

В. В. Прасолов

Рассказы  
о числах, многочленах и фигурах

Москва  
Издательство МЦНМО  
2017

УДК 51  
ББК 22.1  
П70

**Прасолов В. В.**

П70      Рассказы о числах, многочленах и фигурах. — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2017. — 88 с.

ISBN 978-5-4439-1142-7

Книга состоит из двадцати двух рассказов — жемчужин арифметики, алгебры, геометрии, топологии. Автору удалось на доступном для школьника уровне просто, понятно и строго рассказать о разнообразных результатах «взрослой» математики — классической и современной.

Тема каждого рассказа может послужить основой для проведения факультатива или занятия математического кружка. Книга адресована школьникам, студентам, преподавателям и всем интересующимся математикой.

ББК 22.1

12+

ISBN 978-5-4439-1142-7

© Прасолов В. В., 2017.

© МЦНМО, 2017.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	4
1. Сопряжённые числа . . . . .	5
2. Рациональная параметризация окружности . . . . .	8
3. Суммы квадратов многочленов . . . . .	10
4. Представление чисел в виде суммы двух квадратов . . . . .	13
5. Любой ли узел можно развязать? . . . . .	16
6. Построение правильного 17-угольника . . . . .	20
7. Решение уравнений 3-й и 4-й степени . . . . .	24
8. Точки пересечения диагоналей правильных многоугольников . . . .	27
9. Кубические уравнения, связанные с треугольником . . . . .	31
10. Уравнение Маркова . . . . .	34
11. Целозначные многочлены . . . . .	36
12. Точки Брокара . . . . .	38
13. Многочлены Чебышёва . . . . .	45
14. Метод усреднения и геометрические неравенства . . . . .	48
15. Хроматический многочлен графа . . . . .	54
16. Диофантовы уравнения для многочленов . . . . .	57
17. Прямые Паскаля . . . . .	61
18. Теоремы о бабочке и о двух бабочках . . . . .	65
19. Двойкопериодические последовательности . . . . .	67
20. Теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии . . . . .	70
21. Изогонально сопряжённые точки . . . . .	74
22. Кубические кривые, связанные с треугольником . . . . .	80

## Предисловие

Книга содержит 22 рассказа, каждый из которых посвящён отдельному математическому сюжету: яркому математическому утверждению вместе с интересным доказательством; простому, но эффективному методу решения задач; интересным свойствам многочленов; замечательным точкам треугольника.

Знакомство с каждым из сюжетов этих коротких рассказов произвело на меня в своё время большое впечатление, и каждый из них заставил меня над ним поразмыслить. Ко многим из этих сюжетов я неоднократно возвращался, каждый раз находя для себя что-то новое.

Эти рассказы в основном не зависят друг от друга. В этом отношении единственное существенное исключение составляет последний рассказ о кубических кривых, связанных с треугольником. Он опирается на предшествующий ему рассказ об изогональном сопряжении относительно треугольника. Но кубические кривые, связанные с треугольником, — это уже достаточно сложная тема, и изложить её с самого начала, без каких-либо предварительных сведений, было бы трудно.

Тема каждого рассказа может послужить основой для проведения факультативного занятия или занятия математического кружка.

На все эти темы я прочитал лекции для школьников Москвы, Тель-Авива, Хайфы и Челябинска.

Во этом издании добавлен рассказ 19 «Двоякопериодические последовательности».

## 1. Сопряжённые числа

Вычислив несколько начальных членов последовательности  $a_n = (2 + \sqrt{3})^n$ , легко заметить, что при возрастании  $n$  число  $a_n$  всё меньше и меньше отличается от целого числа:

$$\begin{aligned}a_1 &\approx 3,7321, \\a_2 &\approx 13,9282, \\a_3 &\approx 51,9808, \\a_4 &\approx 193,9948, \\a_5 &\approx 723,9986, \\a_6 &\approx 2701,9996.\end{aligned}$$

Эта странная закономерность слегка проясняется после вычисления нескольких начальных членов последовательности  $b_n = (2 - \sqrt{3})^n$ . Дело в том, что

$$\begin{aligned}b_1 &\approx 0,2679 \approx 4 - a_1, \\b_2 &\approx 0,0718 \approx 14 - a_2, \\b_3 &\approx 0,0192 \approx 52 - a_3, \\b_4 &\approx 0,0052 \approx 194 - a_4, \\b_5 &\approx 0,0014 \approx 724 - a_5, \\b_6 &\approx 0,0004 \approx 2702 - a_6.\end{aligned}$$

Убывание чисел  $b_n$  очевидно, поскольку  $|2 - \sqrt{3}| < 1$ . Таким образом, чтобы выяснить причины обнаруженного поведения чисел  $a_n$ , достаточно доказать, что все числа  $a_n + b_n$  будут целыми.

Прежде всего заметим, что представление числа в виде  $m + n\sqrt{3}$ , где  $m$  и  $n$  — рациональные числа, единственно. В самом деле, пусть  $m + n\sqrt{3} = m_1 + n_1\sqrt{3}$ , причём числа  $m, n, m_1$  и  $n_1$  рациональные. Если  $m_1 \neq m$  или  $n_1 \neq n$ , то  $\sqrt{3} = \frac{m - m_1}{n_1 - n}$ . Это равенство выполняться не может, поскольку  $\sqrt{3}$  — иррациональное число.

Таким образом, для каждого числа  $z$  вида  $m + n\sqrt{3}$ , где  $m$  и  $n$  — рациональные числа, можно определить сопряжённое число  $\bar{z} = m - n\sqrt{3}$ . Легко проверить, что  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$ , т. е. если

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = A + B\sqrt{3},$$

то

$$(a - b\sqrt{3})(c - d\sqrt{3}) = A - B\sqrt{3}.$$

Используя это свойство, получаем, что если

$$(a + b\sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3},$$

то  $(a - b\sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$ . Следовательно,

$$a_n + b_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2A_n$$

— целое число.

Поведение дробных частей чисел  $a_n = (p + \sqrt{q})^n$ , где  $p$  и  $q$  — натуральные числа, причём  $0 < p - \sqrt{q} < 1$ , совершенно аналогично. В том случае, когда  $-1 < p - \sqrt{q} < 0$ , ситуация чуть более сложная. Дело в том, что хотя и числа  $(p + \sqrt{q})^n + (p - \sqrt{q})^n$  будут целыми при всех натуральных  $n$ , но при чётных  $n$  число  $(p - \sqrt{q})^n$  будет положительным, а при нечётных  $n$  число  $(p - \sqrt{q})^n$  будет отрицательным.

Пусть  $a$  и  $b$  — рациональные числа,  $N$  — натуральное число, не являющееся полным квадратом. Тогда если  $(a + b\sqrt{N})^n = A + B\sqrt{N}$ , то  $(a - b\sqrt{N})^n = A - B\sqrt{N}$ . Мы доказали это утверждение лишь при  $N = 3$ , но доказательство в общем случае совершенно аналогично. Одно из применений этого утверждения мы уже обсудили. Рассмотрим теперь некоторые другие применения.

1. Для рациональных чисел  $x, y, z$  и  $t$  равенство

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}$$

невозможно.

В самом деле, если для рациональных чисел  $x, y, z$  и  $t$  выполняется указанное равенство, то для тех же самых чисел должно выполняться равенство

$$(x - y\sqrt{2})^2 + (z - t\sqrt{2})^2 = 5 - 4\sqrt{2}.$$

Но  $5 - 4\sqrt{2} < 0$ , а  $(x - y\sqrt{2})^2 + (z - t\sqrt{2})^2 \geq 0$ .

2. Для натуральных  $n$  и  $p$  равенство  $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$  не может выполняться.

В самом деле, если

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n,$$

то  $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$ . Прийти к противоречию теперь можно разными способами. Во-первых, можно заметить, что  $|5 - 3\sqrt{2}| < 1$

и  $|3 - 5\sqrt{2}| > 1$ . Во-вторых, можно перемножить равенства

$$(5 \pm 3\sqrt{2})^m = (3 \pm 5\sqrt{2})^n;$$

в результате получим  $7^m = (-41)^n$ .

3. Уравнение  $x^2 - 2y^2 = 1$  имеет бесконечно много решений.

Нетрудно найти одно решение этого уравнения, например,  $x_1 = 3$  и  $y_1 = 2$ . Равенство  $x_1^2 - 2y_1^2 = 1$  можно записать в виде

$$(x_1 - y_1\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2}) = 1.$$

Ясно, что тогда

$$(x_1 - y_1\sqrt{2})^n (x_1 + y_1\sqrt{2})^n = 1.$$

Кроме того,  $(x_1 \pm y_1\sqrt{2})^n = x_n \pm y_n\sqrt{2}$ . Поэтому

$$x_n^2 - 2y_n^2 = 1,$$

т. е.  $(x_n, y_n)$  тоже решение, причём  $x_{n+1} > x_n$ ,  $y_{n+1} > y_n$ .

Приведём без доказательства некоторые свойства решений уравнения  $x^2 - dy^2 = c$  в натуральных числах ( $d$  — натуральное число, не являющееся полным квадратом). Уравнение  $x^2 - dy^2 = 1$  имеет решения при всех  $d$ ; если  $(x_1, y_1)$  — наименьшее решение (т. е. решение с наименьшим  $x_1$  или наименьшим  $y_1$  — это безразлично), то любое другое натуральное решение имеет вид  $(x_n, y_n)$ , где

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

При  $c \neq 1$  уравнение  $x^2 - dy^2 = c$  может не иметь натуральных решений. Например, уравнения  $x^2 - 2y^2 = 3$  и  $x^2 - 5y^2 = 2$  не имеют натуральных решений.

