительные на $(0, \sigma_1]$ функции, монотонно стремящиеся к нулю при $\sigma \to 0$ и такие, что*

$$\frac{\sigma}{\beta_1(\sigma)} \leqslant \beta_2(\sigma), \quad \beta_2(0) = 0.$$

Тогда для любой положительной на $(0, \sigma_1]$ функции $\alpha = \alpha(\sigma)$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{\sigma}{\beta_1(\sigma)} \leqslant \alpha(\sigma) \leqslant \beta_2(\sigma), \quad \sigma \in [0, \sigma_1],$$

векторы $z^{\alpha(\Delta)} = \tilde{R}(\tilde{u}, \tilde{A}, \alpha(\Delta))$, где $\Delta = hq + \delta \leqslant \sigma_1$, сходятся к нормальному решению z^0 системы $\bar{A}z = \bar{u}$ при $\gamma = (\delta, h) \to 0$, т. е.

$$\lim_{\gamma \to 0} \|z^{\alpha(\Delta)} - z^0\| = 0.$$

Здесь q — произвольное фиксированное число, $q > \|z^0\|$.

Доказательство. Пусть вектор z^α минимизирует функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}]$ на $\mathbf{R}^n$ и $\tilde{\mu} = \inf\limits_{z \in \mathbf{R}^n} \|\tilde{A}z - \tilde{u}\|$. Тогда для всякого $\alpha > 0$

$$M^\alpha[z^\alpha, \tilde{u}, \tilde{A}] \leqslant M^\alpha[z^0, \tilde{u}, \tilde{A}].$$

Поэтому

$$\tilde{\mu}^2 + \alpha\|z^\alpha\|^2 \leqslant M^\alpha[z^\alpha, \tilde{u}, \tilde{A}] \leqslant M^\alpha[z^0, \tilde{u}, \tilde{A}] =$$
$$= \|\tilde{A}z^0 - \tilde{u}\|^2 + \alpha\|z^0\|^2 \leqslant (\|\tilde{A}z^0 - \bar{A}z^0\| + \|\bar{A}z^0 - \tilde{u}\|)^2 +$$
$$+ \alpha\|z^0\|^2 \leqslant (\|\tilde{A} - \bar{A}\|\|z^0\| + \|\bar{A}z^0 - \bar{u}\| + \|\tilde{u} - \bar{u}\|)^2 + \alpha\|z^0\|^2.$$

Поскольку $\|\tilde{A} - \bar{A}\| \leqslant h$, $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$ и $\|\bar{A}z^0 - \bar{u}\| = \mu$, то

$$\tilde{\mu}^2 + \alpha\|z^\alpha\| \leqslant (h\|z^0\| + \delta + \mu)^2 + \alpha\|z^0\|^2. \quad (3;\ 2,3)$$

Из неравенств

$$\|\bar{A}z-\bar{u}\| \leqslant \|\bar{A}z-\tilde{A}z\|+\|\tilde{A}z-\tilde{u}\|+\|\tilde{u}-\bar{u}\| \leqslant$$
$$\leqslant h\|z\|+\|\tilde{A}z-\tilde{u}\|+\delta,$$
$$\|\tilde{A}z-\tilde{u}\| \leqslant \|\tilde{A}z-\bar{A}z\|+\|\bar{A}z-\bar{u}\|+\|\tilde{u}-\bar{u}\| \leqslant$$
$$\leqslant h\|z\|+\|\bar{A}z-\bar{u}\|+\delta,$$

справедливых для всех $z \in \mathrm{R}^n$, получаем

$$\mu \leqslant \tilde{\mu}+h\|z^0\|+\delta, \qquad (3;\ 2,4)$$
$$\tilde{\mu} \leqslant \mu+h\|z^0\|+\delta. \qquad (3;\ 2,5)$$

Из неравенств (3; 2,3) и (3; 2,4) следует, что

$$\tilde{\mu}^2+\alpha\|z^\alpha\|^2 \leqslant \{2(h\|z^0\|+\delta)+\tilde{\mu}\}^2+\alpha\|z^0\|^2,$$

откуда

$$\|z^\alpha\|^2 \leqslant 4\frac{h\|z^0\|+\delta}{\alpha}\left(h\|z^0\|+\delta+\tilde{\mu}\right)+\|z^0\|^2.$$

Используя неравенство (3; 2,5), получаем

$$\|z^\alpha\|^2 \leqslant 4\frac{h\|z^0\|+\delta}{\alpha}[2(h\|z^0\|+\delta)+\mu]+\|z^0\|^2.$$

Для значений $\alpha=\alpha(\Delta)$, удовлетворяющих условию $\Delta/\alpha \leqslant \beta_1(\Delta)$, где $\Delta = hq+\delta$,

$$\|z^\alpha\|^2 \leqslant 4\beta_1(\Delta)(2\Delta+\mu)+\|z^0\|^2,$$

или

$$\|z^\alpha\|^2 \leqslant \varphi(\Delta)+\|z^0\|^2 \leqslant \varphi(\sigma_1)+\|z^0\|^2, \qquad (3;\ 2,6)$$

где $\varphi(\Delta)=4\beta_1(\Delta)(2\Delta+\mu)\to 0$ при $\gamma \equiv (\delta, h)\to 0$.

Неравенство (3; 2,6) справедливо для любой положительной на промежутке $(0, \sigma_1]$ функции $\alpha=\alpha(\Delta)$, удовлетворяющей для всех $\Delta \in [0, \sigma_1]$ условию $\alpha(\Delta) \geqslant \Delta/\beta_1(\Delta)$. В дальнейших рассуждениях $\alpha=\alpha(\Delta)$ будем считать фиксированной функцией такого рода.

Пусть $\{\tilde{u}_k\}$ — последовательность векторов, а $\{\tilde{A}_s\}$ — последовательность матриц, таких, что последовательности чисел $\|\tilde{u}_k-\bar{u}\|=\delta_k$ и $\|\tilde{A}_s-\bar{A}\|=h_s$ сходятся к нулю, т. е. $\delta_k\to 0$ при $k\to\infty$ и $h_s\to 0$ при $s\to\infty$. Этим последовательностям отвечает последовательность векторов

$z^{\alpha_{h_s}}$, $\alpha_{h,s}=\alpha(\Delta_{h,s})=\alpha(h_s\|z^0\|+\delta_h)$, принадлежащих замкнутой шаровой области

$$D\equiv\{z;\ \|z\|^2\leqslant\varphi(\sigma_1)+\|z^0\|\}.$$

Следовательно, из последовательности $\{z^{\alpha_{h,s}}\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\left\{z^{\alpha_{k_r,s_t}}\right\}$. Пусть

$$\lim_{k_r,s_t\to\infty} z^{\alpha_{k_r,s_t}}=\tilde{z}.$$

Введем обозначения $z^{\alpha_{k_r,s_t}}=z_{r,t}$, $\alpha_{k_r,s_t}=\alpha^{r,t}$. Для всяких k_r и s_t имеем

$$0\leqslant\|\bar{A}z_{r,t}-\bar{u}\|-\mu\leqslant\|\tilde{A}_{s_t}z_{r,t}-\tilde{u}_{k_r}\|+\|\tilde{A}_{s_t}z_{r,t}-\bar{A}z_{r,t}\|+$$
$$+\|\tilde{u}_{k_r}-\bar{u}\|-\mu\leqslant\|\tilde{A}_{s_t}z_{r,t}-\tilde{u}_{k_r}\|+h_{s_t}\|z_{r,t}\|+\delta_{k_r}-\mu\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{M^{\alpha^{r,t}}[z_{r,t},\tilde{u}_{k_r},\tilde{A}_{s_t}]}+h_{s_t}\|z_{r,t}\|+\delta_{k_r}-\mu\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{M^{\alpha^{r,t}}[z^0,\tilde{u}_{k_r},\tilde{A}_{s_t}]}+h_{s_t}\|z_{r,t}\|+\delta_{k_r}-\mu\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\|\tilde{A}_{s_r}z^0-\tilde{u}_{k_r}\|^2+\alpha^{r,t}\|z^0\|^2}+h_{s_t}\|z_{r,t}\|+\delta_{k_r}-\mu\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(\|\tilde{A}_{s_t}z^0-\bar{A}z^0\|+\|\bar{A}z^0-\bar{u}\|+\|\tilde{u}_{k_r}-\bar{u}\|)^2+\alpha^{r,t}\|z^0\|^2}+$$
$$+h_{s_t}\|z_{r,t}\|+\delta_{k_r}-\mu\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(h_{s_t}\|z^0\|+\delta_{k_r}+\mu)^2+\alpha^{r,t}\|z^0\|^2}+h_{s_t}\|z_{r,t}\|+\delta_{k_r}-\mu,$$

так как $\|\bar{A}z^0-\bar{u}\|=\mu$. Используя условие $\alpha^{r,t}=\alpha_{k_r,s_t}=$ $=\alpha(\Delta_{k_r,s_t})\leqslant\beta_2(\Delta_{k_r,s_t})$, получим

$$0\leqslant\|\bar{A}z_{r,t}-\bar{u}\|-\mu\leqslant\sqrt{(\Delta_{k_r,s_t}+\mu)^2+\beta_2(\Delta_{k_r,s_t})\|z^0\|^2}+$$
$$+h_{s_t}\|z_{r,t}\|+\delta_{k_r}-\mu,\quad(3;\ 2{,}7)$$

где $\Delta_{k_s,r_t}=h_{s_t}\|z^0\|+\delta_{k_r}$.

Таким образом, для всякой пары чисел k_r, s_t выполняется неравенство (3; 2,7) и, согласно (3; 2,6), неравенство

$$\|z_{r,t}\|\leqslant\{\varphi(\Delta_{k_r,s_t})+\|z^0\|^2\}^{1/2}.$$

Переходя к пределу при k_r и $s_t \to \infty$, получим

$$\|\bar{A}\tilde{z} - \bar{u}\| = \mu.$$

Это означает, что $\tilde{z}$ является псевдорешением уравнения $\bar{A}z = \bar{u}$. Оно обладает свойством минимальности нормы. А поскольку нормальное решение z^0 уравнения $\bar{A}z = \bar{u}$ единственно, то $\tilde{z} = z^0$. И так для всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{z^{\alpha_{k,s}}\}$. Следовательно, последовательность $\{z^{\alpha_{k,s}}\}$ сходится к нормальному решению z^0 системы $\bar{A}z = \bar{u}$, а тем самым и $z^{\alpha(\Delta)}$ сходится к z^0 при $\gamma \to 0$. Теорема доказана.

2. В условиях, когда вместо правой части $u = \bar{u}$ и оператора $\bar{A}$ мы имеем их приближения $\tilde{u}$ и $\tilde{A}$ такие, что $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$, $\|\tilde{A} - \bar{A}\| \leqslant h$, классом $\tilde{Q}_\gamma$, $\gamma \equiv (\delta, h)$, сравнимых по точности с исходными данными (т. е. допустимых) приближений к нормальному решению z^0 уравнения $\bar{A}z = \bar{u}$ является множество векторов z, удовлетворяющих условию $\|\tilde{A}z - \tilde{u}\| \leqslant 2(h\|z\| + \delta) + \tilde{\mu}$.

Поскольку нормальное решение z^0 обладает свойством минимальности нормы, то естественно задачу нахождения приближений к нормальному решению z^0 поставить так: в классе $\tilde{Q}_\gamma$ векторов z найти вектор z_γ, минимизирующий функционал $\Omega[z] = \|z\|^2$, т. е. найти такой вектор

$$z_\gamma \in \tilde{Q}_\gamma \equiv \{z;\ \|\tilde{A}z - \tilde{u}\| \leqslant 2(h\|z\| + \delta) + \tilde{\mu}\},$$

что $\inf\limits_{z \in \tilde{Q}_\gamma} \|z\|^2 = \|z_\gamma\|^2$.

Из наглядных геометрических представлений легко видеть, что справедлива *)

Лемма. *Вектор z_γ, минимизирующий функционал $\|z\|^2$ на множестве $\tilde{Q}_\gamma$, удовлетворяет условию*

$$\|\tilde{A}z_\gamma - \tilde{u}\| = 2(h\|z_\gamma\| + \delta) + \tilde{\mu}.$$

Поэтому упомянутая задача сводится к следующей: на множестве векторов z, удовлетворяющих условию

$$\|\tilde{A}z - \tilde{u}\| = 2(h\|z\| + \delta) + \tilde{\mu},$$

найти вектор z_γ минимальной нормы.

---

*) Формальное доказательство для более широкого класса функционалов $\Omega[z]$ дано на стр. 66.

Если числа δ и h известны, то эту задачу можно решать методом неопределенных множителей Лагранжа, т. е. находить вектор z^α, минимизирующий (на всем пространстве $\mathbf{R}^n$) сглаживающий функционал

$$M^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{A}] = \|h\tilde{A}z - \tilde{u}\|^2 + \alpha\|z\|^2,$$

а параметр α определять из условия

$$\|\tilde{A}z^\alpha - \tilde{u}\| = 2(h\|z^\alpha\| + \delta) + \tilde{\mu}.$$

При этом функции $\varphi(\alpha) = \|\tilde{A}z^\alpha - \tilde{u}\|^2$ и $\psi(\alpha) = (h\|z^\alpha\| + \delta)^2$ — строго монотонные, $\varphi(\alpha)$ — возрастающая, $\psi(\alpha)$ — убывающая (см. гл. II, § 4). Поэтому, если числа h и δ, т. е. уровни погрешности исходных данных, известны, то α определяется однозначно.

§ 3. Дополнительные замечания

Замечание 1. Поскольку изложение в §§ 1 и 2 не связано (существенно) с конечномерностью пространств F и U, которым принадлежат элементы z и u, оно справедливо для произвольных непрерывных линейных операторов Az (доказательства дословно повторяются), если U — гильбертово пространство, а F принадлежит нормированному пространству, в которое F s-компактно вложено [170]. Это позволяет использовать метод регуляризации для интегральных уравнений Фредгольма второго рода (см. [2, 3]).

Замечание 2. Описанный метод пригоден и для решения некорректных задач линейного программирования (см. гл. IX), в которых ищется решение системы, удовлетворяющее дополнительным ограничениям (решение должно принадлежать замкнутому выпуклому множеству).

Замечание 3. Стабилизатор $\Omega[z]$ можно также брать в виде

$$\Omega[z] = \sum_{i=1}^{n} \rho_i (z_i - z_{1i})^2,$$

где $\rho_i > 0$, $z_1 = (z_{1,1}, z_{1,2}, \ldots, z_{1,n})$, или в виде произвольной положительно определенной квадратичной формы относительно $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Такое изменение стабилизатора не изменяет ни формулировок теорем §§ 1 и 2, ни их доказательства.

Глава IV

О МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В настоящей главе подробно излагается метод регуляризации построения приближенных решений линейных интегральных уравнений первого рода. Изложение не опирается на общие результаты, касающиеся метода регуляризации, содержащиеся в гл. II, в применении к произвольным уравнениям вида $Az = u$. Из материала гл. II используется лишь понятие регуляризирующего оператора, введенное в § 1 гл. II. Это позволяет читать главу IV независимо от гл. II.

§ 1. Существование регуляризирующих операторов для интегральных уравнений первого рода

В настоящем параграфе мы рассмотрим вариационный способ построения регуляризирующих операторов, т. е. вариационный способ построения приближенных решений, для линейных интегральных уравнений первого рода, устойчивых к малым изменениям правой части (см. [165, 166]).

1. Будем рассматривать уравнение вида

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \quad x \in [c, d], \qquad (4;1,1)$$

с конечным промежутком интегрирования $[a, b]$, в котором ядро $K(x, s)$ непрерывно по совокупности переменных (x, s) в замкнутой области $\{a \leqslant s \leqslant b;\ c \leqslant x \leqslant d\}$. Уклонение правой части $u(x)$ будем оценивать в метрике L_2, т. е. по формуле

$$\rho_{L_2}(u_1, u_2) = \left\{\int_c^d [u_1(x) - u_2(x)]^2\, dx\right\}^{1/2},$$

а уклонение решения $z(s)$ — в метрике C, т. е. по формуле

$$\rho_C(z_1, z_2) = \max_{s\in[a,b]} |z_1(s) - z_2(s)|.$$

Обозначим через F_1 класс непрерывных на $[a, b]$ функций $z(s)$, имеющих обобщенные производные первого порядка $z'(s)$, интегрируемые с квадратом на $[a, b]$*). Аналогично через F_n будем обозначать класс непрерывных на $[a, b]$ функций $z(s)$, имеющих производные до n-го порядка, интегрируемые с квадратом на $[a, b]$.

Будем полагать, что уравнение (4; 1,1) с точной правой частью $u = u_т(x)$ имеет единственное на множестве F_1 решение $z_т(s)$, $z_т(s) \in F_1$.

Рассмотрим совокупность всех функций $u(x)$, интегрируемых с квадратом на $[c, d]$ с метрикой, определяемой по формуле

$$\rho_{L_2}(u_1, u_2) = \left\{\int_c^d [u_1(x) - u_2(x)]^2\, dx\right\}^{1/2}.$$

Это метрическое пространство $L_2(c, d)$.

Пусть вместо функции $u_т(x)$ мы имеем функцию $u_\delta(x)$ из $L_2(c, d)$ такую, что $\rho_{L_2}(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$, причем

$$\delta^2 < \int_c^d u_\delta^2(x)\, dx. \tag{4;1,2}$$

Таким образом, вместо уравнения

$$\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u_т(x)$$

мы имеем уравнение

$$\int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u_\delta(x). \tag{4;1,3}$$

В этих условиях речь может идти лишь о нахождении приближенного (к $z_т(s)$) решения уравнения (4; 1,3).

*) См. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике.— ЛГУ, 1950, а также Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V.— М.: Наука, 1959.

2. Будем искать приближенное решение среди функций множества F_1, точнее в классе Q_δ функций из F_1, для которых

$$\rho_{L_2}(Az, u_\delta) \leqslant \delta,$$

т. е. в классе функций $F_{1,\delta} = Q_\delta \cap F_1$. Они сопоставимы по точности с исходными данными.

Таким образом, $F_{1,\delta}$ является множеством возможных приближенных решений уравнения (4; 1,3), сопоставимых по точности с исходными данными.

Однако нельзя брать в качестве приближенного решения уравнения (4; 1,3) произвольную функцию из множества $F_{1,\delta}$, так как такое «приближенное решение» не будет устойчивым к малым изменениям правой части $u_\delta(x)$ и может как угодно сильно отличаться от $z_т(s)$. Множество $F_{1,\delta}$ слишком широкое. Необходим принцип отбора, обеспечивающий получение приближенного решения, устойчивого к малым изменениям правой части $u_\delta(x)$. Отбор можно реализовать следующим образом.

На функциях $z(s)$ из F_1, очевидно, определены функционалы вида

$$\Omega[z] = \int_a^b \left\{ q(s) z^2(s) + p(s) \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right\} ds, \qquad (4;\ 1,4)$$

где $q(s)$ и $p(s)$ — заданные неотрицательные непрерывные функции такие, что для всякого $s \in [a, b]$ $q^2(s) + p^2(s) \neq 0$ и $p(s) \geqslant p_0 > 0$, где p_0 — число. Возьмем один из них, фиксированный.

Поскольку $\Omega[z]$ — неотрицательный функционал, то существует его точная нижняя грань на множестве $F_{1,\delta}$, т. е. число

$$\Omega_0 = \inf_{z \in F_{1,\delta}} \Omega[z].$$

Упомянутый выше принцип отбора состоит в том, что в качестве искомого приближенного решения предлагается брать функцию $z_\delta(s)$, на которой достигается точная нижняя грань функционала $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$.

Функцию $z_\delta(s)$ можно рассматривать как результат применения к правой части $u_\delta(x)$ уравнения (4; 1,3) некоторого оператора $\widetilde{R}$, зависящего от параметра δ, т. е.

$$z_\delta(s) = \widetilde{R}(u_\delta, \delta).$$

Ниже мы покажем, что:

1) оператор $\tilde{R}(u_\delta, \delta)$ определен на всякой функции u_δ, интегрируемой с квадратом на $[c, d]$ (т. е. $u_\delta \in L_2(c, d)$), и значения его $z_\delta(s) = \tilde{R}(u_\delta, \delta)$ принадлежат множеству F_1;

2) оператор $\tilde{R}(u, \delta)$ является регуляризирующим для уравнения (4; 1,1).

Если за меру гладкости возможных приближенных решений принять значения функционала $\Omega[z]$, что согласуется с наглядными представлениями о гладкости графиков функций, то согласно предлагаемому принципу отбора в качестве приближенного решения уравнения (4; 1,3) берется наиболее гладкое из возможных решений.

3. Перейдем к доказательству утверждений 1) и 2). Мы при этом будем пользоваться определением 1 регуляризирующего оператора.

Теорема 1. *Для всякого $\delta > 0$ и произвольной функции $u_\delta(x)$ из $L_2[c, d]$ такой, что*

$$\rho_{L_2}(u_\delta, u_T) \leqslant \delta,$$

точная нижняя грань функционала $\Omega[z]$ вида (4; 1,4) на множестве $F_{1,\delta}$ достигается на непрерывной функции $z_\delta(s) \in F_{1,\delta}$.

Для доказательства нам потребуется

Лемма 1. *Каково бы ни было положительное число $D > 0$, из любого семейства функций Φ из F_1, удовлетворяющих неравенству*

$$\Omega[z] = \int_a^b \left\{ q(s) z^2(s) + p(s) \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right\} ds \leqslant D,$$

можно выделить последовательность функций $\{z_n(s)\}$, равномерно сходящуюся на $[a, b]$ к некоторой непрерывной функции (т. е. множество $F_D \equiv \{z(s);\ z(s) \in F_1, \Omega[z] \leqslant D\}$ компактно на $F \equiv C[a, b]$).

Доказательство. Из неравенства $\Omega[z] \leqslant D$, очевидно, следуют неравенства

$$\int_a^b q(s) z^2(s)\, ds \leqslant D, \qquad (4;\ 1,5)$$

$$\int_a^b p(s) \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 ds \leqslant D. \qquad (4;\ 1,6)$$

Из неравенства (4; 1,5) следует, что для всякой функции $z(s)$ из Φ существует точка $s_0 \in [a, b]$, в которой

$$|z(s_0)| \leqslant \sqrt{\frac{D}{b-a}}, \tag{4; 1,7}$$

так как в противном случае для функции $z(s)$ не выполняется неравенство (4; 1,5). Далее, для всяких s_1 и s_2 $(s_2 > s_1)$ из промежутка $[a, b]$ и для всякой функции $z(s) \in \Phi$ имеем

$$|z(s_2) - z(s_1)|^2 = \left| \int_{s_1}^{s_2} z'(s)\, ds \right|^2.$$

Применяя к оценке этого интеграла неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|z(s_2) - z(s_1)|^2 \leqslant |s_2 - s_1| \left| \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |s_2 - s_1| \frac{1}{p_0} \int_{s_1}^{s_2} p(s) \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant |s_2 - s_1| \frac{1}{p_0} \int_{a}^{b} p(s) \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 ds \leqslant |s_2 - s_1| \frac{D}{p_0},$$

т. е.

$$|z(s_2) - z(s_1)| \leqslant \sqrt{|s_2 - s_1|} \sqrt{\frac{D}{p_0}}. \tag{4; 1,8}$$

Это неравенство означает, что функции семейства Φ равностепенно непрерывны.

Полагая в неравенстве (4; 1,8) $s_1 = s_0$, получим для любого $s_2 \in [a, b]$

$$|z(s_2) - z(s_0)| \leqslant \sqrt{|s_2 - s_0|} \sqrt{\frac{D}{p_0}} \leqslant \sqrt{b-a} \sqrt{\frac{D}{p_0}}. \tag{4; 1,9}$$

Очевидно,

$$|z(s_2)| = |z(s_2) - z(s_0) + z(s_0)| \leqslant |z(s_2) - z(s_0)| + |z(s_0)|.$$

Используя неравенства (4; 1,9) и (4; 1,7) для произвольной функции $z(s)$ из Φ и любого $s_2 \in [a, b]$, получаем

$$|z(s_2)| \leqslant \sqrt{b-a}\sqrt{\frac{D}{p_0}} + \sqrt{\frac{D}{b-a}} = D_1.$$

Это означает, что функции $z(s)$ семейства Φ равномерно ограничены константой D_1. По теореме Арцела из семейства равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций можно выделить равномерно сходящуюся последовательность $\{z_n(s)\}$ $(z_n(s) \rightrightarrows z(s))$.

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} z_n(s) = z_\delta(z).$$

Так как функции семейства Φ непрерывны на $[a, b]$, то функции $z_n(s)$ из последовательности $\{z_n(s)\}$ также непрерывны на $[a, b]$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{z_n(s)\}$ предельная функция $z_\delta(s)$ также непрерывна на $[a, b]$. Лемма доказана.

4. Проведем сначала доказательство ослабленной формы теоремы 1. Пусть $F_{2,M}$ — множество всех функций из F_2, для которых интегралы вида

$$\int_a^b (z'')^2\, ds$$

ограничены некоторым числом M, т. е. для всякой функции $z(s) \in F_{2,M}$

$$\int_a^b (z'')^2\, ds \leqslant M.$$

Пусть $Q_{\delta,M}$ есть пересечение множеств Q_δ и $F_{2,M}$, т. е. $Q_{\delta,M} = Q_\delta \cap F_{2,M}$.

Покажем, что *для всякой функции* $u_\delta \in L_2[c, d]$ *такой, что* $\rho_{L_2}(u_\delta, u_T) \leqslant \delta$, *точная нижняя грань функционала вида* (4; 1,4) *на множестве* $Q_{\delta,M}$ *достигается на непрерывной функции* $z_\delta(s)$, *имеющей непрерывную на отрезке* $[a, b]$ *производную.*

Доказательство. Так как $\Omega[z]$ — неотрицательный функционал, то существует его точная нижняя грань

$$\Omega_0 = \inf_{z\in Q_{\delta,M}} \Omega[z].$$

Существует также минимизирующая последовательность

$\{z_n(s)\}$ функций из $Q_{\delta, M}$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \Omega[z_n] = \Omega_0.$$

Не ограничивая общности последующих результатов, можно полагать, что для всякого $n > 1$

$$\Omega[z_n] \leqslant \Omega[z_{n-1}] \leqslant \ldots \leqslant \Omega[z_1] = M_1.$$

Для всех функций последовательности $\{z_n(s)\}$ выполняются неравенства

$$\Omega[z_n] \leqslant M_1.$$

Применим лемму 1 к семейству функций Φ, состоящему из функций, образующих минимизирующую последовательность, т. е. $\Phi \equiv \{z_n(s)\}$, полагая при этом $D = M_1$.

Согласно этой лемме из последовательности $\Phi \equiv \{z_n(s)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_k}(s)\}$, равномерно сходящуюся на $[a, b]$ к некоторой непрерывной функции $z_\delta(s)$, т. е.

$$\lim_{n_k\to\infty} z_{n_k}(s) = z_\delta(s).$$

Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \Omega\left[z_{n_k}\right] = \Omega_0.$$

Поскольку для всякого n $z_n(s) \in Q_{\delta, M}$, то для всех функций подпоследовательности $\{z_{n_k}(s)\}$ выполняются неравенства

$$\int_a^b p(s)\left[z'_{n_k}(s)\right]^2 ds \leqslant M_1,$$

$$\int_a^b \left[z''_{n_k}(s)\right]^2 ds \leqslant M.$$

Следовательно, к семейству функций $\Phi \equiv \{z'_{n_k}(s)\}$ можно применить лемму 1, полагая при этом $D = \max\{M, M_1\}$. Согласно этой лемме существует подпоследовательность $\{z'_m(s)\}$ последовательности $\{z'_{n_k}(s)\}$, равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к некоторой функции $\tilde{z}_\delta(s)$. Очевидно, что подпоследовательность $\{z_m(s)\}$ последовательности $\{z_{n_k}(s)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $z_\delta(s)$.

Таким образом, последовательность функций $\{z_m(s)\}$ и последовательность их производных $\{z'_m(s)\}$ равномерно сходятся на $[a, b]$. В этих условиях, как хорошо известно, $\tilde{z}'_\delta(s) = z'_\delta(s)$. Очевидно, $z_\delta(s) \in Q_\delta$ и

$$\lim_{m\to\infty} \Omega[z_m] = \Omega[z_\delta] = \Omega_0,$$

так как предельный переход под знаком интеграла в $\Omega[z]$ при этом законный. Ослабленная теорема доказана.

Эта теорема означает, что оператор $\tilde{R}(u, \delta)$ определен на всех функциях $u(x)$ из $L_2(c, d)$ и значениями его являются непрерывные функции $z_\delta(s)$, имеющие непрерывные на $[a, b]$ производные $z'_\delta(s)$

5. Доказательство теоремы 1. На функциях $z(s)$ множества F_1 можно определить скалярное произведение $(z_1, z_2)_1$

$$(z_1, z_2)_1 = \int_a^b \left\{ q(s) z_1 z_2 + p(s) \frac{dz_1}{ds} \frac{dz_2}{ds} \right\} ds,$$

норму $\|z_1\| = \sqrt{(z, z)_1}$ и расстояние

$$\rho_1(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|_1.$$

Множество F_1 с такой метрикой является полным пространством W_2^1.

Поскольку $\Omega[z]$ — неотрицательный функционал, то существуют его точная нижняя грань на множестве $F_{1,\delta}$:

$$\Omega_0 = \inf_{z\in F_{1,\delta}} \Omega[z]$$

и минимизирующая последовательность функций $\{z_n(s)\} \subset F_{1,\delta}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega_0,$$

где $\Omega_n = \Omega[z_n(s)]$. Не ограничивая общности, можно полагать, что $\forall n > 1$ $\Omega_n \leqslant \Omega_{n-1}$. Следовательно, $\forall n \geqslant 1$

$$\Omega[z_n] \leqslant \Omega_1.$$

Согласно лемме 1 из последовательности $\{z_n\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$. Пусть $\lim_{n_k\to\infty} z_{n_k} = \tilde{z}$. Введем обозначения $z_{n_k} = \tilde{z}_k$.

Покажем, что $\{\tilde{z}_k\}$ сходится по норме пространства W_2^1. В самом деле, предположим, что это неверно. Тогда существуют такое $\varepsilon_0 > 0$ и такие последовательности целых положительных чисел $\{m\}$ и $\{p_m\}$, что для всех m и p_m

$$\|\tilde{z}_m - \tilde{z}_{m+p_m}\| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\beta_m = \tilde{z}_m - \tilde{z}_{m+p_m}$. Рассмотрим функции

$$\xi_m = 0{,}5 \cdot (\tilde{z}_m + \tilde{z}_{m+p_m}).$$

Очевидно, $\xi_m = \tilde{z}_m - 0{,}5 \cdot \beta_m = \tilde{z}_{m+p_m} + 0{,}5 \cdot \beta_m$ и

$$\Omega[\xi_m] = \|\tilde{z}_m\|_1^2 - (\tilde{z}_m, \beta_m)_1 + 0{,}25 \cdot \|\beta_m\|^2 \geqslant \Omega_0.$$

Так как $\|\tilde{z}_m\|_1^2 = \Omega[\tilde{z}_m]$ и $\Omega[\tilde{z}_m] \to \Omega_0$ при $m \to \infty$, то

$$-(\tilde{z}_m, \beta_m)_1 + 0{,}25 \cdot \|\beta_m\|_1^2 \geqslant -\Delta_m', \qquad (4;\ 1{,}10)$$

где $\Delta_m' = \Omega[\tilde{z}_m] - \Omega_0 > 0$ и $\Delta_m' \to 0$ при $m \to \infty$. Используя формулу $\xi_m = \tilde{z}_{m+p_m} + 0{,}5 \cdot \beta_m$, аналогично находим

$$\Omega[\xi_m] = \|\tilde{z}_{m+p_m}\|_1^2 + (\tilde{z}_{m+p_m}, \beta_m)_1 + 0{,}25 \cdot \|\beta_m\|_1^2 \geqslant \Omega_0.$$

Следовательно,

$$(\tilde{z}_{m+p_m}, \beta_m)_1 + 0{,}25 \cdot \|\beta_m\|_1^2 \geqslant -\Delta_m'', \qquad (4;\ 1{,}11)$$

где $\Delta_m'' = \Omega[\tilde{z}_{m+p_m}] - \Omega_0$ и $\Delta_m'' \to 0$ при $m \to \infty$.

Складывая почленно неравенства (4; 1,10) и (4; 1,11), получим

$$-(\tilde{z}_m - \tilde{z}_{m+p_m}, \beta_m)_1 + 0{,}5 \cdot \|\beta_m\|_1^2 \geqslant -(\Delta_m' + \Delta_m''),$$

или

$$-0{,}5 \cdot \|\beta_m\|_1^2 \geqslant -(\Delta_m' + \Delta_m'').$$

Следовательно,

$$\|\beta_m\|_1^2 = \|\tilde{z}_m - \tilde{z}_{m+p_m}\|_1^2 \leqslant \Delta_m' + \Delta_m''.$$

Так как $\Delta_m' + \Delta_m'' \to 0$ при $m \to \infty$, то найдется такое

$m(\varepsilon_0)$, что для $m \geqslant m(\varepsilon_0)$ будем иметь

$$\left\|\tilde{z}_m - \tilde{z}_{m+p_m}\right\|_1 < \varepsilon_0/2,$$

что противоречит неравенству $\left\|\tilde{z}_m - \tilde{z}_{m+p_m}\right\|_1 \geqslant \varepsilon_0$.

Таким образом, последовательность $\{\tilde{z}_k\}$ является фундаментальной. В силу полноты пространства W_2^1 она сходится (по метрике пространства W_2^1, а тем самым и равномерно на отрезке $[a, b]$) к некоторой функции $\hat{z}(s) \in F_{1,\delta}$. Но поскольку по построению последовательность $\{\tilde{z}_k\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $z_\delta(s)$, то $\hat{z}(s) = z_\delta(s) \in F_{1,\delta}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Оператор* $\tilde{R}(u, \delta)$ *является регуляризирующим для уравнения* (4; 1,1).

Доказательство. Согласно теореме 1 оператор $\tilde{R}(u, \delta)$ определен на всякой функции $u(x)$ из $L_2(c, d)$ и для любого $\delta > 0$. Докажем справедливость свойства 2) определения 2 (см. стр. 55). Здесь $U \equiv L_2(c, d)$.

Пусть заданы последовательность функций $\{u_{\delta_n}(x)\}$ из $L_2(c, d)$ и отвечающая ей последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, сходящаяся к нулю, таких, что для всякого n

$$\rho_{L_2}\left(u_{\delta_n}, u_\text{т}\right) \leqslant \delta_n.$$

Для каждого δ_n определены множества функций Q_{δ_n} и $F_{1,\delta_n} = Q_{\delta_n} \cap F_1$. По теореме 1 в каждом из множеств F_{1,δ_n} существует функция $z_{\delta_n}(s)$ из W_2^1, минимизирующая функционал $\Omega[z]$ на множестве F_{1,δ_n}. Таким образом, последовательности чисел $\{\delta_n\}$ отвечает последовательность функций $\{z_{\delta_n}(s)\}$ из W_2^1, удовлетворяющих неравенствам

$$\Omega\left[z_{\delta_n}\right] \leqslant \Omega\left[z_\text{т}\right].$$

По лемме 1 из семейства функций $\{z_{\delta_n}(s)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{\delta_k}(s)\}$, равномерно сходящуюся на $[a, b]$ к некоторой непрерывной на $[a, b]$ функции $\tilde{z}(s)$. Так как $z_{\delta_n}(s) \in Q_{\delta_n}$, то для всякой функции $z_{\delta_k}(s)$ из подпоследовательности $\{z_{\delta_k}(s)\}$ выполняется неравенство

$$\rho_{L_2}\left(Az_{\delta_k}, u_{\delta_k}\right) \leqslant \delta_k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и учитывая непрерывность оператора A и равномерную сходимость подпоследовательности $\{z_{\delta_k}(s)\}$ к $\tilde{z}(s)$, получим

$$\rho_{L_2}(A\tilde{z}, u_т) = 0.$$

Так как по предположению уравнение $Az = u_т$ имеет единственное решение $z = z_т(s)$, то $\tilde{z}(s) \equiv z_т(s)$. Следовательно, подпоследовательность $\{z_{\delta_k}(s)\}$ равномерно сходится к точному решению $z_т(s)$. И так для всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{z_{\delta_n}(s)\}$. Отсюда следует, что для любой последовательности $\{\delta_n\}$ положительных чисел δ_n, сходящейся к нулю, соответствующая последовательность функций $\{z_{\delta_n}(s)\}$ равномерно сходится к $z_т(s)$. Свойство 2) определения Р. О. доказано и, следовательно, оператор $\tilde{R}(u, \delta)$ является регуляризирующим. Теорема доказана.

Таким образом, мы доказали существование регуляризирующих операторов для линейных интегральных уравнений первого рода с конечным промежутком интегрирования. В двух следующих параграфах на основе вариационного подхода мы рассмотрим способы построения регуляризирующих операторов, легко реализуемые на ЭВМ.

6. За меру гладкости возможных приближенных решений можно принять значения функционала вида

$$\Omega[z] = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{n} q_k(s) \left(\frac{d^k z}{ds^k} \right)^2 \right\} ds, \qquad (4;\ 1{,}12)$$

где $q_k(s)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — неотрицательные непрерывные функции, $q_n(s) \geqslant c > 0$, а $z(s) \in F_n$.

Пусть Q_δ есть класс непрерывных функций, для которых

$$\rho_{L_2}(Az, u_\delta) \leqslant \delta \quad \text{и} \quad F_{n,\delta} = Q_\delta \cap F_n.$$

Аналогично предыдущему в качестве искомого приближенного решения уравнения (4; 1,3) берем функцию $z_\delta(s)$ из F_n, на которой достигается точная нижняя грань функционала (4; 1,12) на множестве $F_{n,\delta}$. В этом случае в качестве приближенного решения также берется напболее гладкое из возможных решений, обладающее гладкостью порядка n. Обоснование этого производится совершенно аналогично случаю, когда используются функционалы $\Omega[z]$ вида (4; 1,4).

§ 2. Редукция задачи построения регуляризирующих операторов к классической вариационной задаче минимизации функционалов с ограничениями

1. Таким образом, для нахождения приближенного решения уравнения (4; 1,3) с приближенно известной правой частью $u_\delta(x)$ надо решить следующую вариационную задачу минимизации функционала $\Omega[z]$ с ограничениями:

среди функций $z(s)$, принадлежащих множеству F_1 (или F_n) и удовлетворяющих условию $\rho_{L_2}(Az, u_\delta) \leqslant \delta$, найти такую функцию $z_\delta(s)$, которая минимизирует функционал $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$ (соответственно на $F_{n,\delta}$).

Такие задачи можно решать прямыми методами минимизации функционалов. Однако для этих задач они трудно реализуемы на ЭВМ. Чтобы естественнее и проще подойти к их решению, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Точная нижняя грань функционала $\Omega[z]$ вида* (4; 1,4) *на множестве $F_{1,\delta}$ достигается на функции $z_\delta(s)$ из F_1, для которой $\rho_{L_2}(Az_\delta, u_\delta) = \delta$.*

Аналогичная лемма справедлива и для функционалов вида (4; 1,12).

Доказательство. Допустим, что точная нижняя грань

$$\inf_{z \in F_{1,\delta}} \Omega[z]$$

достигается на функции $z_\delta(s)$ из F_1, для которой $\rho_{L_2}(Az_\delta, u_\delta) = \beta < \delta$. Так как по предположению (4; 1,21)

$$\delta^2 < \int_c^d u_\delta^2(x)\,dx$$

и $\Omega[0] = 0$, то $z_\delta(s) \not\equiv 0$. В силу непрерывности оператора

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds$$

на множестве функций $z(s)$ из F_1 существует окрестность $O(z, z_\delta)$ функции $z_\delta(s)$, принадлежащая множеству F_1, для всех элементов $z(s)$ которой (т. е. функций $z(s)$) выполняется неравенство

$$\rho_{L_2}(Az, Az_\delta) < \frac{\delta - \beta}{2}.$$

Для всякой функции $z(s)$ из этой окрестности выполняется также неравенство

$$\rho_{L_2}(Az, u_\delta) < \delta, \tag{4; 2,1}$$

так как

$$\rho_{L_2}(Az, u_\delta) \leqslant \rho_{L_2}(Az, Az_\delta) + \rho_{L_2}(Az_\delta, u_\delta) <$$
$$< \frac{\delta - \beta}{2} + \beta = \frac{\delta + \beta}{2} < \delta.$$

Неравенство (4; 2,1) означает, что все функции $z(s)$ окрестности $O(z, z_\delta)$ принадлежат множеству Q_δ. Так как $\Omega[z]$ есть квадратический функционал и $z_\delta(s) \not\equiv 0$, то в окрестности $O(z, z_\delta)$ существует функция $\tilde{z}_\delta(s)$ из $F_{1,\delta}$, для которой

$$\Omega[\tilde{z}_\delta] < \Omega[z_\delta].$$

Но это противоречит тому, что на функции $z_\delta(s)$ функционал $\Omega[z]$ достигает своей точной нижней грани на $F_{1,\delta}$. Следовательно, предположение, что $\beta < \delta$, неверно. Лемма доказана.

2. С учетом этой леммы задача нахождения функции $z_\delta(s)$ из F_1, удовлетворяющей условию $\rho_{L_2}(Az_\delta, u_\delta) \leqslant \delta$ и минимизирующей функционал $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$, сводится к задаче:

среди функций $z(s)$ из F_1, удовлетворяющих условию

$$\rho_{L_2}(Az, u_\delta) = \delta,$$

найти функцию $z_\delta(s)$, минимизирующую функционал $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$.

Это классическая задача вариационного исчисления на условный минимум. Ее можно решать методом неопределенных множителей Лагранжа. А именно, находить функцию $z_\alpha(s)$, минимизирующую сглаживающий функционал

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \rho^2_{L_2}(Az, u_\delta) + \alpha\Omega[z]$$

(это задача на безусловный минимум), а параметр α определять из условия

$$\rho_{L_2}(Az_\alpha, u_\delta) = \delta,$$

т. е. по невязке. Это уравнение относительно α имеет решение $\alpha = \alpha(\delta)$, зависящее от δ, так как при фиксированном δ функция

$$\varphi(\alpha) = \rho_{L_2}(Az_\alpha, u_\delta)$$

монотонно возрастает и $\varphi(0) = 0$ (см. гл. II, § 4).

Следовательно, к задаче минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ с определением параметра α по невязке сводится и исходная задача нахождения функции $z_\delta(s) = z_{\alpha(\delta)}(s)$ из F_1, удовлетворяющей условию

$$\rho_{L_2}(Az_\delta, u_\delta) \leqslant \delta$$

и минимизирующей функционал $\Omega[z]$ на множестве $F_{1,\delta}$. Последняя задача и исходная эквивалентны.

Функцию $z_\alpha(s)$, где $\alpha = \alpha(\delta)$, можно рассматривать как результат применения к правой части $u_\delta(x)$ уравнения (4; 1,3) некоторого оператора $R_1(u_\delta, \alpha(\delta))$.

Таким образом, в качестве приближенного решения уравнения (4; 1,3) берется решение другой задачи — задачи минимизации функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ с определением α по невязке, «близкой» при малой погрешности u_δ к исходной задаче нахождения решения уравнения (4; 1,3).

Решение этой последней задачи $z_{\alpha(\delta)}(s)$ устойчиво к малым изменениям в метрике L_2 правой части $u_\delta(x)$, так как она эквивалентна рассмотренной в § 1 вариационной задаче с ограничениями, устойчивость решения которой была установлена.