Если  $d$  — простое число вида  $4k + 3$ , то уравнение  $x^2 - dy^2 = -1$  не имеет натуральных решений, а если  $d$  — простое число вида  $4k + 1$ , то уравнение  $x^2 - dy^2 = -1$  всегда имеет натуральные решения.

Пусть  $(x_1, y_1)$  — наименьшее натуральное решение уравнения  $x^2 - dy^2 = 1$ ,  $(x', y')$  — некоторое натуральное решение уравнения  $x^2 - dy^2 = c$ . Тогда числа  $(x'_n, y'_n)$ , где

$$x'_n + y'_n\sqrt{d} = (x' + y'\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^{n-1},$$

будут решениями уравнения  $x^2 - dy^2 = c$ . Все решения уравнения  $x^2 - dy^2 = c$  представляют собой конечное семейство таких последовательностей  $(x'_n, y'_n)$ , исходящих из решений  $(x', y')$ . Но при  $c \neq 1$  этих последовательностей может быть несколько. Например, решения уравнения  $x^2 - 2y^2 = 7$  представляют собой две непересекающиеся последовательности, исходящие из решений  $(3, 1)$  и  $(5, 3)$ .

## 2. Рациональная параметризация окружности

Чтобы найти все точки окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , обе координаты которых рациональны, можно воспользоваться следующей конструкцией. Возьмём на окружности произвольную точку  $A$  с рациональными координатами и проведём через неё всевозможные прямые. Например, в качестве точки  $A$  можно взять точку  $(1, 0)$  или точку  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ . Мы проведём вычисления для точки  $(1, 0)$ , хотя для любой другой точки с рациональными координатами вычисления будут аналогичны.

Прямая, проходящая через точку  $(1, 0)$ , задаётся либо уравнением  $y = t(x - 1)$ , либо уравнением  $x = 1$  (уравнение  $x = 1$  можно получить из уравнения  $y = t(x - 1)$ , положив  $t = \infty$ ; поэтому удобно считать, что  $t$  принимает также значение  $\infty$ ). Чтобы найти точки пересечения прямой  $y = t(x - 1)$  и окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , нужно решить квадратное уравнение  $x^2 + t^2(x - 1)^2 = 1$ , т. е.

$$x^2 - \frac{2t}{t^2 + 1}x + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0.$$

Одна точка пересечения прямой и окружности, соответствующая  $x = 1$ , известна. Поэтому координату  $x$  второй точки пересечения можно найти с помощью теоремы Виета. В результате получим

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = t(x - 1) = -\frac{2t}{t^2 + 1}.$$

Таким образом, точка пересечения окружности  $x^2 + y^2 = 1$  и прямой  $y = t(x - 1)$  имеет координаты

$$\left( \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \frac{-2t}{t^2 + 1} \right).$$

Это означает, что точка окружности имеет рациональные координаты тогда и только тогда, когда она соответствует рациональному значению параметра  $t$ . В самом деле, если число  $t$  рационально, то числа  $x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$  и  $y = \frac{-2t}{t^2 + 1}$  рациональны. А если числа  $x$  и  $y$  рациональны, то число  $t = \frac{y}{x - 1}$  тоже рационально. Значение  $t = \infty$ , соответствующее точке  $(1, 0)$ , удобно при этом тоже считать рациональным.

Как мы уже говорили, взяв любую другую рациональную точку окружности, можно повторить аналогичные вычисления и получить аналогичную параметризацию окружности параметром  $t$ , причём рациональным значениям параметра будут соответствовать рациональные точки окружности. Более того, аналогичным образом можно параметризовать произвольную кривую второго порядка

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (1)$$

Для этого нужно взять произвольную точку кривой и провести через неё всевозможные прямые.

Предположим, что выполняются следующие условия:

- коэффициенты  $a, b, \dots, f$  рациональны;
- выбранная точка кривой имеет рациональные координаты;
- кривая (1) содержит бесконечно много точек.

Тогда в результате получим такую параметризацию кривой (1), что рациональным значениям параметра  $t$  соответствуют точки кривой, обе координаты которых рациональны. Напомним, что мы пользовались тем, что кривая (1) содержит хотя бы одну точку с рациональными координатами. Но такая точка есть не всегда. Самый простой пример — кривая  $x^2 + y^2 = -1$ .

Более интересен пример кривой  $2x^2 + 5y^2 = 1$ . Проверим, что на ней нет рациональных точек. Предположим, что  $(x, y)$  — рациональная точка этой кривой. Можно считать, что  $x = \frac{p_1}{q}$  и  $y = \frac{p_2}{q}$ , причём у чисел  $p_1, p_2, q$  нет общего делителя (т. е. нет числа  $d$ , на которое делятся все эти три числа).

Числа  $p_1, p_2, q$  удовлетворяют соотношению  $2p_1^2 + 5p_2^2 = q^2$ . Поэтому числа  $2p_1^2$  и  $q^2$  при делении на 5 дают одинаковые остатки. Но число  $a^2$  при делении на 5 может давать лишь остатки  $\pm 1$  и 0. Поэтому число  $2p_1^2$  при делении на 5 даёт остаток  $\pm 2$  или 0, а число  $q^2$  даёт остаток  $\pm 1$  или 0. Следовательно, оба числа  $2p_1^2$  и  $q^2$  делятся на 5, а значит, они делятся на 25. Но тогда число  $5p_2^2$  делится на 25, а значит, число  $p_2$  делится на 5. В результате получаем, что числа  $p_1, p_2, q$  делятся на 5, а это противоречит предположению.

### 3. Суммы квадратов многочленов

Нетрудно доказать, что любой многочлен  $p(x)$  с действительными коэффициентами, принимающий неотрицательные значения при всех действительных  $x$ , можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами. В самом деле, корни многочлена с действительными коэффициентами разбиваются на действительные корни и пары комплексных корней. Поэтому

$$p(x) = a \prod_{j=1}^s (x - z_j)(x - \bar{z}_j) \prod_{k=1}^t (x - \alpha_k)^{m_k},$$

где числа  $\alpha_k$  действительные. Если  $p(x) \geq 0$  при всех действительных  $x$ , то  $a \geq 0$  и все числа  $m_k$  чётны, поэтому действительные корни тоже разбиваются на пары. Следовательно,

$$p(x) = \left( \sqrt{a} \prod_{j=1}^l (x - z_j) \right) \left( \sqrt{a} \prod_{j=1}^l (x - \bar{z}_j) \right),$$

где некоторые из чисел  $z_j$  могут быть действительными. Пусть

$$\sqrt{a} \prod_{j=1}^l (x - z_j) = q(x) + ir(x),$$

где  $p$  и  $q$  — многочлены с действительными коэффициентами. Тогда

$$\sqrt{a} \prod_{j=1}^l (x - \bar{z}_j) = q(x) - ir(x).$$

В итоге получаем  $p(x) = (q(x))^2 + (r(x))^2$ .

Но для многочленов от нескольких переменных аналогичное утверждение уже не всегда верно, т. е. существуют *неотрицательные* многочлены (так мы будем называть многочлены с действительными коэффициентами, которые при всех действительных значениях переменных принимают неотрицательные значения), которые нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами. Первым это доказал Гильберт, но

он не привёл явный пример такого многочлена. Первый простой пример привёл Т. Моцкин. А именно, он показал, что многочлен

$$F(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1$$

неотрицателен, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами. Основная трудность заключалась, конечно, в том, чтобы найти этот многочлен, а само доказательство его свойств, как мы сейчас увидим, несложно.

Доказательство неотрицательности многочлена  $F(x, y)$  опирается на неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трёх чисел:

$$(x_1 x_2 x_3)^{1/3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (1)$$

при  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ . Напомним, как доказывается это неравенство. Прежде всего заметим, что

$$(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2 = y_1^2 + y_2^2 \geq 0,$$

поэтому

$$\sqrt{y_1 y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Положим  $y_1 = \sqrt{u_1 u_2}$  и  $y_2 = \sqrt{u_3 u_4}$ . Тогда

$$(u_1 u_2 u_3 u_4)^{1/4} \leq \frac{\sqrt{u_1 u_2} + \sqrt{u_3 u_4}}{2} \leq \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}.$$

Положим теперь  $u_1 = x_1, u_2 = x_2, u_3 = x_3$  и  $u_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ . Тогда

$$\left( \frac{x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)}{3} \right)^{1/4} \leq \frac{1}{4} \left( x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

а значит,

$$x_1 x_2 x_3 \leq \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right)^3.$$

Теперь можно доказать неотрицательность многочлена  $F(x, y)$ . Если  $x = 0$  или  $y = 0$ , то  $F(x, y) = 1$ . Поэтому будем считать, что  $xy \neq 0$ . В таком случае числа  $x^2, y^2$  и  $x^{-2}y^{-2}$  положительны и их произведение равно 1. Поэтому из неравенства (1) следует, что

$$x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2} \geq 3,$$

а значит,  $x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1 \geq 0$ , что и требовалось.

Предположим теперь, что  $F(x, y) = \sum f_j(x, y)^2$ , где  $f_j$  — многочлены с действительными коэффициентами. Тогда  $\sum f_j(x, 0)^2 = F(x, 0) = 1$ . Следовательно,  $f_j(x, 0) = c_j$  — некоторая константа,

а значит,  $f_j(x, y) = c_j + yg_j(x, y)$ . Аналогичные рассуждения показывают, что  $f_j(x, y) = c'_j + xg'_j(x, y)$ . Ясно, что  $c_j = c'_j$  и  $f_j(x, y) = c_j + xyh_j(x, y)$ , причём

$$\deg h_j = \deg f_j - 2 \leq \frac{1}{2} \deg F - 2 = 1.$$

Таким образом,

$$x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) + 1 = x^2y^2 \sum h_j^2 + 2xy \sum c_j h_j + \sum c_j^2,$$

т. е.

$$x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) - x^2y^2 \sum h_j^2 = 2xy \sum c_j h_j + \sum c_j^2 - 1.$$

Все одночлены, встречающиеся в правой части этого равенства, имеют степень не больше 3, а все одночлены, встречающиеся в левой части этого равенства, имеют степень не меньше 4. Следовательно,  $x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) - x^2y^2 \sum h_j^2 = 0$ , а значит,  $x^2 + y^2 - 3 = \sum h_j^2$ . Получено противоречие, так как  $x^2 + y^2 - 3 < 0$  при  $x = y = 0$ .

Мы обсудили лишь наиболее простые из известных результатов о суммах квадратов. Сейчас на эту тему известно весьма многое, но многие вопросы остаются пока без ответа. Немецкий математик Давид Гильберт высказал предположение, что любой неотрицательный многочлен от многих переменных можно представить в виде суммы квадратов не многочленов, а рациональных функций. Вопрос о том, верно это или нет, он включил под номером 17 в свой знаменитый список 23 проблем. Семнадцатая проблема Гильберта была решена в 1927 г. Э. Артином. Он доказал, что любой неотрицательный многочлен можно представить в виде суммы квадратов некоторого количества рациональных функций. В 1967 г. А. Пфистер уточнил теорему Артина; он доказал, что любой неотрицательный многочлен от  $n$  переменных можно представить в виде суммы  $2^n$  квадратов рациональных функций. Но до сих пор неизвестно, можно ли  $2^n$  заменить на меньшее число. Лишь при  $n = 2$  известно, что число  $2^n = 4$  в данном случае минимально. А именно, в 1971 г. Касселс, Эллисон и Пфистер показали, что многочлен

$$1 + x^4y^2 + y^4x^2 - 3x^2y^2$$

неотрицателен, но его нельзя представить в виде суммы квадратов трёх рациональных функций. Их доказательство весьма сложно; оно опирается на глубокие результаты из теории эллиптических кривых.

## 4. Представление чисел в виде суммы двух квадратов

В 1658 г. Пьер Ферма в одном из своих писем сообщил, что он получил «неопровержимые доказательства» того, что любое простое число вида  $4k + 1$  является суммой двух квадратов, а любое число является суммой не более чем четырёх квадратов. Никаких записей этих доказательств Ферма не оставил. Прошло почти сто лет, и этими теоремами заинтересовался Леонард Эйлер. Первую из них он доказал в 1747 г., а через два года он нашёл изящное и сравнительно простое доказательство той же теоремы. Вторая теорема была доказана лишь в 1770 г. Лагранжем, после чего Эйлер сумел значительно упростить его доказательство.

В дальнейшем были найдены другие интересные доказательства теоремы о представлении простых чисел  $p = 4k + 1$  в виде суммы двух квадратов. Но все они, как и доказательство Эйлера, были не вполне элементарны. И лишь совсем недавно<sup>1</sup> было получено очень изящное и вполне элементарное доказательство этой теоремы.

Центральное место в этом доказательстве занимает простое, но важное понятие инволюции. Пусть  $M$  — некоторое множество. Отображение  $\sigma : M \rightarrow M$  называют *инволюцией*, если  $\sigma(\sigma(m)) = m$  для любого элемента  $m$  множества  $M$ . Примером инволюции служит любая симметрия. Инволюция позволяет разбить точки (элементы множества  $M$ ) на пары  $\{m, \sigma(m)\}$  «симметричных» точек. Для элемента  $\sigma(m)$  получается та же самая пара, что и для элемента  $m$ , так как  $\sigma(\sigma(m)) = m$ . Пара элементов не возникает лишь в том случае, когда  $\sigma(m) = m$  (такие точки  $m$  называют *неподвижными*). Поэтому если на конечном множестве  $M$  задана инволюция, то чётность количества элементов множества  $M$  совпадает с чётностью количества неподвижных точек инволюции (остальные элементы разбиваются на пары, поэтому их количество чётно).

Общая схема доказательства такова. Рассмотрим множество всех решений уравнения  $x^2 + 4yz = p$  в натуральных числах. Достаточно доказать, что если  $p = 4k + 1$ , то у этого уравнения есть реше-

---

<sup>1</sup> Zagier D. A one-sentence proof that every prime  $p \equiv 1 \pmod{4}$  is a sum of two squares // Amer. Math. Monthly. 1990. V. 97, № 2. P. 114.

ние, для которого  $y = z$ . В самом деле, тогда  $p = x^2 + (2y)^2$ . Решение, для которого  $y = z$ , — это неподвижная точка инволюции  $\sigma(x, y, z) = (x, z, y)$ . Поэтому достаточно доказать, что общее количество решений нечётно. Для этого строится другая инволюция  $\tau$ , имеющая ровно одну неподвижную точку. Вот эта инволюция:

$$\tau(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z), & x < y - z; \\ (2y - x, y, x - y + z), & y - z < x < 2y; \\ (x - 2y, x - y + z, y), & 2y < x. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Отметим сначала, что  $x \neq 2y$  и  $x \neq y - z$ , так как иначе  $p = x^2 + 4yz = 4(y^2 + yz)$  или  $p = (y - z)^2 + 4yz = (y + z)^2$ . Проверим, далее, что любое решение уравнения  $x^2 + 4yz = p$  инволюция  $\tau$  действительно переводит в решение. Это следует из тождеств

$$(x + 2z)^2 + 4z(y - x - 2z) = x^2 + 4yz,$$

$$(x - 2y)^2 + 4y(x - y + z) = x^2 + 4yz.$$

Пусть  $\tau(x, y, z) = (x', y', z')$ . Если  $x < y - z$ , то

$$x' = x + 2z > 2z = 2y',$$

т.е. точка типа (1) переходит в точку типа (3). Аналогично проверяется, что точка типа (3) переходит в точку типа (1), а точка типа (2) — в точку типа (2). Теперь уже легко проверить, что  $\tau$  — инволюция.

Точка типа (1) не может быть неподвижной, так как

$$x' = x + 2z > x;$$

для точки типа (3) имеем  $x' = x - 2y < x$ . Поэтому неподвижной может быть лишь точка типа (2), причём для неё должно выполняться соотношение  $z = z' = x - y + z$ , т.е.  $x = y$ . В этом случае  $p = x^2 + 4yz = x(x + 4z)$ , а значит,  $x = y = 1$  (здесь мы используем простоту числа  $p$ ). Если  $p = 4k + 1$ , то  $(1, 1, k)$  — неподвижная точка (здесь мы используем то, что число  $p$  имеет вид  $4k + 1$ ). Доказательство завершено.

Сделаем ещё некоторые замечания по поводу представления чисел в виде суммы двух квадратов. Прежде всего отметим, что простое число вида  $4k + 3$  нельзя представить в виде суммы двух квадратов. В самом деле, квадрат числа  $2m + 1$  равен  $4(m^2 + m) + 1$ , поэтому остаток от деления его на 4 равен 1. Следовательно, остаток от деления суммы двух квадратов на 4 равен 0, 1 или 2, но никак не 3.

Условие простоты числа  $p = 4k + 1$  тоже существенно. Например, число 21 нельзя представить в виде суммы двух квадратов.

Отметим также, что если  $m = a^2 + b^2$  и  $n = c^2 + d^2$ , то

$$mn = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

тоже сумма двух квадратов. Поэтому произведение простых чисел вида  $4k + 1$  можно представить в виде суммы двух квадратов. Если же в какое-то натуральное число простой множитель вида  $4k + 3$  входит в нечётной степени, то это число нельзя представить в виде суммы двух квадратов. Это следует, например, из того, что если  $a^2 + b^2$  делится на простое число  $p = 4k + 3$ , то оба числа  $a$  и  $b$  делятся на  $p$ . (Доказательство этого утверждения опирается на малую теорему Ферма.)

## 5. Любой ли узел можно развязать?

Узел можно представлять себе как верёвку, концы которой соединены. При этом сама верёвка может быть как угодно запутана. Простейшие примеры узлов изображены на рис. 5.1. Узел, изображённый на рис. 5.1б, называют *трилистником*.

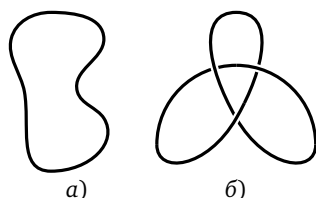


Рис. 5.1

После того как концы верёвки соединены, её можно как угодно распутывать или запутывать ещё больше, не допуская при этом разрывов верёвки. Попытавшись «развязать» трилистник (т. е. превратить его в узел, изображённый на рис. 5.1а), вы вскоре убедитесь, что сделать это не удастся. Но как доказать, что этого действительно невозможно добиться ни при какой последовательности запутываний и распутываний трилистника? Известные ранее доказательства этого утверждения использовали весьма сложную технику алгебраической топологии. Лишь сравнительно недавно, в 1980-е годы, появилось элементарное доказательство того, что трилистник (и некоторые другие узлы) нельзя развязать. Это доказательство мы сейчас расскажем

Для узла можно рассмотреть его проекцию на некоторую плоскость, и на этой проекции можно обозначить, какие части узла расположены сверху, а какие снизу. Такую картинку называют *диаграммой узла*; примером диаграммы трилистника служит рис. 5.1б.

Диаграмма узла состоит из нескольких дуг; например, диаграмма 5.1б состоит из трёх дуг. Рассмотрим всевозможные раскраски диаграммы узла в три цвета. При этом каждую дугу будем красить одним цветом. Назовём раскраску в три цвета *правильной*, если на каждом перекрёстке сходятся либо дуги одного цвета, либо дуги

всех трёх цветов (т. е. на одном перекрёстке не могут встретиться две дуги одного цвета и одна дуга другого цвета).