Аналогичным образом редуцируется исходная вариационная задача к задаче на безусловный минимум при пользовании функционалами $\Omega[z]$ вида (4; 1,12).

Функционалы $\Omega[z]$ играют при этом стабилизирующую роль. Поэтому их называют стабилизирующими функционалами или стабилизаторами, соответственно 1-го и n-го порядков.

§ 3. Получение семейства регуляризирующих операторов с помощью минимизации сглаживающих функционалов

Сглаживающий функционал $M^{\alpha}[z, u]$ можно ввести в рассмотрение формально, не связывая его с редукцией исходной вариационной задачи к классической. В настоящем параграфе будет показано, что путем решения задачи на минимум сглаживающего функционала с фиксированным стабилизатором $\Omega[z]$ и с выбором параметра регуляризации α как некоторой функции $\alpha = \alpha(\delta)$ от уровня погрешности δ правой части $u_{\delta}(x)$ уравнения (4; 1,3) можно получить бесконечное множество регуляризирующих операторов (а, следовательно, и приближенных решений уравнения (4; 1,3)), различающихся выбором функций $\alpha = \alpha(\delta)$.

Описываемый здесь метод построения приближенных решений уравнения (4; 1,3) и его обоснование без всяких изменений применимы и для приближенного нахождения квазирешения того же уравнения.

1. Итак, рассмотрим сглаживающий функционал

$$M^{\alpha}[z, u] = \rho^2_{L_2}(Az, u) + \alpha\Omega[z]$$

со стабилизатором $\Omega[z]$ вида (4; 1,4). Тогда справедлива

Теорема 3. *Каковы бы ни были параметр $\alpha > 0$ и функция $u(x)$ из $L_2(c, d)$, существует единственная функция $z_{\alpha}(s)$, имеющая производную $z'_{\alpha}(s)$, интегрируемую с квадратом на $[a, b]$, на которой функционал $M^{\alpha}[z, u]$ достигает своей точной нижней грани на множестве F_1, т. е.*

$$M^{\alpha}_0 = \inf_{z \in F_1} M^{\alpha}[z, u] = M^{\alpha}[z_{\alpha}, u].$$

Доказательство. Так как для всякой функции $z(s) \in F_1$ $M^{\alpha}[z, u] \geqslant 0$, то существует

$$M^{\alpha}_0 = \inf_{z \in F_1} M^{\alpha}[z, u].$$

Существует также минимизирующая последовательность $\{z^{\alpha}_n(s)\}$ функций из F_1 такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} M^{\alpha}_n = M^{\alpha}_0$, где $M^{\alpha}_n = M^{\alpha}[z^{\alpha}_n, u]$. Очевидно, не ограничивая общности выводов, можно полагать, что для всякого $n > 1$

$$M^{\alpha}_{n+1} \leqslant M^{\alpha}_n \leqslant \ldots \leqslant M^{\alpha}_1.$$

Тогда для любого $n \geqslant 1$ и произвольного фиксированного $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$\Omega\left[z_n^\alpha\right] \leqslant \frac{1}{\alpha} M_1^\alpha = D.$$

Следовательно, согласно лемме 1, из последовательности $\{z_n^\alpha\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $z_\alpha(s) \in F_1$. Ради упрощения записи сохраним для элементов этой подпоследовательности те же обозначения, т. е. пусть $\{z_n^\alpha\}$ равномерно сходится к $z_\alpha(s)$.

Покажем, что последовательность $\{z_n^\alpha\}$ фундаментальна по норме пространства W_2^1. Предположим, что это неверно. Тогда существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такие последовательности целых положительных чисел $\{m\}$ и $\{p_m\}$, что для всех m и p_m из этих последовательностей

$$\left\| z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha \right\|_1 \geqslant \varepsilon_0. \tag{4;3,1}$$

Здесь $\|z\|_1$ — норма функции $z(s)$ в пространстве W_2^1.

Пусть $\beta_m = z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha$ и $\xi_m = 0{,}5\cdot\left(z_m^\alpha + z_{m+p_m}^\alpha\right)$. Очевидно, $\xi_m = z_m^\alpha - 0{,}5\cdot\beta_m = z_{m+p_m}^\alpha + 0{,}5\cdot\beta_m$,

$$M^\alpha[\xi_m, u] = \rho_U^2(A\xi_m, u) + \\ + \alpha\left[\|z_m^\alpha\|_1^2 - (z_m^\alpha, \beta_m)_1 + 0{,}25\cdot\|\beta_m\|_1^2\right] \geqslant M_0^\alpha. \tag{4; 3,2}$$

Так как $\rho_F(\xi_m, z_\alpha) \to 0$ и $\rho_F\left(\xi_m, z_m^\alpha\right) \to 0$ при $m \to \infty$, то в силу непрерывности оператора A имеем

$$\rho_U^2(A\xi_m, u) = \rho_U^2\left(Az_m^\alpha, u\right) + \Delta_m', \tag{4; 3,3}$$

где $\Delta_m' \to 0$ при $m \to \infty$. Учитывая сходимость последовательности $\{M_m^\alpha\}$ к M_0^α, из (4; 3,2) и (4; 3,3) получаем

$$\alpha\left[-\left(z_m^\alpha, \beta_m\right)_1 + 0{,}25\cdot\|\beta_m\|_1^2\right] \geqslant M_0^\alpha - M_m^\alpha - |\Delta_m'| = -\Delta_m'', \tag{4; 3,4}$$

где $\Delta_m'' > 0$ и $\Delta_m'' \to 0$ при $m \to \infty$.

Аналогично, пользуясь формулой $\xi_m = z_{m+p_m}^\alpha + 0{,}5\cdot\beta_m$, получим неравенство

$$\alpha\left[\left(z_{m+p_m}^\alpha, \beta_m\right)_1 + 0{,}25\cdot\|\beta_m\|_1^2\right] \geqslant -\Delta_m''', \tag{4; 3,5}$$

где $\Delta_m''' > 0$ и $\Delta_m''' \to 0$ при $m \to \infty$.

Складывая неравенства (4; 3,4), (4; 3,5) почленно, получим

$$\alpha\left[-\left(z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha, \beta_m\right)_1 + 0{,}5\cdot\|\beta_m\|_1^2\right] =$$

$$= \frac{-\alpha}{2}\|\beta_m\|_1^2 \geqslant -\left(\Delta_m'' + \Delta_m'''\right).$$

Следовательно,

$$\|\beta_m\|_1^2 = \left\|z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha\right\|_1^2 \leqslant \frac{2}{\alpha}\left(\Delta_m'' + \Delta_m'''\right).$$

Так как $\Delta_m'' + \Delta_m''' \to 0$ при $m \to \infty$, то найдется такое $m(\varepsilon_0)$, что для $m \geqslant m(\varepsilon_0)$ будем иметь

$$\left\|z_m^\alpha - z_{m+p_m}^\alpha\right\|_1 \leqslant \varepsilon_0/2,$$

что противоречит неравенству (4; 3,1).

Таким образом, последовательность $\{z_n^\alpha\}$ является фундаментальной по норме пространства W_2^1. А поскольку это пространство полное, то последовательность $\{z_n^\alpha\}$ сходится по метрике W_2^1 (а тем самым и равномерно на $[a, b]$) к некоторой функции $\hat{z}_\alpha(s) \in F_1$. Но поскольку по построению $\{z_n^\alpha\}$ равномерно сходится к $z_\alpha(s)$, то $\hat{z}_\alpha(s) \equiv z_\alpha(s)$ и, следовательно, $z_\alpha(s) \in F_1$. Теорема доказана.

Таким образом, на функциях $u(x)$ из $L_2(c, d)$ для всех положительных чисел $\alpha > 0$ определен оператор $R_1(u, \alpha)$, значениями которого являются функции из W_2^1 такой, что функция

$$z_\alpha(s) = R_1(u, \alpha)$$

минимизирует функционал $M^\alpha[z, u]$ на множестве F_1.

2. Нам надо показать, что оператор $R_1(u, \alpha)$ является регуляризирующим для уравнения (4; 1,1). При этом мы воспользуемся определением 2 регуляризирующего оператора. Свойство 1) этого определения мы установили. Установим свойство 2) для $R_1(u, \alpha)$.

Обозначим через T_{δ_1} класс определенных на некотором отрезке $[0, \delta_1]$ неотрицательных неубывающих и непрерывных на $[0, \delta_1]$ функций $\beta(\delta)$. Справедлива

Теорема 4. *Пусть $z_T(s)$ из F_1 есть решение уравнения (4; 1,1) с правой частью $u = u_T(x)$, т. е. $Az_T = u_T(x)$. Тогда, каковы бы ни были положительное число $\varepsilon > 0$*

и функции $\beta_1(\delta)$, $\beta_2(\delta)$ *из класса* T_{δ_1} *такие, что* $\beta_2(0) = 0$ *и* $\delta^2 \leqslant \beta_1(\delta)\beta_2(\delta)$, *существует такое* $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \beta_1, \beta_2)$, *что для всякой функции* $\tilde{u}(x)$ *из* $L_2(c, d)$ *и любого положительного* $\delta \leqslant \delta_0$ *из неравенства* $\rho_{L_2}(\tilde{u}, u_T) \leqslant \delta$ *для всех* $\alpha(\delta)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha(\delta) \leqslant \beta_2(\delta), \qquad (4;\ 3{,}6)$$

следует неравенство $|\tilde{z}_{\alpha(\delta)}(s) - z_T(s)| \leqslant \varepsilon$ *для всякого* $s \in [a, b]$, *т. е. семейство функций* $\tilde{z}_\alpha(s)$ *равномерно сходится к* $z_T(s)$. *Здесь* $\tilde{z}_{\alpha(\delta)}(s) = R_1(\tilde{u}, \alpha(\delta))$.

Доказательство. Поскольку функционал $M^\alpha[z, \tilde{u}]$ достигает минимума на функции $z = \tilde{z}_\alpha(s)$, то

$$M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[z_T, \tilde{u}].$$

Поэтому

$$\alpha\Omega[\tilde{z}_\alpha] \leqslant M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{u}] \leqslant M^\alpha[z_T, \tilde{u}] = \\ = \rho^2_{L_2}(Az_T, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_T] = \rho^2_{L_2}(u_T, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z_T] \leqslant \\ \leqslant \delta^2 + \alpha\Omega[z_T] = \alpha\left\{\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega[z_T]\right\}.$$

Из неравенства

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leqslant \alpha$$

следует, что

$$\frac{\delta^2}{\alpha} \leqslant \beta_1(\delta) \leqslant \beta_1(\delta_1)$$

и

$$\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega[z_T] \leqslant \beta_1(\delta_1) + \Omega[z_T] = D.$$

Таким образом,

$$\Omega[\tilde{z}_\alpha] \leqslant D \quad \text{и} \quad \Omega[z_1] \leqslant D,$$

т. е. $\tilde{z}_\alpha(s)$ и $z_T(s)$ принадлежат множеству F_D функций $z(s)$, для которых выполняется неравенство $\Omega[z] \leqslant D$:

$$F_D \equiv \{z(s);\ \Omega[z] \leqslant D\}.$$

Неравенство $\Omega[\tilde{z}_{\alpha(\delta)}] \leqslant D$ справедливо для любой положительной на $(0, \delta_1)$ функции $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющей для всех $\delta \in [0, \delta_1]$ условию $\delta^2 \geqslant \beta_1(\delta)\alpha(\delta)$, в том числе, следовательно, и для всех функций $\alpha(\delta)$, удовлетворяющих условиям (4; 3,6). В дальнейших рассуждениях $\alpha = \alpha(\delta)$ будем считать произвольной, но фиксированной функцией такого рода.

Пусть $\{\tilde{u}_{\delta_n}\}$ — последовательность функций $u_{\delta_n}(x)$ из $L_2[c, d]$ таких, что последовательность чисел

$$\rho_{L_2}\left(\tilde{u}_{\delta_n}, u_{\text{т}}\right) = \delta_n$$

сходится к нулю при $n \to \infty$. Этим последовательностям отвечает последовательность функций $\{\tilde{z}_{\alpha_n}(s)\}$ из F_1, где $\alpha_n = \alpha(\delta_n)$, минимизирующих соответственно функционалы $M^{\alpha_n}[z, \tilde{u}_{\delta n}]$ и удовлетворяющих неравенствам

$$\Omega\left[\tilde{z}_{\alpha_n}\right] \leqslant D.$$

По лемме 1 из последовательности $\{\tilde{z}_{\alpha_n}\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[a, b]$ к некоторой непрерывной на $[a, b]$ функции $\tilde{z}(s)$. Не меняя для простоты записи обозначений, будем полагать, что $\{\tilde{z}_{\alpha_n}\}$ и есть такая подпоследовательность, т. е. $\tilde{z}_{\alpha_n}(s) \rightrightarrows \tilde{z}(s)$.

Очевидно, что

$$\rho_{L_2}\left(A\tilde{z}_{\alpha_n}, u_{\text{т}}\right) \leqslant \rho_{L_2}\left(A\tilde{z}_{\alpha_n}, \tilde{u}_{\delta_n}\right) + \rho_{L_2}\left(\tilde{u}_{\delta_n}, u_{\text{т}}\right) =$$

$$= \rho_{L_2}\left(A\tilde{z}_{\alpha_n}, \tilde{u}_{\delta_n}\right) + \delta_n \leqslant \sqrt{M^{\alpha_n}\left[\tilde{z}_{\alpha_n}, \tilde{u}_{\delta_n}\right]} + \delta_n \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M^{\alpha_n}\left[z_{\text{т}}, \tilde{u}_{\delta_n}\right]} + \delta_n = \sqrt{\rho_{L_2}^2\left(Az_{\text{т}}, \tilde{u}_{\delta_n}\right) + \alpha_n\Omega[z_{\text{т}}]} + \delta_n =$$

$$= \sqrt{\rho_{L_2}^2\left(u_{\text{т}}, \tilde{u}_{\delta_n}\right) + \alpha_n\Omega[z_{\text{т}}]} + \delta_n = \sqrt{\delta_n^2 + \alpha_n\Omega[z_{\text{т}}]} + \delta_n.$$

Используя условие

$$\alpha_n = \alpha(\delta_n) \leqslant \beta_2(\delta_n),$$

получим

$$\rho_{L_2}\left(A\tilde{z}_{\alpha_n}, u_{\text{т}}\right) \leqslant \sqrt{\delta_n^2 + \beta_2(\delta_n)\Omega[z_{\text{т}}]} + \delta_n.$$

Это неравенство выполняется для всех n. Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$ и учитывая равномерную сходимость последовательности $\{\tilde{z}_{\alpha_n}\}$ к функции $\tilde{z}(s)$ и сходимость к нулю последовательностей $\{\beta_2(\delta_n)\}$ и $\{\delta_n\}$, получим

$$\rho_{L_2}(A\tilde{z}, u_T) = 0.$$

Отсюда следует, что $A\tilde{z} = u_T$. В силу единственности решения уравнения $Az = u$, $\tilde{z}(s) \equiv z_T(s)$. И так для всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{\tilde{z}_{\alpha_n}\}$. Следовательно, последовательность $\{\tilde{z}_{\alpha_n}\}$ равномерно сходится к $z_T(s)$, а тем самым $\{\tilde{z}_{\alpha(\delta)}\}$ равномерно сходится к $z_T(s)$ при $\delta \to 0$. Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что при построении приближенных решений линейных интегральных уравнений первого рода путем минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ параметр регуляризации α как функция погрешности правой части δ определяется неоднозначно.

Значения α можно определять не только по невязке, т. е. из условия $\rho_{L_2}(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$, как отмечалось в § 1, но и другими способами, некоторые из которых описаны в гл. II, § 4.

Замечание. Иногда на искомое решение $z_T(s)$ по смыслу задачи накладываются ограничения типа неравенств $\varphi_1(s) \leqslant z_T(s) \leqslant \varphi_2(s)$, где $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ — заданные функции. Например, решение должно быть неотрицательным ($\varphi_1(s) \equiv 0$). В таких случаях в качестве пространства возможных решений F надо брать функции $z(s)$, удовлетворяющие тем же неравенствам. Теоремы 1—4 настоящей главы справедливы и в этих случаях.

При пользовании стабилизаторами n-го порядка справедливы теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4.

§ 4. Алгоритм нахождения приближенных решений, легко реализуемый на ЭВМ

Как было показано в § 3, для нахождения приближенного (регуляризованного) решения уравнения (4; 1,3) достаточно найти функцию $z_\alpha(s) \in F_1$, минимизирующую сглаживающий функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$ и соответствующее значение α. Задачу минимизации функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ можно решать прямыми методами, например, методами наискорейшего спуска. Однако на ЭВМ удобнее находить функцию $z_\alpha(s)$, решая уравнение Эйлера, соответствующее функционалу $M^\alpha[z, u_\delta]$. Более подробному описанию этого способа и посвящен настоящий параграф.

1. Можно показать (см. [165]), что если решение $z_т(s)$ $(z_т \in W_2^1)$ уравнения (4; 1,1) с правой частью $u_т(x)$ удовлетворяет условиям $z_т(a) = c_1$, $z_т(b) = c_2$ или $z'_т(a) = m_1$, $z'_т(b) = m_2$ (или $z_т(a) = c_1$, $z'_т(b) = m_2$; $z'_т(a) = m_1$, $z_т(b) = c_2$), где c_1, c_2, m_1, m_2 — известные числа, то приближенные (к $z_т(s)$) решения $z_\alpha(s)$ из W_2^1, минимизирующие функционал $M^\alpha[z, u]$ с $\Omega[z]$ вида (4; 1,4), имеют непрерывные на $[a, b]$ производные первого порядка $z'_\alpha(s)$. А тогда, согласно известным теоремам вариационного исчисления*), функции $z_\alpha(s)$ имеют непрерывные на $[a, b]$ производные второго порядка $z''_\alpha(s)$.

На функциях $z(s)$, имеющих непрерывные производные второго порядка, стабилизирующий функционал $\Omega[z]$ вида

$$\Omega[z] = \int_a^b \left\{q(s) z^2(s) + p(s)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\} ds$$

путем интегрирования по частям можно записать в виде

$$\Omega[z] = (z, Lz) + p(b) z(b) z'(b) - p(a) z(a) z'(a),$$

где оператор Lz имеет вид

$$Lz \equiv qz - \frac{d}{ds}\left(p \frac{dz}{ds}\right),$$

а (z, Lz) — скалярное произведение вида

$$(z, Lz) = \int_a^b z \cdot Lz\, ds.$$

Следовательно, функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$ можно записать в виде

$$M^\alpha[z, u_\delta] =$$
$$= \rho_{L_2}^2(Az, u_\delta) + \alpha(z, Lz) + \alpha[p(b) z(b) z'(b) - p(a) z(a) z'(a)],$$

или, записывая подробнее $\rho_{L_2}^2(Az, u_\delta)$,

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \int_c^d \left\{\int_a^b K(x, s) z(s)\, ds - u_\delta(x)\right\}^2 dx +$$
$$+ \alpha(z, Lz) + \alpha[p(b) z(b) z'(b) - p(a) z(a) z'(a)].$$

*) См., например, Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М.: Наука, 1970.

Необходимым условием минимума функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ является равенство нулю его первой вариации ΔM^α. Известно, что $\Delta M^\alpha = \left\{\frac{d}{d\gamma} M^\alpha [z + \gamma v, u_\delta]\right\}_{\gamma=0}$. Выполняя необходимые вычисления, получим

$$\Delta M^\alpha \equiv A^*Az + \alpha Lz + \alpha\, [p(b)v(b)z'(b) + \\ + p(b)z(b)v'(b) - p(a)v(a)z'(a) - p(a)z(a)v'(a)\,] - \\ - A^*u_\delta = 0, \quad (4;\ 4{,}1)$$

где A^*u — оператор вида

$$A^*u \equiv \int_c^d K(x, s)\, u(x)\, dx,$$

сопряженный оператору

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds$$

в пространстве L_2, а $v(s)$ — вариация функции $z(s)$. Оператор A^*Az можно записать в виде

$$A^*Az \equiv \int_a^b \overline{K}(s, t)\, z(t)\, dt, \quad (4;\ 4{,}2)$$

где

$$\overline{K}(s, t) = \int_c^d K(x, s)\, K(x, t)\, dx.$$

Условие $\Delta M^\alpha = 0$ выполняется, если

$$A^*Az + \alpha Lz = A^*u_\delta \quad (4;\ 4{,}3)$$

и

$$p(b)\, [\,z(b)v'(b) + z'(b)v(b)\,] - \\ - p(a)\,[z(a)v'(a) + z'(a)v(a)\,] = 0. \quad (4;\ 4{,}4)$$

Условие (4; 4,4) выполняется, если на концах $s = a$ и $s = b$ промежутка $[a, b]$ решение $z_\alpha(s)$ уравнения (4; 1,3) или его производная $z'_\alpha(s)$ равны нулю.

Таким образом, искомой функцией $z_\alpha(s)$, минимизирующей функционал $M^\alpha[\,z,\ u_\delta\,]$, т. е. искомым приближенным (регуляризованным) решением уравнения

(4; 1,3) будет решение интегро-дифференциального уравнения Эйлера

$$A^*Az + \alpha Lz = A^*u_\delta, \tag{4; 4,3}$$

или

$$\alpha\left\{q(s)z - \frac{d}{ds}\left[p(s)\frac{dz}{ds}\right]\right\} + \int_a^b \overline{K}(s, t)z(t)\,dt = g(s), \tag{4; 4,5}$$

где

$$\overline{K}(s, t) = \int_c^d K(x, s)K(x, t)\,dx, \tag{4; 4,6}$$

$$g(s) = \int_c^d K(x, s)u_\delta(x)\,dx, \tag{4; 4,7}$$

удовлетворяющее краевым условиям одного из следующих типов:

либо

$$z(a) = 0, \quad z(b) = 0, \tag{4; 4,8}$$

либо

$$z(a) = 0, \quad z'(b) = 0, \tag{4; 4,9}$$

либо

$$z'(a) = 0, \quad z(b) = 0, \tag{4; 4,10}$$

либо

$$z'(a) = 0, \quad z'(b) = 0. \tag{4; 4,11}$$

2. Если по смыслу задачи нам известны на концах промежутка $[a, b]$ значения точного решения $z_т(s)$ или его производной $z'_т(s)$, то естественно искать приближенные решения в классе функций $z(s)$, удовлетворяющих тем же граничным условиям, что и $z_т(s)$, так как в противном случае аппроксимация с помощью приближенных решений значений точного решения $z_т(s)$ на концах промежутка $[a, b]$ может быть неудовлетворительной даже при сколь угодно малом уклонении приближенной правой части $u_\delta(x)$ от точной $u_т(x)$.

Вместе с тем, независимо от информации о граничных условиях точного решения $z_т(s)$ на концах промежутка $[a, b]$ при редукции задачи минимизации сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ к решению соответствующего ему уравнения Эйлера необходимо требовать от решений последнего, как было установлено в п. 1, удовлетворения одним из условий вида (4; 4,8) — (4; 4,11).

Для удовлетворительной аппроксимации точного решения уравнения (4; 1,2) с помощью решений уравнения Эйлера (4; 4,3) на всем промежутке $[a, b]$ необходимо иметь согласованные краевые условия точного и приближенных решений. В ряде случаев этого можно достичь путем замены в исходном уравнении (4; 1,1) неизвестной функции $z(s)$ на функцию $\tilde{z}(s)$ по формулам вида $z(s) = f(\tilde{z}(s), s)$. Если, например, $z_т(a) = z_1$, $z_т(b) = z_2$, где z_1 и z_2 известные числа, то, переходя к функции $\tilde{z}(s)$ по формуле

$$z(s) = \tilde{z}(s) + \frac{z_1}{b-a}(b-s) + \frac{z_2}{b-a}(s-a),$$

получим уравнение для $\tilde{z}(s)$ с тем же ядром, но с другой правой частью, точное решение которого (с соответствующей точной правой частью) удовлетворяет краевым условиям $\tilde{z}(a) = 0$ и $\tilde{z}(b) = 0$. Приближенные решения уравнения для $\tilde{z}(s)$ уже можно находить с помощью решений уравнения Эйлера (с изменившейся правой частью), удовлетворяющих краевым условиям вида (4; 4,8).

Если $z'_т(a) = m_1$, $z'_т(b) = m_2$, то замену функции $z(s)$ в исходном интегральном уравнении можно произвести по формуле

$$z(s) = \tilde{z}(s) - \frac{m_1}{2(b-a)}(b-s)^2 + \frac{m_2}{2(b-a)}(s-a)^2$$

и далее приближенные решения уравнения для $\tilde{z}(s)$ уже можно находить с помощью решений уравнения Эйлера (с изменившейся правой частью), удовлетворяющих краевым условиям вида (4; 4,11).

Если $z_т(a) = z_1$, $z'_т(b) = m_2$, то замену надо произвести по формуле

$$z(s) = \tilde{z}(s) + \frac{m_2}{2(b-a)}(s-a)^2 + z_1,$$

и далее приближенные решения уравнения относительно $\tilde{z}(s)$ уже можно находить с помощью решений уравнения Эйлера (с изменившейся правой частью), удовлетворяющих краевым условиям вида (4; 4,9). Аналогично надо поступать, если $z'(a) = m_1$, $z(b) = z_2$.

3. Если при нахождении приближенных решений уравнения (4; 1,3) пользоваться стабилизаторами n-го порядка, то уравнение Эйлера для сглаживающего функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ будет иметь вид

$$A^*Az + \alpha Lz = A^*u_\delta,$$

где

$$Lz \equiv \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{d^r}{ds^r}\left[q_r(s)\frac{d^r z}{ds^r}\right],$$

так как стабилизатор n-го порядка можно записать в виде скалярного произведения (z, Lz).

Легко написать и возможные краевые условия для искомых решений уравнения Эйлера. Например,

$$z(a) = z'(a) = \ldots = z^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$z(b) = z'(b) = \ldots = z^{(n-1)}(b) = 0$$

и другие.

Все сказанное в п. 2 настоящего параграфа о согласованности краевых условий точного решения и приближенных решений, получаемых с помощью уравнения Эйлера, в равной мере относится и к этому случаю. Достичь такой согласованности также можно с помощью соответствующих замен неизвестной функции $z(s)$ на новую функцию $\tilde{z}(s)$. В простейших случаях читатель может это сделать самостоятельно.

При фактической реализации описанного алгоритма нахождения приближенных решений надо переходить к дискретному аналогу рассмотренной задачи. Такой переход, или, как мы будем говорить, *дискретизацию* задачи можно произвести по-разному. Вопросам дискретизации посвящен следующий параграф.

§ 5. О дискретизации задачи нахождения приближенных решений интегральных уравнений первого рода

Переход к дискретному аналогу задачи нахождения регуляризованных приближенных решений уравнения (4; 1,3), можно произвести по-разному. Представляются очевидными три подхода к дискретизации этой задачи.

Первый подход. Производится дискретизация исходного уравнения (4; 1,3) путем замены интеграла интегральной суммой по некоторой квадратурной формуле. В результате получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ),— вырожденная или плохо обусловленная,— приближенное решение которой, устойчивое к малым изменениям вектора правой части, и надо находить. Это можно сделать методом регуляризации (см. гл. III). Если пользоваться при этом вариационным подходом, то взяв дискретный аналог стабилизатора $\Omega[z]$, образуем аналог сглаживающего функционала. Затем переходим к его уравнению Эйлера, которое будет представлять собою регуляризованную систему линейных алгебраических уравнений. Решения этой системы (с соответственно подобранными значениями параметра регуляризации α) и будут приближенными решениями уравнения (4; 1,3).

Второй подход. Производится дискретизация сглаживающего функционала, а далее решается задача минимизации функции многих переменных с последующим определением параметра регуляризации α.

Третий подход. Производится дискретизация краевой задачи для уравнения Эйлера (4; 4,3), и далее решается получающаяся при этом система линейных алгебраических уравнений.

Эти способы не эквивалентны друг другу [73]. В некотором смысле более предпочтительным представляется третий подход. Рассмотрим его подробнее.

1. Для простоты изложения дискретизацию будем производить на равномерной сетке и следовать далее [56].

Будем полагать, что ядро $K(x, s)$ в уравнении (4; 1,3) есть вещественная, непрерывная в области $\{a \leqslant s \leqslant b;\ c \leqslant x \leqslant d\}$ функция. Возьмем в качестве стабилизирующего функционала $\Omega[z]$ функционал вида

$$\Omega[z] = \int_a^b \{z^2 + p(z')^2\}\, ds, \qquad (4;\ 5,1)$$

где p — положительное число.

Пусть точное решение $z_т(s)$ принадлежит F_1 и удовлетворяет краевым условиям: $z'(a) = 0$, $z'(b) = 0$. Тогда в качестве регуляризованных решений $z_\alpha(s)$ уравнения (4; 1,3) можно брать функции, являющиеся решениями следующей краевой задачи для уравнения Эйлера:

$$\int_a^b \overline{K}(s, t)\, z(t)\, dt + \alpha\{z(s) - pz''(s)\} = g(s), \qquad (4;\ 5,2)$$

$$z'(a) = 0, \quad z'(b) = 0,$$

где

$$\overline{K}(s, t) = \int_c^d K(x, s) K(x, t)\, dx, \quad g(s) = \int_c^d K(x, s) u_\delta(x)\, dx.$$

Напишем разностный аналог уравнения (4; 5,2) на равномерной сетке с шагом h. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n равных частей и возьмем в качестве узловых точек сетки середины полученных отрезков, т. е. полагаем

$$s_i = a + 0{,}5 \cdot h + (i - 1) h, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Заменив в левой части уравнения (4; 5,2) интеграл соответствующей ему интегральной суммой, например, по формуле прямоугольников, а $z''(s)$ — соответствующим разностным отношением, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{K}(s_i, t_j) h z_j + \alpha z_i + \alpha \frac{2z_i - z_{i-1} - z_{i+1}}{h^2} = g_i, \quad (4;\ 5{,}3)$$

где

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad g_i = \int_c^d K(x, s_i) u_\delta(x)\, dx.$$

Значения $\overline{K}(s_i, t_j)$ и g_i либо вычисляются аналитически, либо получаются с помощью соответствующих квадратурных формул. Отметим, что при этом число точек сетки по s не связано с числом точек сетки по x.

При $i = 1$ и $i = n$ в (4; 5,3) входят не определенные еще значения z_0 и z_{n+1}. Чтобы удовлетворить граничным условиям, полагаем $z_0 = z_1$ и $z_{n+1} = z_n$. Пусть B — матрица с элементами $B_{ij} = \overline{K}(s_i, t_j) h$. Тогда систему уравнений (4; 5,3) относительно вектора z с компонентами $(z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n)$ можно записать в виде

$$B_\alpha z \equiv Bz + \alpha C z = g, \quad (4;\ 5{,}4)$$

где g — вектор с компонентами $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, а αC — симметричная матрица вида

$$\begin{pmatrix} \alpha\left(1+\frac{1}{h^2}\right) & -\frac{\alpha}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{h^2} & \alpha\left(1+\frac{2}{h^2}\right) & -\frac{\alpha}{h^2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{h^2} & \alpha\left(1+\frac{2}{h^2}\right) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \dots & \alpha\left(1+\frac{2}{h^2}\right) & -\frac{\alpha}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha}{h^2} & \alpha\left(1+\frac{1}{h^2}\right) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача сводится к решению СЛАУ (4; 5,4). Матрица этой системы B_α симметрична. Поэтому для решения ее можно использовать следующие экономичные методы.

2. Метод квадратного корня. Так как матрица B_α системы (4; 5,4) — вещественная, симметричная и положительно определенная, то ее можно представить как произведение вещественных матриц $T_\alpha^* T_\alpha$, где T_α — треугольная матрица вида

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} t_{11}^\alpha & t_{12}^\alpha & \dots & t_{1n}^\alpha \\ 0 & t_{22}^\alpha & \dots & t_{2n}^\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn}^\alpha \end{pmatrix},$$

а T_α^* — транспонированная к T_α матрица. Элементы матрицы T_α находятся по формулам [56]

$$t_{11}^\alpha = \sqrt{B_{11}^\alpha}, \quad t_{1,j}^\alpha = \frac{B_{1.j}^\alpha}{t_{11}^\alpha}, \qquad j > 1;$$

$$t_{ii}^\alpha = \sqrt{B_{ii}^\alpha - \sum_{k=1}^{i-1} (t_{ki}^\alpha)^2}, \quad 1 < i \leqslant n;$$

$$t_{ij}^\alpha = \frac{B_{ij}^\alpha - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}^\alpha t_{kj}^\alpha}{t_{ii}^\alpha}, \qquad i < j;$$

$$t_{ij}^\alpha = 0, \qquad i > j;$$

где B_{ij}^α — элементы матрицы B_α.

Заменив в системе (4; 5,4) матрицу B_α на произведение матриц $T_\alpha^* T_\alpha$, получим

$$T_\alpha^* T_\alpha z = g. \qquad (4;\ 5,5)$$

Полагая $y = T_\alpha z$ можно заменить систему (4; 5,5) эквивалентно двумя системами:

$$T_\alpha^* y = g, \quad T_\alpha z = y.$$

Каждая из этих систем решается совсем просто, так как их матрицы треугольные. В книге [56] приведены экономичные стандартные программы решения систем линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня.

3. Метод Воеводина [34]. Пусть для разных $\alpha > 0$ требуется решать систему линейных алгебраических уравнений

$$(A^*A + \alpha C) z = A^* u,$$

где A — вещественная матрица порядка $n \times m$; A^* — транспонированная к ней матрица; C — вещественная симметричная положительно определенная матрица, z — вектор-столбец с компонентами $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, n — вектор с компонентами $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и $n > m$. Подобно матрице B_α в п. 2 матрицу C можно представить в виде $C = S^*S$, где S — вещественная треугольная матрица, а S^* — ей сопряженная [56].

Положив $y = Sz$ (следовательно, $z = S^{-1}y$), получим

$$(A^*A + \alpha C) S^{-1} y = A^* u. \qquad (4;\ 5,6)$$

Умножая (4; 5,6) слева на $(S^{-1})^*$, получим

$$(D^*D + \alpha E) y = D^* u,$$

где $D = AS^{-1}$, а E — единичная матрица.

Матрицу D можно представить в виде $D = QPR$, где Q — ортогональная матрица размерности $n \times n$, R — ортогональная матрица размерности $m \times m$, а P — правая двухдиагональная матрица $n \times m$, в которой отличны от нуля лишь элементы P_{ii} и P_{ii+1}.

Для получения такого представления достаточно найти такие матрицы Q^{-1} и R^{-1}, чтобы матрица $P = Q^{-1} D R^{-1}$ была двухдиагональной.

Матрицы Q^{-1} и R^{-1} можно искать, например, в виде

$$Q^{-1} = Q_m \ldots Q_2 Q_1, \quad R^{-1} = R_1 R_2 \ldots R_m,$$

где Q_i и R_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — унитарные матрицы (матрицы операторов отражения, см. [34]), удовлетворяющие условиям: $Q_i = Q_i^* = Q_i^{-1}$, $R_i = R_i^* = R_i^{-1}$. При этом $Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_m$ и $R = R_m \ldots R_2 R_1$.

Матрицы Q_i и R_i можно строить следующим способом. Пусть a_1 — первый вектор-столбец матрицы D, а q_j — j-я вектор-строка матрицы Q_1. Элементы матрицы Q_1 будем находить из условий ортогональности векторов a_1 и q_j, т. е. из условий

$$(q_j, a_1) = 0 \quad \text{для} \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Матрицей, удовлетворяющей этим условиям, будет матрица оператора отражения [34, 56] с образующим вектор-столбцом

$$g^{(1)} = \frac{a_1 - \| a_1 \| l}{\| a_1 - \| a_1 \| l \|},$$

где l — вектор-столбец из $\mathbf{R}^n$ с компонентами $(1, 0, 0, \ldots \ldots, 0)$. Таким образом,

$$Q_1 = E - 2g^{(1)} (g^{(1)})^*.$$

В качестве R_1 возьмем такую матрицу, чтобы в матрице $(Q_1 D) R_1$, во-первых, в первом столбце остались нулевыми все элементы, начиная со второго, и, во-вторых, элементы первой строки, начиная с третьего, были бы нулями. Первому требованию можно удовлетворить, если искать R_1 в виде

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{R}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Пусть $\widetilde{b}_1$ — первая вектор-строка матрицы $(Q_1 D)$ без первого элемента (следовательно, $\widetilde{b}_1 \in \mathbf{R}^{m-1}$). Тогда второе требование будет означать, что $(\widetilde{b}_1, v_i) = 0$ для $i = 3, \ldots \ldots, m$, где $v_i \in \mathbf{R}^{m-1}$ — вектор-столбцы матрицы $\widetilde{R}_1$. Следовательно, $\widetilde{R}_1$ — матрица отражения с образующим вектором

$$\widetilde{h} = \frac{\widetilde{b}_1 - \| \widetilde{b}_1 \| l}{\| \widetilde{b}_1 - \| \widetilde{b}_1 \| l \|} \in \mathbf{R}^{m-1}.$$

Но тогда и R_1 также будет матрицей отражения с образующим вектором $(0, \widetilde{h}) = h^{(1)} \in \mathbf{R}^m$.

Таким же образом будем искать Q_i и R_i в виде

$$Q_i = \begin{pmatrix} E^{(i-1)} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_i \end{pmatrix}, \quad R_i = \begin{pmatrix} E^{(i)} & 0 \\ 0 & \tilde{R}_i \end{pmatrix},$$

где $\tilde{Q}_i$ и $\tilde{R}_i$ — матрицы отражения в пространствах более низкой размерности.

Заметим, что для получения Q и R нет необходимости производить перемножение матриц Q_i и R_i; достаточно лишь запоминать образующие векторы $g^{(i)}$ и $h^{(i)}$ и результаты действия матриц Q_i и R_i на вектор W вычислять по формулам

$$Q_i W = W - 2g^{(i)}(g^{(i)}, W),$$
$$R_i W = W - 2h^{(i)}(h^{(i)}, W).$$

Итак, пусть найдены такие матрицы P, Q и R, что $D = QPR$. Теперь, полагая $x_\alpha = Ry_\alpha$ (следовательно, $y_\alpha = R^{-1}x_\alpha$) из системы $(D^*D + \alpha E)y_\alpha = D^*u$ получим

$$(R^*P^*Q^*QPR + \alpha E)R^{-1}x_\alpha = D^*u,$$

или

$$(P^*P + \alpha E)x_\alpha = RD^*u = f.$$

Так как матрица P^*P — трехдиагональная, то последняя система легко решается, например, методом прогонки *). На это потребуется порядка m операций. Переход от вектора x_α к вектору z_α осуществляется по формуле $z_\alpha = S^{-1}R^{-1}x_\alpha$. Однако часто нет необходимости переходить к z_α. Так, если α определяется по невязке, то надо проверять условие $\|A\hat{z}_\alpha - u\| = \delta$, а оно эквивалентно условию $\|Px_\alpha - Q^*u\| = \delta$.

Существует стандартные программы решения СЛАУ с автоматическим выбором параметра регуляризации α, например, по невязке (см. [73]). В следующем параграфе приводятся примеры решения модельных задач.

§ 6. Примеры применения метода регуляризации

Здесь мы приведем несколько примеров применения метода регуляризации к решению интегральных уравнений первого рода.

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу численного дифференцирования (см. также [25, 58, 63]). Производная n-го

---

*) См. С а м а р с к и й А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.

порядка $z(t)$ от функции $u(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_0^t \frac{1}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} z(\tau)\,d\tau = u(t). \qquad (4;\ 6{,}1)$$

При приближенном задании правой части $(u = \tilde{u}(t))$ речь может идти лишь о приближенном нахождении производной.

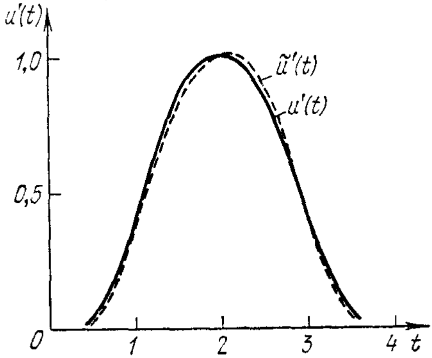

Рис. 11.

Пусть $u(t) = \int_0^t \exp(-y^4)dy$. Тогда $u'(t) = \exp(-t^4)$. $u'''(t) = -12t^2 \exp(-t^4) + 16t^6 \exp(-t^4)$.

Графики функций $u'(t)$ и $u'''(t)$ изображены на рис. 11 и 12 сплошными линиями.

Пусть вместо $u(t)$ мы имеем $\tilde{u}(t_i) = u(t)(1 + \theta_i\varepsilon)$, где θ_i — случайные числа, $-1 \leqslant \theta_i \leqslant 1$. Вычисление методом регуляризации производных 1-го и 3-го порядков от функции $\tilde{u}(t)$ для одной из последовательностей случайных чисел $\{\theta_i\}$ дает результаты, изображенные штриховой линией на рис. 11 и 12. При этом для $u'(t)$ брали $h = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}0055$; для $u'''(t)$ брали $h = 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}55 \cdot 10^{-6}$. Параметр α определялся по невязке.

Рассмотрим далее два примера, типичные для задач, связанных с обработкой экспериментальных наблюдений.

П р и м е р 2. Рассмотрим задачу определения спектрального состава излучения (электромагнитного, типа γ-излучения, или рентгеновского, или корпускулярного) [171, 173, 184].

Пусть интересующее нас излучение неоднородно и распределение плотности числа частиц (фотонов), характеризуется функцией $z(s)$ (s — частота или энергия).

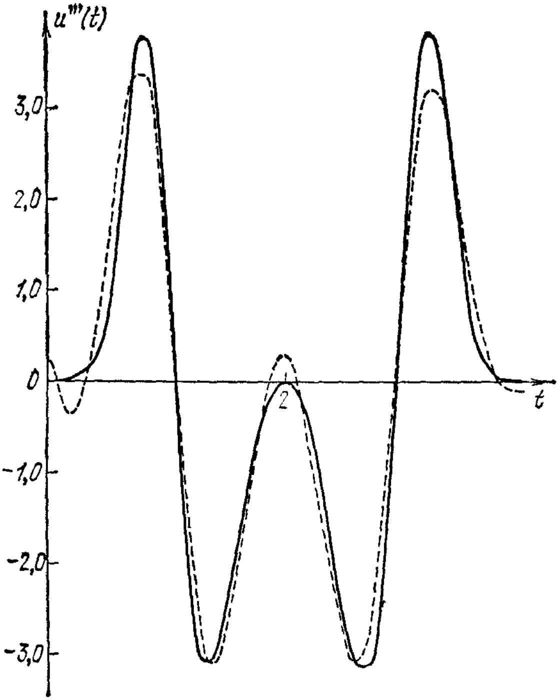

Рис. 12.

Пропуская это излучение через измерительную аппаратуру, мы получаем экспериментальный спектр $u(x)$ (x может быть частотой или энергией). Если измерительная аппаратура линейна, то функциональная связь между $z(s)$ и $u(x)$ дается формулой

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \qquad (4;\ 6,2)$$

где a и b — границы спектра, $K(x, s)$ — «аппаратная функция», предполагаемая известной. $K(x, s)$ представляет собой экспериментальный спектр (по x), если на измерительную аппаратуру падает монохроматическое излучение частоты (энергии) s и единичной интенсивности. Функцию $K(x, s)$ можно также рассматривать как отклик измерительной аппаратуры на δ-функцию, $z = \delta(x-s)$.

Задача состоит в определении истинного спектра излучения $z(s)$ по экспериментальному спектру $u(x)$ и сводится к решению уравнения (4; 6,2) относительно $z(s)$.