**Теорема.** *Количество правильных раскрасок диаграммы узла не изменяется при распутываниях и запутываниях узла.*

**Доказательство.** Мы воспользуемся без доказательства следующим достаточно очевидным утверждением: преобразование диаграммы узла при его запутывании или распутывании сводится к последовательному выполнению трёх простейших преобразований диаграммы, изображённых на рис. 5.2. Для строгого обоснования этого утверждения можно заменить узел ломаной и проследить за изменением проекции ломаной в процессе запутывания или распутывания узла.

Требуется проверить, что при указанных преобразованиях каждая правильная раскраска переходит в однозначно определённую правильную раскраску преобразованной диаграммы. Поясним, что мы имеем в виду. Пусть задана правильная раскраска диаграммы. Рассмотрим диаграмму, полученную из данной диаграммы одним из трёх указанных преобразований. Это преобразование совершается внутри круга  $D$ . Оставим без изменения раскраску той части диаграммы, которая лежит вне круга  $D$ . Дуги преобразованной диаграммы, пересекающие границу круга  $D$ , окажутся при этом каким-то образом раскрашенными. Нужно проверить, что эту раскраску можно продолжить до правильной раскраски всех дуг, лежащих внутри круга  $D$ , причём такое продолжение ровно одно.

Для одноцветных раскрасок это проверяется очень просто. А для всех существенно различных разноцветных правильных раскрасок их преобразования изображены на рис. 5.3. Доказательство теоремы завершено.  $\square$

Теперь можно доказать, что трилистник не развязывается. На рис. 5.4 изображена правильная раскраска диаграммы трилистника, при которой используются все три цвета. А у незаузленной окружности, изображённой на рис. 5.1а, есть только одноцветные раскраски.

К сожалению, с помощью правильных раскрасок диаграмм в три цвета не для всех узлов удаётся выяснить, развязываются они или

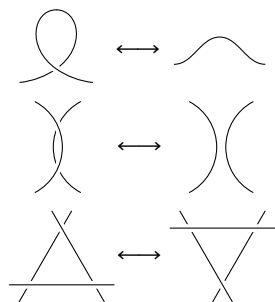


Рис. 5.2

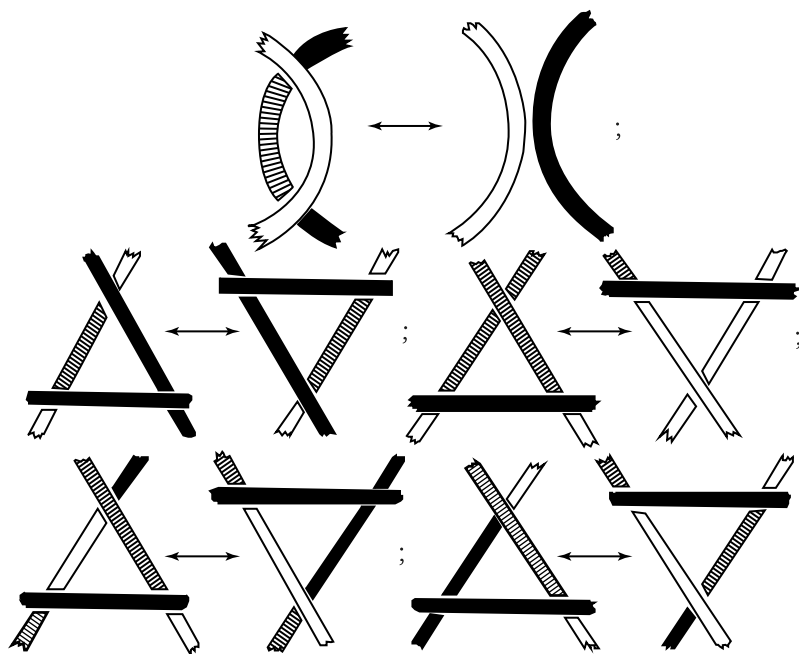


Рис. 5.3

нет. Например, узел *восьмёрка*, изображённый на рис. 5.5, нельзя развязать, но все его диаграммы допускают лишь одноцветные раскраски в три цвета, как и диаграммы незаузеленной окружности.

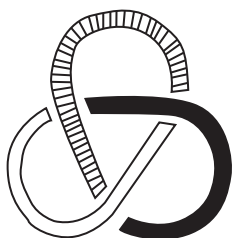


Рис. 5.4

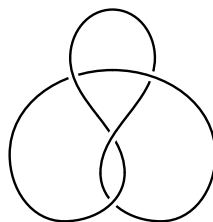


Рис. 5.5

Чтобы доказать, что узел *восьмёрка* нельзя развязать, можно рассмотреть раскраски в пять цветов. В этом случае удобно рассматривать цвета как остатки от деления на 5. Будем говорить, что

раскраска диаграммы узла *правильная*, если на каждом перекрёстке выполняется соотношение

$$b + c \equiv 2a \pmod{5}$$

(см. рис. 5.6); это выражение означает, что числа  $b + c$  и  $2a$  дают одинаковые остатки при делении на 5. Аналогично можно определить правильную раскраску диаграммы узла в  $n$  цветов. Проверьте самостоятельно, что при  $n = 3$  мы получаем то же самое определение правильной раскраски, что и раньше.

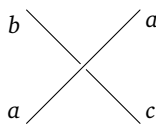


Рис. 5.6

С помощью рис. 5.7 легко проверить, что количество правильных раскрасок диаграммы узла в  $n$  цветов не меняется при запутывании и распутывании узла.

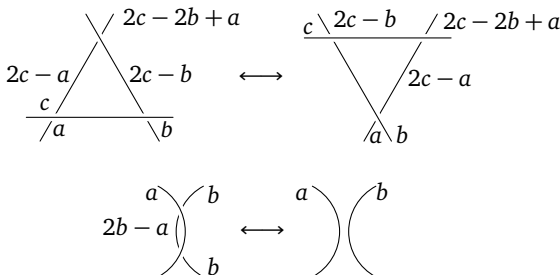


Рис. 5.7

Рис. 5.8 показывает, что у диаграммы узла восьмёрка есть разноцветная правильная раскраска в пять цветов, поэтому узел восьмёрка не развязывается.

Несложно проверить, что все правильные раскраски диаграммы трилистника в пять цветов одноцветные. Поэтому трилистник и восьмёрка — разные узлы, т. е. их нельзя преобразовать друг в друга.

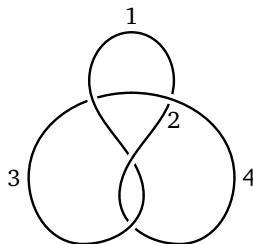


Рис. 5.8

## 6. Построение правильного 17-угольника

В Древней Греции геометры использовали для построений разные инструменты, но основными инструментами были циркуль и линейка. А в самом знаменитом древнегреческом учебнике геометрии, «Началах» Евклида, никакие другие инструменты вообще не встречаются. Поэтому под геометрическими построениями обычно подразумевают построения циркулем и линейкой. Циркуль позволяет построить окружность данного радиуса с центром в данной точке, а линейка позволяет построить прямую, проходящую через две данные точки.

Построению правильных многоугольников в «Началах» Евклида уделено большое внимание. Построение правильного треугольника описано в Предложении 1 Книги I, а почти вся Книга IV посвящена построению других правильных многоугольников: квадрата, пятиугольника, шестиугольника, пятинадцатиугольника. Но ничего существенно нового геометры не могли добавить очень долго, вплоть до 1796 г., когда 19-летний Гаусс показал, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный 17-угольник. Впоследствии он доказал, что если число  $n = 2^{2^k} + 1$  простое, то с помощью циркуля и линейки можно построить правильный  $n$ -угольник. Гаусс утверждал также, что он умеет доказывать, что правильный  $n$ -угольник можно построить лишь в том случае, когда  $n = 2^m p_1 \dots p_s$ , где  $p_1, \dots, p_s$  — различные простые числа вида  $2^{2^k} + 1$ . Но ни в одной из его работ нет доказательства этого утверждения.

Построение правильного 17-угольника в большей степени относится не к геометрии, а к алгебре. Формула Муавра

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

показывает, что корни уравнения  $x^n - 1 = 0$  имеют вид  $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ . На комплексной плоскости эти точки являются вершинами правильного  $n$ -угольника. Таким образом, построение правильного  $n$ -угольника тесно связано с решением уравнения  $x^n - 1 = 0$ . Это уравнение имеет очевидный корень  $x = 1$ . Чтобы избавиться от него, поделим многочлен  $x^n - 1$  на  $x - 1$ . В результате получим

многочлен  $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1$ . Именно его мы будем в дальнейшем рассматривать.

Будем говорить, что комплексное число  $a + ib$  можно построить, если можно построить отрезки длиной  $a$  и  $b$ , т. е. можно построить точку  $a + ib$  на комплексной плоскости. Если задан отрезок единичной длины, то по данным отрезкам  $a$  и  $b$  можно построить отрезки  $a \pm b$ ,  $ab$ ,  $\frac{a}{b}$ ,  $\sqrt{a}$ . Несложно проверить, что

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left[ \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \right)^{1/2} + i \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \right)^{1/2} \right].$$

Поэтому если отрезки  $a$  и  $b$  можно построить, то число  $\sqrt{a + ib}$  тоже можно построить. В итоге получаем, что если числа  $u$  и  $v$  можно построить, то корни уравнения  $x^2 + ux + v = 0$  тоже можно построить.

Разберём для начала с этой точки зрения построение правильных  $n$ -угольников при  $n = 3$  и  $n = 5$ . При  $n = 3$  получаем уравнение  $x^2 + x + 1 = 0$ . Это уравнение квадратное, поэтому его корни можно построить.

При  $n = 5$  получаем уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Положим  $u = x + x^{-1}$ . Легко проверить, что  $u^2 + u - 1 = 0$ . Корни  $u_1$  и  $u_2$  этого уравнения можно построить. С их помощью можно построить корни уравнений  $x^2 - u_1x + 1 = 0$  и  $x^2 - u_2x + 1 = 0$ . Эти корни являются корнями исходного уравнения.

Теперь можно непосредственно заняться построением правильного 17-угольника. Для этого, как мы убедились, достаточно доказать, что корни уравнения  $x^{16} + x^{15} + \dots + x + 1 = 0$  можно получить, последовательно решая квадратные уравнения. Достаточно даже получить один корень  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$ ; остальные корни имеют вид  $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{16}$ . Доказательство Гаусса основано на специальной нумерации этих корней. Он нумерует эти корни таким образом, чтобы при фиксированном  $l$  переход от  $\omega_k$  (корня с номером  $k$ ) к  $\omega_{k+l}$  происходил по одному и тому же правилу, а именно, чтобы при таком переходе число  $\omega_k$  возводилось в некоторую фиксированную степень. Такую нумерацию можно получить, положив  $\omega_k = \varepsilon^{g^k}$ , где числа  $1, g, g^2, g^3, \dots, g^{15}$  дают разные остатки при делении на 17. В самом деле, в таком случае

$$\omega_{k+l} = \varepsilon^{g^{k+l}} = \varepsilon^{g^k g^l} = (\omega_k)^{g^l}.$$

В качестве  $g$  можно взять, например, число 3. При этом

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \varepsilon, & \omega_1 &= \varepsilon^3, & \omega_2 &= \varepsilon^9, & \omega_3 &= \varepsilon^{10}, & \omega_4 &= \varepsilon^{13}, & \omega_5 &= \varepsilon^5, \\ \omega_6 &= \varepsilon^{15}, & \omega_7 &= \varepsilon^{11}, & \omega_8 &= \varepsilon^{16}, & \omega_9 &= \varepsilon^{14}, & \omega_{10} &= \varepsilon^8, & \omega_{11} &= \varepsilon^7, \\ \omega_{12} &= \varepsilon^4, & \omega_{13} &= \varepsilon^{12}, & \omega_{14} &= \varepsilon^2, & \omega_{15} &= \varepsilon^6.\end{aligned}$$

Рассмотрим сначала квадратное уравнение с корнями

$$x_1 = \sum_{k=0}^7 \omega_{2k}, \quad x_2 = \sum_{k=0}^7 \omega_{2k+1}.$$

По теореме Виета  $\sum \omega_i = -1$ , поэтому  $x_1 + x_2 = -1$ . Легко проверить, что

$$\begin{aligned}x_1 &= (\varepsilon + \varepsilon^{16}) + (\varepsilon^8 + \varepsilon^9) + (\varepsilon^2 + \varepsilon^{15}) + (\varepsilon^4 + \varepsilon^{13}) = \\ &= 2(\cos \alpha + \cos 8\alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha), \\ x_2 &= 2(\cos 3\alpha + \cos 7\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha),\end{aligned}$$

где  $\alpha = \frac{2\pi}{17}$ . Воспользовавшись формулой

$$2 \cos p\alpha \cos q\alpha = \cos(p+q)\alpha + \cos(p-q)\alpha,$$

получим

$$x_1 x_2 = 8(\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos 8\alpha) = 4(x_1 + x_2) = -4.$$

Таким образом,  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют квадратному уравнению  $x^2 + x - 4 = 0$  с целыми коэффициентами. Следовательно,  $x_1$  и  $x_2$  можно построить.

Рассмотрим теперь квадратные уравнения с корнями

$$\begin{aligned}y_1 &= \sum_{k=0}^3 \omega_{4k} = 2(\cos \alpha + \cos 4\alpha), \\ y_2 &= \sum_{k=0}^3 \omega_{4k+2} = 2(\cos 8\alpha + \cos 2\alpha).\end{aligned}$$

Легко проверить, что  $y_1 + y_2 = x_1$  и

$$y_1 y_2 = 2(\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos 8\alpha) = x_1 + x_2 = -1.$$

Таким образом,  $y_1$  и  $y_2$  — корни квадратного уравнения  $y^2 - x_1 y + 1 = 0$ . Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned}y_3 &= \sum_{k=0}^3 \omega_{4k+1} = 2(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha), \\ y_4 &= \sum_{k=0}^3 \omega_{4k+3} = 2(\cos 7\alpha + \cos 6\alpha)\end{aligned}$$

— корни квадратного уравнения  $y^2 - x_2y + 1 = 0$ . Следовательно,  $y_1, y_2, y_3$  и  $y_4$  можно построить.

Рассмотрим, наконец, квадратное уравнение с корнями

$$z_1 = \omega_0 + \omega_8 = 2 \cos \alpha, \quad z_2 = \omega_4 + \omega_{12} = 2 \cos 4\alpha.$$

Ясно, что  $z_1 + z_2 = y_3$  и  $z_1 z_2 = 2(\cos 5\alpha + \cos 3\alpha) = y_3$ . Таким образом,  $z_1$  и  $z_2$  — корни квадратного уравнения  $z^2 - y_1 z + y_3 = 0$ . Поэтому число  $z_1 = 2 \cos \alpha$  можно построить, а значит, можно построить и число  $\varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Но тогда можно построить и правильный 17-угольник.

## 7. Решение уравнений 3-й и 4-й степени

Вся история решения уравнений 3-й и 4-й степени связана с Италией. Формулу для решения уравнения 3-й степени открыл Сципион дель Ферро (1465—1526), но он хранил свои результаты в тайне. В 1536 г. эту формулу переоткрыл Никколо Тарталья (1500—1557), готовясь к математическому поединку. После долгих уговоров и клятв хранить всё в тайне Джероламо Кардано (1501—1576) выведал у Тартальи приёмы решения кубических уравнений. Кардано нарушил клятву в 1545 г., опубликовав способ решения кубических уравнений в своей книге по алгебре «Ars magna» («Великое искусство»). Кардано писал, что этот способ он узнал от Тартальи и из бумаг дель Ферро. Тарталья, узнав о появлении книги «Ars magna», едва не сошёл с ума от гнева и начал яростную полемику с Кардано. Помимо решения кубических уравнений книга «Ars magna» содержала решение уравнений 4-й степени, полученное Людовико Феррари (1522—1565), учеником Кардано.

Долгие поиски решения в радикалах уравнения 5-й степени не привели к успеху. В 1799 г. итальянский врач и математик Паоло Руффини (1765—1822) опубликовал доказательство неразрешимости в радикалах общего уравнения 5-й степени, но в этом доказательстве был серьёзный пробел. Полное доказательство неразрешимости уравнения 5-й степени независимо от Руффини получил в 1824 г. молодой норвежский математик Нильс Генрик Абель (1802—1829). А затем Эварист Галуа (1811—1832) разработал теорию, позволяющую для каждого конкретного уравнения выяснить, разрешимо ли оно в радикалах.

Сейчас известно много разных способов решения уравнений 3-й и 4-й степени, но самыми простыми остаются как раз те способы решения, которые были открыты итальянскими математиками. Мы обсудим именно их.

Предварительно заметим, что уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

можно привести к виду

$$y^n + b_2y^{n-2} + \dots + b_n = 0$$

с помощью замены  $y = x + \frac{a_1}{n}$ . Поэтому достаточно рассмотреть кубические уравнения вида  $x^3 + ax + b = 0$  и уравнения 4-й степени вида  $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ .

### Кубические уравнения

Попытаемся представить корни уравнения  $x^3 + ax + b = 0$  в виде  $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ . В таком случае должно выполняться равенство

$$x^3 = p + q + 3\sqrt[3]{pq}(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}) = p + q + 3\sqrt[3]{pq}x.$$

Поэтому числа  $p$  и  $q$  нужно подобрать так, чтобы выполнялись равенства  $3\sqrt[3]{pq} = -a$  и  $p + q = -b$ . Из этих равенств следуют равенства  $pq = -\frac{a^3}{27}$  и  $p + q = -b$ . Таким образом, для чисел  $p$  и  $q$  получено квадратное уравнение. Его корни имеют вид

$$p, q = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}. \quad (1)$$

Формула  $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$  даёт 9 различных значений. Чтобы получить формулу, которая даёт 3 значения, можно воспользоваться соотношением  $\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q} = -\frac{a}{3}$ . Эта формула имеет вид

$$x = \sqrt[3]{p} - \frac{a}{\sqrt[3]{p}},$$

где  $p$  находится по формуле (1). При этом  $x$  не зависит от выбора знака перед радикалом в формуле (1). Несложно проверить, что полученная формула даёт значения  $x$ , которые являются корнями уравнения  $x^3 + ax + b = 0$ .

### Уравнения 4-й степени

Попытаемся представить многочлен  $x^4 + ax^2 + bx + c$  в виде разности квадратов двух многочленов. Воспользуемся для этого тем, что

$$x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 - \left(2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a}{2}\right)\right).$$

Выберем  $t$  так, чтобы дискриминант

$$D = b^2 - 8t\left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{2}\right)$$

был равен нулю. Тогда

$$x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 - 2t\left(x - \frac{b}{4t}\right)^2.$$

Поэтому уравнение

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

можно решить следующим образом. Решим сначала следующее кубическое уравнение относительно  $t$ :

$$b^2 - 8t\left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{2}\right) = 0.$$

Пусть  $t_0$  — один из его корней. Тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$x^2 + \frac{a}{2} + t = \pm \sqrt{2t_0} \left(x - \frac{b}{4t}\right).$$

Получаем два квадратных уравнения и решаем их стандартным способом.