Рассмотрим математическую модель, задаваясь функцией $\bar{z}(s)$ и аппаратной функцией $K(x, s)$, близкими к функции $z_т(s)$ и аппаратной функции в соответствующих практических задачах.

Решая прямую задачу, вычислим «экспериментальный» спектр $\bar{u}(x) = \int\limits_a^b K(x, s)\,\bar{z}(s)\,ds$ на сетке по x: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Моделируя процесс появления случайных ошибок при измерении экспериментального спектра $u(x)$, заменим $\bar{u}(x_i)$ на $\tilde{u}(x_i)$ по формулам

$$\tilde{u}(x_i) = \bar{u}(x_i)\left(1 + \theta_i \sqrt{\frac{3(b-a)}{b^3-a^3}}\,\sigma\right),$$

где θ_i — случайные числа из промежутка $(-1, 1)$ с равномерным законом распределения. Очевидно, что среднее значение $\tilde{u}(x_i)$ равно $\bar{u}(x_i)$ и дисперсия $\tilde{u}(x_i)$ равна σ. Величина квадратического уклонения

$$\|\tilde{u}(x) - \bar{u}(x)\| = \left\{\int\limits_a^b [\tilde{u}(x) - \bar{u}(x)]^2\,dx\right\}^{1/2} \approx \left[3\sigma^2 \frac{1}{n} \sum_i \theta_i^2\right]^{1/2} = \sigma$$

является характеристикой точности исходных данных.

Возьмем в качестве $\bar{z}(s)$ функцию, изображенную на рис. 13 сплошной линией, а $K(x, s) = \left(1 - \frac{s}{x}\right)\eta(x-s)$, где $\eta(x-s)$ — единичная функция. Берем $a = 0$, $b = 11$.

Вычисляем

$$\bar{u}(x) = \int_0^{11} K(x, s)\,\bar{z}(s)\,ds.$$

Затем решаем уравнение

$$\int_0^{11} K(x, s)\,z(s)\,ds = \bar{u}(x)$$

относительно $z(s)$.

Заменяем последнее уравнение системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} z_j \Delta s_j = \bar{u}(x_i),$$

аппроксимируя интеграл суммой по формуле Симпсона. Результаты решения этой системы приведены на рис. 13

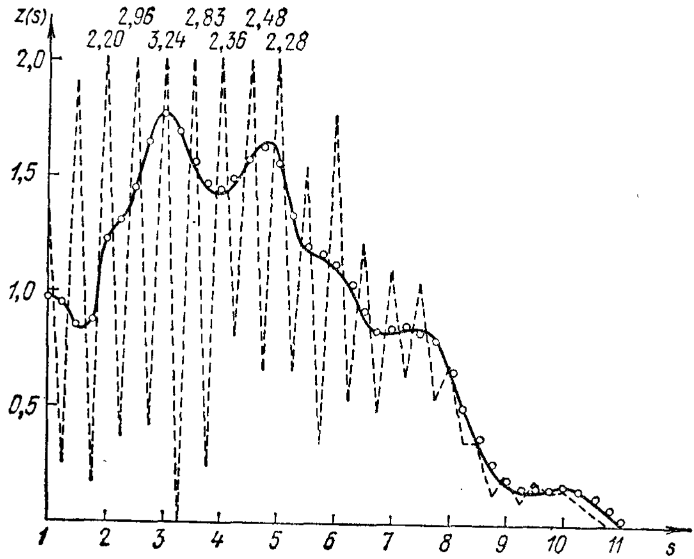

Рис. 13.

(штриховая ломаная). Пилообразная ломаная не имеет ничего общего с $\bar{z}(s)$. На том же рисунке кружками отмечены значения z_j, полученные в результате применения метода регуляризации. При этом вычисления велись с машинной точностью. На рис. 14 приводится результат применения метода регуляризации для решения уравнения с правой частью $\tilde{u}(x_i)$ с относительными ошибками в узловых точках x_i, равными 5 и 10% от измеряемой величины $\bar{u}(x_i)$ (кривые *2* и *3*. Кривая *1* — график $\bar{z}(x)$).

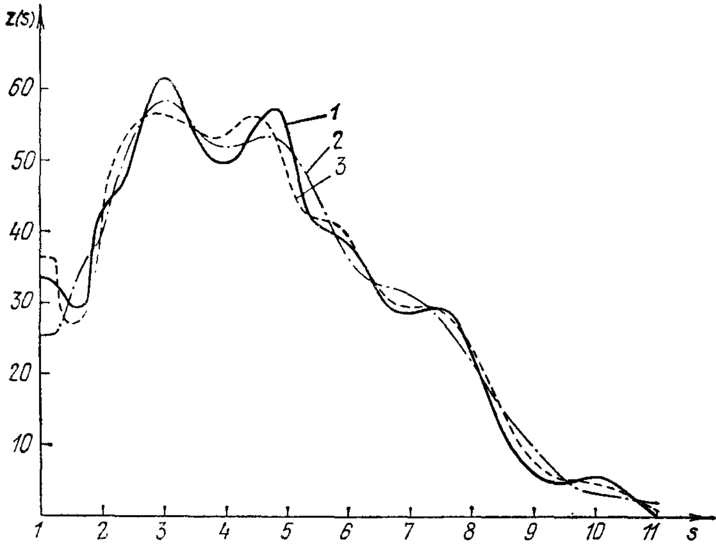

Рис. 14.

Рассмотренный пример представляет модель задачи о восстановлении истинного спектра потока быстрых нейтронов, создаваемого полоний-бериллиевым источником. Этот спектр подобен кривой $\bar{z}(s)$. В качестве регистрирующей аппаратуры был использован сцинтилляционный датчик [171].

Задаваясь различным уровнем погрешности правой части $u(x)$, мы можем, путем решения рассмотренной задачи, оценить соответствующие погрешности интересующей нас функции $z(s)$. Таким образом, мы можем прогнозировать исход эксперимента по определению $z(s)$ и тем самым планировать эксперимент.

Это одна из типичных задач математического проектирования эксперимента.

Пример 3. Рассмотрим задачу восстановления формы электрического импульсного сигнала $z_т(t)$, зависящего от времени, поданного на вход коаксиального кабеля

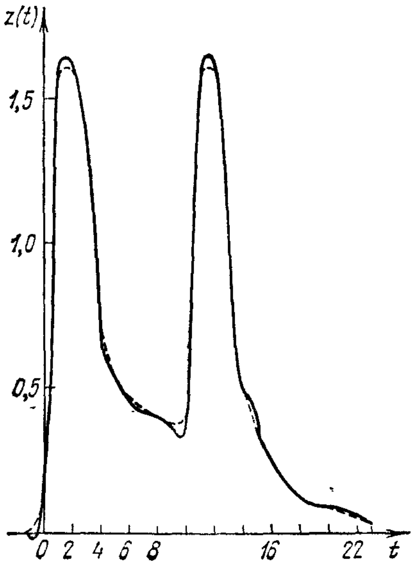

Рис. 15.

длины l, по выходному сигналу $u(t)$. Связь $z_т(t)$ и $u(t)$ дается соотношением

$$\int_0^t K(t-\tau)\, z_т(\tau)\, d\tau = u(t),$$

в котором $K(t)$ — известная импульсная функция

$$K(t) = \eta(t) \frac{\mu l}{\sqrt{4\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\mu^2 l^2}{4t}\right), \qquad (4;\ 6,3)$$

где μ — константа, характеризующая тип кабеля, $\eta(t)$ — единичная функция.

Возьмем в качестве $z_т(t)$ функцию, изображенную на рис. 15 (сплошная линия), и свернем ее с ядром (4; 6,3), в котором $\mu = 3{,}05 \cdot 10^{-4}$, $l = 10^4$. Получим функцию

$u(t)$, изображенную на рис. 16. В узловых точках сетки $\{t_i\}$ внесем в значения $u(t_i) = \int\limits_0^{t_i} K(t_i - \tau)\, z_T(\tau)\, d\tau$ возмущения по формулам $\tilde{u}(t_i) = u(t_i)(1 + \theta_i\varepsilon)$, где θ_i — случайные числа, $-1 \leqslant \theta_i \leqslant 1$. Если положить $\varepsilon = 0{,}01 \cdot p$, то относительная погрешность значений

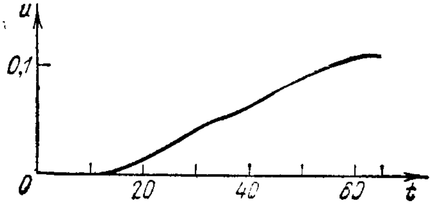

Рис. 16.

$\tilde{u}(t_i)$ в сравнении с $u(t_i)$ не будет превышать $p\%$. Было взято $p = 5$.

По заданным значениям $\tilde{u}(t_i)$ требуется найти приближенное к $z_T(t)$ решение уравнения

$$\int\limits_0^t K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = \tilde{u}(t).$$

Эта задача решалась методом регуляризации на сетке с шагом $h = 0{,}4$, $0 \leqslant \tau \leqslant 23$. Стабилизирующий функционал $\Omega[z]$ был взят вида $\Omega[z] = \int\limits_0^{23} \{(z')^2 + z^2\}\, dt$. Краевые условия брались вида $z(0) = z(23) = 0$. При $\alpha = 0{,}00156$ получен результат, изображенный на рис. 15 штриховой линией. Параметр α определялся по невязке.

Рассмотрим обратные задачи теплопроводности. Можно указать несколько типов таких задач. Мы ограничимся двумя из них. Хорошо известна обратная задача теплопроводности, состоящая в решении задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным отсчетом времени. Например, требуется найти решение уравнения

$$a^2 u_{xx} = u_t$$

для $t \leq T$, если известно его значение при $t = T$,

$f(x) = u(x, T)$. Это неустойчивая к малым изменениям функции $f(x)$ задача. Одним из устойчивых методов решения таких задач, помимо изложенного выше метода регуляризации, является метод квазиобращения (см. [111]). Представителем другого типа обратных задач теплопроводности является следующая обратная задача, имеющая большую практическую важность и приводящаяся к рассмотренному в примере 3 интегральному уравнению.

Рассмотрим однородное полупространство $x > 0$, ограниченное плоскостью $x = 0$. Пусть начальная температура в этом полупространстве равна нулю, а температура на границе есть функция только времени $v(t)$. В этом случае прямая задача теплопроводности состоит в отыскании решения уравнения $a^2 u_{xx} = u_t$ в области $(x > 0,\ t > 0)$, удовлетворяющего условиям: $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = v(t)$. Ее решение имеет вид

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{x v(\tau)}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)^3}} \exp\left[\frac{-x^2}{4a^2 (t-\tau)}\right] d\tau.$$

Обратная задача теплопроводности состоит в нахождении температуры $v(t)$ на границе $x = 0$ по результатам измерения температуры $u(x_0, t)$ на расстоянии $x_0 > 0$ от границы. Эта задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_0^t \frac{x_0 v(\tau)}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)^3}} \exp\left[\frac{-x_0}{4a^2 (t-\tau)}\right] d\tau = u(x_0, t)$$

относительно $v(\tau)$, т. е. к решению уравнения, рассмотренного в примере 3.

Задача теплопроводности для обратного времени рассматривалась в [111, 206]. Сходные вопросы рассматриваются также в [22, 39, 44, 62, 71].

Глава V

О ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ТИПА СВЕРТОК

Среди интегральных уравнений первого рода часто встречаются уравнения типа свертки $K(t)*z(t) = u(t)$. К таким уравнениям относится, например, уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u(t). \tag{5; 0,1}$$

Метод регуляризации можно, очевидно, применять и к построению приближенных решений уравнений типа свертки. Для этого достаточно указать способы построения регуляризирующих операторов. В гл. II рассмотрен вариационный способ построения таких операторов. В настоящей главе, следуя [11, 14, 15], с помощью интегральных преобразований для уравнений типа сверток строится широкое семейство (класс) регуляризирующих операторов, легко реализуемых на ЭВМ. Для одного подкласса такого класса указывается связь его с Р. О., получаемыми вариационным способом.

Подробно рассматривается построение Р. О. для уравнения (5; 0,1) с использованием преобразования Фурье. Однако все полученные результаты (и их доказательства) будут аналогичными для уравнений типа сверток вида

$$\int_{0}^{t} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u(t),$$

$$\int_{0}^{\infty} K\left(\frac{t}{\tau}\right) z(\tau)\, \frac{d\tau}{\tau} = u(t),$$

$$\int_{0}^{\infty} J_n(t\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u(t),$$

где $J_n(v)$ — функция Бесселя n-го порядка, требующих применения преобразований Лапласа, Меллина, Бесселя и др. Поэтому для соответствующих уравнений рассуждения и выкладки здесь не приводятся.

В § 1 предполагается, что погрешность $v(t)$ правой части $u(t)$ имеет аддитивный характер, т. е. $u(t) = u_т(t) + v(t)$.

Упомянутый выше класс регуляризирующих операторов строится при весьма слабых требованиях к правой части уравнения $u(t)$ и к погрешности $v(t)$ (u и $v \in L_2$) и без учета случайного характера функции $v(t)$.

При рассмотрении уклонения (§ 2) регуляризованного решения от точного предполагается, кроме того, что погрешность $v(t)$ (помеха, шум) является реализацией стационарного случайного процесса, не коррелированного с искомым решением $z_т(t)$. При этом уклонение оценивается в вероятностной метрике $\sup\limits_t \overline{[z_\alpha(t) - z_т(t)]^2}$, где черта сверху означает математическое ожидание. Далее рассматриваются регуляризованные решения, получаемые с помощью простейших стабилизаторов p-го порядка.

По характеру асимптотики фурье-преобразования ядра уравнения (при $\omega \to \infty$) выделяются 4 класса (типа) употребляемых в практике интегральных уравнений типа свертки, для которых при дополнительных предположениях об асимптотике (при $\omega \to \infty$) спектральной плотности погрешности $v(t)$ даются асимптотические оценки по α (при $\alpha \to 0$) отклонения регуляризованного решения от точного [9—11, 13] — как части его, обязанной влиянию метода регуляризации, так и части, обязанной погрешности правой части.

§ 1. Классы регуляризирующих операторов для уравнений типа сверток

1. Рассмотрим уравнение типа свертки

$$z(t) * K(t) = u(t), \qquad (5;\ 1,1)$$

в котором $K(t)$ и $u(t)$ — заданные функции, а $z(t)$ — искомая; $z \in F$, $u \in U$, F и U — метрические пространства.

Полагаем, что при $u(t) = u_т(t)$ это уравнение имеет единственное решение $z_т(t)$, принадлежащее F, т. е.

$$z_т(t) * K(t) \equiv u_т(t).$$

Задача заключается в нахождении функции $z_т(t)$. Если правая часть известна с погрешностью, т. е. вместо $u_т(t)$ имеем функцию $u(t)$ такую, что

$$\rho_U(u_т, u) \leqslant \delta,$$

то вместо нахождения $z_т$ можно ставить лишь задачу о нахождении приближенного решения. В качестве приближенного решения будем брать регуляризованное решение

$$z_\alpha(t) = R(u, \alpha),$$

где $R(u, \alpha)$ — регуляризирующий оператор.

2. Мы рассмотрим способ построения широкого класса регуляризирующих операторов, получаемых с помощью классических интегральных преобразований. Опишем его.

Пусть F и U — некоторые множества функций ($F \subset L_1$, $U \subset L_2$) и A — линейный непрерывный оператор с областью определения $D_A \supset F$. Рассмотрим уравнение

$$Az = u, \quad u \in U. \qquad (5;\ 1{,}2)$$

Полагаем, что оно имеет единственное решение на F. Применяя к соотношению (5; 1,2) линейное интегральное преобразование $\mathcal{J}$, например, преобразование Фурье (Лапласа, Меллина и др.), получим

$$\mathcal{J}[Az] = \mathcal{J}[u] = u(\omega). \qquad (5;\ 1{,}3)$$

Пусть оператор A таков, что из соотношения (5; 1,3) можно определить $\mathcal{J}[z] = z(\omega)$ в виде

$$z(\omega) = \psi(u(\omega), \omega).$$

Если Az есть свертка $z(t) * K(t)$ функций $z(t)$ с некоторой заданной функцией $K(t)$ (ядром) и при применении преобразования $\mathcal{J}$ к этой свертке справедлива теорема умножения, т. е.

$$\mathcal{J}[z * K] = \mathcal{J}[z] \cdot \mathcal{J}[K],$$

то

$$\psi(u(\omega), \omega) = \frac{u(\omega)}{K(\omega)}, \qquad (5;\ 1{,}4)$$

где $K(\omega)$ — преобразование $\mathcal{F}$ функции $K(t)$. Формула (5; 1,4) справедлива в применении, например, к сверткам вида

а) $$z(t) * K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) z(\tau)\, d\tau,$$

если пользоваться преобразованием Фурье;

б) $$z(t) * K(t) = \int_{0}^{t} K(t-\tau) z(\tau)\, d\tau$$

($K(t) \equiv z(t) \equiv 0$ для $t < 0$), если пользоваться односторонним преобразованием Лапласа;

в) $$z(t) * K(t) = \int_{0}^{\infty} K\left(\frac{t}{\tau}\right) z(\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

если пользоваться преобразованием Меллина.

3. Рассмотрим для определенности уравнение вида

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) z(\tau)\, d\tau = u(t) \qquad (5;\ 1,5)$$

и применим преобразование Фурье. Здесь $u(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, $K(t) \in \mathcal{K} \subset L_1(-\infty, \infty)$,

$$z(t) \in F \subset L_1(-\infty, \infty).$$

Если правая часть уравнения (5; 1,5) известна приближенно, т. е. $u(t) = u_т(t) + v(t)$, где $v(t)$ — помеха (шум), то

$$z(\omega) = \frac{u(\omega)}{K(\omega)} = \frac{u_т(\omega)}{K(\omega)} + \frac{v(\omega)}{K(\omega)}.$$

Так как $u_т(\omega) = K(\omega) z_т(\omega)$, то

$$z(\omega) = z_т(\omega) + \frac{v(\omega)}{K(\omega)}.$$

Эта формула дает нам преобразование Фурье точного решения уравнения (5; 1,5) с приближенной правой частью $u(t)$. Казалось бы естественным в качестве приближенного решения уравнения (5; 1,5) с приближенной правой частью $u(t)$ брать функцию, полученную с помощью обратного преобразования Фурье, т. е. функцию

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z_т(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega)}{K(\omega)} \exp(-i\omega t)\, d\omega =$$

$$= z_т(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega)}{K(\omega)} \exp(-i\omega t)\, d\omega.$$

Однако такая функция может не существовать, так как последний интеграл может быть расходящимся. В самом деле, по свойству преобразования Фурье функции $K(\omega)$ и $v(\omega)$ стремятся к нулю при $\omega \to \infty$, но это стремление к нулю «несогласованное», поскольку функция $v(t)$ (а следовательно, и $v(\omega)$) обычно носит случайный характер. Поэтому отношение

$$v(\omega)/K(\omega)$$

может не иметь обратного преобразования Фурье из-за влияния высоких частот ω случайной функции $v(\omega)$. Но если даже функция $v(\omega)/K(\omega)$ и имеет обратное преобразование Фурье $w(t)$, то уклонение функции $w(t)$ от нуля (в метрике C или в L_2) может быть сколь угодно большим.

Таким образом, в качестве приближенного решения уравнения (5; 1,5) с приближенной правой частью нельзя брать точное решение этого уравнения. Такого решения может не существовать, а если оно и существует, то не обладает свойством устойчивости к малым отклонениям правой части $u(t)$. Причиной неустойчивости такого алгоритма построения «решений» является влияние высоких частот ω преобразования Фурье $v(\omega)$ помехи $v(t)$. Поэтому, если мы хотим строить приближенные решения уравнения (5; 1,5), устойчивые к малым уклонениям правой части $u(t)$, с помощью обратного преобразования Фурье, то надо «подавить» влияние высоких частот ω, умножая, например, функцию

$$u(\omega)/K(\omega)$$

на соответствующий множитель $f(\omega, \alpha)$ (зависящий от параметра α согласно § 1 гл. II) [11, 14, 15].

4. Возвращаясь к уравнению (5; 1,2), рассмотрим оператор вида

$$R_f(u, \alpha) = \mathcal{J}^{-1}[\psi(u(\omega), \omega) \cdot f(\omega, \alpha)],$$

где $\mathcal{J}^{-1}$ — преобразование, обратное преобразованию $\mathcal{J}$, а $f(\omega, \alpha)$ — некоторая заданная функция, определенная для всех неотрицательных значений параметра α и любых ω, по которым берется оператор $\mathcal{J}^{-1}$. Если функцию $f(\omega, \alpha)$ подчинить соответствующим условиям, то оператор $R_f(u, \alpha)$ будет регуляризирующим для уравнения (5; 1,2).

В дальнейшем для определенности будем рассматривать уравнение типа свертки вида (5; 1,5) и в качестве $\mathcal{J}$ брать преобразование Фурье. В этом случае

$$R_f(u, \alpha) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} u(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega. \qquad (5;\ 1,6)$$

Пусть функция $f(\omega, \alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

1_f) $f(\omega, \alpha)$ определена в области $(\alpha \geqslant 0, \ -\infty < \omega < \infty)$;

2_f) $0 \leqslant f(\omega, \alpha) \leqslant 1$ для всех значений $\alpha \geqslant 0$ и ω;

3_f) $f(\omega, 0) \equiv 1$;

4_f) для всякого $\alpha > 0$ $f(\omega, \alpha)$ — четная по ω и $f(\omega, \alpha) \in L_2(-\infty, \infty)$;

5_f) для всякого $\alpha > 0$ $f(\omega, \alpha) \to 0$ при $\omega \to \pm\infty$;

6_f) при $\alpha \to 0$ $f(\omega, \alpha) \to 1$, не убывая, причем на всяком отрезке $|\omega| \leqslant \omega_1$ эта сходимость равномерная;

7_f) для всякого $\alpha > 0$ $\dfrac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} \in L_2(-\infty, \infty)$;

8_f) для всякого $\omega \neq 0$ $f(\omega, \alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ и эта сходимость равномерная на всяком отрезке $[\omega_1, \omega_2]$, $0 < \omega_1 < \omega_2$.

Таким образом, заданием функции $f(\omega, \alpha)$, удовлетворяющей требованиям 1_f—8_f, определяется однопараметрический оператор $R_f(u, \alpha)$ вида (5; 1,6).

5. Если уклонение правой части уравнения (5; 1,5) оценивать в метрике $L_2(-\infty, \infty)$, а уклонение решения $z(t)$ — в метрике C, и полагать, что $z(\omega) \in L_1(-\infty, \infty)$, то справедлива

Теорема 1. *Если функция* $f(\omega, \alpha)$ *удовлетворяет условиям* $1_f—8_f$, *то определенный с ее помощью оператор* $R_f(u, \alpha)$ *вида* (5; 1,6) *является регуляризирующим оператором для уравнения* (5; 1,5).

Доказательство. Пусть $z_T(t)$ — единственное решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u_T(t),$$

$$u_\delta(t) \in L_2(-\infty, \infty) \quad \text{и} \quad \rho_{L_2}(u_\delta, u_T) \leqslant \delta.$$

Оценим модуль разности $\Delta z_\alpha^\delta = R_f(u_\delta, \alpha) - z_T(t)$:

$$|\Delta z_\alpha^\delta| \leqslant |R_f(u_\delta, \alpha) - R_f(u_T, \alpha)| + |R_f(u_T, \alpha) - z_T(t)|.$$

Пусть $\Delta R_f = R_f(u_\delta, \alpha) - R_f(u_T, \alpha)$, $\Delta z_\alpha = R_f(u_T, \alpha) - z_T(t)$ и $u_\delta(\omega)$ — преобразование Фурье функции $u_\delta(t)$. Тогда

$$|\Delta R_f| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)}\right| |u_\delta(\omega) - u_T(\omega)|\, d\omega.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|\Delta R_f| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)}\right|^2 d\omega\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |u_\delta(\omega) - u_T(\omega)|^2\, d\omega\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

По свойствам 6_f и 7_f интеграл

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)}\right|^2 d\omega$$

является убывающей функцией от α, стремящейся к $+\infty$ при $\alpha \to 0$ $(\alpha > 0)$. Уклонение $u_\delta(t)$ от $u_T(t)$ в метрике L_2, т. е. $\rho_{L_2}(u_\delta, u_T)$, по теореме Планшереля *) равно

$$\frac{1}{2\pi} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |u_\delta(\omega) - u_T(\omega)|^2\, d\omega\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

*) Для всякой функции $u(t)$ из $L_2(-\infty, \infty)$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt,$$

По условию $\rho_{L_2}(u_\delta, u_т) \leqslant \delta$; значит, $|\Delta R_f| \leqslant \delta\sqrt{\varphi(\alpha)}$.
Так как $u_т(\omega) = K(\omega) z_т(\omega)$, то

$$|\Delta z_\alpha| = |R_f(u, \alpha) - z_т(t)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} z_т(\omega)\{f(\omega, \alpha) - 1\} \exp(-i\omega t)\, d\omega\right|.$$

Следовательно,

$$|\Delta z_\alpha| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |z_т(\omega)|\,|f(\omega, \alpha) - 1|\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\omega_1} |z_т(\omega)|\,|f(\omega, \alpha) - 1|\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\infty} |z_т(\omega)|\,|f(\omega, \alpha) - 1|\, d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} |z_т(\omega)|\,|f(\omega, \alpha) - 1|\, d\omega.$$

Так как $0 \leqslant f(\omega, \alpha) \leqslant 1$, то

$$|\Delta z_\alpha| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\omega_1} |z_т(\omega)|\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\infty} |z_т(\omega)|\, d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} |z_т(\omega)|\,|f(\omega, \alpha) - 1|\, d\omega.$$

Поскольку $z_т(\omega) \in L_1(-\infty, \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_1(\varepsilon) > 0$, что для всякого $\omega_1 \geqslant \omega_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\omega_1} |z_т(\omega)|\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\infty} |z_т(\omega)|\, d\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

По свойству 6_f функции $f(\omega, \alpha)$ найдется такое $\alpha_0(\varepsilon)$, что для $\alpha \leqslant \alpha_0(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1(\varepsilon)}^{\omega_1(\varepsilon)} |z(\omega)|\,|f(\omega, \alpha) - 1|\, d\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если

$$\delta \leqslant \delta_0 = \frac{\varepsilon}{3}[\varphi(0{,}5\, \alpha_0)]^{-0{,}5},$$

то для всех $\alpha \in [0{,}5\cdot\alpha_0,\ \alpha_0]$ $|\Delta R_f| \leqslant \varepsilon/3$ и, следовательно, $|\Delta z_\alpha^\delta| \leqslant \varepsilon$. Теорема доказана.

Таким образом, функция $z_\alpha(t) = R_f(u, \alpha)$, полученная с помощью оператора (5; 1,6), является регуляризованным решением уравнения (5; 1,5). Функцию двух переменных $f(\omega, \alpha)$ оператора (5; 1,6), обладающую свойствами 1_f—8_f, будем называть *стабилизирующим множителем.*

Замечание 1. В работе [82], посвященной решению задачи Коши для уравнения Лапласа в полосе, используется стабилизирующий множитель вида

$$f(\omega, \alpha) = e^{-\alpha^2\omega^2}.$$

Замечание 2. Полагая,

$$f(\omega, \alpha) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant 1/h; \\ 0, & |\omega| > 1/h; \end{cases} \quad (\alpha = h),$$

где h — величина шага сетки, на которой ищется решение уравнения (5; 1,5), получим известный метод построения приближенного решения уравнения (5; 1,5).

6. Пусть $M(\omega)$ — заданная четная функция, причем:

а) она кусочно-непрерывна на любом конечном отрезке;

б) неотрицательна; $M(0) \geqslant 0$ и $M(\omega) > 0$ при $\omega \neq 0$;

в) для достаточно больших $|\omega|$

$$M(\omega) \geqslant C > 0;$$

г) для всякого $\alpha > 0$

$$\frac{K(-\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)} \in L_2(-\infty, \infty),$$

где $L(\omega) = K(\omega)K(-\omega) = |K(\omega)|^2$. Полагая

$$f(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)},$$

получим классы регуляризирующих операторов для уравнения (5; 1,5). Каждый такой класс определяется заданием функции $M(\omega)$.

7. При фиксированной функции $M(\omega)$ параметр регуляризации α можно находить по невязке. Если уклонение правой части $u(t)$ оценивать в метрике L_2, то квадрат невязки регуляризованного решения $z_\alpha(t)$ будет

вычисляться по формуле

$$\rho^2_{L_2}(Az_\alpha, u) = \int_{-\infty}^{\infty} [Az_\alpha - u(t)]^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)\cdot z_\alpha(\omega) - u(\omega)|^2\,d\omega = \Phi(\alpha).$$

Так как

$$z_\alpha(\omega) = \frac{K(-\omega)\,u(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)},$$

то

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 M^2(\omega)\,|u(\omega)|^2\,d\omega}{\{L(\omega) + \alpha M(\omega)\}^2}.$$

Очевидно, что $\Phi(0) = 0$,

$$\Phi(\alpha) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |u(\omega)|^2\,d\omega = \|u(t)\|^2_{L_2}$$

и $\Phi(\alpha)$ стремится к $\|u(t)\|^2_{L_2}$ при $\alpha \to \infty$. Кроме того,

$$\Phi'(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha L(\omega)\,M^2(\omega)\,|u(\omega)|^2\,d\omega}{\{L(\omega) + \alpha M(\omega)\}^3} > 0.$$

Таким образом, невязка регуляризованного решения — строго возрастающая функция переменного α, изменяющаяся от 0 до $\|u(t)\|_{L_2}$. Следовательно, если погрешность правой части u_δ уравнения (5; 1,5) равна δ и $\delta < \|u_\delta(t)\|_{L_2}$, то существует единственное число $\bar{\alpha}$, для которого $\Phi(\bar{\alpha}) = \delta^2$. Если $\delta \geqslant \|u_\delta(t)\|_{L_2}$, то уравнение $\Phi(\alpha) = \delta^2$ не имеет решения.

8. Очевидно, что $\Phi(\alpha)$ зависит от выбора функции $M(\omega)$, т. е.

$$\Phi(\alpha) = \Phi_M(\alpha).$$

При малых значениях α основной вклад в $\Phi_M(\alpha)$ дают большие частоты. Поэтому, если $M_1(\omega) \geqslant M_2(\omega)$ для достаточно больших ω, то для достаточно малых α имеем

$$\Phi_{M_1}(\alpha) \geqslant \Phi_{M_2}(\alpha).$$

В частности, если брать $M_1(\omega) = \omega^{2p_1}$ и $M_2(\omega) = \omega^{2p_2}$, то при $p_1 > p_2$

$$\Phi_{p_1}(\alpha) > \Phi_{p_2}(\alpha).$$

Решение $\bar{\alpha}$ уравнения $\Phi_p(\alpha) = \delta^2$, очевидно, зависит от p, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(p)$, и при $p_1 > p_2$ $\bar{\alpha}(p_1) < \bar{\alpha}(p_2)$. Таким образом, с увеличением порядка регуляризации p $\bar{\alpha}(p)$ убывает.

О практическом нахождении $\bar{\alpha}$ по невязке следует сказать то же, что было сказано в § 4 гл. II.

9. Легко видеть, что регуляризованное решение уравнения (5; 1,5), определяемое по формуле

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(-\omega)\, u(\omega) \exp(-i\omega t)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)} d\omega, \qquad (5;\ 1,7)$$

минимизирует функционал

$$M^\alpha[z, u] = \int_{-\infty}^{\infty} (Az - u)^2\, dt + \alpha\Omega[z]$$

со стабилизирующим функционалом вида

$$\Omega[z] = \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega)\, |z(\omega)|^2\, d\omega. \qquad (5;\ 1,8)$$

Здесь

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau.$$

Полагая

$$M(\omega) = \sum_{n=0}^{p} q_n \omega^{2n},$$

где q_n — заданные неотрицательные константы и $q_p > 0$, по формуле (5; 1,8) получим стабилизаторы p-го порядка. Полагая $M(\omega) = \omega^{2r}$, где r — произвольное положительное число, получим стабилизаторы вида

$$\Omega[z] = B \int_{-\infty}^{\infty} |z^{(r)}(t)|^2\, dt,$$

где

$$z^{(r)}(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-r)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{m-1} \frac{d^{m+1}z}{d\tau^{m+1}} d\tau\,^*);$$

здесь m — целое число, не меньшее целой части числа r, т. е. $m \geqslant E[r]$; B — положительное число.

В качестве $M(\omega)$ можно брать функцию, имеющую любой порядок роста при $\omega \to \infty$. Очевидно, подобно рассмотренным примерам, по формуле (5; 1,8) можно получить множество других стабилизаторов $\Omega[z]$.

10. Целесообразность рассмотрения различных семейств регуляризирующих операторов состоит, например, в том, чтобы для каждой конкретной задачи (класса задач) выбрать наилучший оператор. Например, такой, который минимизирует уклонение (в заранее определенном смысле) регуляризованного решения $z_\alpha(t)$ от искомого точного $z_T(t)$, или такой, который удобнее при его машинной реализации.

Пусть $\Phi(z_1, z_2)$ — заданный неотрицательный функционал, определенный на множестве функций z_1 и z_2, содержащем регуляризованные решения $z_\alpha(t)$ уравнения (5; 1,5) и точное решение $z_T(t)$ (например, норма уклонения z_2 от z_1).

Фиксируя функционал $\Phi(z_1, z_2)$, можно рассмотреть следующие задачи:

Задача 1. При фиксированном стабилизирующем множителе $f(\omega, \alpha)$ найти такое значение α_0 параметра регуляризации α, при котором

$$\Phi(z_{\alpha_0}, z_T) = \inf_{\alpha} \Phi(z_\alpha, z_T).$$

Задача 2. Пусть $\mathcal{F}_f \equiv \{f(\omega, \alpha)\}$ — заданное семейство стабилизирующих множителей. Требуется в семействе функций $\mathcal{F}_f$ найти такую функцию $f_0(\omega, \alpha)$ и такое значение параметра регуляризации $\alpha = \alpha_{\text{оп}}$, на которых функционал $\Phi(z_\alpha, z_T)$ достигает минимума, т. е.

$$\Phi\left(z^0_{\alpha_{\text{оп}}}, z_T\right) = \inf_{\substack{f \in \mathcal{F}_f \\ \alpha > 0}} \Phi(z_\alpha, z_T).$$

Здесь

$$z^0_{\alpha_{\text{оп}}} = R_{f_0}(u, \alpha_{\text{оп}}).$$

---

*) Функцию $z^{(r)}(t)$ можно рассматривать как производную нецелого «порядка» r.

Регуляризирующий оператор $R_{f_0}(u, \alpha_{оп})$, отвечающий функции $f_0(\omega, \alpha)$ и значению параметра регуляризации $\alpha = \alpha_{оп}$, будем называть *оптимальным на семействе* $\mathcal{F}_f$, а $\alpha_{оп}$ — *оптимальным значением параметра регуляризации* на этом семействе. Регуляризованное решение уравнения (5; 1,5), полученное с помощью оптимального регуляризирующего оператора, будем называть *оптимальным регуляризованным решением.*

Иногда не представляется возможным найти в семействе $\mathcal{F}_f$ оптимальный стабилизирующий множитель (алгоритм), но можно указать «близкий» ему (в определенном смысле) множитель. Поэтому представляет интерес

Задача 3. Оценить $\Phi(z_{\alpha_1,f_1}, z_{\alpha_2,f_2})$ при условии $\rho_{\tilde{\mathcal{F}}}(f_1, f_2) \leqslant \delta$, где $z_{\alpha_1,f_1} = R_{f_1}(u, \alpha_1)$, $z_{\alpha_2,f_2} = R_{f_2}(u, \alpha_2)$, а $\rho_{\tilde{\mathcal{F}}}(f_1, f_2)$ — метрика в $\mathcal{F}_f$.

Сформулированные задачи (и их модификации) будут рассматриваться в настоящей и в следующей главах.

§ 2. Уклонение регуляризованного решения от точного

1. Обратимся снова к рассмотрению уравнения (5; 1,5). Пусть $u(t) = u_т(t) + v(t)$, где $v(t)$ — помеха (шум). Полагаем, что $v(t)$ есть случайная функция, некоррелированная с искомым решением $z_т(t)$ и ее математическое ожидание равно нулю, т. е. $\overline{v(t)} = 0$.

Регуляризованное решение можно записать в виде

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} u_т(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} v(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega.$$

Следовательно,

$$z_\alpha(t) - z_т(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{f(\omega, \alpha) - 1\}\frac{u_т(\omega)}{K(\omega)}\exp(-i\omega t)\,d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} v(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega. \quad (5;\ 2,1)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (5; 2,1) характеризует влияние регуляризации (при точной правой части уравнения), второе — влияние шума в правой части уравнения (5; 1,5).

Пусть

$$\Delta_r(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(\omega, \alpha) - 1\}\frac{u_т(\omega)}{K(\omega)}\exp(-i\omega t)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(\omega, \alpha) - 1\} z_т(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega; \quad (5;\ 2,2)$$

$$\Delta_ш(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\omega, \alpha)}{K(\omega)} v(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega. \quad (5;\ 2,3)$$

Тогда

$$z_\alpha(t) - z_т(t) = \Delta_r(t, \alpha) + \Delta_ш(t, \alpha).$$

В § 1 настоящей главы было доказано (см. теорему п. 5), что $\Delta_r(t, \alpha)$ стремится к нулю при $\alpha \to 0$, причем сходимость равномерная относительно t. Поскольку $v(t)$ — случайная функция, то $\Delta_ш(t, \alpha)$ также случайная функция и ее математическое ожидание равно нулю, т. е. $\overline{\Delta_ш(t, \alpha)} = 0$.

Замечание. Если $f(t)$ — случайная функция (случайный процесс), то функция

$$R(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)}$$

называется *автокорреляционной функцией* процесса $f(t)$. Для *стационарных* случайных процессов автокорреляционная функция зависит лишь от разности аргументов $t_2 - t_1$, т. е.

$$\overline{f(\tau)f(t+\tau)} = R(t).$$

Фурье-преобразование автокорреляционной функции стационарного случайного процесса $f(t)$ называется его *спектральной плотностью* $S(\omega)$. Хорошо известно, что на вещественной оси $S(\omega)$ — четная неотрицательная функция, для которой $S(0) \geqslant S(\omega)$ и $S(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$ *).

---

*) Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.— М.: Наука, 1968.

В дальнейшем будем полагать, что $v(t)$ есть реализация стационарного случайного процесса со спектральной плотностью $S(\omega)$. В этих предположениях дисперсия случайной функции $\Delta_ш(t, \alpha)$ (дисперсия влияния шума) равна

$$\overline{\Delta_ш^2(t, \alpha)} = \sigma^2(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(\omega, \alpha)}{L(\omega)} S(\omega)\, d\omega, \quad (5;\ 2{,}4)$$

где

$$L(\omega) = K(\omega) K(-\omega).$$

В силу свойства 6_f функции $f(\omega, \alpha)$, очевидно, что $\sigma^2(\alpha)$ растет при $\alpha \to 0$. Если

$$\frac{S(\omega)}{L(\omega)} \in L_1(-\infty, \infty),$$

то при $\alpha \to 0$ $\sigma^2(\alpha)$ стремится, возрастая, к конечному значению $\sigma^2(0)$. Если же

$$\frac{S(\omega)}{L(\omega)} \notin L_1(-\infty, \infty),$$

то $\sigma^2(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 0$. Из свойств функции $f(\omega, \alpha)$ непосредственно следует, что $\sigma^2(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$.

3. Метрика, в которой оценивается уклонение $z_\alpha(t)$ от $z_т(t)$, выбирается в соответствии с характером информации о шуме правой части уравнения, которой мы располагаем. Если $v(t)$ — случайная функция, то естественно использовать вероятностную метрику.

Будем оценивать уклонение $z_\alpha(t)$ от $z_т(t)$ по формуле

$$\rho_F^2(z_\alpha, z_т) = \sup_t \overline{[z_\alpha(t) - z_т(t)]^2}.$$

Пусть

$$\Delta_r^2(\alpha) = \sup_t \Delta_r^2(t, \alpha).$$

Тогда

$$T_f(\alpha) = \sup_t \overline{[z_\alpha(t) - z_т(t)]^2} = \Delta_r^2(\alpha) + \sigma^2(\alpha). \quad (5;\ 2{,}5)$$

При $\alpha \to 0$ $\Delta_r^2(\alpha) \to 0$ (см. стр. 173), а $\sigma^2(\alpha)$ — монотонно возрастает. Следовательно, при некотором значении $\alpha = \alpha_0$ *) $T_f(\alpha)$ достигает наименьшего значения. Вели-

*) Если это значение не единственно, то берем наименьшее из них.

чину α_0 будем называть *(C, f)-оптимальным значением* параметра регуляризации. Регуляризованное решение, полученное при $\alpha = \alpha_0$, будет асимптотически (при $\alpha \to 0$) наилучшим в смысле $\min\limits_{\alpha} T_f(\alpha)$ в классе регуляризованных решений, отвечающих заданной функции $f(\omega, \alpha)$.

Представляет интерес выделение таких классов уравнений вида (5; 1,5), для которых, пользуясь соответствующей информацией об искомом решении и шуме, можно определить (C, f)-оптимальное или близкое к нему значение параметра регуляризации α. По самому определению (C, f)-оптимального значения α_0, для его нахождения надо уметь вычислять $\Delta_r^2(\alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$ при малых значениях α, т. е. находить асимптотические представления функций $\Delta_r^2(t, \alpha), \Delta_r^2(\alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$ при $\alpha \to 0$. Таким образом, возникает задача асимптотической оценки при $\alpha \to 0$ величин $\Delta_r^2(t, \alpha), \Delta_r^2(\alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$. Такие оценки будут даны для некоторых классов уравнений в § 3.

4. На первый взгляд кажется, что упомянутые оценки надо находить для каждого стабилизирующего множителя $f(\omega, \alpha)$. Однако можно указать такие классы стабилизирующих множителей (см. [14, 15]), что для стабилизирующих множителей из одного и того же класса асимптотические оценки для $\Delta^2(t, \alpha)$, $\Delta_r^2(\alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$ при $\alpha \to 0$ будут одинаковыми. Поэтому достаточно получить упомянутые оценки лишь для простейших стабилизирующих множителей из рассматриваемого класса.

Определение. Стабилизирующие множители $f_1(\omega, \alpha_1)$ и $f_2(\omega, \alpha_2)$ будем называть *асимптотически ε-близкими*, если для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\alpha_0(\varepsilon)$ такое, что для α_1 и α_2, меньших $\alpha_0(\varepsilon)$ и таких, что $\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right| \leqslant \min\{\alpha_1^2, \alpha_2^2\}$, выполняется неравенство

$$\left\| \frac{f_1(\omega, \alpha_1)}{K(\omega)} - \frac{f_2(\omega, \alpha_2)}{K(\omega)} \right\|_{L_2} \leqslant \varepsilon^*).$$

Если брать

$$f(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)},$$

*) $\| \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) \|_{L_2}$ — расстояние между функциями $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ в метрике $L_2(-\infty, \infty)$.

то стабилизирующие множители

$$f_1(\omega, \alpha_1) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha_1 M_1(\omega)},$$

$$f_2(\omega, \alpha_2) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha_2 M_2(\omega)},$$

определяемые функциями

$$M_1(\omega) = \omega^{2p}, \tag{5; 2,6}$$

$$M_2(\omega) = \omega^{2p} + q_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + q_0, \tag{5; 2,7}$$

где

$$q_0, \ q_1, \ \ldots, \ q_{p-1} \geqslant 0,$$

являются асимптотически ε-близкими при любом значении $\varepsilon > 0$.

5. Оценим разность между регуляризованными решениями уравнения (5; 1,5), полученными с помощью асимптотически ε-близких стабилизирующих множителей $f_1(\omega, \alpha_1)$ и $f_2(\omega, \alpha_2)$. Очевидно, что

$$|z_{\alpha_1, f_1}(t) - z_{\alpha_2, f_2}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f_1(\omega, \alpha_1)}{K(\omega)} - \frac{f_2(\omega, \alpha_2)}{K(\omega)} \right| |u(\omega)| \, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{f_1(\omega, \alpha_1)}{K(\omega)} - \frac{f_2(\omega, \alpha_2)}{K(\omega)} \right\|_{L_2} \cdot \| u(t) \|_{L_2} \leqslant \varepsilon \| u(t) \|_{L_2}.$$

Так как стабилизирующие множители, определяемые функциями (5; 2,6) и (5; 2,7), являются асимптотически ε-близкими при любом $\varepsilon > 0$, то при рассмотрении, например, регуляризованных решений, получаемых с помощью стабилизаторов p-го порядка с постоянными коэффициентами, достаточно получить асимптотические оценки функций $\Delta_r^2(t, \alpha)$, $\Delta_r^2(\alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$ при $\alpha \to 0$ лишь для регуляризованных решений, полученных с помощью *простейших стабилизаторов p-го порядка*, т. е. при $M(\omega) = \omega^{2p}$.

§ 3. Асимптотические оценки уклонения регуляризованного решения от точного для уравнения типа свертки при $\alpha \to 0$

1. Следуя [9, 10], ниже будут получены асимптотические формулы для $\Delta_r(t, \alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$ для различных типов уравнений вида (5; 1,5). Эти типы определяются

характером асимптотики фурье-преобразования ядра $K(\omega)$ при $|\omega| \to \infty$. Мы рассмотрим здесь четыре типа уравнений.

I тип. $K(\omega)$ — рациональная функция, не имеющая нулей на вещественной оси, стремящаяся к нулю при $\omega \to \infty$ как

$$\frac{A}{\omega^n},$$

где n — целое положительное число.

II тип. Все особые точки функции $K(\omega)$ (кроме бесконечно удаленной) расположены в ограниченной области. Для всякого числа $B > 0$ интеграл

$$\int_0^B \frac{d\omega}{L(\omega)}$$

сходится. При $\omega \to \infty$ $K(\omega)$ имеет асимптотику вида $K(\omega) = H \exp[-(iA\omega)^{1/m}]$, где $m > 1$, $A > 0$.

III тип. При $\omega \to \infty$ $K(\omega)$ имеет асимптотику вида

$$K(\omega) = H \exp(-A\omega^2),$$

где $H > 0$ и $A > 0$.

IV тип. При $|\omega| \to \infty$ $K(\omega)$ имеет асимптотику вида

$$K(\omega) = \frac{A}{\omega^n \underbrace{(\ln \ln \ldots \ln}_{s \text{ раз}} |\omega|)^k},$$

где $A > 0$, n, s, k — целые числа такие, что $s \geqslant 0$, $n \geqslant 0$; если $n > 0$, то k — любое, если $n = 0$, то $k > 0$, $s > 0$.

2. К уравнениям с ядрами таких типов сводятся: задача вычисления производной n-го порядка (I тип); задачи автоматического регулирования (I тип); задачи восстановления электромагнитных сигналов, искаженных фильтром с сосредоточенными параметрами (емкость, индуктивность, сопротивление) (I тип); задачи восстановления электромагнитных сигналов, искаженных длинной линией с потерями (кабель, проводящая среда) (II тип, $m = 2$); задачи восстановления электромагнитных сигналов, распространяющихся по сферической поверхности и принятых в области геометрической тени (II тип); задачи восстановления звуковых сигналов, распространяющихся по вязкой среде (III тип) и многие другие.

3. Будем полагать, что спектральная плотность шума $S(\omega)$ при $|\omega| \to \infty$ имеет на вещественной оси асимптотику вида

$$S(\omega) = S_0/\omega^a,$$

где a и S_0 — постоянные числа; $a \geqslant 0$, $S_0 > 0$. При $a = 0$ и $S(\omega) = S_0$ имеем «белый» шум, S_0 — характеристика уровня шума.

В дальнейшем мы будем рассматривать асимптотику функций $\Delta_r(t, \alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$ лишь для стабилизаторов с постоянными коэффициентами $q_i(s) = q_i = \text{const}$. В этом случае

$$M(\omega) = \omega^{2p} + q_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + q_0$$

(для стабилизатора p-го порядка).

Поскольку стабилизирующие множители $\frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)}$, определяемые функциями

$$M_1(\omega) = \omega^{2p} + q_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + q_0,$$
$$M_2(\omega) = \omega^{2p},$$

являются асимптотически ε-близкими при любом $\varepsilon > 0$, то согласно § 2 настоящей главы асимптотические оценки функций $\Delta_r(t, \alpha)$ и $\sigma^2(\alpha)$ достаточно провести лишь для функций $M(\omega) = \omega^{2p}$.

4. Оценка $\Delta_r(t, \alpha)$ для уравнений с ядрами I типа. Для стабилизатора p-го порядка с $M(\omega) = \omega^{2p}$ регуляризованное решение уравнения (5; 1,5) с точной правой частью $u_т(t)$ имеет вид

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega)\, z_т(\omega)}{L(\omega) + \alpha\omega^{2p}} \exp(-i\omega t)\, d\omega$$

или

$$z_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L_\alpha(t - \tau)\, z_т(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} L_\alpha(\xi) z_т(t - \xi)\, d\xi, \tag{5; 3,1}$$

где

$$L_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega) \exp(-i\omega t)}{L(\omega) + \alpha\omega^{2p}}\, d\omega \tag{5; 3,2}$$

есть четная функция. Поэтому

$$z_\alpha(t) = \int_0^\infty L_\alpha(\xi)\{z_{\text{т}}(t-\xi) + z_{\text{т}}(t+\xi)\}\,d\xi. \quad (5;\ 3{,}3)$$

Последний интеграл равен сумме вычетов подынтегральной функции в ее полюсах (умноженной на $2\pi i$), расположенных в верхней полуплоскости (для $t < 0$) и в нижней полуплоскости (для $t > 0$). Полюсами подынтегральной функции будут лишь нули знаменателя $L(\omega) + \alpha\omega^{2p}$, которые принадлежат одному из двух типов:

1) нули $\omega_{1\alpha}$, стремящиеся при $\alpha \to 0$ к нулям функции $L(\omega)$;

2) нули $\omega_{2\alpha}$, стремящиеся к бесконечности при $\alpha \to 0$. Рассмотрим вклад тех и других в $L_\alpha(t)$.

Для нулей первого типа имеем $\omega_{1\alpha} \to \omega_1$ при $\alpha \to 0$. Если ω_1 — простой нуль функции $L(\omega)$, то

$$\operatorname{res}\left\{\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\right\}_{\omega=\omega_{1\alpha}} = \frac{L(\omega_{1\alpha})\exp(-i\omega_{1\alpha}t)}{2p\alpha\omega_{1\alpha}^{2p-1} + \left(\dfrac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_{1\alpha}}} =$$

$$= \frac{(\omega_{1\alpha}-\omega_1)\left(\dfrac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}}{2p\alpha\omega_1^{2p-1} + \left(\dfrac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}} \exp(-i\omega_1 t) + O[(\omega_{1\alpha}-\omega_1)^2] =$$

$$= (\omega_{1\alpha}-\omega_1)\exp(-i\omega_1 t)\,[1 + O(\alpha)] + O[(\omega_{1\alpha}-\omega_1)^2].$$

Поскольку

$$f(\omega) = L(\omega) + \alpha\omega^{2p} =$$

$$= f(\omega_1) + (\omega-\omega_1)\left(\frac{df}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1} + O[(\omega_1-\omega)^2],$$

$$f(\omega_{1\alpha}) = 0 \quad \text{и} \quad L(\omega_1) = 0,$$

то

$$0 = \alpha\omega_1^{2p} + \left[\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1} + 2p\alpha\omega_1^{2p-1}\right](\omega_{1\alpha}-\omega_1) +$$

$$+ O[\omega_{1\alpha}-\omega_1)^2].$$

Отсюда

$$\omega_{1\alpha}-\omega_1 = \frac{-\alpha\omega_1^{2p}}{\left(\dfrac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}}\{1 + O(\alpha) + O[(\omega_{1\alpha}-\omega_1)^2]\}.$$

Следовательно,

$$\omega_{1\alpha} - \omega_1 = \frac{-\alpha\omega_1^{2p}}{\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}} \{1 + O(\alpha)\}.$$

Поэтому

$$\operatorname{res}\left\{\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\right\}_{\omega=\omega_{1\alpha}} =$$

$$= \frac{-\alpha\omega_1^{2p}}{\left(\frac{dL}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_1}} \exp(-i\omega_1 t)\,[1+O(\alpha)] =$$

$$= O(\alpha)\exp(-i\omega_1 t).$$

Если ω_1 — нуль кратности γ, то аналогичными выкладками (в предположении $(\gamma-1)$-кратной дифференцируемости функции $L(\omega)$) находим, что в этом случае

$$\operatorname{res}\left\{\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\right\}_{\omega=\omega_{1\alpha}} = O(\alpha^{1/\gamma})\exp(-i\omega_1 t).$$

Число нулей первого типа конечное и не зависит от α. Поэтому вклад полюсов первого типа $\omega_{1\alpha}$ в функцию $L_\alpha(t)$ будет $O(\alpha^{1/\gamma_0})$, где γ_0 — наивысшая кратность нулей функции $L(\omega)$.

5. Рассмотрим вклад полюсов второго типа $\omega_{2\alpha}$. Поскольку $\omega_{2\alpha}\to\infty$ при $\alpha\to 0$, то при достаточно малых α можно пользоваться асимптотическим представлением функции $L(\omega)$, т. е. полагать $L(\omega) = |A|^2/\omega^{2n}$. Поэтому

$$\operatorname{res}\left\{\frac{L(\omega)\exp(-i\omega t)}{L(\omega)+\alpha\omega^{2p}}\right\}_{\omega=\omega_{2\alpha}} = \frac{|A|^2\exp(-i\omega_{2\alpha}t)\cdot\omega_{2\alpha}}{2q\alpha\omega_{2\alpha}^{2q}},$$

$$q = n + p.$$

Таким образом, вклад $L_{2\alpha}(t)$ полюсов второго типа в $L_\alpha(t)$ равен (для $t \leqslant 0$)

$$L_{2\alpha}(t) = -\sum \frac{|A|^2 i\omega_{2\alpha}\exp(-i\omega_{2\alpha}t)}{2q\alpha\omega_{2\alpha}^{2q}},$$

где суммирование производится по всем корням второго типа уравнения $L(\omega)+\alpha\omega^{2p}=0$ (лежащим в верхней полуплоскости). При малых α эти корни можно заменить корнями $\omega_\alpha^{(k)}$ уравнения

$$1 + \frac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q} = 0. \qquad (5;\ 3{,}4)$$

Поэтому

$$L_{2\alpha}(t) = -\sum_k \frac{i\omega_\alpha^{(k)} \exp\left(-i\omega_\alpha^{(k)} t\right)}{2q} \qquad (5;\ 3{,}5)$$

для $t \leqslant 0$. Аналогично,

$$L_{2\alpha}(t) = \sum_k \frac{i\omega_\alpha^{(k)} \exp\left(-i\omega_\alpha^{(k)} t\right)}{2q} \qquad (5;\ 3{,}6)$$

для $t \geqslant 0$. Здесь суммы берутся по всем корням уравнения (5; 3,4), расположенным в верхней (соответственно нижней) полуплоскости для $t \leqslant 0$ $(t \geqslant 0)$.

Корни $\omega_\alpha^{(k)}$ при $\alpha \to 0$ стремятся к бесконечности вдоль лучей

$$\arg \omega = \frac{2k+1}{2q}\pi \qquad (k \leqslant n) \text{ и } \left|\omega_\alpha^{(k)}\right| = \left(\frac{|A|^2}{\alpha}\right)^{1/(2q)}.$$

Заметим, что $n+p$ корней уравнения (5; 3,4) находятся в верхней полуплоскости, и $n+p$ корней — в нижней.

Заменяя в формуле (5; 3,3) $L_\alpha(t)$ через $L_{2\alpha}(t)$, по формуле (5; 3,6) получим для $t \geqslant 0$

$$z_\alpha(t) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{q} \frac{i\omega_\alpha^{(k)} \exp\left(-i\omega_\alpha^{(k)}\xi\right)}{2q} \{z_\text{т}(t+\xi) + z_\text{т}(t-\xi)\}\, d\xi \qquad (5;\ 3{,}7)$$

или

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q} \int_0^\infty \left\{i\omega_\alpha^{(k)} \exp\left(-i\omega_\alpha^{(k)}\xi\right) [z_\text{т}(t+\xi) + z_\text{т}(t-\xi)]\right\} d\xi. \qquad (5;\ 3{,}8)$$

Используем для оценки интегралов асимптотическую формулу

$$\int_0^\infty f(t \pm \xi)\,\beta \exp(-\beta\xi)\, d\xi = f(t) + \frac{1}{\beta} f'(t) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right),$$

справедливую при больших значениях $\operatorname{Re}\beta > 0$ и устанавливаемую путем двукратного интегрирования по частям. При этом полагаем $\beta = i\omega_\alpha^{(k)}$. Так как в формуле (5; 3,7) суммирование производится лишь по корням уравнения (5; 3,4), расположенным в нижней полуплоскости, то $\operatorname{Re}\left(i\omega_\alpha^{(k)}\right) > 0$. При этом полагаем $f(t) = z_T(t)$. Получим

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q}\left\{2z_T(t) + \frac{2i}{\omega_\alpha^{(k)}} z'_T(t)\right\} + O\left(\left[\omega_\alpha^{(k)}\right]^{-2}\right).$$

Поскольку

$$\omega_\alpha^{(k)} = \left(\frac{|A|^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2q}} e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi},$$

то

$$z_\alpha(t) = z_T(t) + \frac{1}{q}\left(\frac{|A|^2}{\alpha}\right)^{\frac{-1}{2q}} \frac{z'_T(t)}{\sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)}\left[1 + O\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)\right]^{*)}.$$

При этом мы воспользовались соотношениями:

$$\sum_{k=0}^{q}\cos\left(\frac{2k+1}{2q}\pi\right) = 0, \quad \sum_{k=0}^{q}\sin\left(\frac{2k+1}{2q}\pi\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2q}\right)}.$$

Таким образом, справедлива асимптотическая (при $\alpha \to 0$) формула

$$\Delta_r^2(t, \alpha) = \frac{1}{q^2}\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{2q}\right)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\frac{1}{q}}\left|\frac{dz_T}{dt}\right|^2\left[1 + O\left(\alpha^{\frac{1}{q}}\right)\right]. \tag{5; 3,9}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *При использовании регуляризации p-го порядка для уравнения* (5; 1,5) *с ядрами первого типа справедлива асимптотическая* (*при* $\alpha \to 0$) *формула* (5; 3,9) [10].

Эта формула справедлива, в частности, и для стабилизаторов нулевого порядка, т. е. при $p = 0$.

Известно [191], что при использовании стабилизаторов нулевого порядка регуляризованное решение $z_\alpha(t)$ уравнения с правой частью $u_T(t)$, вообще говоря, не будет равномерно на $(-\infty, \infty)$ аппроксимировать точное

*) Полагаем, что $\gamma_0 < 2q$.

решение $z_т(t)$ при $\alpha \to 0$. Из полученного выше результата (формула (5; 3,9) при $p = 0$) получаем

Следствие. *Если производная искомого решения $z_т(t)$ уравнения (5; 1,5) с ядром I типа и с правой частью $u = u_т(t)$ равномерно ограничена на $(-\infty, \infty)$, то регуляризованное решение $z_\alpha(t)$ уравнения* (5; 1,5), *полученное с помощью стабилизатора порядка p* ($p = 0, 1, 2, \ldots$), *при $\alpha \to 0$ равномерно на всей прямой $(-\infty, \infty)$ аппроксимирует точное решение $z_т(t)$.*

6. Оценки $\Delta_r(t, \alpha)$ для уравнений с ядрами II—IV типа. Для уравнений с ядрами II—IV типов справедливы следующие теоремы:

Теорема 3. *При использовании стабилизаторов p-го порядка с постоянными коэффициентами для получения регуляризованного решения уравнения* (5; 1,5) *с ядрами II типа справедливы асимптотические* (при $\alpha \to 0$) *формулы* [10]:

$$\Delta_r(t, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, A \left(\frac{C_m}{\beta_2}\right)^m z'_т(t)\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\right], \quad (5;\ 3,10)$$

$$\Delta_r(t, \alpha) = \frac{A^{2p+1}}{2p+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{C_m}{\beta_2}\right)^{(2p+1)m} \frac{d^{2p+1}z_т}{dt^{2p+1}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\right], \quad (5;\ 3,11)$$

где

$$C_m = 2\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right), \qquad \beta_2 = \ln\left(\frac{H^2A^{2p}}{\alpha}\right).$$

Теорема 4. *При использовании стабилизаторов p-го порядка с постоянными коэффициентами для получения регуляризованного решения уравнения* (5; 1,5) *с ядрами III типа справедливы асимптотические* (при $\alpha \to 0$) *формулы* [10]:

$$\Delta_r(t, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2A}{\beta_3}\right)^{1/2}\frac{dz_т}{dt}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_3}\right)\right], \quad (5;\ 3,12)$$

$$\Delta_r(t, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2p+1}\left(\frac{2A}{\beta_3}\right)^{\frac{2p+1}{2}}\frac{d^{2p+1}z_т}{dt^{2p+1}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_3}\right)\right]. \quad (5;\ 3,13)$$

где

$$\beta_3 = \ln\left[\frac{2^{?}A^pH^2}{\alpha}\right].$$

Теорема 5. *При использовании стабилизаторов p-го порядка с постоянными коэффициентами для получения регуляризованного решения уравнения* (5; 1,5) *с ядрами* IV *типа справедливы асимптотические* (при $\alpha \to 0$) *формулы* [10]:

$$\Delta_r(t, \alpha) = \frac{1}{q \sin\left(\frac{\pi}{2q}\right)} \left(\frac{\alpha}{A^2} \beta_4^{2k}\right)^{\frac{1}{2q}} \frac{dz_т}{dt}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_4}\right)\right], \quad (5; 3,14)$$

$$\Delta_r(t, \alpha) = \frac{1}{q \sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)} \left(\frac{\alpha}{A^2} \beta_4^{2k}\right)^{\frac{2p+1}{2q}} \frac{d^{2p+1}z_т}{dt^{2p+1}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_4}\right)\right], \quad (5; 3,15)$$

где

$$\beta_4 = \underbrace{\ln \ln \ldots \ln}_{s\ \text{раз}} \left[\left(\frac{A^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2q}}\right].$$

Доказательства формул для $\Delta_r(t, \alpha)$, о которых идет речь в теоремах 3—5, производятся аналогично доказательству теоремы 1 путем вычисления соответствующих интегралов с помощью вычетов, но носят более громоздкий характер (см. [10, 13]), поэтому мы не будем их здесь приводить.

7. Оценка $\sigma^2(\alpha)$ для уравнений с ядрами I—IV типов. При

$$f(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)}$$

формула (5; 2,4) принимает вид

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{L(\omega)\, S(\omega)\, d\omega}{\{L(\omega) + \alpha M(\omega)\}^2}. \quad (5; 3,16)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что для уравнения с ядрами I—IV типов (для I и IV типов полагаем $n > \max(\alpha; 1/2)$) $\sigma^2(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 0$. С другой стороны, при любом фиксированном $\alpha > 0$ интеграл (5; 3,16) сходится. Следовательно, при достаточно малых значениях параметра α основной вклад в интеграл (5; 3,16) дают большие частоты ω. Имея это в виду, представим интеграл (5; 3,16) в виде суммы двух интегралов

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\omega_0} \ldots + \frac{1}{2\pi^2}\int_{\omega_0}^{\infty} \ldots$$

Число ω_0 возьмем настолько большим, чтобы для $\omega \geqslant \omega_0$ функции $L(\omega)$ и $S(\omega)$ можно было заменить их асимптотическими представлениями. Тогда при $M(\omega) = \omega^{2p}$ имеем

$$\sigma^2(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\omega_0}\left\{\frac{L\cdot S}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} - \frac{L_{ac}\cdot S_{ac}}{\left(L_{ac}+\alpha\omega^{2p}\right)^2}\right\}d\omega + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{L_{ac}\cdot S_{ac}\,d\omega}{\left(L_{ac}+\alpha\omega^{2p}\right)^2}.$$

Полагая $S(0) = D\cdot S_0$ $(D > 0)$ и имея в виду, что для всякого ω $S(\omega) \leqslant S(0)$, непосредственно находим, что при $\alpha \to 0$

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\omega_0}\left\{\frac{L\cdot S}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} - \frac{L_{ac}S_{ac}}{\left(L_{ac}+\alpha\omega^{2p}\right)^2}\right\}d\omega = S_0\cdot O(1).$$

Здесь $S_{ac}(\omega)$ и $L_{ac}(\omega)$ — суть значения функций $S(\omega)$ и $L(\omega)$, вычисленные по их асимптотическим формулам.

Следовательно,

$$\sigma^2(\alpha) = S_0\cdot O(1) + I_1 \qquad (5;\ 3{,}17)$$

и задача сводится к оценке (при $\alpha \to 0$) интеграла

$$I_1 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{L_{ac}\cdot S_{ac}\,d\omega}{\left(L_{ac}+\alpha\omega^{2p}\right)^2}. \qquad (5;\ 3{,}18)$$

Для уравнений с ядрами I типа интеграл I_1 имеет вид

$$I_1 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{S_0\omega^{2n-2a}\,d\omega}{|A|^2\left(1+\frac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}\right)^2}$$

и заменой $x = \frac{\alpha}{|A^2|}\omega^{2q}$ вычисляется точно. Получаем

$$I_1 = \frac{1}{4q\pi^2}\,\frac{S_0}{|A|^2}\left(\frac{|A|^2}{\alpha}\right)^{\frac{2n-2a+1}{2q}}\,\frac{2p+2a-1}{2q\sin\left(\frac{2p+2a-1}{2q}\pi\right)}. \qquad (5;\ 3{,}19)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Для уравнений с ядрами I типа дисперсия влияния шума в регуляризованном решении $\sigma^2(\alpha)$ вычисляется по формулам* (5; 3,17), (5; 3,19) *и при* $\alpha \to 0$ *стремится к бесконечности.*

8. Для уравнений с ядрами II типа имеем

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\omega_0} \frac{L\cdot S\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} + \frac{1}{2\pi^2}\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L_{ac}\cdot S_{ac}\,d\omega}{\left(L_{ac}+\alpha\omega^{2p}\right)^2},$$

где ω_0 выбирается как в п. 1.

При $\alpha \to 0$, очевидно,

$$\int_0^{\omega_0} \frac{L\cdot S\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = S_0\cdot O(1).$$

Таким образом,

$$\sigma^2(\alpha) = S_0\cdot O(1) + I_2, \qquad (5;\ 3,20)$$

где

$$I_2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L_{ac}\cdot S_{ac}\,d\omega}{\left(L_{ac}+\alpha\omega^{2p}\right)^2}.$$

Подынтегральную функцию в I_2 можно записать в виде $\omega^{-2a}F(\omega, \alpha)$. Функция $F(\omega, \alpha)$ имеет четко выраженный максимум, положение которого ω_1 стремится к бесконечности при $\alpha \to 0$. Для оценки I_2 можно воспользоваться методом перевала. Число ω_1 находим из уравнения $\partial F(\omega, \alpha)/\partial\omega = 0$, которое можно записать в виде

$$\alpha\omega^{2p}K_1'(\omega) - K_1'(\omega)\,K_1^2(\omega) - 2p\omega^{2p-1}K_1(\omega) = 0, \qquad (5;\ 3,21)$$

где

$$K_1(\omega) = H\exp\left[-0{,}5\cdot C_m(A\omega)^{1/m}\right] = \{L(\omega)\}^{1/2}.$$

Так как при больших значениях ω

$$\omega K_1'(\omega) \gg K_1(\omega),$$

то уравнение (5; 3,21) можно заменить уравнением

$$L(\omega) = \alpha\omega^{2p}. \qquad (5;\ 3,22)$$

Нетрудно видеть, что для единственного положительного корня этого уравнения ω_1 справедлива формула

$$\omega_1 = \frac{1}{A}\left(\frac{\beta_2}{C_m}\right)^m \left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\right]. \qquad (5;\ 3{,}23)$$

Применяя для вычисления интеграла I_2 метод перевала, получим

$$I_2 = \frac{mS_0 \omega_1^{1-2p-2a}}{4\sqrt{\pi^3}\, C_m\, \alpha\, (A\omega_1)^{1/m}},$$

что вместе с формулой (5; 3,23) дает

$$I_2 = \frac{mS_0}{4C_m\sqrt{\pi^3}} \frac{A^{2p+2a-1}}{\alpha}\left(\frac{C_m}{\beta_2}\right)^{2p+2a-1+1/m}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\right]. \qquad (5;3{,}24)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Для уравнений* (5; 1,5) *с ядрами* II *типа дисперсия влияния шума* $\sigma^2(\alpha)$ *в регуляризованном решении, получаемом с помощью простейшего стабилизатора p-го порядка* ($M(\omega) = \omega^{2p}$), *вычисляется по формулам* (5; 3,20), (5; 3,24) *и стремится к бесконечности при* $\alpha \to 0$, *как* I_2.

9. Аналогичным образом устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 8. *Для уравнений* (5; 1,5) *с ядрами* III *типа дисперсия влияния шума* $\sigma^2(\alpha)$ *в регуляризованном решении, получаемом с помощью простейшего стабилизатора p-го порядка, вычисляется по формулам*

$$\sigma^2(\alpha) = S_0 \cdot O(1) + I_3, \qquad (5;\ 3{,}25)$$

где

$$I_3 = \frac{S_0\,(2A)^{2p+2a}}{8\sqrt{\pi^3}\cdot\alpha}\,\beta_3^{-2p-2a-1}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_3}\right)\right]. \qquad (5;\ 3{,}26)$$

Теорема 9. *Для уравнений* (5; 1,5) *с ядрами* IV *типа дисперсия влияния шума* $\sigma^2(\alpha)$ *в регуляризованном решении, получаемом с помощью простейшего стабилизатора p-го порядка, вычисляется по формулам*

$$\sigma^2(\alpha) = S_0 \cdot O(1) + I_4, \qquad (5;\ 3{,}27)$$

где

$$I_4 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2q}\right) S_0 A^{a/q}}{2q \sin\left(\frac{2p-1}{2q}\pi\right)}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{2p-2a+1}{2q}} \beta_4^{k\,\frac{2p+2a-1}{2q}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta_4}\right)\right].$$

(5; 3, 28)

10. Пользуясь формулами (5; 3,9)—(5; 3,15), (5; 3,17), (5; 3,19), (5; 3,20), (5; 3,24)—(5; 3,28) и сохраняя в них лишь главные члены, нетрудно найти приближение к (C, f)-оптимальному значению $\alpha = \tilde{\alpha}$. Так, если воспользоваться формулами (5; 3,9) и (5; 3,19), то получим

$$\tilde{\alpha} = \| A \|^2 \left\{ \frac{(2n-2a+1)\,S_0}{16\pi^2 B_0^2 \,|A|^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2q}\right) \frac{2p+2a-1}{\sin\left(\frac{2p+2a-1}{2q}\pi\right)} \right\}^{\frac{2q}{2n-2a+3}},$$

где $B_0 = \sup\limits_t \left| \frac{dz_{\text{т}}}{dt} \right|$, а также оценку

$$\tilde{\alpha} \leqslant |A|^2 \left\{ \frac{\pi\,(2n-2a+1)\,S_0}{128\, B_0^2 \,|A|^2} \right\}^{\frac{2a}{2n-2a+3}}.$$

Пользуясь условием $\Delta_r^2(\alpha) = \sigma^2(\alpha)$, также можно найти значение α, близкое к (C, f)-оптимальному. Это значение будем называть *почти оптимальным* и обозначать $\alpha_{\text{по}}$. Для нахождения $\alpha_{\text{по}}$ надо знать точные верхние границы для $|z_{\text{т}}'(t)|$ или для $\left| \frac{d^{2p+1} z_{\text{т}}}{dt^{2p+1}} \right|$.

Пусть, например,

$$\sup_t |z_{\text{т}}'(t)| = B_0.$$

Тогда из формул (5; 3,9) и (5; 3,19) находим

$$\alpha_{\text{по}} = |A|^2 \left\{ \frac{S_0}{4\pi^2 B_0^2} \frac{2p+2a-1}{|A|^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2q}\right)}{\sin\left(\frac{2p+2a-1}{2q}\pi\right)} \right\}^{\frac{2q}{2n-2a+3}}.$$

З а м е ч а н и е 1. Если априори известна информация о верхней границе модуля первой производной точного решения $|z_{\text{т}}'(t)|$, то для определения $\tilde{\alpha}$ и $\alpha_{\text{по}}$ следует пользоваться формулами (5; 3,9), (5; 3,10), (5; 3,12), (5; 3,14) и соответственно формулами (5; 3,19), (5; 3,24), (5; 3,26), (5; 3,28). Если же мы располагаем информацией о модуле производной некоторого $(2p_0+1)$-го порядка, то для решения задачи надо пользоваться стабилизатором порядка p_0, а для определения $\tilde{\alpha}$ и $\alpha_{\text{по}}$ — соотношениями (5; 3,9), (5; 3,11), (5; 3,13), (5; 3,15) и соответственно (5; 3,19), (5; 3,24), (5; 3,26), (5; 3,28).

Замечание 2. Для некоторых из рассмотренных в этой главе случаев в [49] содержатся другие оценки уклонения регуляризованного решения от точного, когда $M(\omega) = \omega^2$.

В работе [86] рассматриваются асимптотические оценки уклонения регуляризованного решения от точного для одномерного интегрального уравнения вида (В; 1,1) не типа свертки.

Глава VI

О НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

1. Будем считать, что правая часть $u(t)$ уравнения

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau = u(t) \qquad (6;\ 0{,}1)$$

содержит случайную помеху (шум) $v(t)$ и, следовательно, является случайной функцией. Регуляризованные решения уравнения (6; 0,1)

$$z_\alpha(t) = R_f(u, \alpha)$$

также будут случайными функциями. Их уклонения от точного решения $z_т(t)$ (или между собою) будем оценивать, как и в гл. V, в вероятностной метрике и полагать

$$\rho_F(z_\alpha, z_т) = \overline{(z_\alpha - z_т)^2}, \qquad (6;\ 0{,}2)$$

где черта сверху означает математическое ожидание.

Определив таким образом метрику в F, будем рассматривать регуляризованные решения, полученные с помощью стабилизирующих множителей вида

$$f(\omega, \alpha) = \frac{L(\omega)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)}.$$

2. В настоящей главе среди таких регуляризованных решений будет найдено оптимальное в смысле метрики (6; 0,2). Будет показано, что оператор винеровской оптимальной фильтрации является регуляризирующим оператором класса, описанного в гл. V. Для уравнений с ядрами I—II типов (см. гл. V, § 3) будет найдено оптимальное регуляризованное решение в классе решений, получаемых с помощью простейших стабилизаторов p-го порядка $(M(\omega) = \omega^{2p})$, и изучены отклонения неоптимальных решений от оптимального [11, 14].

3. Следует отметить, что при рассмотрении уравнений $Az = u$ относительно функции z, зависящей от одной переменной t, возможны две постановки задачи.

В первой постановке функция $u = u_т(t)$ является детерминированной и требуется найти детерминированное решение $z_т(t)$. Если вместо функции $u_т(t)$ нам известно ее δ-приближение $u(t) = u_т(t) + v(t)$ такое, что $\rho_U(u, u_т) \leqslant \leqslant \delta$, то речь может идти лишь о нахождении приближенного к $z_т(t)$ решения. Помеха $v(t)$ обычно является случайной функцией.

Во второй постановке $u_т(t)$ есть реализация случайного процесса и требуется найти реализацию другого случайного процесса $z_т(t)$, связанного с первым соотношением $Az_т = u_т$. Если вместо $u_т(t)$ мы имеем $u(t) = = u_т(t) + v(t)$, где $v(t)$ — помеха (шум), являющаяся также случайным процессом, то ищется приближенное к $z_т(t)$ «решение».

При решении этой задачи существенным является использование дополнительной информации об искомом решении и шуме. Возможны случаи, когда:

а) известны спектральные плотности решения и шума;

б) известны законы распределения вероятностей решения и шума.

В настоящей главе упомянутые выше оптимальное регуляризованное решение и оценки уклонения неоптимального регуляризованного решения от оптимального даны в применении ко второй постановке задачи при использовании априорной информации типа а). Это сделано в предположении, что $v(t)$ и искомое решение являются реализациями некоррелированных между собой случайных процессов. Через $S(\omega)$ и $N(\omega)$ будем обозначать соответственно спектральные плотности этих процессов.

Будет указан способ приближенного нахождения асимптотических представлений функций $S(\omega)$ и $N(\omega)$ при $\omega \to \infty$.

§ 1. Оптимальное регуляризованное решение. Связь метода регуляризации с оптимальной фильтрацией по Винеру

1. Пусть $z_т(t)$ есть точное решение уравнения (6; 0,1) с правой частью $u = u_т(t)$, т. е. $Az_т \equiv u_т(t)$. Полагаем, что $u(t) = u_т(t) + v(t)$. Будем рассматривать регуляризованные решения уравнения (6; 0,1) вида

$$z_\alpha(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(-\omega)\,u(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}\exp(-i\omega t)\,d\omega=R_M(u,\alpha), \tag{6; 1,1}$$

где функция $\dfrac{K(-\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}$ принадлежит $L_2(-\infty,\ \infty)$ при всяком $\alpha>0$. Оператор $R_M(u,\alpha)$ определяется заданием функции $M(\omega)$. Его можно записать в виде свертки

$$R_M(u,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}L_\alpha(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau,$$

где

$$L_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(-\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}\exp(-i\omega t)\,d\omega.$$

2. Среди операторов такого вида можно найти оператор $R_{M_0}(u,\alpha)$, минимизирующий $\overline{[z_\alpha(t)-z_т(t)]^2}$. В самом деле, очевидно, что

$$z_\alpha(t)-z_т(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{K(-\omega)\,u(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}-z_т(\omega)\right\}\exp(-i\omega t)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{K(-\omega)\,[u_т(\omega)+v(\omega)]}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}-z_т(\omega)\right\}\exp(-i\omega t)\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{L(\omega)\,z_т(\omega)+K(-\omega)\,v(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}-z_т(\omega)\right\}\exp(-i\omega t)\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{-\alpha M(\omega)\,z_т(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}+\frac{K(-\omega)\,v(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}\right\}\exp(-i\omega t)\,d\omega,$$

так как $u_т(\omega)=K(\omega)\,z_т(\omega)$. Поэтому

$$\overline{[z_\alpha(t)-z_т(t)]^2}=$$

$$=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\alpha M(\omega)\,z_т(\omega)+K(-\omega)\,v(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}\exp(-i\omega t)\,d\omega\times}$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\alpha M(\omega')\, z_{\text{т}}(\omega') + K(-\omega')\, v(\omega')}{L(\omega') + \alpha M(\omega')}\exp(-i\omega' t)\, d\omega' =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2 M(\omega)\, M(\omega')\, \overline{z_{\text{т}}(\omega)\, z_{\text{т}}(\omega')} + K(-\omega) K(-\omega')\, \overline{v(\omega) v(\omega')}}{[L(\omega) + \alpha M(\omega)]\, [L(\omega') + \alpha M(\omega')]}\times$$

$$\times \exp[-i(\omega + \omega')\, t]\, d\omega\, d\omega'$$

так как $\overline{v(\omega)} = \overline{v(\omega')} = 0$. Для стационарных случайных процессов $\overline{z_{\text{т}}(\omega) \cdot z_{\text{т}}(\omega')} = N(\omega)\delta(\omega + \omega')$ и $\overline{v(\omega) v(\omega')} = S(\omega)\delta(\omega + \omega')$, где $\delta(\omega + \omega')$ есть δ-функция. Интегрируя в последнем двукратном интеграле по переменной ω' и пользуясь свойством δ-функции и четностью функций $M(\omega)$ и $L(\omega)$, получим величину уклонения

$$\overline{[z_\alpha(t) - z_{\text{т}}(t)]^2} = T(\alpha M)$$

$$T(\alpha M) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2 M^2(\omega)\, N(\omega) + L(\omega)\, S(\omega)}{[L(\omega) + \alpha M(\omega)]^2}\, d\omega. \quad (6;\ 1{,}2)$$

Из условия минимума этого функционала на функциях $M(\omega)$ элементарными вычислениями находим, что минимум достигается на функции

$$M(\omega) = M_0(\omega) = \frac{1}{\alpha}\frac{S(\omega)}{N(\omega)},$$

и

$$\min_{\{M(\omega)\}} \overline{[z_\alpha(t) - z_{\text{т}}(t)]^2} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S^2(\omega) + L(\omega)\, N(\omega)\, S(\omega)}{N(\omega)\, [L(\omega) + \alpha M_0(\omega)]^2}\, d\omega.$$

Таким образом, оператор $R_M(u, \alpha)$ вида (6; 1,1), минимизирующий уклонение (6; 0,2) регуляризованного решения $z_\alpha(t)$ от точного $z_{\text{т}}(t)$ и отвечающий функции

$$M(\omega) = M_0(\omega) = \frac{1}{\alpha}\frac{S(\omega)}{N(\omega)},$$

не зависит от α и имеет вид

$$R_{M_0}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(-\omega)\, u(\omega)}{L(\omega) + \dfrac{S(\omega)}{N(\omega)}}\exp(-i\omega t)\, d\omega. \quad (6;\ 1{,}3)$$

Приближенное (регуляризованное) решение уравнения (6; 0,1) $z_{\text{оп}}(t)$, получаемое с помощью этого оператора, не зависит от параметра α и представляется формулой

$$z_{\text{оп}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(-\omega)\, u(\omega)}{L(\omega) + \dfrac{S(\omega)}{N(\omega)}} \exp(-i\omega t)\, d\omega. \quad (6;\ 1{,}4)$$

Мы будем называть его *оптимальным регуляризованным* решением уравнения (6; 0,1). Оно совпадает с результатом применения оптимальной фильтрации по Винеру для нахождения $z(t)$ по $u(t) = u_{\text{т}}(t) + v(t)$ [220]. Поэтому оператор $R_{M_0}(u)$ будем называть также оператором *оптимальной фильтрации* по Винеру.

Замечание. Для получения оптимального регуляризованного решения требуется знать спектральные плотности шума и искомого решения. В практических задачах, приводящих к уравнению (6; 0,1), часто имеется информация, позволяющая находить $S(\omega)$ (хотя бы приближенно). О спектральной плотности решения $N(\omega)$ обычно делаются какие-то предположения, пригодность которых потом надо проверять. Однако, в ряде случаев в конкретных задачах спектральная плотность искомого решения известна. Это имеет место, например, при радиолокации.

В § 3 настоящей главы при дополнительном предположении об эргодичности рассматриваемых случайных процессов дается способ приближенного определения асимптотик функций $S(\omega)$ и $N(\omega)$ при $\omega \to \infty$.

3. Формула (6; 1,1) определяет однопараметрические семейства (классы) линейных регуляризирующих операторов. Каждое такое семейство определяется заданием функции $M(\omega)$, удовлетворяющей условиям а) — г) гл. V, § 1. Таким образом, мы установили справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Среди функций* $M(\omega)$, *обладающих свойствами* а) — г) гл. V, § 1, *существует такая функция* $M_0(\omega)$, *что однопараметрическое семейство регуляризирующих операторов* $R_{M_0}(u, \alpha)$ *содержит в себе оператор оптимальной фильтрации по Винеру.*

Значение теоремы 1 состоит во-первых, в том, что оператор оптимальной фильтрации включается в семейство устойчивых операторов, непрерывно зависящих от правой части $u(t)$ уравнения (6; 0,1). Следовательно, оператор оптимальной фильтрации устойчив, т. е. непрерывен по u на всякой фиксированной точной правой части. Во-вторых, из этой теоремы и § 3 гл. V следует, что малым уклонениям функции $M(\omega)$ от $S(\omega)/N(\omega)$ (в смысле асимптотической ε-близости соответствующих множителей $f(\omega, \alpha)$) отвечают малые уклонения регуляризованного решения от оптимального. Это открывает возможности получать приближенные решения уравнения (6; 0,1), близкие к оптимальному, используя более простые алгоритмы построения регуляризованного решения.

Спектральную плотность шума $S(\omega)$ во многих случаях можно вычислить (обычно приближенно), используя информацию о шуме, а спектральная плотность искомого решения $N(\omega)$ неизвестна. Поэтому пользоваться для построения приближенного решения оператором оптимальной фильтрации, как правило, не представляется возможным. В связи с этим представляет интерес возможность заменять оптимальный регуляризирующий оператор (оператор оптимальной фильтрации) близким к нему оператором, используя меньшую априорную информацию для его построения. В § 3 настоящей главы для уравнений I и II типов будет показана возможность сколь угодно точного нахождения асимптотик функций $S(\omega)$ и $N(\omega)$ по семейству регуляризованных решений в предположении, что рассматриваемые стационарные случайные процессы — эргодические. При этом будут использоваться простейшие регуляризирующие операторы порядка $p\,(M(\omega) = \omega^{2p})$.

4. Если $M(\omega) = \omega^{2p}$ (p не предполагается целым, $p \geqslant 0$), то $T(\alpha M)$ будет функцией параметров α и p. Будем обозначать ее через $T(\alpha, p)$.

Полагая в формуле (6; 1,2) $M(\omega) = \omega^{2p}$, получим

$$T(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{L\cdot S\cdot d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\alpha^2\omega^{4p}N\cdot d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}. \quad (6;\ 1{,}5)$$

Каково бы ни было $p > 0$, при $\alpha \to 0$ второй интеграл формулы (6; 1,5)

$$\Delta^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\alpha^2\omega^{4p}\cdot N\cdot d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}$$

монотонно стремится к нулю *) а интеграл

$$\sigma^2(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{L\cdot S\cdot d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}$$

монотонно возрастает.

Кроме того, $\Delta^2(\infty) = \infty$ и $\sigma^2(\infty) = 0$. Поэтому для всякого фиксированного значения p функция

$$T(\alpha, p) = \sigma^2(\alpha) + \Delta^2(\alpha)$$

имеет минимум при некотором значении $\alpha = \alpha_{\text{р.о.}}$ **). Это значение будем называть *p-оптимальным* значением параметра регуляризации α. Оно определяется из условия $\partial T/\partial\alpha = 0$, которое имеет вид

$$\int_0^\infty \frac{\alpha\cdot L\cdot N\cdot\omega^{4p}}{(L+\alpha\omega^{2p})^3}\,d\omega = \int_0^\infty \frac{S\cdot L\cdot\omega^{2p}d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^3}. \qquad (6;\ 1{,}6)$$

Очевидно, что $\alpha_{\text{р.о.}}$ есть функция от p, $\alpha_{\text{р.о.}} = \alpha(p)$. Следовательно,

$$T(\alpha_{\text{р.о.}}, p) = \psi(p). \qquad (6;\ 1{,}7)$$

5. Изучим некоторые свойства функции $\psi(p)$. Мы сделаем это для уравнений с ядрами $K(t)$, фурье-преобразования которых на вещественной оси при $\omega\to\infty$ имеют асимптотику одного из следующих видов:

1) $K(\omega) = \dfrac{A}{\omega^n}$, $n > 0$ (I тип);

2) $K(\omega = H\omega^{\frac{1}{\nu}}\exp(-(i\omega A)^{\frac{1}{m}}]$, $A > 0$, $\nu \geqslant 0$, $H > 0$, $m > 0$ (II тип);

3) $K(\omega) = H\exp(-A\omega^2)$, $A > 0$, $H > 0$ (III тип);

4) $K(\omega) = \dfrac{A}{\omega^n\underbrace{(\ln\ln\ldots\ln\omega)}_{s\ \text{раз}}{}^k}$, $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $n+k \neq 0$ (IV тип).