### Комментарии к формулам

Формула для вычисления корней кубического уравнения обладает многими недостатками. Например, если все корни уравнения действительные, то при вычислении корней по этой формуле обязательно появляются мнимые числа, т. е. в этом случае  $\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0$ . Чтобы убедиться в этом, исследуем функцию  $y(x) = x^3 + ax + b$ . Ясно, что  $y' = 3x^2 + a$ . Поэтому функция  $y(x)$  монотонно возрастает при  $x < -\alpha$  и при  $x > \alpha$ , где  $\alpha = \sqrt{-\frac{a}{3}}$ , а при  $-\alpha < x < \alpha$  функция  $y(x)$  монотонно убывает. Легко проверить, что  $y(-\alpha)y(\alpha) = 4\Delta$ . Поэтому уравнение  $y(x) = 0$  может иметь ровно три действительных корня лишь в том случае, когда  $\Delta < 0$ .

Другой недостаток формулы для вычисления корней кубического уравнения связан с тем, что выражение для целочисленного корня может содержать иррациональности. Например, корень  $x_0 = 2$  уравнения  $x^3 - x - 6 = 0$  выражается по формуле

$$x_0 = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{9}\sqrt{6}} + \sqrt[3]{3 - \frac{11}{9}\sqrt{6}}.$$

## 8. Точки пересечения диагоналей правильных многоугольников

Известно довольно много задач про треугольники с целочисленными углами. Вот два примера таких задач.

1. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $BC$  угол при вершине  $A$  равен  $80^\circ$ . Внутри треугольника взята точка  $M$  так, что  $\angle MBC = 30^\circ$  и  $\angle MCB = 10^\circ$  (рис. 8.1а). Доказать, что  $\angle AMC = 70^\circ$ .

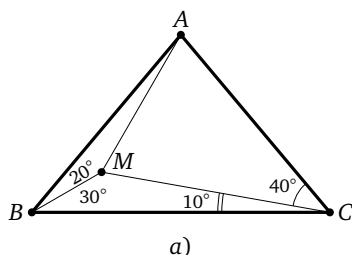
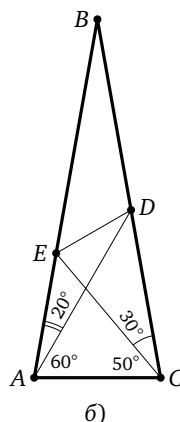


Рис. 8.1



2. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  угол при вершине  $B$  равен  $20^\circ$ . На сторонах  $BC$  и  $AB$  взяты точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что  $\angle DAC = 60^\circ$  и  $\angle ECA = 50^\circ$  (рис. 8.1б). Доказать, что  $\angle ADE = 30^\circ$ .

Задачи такого типа обычно бывают связаны с точками пересечения троек диагоналей правильных многоугольников, в данном случае — правильного 18-угольника.

Обратимся к рис. 8.2. Этот рисунок показывает, что задача 1 эквивалентна следующему утверждению: в правильном 18-угольнике диагонали  $A_1A_{13}$ ,  $A_3A_{14}$  и  $A_6A_{15}$  пересекаются в одной точке. В самом деле, если

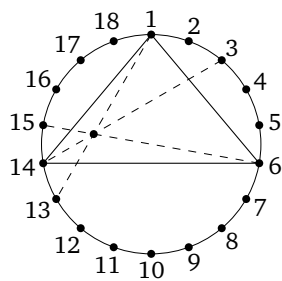


Рис. 8.2

эти диагонали пересекаются в некоторой точке  $M$ , то

$$\angle A_1 M A_6 = \frac{1}{2}(\sphericalangle A_1 A_6 + \sphericalangle A_{13} A_{15}) = 50^\circ + 20^\circ = 70^\circ.$$

Ясно также, что углы треугольника  $A_1 A_6 A_{14}$  равны  $80^\circ, 40^\circ, 40^\circ$  и  $\angle M A_{14} A_6 = 30^\circ, \angle M A_6 A_{14} = 10^\circ$ .

Что же касается задачи 2, то она эквивалентна следующему утверждению: в правильном 18-угольнике диагонали  $A_1 A_{14}, A_7 A_{16}$  и  $A_{11} A_{17}$  пересекаются в одной точке (рис. 8.3).

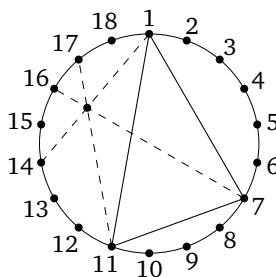


Рис. 8.3

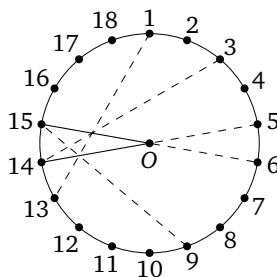


Рис. 8.4

Но задачу 2 можно решить и с помощью совсем другой тройки пересекающихся диагоналей, а именно диагоналей  $A_1 A_{13}, A_3 A_{14}$  и  $A_6 A_{15}$  (рис. 8.4). В качестве треугольника  $ABC$  мы берём треугольник  $A_{14} O A_{15}$ . Диагонали  $A_1 A_{13}$  и  $A_9 A_{15}$  симметричны относительно диаметра  $A_5 A_{14}$ , поэтому обе диагонали пересекают диаметр в одной точке.

Но мы пока не доказали, что тройки диагоналей на рис. 8.2–8.4 действительно пересекаются в одной точке. Проверять, пересекаются ли тройки диагоналей в одной точке, удобно с помощью следующего утверждения.

**Теорема.** На сторонах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1, C_1$  ( $A_1$  на  $BC$  и т. д.). Отрезки  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \angle B A A_1}{\sin \angle C A A_1} \cdot \frac{\sin \angle A C C_1}{\sin \angle B C C_1} \cdot \frac{\sin \angle C B B_1}{\sin \angle A B B_1} = 1.$$

**Доказательство.** Предположим сначала, что отрезки  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 8.5). Тогда

$$2S_{AOB} : 2S_{AOC} = (AB \cdot AO \sin \angle BAO) : (AC \cdot AO \sin \angle CAO).$$

Следовательно,

$$1 = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{COA}}{S_{COB}} \cdot \frac{S_{BOC}}{S_{BOA}} = \left( \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{BC}{BA} \right) \frac{\sin \angle BAO}{\sin \angle CAO} \cdot \frac{\sin \angle ACO}{\sin \angle BCO} \cdot \frac{\sin \angle CBO}{\sin \angle ABO},$$

т. е.

$$\frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle CAA_1} \cdot \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle BCC_1} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle ABB_1} = 1.$$

Предположим теперь, что для точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  выполняется указанное соотношение. Пусть  $O$  — точка пересечения отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ . Нужно доказать, что отрезок  $CC_1$  проходит через точку  $O$ . Иными словами, если  $C'_1$  — точка пересечения прямых  $CO$  и  $AB$ , то  $C'_1 = C_1$ . Отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC'_1$  пересекаются в одной точке, поэтому, как только что было доказано,

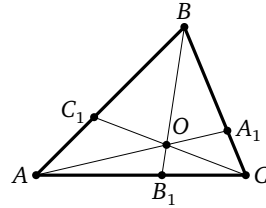


Рис. 8.5

$$\frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle CAA_1} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle ABB_1} \cdot \frac{\sin \angle ACC'_1}{\sin \angle BCC'_1} = 1.$$

Сравнив эту формулу с условием теоремы, получим

$$\sin \angle ACC_1 : \sin \angle BCC_1 = \sin \angle ACC'_1 : \sin \angle BCC'_1.$$

Остаётся доказать, что при движении точки  $X$  по отрезку  $AB$  величина  $\sin \angle ACX : \sin \angle BCX$  изменяется монотонно. Сами углы  $ACX$  и  $BCX$  изменяются монотонно, но их синусы могут быть не монотонными в случае тупого угла  $C$ . Это не беда. В любом треугольнике есть острый угол, и мы с самого начала могли бы взять в качестве угла  $C$  острый угол треугольника. Доказательство теоремы завершено.  $\square$

Теперь проверка того, что тройка диагоналей, изображённая на рис. 8.2, пересекается в одной точке, сводится к проверке тождества

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} = 1.$$

Доказать его несложно:

$$\sin 30^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 20^\circ \sin 70^\circ.$$

Тройка диагоналей, изображённая на рис. 8.3, соответствует тождеству

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 20^\circ = \sin 30^\circ \sin 60^\circ \sin 10^\circ.$$

Есть ещё три тождества, приводящие к тройкам пересекающихся диагоналей:

$$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 80^\circ = \sin 20^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ,$$

$$\sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ = \sin 10^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ,$$

$$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ = \sin 10^\circ \sin 10^\circ \sin 100^\circ.$$

Проверку этих тождеств мы оставляем читателю.

Обратите внимание на то, что перестановка сомножителей в таких тождествах приводит к совсем другим тройкам пересекающихся диагоналей.

Наш интерес к 18-угольнику, а не к какому-либо другому правильному многоугольнику, связан с тем, что именно к нему приводят треугольники с углами, кратными  $10^\circ$ . Среди всех правильных многоугольников, число вершин которых меньше 18, интересные наборы пересекающихся диагоналей есть лишь у 12-угольника. Например, диагонали  $A_1A_5$ ,  $A_2A_6$ ,  $A_3A_8$  и  $A_4A_{11}$  правильного 12-угольника пересекаются в одной точке (рис. 8.6). Это утверждение эквивалентно следующей хорошо известной задаче.