Кроме того, будем полагать, что спектральные плотности $N(\omega)$ и $S(\omega)$ при $\omega\to\infty$ *на вещественной оси* имеют

*) Это доказывается так же, как и для $\Delta_r(t, \alpha)$ в гл. V.

**) Если это значение не единственно, то берем наименьшее из них.

асимптотические представления вида

$$N(\omega)=\frac{N_0}{\omega^{2b}},\quad b>0;\quad S(\omega)=\frac{S_0}{\omega^{2a}},\quad a\geqslant 0.$$

§ 2. Свойства функции $\psi(p)$ для уравнений с ядрами I—IV типов

Рассмотрим асимтотические оценки интегралов

$$\Delta^2(\alpha)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{\alpha^2\omega^{4p}N\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}\quad\text{и}\quad\sigma^2(\alpha)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{S\cdot L\,d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2},$$

1. Ядра I типа. Повторяя рассуждения § 3 гл. V, находим

$$\Delta^2(\alpha)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{\alpha^2\omega^{4p}N_{\text{ac}}\,d\omega}{\left(L_{\text{ac}}+\alpha\omega^{2p}\right)^2}+O(\alpha^2),$$

$$\sigma^2(\alpha)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{S_{\text{ac}}L_{\text{ac}}d\omega}{\left(L_{\text{ac}}+\alpha\omega^{2p}\right)^2}+O(S_0),$$

где символы f_{ac}, как и прежде, означают, что $f(\omega)$ для всех значений ω вычисляется по асимптотической формуле. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{\alpha^2\omega^{4p}N_{\text{ac}}}{\left(L_{\text{ac}}+\alpha\omega^{2p}\right)^2}=\frac{N_0}{2\pi^2|A^4|}\int_0^\infty\frac{\alpha^2\omega^{4p-2b}\,d\omega}{\left(1+\frac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}\right)^2},$$

$$q=p+n.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью замены $x=\frac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}$ *). Поступая таким образом, получим

$$\Delta^2(\alpha)=\frac{N_0}{4\pi q}(1-\gamma)\frac{1}{\sin\gamma\pi}\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^\gamma+O(\alpha^2),\quad(6;\ 2{,}1)$$

где $\gamma=\dfrac{2b-1}{2q}$.

Аналогично вычисляется $\sigma^2(\alpha)$:

$$\sigma^2(\alpha)=\frac{S_0}{4\pi q|A|^2}(1-\mu)\frac{1}{\sin\mu\pi}\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu}+O(S_0),\quad(6;\ 2{,}2)$$

---

*) Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— Изд. 5-е,— М.; 1971, стр. 307.

где

$$\mu = \frac{2n - 2a + 1}{2q}.$$

Следовательно, при $\alpha \to 0$ для ядер I типа имеем

$$T(\alpha, p) = C_1\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\gamma} + C_2\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu} S_0 + O(\alpha^2) + O(S_0), \tag{6; 2,3}$$

где

$$C_1 = \frac{N_0}{4\pi q}\frac{1-\gamma}{\sin\gamma\pi}; \quad C_2 = \frac{1}{4\pi q |A|^2}\frac{1-\mu}{\sin\mu\pi}.$$

Предположим, что неотрицательные числа p, n, b, a удовлетворяют условиям

$$0 < \gamma < 1, \ 0 < \mu < 1 \ \text{ и } \ b \geqslant 2a, \tag{6; 2,4}$$

из которых следует, что

1) $2b > 1$; $2b < 2n + 2p + 1$;

2) $2a < 2n + 1$; $2p > 1 - 2a$.

Из этих требований следует, в частности, что в случае «белого» шума ($a = 0$) надо использовать регуляризирующий алгоритм порядка $p > 1/2$.

Числа b и n характеризуют порядок гладкости искомого решения и ядра $K(t)$. Как показывает неравенство $2b < 2n + 2p + 1$, в случае, когда $n < b$, порядок регуляризации p нельзя выбирать произвольным. Отметим, что числа p, n, b, a — не обязательно целые.

Пользуясь формулой (6; 2,3) и удерживая лишь главные члены, из условия $\partial T/\partial\alpha = 0$ находим p-оптимальное значение α *):

$$\alpha_{\text{р.о}} = |A|^2\left(\frac{\mu}{\gamma}\frac{C_2}{C_1}S_0\right)^{\frac{1}{\gamma+\mu}}, \tag{6; 2,5}$$

или

$$\alpha_{\text{р.о.}} = |A|^2\left(\frac{S_0}{N_0|A|^2}\frac{\mu}{\gamma}\frac{1-\mu}{1-\gamma}\frac{\sin\gamma\pi}{\sin\mu\pi}\right)^{\frac{1}{\gamma+\mu}}. \tag{6; 2,6}$$

---

*) Такое же значение α получим и из уравнения (6; 1,6), вычисляя в нем интегралы с помощью той же замены $x = \frac{\alpha}{|A|^2}\omega^{2q}$.

Подставляя это значение $\alpha_{р.о.}$ в формулу (6; 2,3), получим

$$\psi(p) = T(\alpha_{р.о.}, p) = \left(\frac{\mu}{\gamma}\frac{C_2}{C_1}S_0\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+\mu}} \cdot \left(1+\frac{\gamma}{\mu}\right)C_1, \quad (6;\ 2,7)$$

или

$$\psi(p) = \left(1+\frac{\gamma}{\mu}\right)\frac{N_0}{4q\pi}\frac{1-\gamma}{\sin\gamma\pi}\left\{\frac{\mu(1-\mu)}{\gamma(1-\gamma)}\frac{\sin\gamma\pi}{\sin\mu\pi}\frac{S_0}{N_0|A|^2}\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma+\mu}}. \quad (6;\ 2,8)$$

Очевидно, что $\gamma=\gamma(p)$, $\mu=\mu(p)\cdot\psi(p)$ — это *минимальное* из возможных (при различных значениях параметра регуляризации α) средних значений квадрата, уклонения регуляризованного решения $z_\alpha(t)$ от точного $z_т(t)$ при пользовании простейшей регуляризацией p-го порядка. Как этот минимум уклонения будет изменяться с изменением p? Ответ дает

Теорема 2. *Для ядер* I *типа функция* $\psi(p)$ *обладает следующими свойствами:*

1) *имеет единственный минимум при* $p=p_0=b-a$;

2) *монотонно возрастает в области* $p>p_0$ *и при* $p\to\infty$ *стремится к конечному пределу* $\psi(\infty)$, *равному*

$$\psi(\infty) = \psi(p_0)\frac{\sin(\gamma_0\pi)}{\pi\gamma_0(1-\gamma_0)}; \quad (6;\ 2,9)$$

3) $$\frac{\psi''(p_0)}{\psi(p_0)} = \frac{y(1-y)}{(2b-1)^2}\left\{\frac{\pi^2y^2}{\sin^2(\pi y)} - 1 - \frac{y^2}{(1-y)^2}\right\}, \quad (6;\ 2,10)$$

где

$$y=\frac{\gamma_0}{\mu_0}, \quad \gamma_0=\gamma(p_0), \quad \mu_0=\mu(p_0).$$

Доказательство. Вычисляя логарифмическую производную функции $\psi(p)$, находим

$$\psi'(p) = \psi(p)\frac{\gamma\mu}{q(\gamma+\mu)}\cdot\varphi(\gamma,\mu),$$

где

$$\varphi(\gamma,\mu) = \frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{\mu} + \pi\frac{\sin[\pi(\gamma+\mu)]}{\sin(\gamma\pi)\cdot\sin(\mu\pi)}.$$

Поскольку γ и μ удовлетворяют условиям $0<\gamma<1$,

$0 < \mu < 1$, функция $\psi(p)$ положительна для всех значений p. Функция $\varphi(\gamma, \mu)$ при упомянутых органичениях на γ, μ обращается в нуль лишь при $\gamma(p) + \mu(p) = 1$, т. е. при $p = p_0 = b - a$.

Свойство 1) доказано.

В области $p > p_0$ $\varphi(\gamma, \mu)$ остается положительной. Следовательно, $\psi(p)$ в этой области монотонно возрастает.

Пользуясь формулой (6; 2,8), непосредственным предельным переходом находим

$$\psi(\infty) = \frac{1}{\mu_0} \frac{N_0}{2\pi^2 (2b-1)} \left\{ \frac{S_0}{N_0 |A|^2} \right\}^{\gamma_0}.$$

С другой стороны,

$$\psi(p_0) = \frac{\gamma_0 (1-\gamma_0)}{2\pi \sin(\pi\gamma_0)} \left\{ \frac{S_0}{N_0 |A|^2} \right\}^{\gamma_0} \frac{N_0}{\mu_0 (2b-1)}.$$

Из этих формул следует (6; 2,9). Свойство 3) устанавливается непосредственным вычислением, исходя из формулы (6; 2,8).

Следствие 1. *Для произвольного* $p > p_0$ *выполняется неравенство*

$$0 < \frac{\psi(p) - \psi(p_0)}{\psi(p_0)} < \frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}.$$

Таким образом, наименьшее квадратическое уклонение $\psi(p)$, отвечающее регуляризации произвольного порядка $p > p_0$, мало отличается от наименьшего квадратического уклонения $\psi(p_0)$, отвечающего регуляризации *оптимального порядка* p_0. Следовательно, *при достаточно малых значениях* γ_0 *можно пользоваться регуляризацией произвольного достаточно большого порядка* $p > p_0$. Отметим, что при этом параметр регуляризации α надо брать равным $\alpha_{\text{р. о}}$.

Оператор

$$Az \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, z(\tau)\, d\tau$$

будем называть *сильно сглаживающим* [10, 11], если n много больше чисел b и a, т. е. $n \gg \max\{b; a\}$.

Следствие 2. *Для сильно сглаживающего оператора* Az *минимум среднего значения квадратического уклонения регуляризованного решения от точного, т. е. функция* $\psi(p)$, *слабо зависит от порядка регуляризации* p.

Действительно, в этом случае число

$$\gamma_0 = \frac{2b-1}{2n+2b-2a}$$

мало́.

Простейший стабилизатор порядка p_0 будем называть *наилучшим простейшим стабилизатором*. Следовательно, для сильно сглаживающего оператора Az в вычислительной практике можно пользоваться простейшим стабилизатором произвольного достаточно большого порядка p $(p > p_0)$, а не обязательно наилучшим.

Замечание 1. Отношение $\frac{\psi(p)-\psi(p_0)}{\psi(p_0)}$ можно также оценить, пользуясь свойством 3) функции $\psi(p)$ из теоремы 2. Получим

$$\frac{\psi(p)-\psi(p_0)}{\psi(p_0)} \approx \frac{(p-p_0)^2}{2}\frac{y(1-y)}{(2b-1)^2}\left\{\frac{\pi^2 y^2}{\sin^2(\pi y)} - 1 - \frac{y^2}{(1-y)^2}\right\}.$$

Значение $\alpha = \alpha_{\text{р. о.}}(p)$, отвечающее регуляризации порядка $p = p_0$, будем называть *оптимальным* значением параметра регуляризации и обозначать

$$\alpha_{\text{опт}} = \alpha_{\text{р. о}}(p_0).$$

Очевидно, для уравнений с ядрами I типа

$$\alpha_{\text{опт}} = S_0/N_0.$$

Регуляризованное решение $z_{\text{опт}}(t)$, полученное регуляризацией порядка $p = p_0$ при $\alpha = \alpha_{\text{опт}}$, совпадает с функцией $z_{\text{о. ф.}}(t)$ полученной оптимальной фильтрацией по Винеру, т. е.

$$z_{\text{опт}}(t) \equiv z_{\text{о.ф.}}(t).$$

Замечание 2. Из формул (6; 2,1) и (6; 2,2) следует, что при $p = p_0$ и $\alpha = \alpha_{\text{опт}}$ имеем

$$\frac{\sigma^2(\alpha_{\text{опт}})}{\Delta^2(\alpha_{\text{опт}})} = \frac{2b-1}{2n-2a+1} = y.$$

Следовательно, *для сильно сглаживающих операторов* $(n \gg a;\ b)$ при использовании регуляризации оптимального порядка p_0 с оптимальным значением параметра регуляризации $(\alpha = \alpha_{\text{опт}})$ *главным в величине уклонения* $T(\alpha_{\text{опт}}, p_0)$ *является вклад регуляризации, а не шума.*

2. Ядра II и III типов. По соображениям, указанным в начале п. 1, уравнение (6; 1,6) для определения

$\alpha_{\text{р. о.}}$ можно заменить уравнением

$$\alpha N_0 \int_0^\infty \frac{\omega^{4p-2b} L_{\text{ac}}(\omega)\, d\omega}{\{L_{\text{ac}}(\omega) + \alpha\omega^{2p}\}^3} = S_0 \int_0^\infty \frac{\omega^{2p-2a} L_{\text{ac}}(\omega)\, d\omega}{\{L_{\text{ac}}(\omega) + \alpha\omega^{2p}\}^3}. \quad (6;\ 2{,}11)$$

Интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\omega^{2p-2a} L_{\text{ac}}}{\left(L_{\text{ac}} + \alpha\omega^{2p}\right)^3}\, d\omega$$

вычисляется методом перевала и равен

$$I_1 = \frac{\omega_1^{2p-2a} L_{\text{ac}}(\omega_1)}{\{L_{\text{ac}}(\omega_1) + \alpha\omega_1^{2p}\}^3} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\left| f_1''(\omega_1, \alpha) \right|}} + O\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right) \right],$$

где

$$f_1(\omega, \alpha) = \alpha \ln \frac{\omega^{2p-2a} L_{\text{ac}}(\omega)}{\{L_{\text{ac}}(\omega) + \alpha\omega^{2p}\}^3},$$

$f_1''(\omega, \alpha)$ —вторая производная по ω. Здесь ω_1 есть корень уравнения

$$(-2L_{\text{ac}} + \alpha\omega^{2p}) \frac{dL_{\text{ac}}}{d\omega} - \frac{4p + 2a}{\omega}\, \alpha \cdot \omega^{2p} \cdot L_{\text{ac}} + \frac{2p - 2a}{\omega} L_{\text{ac}}^2 = 0.$$

Очевидно, что $\omega_1 = \omega_1(\alpha)$ и $\omega_1(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 0$. Поскольку

$$\frac{\omega^{4p-2b} L_{\text{ac}}(\omega)}{\{L_{\text{ac}}(\omega) + \alpha\omega^{2p}\}^3} = \omega^{2p-2b+2a} \exp\left[\frac{1}{\alpha} f_1(\omega, \alpha)\right],$$

то интеграл

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\omega^{4p-2b} L_{\text{ac}} d\omega}{\left(L_{\text{ac}} + \alpha\omega^{2p}\right)^3}$$

также вычисляется методом перевала и равен

$$I_2 = \frac{\omega_1^{2p-2a} L_{\text{ac}}(\omega_1)}{\{L_{\text{ac}}(\omega_1) + \alpha\omega_1^{2p}\}^3} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\left| f_1''(\omega_1, \alpha) \right|}}\, \omega_1^{2p-2b+2a} + O\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right) \right].$$

Подставляя значения I_1 и I_2 в формулу (6; 2,11) и удерживая лишь главные члены, получим следующее уравнение для определения $\alpha_{\text{р. о.}}$:

$$\alpha = \frac{S_0}{N_0} \{\omega_1(\alpha)\}^{-2p-2b+2a}.$$

При $p = p_0$ получаем $\alpha_{\text{опт}} = S_0/N_0$.

В п. 1 мы видели, что чем больше n, т. е. чем выше порядок убывания $K(\omega)$ при $\omega \to \infty$, тем меньше разность $\psi(p)-\psi(p_0)$ для $p > p_0$, т. е. тем слабее влияние порядка регуляризации p на функцию $\psi(p)$ и, следовательно, тем с большим основанием оптимальный порядок регуляризации p_0 можно заменить произвольным порядком $p > p_0$.

В случае уравнений с ядрами II и III типа порядок убывания функции $K(\omega)$ при $\omega \to \infty$ более высокий, чем у любой степени с отрицательным показателем ω^{-n}. Поэтому оператор Az с ядром II или III типов можно рассматривать как сильно сглаживающий. Следовательно, к нему применимо следствие 2 теоремы 2 настоящего параграфа.

В случае уравнения с ядром IV типа все определяется величиной показателя степени n, а не числами s и k. Мы не будем приводить соответствующие вычисления [13].

Замечание 3. Результаты, аналогичные изложенным в §§ 1, 2, справедливы и для многомерных интегральных уравнений первого рода типа свертки (см. [153, 154]).

§ 3. Определение высокочастотных характеристик сигнала и шума и оптимального значения параметра регуляризации

1. Вернемся к вопросу о нахождении оптимального порядка регуляризации p_0 и оптимального значения параметра регуляризации $\alpha_{\text{опт}}$. Как было показано для уравнений I типа, $p_0 = b - a$ и $\alpha_{\text{опт}} = S_0/N_0$. Таким образом, для нахождения p_0 и $\alpha_{\text{опт}}$ (а также p-оптимального значения α, т. е. $\alpha_{\text{р. о.}}$) надо знать высокочастотные характеристики сигнала и шума: N_0, b, S_0, a. Во многих практических задачах характеристики шума S_0 и a можно определить (приближенно) по результатам наблюдений. Не так обстоит дело с высокочастотными характеристиками сигнала N_0 и b. Наше предположение о характере функциональной зависимости спектральной плотности сигнала, т. е. $N(\omega)$, выполняется для широкого круга задач. Однако числа N_0 и b, определяющие эту зависимость при больших значениях ω, как правило, бывают неизвестными и не представляется возможным определить их непосредственно по результатам наблюдений.

2. В настоящем параграфе будет показано, что эти параметры можно однозначно определить по семейству регуляризованных решений $\{z_\alpha(t)\}$, отвечающих различным

значениям α и построенных при помощи простейшего регуляризирующего оператора $M(\omega)=\omega^{2p}$, порядок которого p можно выбирать достаточно произвольно. Особенно просто это можно сделать для *эргодических процессов* [11].

Таким образом, в применении к эргодическим процессам метод регуляризации позволяет найти оптимальное приближенное решение уравнения (1) (или близкое к нему), используя существенно меньшую априорную информацию об искомом решении и шуме, чем в методе оптимальной фильтрации.

3. Введем в рассмотрение функцию параметра α:

$$F(\alpha)=\alpha^{\frac{-2n}{n+p}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\{A^*[u(t)-Az_\alpha(t)]\}^2dt},$$

где A^* — оператор, сопряженный в L_2 оператору A. Очевидно, что $F(\alpha)>0$ для всех $\alpha>0$.

Рассмотрим уравнения с ядрами I типа.

Теорема 3. *Функция $F(\alpha)$ при малых шумах (т. е. при малом S_0) имеет локальный минимум в некоторой точке $\alpha=\alpha_{\min}$ и локальный максимум в некоторой точке $\alpha=\alpha_{\max}$, причем $\alpha_{\max}<\alpha_{\min}$.*

Доказательство. Используя теорему Планшереля, а также выражение для спектральной плотности $U(\omega)$ правой части уравнения (6; 0,1)

$$U(\omega)=L(\omega)N(\omega)+S(\omega),$$

находим

$$F(\alpha)=\alpha^{\frac{2p}{q}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(LN+S)\,\omega^{4p}d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2},$$

или

$$F(\alpha)=2\alpha^{\frac{2p}{q}}\left\{\int_0^{\omega_0}\frac{L(LN+S)\,\omega^{4p}}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}\,d\omega+\int_{\omega_0}^{\infty}\frac{L(LN+S)\,\omega^{4p}}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}\,d\omega\right\}.$$

Число ω_0 выберем так, чтобы для $\omega>\omega_0$ функции $L(\omega)$, $N(\omega)$, $S(\omega)$ можно было вычислять по асимптотическим формулам.

Для малых α

$$\int_0^{\omega_0}\frac{L^2N\omega^{4p}d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}=B_1\int_0^{\omega_0}N\omega^{4p}d\omega=O(1),\quad \text{где}\quad 0{,}25<B_1<1;$$

$$\int\limits_0^{\omega_0} \frac{LS\omega^{4p}d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = B_2\int\limits_0^{\omega_0} S\cdot L^{-1}\omega^{4p}d\omega = O(1),$$

где $\quad 0{,}25 < B_2 < 1;$

$$I_1 = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{L^2N\omega^{4p}d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = N_0\int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega^{4p-2b}d\omega}{\left(1+\frac{\alpha}{|A|^2}\,\omega^{2q}\right)^2} =$$

$$= \frac{N_0}{2q}\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{x^{\frac{4p-2b+1}{2q}-1}\,dx}{(1+x)^2}\cdot\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\frac{-4p+2b-1}{2q}},$$

где $x_0 = \frac{\alpha}{|A|^2}\,\omega_0^{2q}$.

При $\alpha\to 0$ последний интеграл стремится к интегралу в пределах от 0 до ∞, который легко вычисляется и равен

$$\pi\,\frac{2p-2n-2b+1}{2q}\,\frac{1}{\sin\left(\frac{4n+2b-1}{2q}\,\pi\right)}.$$

Таким образом,

$$I_1 = G_1(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\frac{-4p+2b-1}{2q}},$$

где

$$C_1(\alpha)\to C_{10} = \frac{\pi N_0}{(2q)^2}\,\frac{2p-2n-2b+1}{\sin\left(\frac{4n+2b-1}{2q}\,\pi\right)} \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

Аналогично находим, что

$$I_2 = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{LS\omega^{4p}d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = C_2(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\frac{-4p+2n-2a+1}{2q}}\cdot\frac{S_0}{|A|^2},$$

где

$$C_2(\alpha)\to C_{20} = \frac{\pi}{(2q)^2}\,\frac{2p-2a+1}{\sin\left(\frac{2p-2a+1}{2q}\,\pi\right)} \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

Следовательно, при малых α

$$F(\alpha) = C_3(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\nu} + C_4(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu}\cdot\frac{S_0}{|A^2|} + O\left(\alpha^{\frac{2p}{q}}\right), \tag{6; 3,1}$$

где

$$C_3(\alpha) = 2C_1(\alpha)\,|A|^{\frac{-4p}{q}}, \quad C_4(\alpha) = 2C_2(\alpha)\,|A|^{\frac{-4p}{q}}.$$

Поскольку $\gamma > 0$ и $\mu > 0$, то при $\alpha \to 0$ $F(\alpha) \to \infty$.

Для больших $\alpha\,(\alpha \gg 1)$ интеграл

$$\int_0^{\omega_0} \frac{\omega^{4p} L \cdot U d\omega}{(L + \alpha\omega^{2p})^2}$$

заключен между интегралами

$$\int_0^{\omega_0} \frac{(LU)_{\max}\,\omega^{4p} d\omega}{\left(L_{\min} + \alpha\omega^{2p}\right)^2} \quad \text{и} \quad \int_0^{\omega_0} \frac{(LU)_{\min}\omega^{4p} d\omega}{\left(L_{\max} + \alpha\omega^{2p}\right)^2}.$$

Но

$$\int_0^{\omega_0} \frac{\omega^{4p} d\omega}{(\beta + \alpha\omega^{2p})^2} = \frac{1}{2p} \cdot \alpha^{-2-\frac{1}{2p}} \int_0^{\alpha\omega_0^{2p}} \frac{x^{1+\frac{1}{2p}} dx}{(\beta + x)^2}, \quad (\beta \geqslant 0).$$

При $\alpha \to \infty$ последний интеграл стремится к бесконечности как $\alpha^{1/(2p)}$. Следовательно,

$$\int_0^{\omega_0} \frac{\omega^{4p} d\omega}{(\beta + \alpha\omega^{2p})^2} = O(\alpha^{-2}), \quad \alpha^{\frac{2p}{q}} \int_0^{\omega_0} \frac{\omega^{4p} \cdot L \cdot U d\omega}{(L + \alpha\omega^{2p})^2} = O\left(\alpha^{-\frac{2n}{q}}\right).$$

Рассмотрим интегралы по промежутку (ω_0, ∞):

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L^2 N \omega^{4p} d\omega}{(L + \alpha\omega^{2p})^2} = N_0 \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega^{4p-2b} d\omega}{\left(1 + \frac{\alpha}{|A|^2}\,\omega^{2q}\right)^2} =$$

$$= \frac{N_0}{2q}\,\alpha^{\frac{-4p+2b-1}{2q}} \int_{\alpha\omega_0^{2q}}^{\infty} \frac{x^{\frac{4p-2b+1}{2q}-1} dx}{(1+x)^2}.$$

При $\alpha \to \infty$ последний интеграл стремится к нулю как $\alpha^{\frac{-4n-2b+1}{2q}}$. Следовательно,

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L^2 N \omega^{4p} d\omega}{(L + \alpha\omega^{2p})^2} = O(\alpha^{-2}), \quad \alpha^{\frac{2p}{q}} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{L^2 N \omega^{4p} d\omega}{(L + \alpha\omega^{2p})^2} = O\left(\alpha^{\frac{-2n}{q}}\right).$$

Аналогично находим, что

$$\alpha^{\frac{2p}{q}} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{LS\omega^{4p}d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2} = O\left(\alpha^{\frac{-2n}{q}}\right).$$

Таким образом, при $\alpha \to \infty$

$$F(\alpha) = O\left(\alpha^{\frac{-2n}{q}}\right).$$

Оценим производную $F'(\alpha)$ при малых значениях α. Очевидно, что

$$\frac{d}{d\alpha}[\ln F(\alpha)] = \frac{2p}{\alpha q} + \frac{d}{d\alpha}[\ln F_1(\alpha)],$$

где

$$F_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{L(LN+S)\,\omega^{4p}d\omega}{(L+\alpha\omega^{2p})^2}.$$

Условие $F'(\alpha) = 0$ эквивалентно соотношению

$$\alpha F_1'(\alpha) + \frac{2p}{q} F_1(\alpha) = 0,$$

или

$$\alpha^{\frac{2p}{q}+1} F_1'(\alpha) + \frac{2p}{q} F(\alpha) = 0. \qquad (6;\,3{,}2)$$

Повторяя рассуждения, проведенные при оценке функции $F(\alpha)$ для малых значений α, находим, что для малых α левая часть уравнения (6; 3,1) имеет вид

$$\widetilde{C}_1(\alpha)\,\gamma\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\gamma} - \widetilde{C}_2(\alpha)\,\mu\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu} \frac{S_0}{|A|^2} + O\left(\alpha^{\frac{2p}{q}}\right), \qquad (6;\,3{,}3)$$

где

$$\widetilde{C}_1(\alpha) \to 2|A|^{-4p/q}C_{10}, \quad \widetilde{C}_2(\alpha) \to 2|A|^{-4p/q}C_{20}$$

при $\alpha \to 0$.

Сумму (6; 3,3) можно записать в виде

$$\widetilde{C}_1(\alpha)\,\gamma\alpha_1^{-\mu}\left\{\alpha_1^{\gamma+\mu} + \frac{\mu}{\gamma}\frac{\widetilde{C}_2(\alpha)}{\widetilde{C}_1(\alpha)}\frac{S_0}{|A|^2} + O\left(\alpha_1^{\frac{2p}{q}+\mu}\right)\right\},$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{|A|^2}.$$

Поскольку $\gamma,\ \mu > 0,\ \frac{2p}{q} + \mu > 0$ и $\widetilde{C}_2/\widetilde{C}_1 > 0$, то при малых значениях S_0 функция переменного α_1

$$f_2(\alpha_1) = \alpha_1^{\gamma+\mu} - \frac{\mu}{\gamma}\frac{S_0}{|A|^2}\frac{\widetilde{C}_2}{\widetilde{C}_1} + O\left(\alpha_1^{\frac{2p}{q}+\mu}\right)$$

имеет нуль в некоторой точке $\alpha_1 = \alpha_{1,\min}$ такой, что точка $\alpha_{\min} = \alpha_{1,\min} \cdot |A|^2$ лежит в области применимости представления (6; 3,1) для функции $F(\alpha)$ (рис. 17). Точка $\alpha = \alpha_{\min}$ может быть только точкой локального минимума для функции $F(\alpha)$. Очевидно, что

$$\alpha_{\min} = \alpha_{\min}(S_0),$$
$$\lim_{S_0 \to 0} \alpha_{\min}(S_0) = 0.$$

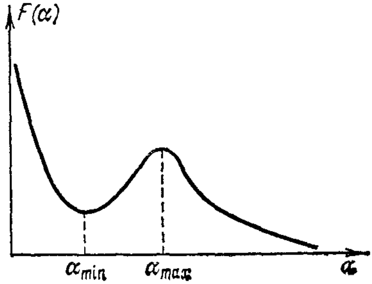

Рис. 17.

Из оценки функции $F(\alpha)$ при больших α видно, что при $\alpha \to \infty$ функция $F(\alpha)$ монотонно стремится к нулю (для $\alpha \gg 1$). Из этого факта, а также из того, что при $\alpha = \alpha_{\min}$ $F(\alpha)$ имеет локальный минимум, следует существование такой точки $\alpha = \alpha_{\max}$, $(\alpha_{\max} > \alpha_{\min})$, в которой функция $F(\alpha)$ имеет локальный максимум. Очевидно, $\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(S_0)$. Теорема доказана.

4. Следует отметить, что отношение $\frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}}$ стремится к нулю при $S_0 \to 0$. Условие

$$\frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} \ll 1$$

можно считать критерием малости шума и, следовательно, критерием применимости изложенных результатов к анализу экспериментальных кривых $u(t)$.

Для значений p, удовлетворяющих неравенству

$$4p > 2b - 1,$$

первым членом в формуле для $f_2(\alpha_1)$ можно пренебречь.

В этом случае из условия $f_2(\alpha_1) = 0$ находим

$$\alpha_{\min} = \left(\frac{\widetilde{C}_2}{\widetilde{C}_1}\frac{\mu}{\gamma}\frac{S_0}{|A|^2}\right)^{\frac{1}{\gamma+\mu}}.$$

В случае *эргодических* процессов функция $F(\alpha)$ определяется без априорных знаний высокочастотных характеристик искомого решения и шума по формуле

$$F(\alpha) = \alpha^{\frac{-2n}{q}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \{A^*(Az_\alpha - u)\}^2\,dt.$$

Зная функцию $F(\alpha)$, мы можем однозначно определить значения параметров N_0, b; S_0, a.

В самом деле, на участке $(0, \alpha_{\min})$ кривая $y = F(\alpha)$ определяется только параметрами a, S_0, p, n, так как для малых значений α в формуле для $F(\alpha)$ преобладает слагаемое

$$C_4(\alpha)\frac{S_0}{|A|^2}\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{-\mu},$$

где

$$C_4(\alpha) = 2C_2(\alpha)|A|^{\frac{-4p}{q}},$$

$$C_2(\alpha) \to \frac{\pi}{(2q)^2}\frac{2p-2a+1}{\sin\left(\frac{2p-2a+1}{2q}\pi\right)} \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

На участке $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ кривая $y = F(\alpha)$ определяется только параметрами N_0, b; p, n, так как на этом участке в формуле для $F(\alpha)$ определяющим будет член

$$C_3(\alpha)\left(\frac{\alpha}{|A|^2}\right)^{\gamma},$$

где

$$C_3(\alpha) = 2|A|^{\frac{-4p}{q}}C_1(\alpha),$$

$$C_1(\alpha) \to \frac{\pi N_0}{(2q)^2}\frac{2p-2n-2b+1}{\sin\left(\frac{2p-2n-2b+1}{2q}\pi\right)} \quad \text{при} \quad \alpha\to 0.$$

Поскольку для эргодических процессов $F(\alpha)$ определяется без априорной информации о высокочастотных характеристиках сигнала и шума, то в этих случаях мы можем по регуляризованным решениям определить параметры S_0, a; N_0, b.

Для произвольных стационарных процессов указанные параметры определяются *по семейству регуляризованных решений* $\{z_\alpha(t)\}$, содержащему достаточно большое число функций $z_\alpha(t)$ (например, методом наименьших квадратов).

5. Мы подробно рассмотрели вопрос об определении высокочастотных характеристик сигнала и шума в случае уравнений с ядрами I типа. Если ядро сильно сглаживающее ($n \gg b$, a), то можно также полагать $n \gg p$. Тогда множитель $\alpha^{-\frac{2n}{n+p}}$ в функции $F(\alpha)$ можно записать в виде

$$\alpha^{-2\left(1-\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}-\ldots\right)} \approx \alpha^{-2\left(1-\frac{p}{n}\right)},$$

где $p/n \ll 1$.

Имея в виду сказанное, а также то, что ядра II и III типа суть сильно сглаживающие, для них функцию $F(\alpha)$ можно определить следующим образом:

$$F(\alpha) = \alpha^{-2+\varepsilon\cdot p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\{A^*[Az_\alpha - u]\}^2\,dt},$$

где $\varepsilon \cdot p \ll 1$.

Определив таким образом функцию $F(\alpha)$ и повторяя рассуждения, проведенные для ядер I типа, мы придем к тем же результатам о возможности определения высокочастотных характеристик сигнала и шума.

Оценки сходимости регуляризованных решений содержатся также в работах [49, 50, 139]. В [91] рассматриваются условия корректности уравнений типа сверток.

Глава VII

УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ В МЕТРИКЕ l_2 КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Задача суммирования ряда Фурье по заданной ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(t)\}$ состоит в нахождении функции $f(t)$ по ее коэффициентам Фурье.

В ряде случаев в эксперименте для определения интересующей нас функции $f(t)$, характеризующей изучаемый процесс (явление), измеряются ее коэффициенты Фурье $\{a_n\}$ по некоторой ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(t)\}$. Измерения всегда носят приближенный характер. Таким образом, вместо a_n получают приближенные значения коэффициентов Фурье c_n. Возникает задача суммирования рядов Фурье с приближенными коэффициентами.

Во введении указывалось (см. пример 3), что задача суммирования рядов Фурье не обладает свойством устойчивости к малым изменениям (в метрике l_2) коэффициентов Фурье, если уклонение суммы оценивать в метрике C, и, следовательно, является некорректно поставленной задачей.

Издавна употребляемый метод суммирования рядов Фурье с приближенными коэффициентами состоит в том, что в качестве приближенного значения суммы такого ряда $f(t)$ берется сумма конечного (не слишком большого) числа его первых членов, т. е. полагают

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{k} c_n \varphi_n(t).$$

Устойчивый к малым изменениям коэффициентов в метрике l_2 метод суммирования, основанный на идее регуляризации, был предложен в [167].

Следуя работе [167], будем называть метод суммирования рядов Фурье функций $f(t) \in F$ с приближенными в метрике l_2 коэффициентами $\{c_n\}$ *устойчивым* в смысле метрики пространства F, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon)$, что из неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - \tilde{c}_n)^2 \leqslant \delta^2(\varepsilon)$$

следует неравенство

$$\rho_F(f, \tilde{f}) \leqslant \varepsilon,$$

где f и $\tilde{f}$ — результаты суммирования данным методом соответственно рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \varphi_n(t).$$

2. Обозначим через C_D пространство непрерывных в конечной замкнутой области $\bar{D}$ функций с метрикой C. Будем рассматривать ряды Фурье по системе функций $\{\varphi_n(t)\}$ для функций $f(t)$ из C_D.

Следуя [167] и [12], мы построим в § 1 класс устойчивых методов суммирования рядов Фурье, основанных на идее регуляризации.

Задачу суммирования ряда Фурье функции $f(t)$ можно рассматривать как задачу решения некоторого операторного уравнения относительно функции $f(t)$. В самом деле, если каждой функции из множества F поставить в соответствие элемент u пространства l_2, а именно, последовательность ее коэффициентов Фурье $\{a_n\}$ по системе $\{\varphi_n(t)\}$ (с весом $\rho(t)$), т. е. элемент $u \equiv \{a_n\}$, то это соответствие можно записать в виде

$$Af = u. \tag{7; 0,1}$$

Очевидно, что этот оператор из C_D на l_2 непрерывен на C_D.

Следовательно, задача суммирования ряда Фурье, состоящая в нахождении функции $f(t)$ по заданной последовательности ее коэффициентов Фурье $u \equiv \{a_n\}$, сводится к решению уравнения (7; 0,1) относительно $f(t)$. Из курса анализа известно, что в классе C_D эта задача имеет единственное решение.

§ 1. Классы устойчивых методов суммирования рядов Фурье

1. Если нам известны приближенные значения коэффициентов Фурье искомой функции, т. е. элемента u — правой части уравнения (7; 0,1), то речь может идти лишь о нахождении приближенного решения задачи. Поскольку эта задача является некорректно поставленной, то естественно для нахождения ее приближенного решения воспользоваться методом регуляризации.

В качестве стабилизирующего функционала $\Omega[f]$ согласно [12] возьмем некоторый функционал вида

$$\Omega[f] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \cdot \xi_n, \tag{7; 1,1}$$

определяемый заданием последовательности $\{\xi_n\}$. Здесь f_n — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по полной ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(t)\}$ (с весом $\rho(t) > 0$), а $\{\xi_n\}$ — последовательность положительных чисел, порядок роста которых при $n \to \infty$ не ниже, чем $n^{2+\varepsilon}$, где $\varepsilon \geqslant 0$. Легко видеть, что для любого положительного числа $d > 0$ множество функций $f(t) \in C_D$, для которых $\Omega[f] \leqslant d$, является компактом в C_D *).

Стабилизирующие функционалы такого вида являются естественным обобщением функционалов $\Omega[f]$, использованных нами в гл. II.

В самом деле, пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — полная ортонормированная система собственных функций краевой задачи вида

$$\frac{d}{dt}[k(t)\varphi'(t)] - q(t)\varphi(t) + \lambda\varphi(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant l,$$

$$\varphi(0) = 0 = \varphi(l),$$

где $k(t) > 0$ и $q(t) \geqslant 0$ на отрезке $[0, l]$, а $\{\lambda_n\}$ — совокупность собственных значений этой задачи. Тогда стабилизирующий функционал

$$\Omega[f] = \int_0^l \{k(f')^2 + qf^2\}\, dt,$$

*) Результат остается справедливым и в случае, если последовательность $\{\xi_n\}$ имеет порядок роста при $n \to \infty$ не ниже, чем $n^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

использованный нами в гл. IV для функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям $f(0)=f(l)=0$, можно записать в виде ряда $\Omega[f]=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\lambda_n$, где f_n — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}$. Действительно, применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int_0^l k(f')^2\,dt = ff'k\Big|_0^l - \int_0^l f\frac{d}{dt}(kf')\,dt = -\int_0^l f\frac{d}{dt}(kf')\,dt.$$

Следовательно, $\Omega[f]=\int_0^l f\left\{qf-\frac{d}{dt}(kf')\right\}dt$. Подставляя в правую часть этой формулы вместо функции $f(t)$ ее ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cdot\varphi_n(t)$, получаем

$$\Omega[f]=\int_0^l\left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m\cdot\varphi_m(t)\right)\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left\{q\varphi_n(t)-\frac{d}{dt}\left[k\cdot\varphi_n'\right]\right\}dt =$$

$$=\sum_{n,m=1}^{\infty} f_nf_m\int_0^l \varphi_m(t)\left\{q\cdot\varphi_n-\frac{d}{dt}\left(k\varphi_n'\right)\right\}dt.$$

Так как $q\varphi_n-\frac{d}{dt}\left(k\varphi_n'\right)\equiv\lambda_n\varphi_n$, и при $n\neq m$ функции $\varphi_n(t)$ и $\varphi_m(t)$ ортогональны, то

$$\Omega[f]=\sum_{n,m=1}^{\infty} f_nf_m\lambda_n\int_0^l \varphi_m\varphi_n dt=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\lambda_n.$$

2. Уточним постановку задачи. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех последовательностей $\{\xi_n\}$, упомянутых выше, отвечающих всем возможным значениям числа $\varepsilon\geqslant 0$ [12].

Пусть в конечной замкнутой области $\overline{D}$ N-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^N$ заданы полная ортонормированная (с весом $\rho(t)>0$) система функций $\{\varphi_n(t)\}$, где $t=(t_1, t_2, \ldots, t_N)$, и непрерывная в $\overline{D}$ функция $\hat{f}(t)$, представимая своим рядом Фурье по системе $\{\varphi_n(t)\}$,

$$\hat{f}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(t),$$

где
$$a_n = \int\limits_D \rho(t) \hat{f}(t) \varphi_n(t)\, dt.$$

Пусть вместо коэффициентов Фурье a_n нам известны их приближенные значения $c_n = a_n + \gamma_n$ с малыми (в l_2) погрешностями γ_n,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \leqslant \delta^2,$$
т. е. вместо последовательности $\hat{u} \equiv \{a_n\}$ нам дана последовательность $u_\delta \equiv \{c_n\}$, для которой $\rho_{l_2}(\hat{u}, u_\delta) \leqslant \delta$. Следовательно, вместо ряда Фурье с точными коэффициентами
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$$
мы имеем ряд с приближенными коэффициентами
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t). \tag{7; 1,2}$$

Нашей целью является отыскание в классе C_D функции $\tilde{f}(t)$, аппроксимирующей функцию $\hat{f}(t)$, по последовательности чисел $\{c_n\}$, близкой (в метрике l_2) к последовательности $\{a_n\}$ коэффициентов Фурье функции $\hat{f}(t)$, т. е. такой, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \leqslant \delta^2$. При этом аппроксимация должна быть такой, чтобы при $\delta \to 0$ $\rho_C(\tilde{f}, \hat{f}) \to 0$.

В качестве $\tilde{f}(t)$ нельзя брать сумму $S(t)$ ряда (7; 1,2), вычисляемую по правилу
$$S(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c_n \varphi_n(t),$$
так как такое суммирование, как было показано во введении, не является устойчивым к малым (в l_2) изменениям коэффициентов $\{c_n\}$.

Очевидно, решение надо искать в классе Q_δ функций из C_D, для которых выполняется неравенство
$$\rho_{l_2}(Af, u_\delta) \leqslant \delta.$$

Но этот класс не является компактным. Он слишком широк. Необходимо сузить его. Для этого возьмем некоторый фиксированный функционал $\Omega_1[f]$ вида (7; 1,1), описанного в п. 1,

$$\Omega_1[f] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \xi_n,$$

где $\{\xi_n\} \in \mathfrak{M}$.

Пусть F_ξ — множество функций из C_D, для которых определен функционал $\Omega_1[f]$, и

$$F_{\delta,\xi} = Q_\delta \cap F_\xi.$$

Приближение функции $\hat{f}(t)$ будем искать на множестве $F_{\delta,\xi} \subset C_D$.

В дальнейшем, для определенности, будем рассматривать одномерную задачу. В этом случае t — координата точки на прямой, а область D — конечный промежуток (a, b).

Поскольку задача нахождения функции по ее коэффициентам Фурье сводится к решению операторного уравнения (7; 0,1), естественно находить приближение функции $\hat{f}(t)$ методом регуляризации. Для этого рассмотрим функционал

$$M^\alpha[u_\delta, f] = \rho_{l_2}^2(Af, u_\delta) + \alpha\Omega_1[f],$$

содержащий числовой параметр α (параметр регуляризации). Его можно написать также в виде

$$M^\alpha[u_\delta, f] = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - c_n)^2 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \xi_n, \qquad (7;\ 1,3)$$

где f_n — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}$ с весом $\rho(t) > 0$, т. е.

$$f_n = \int_D f(t)\,\rho(t)\,\varphi_n(t)\,dt. \qquad (7;\ 1,4)$$

Для сглаживающего функционала $M^\alpha[f, u_\delta]$ справедливы теоремы 3 § 3 и 5 § 6 гл. II. Доказательства их проводятся так же, как и в гл. II.