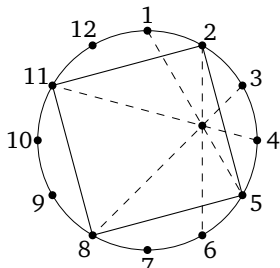


Рис. 8.6

3. Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $P$  так, что треугольник  $ABP$  равносторонний. Доказать, что  $\angle PCD = 15^\circ$ .

### Упражнения

1. Дан треугольник  $ABC$  с углами  $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 70^\circ$ .

а) На сторонах  $BA$  и  $AC$  взяты точки  $D$  и  $E$  так, что  $\angle DCB = \angle EBC = 40^\circ$ . Докажите, что  $\angle AED = 30^\circ$ .

б) На сторонах  $BA$  и  $BC$  взяты точки  $D$  и  $E$  так, что  $\angle DCA = 50^\circ$  и  $\angle EAC = 40^\circ$ . Докажите, что  $\angle AED = 30^\circ$ .

2. В треугольнике  $ABC$  углы  $A, B$  и  $C$  равны  $14^\circ$ ,  $62^\circ$  и  $104^\circ$ . На сторонах  $AC$  и  $AB$  взяты точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что  $\angle DBC = 50^\circ$  и  $\angle ECB = 94^\circ$ . Докажите, что  $\angle CED = 34^\circ$ .

3. Докажите, что диагонали  $A_1A_{n+2}$ ,  $A_{2n-1}A_3$  и  $A_{2n}A_5$  правильного  $2n$ -угольника пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что диагонали  $A_1A_7$ ,  $A_3A_{11}$  и  $A_5A_{21}$  правильного 24-угольника пересекаются в точке, лежащей на диаметре  $A_4A_{16}$ .

5. Докажите, что в правильном 30-угольнике семь диагоналей

$$A_1A_{13}, A_2A_{17}, A_3A_{24}, A_5A_{26}, A_8A_{29}, A_{10}A_{30}$$

пересекаются в одной точке.

## 9. Кубические уравнения, связанные с треугольником

Для любого треугольника несложно доказать соотношение

$$p - a = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2},$$

где  $p$  — полупериметр,  $r$  — радиус вписанной окружности. В самом деле, пусть  $u = AC_1 = AB_1$ ,  $v = BC_1 = BA_1$ ,  $w = CA_1 = CB_1$  (рис. 9.1). Тогда  $u + v = c$ ,  $v + w = a$ ,  $w + u = b$ .

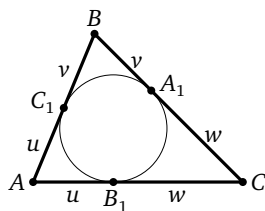


Рис. 9.1

Поэтому  $u = \frac{b+c-a}{2} = p - a$ . Остаётся заметить, что  $AB_1 = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ .

Воспользуемся теоремой синусов и заменим  $a$  на  $2R \sin A$ , где  $R$  — радиус описанной окружности. В результате получим

$$p = 2R \sin A + r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Рассмотрим для треугольника с некоторыми значениями  $p$ ,  $R$  и  $r$  уравнение

$$p = 2R \sin \varphi + r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}. \quad (1)$$

Это уравнение имеет корни  $\varphi_1 = A$ ,  $\varphi_2 = B$ ,  $\varphi_3 = C$  — величины углов треугольника. Можно ожидать, что уравнение (1) в каком-то смысле является кубическим уравнением.

В уравнение (1) входят  $\sin \varphi$  и  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ . Их можно выразить через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию. Например,

$$\sin \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

Поэтому при  $x = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  уравнение (1) принимает вид

$$p = \frac{4Rx}{1+x^2} + \frac{r}{x},$$

т. е.

$$x^3 - \frac{4R+r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет корни  $x_1 = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ ,  $x_2 = \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ ,  $x_3 = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ . В том случае, когда эти числа различны, по теореме Виета получаем

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p}, \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}.$$

С помощью предельного перехода легко убедиться, что эти формулы остаются справедливыми и в том случае, когда среди чисел  $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$  есть равные.

Выразим теперь  $\sin \varphi$  и  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$  через  $x = \cos \varphi$ :

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - x^2}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (1), получим

$$p = \sqrt{1 - x^2} \left( 2R + \frac{r}{1 - x} \right).$$

При  $x \neq 1$  это уравнение приводится к виду

$$x^3 - \left( 1 + \frac{r}{R} \right) x^2 + \left( \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} \right) x - \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + \frac{r}{R}, \\ \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A &= \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}, \\ \cos A + \cos B + \cos C &= \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при  $x = 2R \sin \varphi$  уравнение (1) принимает вид

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0.$$

Поэтому

$$a + b + c = 2p, \quad ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2, \quad abc = 4Rrp.$$

Аналогичным образом  $\sin \varphi$  и  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  можно выражать через другие тригонометрические функции и подставлять эти выражения в уравнение (1).

При  $x = \operatorname{tg} \varphi$  получаем уравнение

$$(p^2 - (2R + r)^2)x^3 - 2prx^2 + (p^2 - 4Rr - r^2)x - 2pr = 0.$$

При  $x = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$  получаем уравнение

$$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0.$$

При  $x = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$  получаем уравнение

$$16R^2x^3 - 8R(4R + r)x^2 + (p^2 + (4R + r)^2)x - p^2 = 0.$$

## 10. Уравнение Маркова

Уравнением Маркова называют уравнение

$$m^2 + n^2 + p^2 = 3mnp, \quad (1)$$

где числа  $m, n$  и  $p$  натуральные. Это уравнение интересно тем, что оно имеет бесконечно много решений, причём структура этих решений хотя и сложная, но вполне обозримая.

Предположим сначала, что среди чисел  $m, n$  и  $p$  есть равные, например,  $n = p$ . Тогда  $m^2 + 2n^2 = 3mn^2$ , т. е.  $3m = \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2$ . Следовательно,  $m = dn$ , где  $d$  — целое число. После сокращения на  $n^2$  получим  $d^2 + 2 = 3nd$ , т. е.  $d(3n - d) = 2$ . Поэтому  $d = 1$  или  $2$ . В обоих случаях  $n = 1$ . В результате получаем решения  $(1, 1, 1)$  и  $(2, 1, 1)$ . Назовём их *особыми*.

Рассмотрим теперь неособое решение  $(m, n, p)$ , для которого числа  $m, n, p$  попарно различны. Квадратный трёхчлен

$$f(x) = x^2 - 3xnp + n^2 + p^2$$

имеет корень  $m$ . Второй его корень  $m'$  можно найти по теореме Виета:

$$m' = 3np - m.$$

Ясно, что при этом  $(m', n, p)$  — решение уравнения (1). Покажем, что наибольшее из чисел  $n$  и  $p$  заключено между  $m$  и  $m'$ . Пусть для определённости  $n > p$ . Тогда

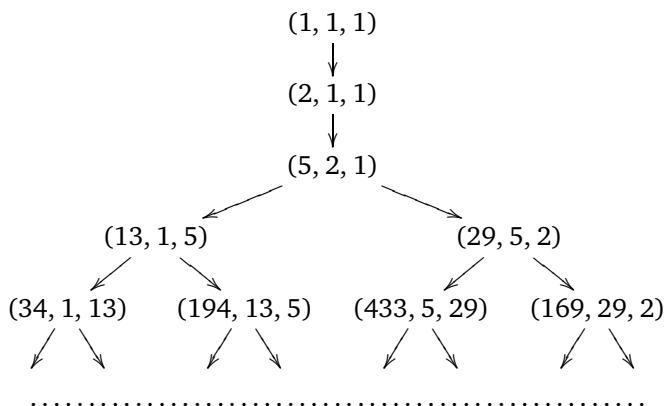
$$(n - m)(n - m') = f(n) = 2n^2 + p^2 - 3n^2p < 0.$$

Предположим, что  $m$  — наибольшее из чисел  $m, n, p$ . Тогда

$$m > \max(n, p) > m', \quad n < m = \max(m, p) < n'.$$

Таким образом, при переходе от решения  $(m, n, p)$  к решению  $(m', n, p)$  наибольшее из трёх чисел уменьшается, а при переходе к решениям  $(m, n', p)$  и  $(m, n, p')$  уменьшается.

Если начинать с решения  $(1, 1, 1)$ , то получим следующее дерево решений:



Это дерево содержит все решения, поскольку от произвольного решения после нескольких уменьшений максимума мы перейдём к особому решению.

## 11. Целозначные многочлены

Многочлен  $p(x)$  называют *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых  $x$ .

Индукцией по  $k$  можно доказать, что многочлен

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

целозначный. В самом деле, при  $k=1$  это очевидно. Предположим теперь, что многочлен  $\binom{x}{k}$  целозначный. Легко проверить, что

$$\binom{x+1}{k+1} - \binom{x}{k+1} = \binom{x}{k}.$$

Следовательно, при всех целых  $m, n$  разность

$$\binom{m}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

является целым числом. Остаётся заметить, что  $\binom{0}{k+1} = 0$ .

В некотором смысле целозначные многочлены исчерпываются многочленами  $\binom{x}{k}$ , причём требование, что  $p(n)$  — целое число при всех целых  $n$ , можно существенно ослабить. А именно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $p(k)$  — многочлен степени  $k$ , принимающий целые значения при  $x = n, n+1, \dots, n+k$  для некоторого целого числа  $n$ . Тогда

$$p_k(x) = c_0 \binom{x}{k} + c_1 \binom{x}{k-1} + c_2 \binom{x}{k-2} + \dots + c_k,$$

где  $c_0, c_1, \dots, c_k$  — целые числа.