Таким образом, существует функция $\tilde{f}_\alpha(t)$ из $F_{\delta,\xi}$, реализующая минимум функционала $M^\alpha[f, u_\delta]$ на множестве $F_{\delta,\xi}$. Эту функцию и будем принимать в качестве приближения функции $\hat{f}(t)$.

Функционал $\Omega_1[f]$ будем называть *стабилизирующим* функционалом для задачи об устойчивом суммировании рядов вида (7; 1,2).

Замечание 1. Если в качестве системы функций $\{\varphi_n(t)\}$ взяты собственные функции краевой задачи

$$\operatorname{div}(k\nabla\varphi) - q^2(t)\varphi + \lambda\rho(t)\varphi = 0, \quad t \in D,$$

$$\varphi|_S = 0 \quad \left(\text{или } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0\right),$$

где S — граница области D, в которой ищется решение, то функционал $\Omega_1[f]$ можно брать в виде

$$\Omega_1[f] = \int_D \{k(\nabla f)^2 + q^2 f^2\}\, dt$$

или в эквивалентном виде

$$\Omega_1[f] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n,$$

где λ_n — собственные значения указанной краевой задачи, а f_n — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}$ с весом $\rho(t)$.

3. Коэффициенты Фурье функции $\tilde{f}_\alpha(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}$ находим из условия равенства нулю частных производных функционала (7; 1,3) по переменным f_n ($n = 1, 2, \ldots$). Получим

$$\tilde{f}_{\alpha,n} = \frac{c_n}{1 + \alpha\xi_n}.$$

Таким образом, искомое приближение функции $\hat{f}(t)$ можно записать в виде

$$\tilde{f}_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r(n, \alpha)\, c_n \varphi_n(t), \tag{7; 1,5}$$

где

$$r(n, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha\xi_n},$$

и вычислять $\tilde{f}_\alpha(t)$ по правилу

$$\tilde{f}_\alpha(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} r(n, \alpha)\, c_n \varphi_n(t). \tag{7; 1,6}$$

4. Формулы (7; 1,5) и (7; 1,6) определяют метод суммирования ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t),$$

устойчивый в смысле метрики C к малым (в метрике l_2) изменениям его коэффициентов c_n. Действительно, описанная процедура получения функции $\tilde{f}_\alpha(t)$ может быть записана в виде оператора $R(u, \alpha)$, т. е.

$$\tilde{f}_\alpha(t) = R(u_\delta, \alpha).$$

Этот оператор является регуляризирующим для уравнения (7; 0,1) и, следовательно, обладает упомянутым свойством устойчивости.

Заметим, что значение параметра α должно быть взято согласованным с погрешностью исходных данных δ, $\alpha = \alpha(\delta)$. Оно может быть найдено, например, из условия $\rho_{l_2}(A\tilde{f}_\alpha, u_\delta) = \delta$, которое можно записать также в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \frac{\alpha^2 \xi_n^2}{(1 + \alpha\xi_n)^2} = \delta^2.$$

Обоснование этого проводится совершенно так же, как было описано в гл. II.

При $\delta^2 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ таким способом α определяется однозначно, так как функция

$$\psi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \frac{\alpha^2 \xi_n^2}{(1 + \alpha\xi_n)^2}$$

— непрерывная монотонно возрастающая в области $\alpha > 0$ и $\psi(0) = 0$. Действительно,

$$\psi'(\alpha) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \left\{ \frac{2\alpha\xi_n^2}{(1 + \alpha\xi_n)^2} - \frac{\alpha^2 \xi_n^2 \cdot 2\xi_n}{(1 + \alpha\xi_n)^3} \right\} = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \frac{\xi_n^2}{(1 + \alpha\xi_n)^3} > 0.$$

Так как $\psi(\alpha) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$, то при $\delta^2 > \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ уравнение $\psi(\alpha) = \delta^2$ не имеет решения.

Замечание 2. Сумма исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t),$$

понимаемая как предел

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c_n \varphi_n(t),$$

не может служить приближением суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$$

вследствие неустойчивости ее к малым (в метрике l_2) изменениям коэффициентов c_n. С другой стороны, сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha\xi_n} c_n \varphi_n(t),$$

понимаемая так же, как предел

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1+\alpha\xi_n} c_n \varphi_n(t),$$

устойчива к малым (в l_2) изменениям коэффициентов c_n и при значении $\alpha=\alpha(\delta)$, согласованном с погрешностью коэффициентов c_n, равномерно аппроксимирует функцию $\widehat{f}(t)$.

Таким образом, множители

$$r(n, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha\xi_n}$$

играют стабилизирующую роль. Мы будем называть их *стабилизирующими множителями.*

Если положить

$$r(k, \alpha) = \begin{cases} 1, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то получим обычно употребляемый метод суммирования, отмеченный на стр. 218. В этом случае надо взять последовательность $\{\xi_k\}$ вида

$$\xi_k < \infty \text{ для } k \leqslant n, \quad \xi_k = \infty \text{ для } k > n,$$

затем положить $\alpha = 0$.

Замечание 3. Если в классическом способе суммирования ряда Фурье путем перехода к пределу при $n \to \infty$ в частичной сумме

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k (t)$$

число n брать согласованным с погрешностью δ коэффициентов $\{c_n\}$, то такое суммирование будет устойчивым.

Замечание 4. Если функция $\widehat{f}(t)$ кусочно-непрерывна, то описанный метод дает устойчивый метод суммирования в каждой точке непрерывности $\widehat{f}(t)$.

§ 2. Об оптимальных методах суммирования рядов Фурье

1. Располагая обширным классом устойчивых методов суммирования рядов Фурье, естественно поставить задачу нахождения оптимального в каком-то смысле устойчивого метода суммирования. В настоящем параграфе дается решение этой задачи в различных постановках [12].

Приближенно известные коэффициенты подлежащего суммированию ряда Фурье могут содержать неконтролируемые случайные погрешности. Поэтому их можно рассматривать как случайные числа и при решении задачи приближенного суммирования ряда пользоваться вероятностными методами.

2. Будем полагать, что погрешности в коэффициентах Фурье, т. е. числа γ_n, являются случайными числами, удовлетворяющими требованиям:

1) $\{\gamma_n\}$ есть последовательность попарно некоррелированных случайных чисел;

2) математические ожидания этих чисел равны нулю, т. е. $\overline{\gamma_n} = 0$ для всех значений n.

В этих условиях приближенные значения коэффициентов Фурье c_n также являются случайными числами. Для математических ожиданий случайных чисел c_n^2 и γ_n^2 выполняются соотношения

$$\overline{c_n^2} = a_n^2 + \overline{\gamma_n^2}.$$

Дисперсии случайных величин c_n и γ_n одинаковы и равны $\sigma_n^2 = \overline{\gamma_n^2}$. Мы их будем предполагать известными.

Функция $\tilde{f}_\alpha(t)$, реализующая минимум функционала M^α при фиксированной последовательности чисел $\{\xi_n\} \in \mathfrak{M}$, является, следовательно, случайной функцией.

Пусть

$$(\Delta f_\alpha)_\xi = \tilde{f}_\alpha(t) - \hat{f}(t),$$

где

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t).$$

За меру уклонения функции $\tilde{f}_\alpha(t)$ от $f(t)$ можно принять математическое ожидание квадрата величины $(\Delta f_\alpha)_\xi$, т. е. величину

A) $$\overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2}\ *),$$

или интеграл

B) $$\int_D \rho(t) \overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2}\, dt.$$

3. Итак, пусть мы имеем ряд Фурье с приближенными коэффициентами $\{c_n\}$. Приближенная сумма его, устойчивая к малым изменениям (в l_2) коэффициентов $\{c_n\}$, как мы видели в § 1, зависит от α и от выбора последовательности $\{\xi_n\}$ из $\mathfrak{M}$. Поставим задачу нахождения приближенной суммы, наименее уклоняющейся (при фиксированном α) от $\hat{f}(t)$ в смысле

$$\inf_{\{\xi_n\} \in \mathfrak{M}} \int_D \overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2} \rho(t)\, dt \quad \text{и} \quad \inf_{\{\xi_n\} \in \mathfrak{M}} \overline{(\Delta f_\alpha)_\xi^2}.$$

Какая дополнительная информация о коэффициентах c_n и шуме потребуется для этого? Чтобы ответить на этот вопрос, найдем оптимальные в указанных смыслах при-

---

*) Если нам известна плотность распределения вероятности $p(x)$ величины $(\Delta f)_\xi^2$, то математическое ожидание $\overline{(\Delta)_\xi^2}$ вычисляется по формуле ($a \leqslant x \leqslant b$)

$$\overline{(\Delta f)_\xi^2} = \int_a^b (\Delta f)_\xi^2\, p(x)\, dx.$$

ближенные суммы. Для уклонения типа B) имеем

$$\int_D \overline{(\Delta f_\alpha)^2_\xi} \rho(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2 + \alpha^2 \xi_n^2 (\overline{c}_n^2 - \sigma_n^2)}{(1 + \alpha \xi_n)^2} = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$$

Уклонение будет минимальным при таких значениях $\xi_n = \xi_n'$, при которых производные $\partial\Phi/\partial\xi_n$ обращаются в нуль. Из этих условий легко находим, что

$$\xi_n' = \frac{\sigma_n^2}{\alpha(\overline{c}_n^2 - \sigma_n^2)}.$$

Следовательно,

$$r'(n, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha \xi_n'} = 1 - \frac{\sigma_n^2}{\overline{c}_n^2}.$$

Таким образом, оптимальная в смысле минимума B) сумма имеет вид

$$\widetilde{f}_{\text{опт}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma_n^2}{\overline{c}_n^2}\right) c_n \varphi_n(t). \qquad (7;\ 2,1)$$

Аналогично для уклонения типа A) находим, что оптимальная в фиксированной точке $t = t_0$ сумма будет иметь вид

$$f_{\text{опт}}(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma_n^2}{\overline{c}_n^2}\right) c_n \varphi_n(t_0). \qquad (7;\ 2,2)$$

Таким образом, для получения оптимальных в указанных смыслах сумм ряда с приближенными коэффициентами $\{c_n\}$ требуется знать для всех n величины $\overline{c}_n^2$ и σ_n^2. Это означает знание точных коэффициентов Фурье a_n, так как $\overline{c}_n^2 = a_n^2 + \sigma_n^2$ *).

Но в формулы (7; 2,1) и (7; 2,2) входят лишь отношения $\sigma_n^2/\overline{c}_n^2$. В ряде конкретных задач мы можем найти приближенные значения этих отношений. Как изменятся при этом суммы (7; 2,1) и (7; 2,2)?

---

*) Сравните с оптимальной фильтрацией по Винеру в главе VI, § 2.

Пусть

$$\left(\frac{\sigma_n^2}{\bar{c}_n^2}\right)_{\text{прибл}} = \frac{\sigma_n^2}{\bar{c}_n^2}(1+\beta_n),$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \leqslant \varepsilon.$$

По этим значениям получим сумму

$$\tilde{f}_{\text{опт,пр}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{\sigma_n^2}{\bar{c}_n^2}\right)_{\text{прибл}}\right] c_n \varphi_n(t).$$

Если дополнительно известно, что для всех n

$$\varphi_n^2(t) \leqslant Q,$$

то

$$\left|\tilde{f}_{\text{опт, пр}}(t) - \hat{f}(t)\right| \leqslant \sqrt{Q \cdot \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2}.$$

Таким образом, оптимальное суммирование со стабилизирующими множителями

$$r'(n, \alpha) = 1 - \sigma_n^2/\bar{c}_n^2$$

устойчиво к малым изменениям чисел $\sigma_n^2/\bar{c}_n^2$ в указанном смысле.

В [97] рассматривается другой способ устойчивого суммирования рядов Фурье.

Глава VIII

ОБ УСТОЙЧИВЫХ МЕТОДАХ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Ряд практически важных задач приводится к математическим задачам минимизации функционалов $f(z)$. Надо различать два типа таких задач. К первому типу относятся те из них, в которых надо находить минимальное (максимальное) значение функционала. К этому классу относятся многие задачи проектирования оптимальных систем, конструкций. При этом несущественно, на каких элементах z достигается искомый минимум, поэтому в качестве приближенных решений можно брать значения функционала на любой минимизирующей последовательности $\{z_n\}$, т. е. такой, что $f(z_n) \to \inf f(z)$ при $n \to \infty$.

Среди задач этого типа имеются и неустойчивые, т. е. такие, в которых сколь угодно малым изменениям исходных данных могут отвечать сколь угодно большие изменения минимального значения функционала $f(z)$ (см. пример в гл. IX, § 1).

Ко второму типу относятся задачи, в которых требуется найти элементы z, на которых достигается минимум функционала $f(z)$. Их мы будем называть задачами *минимизации по аргументу*. Среди них встречаются такие, в которых минимизирующие последовательности могут быть несходящимися. В этих случаях, очевидно, нельзя брать в качестве приближенного решения элементы минимизирующей последовательности. Естественно называть такие задачи *неустойчивыми*, или *некорректно поставленными*. Некорректно поставленными в указанном смысле являются целые классы практически важных задач оптимального управления. К ним относятся, например, задачи, в которых оптимизируемый функционал зависит только от фазовых переменных [177].

В настоящей главе мы будем рассматривать устойчивые методы решения задач именно второго типа.

2. Пусть на некотором метрическом пространстве F задан непрерывный функционал $f[z]$. Задача минимизации функционала $f[z]$ на множестве F состоит в отыскании элемента $z_0 \in F$, на котором $f[z]$ достигает своего наименьшего значения f_0:

$$\inf_{z \in F} f[z] = f[z_0] = f_0. \qquad (8;\ 0,1)$$

Предположим, что существует единственное решение z_0 этой задачи. Пусть $\{z_n\}$ — минимизирующая последовательность, т. е. такая, что

$$\lim_{n \to \infty} f[z_n] = f_0.$$

Задачу минимизации функционала $f[z]$ на множестве F будем называть *устойчивой* (см. [180]), если всякая минимизирующая последовательность $\{z_n\}$ сходится (в метрике пространства F) к элементу z_0 из F.

Задача (8; 0,1) минимизации функционала $f[z]$ на множестве F называется *корректно поставленной*, если она разрешима и устойчива. В противном случае она называется некорректно поставленной.

Для нахождения элемента z_0 широко используются методы прямой минимизации функционала $f[z]$, в которых при помощи какого-либо алгоритма конструируется минимизирующая последовательность $\{z_n\}$. При этом элементы z_n, для которых $f[z_n]$ достаточно близко к f_0, трактуются как приближенные значения искомого элемента z_0.

Прямые методы минимизации по своей идее обладают большой универсальностью. Пусть например, F есть множество функций $z(t)$ одной переменной t. Беря для функции $z(t)$ ее сеточное приближение $z_i = z(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, мы приходим к задаче о нахождении минимума функции n переменных, методы решения которой имеют достаточно универсальный характер и не связаны с спецификой функционала $f[z]$.

Но такой подход к получению приближенного решения оправдан лишь в тех случаях, когда построенная минимизирующая последовательность $\{z_n\}$ сходится к элементу z_0.

Выше отмечалось существование задач минимизации функционалов, не обладающих свойством устойчивости. В таких задачах существуют минимизирующие последовательности, не сходящиеся к элементу z_0.

Для получения приближенных решений неустойчивых задач минимизации функционалов $f[z]$ достаточно указать алгоритмы построения минимизирующих последовательностей $\{z_n\}$, сходящихся к элементу z_0.

3. Рассмотрим решения системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = F(t, x, u), \qquad (8;\ 0,2)$$

удовлетворяющие условиям

$$x(t_0) = x_0, \qquad (8;\ 0,3)$$

где $x(t) = \{x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\}$ — вектор-функция n-мерного пространства, определенная на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$, x_0 — заданный вектор, а $u(t) = \{u^1(t), u^2(t), \ldots \ldots, u^m(t)\}$ — *управляющая вектор-функция* (*управление*) m-мерного метрического пространства U.

Пусть $f[x(t)]$ — заданный неотрицательный функционал (целевой функционал), определенный на решениях системы (8; 0,2).

Очевидно, что решения системы (8; 0,2) зависят от выбранного управления $u(t)$, т. е. $x(t) = x_u(t)$. Поэтому значение функционала $f[x(t)]$ на каждом решении системы (8; 0,2) будет функционалом от управляющей функции $u(t)$, определенном на множестве U, т. е. $f[x_u(t)] = \Phi[u]$.

Задачу оптимального управления, можно, например, поставить как задачу отыскания в некотором классе функций U_1 пространства U такой управляющей функции $u_0(t)$, на которой функционал $\Phi[u] = f[x_u(t)]$ достигает минимума (или максимума).

Подобно задаче минимизации функционала $f[z]$, описанной в п. 1, эта задача также может быть неустойчивой. Действительно, рассмотрим случай, когда класс допустимых управлений U_1 есть пространство функций одной переменной t с равномерной метрикой, и $f[x(t)]$ — непрерывный функционал. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое управление $u_1(t)$, что

1) $f[x_{u_1}(t)] \leqslant f[x_{u_0}(t)] + \varepsilon$,

2) разность $u_1(t) - u_0(t)$ может принимать как угодно большие значения, допустимые принадлежностью функций $u_1(t)$ и $u_0(t)$ классу U_1. Возьмем функцию $u_1(t)$ совпадающей с $u_0(t)$ всюду, кроме интервала $(t_1 - \tau, t_1 + \tau)$, в котором разность $u_1(t) - u_0(t)$ превосходит некоторое фиксированное число B, допустимое

принадлежностью функций $u_1(t)$ и $u_0(t)$ классу U_1. Очевидно, что для любого числа $\delta > 0$ можно указать такое $\tau = \tau(\delta)$, чтобы для решений $x_{u_1}(t)$, $x_{u_0}(t)$ системы (8; 0,2), (8; 0,3), отвечающих управлениям $u_1(t)$ и $u_0(t)$, выполнялось неравенство $|x_{u_1}(t) - x_{u_0}(t)| < \delta$. Выбирая δ, а тем самым и $\tau = \tau(\delta)$, достаточно малым, будем иметь $f[x_{u_1}(t)] \leqslant f[x_{u_0}(t)] + \varepsilon$, в то время как $\sup_t |u_1(t) - u_0(t)| \geqslant B$. Таким образом, установлено существование неустойчивых задач оптимального управления.

Замечание. В качестве целевого функционала можно брать функционал, зависящий как от фазовых переменных, так и от управляющих функций.

В настоящей главе рассматриваются алгоритмы построения минимизирующих последовательностей, сходящихся к элементу, на котором рассматриваемый функционал достигает наименьшего значения.

§ 1. Устойчивый метод минимизации функционалов

1. Пусть требуется найти элемент $z_0 \in F$, на котором заданный функционал $f[z]$ достигает своего наименьшего значения на множестве F,

$$\inf_{z \in F} f[z] = f[z_0] = f_0. \qquad (8;\ 1,1)$$

Следуя [180], в этом параграфе будут рассмотрены способы построения минимизирующих последовательностей $\{z_n\}$, сходящихся к элементу z_0.

Минимизирующую последовательность $S \equiv \{z_n\}$ функционала $f[z]$ будем называть *регуляризованной*, если существует компактное в F множество $\widetilde{F}$, содержащее S [180].

Очевидно, что регуляризованная минимизирующая последовательность сходится к элементу z_0, если задача минимизации функционала $f[z]$ имеет единственное решение z_0. Если функционал $f[z]$ ограничен снизу, то на любой предельной точке $\tilde{z}$ регуляризованной минимизирующей последовательности $\{z_n\}$ функционал $f[z]$ достигает своей нижней грани, т. е.

$$f[\tilde{z}] = f_0.$$

Имея такие минимизирующие последовательности $\{z_n\}$, в качестве приближенных значений искомого элемента z_0 можно брать элементы z_n с такими номерами n, для которых $f[z_n]$ в пределах заданной точности совпадает с f_0.

Таким образом, нам достаточно указать алгоритмы построения регуляризованных минимизирующих последовательностей. Это удается сделать путем использования стабилизирующих функционалов $\Omega[z]$, описанных в гл. II. Введем необходимые для дальнейшего определения [180].

2. Пусть множество $\tilde{F}$ принадлежит F, $\tilde{F} \subset F$, и $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал.

Пусть на множестве $\tilde{F} \subset F$ можно ввести метрику $\tilde{\rho}(z_1, z_2)$, z_1, $z_2 \in \tilde{F}$, мажорантную по отношению к метрике пространства F*), такую, что сферы

$$S_r \equiv \{z;\ z \in \tilde{F},\ \tilde{\rho}(z, \tilde{z}_0) \leqslant r\}$$

в пространстве $\tilde{F}$ с произвольным центром $\tilde{z}_0$ компактны в F (в метрике пространства F). Будем говорить в этом случае, что $\tilde{F}$ *s-компактно вложено в* F.

Если метрика $\tilde{\rho}(z_1, z_2)$ определяет s-компактное вложение пространства $\tilde{F}$ в F и $\varphi(q)$ — неотрицательная возрастающая функция, то, очевидно, функционал

$$\Omega[z] = \varphi(\tilde{\rho}(z, \tilde{z}_0))$$

является стабилизирующим.

3. При вычислении функционалов $f[z]$ часто пользуются их приближенными значениями. Приближенное вычисление функционала $f[z]$ можно рассматривать как вычисление другого функционала $\tilde{f}[z]$, имеющего малую норму уклонения от $f[z]$.

Нормой уклонения по отношению к стабилизирующему функционалу $\Omega[z]$ функционалов $\tilde{f}[z]$ и $f[z]$, определенных на множестве $\tilde{F}$, будем называть наименьшее число δ, для которого на всех элементах $z \in \tilde{F}$ выполняется неравенство

$$|\tilde{f}[z] - f[z]| \leqslant \delta\Omega[z].$$

---

*) То есть такую, что для всяких элементов z_1 и z_2 из $\tilde{F}$ $\tilde{\rho}(z_1, z_2) \geqslant \rho_F(z_1, z_2)$.

4. Перейдем к построению регуляризованных минимизирующих последовательностей функционала $f[z]$. Полагаем, что

$$\inf_{z\in F} f[z] = f[z_0] = f_0.$$

Пусть $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал и $f_\delta[z]$ — параметрическое семейство функционалов (определенных для всех $\delta \geqslant 0$), аппроксимирующих функционал $f[z]$ на множестве $\widetilde{F}$ так, что

$$|f_\delta[z] - f[z]| \leqslant \delta\Omega[z].$$

Будем предполагать, что элемент z_0, минимизирующий функционал $f[z]$, принадлежит множеству $\widetilde{F}$.

Для всякого $\alpha > 0$ рассмотрим функционал

$$M^\alpha[z, f_\delta] = f_\delta[z] + \alpha\Omega[z],$$

определенный на всех $z \in \widetilde{F}$. Очевидно, что если $\delta < \alpha$, то $M^\alpha[z, f_\delta]$ ограничен снизу (на $\widetilde{F}$), так как

$$M^\alpha[z, f_\delta] \geqslant f[z] - \delta\Omega[z] + \alpha\Omega[z] \geqslant f_0.$$

Следовательно, существует точная нижняя грань

$$M_{\alpha,\delta} = \inf_{z\in\widetilde{F}} M^\alpha[z, f_\delta].$$

Будем говорить, что элемент $z_{\alpha,\delta}$ *почти минимизирует* функционал $M^\alpha[z, f_\delta]$, если

$$M^\alpha[z_{\alpha,\delta}, f_\delta] \leqslant M_{\alpha,\delta} + \alpha\xi,$$

где $\xi = \xi(\alpha)$ и $0 \leqslant \xi(\alpha) \leqslant \xi_0 = \text{const}$.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$ такое, что для всякого элемента $z_{\alpha,\delta}$, почти минимизирующего функционал $M^\alpha[z, f_\delta]$ с параметрами $\alpha \leqslant \alpha_0(\varepsilon)$ и $\delta/\alpha \leqslant q < 1$, выполняется неравенство*

$$\tilde{\rho}_{\widetilde{F}}(z_{\alpha,\delta}, z_0) \leqslant \varepsilon,$$

если метрика в $\widetilde{F}$ мажорантна по отношению к метрике пространства F.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что, каковы бы ни были последовательности чисел $\{\alpha_n\}$ и $\{\delta_n\}$, сходящиеся к нулю и такие, что для всякого n

$$\delta_n/\alpha_n \leqslant q < 1,$$

последовательность $\{z_{\alpha_n,\delta_n}\}$ элементов z_{α_n,δ_n}, почти минимизирующих соответственно функционалы $M^{\alpha_n}[z, f_{\delta_n}]$, сходится к элементу z_0. Очевидно, что

$$M^{\alpha_n}[z_{\alpha_n,\delta_n}, f_{\delta_n}] = f_{\delta_n}[z_{\alpha_n,\delta_n}] + \alpha_n\Omega[z_{\alpha_n,\delta_n}] \leqslant$$
$$\leqslant M_{\alpha_n,\delta_n} + \alpha_n\xi_0 \leqslant f_{\delta_n}[z_0] + \alpha_n\Omega[z_0] + \alpha_n\xi_0.$$

Пользуясь неравенствами

$$f_{\delta_n}[z] \geqslant f[z] - \delta_n\Omega[z],$$
$$f_{\delta_n}[z] \leqslant f[z] + \delta_n\Omega[z],$$

получаем

$$f[z_{\alpha_n,\delta_n}] - \delta_n\Omega[z_{\alpha_n,\delta_n}] + \alpha_n\Omega[z_{\alpha_n,\delta_n}] \leqslant$$
$$\leqslant f[z_0] + (\alpha_n + \delta_n)\Omega[z_0] + \alpha_n\xi_0. \quad (8;\ 1{,}2)$$

Так как

$$f[z_{\alpha_n,\delta_n}] \geqslant f[z_0],$$

то из (8; 1,2) имеем

$$(\alpha_n - \delta_n)\Omega[z_{\alpha_n,\delta_n}] \leqslant (\alpha_n + \delta_n)\Omega[z_0] + \alpha_n\xi_0.$$

Поскольку $\delta_n \leqslant q\alpha_n$, то, заменяя здесь δ_n на $q\alpha_n$, получаем

$$\Omega[z_{\alpha_n,\delta_n}] \leqslant \frac{1+q}{1-q}\Omega[z_0] + \frac{\xi_0}{1-q} = d_0.$$

Таким образом, все элементы последовательности $\{z_{\alpha_n,\delta_n}\}$ принадлежат компактному множеству

$$\widetilde{F}_{d_0} \equiv \{z;\ z \in \widetilde{F},\ \Omega[z] \leqslant d_0\}.$$

Далее, из (8; 1,2) следует, что

$$0 \leqslant f[z_{\alpha_n,\delta_n}] - f[z_0] \leqslant (\alpha_n + \delta_n)\Omega[z_0] + \alpha_n\xi_0, \quad (8;\ 1{,}3)$$

ибо

$$\delta_n - \alpha_n \leqslant \alpha_n q - \alpha_n = \alpha_n(q-1) < 0.$$

Так как α_n и δ_n стремятся к нулю при $n \to \infty$, то из (8; 1,3) следует, что последовательность $\{z_{\alpha_n,\delta_n}\}$ является минимизирующей для функционала $f[z]$. А поскольку она принадлежит компактному множеству $\widetilde{F}_{d_0}$, то она является регуляризованной и, следовательно, сходится к z_0. Теорема доказана.

5. Рассмотрим случай, когда $\tilde{F}$ — гильбертово пространство. Будем говорить, что $\tilde{F}$ *s-компактно и непрерывно выпукло вложено в* F, если:

а) сферы

$$S_r \equiv \{z;\ z \in \tilde{F}, \|z\| \leqslant r\}$$

компактны в F;

б) если последовательности $\{z_n^{(1)}\}$ и $\{z_n^{(2)}\}$ точек из F таковы, что $\rho_F(z_n^{(1)}, z_n^{(2)}) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\rho_F(z_n^{(1)}, \zeta_n) \to \to 0$ и $\rho_F(z_n^{(2)}, \zeta_n) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\zeta_n = 0{,}5 \cdot (z_n^{(1)} + + z_n^{(2)})$.

Если $\tilde{F}$ s-компактно вложено в F, и $\varphi(q)$ — неотрицательная возрастающая непрерывная функция, то, как указывалось выше (см. п. 2), функционал вида

$$\Omega_1[z] = \varphi(\|z\|^2)$$

является стабилизирующим.

Пусть $f_\delta[z]$ есть δ-аппроксимация функционала $f[z]$ по отношению к стабилизирующему функционалу

$$\Omega_1[z] = \varphi(\|z\|^2).$$

При $\delta < \alpha$ существует точная нижняя граница $M_{\alpha,\delta}^1$ функционала

$$M_1^\alpha[z, f_\delta] = f_\delta[z] + \alpha\Omega_1[z]$$

на множестве $\tilde{F}$, т. е.

$$M_{\alpha,\delta}^1 = \inf_{z \in \tilde{F}} M_1^\alpha[z, f_\delta].$$

Теорема 2. *Если $\tilde{F}$ — гильбертово пространство, s-компактно и непрерывно выпукло вложенное в F, то сует элемент $z_{\alpha,\delta} \in \tilde{F}$, минимизирующий функционал*

$$M_1^\alpha[z, f_\delta],$$

если $\delta/\alpha \leqslant q < 1$.

Доказательство. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность, минимизирующая функционал $M_1^\alpha[z, f_\delta]$, так что последовательность $\{M_1^\alpha[z_n, f_\delta]\}$ сходится к $M_{\alpha,\delta}^1$. Не ограничивая общности, можно считать, что она убывающая, так что для всякого n

$$M_1^\alpha[z_1, f_\delta] \geqslant f_\delta[z_n] + \alpha\Omega_1[z_n] \geqslant f[z_n] + (\alpha - \delta)\Omega_1[z_n].$$

Отсюда

$$\Omega_1[z_n] = \varphi(\|z_n\|^2) \leqslant \frac{1}{\alpha(1-q)}\{M_1^\alpha[z_1, f_\delta] - f[z_n]\}.$$

Так как $f[z_n] \geqslant f[z_0]$, где z_0 — элемент, на котором функционал $f[z]$ достигает своего наименьшего значения, то

$$\varphi(\|z_n\|^2) \leqslant \frac{1}{\alpha(1-q)}\{M_1^\alpha[z_1, f_\delta] - f[z_0]\} = C_1,$$

где константа C_1 не зависит от n. Отсюда следует, что для всякого n

$$\|z_n\| \leqslant C_2,$$

где C_2 — константа, не зависящая от n. Таким образом, $\{z_n\} \subset S_r$ при $r = C_2$. Поскольку сферы S_r, по условию, компактны в F, то последовательность $\{z_n\}$ также компактна в F. Не меняя обозначений, будем считать, что она сходится (в метрике F) к элементу $\bar{z} \in F$.

Покажем, что она сильно сходится к элементу $\tilde{z} \in \tilde{F}$. Для этого покажем, что она фундаментальна в $\tilde{F}$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon)$ такое, что для $n \geqslant n(\varepsilon)$ и любого $p > 0$

$$\|z_{n+p} - z_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Допустим, что это неверно. Тогда существует такое ε_0 и такие последовательности номеров $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$, где $m_k = n_k + p$, для которых

$$\|z_{m_k} - z_{n_k}\| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть

$$\xi_k = 0{,}5 \cdot (z_{m_k} - z_{n_k}).$$

Тогда

$$\zeta_k = 0{,}5 \cdot (z_{m_k} + z_{n_k}) = z_{n_k} + \xi_k = z_{m_k} - \xi_k.$$

Так как z_{n_k} и z_{m_k} — элементы минимизирующей последовательности $\{z_n\}$ функционала $M_1^\alpha[z, f_\delta]$ и последовательность

$$\{M_1^\alpha[z_n, f_\delta]\}$$

убывающая, то, очевидно, что для достаточно больших k

$$f_\delta[\zeta_k] + \alpha\varphi(\|\zeta_k\|^2) - \{f_\delta[z_{n_k}] + \alpha\varphi(\|z_{n_k}\|^2)\} \geqslant -\varepsilon'_{k},$$

$$f_\delta[\zeta_k] + \alpha\varphi(\|\zeta_k\|^2) - \{f_\delta[z_{m_k}] + \alpha\varphi(\|z_{m_k}\|^2)\} \geqslant \varepsilon''_{k},$$

где $\varepsilon'_k, \varepsilon''_k \to 0$ при $k \to \infty$.

В силу непрерывной выпуклости вложения $\widetilde{F}$ в F

$$\lim_{k\to\infty} f_\delta[z_{n_k}] = \lim_{k\to\infty} f_\delta[z_{m_k}] = \lim_{k\to\infty} f_\delta[\zeta_k],$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\|\zeta_k\|^2) - \varphi(\|z_{n_k}\|^2) \geqslant -\bar{\varepsilon}'_{k}, \\ &\varphi(\|\zeta_k\|^2) - \varphi(\|z_{m_k}\|^2) \geqslant \bar{\varepsilon}''_{k}, \end{aligned}\right. \qquad (8;\ 1{,}4)$$

где $\bar{\varepsilon}'_k, \bar{\varepsilon}''_k \to 0$ при $k \to \infty$.

В силу того, что $\varphi(\|z\|^2)$ — возрастающая функция, равномерно непрерывная в области $\|z\| \leqslant C_2$, из (8; 1,4) получаем

$$\{\|z_{n_k}\|^2 + 2(z_{n_k}, \xi_k) + \|\xi_k\|^2\} - \|z_{n_k}\|^2 \geqslant -\beta'_{k},$$

$$\{\|z_{m_k}\|^2 - 2(z_{m_k}, \xi_k) + \|\xi_k\|^2\} - \|z_{m_k}\|^2 \geqslant -\beta''_{k},$$

где $\beta'_k, \beta''_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Отсюда следует, что

$$2\|\xi_k\|^2 - 2(z_{m_k} - z_{n_k}, \xi_k) = -2\|\xi_k\|^2 \geqslant -(\beta'_k + \beta''_k),$$

или

$$\|\xi_k\|^2 \leqslant 0{,}5\cdot(\beta'_k + \beta''_k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

что противоречит предположению, согласно которому

$$\|\xi_k\| = 0{,}5\cdot\|z_{m_k} - z_{n_k}\| \geqslant 0{,}5\cdot\varepsilon_0.$$

Итак, $\{z_n\}$ является фундаментальной последовательностью в $\widetilde{F}$ и сильно сходится к некоторому элементу $\tilde{z} \in \widetilde{F}$. Так как метрика в $\widetilde{F}$ мажорантна по отношению к метрике в F, то $\tilde{z} = \bar{z}$. Очевидно, что элемент $z_{\alpha,\delta} = \bar{z} = \tilde{z}$ и есть искомый элемент, на котором функционал $M_1[z, f_\delta]$ достигает своего наименьшего значения. Теорема доказана.

§ 2. Устойчивый метод решения задач оптимального управления

1. Пусть дана система уравнений

$$dx/dt = F(t, x, u), \tag{8; 2,1}$$

где $x(t) = \{x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\}$ — вектор-функция n-мерного пространства, определенная на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \leqslant T$, а $u(t) = \{u^1(t), u^2(t), \ldots, u^m(t)\}$ — управляющая вектор-функция m-мерного полного метрического пространства U. Будем рассматривать решения системы (8; 2,1), удовлетворяющие условиям

$$x(t_0) = x_0, \tag{8; 2,2}$$

где x_0 — заданный вектор.

Ниже мы будем рассматривать класс задач на оптимальное управление, в которых целевой функционал зависит лишь от фазовых переменных.

Пусть $f[x]$ — заданный неотрицательный непрерывный функционал, определенный на решениях задачи (8; 2,1), (8; 2,2). Так как последние зависят от $u, x = = x_u(t)$, то $f[x_u(t)] = \Phi[u]$ является функционалом, определенным на U. Будем рассматривать задачу нахождения управления $u_0(t)$, минимизирующего функционал $\Phi[z]$ (задача U). Такое управление будем называть оптимальным. Выше отмечалось, что эта задача является некорректно поставленной. Допустим, что в пространстве U существует оптимальное управление $u_0(t)$.

В настоящем параграфе описывается устойчивый способ приближенного нахождения $u_0(t)$. Это делается с помощью метода регуляризации, следуя [181]. Для получения такого способа достаточно, как отмечалось выше, указать алгоритм построения минимизирующих последовательностей $\{u_n(t)\}$, сходящихся к функции $u_0(t)$.

2. Рассмотрим сглаживающий функционал

$$B^\alpha[u] = \Phi[u] + \alpha\Omega[u],$$

где $\Omega[u]$ — стабилизирующий функционал. Функционал $B^\alpha[u]$ неотрицательный, поэтому существует его нижняя грань B_0^α на U,

$$B_0^\alpha[u] = \inf_{u \in U} B^\alpha[u].$$

Пусть U_1 — подмножество множества U, допускающее метризацию $\rho_1(u_1, u_2)$, мажорантную по отношению к метрике пространства U.

Полагаем $\Omega_1[u] = \rho_1^2(u, \bar{u}_0)$, $B_1^\alpha[u] = \Phi[u] + \alpha\Omega_1$ и $B_{01}^\alpha = \inf\limits_{u \in U} B_1^\alpha[u]$, где $\bar{u}_0$ — какой-нибудь фиксированный элемент из U_1. Пусть $\{\alpha_n\}$ — убывающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю ($\alpha_n \to 0$) и $\{u_{\alpha_k}(t)\}$ — последовательность управлений из U_1. Справедлива

Теорема 3. *Если существует единственное оптимальное управление $u_0(t)$ задачи U, принадлежащее множеству U_1, то последовательность функций $\{u_{\alpha_k}(t)\}$, удовлетворяющих неравенствам*

$$B^{\alpha_k}[u_{\alpha_k}(t)] \leqslant B_{01}^{\alpha_k} + \alpha_k C$$

где C — константа, не зависящая от α, сходится к $u_0(t)$ в метрике U.

Если U_1 — гильбертово пространство, то справедлива

Теорема 4. *Если U_1 (с метрикой $\rho_1(u_1, u_2)$) s-компактно и непрерывно выпукло вложено в U, то существует элемент $u_\alpha(t) \in U_1$ минимизирующий $B_1^\alpha[u]$.*

Доказательства этих теорем проводятся совершенно аналогично доказательствам соответственно теорем 1 и 2 § 1, поэтому мы не будем их приводить.

Очевидно, из этих теорем непосредственно следует устойчивый метод приближенного нахождения оптимального управления.

Пример. Рассмотрим модельную задачу о вертикальном подъеме ракеты-зонда в однородной атмосфере на максимальную высоту [36, 37], для которой известно точное решение [136].

Вертикальное движение тела переменной массы $m(t)$ в однородной атмосфере описывается системой уравнений

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m(t)}[au(t) - cv^2(t)] - g,$$

$$\frac{dm}{dt} = -u(t)$$

с начальными условиями: $m(0) = m_0$, $v(0) = v_0$. Здесь $m(t)$ — переменная масса тела ($m_0 \geqslant m(t) \geqslant \mu$, μ — масса корпуса ракеты), $v(t)$ — скорость тела, $u(t)$ — управляющая функция, равная расходу массы (горючего) в секунду во время полета; a, c, g — постоянные, $a = 2500$ м/сек — относительная скорость выброса газов, $c = 0{,}2 \cdot 10^{-7}$ кг·сек/м — обобщенный баллистический коэффициент сопротивления воздуха, $g = 9{,}81$ м/сек^2 — ускорение силы тяжести.

Даже сравнительно грубые приближенные решения этой задачи имеют резкий всплеск в начальный момент ($t = 0$), т. е. имеют δ-образный характер. Поэтому естественно искать решение в виде $u_1 = A\delta(t) + u(t)$, где A — константа, $\delta(t)$ — δ-функция. При этом искомая функция $u(t)$ будет непрерывной и достаточно гладкой функцией. Численное нахождение функции $u(t)$ будет много проще, чем нахождение функции с δ-образной особенностью. Такое представление решения означает, что для достижения наибольшей высоты подъема выгоднее всего сжечь некоторое количество горючего мгновенно и что по достижении определенной скорости v_1^* должен начаться постепенный расход массы горючего. Очевидно, что оптимальная управляющая функция $\tilde{u}(t)$ должна быть положительной на некотором промежутке $0 \leqslant t \leqslant T_1^*$ и равной нулю для $t > T_1^*$. Требуется определить $\tilde{u}(t)$ и параметры v_1^* и T_1^*.

Таким образом, надо рассматривать двухпараметрический целевой функционал $f[u, v_1, T_1]$, для которого из условия его минимума надо найти $\tilde{u}(t)$ и v_1^*, T^*.

Согласно формуле Циолковского величина массы горючего m_1, которую надо израсходовать мгновенно для получения скорости v_1, определяется из соотношения

$$v_1 = v_0 + a\left|\ln\left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right)\right|.$$

По m_1 определяется и A. В дальнейшем полагаем $v_0 = 0$, $m_0 = 1$.

Высота подъема ракеты $H = H[v(u)]$ равна интегралу $\int\limits_0^T v(t)\,dt$, где T — момент времени, для которого скорость становится равной нулю, $v(T) = 0$. Ее можно представить в виде $H = H_1 + \Delta H$, где

$$H_1 = \int\limits_0^{T_1} v(t)\,dt, \quad \Delta H = \frac{\mu}{2c}\ln\left(1 + \frac{v_\mu^2 c}{\mu g}\right),$$

$v_{\text{и}}$ — скорость ракеты в момент окончания горения топлива $(t = T_1)$.

В качестве целевого функционала берем

$$f[u, v_1, T_1] = 1 - \frac{H[v(u)]}{H_0},$$

где H_0 — число, близкое к искомой максимальной высоте. Задача его минимизации неустойчива. Решаем ее методом регуляризации.

Для нахождения приближенного (регуляризованного) решения берем стабилизирующий функционал $\Omega[u]$ вида

$$\Omega[u] = \int_0^T (u'')^2\, dt.$$

Задача сводится к минимизации функционала

$$\Phi^\alpha[u_1, v_1, T_1] = f[u, v_1, T_1] + \alpha\Omega[u]$$

при дополнительных условиях $u(t) \geqslant 0, \int_0^T u(t)\, dt = 1 - \mu$.

Процедура нахождения приближенного решения этой задачи при фиксированном α такова: задаем последовательность пар чисел $\{v_1^{(n)}, T_1^{(n)}\}$; для каждой такой пары $v_1^{(n)}, T_1^{(n)}$ находим функцию $u_n^\alpha(t)$, минимизирующую функционал $\Phi^\alpha[u, v_1^{(n)}, T_1^{(n)}]$. Затем из последовательности $\{v_1^{(n)}, T_1^{(n)}\}$ находим такую пару v_1^*, T_1^*, на которой функционал $\Phi^\alpha[u_n^\alpha(t), v_1^{(n)}, T_1^{(n)}]$ достигает минимума.

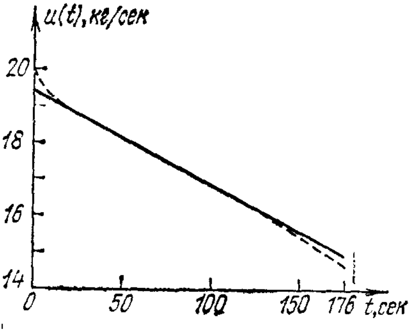

Рис. 18.

При больших значениях α (порядка 10^5) минимум функционала $\Phi^\alpha[u, v_1, T_1]$ достигается на функциях, близких к константам. При малых значениях α $(\alpha < 0,1)$ решение сильно неустойчиво к малым случайным ошибкам вычислений. При $\alpha = 10^3$ и $v_1 = 9931,721$ м/сек, $T_1 = 176$ сек, $\mu = 0,7$ получается приближенное оптимальное управление, изображенное на рис. 18 пунктиром;

сплошная линия представляет график точного оптимального управления. При этом H и H_1 имеют значения, содержащиеся в таблице

Точное решение	Приближенное решение
$H_1 = 0{,}16507 \cdot 10^7$ м $H = 0{,}51496 \cdot 10^7$ м	$H_1 = 0{,}16514 \cdot 10^7$ м $H = 0{,}51497 \cdot 10^7$ м

Минимизация функционала $\Phi^\alpha[u, v_1, T_1]$ производилась методом проектирования градиента.

3. Рассмотрим одну из практически важных задач, приводящих к минимизации функционалов.

Обратная задача теории антенн. Рассмотрим линейную антенну, представляющую собой прямолинейный стержень длины $2l$. Вдоль стержня направим координатную ось переменной z.

Пусть в стержне с помощью специальных устройств задан ток с амплитудой $j(z)$, изменяющийся со временем по закону $e^{i\omega t}$. Этот ток создает в окружающем стержень пространстве электромагнитное поле, обладающее осевой симметрией относительно оси z. Напряженности электрического и магнитного полей, созданных током $j(z)$, и интенсивность излучения антенны определяются этим током, т. е. являются функционалами $A_E[j]$, $A_H[j]$ и $A_M[j]$.

Если в плоскости Q, проходящей через ось стержня, из середины стержня, как из центра, провести окружность достаточно большого радиуса R (много большего длины волны λ и длины стержня $2l$), то в каждой точке этой окружности вектор напряженности магнитного поля будет иметь одинаковое направление, перпендикулярное к плоскости Q. Величина этого вектора будет функцией радиуса R и угла θ между осью z и направлением из центра стержня на точку приема, а относительные его значения (отнесенные, например, к его значению в одной из точек окружности) будут функцией $P(\theta)$ только угла θ, т. е.

$$A[j] = P(\theta).$$

Функция $P(\theta)$ называется *диаграммой направленности антенны* (по напряженности магнитного поля; аналогично определяется диаграмма направленности антенны по напряженности электрического поля и по потоку излучения).

В случае более сложной конфигурации антенны диаграмма направленности $A[\vec{j}]$ будет, вообще говоря, векторной функцией двух сферических координат, θ и φ, точки приема:

$$A[\vec{j}] = \vec{P}(\theta, \varphi).$$

В случае линейной антенны длины $2l$ связь между током $j(z)$ и диаграммой направленности $P(\theta)$ выражается формулой (см. [186])

$$A[j] \equiv \sin\theta \int_{-l}^{l} j(z)\, e^{-ikz\cos\theta}\, dz = P(\theta), \qquad (8;\ 2{,}3)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, c — скорость света.

Прямая задача теории антенны состоит в определении диаграммы направленности $\vec{P}(\theta, \varphi)$ по заданному току $\vec{j}(M)$, т. е. в вычислении функции $\vec{P}(\theta, \varphi) = A[\vec{j}]$.

Обычно под обратной задачей теории антенн понимают задачу нахождения распределения тока $\vec{j}(M)$, порождающего заданную диаграмму направленности $\vec{P}(\theta, \varphi)$. Для линейной антенны такая задача состоит в решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода (8; 2,3) относительно $j(z)$. Как известно, эта задача является некорректно поставленной. Следует отметить, что уравнение (8; 2,3) имеет решение лишь для узкого класса правых частей $P(\theta)$, только для *реализуемых* диаграмм направленности. Заданные же диаграммы обычно не принадлежат этому классу. Кроме того, в практике на распределение тока $\vec{j}(M)$ накладывается ряд требований и ограничений (например, ограничение величины тока и его производной, минимум реактивной мощности и др.), которые не представляется возможным учесть при решении уравнения (8; 2,3). Дополнительные условия накладываются и на диаграмму направленности. К ним относятся, например, требование близости к заданной диаграмме направленности, отличной от нуля в фиксированном интервале углов и равной нулю вне его (это отвечает случаю строго направленной радиопередачи), максимальное значение в главном лепестке, минимум энергии в боковых лепестках и др. Поэтому целесообразно иначе поставить обратную задачу теории антенн.

Пусть $\Phi_i[\vec{P}(\theta, \varphi)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— функционалы, такие, что i-й функционал определен на функциях $\vec{P}(\theta, \varphi)$, удовлетворяющих i-му требованию (условию), накладываемому на диаграммы распределения.

Пусть $\Psi_k[\vec{j}(M)]$, $k = 1, 2, \ldots, m$,— такие функционалы, что каждый из них определен на функциях $\vec{j}(M)$, удовлетворяющих условию, накладываемому на распределение токов. Эти функционалы характеризуют сложность конструкции.

Рассмотрим функционалы $\Psi[\vec{j}] = \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k \Psi_k[\vec{j}]$ и $\Phi[\vec{P}] = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \Phi_i[\vec{P}]$, ($\gamma_k$ и β_i — положительные числа), в которых весовые множители γ_k и β_i выбираются согласованными с значимостью и влиянием соответствующих условий, накладываемых на распределение тока и на диаграммы направленности. Функционал $\Phi[\vec{P}]$ определен на функциях, удовлетворяющих всем требованиям (условиям), накладываемым на диаграммы направленности. Функционал $\Psi[\vec{j}]$ определен на функциях $\vec{j}(M)$, удовлетворяющих всем условиям, накладываемым на распределения токов.

Поэтому, следуя [186], приближенным решением обратной задачи теории антенн будем называть ток $\vec{j}(M)$, реализующий минимум функционала Φ при условии $\Psi \leqslant \Psi_0$, или функционала

$$\Phi[A[\vec{j}]] + \delta\Psi[\vec{j}],$$

где δ — числовой множитель, характеризующий влияние ограничений на распределение тока. Задачи минимизации таких функционалов рассматривались выше.

Определение оптимального набора параметров контролируется обычно путем проведения вычислительного эксперимента.

Рассмотренная задача является типичной задачей проектирования оптимальных систем (конструкций).

Глава IX
УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ (ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ)

Многие задачи оптимального планирования и математического программирования (линейного и нелинейного) являются неустойчивыми: малым изменениям исходных данных могут отвечать большие (в том числе и сколь угодно большие) изменения решения. В таких задачах мы фактически имеем дело с недоопределенностью решения. Это показывает неполноту постановки задачи. Уточнение постановки задачи имеет существенное прикладное значение, так как решение таких задач лежит в основе применения математического аппарата к вопросам планирования (к разработке оптимальных планов).

Существенно важным является разработка методов нахождения устойчивых к малым изменениям исходных данных «решений» таких задач.

Настоящая глава и посвящена этим вопросам. В § 1 обсуждается постановка задач оптимального планирования и математического программирования (в том числе и линейного), показывается их неустойчивость. Вводится понятие нормального решения. В последующих параграфах рассматриваются вопросы существования и единственности решения и методы нахождения приближенных решений, устойчивых к малым изменениям исходных данных, основанные на регуляризации (см. гл. II).

§ 1. О постановке задач оптимального планирования и математического программирования

1. Приведем классическую постановку типичной задачи оптимального планирования.

Пусть z_j — количество выпускаемых изделий j-го наименования, $1 \leqslant j \leqslant n$; α_j – максимально возможное число изделий j-го наименования; c_j — суммарная трудоемкость для j-го изделия по всем основным группам оборудования. Тогда скалярное произведение $\varphi_1(z) = (c, z)$ векторов $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ и $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ характеризует загрузку оборудования при плане z выпуска изделий. Пусть, далее, b_i — фонды времени i-й группы оборудования, $1 \leqslant i \leqslant m$; a_{ij} — трудоемкость для j-го изделия на i-й группе оборудования.

Обозначим через G множество векторов z (планов), удовлетворяющих условиям: $b - Az \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant \alpha$, где α и b — векторы $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $A \equiv \{a_{ij}\}$ — матрица с элементами a_{ij}.

Задача определения оптимального плана $\bar{z}$ может состоять в нахождении такого вектора $\bar{z}$ из множества векторов (планов) G, для которого загрузка оборудования будет максимальной, т. е.

$$\max_{z \in G} \varphi_1(z) = \varphi_1(\bar{z}).$$

Функцию $\varphi(z)$ называют *целевой функцией* задачи.

По данным одного из заводов хорошо известным симплексным методом были рассчитаны с разной точностью оптимальные квартальные планы, отвечающие некоторому набору исходных данных [187]. Результаты расчетов приведены в таблице 1, где римскими цифрами пронумерованы варианты решений, отвечающие различным исходным данным, арабскими — компоненты решений (векторов $\bar{z}$). Из таблицы видно, что для сравнительно близких оптимальных значений целевой функции $\varphi(\bar{z})$ (при отклонениях порядка 1%) количество изделий, подлежащих выпуску по этим оптимальным планам, по отдельным наименованиям колеблется в пределах нескольких сотен. Таким образом, эта задача является неустойчивой.

2. Задачи оптимального планирования являются частным случаем задач линейного программирования, обобщением которых являются задачи математического программирования.

Пусть $\mathbf{R}^n$ — n-мерное пространство векторов $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $g(z)$ и $h(z)$ — заданные вектор-функции, определенные на $\mathbf{R}^n$:

$$g(z) = \{g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z)\},$$
$$h(z) = \{h_{p+1}(z), h_{p+2}(z), \ldots, h_m(z)\} \quad (p < m),$$

где $g_i(z)$ и $h_j(z)$ — скалярные функции.

Таблица 1

$\bar{z}$	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	614	590	596	765	638	507	469	446	373	642	383
2	638	634	634	684	644	611	604	548	583	444	581
3	418	424	423	376	412	446	555	479	479	479	479
4						49	49				
5	66			36		105		66		232	238
6		36					60		106		
7								105			
10			56								
11											
12	296	297	294	314	298	293	295	291	255	286	237
13	50	49	50		47	61	59	69	68	68	78
14									54		72
$\varphi(z)$ в тыс. руб.	2391	2390	2390	2388	2387	2382	2380	2376	2373	2371	2370

Обозначим через G множество векторов z пространства $\mathbf{R}^n$, для которых $g(z) \geqslant 0$ и $h(z) = 0$, т. е.

$$G \equiv \{z;\ g(z) \geqslant 0, \quad h(z) = 0\}.$$

Пусть $\varphi(z)$ — заданная скалярная функция.

Задача математического программирования состоит в отыскании вектора $\tilde{z}$ из $\mathbf{R}^n$, минимизирующего функцию $\varphi(z)$ на множестве G, т. е. такого, что

$$\varphi(\tilde{z}) = \min_{z \in G} \varphi(z). \qquad (9;\ 1,1)$$

Функция $\varphi(z)$ называется *целевой функцией* задачи (9; 1,1).

Если в задаче математического программирования функции $\varphi(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ — линейные, то она называется задачей *линейного программирования.* Задачи оптимального планирования, как правило, также являются задачами линейного программирования.

3. На практике информация о функциях $\varphi(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ носит приближенный характер. Например, эти функции известны с погрешностью и, следовательно, вместо $\varphi(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ мы можем брать любые функции $\varphi_\delta(z)$, $g_\delta(z)$ и $h_\delta(z)$, для которых

$$\|\varphi_\delta(z) - \varphi(z)\| \leqslant \delta, \quad \|g(z) - g_\delta(z)\| \leqslant \delta,$$

$$\|h_\delta(z) - h(z)\| \leqslant \delta\,^{*)}.$$

При этом выбор функций $\varphi_\delta(z)$, $g_\delta(z)$ и $h_\delta(z)$ из множества

$$Q_\delta(\varphi, g, h) \equiv$$
$$\equiv \{(\varphi_\delta, g_\delta, h_\delta);\ \|\varphi_\delta - \varphi\| \leqslant \delta,\ \|g_\delta - g\| \leqslant \delta,\ \|h_\delta - h\| \leqslant \delta\},$$

имеет, как правило, случайный характер.

Таким образом, о решении исходной задачи (9; 1,1) можно судить лишь по решению приближенной задачи:

$$\min_{z \in G_\delta} \varphi_\delta(z), \qquad (9;\ 1,2)$$

---

*) Для простоты записи величина δ взята одинаковой для всех функций φ, g, h. Фактически оценку погрешности определяют векторы $\delta' = (\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_p, \delta'_{p+1}, \ldots, \delta'_m)$ и $\delta'' = (\delta''_1, \delta''_2, \ldots, \delta''_n)$ при соответствующем выборе их норм.

где $G_\delta \equiv \{z;\ g_\delta(z) \geqslant 0,\ h_\delta(z) = 0\}$, случайно выбранной из класса приближенных задач, определяемых Q_δ.

4. Пусть $H_\delta(\varphi, g, h)$ есть совокупность решений z_δ задач вида (9; 1,2) для всех $(\varphi_\delta, g_\delta, h_\delta) \in Q_\delta$. Задача (9; 1,1) называется *устойчивой*, если

$$\Delta_\delta = \sup_{z'_\delta, z''_\delta \in H_\delta} \|z'_\delta - z''_\delta\| \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Если же существует такое число $B > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся две тройки функций $(\varphi'_\delta, g'_\delta, h'_\delta)$ и $(\varphi''_\delta, g''_\delta, h''_\delta)$ из Q_δ и соответствующие им решения задачи (9; 1,2) z'_δ и z''_δ, для которых

$$\|z'_\delta - z''_\delta\| \geqslant B,$$

то задача (9; 1,1) называется *неустойчивой*.

Неустойчивые задачи оптимального планирования и математического программирования естественно называть также *некорректно поставленными*. Очевидно, что точные решения z'_δ и z''_δ некорректно поставленной задачи (9; 1,1) с приближенными исходными данными $(\varphi'_\delta, h'_\delta, g'_\delta)$ и $(\varphi''_\delta, h''_\delta, g''_\delta)$ не несут в себе достаточной информации о решении исходной задачи.

Таким образом, точные решения задач такого рода не могут служить надежным способом решения задач оптимального планирования с приближенными исходными данными.

Такая ситуация часто возникает в вычислительной процедуре при использовании многих методов решения задач математического программирования. Отметим, что при этом, несмотря на большие различия решений z'_δ и z''_δ, значения целевых функций $\varphi'_\delta(z'_\delta)$ и $\varphi''_\delta(z''_\delta)$ могут мало отличаться друг от друга. Только что сказанное находит отражение в результатах, содержащихся в таблице I.

Однако приводимый ниже пример показывает, что в задачах линейного программирования с приближенными исходными данными, сколь угодно близкими к точным, минимальные значения целевого функционала (целевой функции) также могут различаться как угодно сильно.

П р и м е р. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. Пусть требуется найти минимум функционала $\Phi(y) = y$ на части прямой $y = \lambda_0 x + y_0$, расположенной в области $\{y \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$. Здесь λ_0 и y_0 — заданные числа и $y_0 > 0$.

Пусть $\lambda_0 = 0$ и вместо λ_0 мы имеем число λ_δ такое, что $|\lambda_\delta - \lambda_0| \leqslant \delta$. Рассмотрим два случая.

1) $\lambda_\delta > 0$. В этом случае вместо прямой $y = y_0$ (так как $\lambda_0 = 0$) мы имеем прямую l_1, $y = \lambda_\delta x + y_0$ (рис. 19).

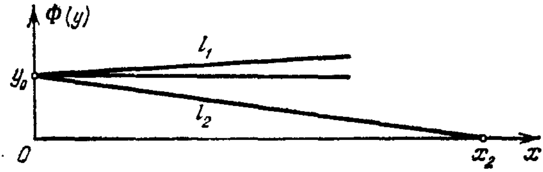

Рис. 19.

Минимум функционала $\Phi(y)$ на части прямой l_1, расположенной в области $\{y \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$, достигается в точке $(0;\ y_0)$, т. е. при $x = 0$, и равен y_0.

2) $\lambda_\delta < 0$. В этом случае вместо прямой $y = y_0$ мы имеем прямую l_2, $y = \lambda_\delta x + y_0$ (см. рис. 19). Минимум функционала $\Phi(y)$ на части прямой l_2, расположенной в области $\{y \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$, достигается в точке $(x_2;\ 0)$, т. е. при $x = x_2$, и равен нулю. При $\delta \to 0$ $\lambda_\delta \to 0$, а $x_2 \to \infty$. Таким образом, эта задача неустойчива. При этом неустойчива как задача минимизации функционала $\Phi(y)$ по аргументу, так и задача минимизации по значению целевого функционала $\Phi(y)$.

§ 2. Задачи оптимального планирования. Существование решений и единственность

1. Пусть заданы матрица $A \equiv \{a_{ij}\}$ с элементами a_{ij} и векторы $\bar{u} = \{\bar{u}_i\}$ и $c = \{c_j\}$, $c_j \geqslant 0$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Будем рассматривать следующую задачу оптимального планирования.

На множестве G элементов (векторов) $z = \{z_j\}$ n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условиям

$$Az = \bar{u}, \tag{9; 2,1}$$

$$z_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{9; 2,2}$$

найти элемент (вектор) $\bar{z} = \{\bar{z}_j\}$, минимизирующий функцию

$$\varphi(z) = (c, z) = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j, \qquad (9;\ 2,3)$$

т. е. найти $\bar{z}$, для которого

$$\varphi(\bar{z}) = \min_{z \in G} \varphi(z). \qquad (9;\ 2,4)$$

Очевидно, что это задача линейного программирования. Здесь $g(z) = z$, $h(z) = Az - \bar{u}$.

2. Если условие (система уравнений) $Az = \bar{u}$ имеет линейно зависимые строки, то задача (9; 2,1) — (9; 2,3), как правило,— некорректно поставленная. Обычно делается предположение, что строки задаваемых условий линейно независимы. Однако это предположение при приближенном задании исходных данных практически непроверяемо. Поэтому в дальнейшем мы не будем делать предположений о линейной независимости задаваемых условий и будем иметь дело с некорректно поставленными задачами вида (9; 2,4).

Докажем существование решения таких задач.

Теорема 1. *Если условия* (9; 2,1) *и* (9; 2,2) *совместны, то задача* (9; 2,1) — (9; 2,3) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Пусть $c_j > 0$ для $1 \leqslant j \leqslant j_0$ и $c_j = 0$ для $j_0 < j \leqslant n$. Обозначим через R_1 множество векторов пространства $\mathbf{R}^n$, для которых выполняется условие (9; 2,2), т. е.

$$R_1 \equiv \{z;\ z_j \geqslant 0\},\quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть R_2 есть множество векторов пространства $\mathbf{R}^n$, для которых выполняются условия (9; 2,1) и (9; 2,2), т. е.

$$R_2 \equiv \{z;\ z \in R_1,\ Az = u\}.$$

По предположению о совместности условий (9; 2,1) и (9; 2,2) множество R_2 не пусто.

Пусть φ_0 — нижняя грань значений целевой функции $\varphi(z)$ (9; 2,3) на множестве R_2 и $\{z^{(k)}\}$ — минимизирующая последовательность точек из R_2, т. е. такая, что $\varphi(z^{(k)}) \to \varphi_0$ при $k \to \infty$. Очевидно, можно полагать, что для всякого $k > 1$ $\varphi(z^{(k)}) \leqslant \varphi(z^{(k-1)})$.

Так как

$$\varphi(z^{(k)}) \leqslant \varphi(z^{(k-1)}),$$

то для $1 \leqslant j \leqslant j_0$

$$c_j z_j^{(k)} \leqslant \varphi\left(z^{(k)}\right) \leqslant \varphi\left(z^{(1)}\right).$$

Следовательно, для $1 \leqslant j \leqslant j_0$ координаты $z_j^{(k)}$ вектора $z^{(k)}$ ограничены:

$$z_j^{(k)} \leqslant \frac{\varphi\left(z^{(1)}\right)}{c_j}.$$

Каковы бы ни были положительные числа d_j, множество точек пространства $\mathbf{R}^{j_0}$, для которых

$$0 \leqslant z_j \leqslant d_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0,$$

компактно в $\mathbf{R}^{j_0}$. Последовательность $\left\{\tilde{z}^{(k)}\right\}$ векторов

$$\tilde{z}^{(k)} = \left\{z_j^{(k)}\right\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

пространства $\mathbf{R}^{j_0}$ принадлежит параллелепипеду с ребрами

$$d_j = \frac{\varphi\left(z^{(1)}\right)}{c_j}.$$

Следовательно, из нее можно выделить сходящуюся к некоторому вектору $\tilde{z} \in \mathbf{R}^{j_0}$ подпоследовательность. Не изменяя обозначений, полагаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{z}^{(k)} = \tilde{z} = \left\{\tilde{z}_j\right\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0.$$

Так как $\varphi(z)$ зависит только от первых j_0 координат вектора z $(c_j = 0$ при $j > j_0)$, то $\varphi(\tilde{z}) = \varphi_0$.

Рассмотрим систему уравнений относительно z'':

$$A''z'' = -A'z' + \bar{u}, \qquad (9;\ 2{,}5)$$

где

$$z' = \{z_j\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0, \quad z'' = \{z_j\}, \quad j_0 < j \leqslant n,$$
$$A' = \{a_{ij}\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0, \quad A'' = \{a_{ij}\}, \quad j_0 < j \leqslant n,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Так как система

$$A''z'' = \bar{u} - A'\tilde{z}^{(k)}$$

совместна (пусть $z'' = z_2^{(k)}$ — ее решение) и вектор $u = \bar{u} - A'\tilde{z}^{(k)}$ удовлетворяет всем линейным соотношениям, которым удовлетворяют строки матрицы A'', то система (9; 2,5) также совместна. Она имеет не равное нулю решение, для которого $z_j \geqslant 0$ $(j_0 < j \leqslant n)$. В самом деле, если это неверно, то линейное многообразие элементов z'', для которых $A''z'' = u$, отстоит от множества $R_1'' \equiv \{z''; \ z_j \geqslant 0, \ j_0 < j \leqslant n\}$ на конечном положительном расстоянии. В этом случае многообразия, определяемые соотношениями

$$A''z'' = \bar{u} - A'\tilde{z}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

при достаточно больших k, также отстоят от R_1'' на конечных расстояниях. Но это противоречит тому, что $\tilde{z}^{(k)} \in R_1$.

Беря любое не равное нулю решение системы (9; 2,5) $z'' \in R_1''$, для которого $z_j'' \geqslant 0$ $(j_0 < j \leqslant n)$, получим, что вектор

$$\tilde{\tilde{z}} = \left(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_{j_0}, z''_{j_0+1}, \ldots, z''_n\right)$$

удовлетворяет условиям (9; 2,1) и (9; 2,2) и $\varphi(\tilde{\tilde{z}}) = \varphi_0$. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что решение задачи (9; 2,1) — (9; 2,3) может быть и не единственным.

Пример. Пусть $\varphi(z) = z_3$, а условие (9; 2,1) имеет вид

$$z_1 - z_2 = 0.$$

Очевидно, что минимум функции $\varphi(z) = z_3$ на множестве $R_1 \equiv \{z; \ z_j \geqslant 0; \ j = 1, 2, 3\}$ равен нулю и он достигается на точках полупрямой $z_1 \geqslant 0$, определяемой уравнениями

$$z_2 = z_1, \quad z_3 = 0.$$

3. При наличии множества решений для определенности задачи надо наложить дополнительные условия на искомое решение.

Пусть речь идет о задачах оптимального планирования. Предположим, что работа выполняется в соответствии с планом $z^{(0)}$ и его надо изменить в связи с тем, что изменились исходные данные. Новым исходным данным соответствуют другие оптимальные планы. Естественно выбрать тот из них, который наименее уклоняется от первоначального плана $z^{(0)}$. Подобный критерий выбора будет связан с минимумом затрат на организационные перестройки, если они не были учтены в самой постановке задачи. Мера уклонения нового и старого планов, $\bar{z}^{(0)}$ и $z^{(0)}$, выбирается как взвешенное квадратическое уклонение

$$\|\bar{z}^{(0)} - z^{(0)}\| = \left\{\sum_j p_j \left(\bar{z}_j^{(0)} - z_j^{(0)}\right)^2\right\}^{1/2}$$

или, вообще, как положительно определенная квадратичная форма. Имея это в виду, введем следующее

Определение. Пусть дан некоторый вектор $z^{(0)} \in \mathrm{R}^n$. Вектор $\bar{z}^{(0)}$ будем называть *нормальным решением* задачи (9; 2,1)—(9; 2,3) (по отношению к $z^{(0)}$), если

$$\|\bar{z}^{(0)} - z^{(0)}\| \leqslant \|z - z^{(0)}\|,$$

где z — любое решение этой задачи. Если решение задачи (9; 2,1)—(9; 2,3) определено однозначно, то оно, очевидно, совпадает с нормальным. Если задача имеет не одно решение, то существование нормального решения очевидно, так как множество H, на элементах (векторах) которого достигается минимум функции $\varphi(z)$, замкнуто, поскольку оно является общей частью трех замкнутых множеств:

$$\{z;\ Az = \bar{u}\}, \quad R_1 \equiv \{z;\ z_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n\},$$
$$\{z;\ \varphi(z) = \varphi_0\}.$$

Теорема 2. *Нормальное решение задачи* (9; 2,1)—(9; 2,3) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют два различных нормальных решения задачи, $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$. Каково бы ни было число $\alpha > 0$, вектор

$$\hat{z} = \alpha z^{(1)} + \beta z^{(2)}, \quad \beta = 1 - \alpha$$

удовлетворяет условию (9; 2,1) (в силу его линейности) и (9; 2,2). Кроме того,

$$\varphi(\hat{z}) = \alpha\varphi(z^{(1)}) + \beta\varphi(z^{(2)}) = \alpha\varphi_0 + \beta\varphi_0 = \varphi_0.$$

Так как $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ — нормальные решения, то

$$\|z^{(1)} - z^{(0)}\| = \|z^{(2)} - z^{(0)}\|.$$

С другой стороны, при $\alpha = 0{,}5$

$$\hat{z} = 0{,}5(z^{(1)} + z^{(2)}),$$

$$\|\hat{z} - z^{(0)}\|^2 = \|z^{(1)} - z^{(0)}\|^2 - \|0{,}5(z^{(1)} - z^{(2)})\|^2.$$

Таким образом,

$$\|\hat{z} - z^{(0)}\|^2 < \|z^{(1)} - z^{(0)}\|^2,$$

что противоречит тому, что $z^{(1)}$ есть нормальное решение, если $z^{(1)} \neq z^{(2)}$. Теорема доказана.

Выше отмечалось, что решение задачи (9; 2,1) — (9; 2,3) вообще говоря, неустойчиво к малым изменениям исходной информации. Следующий параграф посвящен рассмотрению устойчивого метода решения таких задач — метода регуляризации.

§ 3. Метод регуляризации решения задач оптимального планирования

1. Исходные данные в задачах оптимального планирования задаются обычно приближенно. Будем в дальнейшем терминологически различать *решаемую* (точную) и *задаваемую* (заданную, приближенную к точной) задачи.

Задаваемая задача не позволяет делать заключения ни об устойчивости решаемой задачи, ни о единственности ее решения, даже если заданная задача этими свойствами обладает. Точное решение заданной задачи, как мы видели, неэффективно для исследования решаемой задачи. С точки зрения имеющейся у нас информации в качестве исходных данных решаемой (точной) задачи может служить любой набор исходных данных $\{\varphi, h, g\}$, удовлетворяющих условиям

$$\|\varphi_\delta(z) - \varphi(z)\| \leqslant \delta, \quad \|h_\delta(z) - h(z)\| \leqslant \delta,$$
$$\|g_\delta(z) - g(z)\| \leqslant \delta. \qquad (9;\ 3,1)$$

Следует отметить, что прибавление к условиям $Az = u$ линейно зависимых уравнений делает задачу неустойчивой (даже, если она была устойчивой), хотя она и остается эквивалентной ей в классическом смысле. Для задач линейного программирования (оптимального планирования) с достаточно большим числом условий $Az = u$ мы, как правило, не можем фактически проверить, выполняется ли условие линейной независимости.

Таким образом, необходим такой подход к решению задач линейного программирования (оптимального планирования), который не требует предположения о линейной независимости условий $Az = u$. Изложению устойчивого метода приближенного нахождения нормального решения точной задачи и посвящен настоящий параграф.

2. Задача оптимального планирования ставится как вариационная задача: найти минимум функции $\varphi(z)$ ($\varphi(z) \geqslant 0$), или, что то же, функции $\varphi^2(z)$ на множестве

$$G \equiv \{z;\ z \in R_1,\quad Az = u\}.$$

Если $\varphi^2(z)$ является для этого множества стабилизирующим функционалом, т. е. множество G_d элементов $z \in G$, для которых $\varphi^2(z) \leqslant d$, компактно, то существование элемента z_0, реализующего минимум $\varphi(z)$, очевидно. Однако, как показывает пример, приведенный выше, $\varphi^2(z)$ не всегда является стабилизирующим функционалом.

Остановимся подробнее на определении меры погрешности задания $\varphi(z)$. Пусть на $\mathbf{R}^n$ заданы стабилизирующий функционал $\Omega[z]$ (например, $\Omega[z] = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \left(z_i - z_i^0\right)^2$) и целевые функции $\varphi(z)$ и $\tilde{\varphi}(z)$. Меру уклонения $\varphi^2(z)$ и $\tilde{\varphi}^2(z)$ определим как наименьшее число δ, такое что

$$|\varphi^2(z) - \tilde{\varphi}^2(z)| \leqslant \delta(1 + \Omega[z]).$$

Для задач линейного программирования, где $\varphi^2(z)$ и $\tilde{\varphi}^2(z)$ квадратические функционалы, такое определение естественно. Наличие в правой части слагаемого равного единице необходимо, так как, если $\Omega[z_0] = 0$, то $\varphi^2(z_0)$, вообще говоря, не равно нулю.

3. Пусть в задаче оптимального планирования вместо точных исходных данных $\{A, \bar{u}, \bar{c}\}$ нам даны их δ-приближения $\{A, \tilde{u}, \tilde{c}\}$, такие что

$$\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta, \quad |\varphi^2(z) - \tilde{\varphi}^2(z)| \leqslant \delta\,(1 + \Omega\,[z]),$$

где $\varphi(z) = (c, z)$, $\tilde{\varphi}(z) = (\tilde{c}, z)$ и $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал на $\mathbf{R}^n$ (положительно определенная квадратичная форма).

Возьмем вспомогательную целевую функцию

$$\Phi^2(z) = \tilde{\varphi}(z) + \lambda(1 + \Omega[z]), \quad \lambda > 0,$$

и будем приближенно решать задачу оптимального планирования с целевой функцией $\Phi^2(z)$. Такая замена допустима с точки зрения точности задания целевой функции, если $\lambda \leqslant \delta$, так как

$$|\Phi^2(z) - \tilde{\varphi}^2(z)| = \lambda(1 + \Omega[z]) \leqslant \delta(1 + \Omega[z]).$$

Таким образом, среди векторов z, принадлежащих множеству R_1 и таких, что $\|Az - \tilde{u}\| \leqslant \delta$, требуется найти вектор z_δ, минимизирующий функцию $\Phi^2(z)$. Вспомогательная целевая функция $\Phi^2(z)$ является, очевидно, квазимонотонным стабилизирующим функционалом па множестве R_1 (где $\Phi^2(z)$ — квадратический функционал).

Следовательно, мы находимся в условиях применимости леммы § 3 гл. II, согласно которой точная нижняя грань функционала (функции) $\Phi^2(z)$ достигается на векторе z_δ из R_1, для которого $\|Az_\delta - \tilde{u}\| = \delta$.Эта задача эквивалентна задаче нахождения минимума квадратичной формы

$$M_\lambda^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{c}, A] = \|Az - \tilde{u}\|^2 + \alpha[\tilde{\varphi}^2(z) + \lambda(1 + \Omega[z])]$$

с определением параметра α из условия $\|Az_\alpha - \tilde{u}\| = \delta$, где z_α — вектор, минимизирующий $M_\lambda^\alpha[z, \tilde{u}, \tilde{c}, A]$. Поскольку $\|Az_\alpha - \tilde{u}\|^2$ — квадратичная форма, то невязка $\varphi(\alpha) = \|Az_\alpha - \tilde{u}\|^2$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией и поэтому параметр α определяется из условия $\varphi(\alpha) = \delta^2$ однозначно.

4. Обычно в математической постановке задач оптимального планирования при выборе целевой функции $\varphi(z) = (c, z)$ учитываются не все факторы. К ним может относиться, например, требование небольшого отклонения искомого оптимального плана, отвечающего новым (мало отличающимся от прежних) исходным данным от прежнего плана (требование минимума организационной перестройки). Введение в новой целевой функции $\Phi^2(z)$ слагаемого $\lambda(1 + \Omega[z])$ можно рассматривать как поправку на влияние неучтенных факторов в целевой функции $\tilde{\varphi}^2(z)$, а λ — как величину экспертной оценки их влияния.

Аналогичным образом мотивируется (со ссылкой на гл. II, § 10, где рассматривается задача $Az = u$ с приближенно известными оператором $\tilde{A}$ и правой частью $\tilde{u}$) построение приближенного решения задачи оптимального планирования с приближенными исходными данными $\{\tilde{A}, \tilde{u}, \tilde{c}\}$ как решения задачи на минимум сглаживающего функционала

$$M_\lambda^\alpha [z, \tilde{u}, \tilde{c}, \tilde{A}] = \| \tilde{A}z - \tilde{u} \|^2 + \alpha \{\varphi^2 (z) + \lambda (1 + \Omega [z])\},$$

где α определяется по обобщенной невязке из условия

$$\| \tilde{A} z_\alpha - \tilde{u} \|^2 = \{\delta + h\Phi (z_\alpha)\}^2 - \mu,$$

где

$$\mu = \inf_{z \in R_1} \| \tilde{A} z - \tilde{u} \|^2.$$

Здесь h характеризует погрешность в задании оператора $\tilde{A}$ (см. § 10, гл. II).

5. Обратимся снова к задаче линейного программирования: найти элемент $\bar{z}^0$, минимизирующий функцию $\varphi(z) = (c, z)$ на множестве

$$R_2 \equiv \{z;\ Az = \bar{u},\ z \in R_1\},$$

где A — линейный оператор.

Пусть z_0 — элемент, относительно которого ищется нормальное решение. Рассмотрим вспомогательную задачу I_λ: найти элемент z_λ, минимизирующий функционал

$$\Phi^2(z) = \varphi^2(z) + \lambda\Omega[z]$$

на множестве R_2. Здесь $\Omega[z]$ — положительно определенная квадратичная форма.

Существование элемента z_λ очевидно, если условия, определяющие R_2, совместны. Легко убедиться, что элемент z_λ единствен. В самом деле, для задач линейного программирования множество R_2 выпукло. Пусть существуют два элемента, $\overset{1}{z}_\lambda$ и $\overset{2}{z}_\lambda$, минимизирующие квадратический функционал $\Phi^2(z)$. На участке прямой

$$z = \overset{1}{z}_\lambda + \beta \left(\overset{2}{z}_\lambda - \overset{1}{z}_\lambda\right), \quad -\infty < \beta < \infty,$$

принадлежащей R_2, значения функции $\Phi^2(z)$ представляют квадратическую функцию от β, которая не может иметь двух минимальных значений.

Выше мы рассмотрели задачу оптимального планирования, где функционал $\tilde{\varphi}^2(z)$ заменялся на

$$\Phi^2(z) = \tilde{\varphi}^2(z) + \lambda(1 + \Omega[z]).$$

Убедимся, что решение z_λ задачи с функционалом $\Phi^2(z)$ стремится при $\lambda \to 0$ к нормальному решению исходной задачи.

Пусть $\bar{z}^{(0)}$ — нормальное решение задачи (9; 2,1) — (9; 2,3). Справедлива следующая

Теорема 3. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\lambda_0(\varepsilon)$, *что для* $\lambda \leqslant \lambda_0(\varepsilon)$

$$\| z_\lambda - \bar{z}^{(0)} \| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. при $\lambda \to 0$ z_λ *стремится к нормальному решению задачи* (9; 2,1) — (9; 2,3).

Доказательство. Предположим, что это неверно. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{\lambda_k\}$, сходящаяся к нулю, что для всех k $\| z_{\lambda_k} - \bar{z}^{(0)} \| \geqslant \varepsilon_0$. Так как z_{λ_k} минимизирует функционал $\varphi^2(z) + \lambda_k\Omega[z]$, то

$$\varphi^2(z_{\lambda_k}) + \lambda_k\Omega[z_{\lambda_k}] \leqslant \varphi^2(\bar{z}^{(0)}) + \lambda_k\Omega[\bar{z}^{(0)}].$$

Отсюда

$$\Omega[z_{\lambda_k}] \leqslant \Omega[\bar{z}^{(0)}] + \frac{\varphi^2(\bar{z}^{(0)}) - \varphi^2(z_{\lambda_k})}{\lambda_k}.$$

Так как $\varphi(\bar{z}^{(0)}) \leqslant \varphi(z)$ для всех z из множества $R_2 \equiv \{z;\ Az = \bar{u},\ z \in R_1\}$, то $\varphi(\bar{z}^{(0)}) \leqslant \varphi(z_{\lambda_k})$. Следовательно,

$$\Omega[z_{\lambda_k}] \leqslant \Omega[\bar{z}^{(0)}].$$

Таким образом, последовательность $\{z_{\lambda_k}\}$ принадлежит компактному множеству элементов z, для которых

$$\Omega[z] \leqslant \Omega[\bar{z}^{(0)}].$$

Следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{z'_{\lambda_k}\}$. Пусть $\bar{z} = \lim\limits_{k\to\infty} z'_{\lambda_k}$. Очевидно, что $\|\bar{z} - \bar{z}^{(0)}\| \geqslant \varepsilon_0$. Так как $z'_{\lambda_k} \in R_2$, то

$$A\bar{z} = \bar{u}, \quad \bar{z} \in R_1.$$

Очевидно также, что

$$\varphi(\bar{z}) = \varphi(\bar{z}^{(0)}),$$
$$\|\bar{z} - z^0\|^2 = \Omega[\bar{z}] \leqslant \Omega[\bar{z}^{(0)}] = \|\bar{z}^{(0)} - z^0\|^2.$$

Эти условия определяют единственное нормальное решение задачи (9; 2,1)—(9; 2,3). Следовательно, $\bar{z} = \bar{z}^{(0)}$. Но это противоречит неравенству $\|\bar{z}-\bar{z}^{(0)}\| \geqslant \varepsilon_0$. Теорема доказана.

Замечание. Если условия (9; 2,1) и (9; 2,2) не выполнены (или трудно проверяемые), то можно искать квазирешение задачи линейного программирования. Для нахождения его применим метод регуляризации, описанный выше.

6. Пусть исходные данные в задаче (9; 2,4) A, $\bar{u}$, $\bar{c}$ известны нам приближенно. Вместо A, $\bar{u}$, $\bar{c}$ мы имеем $\tilde{A}$, $\tilde{u}$, $\tilde{c}$ такие, что

$$\|\tilde{A} - A\| \leqslant \delta, \quad \|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta, \quad \|\tilde{c} - \bar{c}\| \leqslant \delta.$$

В этом случае речь может идти лишь о нахождении приближенного к нормальному решению задачи (9; 2,4). В настоящем параграфе будет показано, что при надлежащем выборе параметров α и λ, согласованном с погрешностью δ исходных данных $\tilde{A}$, $\tilde{u}$, $\tilde{c}$, регуляризованное решение задачи $z_{\alpha,\lambda}$, минимизирующее функционал

$$M_\lambda^\alpha[z; \tilde{A}, \tilde{u}, \tilde{c}],$$

аппроксимирует с наперед заданной точностью искомое нормальное решение $\bar{z}^{(0)}$ задачи (9; 2,4) с точными исходными данными A, $\bar{u}$, $\bar{c}$, и оно устойчиво к малым изменениям A, $\bar{u}$ и $\bar{c}$.

Отметим прежде всего, что система уравнений

$$\tilde{A}z = \tilde{u}$$

совместна только в том случае, когда

$$\tilde{u} \in U_{\tilde{A}} \equiv \{u;\ u = \tilde{A}z,\ z \in \mathbf{R}^n\}.$$

Если $\tilde{u} \notin U_{\tilde{A}}$, то, обозначая через $\tilde{v}$ ортогональную проекцию элемента $\tilde{u}$ на $U_{\tilde{A}}$, будем иметь

$$\|\tilde{A}z - \tilde{u}\|^2 = \|\tilde{A}z - \tilde{v}\|^2 + \|\tilde{v} - \tilde{u}\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$M_\lambda^\alpha[z; \widetilde{A}, \widetilde{u}, \widetilde{c}] = M_\lambda^\alpha[z; \widetilde{A}, \widetilde{v}, \widetilde{c}] + \|\widetilde{v} - \widetilde{u}\|^2. \quad (9; 3,2)$$

Второе слагаемое в правой части (9; 3,2) не зависит от α и λ. Следовательно, элемент $z_{\alpha,\lambda}$, минимизирующий функционал $M_\lambda^\alpha[z; \widetilde{A}, \widetilde{u}, \widetilde{c}]$, минимизирует и функционал $M_\lambda^\alpha[z; \widetilde{A}, \widetilde{v}, \widetilde{c}]$, и наоборот. Так как оба эти функционала являются положительными квадратичными формами относительно z_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, существование минимизирующего их элемента $z_{\alpha,\lambda}$ на R_1 очевидно.

7. Обратимся к оценке уклонения регуляризованного решения от точного нормального.

Теорема 4. *Пусть в задаче* $(9; 2,1)-(9; 2,3)$ *вместо точных исходных данных* A, $\bar{u}$, $\bar{c}$ *известны приближенные данные* $\widetilde{A}$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{c}$ *такие, что*

$$\|\widetilde{A} - A\| \leqslant \delta, \quad \|\widetilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta, \quad \|\widetilde{c} - \bar{c}\| \leqslant \delta.$$

Пусть, далее, $z_{\alpha,\lambda}$ — *элемент, минимизирующий функционал*

$$M_\lambda^\alpha[z; \widetilde{A}, \widetilde{u}, \widetilde{c}]$$

на множестве R_1, *а* $\bar{z}^{(0)}$ — *нормальное решение задачи* $(9; 2,1)-(9; 2,3)$ *с точными исходными данными. Пусть* $\alpha_0(\delta)$ *и* $\beta_0(\delta)$ — *заданные неотрицательные непрерывные возрастающие функции, равные нулю при* $\delta = 0$ *и удовлетворяющие условию*

$$\delta^2 \leqslant \alpha_0(\delta)\beta_0(\delta).$$

Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, *существуют такие* $\lambda_0(\varepsilon)$ *и* $\delta_0(\varepsilon, \lambda_0)$ *(зависящие также от* A, $\bar{u}$, c, $\alpha_0(\delta)$, $\beta_0(\delta)$), *что для всяких* $\lambda \leqslant \lambda_0(\varepsilon)$, $\delta \leqslant \delta_0(\varepsilon, \lambda_0)$ *и* α, *удовлетворяющих условиям*

$$\frac{\delta^2}{\beta_0(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta),$$

выполняется неравенство $\|z_{\alpha,\lambda} - \bar{z}^{(0)}\| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Согласно теореме 3 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\lambda_0(\varepsilon/2)$, что при произвольном $\lambda \leqslant \lambda_0(\varepsilon/2)$ для элемента z_λ, минимизирующего функционал

$$\widetilde{\varphi}^2(z) + \lambda\Omega[z]$$

на множестве R_2, выполняется неравенство

$$\|z_\lambda - \bar{z}^{(0)}\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Поэтому нам достаточно доказать, что при условиях теоремы 4 для любого фиксированного числа $\lambda > 0$ существует такое $\delta_0(\varepsilon, \lambda)$, что при $\delta \leqslant \delta_0(\varepsilon, \lambda)$ и α, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\delta^2}{\beta_0(\delta)} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta), \qquad (9;\ 3{,}3)$$

выполняется неравенство

$$\|z_{\alpha,\lambda} - z_\lambda\| \leqslant \varepsilon/2. \qquad (9;\ 3{,}4)$$

Для доказательства справедливости оценки (9; 3,4) оценим прежде всего $\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}]$ и $\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - A\bar{z}^{(0)}\|$. Очевидно, что

$$\|\alpha\lambda\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}] \leqslant M_\lambda^\alpha[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}; \tilde{A}, \tilde{v}, \tilde{c}] \leqslant M_\lambda^\alpha[\bar{z}^{(0)}; \tilde{A}, \tilde{v}, \tilde{c}] =$$
$$= \|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v}\|^2 + \alpha\{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)}) + \lambda\Omega[\bar{z}^{(0)}]\}. \qquad (9;\ 3{,}5)$$

Здесь $\tilde{\varphi}(z) = (\tilde{c}, z)$. Далее,

$$\|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v}\| \leqslant \|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - A\bar{z}^{(0)}\| + \|A\bar{z}^{(0)} - \tilde{u}\| + \|\tilde{u} - \tilde{v}\| =$$
$$= \|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - A\bar{z}^{(0)}\| + \|\bar{u} - \tilde{u}\| + \|\tilde{u} - \tilde{v}\|).$$

Пользуясь оценками $\|\tilde{A} - A\| \leqslant \delta$ и $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \leqslant \delta$, получим

$$\|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v}\| \leqslant \delta\|\bar{z}^{(0)}\| + \delta + \|\tilde{u} - \tilde{v}\|. \qquad (9;\ 3{,}6)$$

Так как $\|\tilde{u} - \tilde{v}\| \leqslant \|\tilde{u} - \tilde{A}z\|$ для любого элемента z, то из (9; 3,6) получаем

$$\|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v}\| \leqslant \delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|) + \|\tilde{u} - \tilde{A}\bar{z}^{(0)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|) + \|\tilde{u} - \bar{u}\| + \|\bar{u} - \tilde{A}\bar{z}^{(0)}\| =$$
$$= \delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|) + \|\tilde{u} - \bar{u}\| + \|A\bar{z}^{(0)} - \tilde{A}\bar{z}^{(0)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|) + \delta + \|\tilde{A} - A\|\|\bar{z}^{(0)}\| \leqslant 2\delta(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|).$$

Таким образом,

$$\|\tilde{A}\bar{z}^{(0)} - \tilde{v}\| \leqslant B\cdot\delta, \qquad (9;\ 3{,}7)$$

где $B = 2(1 + \|\bar{z}^{(0)}\|)$. Пользуясь этой оценкой, из (9; 3,5) получаем

$$\alpha\lambda\Omega\left[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\right]\leqslant\alpha\lambda\left\{\frac{B\delta^2}{\alpha\lambda}+\frac{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)})}{\lambda}+\Omega\left[\bar{z}^{(0)}\right]\right\}.$$

Следовательно,

$$\Omega\left[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\right]\leqslant\frac{B\delta^2}{\alpha\lambda}+\frac{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)})}{\lambda}+\Omega\left[\bar{z}^{(0)}\right].$$

Используя (9; 3,3), получим

$$\Omega\left[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\right]\leqslant\frac{B\cdot\beta_0(\delta)}{\lambda}+\frac{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)})}{\lambda}+\Omega\left[\bar{z}^{(0)}\right]=N(\delta,\lambda).$$

Так как $N(\delta,\lambda)$ — монотонно возрастающая функция переменного δ, то $\Omega[\tilde{z}_{\alpha,\lambda}]\leqslant N(\delta_0,\lambda)$, где δ_0 — фиксированное число.

Оценим $\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda}-A\bar{z}^{(0)}\|$. Очевидно, что

$$\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda}-A\bar{z}^{(0)}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda}-\tilde{A}\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\|+\|\tilde{A}\tilde{z}_{\alpha,\lambda}-\tilde{v}\|+\|\tilde{v}-Az^{(0)}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda}-\tilde{A}\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\|+\{M_\lambda^\alpha[\tilde{z}_{\alpha,\lambda};\tilde{A},\tilde{v},\tilde{c}]\}^{1/2}+\|\tilde{v}-A\bar{z}^{(0)}\|.$$

Пользуясь оценками (9; 3,5), (9; 3,7) и (9; 3,3), получаем

$$\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda}-A\bar{z}^{(0)}\|\leqslant\delta\|\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\|+$$
$$+\sqrt{B\delta^2+\alpha_0(\delta)\{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)})+\lambda\Omega[\bar{z}^{(0)}]\}}+\|\tilde{v}-A\bar{z}^{(0)}\|.$$

Поскольку $A\bar{z}^{(0)}=\bar{u}$ и $\|\tilde{u}-\tilde{v}\|\leqslant\|\tilde{u}-\tilde{A}z\|$ для всякого z, то

$$\|\tilde{v}-A\bar{z}^{(0)}\|\leqslant\|\tilde{u}-\tilde{v}\|+\|\tilde{u}-\bar{u}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|\tilde{u}-\tilde{A}\bar{z}^{(0)}\|+\delta\leqslant\|\tilde{u}-\bar{u}\|+\|A\bar{z}^{(0)}-\tilde{A}\bar{z}^{(0)}\|+\delta\leqslant$$
$$\leqslant 2\delta+\|\tilde{A}-A\|\|\bar{z}^{(0)}\|\leqslant\delta(2+\|\bar{z}^{(0)}\|).$$

Пользуясь этой оценкой, получаем

$$\|A\tilde{z}_{\alpha,\lambda}-A\bar{z}^{(0)}\|\leqslant\delta(2+\|\bar{z}^{(0)}\|+\|\tilde{z}_{\alpha,\lambda}\|)+$$
$$+\sqrt{B\delta^2+\alpha_0(\delta)\{\tilde{\varphi}^2(\bar{z}^{(0)})+\lambda\Omega[\bar{z}^{(0)}]\}}=\eta(\delta).$$

Очевидно, что $\eta(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$.

Докажем теперь для произвольного $\varepsilon>0$ существование такого $\delta_0=\delta_0(\varepsilon,\lambda)$, что для $\delta\leqslant\delta_0(\varepsilon,\lambda)$ и для всех α, удовлетворяющих (9; 3,3), будет выполняться неравенство

$$\|\tilde{z}_{\alpha,\lambda} - z_\lambda\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Предположим, что такого $\delta_0(\varepsilon, \lambda)$ не существует. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$ и такие последовательности $\{\tilde{A}_k\}$, $\{\tilde{u}_k\}$, $\{\tilde{c}_k\}$ и $\{\delta_k\}$, сходящиеся (по соответствующим нормам) соответственно к A, $\bar{u}$, $\bar{c}$ и к нулю, что для любых α_k, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\delta_k^2}{\beta_0(\delta_k)} \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha_0(\delta_k),$$

имеем

$$\left\|\tilde{z}_{\alpha_k,\lambda} - z_\lambda\right\| \geqslant \varepsilon_0/2.$$

Однако

$$\Omega\left[\tilde{z}_{\alpha_k,\lambda}\right] \leqslant N\left(\bar{\delta}_0, \lambda\right).$$

Следовательно, последовательность $\{\tilde{z}_{\alpha_k,\lambda}\}$ принадлежит компактному множеству. В силу этого из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\}$. Пусть

$$\tilde{z}'_\lambda = \lim_{k\to\infty} \tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}.$$

Очевидно, что $\tilde{z}'_\lambda \in R_1$. Так как

$$\left\|\tilde{A}\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda} - A\bar{z}^{(0)}\right\| \leqslant \eta(\delta_k)$$

и $\eta(\delta_k) \to 0$ при $k \to \infty$, то, переходя к пределу, получим

$$\|A\tilde{z}'_\lambda - A\bar{z}^{(0)}\| = 0,$$

откуда $A\tilde{z}'_\lambda = A\bar{z}^{(0)} = \bar{u}$. Значит, $\tilde{z}'_\lambda \in R_2$.

Оценим $\varphi^2\left(\tilde{z}_{\alpha_k,\lambda}\right) + \lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]$. Пусть $\tilde{\varphi}_k(z) = (\tilde{c}_k, z)$. Имеем

$$\alpha_k\left\{\varphi^2(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}) + \lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k\left\{\varphi^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right) - \tilde{\varphi}_k^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right) + \tilde{\varphi}_k^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right) + \lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k\left\{\tilde{\varphi}_k^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right) + \lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]\right\} + \alpha_k\left\|\varphi^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right) - \tilde{\varphi}_k^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)\right\| =$$

$$= \alpha_k\left\{\tilde{\varphi}_k^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right) + \lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]\right\} +$$

$$+\alpha_k \left\|\varphi\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)-\tilde{\varphi}_k\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)\right\| \cdot \left\|\varphi\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)+\tilde{\varphi}_k\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k \left\{\tilde{\varphi}_k^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)+\lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]\right\}+$$

$$+\alpha_k \left\|\left(\tilde{c}_k, \tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)-\left(\bar{c}, \tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)\right\| \left(\left\|\left(\bar{c}, \tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{c}_k, \tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)\right\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k \left\{\tilde{\varphi}_k^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)+\lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]\right\}+$$

$$+\alpha_k \left\|\tilde{c}_k-\bar{c}\right\| \left\|\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right\| \left(\|\bar{c}\|+\|\tilde{c}_k\|\right) \left\|\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k \left\{\tilde{\varphi}_k^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)+\lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]\right\}+\alpha_k\delta_k \left\|\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right\|^2 \left(\|\bar{c}\|+\|\tilde{c}_k\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant M_\lambda^{\alpha_k}\left[z_\lambda, \tilde{A}_k, \tilde{u}_k, \tilde{c}_k\right]+O\left(\alpha_k \cdot \delta_k\right).$$

Таким образом,

$$\alpha_k \left\{\varphi^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)+\lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right]\right\} \leqslant M_k^{\alpha_\lambda}\left[z_\lambda, \tilde{A}_k, \tilde{u}_k, \tilde{c}_k\right]+O\left(\alpha_k \cdot \delta_k\right). \tag{9; 3,8}$$

Здесь z_λ — элемент, минимизирующий функционал $\varphi^2(z)+\lambda\Omega[z]$ на множестве R_2.

Совершенно аналогично получим

$$\alpha_k \left\{\tilde{\varphi}_k^2\left(z_\lambda\right)+\lambda\Omega\left[z_\lambda\right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k \left\{\varphi^2\left(z_\lambda\right)+\lambda\Omega\left[z_\lambda\right]\right\}+\alpha_k\delta_k \left\|z_\lambda\right\|^2 \left(\|\bar{c}\|+\|\tilde{c}_k\|\right). \tag{9; 3,9}$$

Оценим

$$M_\lambda^{\alpha_k}\left[z_\lambda; \tilde{A}_k, \tilde{u}_k, \tilde{c}_k\right]=\left\|\tilde{A}_k z_\lambda-\tilde{u}_k\right\|^2+\alpha_k \left\{\tilde{\varphi}_k^2\left(z_\lambda\right)+\lambda\Omega\left[z_\lambda\right]\right\}.$$

Так как $Az_\lambda=\bar{u}$, то

$$\left\|\tilde{A}_k z_\lambda-\bar{u}_k\right\| \leqslant \left\|\tilde{A}_k z_\lambda-Az_\lambda\right\|+\left\|\tilde{u}_k-\bar{u}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\tilde{A}_k-A\right\| \left\|z_\lambda\right\|+\delta_k \leqslant \delta_k\left(1+\left\|z_\lambda\right\|\right) \leqslant \delta_k\left(1+\left\|\bar{z}^{(0)}\right\|\right),$$

ибо $\left\|z_\lambda\right\| \leqslant \left\|\bar{z}^{(0)}\right\|$.

Используя (9; 3,9), получим

$$M_\lambda^{\alpha_k}\left[z_\lambda, \tilde{A}_k, \tilde{u}_k, \tilde{c}_k\right] \leqslant \delta_k^2\left(1+\left\|\bar{z}^{(0)}\right\|\right)^2+$$

$$+\alpha_k \left\{\varphi^2\left(z_\lambda\right)+\lambda\Omega\left[z_\lambda\right]\right\}+\alpha_k \cdot \delta_k \left(\|\bar{c}\|+\|\tilde{c}_k\|\right) \left\|z_\lambda\right\|^2.$$

Из этой оценки и из (9; 3,8) следует, что

$$\varphi^2\left(\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right)+\lambda\Omega\left[\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda}\right] \leqslant \varphi^2\left(z_\lambda\right)+\lambda\Omega\left[z_\lambda\right]+O\left(\delta_k\right)+O\left(\delta_k^2/\alpha_k\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\varphi^2(\tilde{z}_\lambda) + \lambda\Omega[\tilde{z}_\lambda] \leqslant \varphi^2(z_\lambda) + \lambda\Omega[z_\lambda].$$

Так как элемент z_λ минимизирует функционал $\varphi^2(z) + \lambda\Omega[z]$, то $\tilde{z}_\lambda = z_\lambda$. Следовательно, при достаточно больших k $(k \geqslant k_0(\varepsilon_0))$ $\|\tilde{z}'_{\alpha_k,\lambda_1} - z_\lambda\| < \varepsilon_0/2$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Замечание. Мы полагали, что $\Omega[z] = \|z - z^0\|^2$ и фактически использовали только то, что множество элементов z, для которых $\Omega[z] \leqslant d$, компактно при любом $d > 0$. Все результаты сохраняются, если в качестве $\Omega[z]$ брать произвольную положительную определенную квадратичную форму

$$\Omega[z] = \sum_{i,j} p_{ij}(z_i - z_i^0)(z_j - z_j^0),$$

видоизменив соответствующим образом определение понятия нормального решения.

Применение методов решения некорректно поставленных задач получило широкое распространение в различных направлениях научных исследований. К некорректно поставленным задачам приводятся задачи обработки результатов наблюдений, различные задачи управления, планирования, синтеза оптимальных конструкций и многие другие.

В настоящей книге рассмотрены основные вопросы, относящиеся к методам решения некорректно поставленных задач. В качестве приближенных решений таких задач, устойчивых к малым изменениям исходных данных, берутся регуляризованные решения, т. е. решения, получаемые методом регуляризации.

Основное внимание в книге уделено рассмотрению основанных на вариационном принципе отбора алгоритмов построения регуляризованных решений уравнений вида $Az = u$, где $z \in F$, $u \in U$, к которым приводятся задачи обработки результатов наблюдений в физических экспериментах, задачи распознавания образов, задачи суммирования рядов Фурье и другие. Обоснование метода регуляризации для такого рода задач в книге дано для типичных операторов A и пространств F и U. Перенесение результатов на более широкие классы операторов A и пространств F, U сделано другими авторами.

Большая часть таких обобщений содержится в публикациях, приводимых в конце книги.

Методы решения задач оптимального управления рассмотрены нами на примере задач, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные результаты распространены и на задачи, описываемые уравнениями с частными производными (например, на задачи о дифференциальных играх). Имеются многочисленные публикации, посвященные этим вопросам.

Приведенные нами примеры предназначены для рассмотрения типичных ситуаций; изложенный в книге материал по численным методам нахождения приближенных решений некорректно поставленных задач достаточен для нахождения приближенных решений широкого круга прикладных задач.

В журнальных статьях и в других публикациях имеется большое разнообразие численных алгоритмов решения различных конкретных некорректно поставленных задач, учитывающих специфику этих задач.

Мы надеемся, что изложенный в книге материал позволит широкому кругу читателей войти в круг идей, относящихся к некорректно поставленным задачам, и успешно решать конкретные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров Л. Регуляризационный вычислительный процесс для анализа экспоненциальной зависимости.— ЖВМ и МФ, 1970, **10**, № 5.
2. Алиев Б. О двух подходах к разностному методу решения задачи Неймана в прямоугольной области.— ЖВМ и МФ, 1972, **12**, № 1.
3. Алиев Б. Регуляризирующие алгоритмы для устойчивого нормального решения уравнения II рода на спектре.— ЖВМ и МФ, 1970, **10**, № 3.
4. Аниконов Ю. Е. Об операторных уравнениях I рода.— ДАН СССР, 1972, **207**, № 2.
5. Антохин Ю. Т. Аналитический подход к проблеме уравнений I рода.— ДАН СССР, 1966, **167**, № 4.
6. Антохин Ю. Т. Некорректные задачи в гильбертовом пространстве и устойчивые методы их решения.— Дифф. уравн., 1967, **3**, № 7.
7. Антохин Ю. Т. Некорректные задачи для уравнений типа свертки.— Дифф. уравн., 1968, **4**, № 9.
8. Арсенин В. Я. О разрывных решениях уравнений первого рода.— ЖМВ и МФ, 1965, **5**, № 5.
9. Арсенин В. Я., Иванов В. В. О решении некоторых интегральных уравнений первого рода типа свертки методом регуляризации.— ЖВМ и МФ, 1968, **8**, № 2.
10. Арсенин В. Я., Иванов В. В. О влиянии регуляризации p-го порядка.— ЖВМ и МФ, 1968, **8**, № 3.
11. Арсенин В. Я., Иванов В. В. Об оптимальной регуляризации.— ДАН СССР, 1968, **182**, № 1.
12. Арсенин В. Я. Об оптимальном суммировании рядов Фурье с приближенными коэффициентами.— ДАН СССР, 1968, **183**, № 2.
13. Арсенин В. Я., Савелова Т. И. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки.— ЖВМ и МФ, 1969, **9**, № 6.
14. Арсенин В. Я. Об одном способе приближенных решений интегральных уравнений первого рода типа сверток.— Труды МИАН СССР, 1973, **133**.
15. Арсенин В. Я. О методах решения некорректно поставленных задач.— М.: МИФИ, 1977.— Курс лекций, ротапринт.
16. Арсенин В. Я., Загонов В. П., Трахопитовская Р, А, О численном решении интегральных уравнений

первого рода типа свертки на неравномерных сетках.— М.: ИПМ АН СССР, 1978.— Препринт № 141.
17. Бакушинский А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве.— ЖВМ и МФ, 1968, 7, № 3.
18. Бакушинский А. Б., Страхов В. Н. О решении некоторых интегральных уравнений первого рода методом последовательных приближений.— ЖВМ и МФ, 1968, 8, № 1.
19. Бакушинский А. Б. Алгоритмы регуляризации для линейных уравнений с неограниченными операторами.— ДАН СССР, 1968, 183, № 1.
20. Бакушинский А. В. К проблеме построения линейных регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах, ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 1.
21. Бакушинский А. Б. Регуляризирующий алгоритм на основе метода Ньютона — Канторовича для решения вариационных неравенств.— ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 6.
22. Будак Б. М., Васильева В. Н. О решении обратной задачи Стефана.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, №№ 1, 4.
23. Васин В. В., Танана В. П. Приближенное решение операторных уравнений первого рода.— Матем. зап. УРГУ, 1968, 4, № 6.
24. Васин В. В. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач.— Матем. заметки, 1970, 7, № 3.
25. Васин В. В. Об устойчивом вычислении производной.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 6.
26. Винокуров В. А. О понятии регуляризуемости разрывных отображений.— ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 5.
27. Винокуров В. А. Общие свойства погрешности приближенного решения линейных функциональных уравнений.— ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 1.
28. Винокуров В. А. Два замечания о выборе параметра регуляризации.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 2.
29. Винокуров В. А. О погрешности приближенного решения линейных задач.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 3.
30. Винокуров В. А. Свойства функционала погрешности $\Delta(f, R, \delta, x)$ при фиксированном δ как функции x. I — ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 4.
31. Винокуров В. А. Асимптотические оценки погрешности. II.— ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 6.
32. Винокуров В. А. Асимптотические оценки погрешности. III.— ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 1.
33. Винокуров В. А. Интегральные оценки погрешности. IV.— ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 3.
34. Воеводин В. В. О методе регуляризации.— ЖВМ и МФ, 1969, 2, № 3.
35. Гавурин М. К., Рябов В. М. Применение полиномов Чебышева при регуляризации некорректных и плохо обусловленных уравнений в гильбертовом пространстве.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 6.
36. Галкин В. Я. К расчету управляющей функции при подъеме ракеты-зонда на максимальную высоту.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование, XII, М.: МГУ, 1969.

37. Галкин В. Я. Задача релейного управления при вертикальном подъеме ракеты.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование, XII, М.: МГУ, 1969.
38. Галкин В. Я. Задачи обработки и интерпретации результатов некоторых экспериментов в ядерной физике. Автореферат канд. диссерт.— М.: МГУ, 1972.
39. Гейман Т. М., Заикин П. Н., Масленников В. А., Седов Н. Н. О некоторых задачах количественной электронной микроскопии.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование, XIV, М.: МГУ, 1970.
40. Гласко В. Б., Тихонов А. Н., Тихонравов А. В. О синтезе многослойных покрытий.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 1.
41. Гласко В. В., Кравцов В. В., Кравцова Г. Н. Об одной обратной задаче гравиметрии.— Вестник МГУ, 1970, 2.
42. Гласко В. Б. О единственности решения некоторых обратных задач сейсмологии.— ЖВМ и МФ, 1970, 10, № 6.
43. Гласко В. Б., Гущин Г. В., Старостенко В. И. О применении метода регуляризации А. Н. Тихонова к решению нелинейных систем уравнений.— ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 2.
44. Гласко В. Б. Использование метода регуляризации для решения задачи термического зондирования атмосферы.— Физика атмосферы и океана, 1968, IV, № 3.
45. Гласко В. Б., Володин В. А., Мудрецов Е. А., Нефедова Н. Ю. О решении обратной задачи гравиразведки для контактной поверхности на основе метода регуляризации.— Физика Земли, 1972, 5.
46. Гласко В. Б. К вопросу о единственности определения структуры земной коры по поверхностным волнам Рэлея.— ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 6.
47. Гласко В. Б. Некоторые математические вопросы интепретации геофизических наблюдений, Автореферат докторской диссертации.— М.: МГУ, 1972.
48. Гончарский А. В., Ягола А. Г. О равномерном приближении монотонных решений некорректных задач.— ДАН СССР, 1969, 184, № 4.
49. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. Некоторые оценки скорости сходимости регуляризованных приближений для уравнений типа свертки.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 3.
50. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. О решении двумерных интегральных уравнений первого рода с ядром, зависящим от разности аргументов.— ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 5.
51. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. Об одном регуляризующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 6.
52. Гончарский А. Б., Леонов А. С., Ягола А. Г. Обобщенный принцип невязки.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 2.
53. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. Конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 1.

54. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. О принципе невязки при решении нелинейных некорректных задач.— ДАН СССР, 1974, 214, № 3.
55. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. О применимости принципа невязки в случае нелинейных некорректных задач и новом регуляризирующем алгоритме их решения.—ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 2.
56. Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики.— М.: Наука, 1978.
57. Гордонова В. И., Морозов В. А. Численные алгоритмы выбора параметра в методе регуляризации.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 3.
58. Демидович В. Б. Восстановление функции и ее производных по экспериментальной информации.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование, VIII, М.: МГУ, 1967.
59. Денисов А. М. Об аппроксимации квазирешений уравнения Фредгольма первого рода с ядром специального вида.— ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 5; 1972, 12, № 6.
60. Денисов А. М. Об аппроксимации квазирешений некоторых интегральных уравнений первого рода.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 1.
61. Денчев Р. О методе регуляризации А. Н. Тихонова для слабых решений краевых задач.— ЖВМ и МФ, 1969, 9, № 2.
62. Диденко В. П., Козлов Н. Н. О регуляризации некоторых некорректных задач технической кибернетики.— ДАН СССР, 1974, 214, № 3.
63. Долгополова Т. Ф., Иванов В. К. О численном дифференцировании.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 3.
64. Домбровская И. Н. О линейных операторных уравнениях первого рода.— Изв. вузов, Математика, 1964, 2.
65. Домбровская И. Н. О решении некорректных линейных уравнений в гильбертовом пространстве.— Матем. зап. УРГУ, 1964, 4, № 4.
66. Домбровская И. Н., Иванов В. К. К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах.— Сибирский матем. журн., 1965, VI, № 3.
67. Домбровская И. Н. Об уравнениях первого рода с замкнутым оператором.— Изв. вузов, Математика, 1967, 6.
68. Жуковский Е. Л., Липцер Р. Ш. О рекуррентном способе вычисления нормальных решений линейных алгебраических систем уравнений.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 4.
69. Жуковский Е. Л., Морозов В. А. О последовательной байесовской регуляризации алгебраических систем уравнений.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 2.
70. Жуковский Е. Л. Статистическая регуляризация алгебраических систем уравнений.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 1.
71. Заикин П. Н. О численном решении обратной задачи операционного исчисления в действительной области.— ЖВМ и МФ, 1968, 8, № 2.
72. Заикин П. Н. Система сплошной автоматической обработки результатов эксперимента по исследованию сечений фотоядерных реакций, Автореферат канд. диссерт.— М.: МГУ, 1968.
73. Заикин П. Н., Меченов А. С. Некоторые вопросы численного решения интегральных уравнений первого рода ме-

тодом регуляризации: М.: МГУ, 1971.— Отчет ВЦ МГУ, № 144—ТЗ, ротапринт.
74. Заикин П. Н. Системы полной математической обработки результатов спектрометрических экспериментов. Автореферат докт. диссертации.— Дубна: ОИЯИ, 1978.
75. Иванов В. К. Линейные неустойчивые задачи с многозначными операторами.— Сибирский матем. журн., 1970, XI, № 5.
76. Иванов В. К. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному.— Изв. АН СССР, Сер. матем., 1956, 20, № 6.
77. Иванов В. К. Об устойчивости обратной задачи логарифмического потенциала.— Изв. вузов, Математика, 1958, 4.
78. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах.— ДАН СССР, 1962, 145, № 2.
79. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах.— Матем. сборник, 1963, 61, № 2.
80. Иванов В. К. Некорректные задачи в топологических пространствах.— Сибирский матем. журн., 1969, X, № 5.
81. Иванов В. К. Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах.— Сибирский матем. журн., 1965, VI, № 4.
82. Иванов В. К. Задача Коши для уравнений Лапласа в бесконечной полосе.— Дифф. уравн., 1965, 1, № 1.
83. Иванов В. К., О равномерной регуляризации неустойчивых задач.— Сибирский матем. журн., 1966, VII, № 3.
84. Иванов В. К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 6.
85. Иванов В. К., Королюк Т. И. Об одной задаче численного аналитического продолжения гармонических функций.— Матем. зап. УРГУ, 1966, 5, № 4.
86. Иванов В. К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода.— Дифф. уравн., 1967, 3, № 3.
87. Иванов В. К., Королюк Т. И. Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач.— ЖВМ и МФ, 1969, 9, № 1.
88. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978.
89. Иевлев И. И. О приближенном решении уравнений первого рода.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 4.
90. Карманов В. Г. Оценки сходимости итерационных методов миниминизации.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 1.
91. Князев А. В. Условия корректности нелинейных интегральных уравнений с ядром, зависящим от разности переменных.— ЖВМ и МФ, 1970, 10, № 4.
92. Королюк Т. И. О задаче Коши для уравнения Лапласа.— Изв. вузов, Математика, 1973, 1.
93. Коркина Л. Ф. О решении операторных уравнений первого рода в гильбертовых пространствах.— Изв. вузов, Математика, 1967, 7.
94. Коркина Л. Ф. О регуляризации операторных уравнений первого рода.— Изв. вузов, Математика, 1969, 8.
95. Косарев Е. Л. О численном решении интегрального уравнения Абеля.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 6.

96. Крейн С. Г., Прозоровская О. И. О приближенных методах решения некорректных задач.— ЖВМ и МФ, 1963, **3**, № 1.
97. Круковский Н. М. Об устойчивом по Тихонову суммировании рядов Фурье с возмущенными коэффициентами некоторыми регулярными методами.— Вестник МГУ, Сер. 1, Математика, механика, 1973, **3**.
98. Кряпев А. В. Решение некорректно поставленных задач методом последовательных приближений.— ДАН СССР, 1973, **210**, № 1.
99. Кряпев А. В. Инерационный метод решения некорректных задач.— ЖВМ и МФ, 1974, **14**, № 1.
100. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.
101. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа.— Изв. АН СССР, Сер. матем., 1956, **20**.
102. Лаврентьев М. М. К вопросу об обратной задаче теории потенциала.— ДАН СССР, 1966, **106**, № 3.
103. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений.— ДАН СССР, 1957, **112**, № 2.
104. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода.— ДАН СССР, 1959, **127**, № 1.
105. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода.— ДАН СССР, 1960, **133**, № 2.
106. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики.— М.: СО АН СССР, 1962.
107. Лаврентьев М. М., Васильев В. Г. О постановке некоторых некорректных задач математической физики.— Сибирский математ. журн., 1966, **VII**, № 3.
108. Лаврентьев М. М. Об обратной задаче для волнового уравнения.— ДАН СССР, 1964, **157**, № 3.
109. Лаврентьев М. М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1965, **160**, № 1.
110. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.—Новосибирск: Наука, 1969.
111. Латтес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения.— М.: Мир, 1970.
112. Леонов А. С. К обоснованию выбора параметра регуляризации по критериям квазиоптимальности и отношений.—ЖВМ и МФ, 1978, **18**, № 6.
113. Лисковец О. А. Некорректные задачи с замкнутым необратимым оператором.— Дифф. уравн., 1967, **3**, № 4.
114. Лисковец О. А. О регуляризации линейных уравнений в банаховых пространствах.— Дифф. уравн., 1968, **4**, № 6.
115. Лисковец О. А. Метод регуляризации для нелинейных задач с замкнутым оператором.— Сибирский матем. журн., 1971, **XII**, № 6.
116. Лисковец О. А. О решении некорректных задач с замыкаемым оператором.— ДАН СССР, 1974, **219**, № 5.
117. Лисковец О. А. Способ выбора параметра регуляризации при решении нелинейных некорректных задач.— ДАН СССР, 1976, **229**, № 2.
118. Марчук Г. И., Атанбаев С. А. Некоторые вопросы глобальной регуляризации.— ДАН СССР, 1970, **190**, № 3.

119. Марчук Г. И. О постановке некоторых обратных задач.— ДАН СССР, 1964, 156, № 3.
120. Марчук Г. И., Васильев В. Г. О приближенном решении операторных уравнений первого рода.— ДАН СССР, 1970, 195, № 4.
121. Маслов В. П. Регуляризация некорректных задач для сингулярных интегральных уравнений.— ДАН СССР, 1967, 176, № 5.
122. Мельникова И. В. О решении уравнений первого рода с замкнутым многозначным оператором.— Изв. вузов, Математика, 1971, 12,
123. Морозов В. А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 1.
124. Морозов В. А. О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации.— ДАН СССР, 1967, 175, № 6.
125. Морозов В. А. О регуляризирующих семействах операторов.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование. VIII, М., МГУ, 1967.
126. Морозов В. А. О принципе невязки при решении несовместных уравнений методом регуляризации А. Н. Тихонова.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 5.
127. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректных задач.— М.: МГУ, 1974.— Ротапринт.
128. Морозов В. А. О принципе оптимальности невязки при приближенном решении уравнений с нелинейными операторами.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 2.
129. Морозов В. А. О псевдорешениях.— ЖВМ и МФ, 1969, 9, № 6.
130. Морозов В. А. Линейные и нелинейные некорректные задачи. Итоги науки и техники. Математический анализ. II.— М.: ВИНИТИ, 1973.
131. Морозов В. А. О решении методом регуляризации некорректно поставленных задач с нелинейным неограниченным оператором.— Дифф. уравн., 1970, 6, № 8.
132. Музылев Н. В. Об алгоритме упрощенной регуляризации.— ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 3.
133. Муравьева М. В. Об оптимальности и предельных свойствах байесовского решения системы линейных алгебраических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 4.
134. Новиков П. С. О единственности обратной задачи теории потенциала.— ДАН СССР, 1938, 18, № 3.
135. Оганесян С. М., Старостенко В. И. Регуляризирующий итерационный процесс, основанный на параметрическом функционале А. Н. Тихонова.— ДАН СССР, 1978, 238, № 2.
136. Охоцимский Д. Е. К теории движения ракет.— ПММ, 1946, 10, № 2.
137. Петров А. П., Хованский А. В. Оценка погрешности решения линейных задач при наличии ошибок в операторах и правых частях уравнений.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 2.
138. Петров В. В., Усков А. С. Информационные аспекты проблемы регуляризации.— ДАН СССР, 1970, 195, № 4.
139. Перельман А. Я., Пунина В. А. Применение свертки Меллина к решению интегральных уравнений первого ро-

да с ядром, зависящим от произведения.— ЖВМ и МФ, 1969, 9, № 3.
140. Приленко А. И. Внешняя обратная задача объемного потенциала переменной плотности для тела, близкого к данному.— ДАН СССР, 1969, 185, № 1.
141. Приленко А. И. Внутренние обратные задачи теории потенциала.— ДАН СССР, 1968, 182, № 3.
142. Приленко А. И. Контактные обратные задачи обобщенных магнитных потенциалов.— ДАН СССР, 1968, 181, № 5.
143. Приленко А. И. О единственности определения формы и плотности тела в обратных задачах теории потенциала.— ДАН СССР, 1970, 193, № 2.
144. Приленко А. И. О единственности определения формы тела по значениям внешнего потенциала.— ДАН СССР, 1965, 160, № 1.
145. Приленко А. И. О единственности решения одной обратной задачи, представленной интегральным уравнением первого рода.— ДАН СССР, 1966, 167, № 4.
146. Приленко А. И. Существование решений обратных задач теории потенциала.— ДАН СССР, 1971, 199, № 1.
147. Приленко А. И. Внутренние обратные задачи обобщенных потенциалов.— Сибирский матем. журн., 1971, 12, № 3.
148. Приленко А. И. Об обратных задачах теории потенциала.— Дифф. уравн., 1967, 3, № 1.
149. Приленко А. И. Внутренняя обратная задача метагармонического потенциала для тела, близкого к данному.— Дифф. уравн., 1972, 8, № 1.
150. Романов В. Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа.— Новосибирск: Наука, 1972.
151. Романов В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений.— Новосибирск, НГУ, 1973.
152. Романов В. Г. Абстрактная обратная задача и вопросы ее корректности.— Функц. анализ, 1973, 7, № 3.
153. Савелова Т. И., Тихомиров В. В. О решении интегральных уравнений первого рода типа свертки в многомерном случае.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 3.
154. Савелова Т. И. О решении уравнений типа свертки с неточно заданным ядром методом регуляризации.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 1.
155. Савелова Т. И. О применении одного класса регуляризирующих алгоритмов к решению интегральных уравнений первого рода типа свертки в банаховых пространствах.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 2.
156. Савелова Т. И. Проекционные методы решения линейных некорректных задач.— ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 4.
157. Страхов В. Н. О решении некорректных задач магнито и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки.— Изв. АН СССР, Сер. Физика Земли, 1967, 4, № 5.
158. Страхов В. Н. О численном решении некорректных задач, представляемых интегральными уравнениями типа свертки.— ДАН СССР, 1968, 178, № 2.
159. Страхов В. Н. О линейных некорректных задачах в гильбертовом пространстве.— Дифф. уравн., 1970, 6, № 8.

160. Страхов В. Н. О методах последовательных приближений для линейных уравнений в гильбертовом пространстве.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 4.
161. Страхов В. Н. О построении оптимальных по порядку приближенных решений линейных условно корректных задач.— Дифф. уравн., 1973, 11, № 10.
162. Страхов В. Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 6.
163. Танана В. П. Приближенное решение операторных уравнений первого рода в локально выпуклых пространствах.— Изв. вузов, Математика, 1973, 9.
164. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач.— ДАН СССР, 1943, 39, № 5.
165. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач.— ДАН СССР, 1963, 151, № 3.
166. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач.— ДАН СССР, 1963, 153, № 1.
167. Тихонов А. Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье.— ДАН СССР, 1964, 156, № 1.
168. Тихонов А. Н. О решении нелинейных интегральных уравнений.— ДАН СССР, 1964, 156, № 6.
169. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода.— ЖВМ и МФ, 1964, 4, № 3.
170. Тихонов А. Н. О нелинейных уравнениях первого рода.— ДАН СССР, 1965, 161, № 5.
171. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Владимиров Л. А., Дорошенко Г. Г., Думова А. А. К вопросу об обработке аппаратурных спектров γ-квантов и быстрых нейтронов, измеренных с помощью однокристальных сцинтилляционных спектрометров.— Изв. АН СССР, Сер. физическая, 1966, XXXIX, № 5.
172. Тихонов А. Н. О методах регуляризации задач оптимального управления.— ДАН СССР, 1965, 162, № 4.
173. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Думова А. А., Майоров Л. В., Мостовой В. И. Новый метод восстановления истинных спектров.— Атомная энергия, 1965, 18, № 6.
174. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. Применение методов регуляризации в нелинейных задачах.— ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 3.
175. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения.— ДАН СССР, 1965, 163, № 6.
176. Тихонов А. Н. Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 4.
177. Тихонов А. Н. О некорректных задачах оптимального планирования и устойчивых методах их решения.— ДАН СССР, 1965, 164, № 3.
178. Тихонов А. Н. О методах решения некорректно поставленных задач.— В кн.: Тезисы докладов, Международный конгресс математиков, М., 1966.
179. Тихонов А. Н. О некорректных задачах оптимального планирования.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 1.
180. Тихонов А. Н. Об устойчивости задачи минимизации функционалов.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 4.

181. Тихонов А. Н., Галкин В. Я., Заикин П. Н. О прямых методах решения задач оптимального управления.— ЖВМ и МФ, 1967, 7, № 2.
182. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. К вопросу о методах определения температуры поверхности тел.— ЖВМ и МФ, 1967, 7, № 4.
183. Тихонов А. Н. О некорректно поставленных задачах.— В кн. Вычисл. матем. и программирование, VIII, М., МГУ, 1967.
184. Тихонов А. Н., Аликаев В. В., Арсенин В. Я., Думова А. А. Определение функции распределения электронов плазмы по спектру тормозного излучения.— Журнал эксп. и теор. физики, 1968, 55, № 5.
185. Тихонов А. Н., Шевченко В. Г., Галкин В. Я., Заикин П. Н., Горячев Б. И., Ишханов Б. С., Капитонов Н. М. Система сплошной автоматической обработки результатов эксперимента по исследованию сечений фотоядерных реакций.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование, XIV. М., МГУ, 1970.
186. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. О методах решения обратной задачи теории антенн.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование, XIII, МГУ, 1969.
187. Тихонов А. Н., Карманов В. Г., Руднева Т. Л. Об устойчивости задач линейного программирования.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование, XII, М., МГУ, 1969.
188. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Думова А. А., Митрофанов В. Е., Пергамент А. Х., Пергамент М. И. О многоцелевой проблемноориентированной системе обработки результатов экспериментов.— М.: ИПМ, 1976.— Препринт № 142.
189. Фридман В. И. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма первого рода.— УМН, 1956, 11, № 1.
190. Халфин Л. А., Судаков В. Н. Статистический подход к корректности задач математической физики.— ДАН СССР, 1964, 157, № 5.
191. Худак Ю. И. О регуляризации решений интегральных уравнений первого рода.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 4.
192. Худак Ю. И. О сходимости одного семейства регуляризирующих операторов.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 2.
193. Чудов Л. А. Разностные схемы и некорректные задачи для уравнений с частными производными.— В кн.: Вычисл. матем. и программирование, VIII, М., МГУ, 1967.
194. Arcangeli R., Pseudosolution de l'equation $Ax=y$.—Comptes Ren. Acad. Sci., 1966, 263, № 8.
195. Bellman R., Kalaba R., Lochett J. Dynamic programming and ill — conditioned linear systems.— J. Math. Anal. and Appl., 1965, 10.
196. Bensonssan A., Keneth P., Sur l'analogue entre les méthodes de regularisation et de penalisation.— Rev. franc. inform. et rech. oper., 1968, 2, № 13.
197. Cavayan H. S., Belford G. G. On computing a stable least squares solution to the inverse problem for a planar Newtonian potential.— SIAM J. Appl! Math., 1971 20, № 1.

198. Cruceanu S. Regularisation pour les problèmes à operateurs monotones et la méthode de Galerkine.— Comment. Math. Univ. Carol., 1971, 12, № 1.
199. Douglas J. A numerical method for analitic Continuation.— Madison: Boundary Problems Different. Equat. Univ. Wisconsin Press.: 1960.
200. Douglas J. Mathematical programming and integral equations.— In: Sympos. Numerical Treatm. Ordinary Different Equat., Integral and Integro — different. Equat., Birkhauser, 1960.
201. Fox D. W., Pucci C. The Dirichlet problem for the waves equation.— Annali di Math., 1958, 48.
202. Fichera G. Sur Concetto di problema «benposti» pur una equazione differentiale.— Rend. math. e. appl., 1960, 19, № 1.
203. Furi M., Vignolli A. On the regularization on nonlinear ill — possed problem in Banach spaces.— J. Optimiz. Theory and Appl., 1969, 4, № 3.
204. Hadamard J. Sur les problèmes aux derivees partielles et leur signification physique.— Bull. Univ. Princeton, 1902, 13.
205. Hadamard J. Le problème de Caucy et les équations aux derivees partielles linéaires hyperboliques.— P.: Hermann, 1932.
206. John F. Numerical solution on the equation of heat conduction for proceeding times.— Ann. Math. Pura ed Appl., 1955, 40.
207. John F. Numerical solution of problems wich are not well posed in the sense of Hadamard.— Rome: Sympos. Numeric. Treatm. Partial Differen. Equat. with Real Char., 1959.
208. Marton K., Varga L. Regularization of certain operator equations by filters.— Stud. Sci. Math. Hung., 1971, 6, № 3, 4.
209. Nedyalkov I. P. An Approach in the theory of incorrect problems.— Докл. Болг. АН, 1970, 23.
210. Newman D. J. Numerical method for solution of an elliptic Cauchy problem.— J. Math. and Phys., 1960, 39, № 1.
211. Panel L. E. Bounds in the Cauchy problem for the Laplace equation.— Arch. Rational. Mech. Anal., 1960, 5, № 1:
212. Phillips D. L. A technique for the numerical solution of certain integral eguations of the first kind.— J. Assoc. Comput. Nach. 1962, 9, № 1.
213. Pucci C. Sui problemi Cauchy non «ben posti».— Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. fis. math. e natur., 1955, 18, № 5.
214. Pucci C. Discussione del problema di Cauchy pur le equazioni di tipo elliptico.— Ann. mat. pura ad appl., 1968, 46.
215. Pucci C. On the improperly posed Cauchy problems for parabolic equations.— In: Sympos. Numeric. Treatm. Partial Different. Equat. with Real Caracteristics, Rome, 1959.
216. Replogle J., Holcomb B. D. The use of mathematical programming for solving singular and poorly conditional systems of equations.— J. Math. Anal., 1967, 20, № 2.
217. Ribiere G. Regularisation des operateurs.— Rev. Trans. inform. et rech. oper., 1967, 1, № 11.
218. Strand O. N., Westwater E. R. Statistical estimation of the numerical solution of a Fredholm integral equations of the first kind.— J. Assoc. Comput. Math., 1968, 15, № 1.

219. T w o m e y S. On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadratiere.— J. Assoc. Comput. Mach., 1963, 10, № 1.
220. T w o m e y S. The application of numerical filtering to the solution of integral equations encountered in indirect sensing measurements.— J. Franklin Inst., 1965.
221. W i e n e r N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications.— N. Y.: J. Wiley, 1950.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