**Доказательство.** Многочлены  $1, x, x^2, \dots, x^k$  можно представить в виде линейных комбинаций многочленов

$$\binom{x}{0}1, \quad \binom{x}{1}x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, \quad \dots, \quad \binom{x}{k} = \frac{x^k}{k!} + \dots,$$

поэтому

$$p_k(x) = c_0 \binom{x}{k} + c_1 \binom{x}{k-1} + \dots + c_k,$$

где  $c_0, c_1, \dots, c_k$  — некоторые числа. Нужно лишь доказать, что эти числа целые.

Докажем это индукцией по  $k$ . База индукции:  $k=0$ . По условию многочлен  $p_0(x) = c_0$  принимает целое значение при  $x=n$ , поэтому число  $c_0$  целое. Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для многочленов степени не выше  $k$ . Пусть многочлен

$$p_{k+1}(x) = c_0 \binom{x}{k+1} + \dots + c_{k+1}$$

принимает целые значения при  $x = n, n+1, \dots, n+k+1$ . Рассмотрим многочлен

$$\Delta p_{k+1}(x) = p_{k+1}(x+1) - p_{k+1}(x) = c_0 \binom{x}{k} + c_1 \binom{x}{k-1} + \dots + c_k.$$

Он принимает целые значения при  $x = n, n+1, \dots, n+k$ . Поэтому числа  $c_0, c_1, \dots, c_k$  целые, а значит, число

$$c_{k+1} = p_{k+1}(n) - c_0 \binom{n}{k+1} - c_1 \binom{n}{k} - \dots - c_k \binom{n}{1}$$

тоже целое. □

## 12. Точки Брокара

Помимо хорошо известных точек, связанных с треугольником (центр вписанной окружности, центр описанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот), с каждым треугольником связаны и другие замечательные точки. Пожалуй, наиболее интересными свойствами среди них обладают точки Брокара.

Точку  $P$ , лежащую внутри треугольника  $ABC$ , называют *первой точкой Брокара*, если

$$\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA \quad (\text{рис. 12.1 а}).$$

Для второй точки Брокара должны выполняться равенства

$$\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC \quad (\text{рис. 12.1 б}).$$

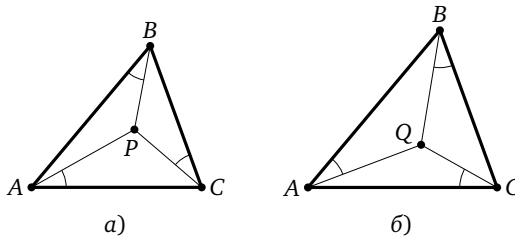


Рис. 12.1

Прежде чем рассказывать о свойствах этих точек, покажем, что для любого треугольника существуют ровно одна первая точка Брокара и ровно одна вторая точка Брокара. Начнём с первой точки Брокара. Построим на сторонах треугольника  $ABC$  подобные ему треугольники  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$ , как показано на рис. 12.2. Так как  $\angle PCB = \angle C - \angle PCA$ , то равенства  $\angle PAC = \angle PCB$  и  $\angle PAC = \angle C - \angle PCA$  эквивалентны. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\angle C = \angle PAC + \angle PCA = 180^\circ - \angle APC.$$

Для точки  $P$ , лежащей внутри треугольника  $ABC$ , это равенство эквивалентно тому, что она лежит на описанной окружности треугольника  $AB_1C$ . Аналогичные рассуждения для других углов показывают, что  $P$  — точка Брокара тогда и только тогда, когда она принадлежит описанным окружностям всех трёх треугольников  $A_1BC$ ,

$AB_1C$  и  $ABC_1$ . Пусть  $P_1$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $A_1BC$  и  $AB_1C$ , отличная от точки  $C$ . Тогда

$$\angle AP_1B = 360^\circ - \angle AP_1C - \angle CP_1B = \gamma + \beta = 180^\circ - \angle AC_1B,$$

а значит, точка  $P_1$  лежит и на описанной окружности треугольника  $ABC_1$ , т. е.  $P_1 = P$  — точка Брокера. Соединим её со всеми вершинами рассматриваемых треугольников. Из равенства углов, опирающихся на одну дугу, следует, что углы между полученными отрезками именно такие, как указано на рис. 12.2. А так как  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  проходят через точку  $P$ .

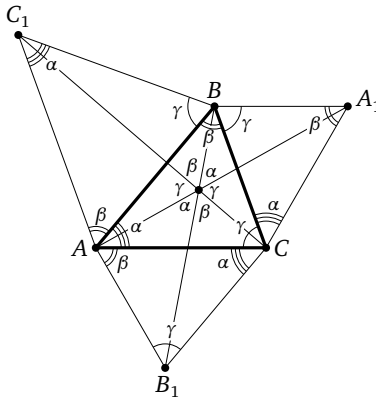


Рис. 12.2

Отметим, что описанные окружности треугольников  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$  касаются прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно. Поэтому точка  $P$  является также точкой пересечения трёх окружностей, касающихся прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в точках  $B$ ,  $C$  и  $A$  и проходящих через точки  $C$ ,  $A$  и  $B$  соответственно.

**Задача.** Постройте на сторонах треугольника  $ABC$  подобные ему треугольники  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$  так, чтобы отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекались во второй точке Брокера.

Перейдём к рассмотрению свойств точек Брокера.

**Теорема 1.** Пусть  $P$  — первая точка Брокера, а прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Тогда  $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$ . (Для второй точки Брокера  $\triangle ABC = \triangle C_1A_1B_1$ .)

**Доказательство.** Докажем, например, равенство отрезков  $AB$  и  $B_1C_1$ . Для этого достаточно доказать равенство дуг  $AB$  и  $B_1C_1$ . Эти дуги имеют общую дугу  $AC_1$ , а дополнительные к  $AC_1$  дуги  $C_1B$  и  $A_1B$  равны, поскольку на них опираются равные углы. Аналогично доказывается равенство других соответственных сторон треугольников  $ABC$  и  $B_1C_1A_1$ .  $\square$

**Теорема 2.** Из первой точки Брокара  $P$  опущены перпендикуляры  $PA'$ ,  $PB'$  и  $PC'$  на стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Тогда треугольники  $ABC$  и  $B'C'A'$  подобны, причём коэффициент подобия равен  $\sin \varphi$ , где  $\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ .

**Доказательство.** Точки  $B'$  и  $C'$  лежат на окружности с диаметром  $AP$ , поэтому  $\angle B'C'P = \angle B'AP = \varphi$  и  $\angle C'B'P = \angle C'AP = \alpha - \varphi$ . Аналогично  $\angle C'A'P = \varphi$  и  $\angle A'C'P = \beta - \varphi$ ,  $\angle A'B'P = \varphi$  и  $\angle B'A'P = \gamma - \varphi$ . Следовательно, углы треугольника  $B'C'A'$  равны углам треугольника  $ABC$ , а значит, эти треугольники подобны. Кроме того, углы треугольников  $ABP$  и  $B'PC'$  равны, поэтому

$$B'C' : AB = B'P : AP = \sin \varphi. \quad \square$$

Обратимся теперь к углу

$$\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA.$$

Его можно выразить через треугольника  $ABC$ . Сотрём для этого на рис. 12.2 всё лишнее (см. рис. 12.3) и опустим из точки  $A_1$  перпендикуляр  $A_1K$  на прямую  $AC$ . Тогда

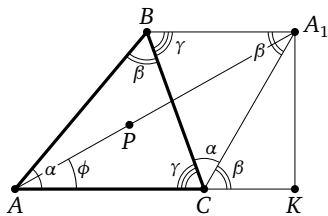


Рис. 12.3

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{AK}{A_1K} = \frac{AC}{A_1K} + \frac{CK}{A_1K} = (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) + \operatorname{ctg} \beta.$$

Для второй точки Брокара мы получим точно такое же выражение, поэтому для неё мы получим тот же самый угол  $\varphi$ . Этот угол называют углом Брокара.

Для угла Брокара  $\varphi$  можно также получить следующее неявное выражение:

$$\sin^3 \varphi = \sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi) \sin(\gamma - \varphi).$$

В самом деле, по теореме синусов

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}, \quad \frac{BP}{CP} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\beta - \varphi)}, \quad \frac{CP}{AP} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\gamma - \varphi)}.$$

Перемножив эти равенства, получим требуемое.

**Теорема 3.** Для угла Брокера  $\varphi$  выполняются следующие неравенства:

- а)  $\varphi \leq 30^\circ$ ;
- б)  $\varphi^3 \leq (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)$ ;
- в)  $8\varphi^3 \leq \alpha\beta\gamma$  (неравенство Йиффа).

Доказательство. а) Воспользовавшись соотношением  $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$ , после несложных преобразований получим

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} + \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin \beta} + \frac{\sin(\beta)}{\sin \gamma} \geq 2.$$

Следовательно,  $2 \sin \varphi \leq \sin(\alpha + \varphi) \leq 1$ , а значит,  $\varphi \leq 30^\circ$ . (Неравенство  $\varphi \leq 90^\circ$  очевидно из геометрических соображений.)

б) Рассмотрим функцию  $f(x) = \ln \frac{x}{\sin x} = \ln x - \ln \sin x$ . Ясно, что функции

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \quad \text{и} \quad f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

положительны при  $0 < x < \pi$ . Следовательно, функция  $f(x)$  монотонно возрастает при возрастании  $x$  от 0 до  $\pi$  и, кроме того, выпукла на этом отрезке, т. е.

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

при  $0 \leq x_i \leq \pi$ ,  $0 \leq \lambda_i$ ,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . В частности,  $f(\varphi) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , так как  $\varphi \leq \frac{\pi}{6}$ , и

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= f\left(\frac{\varphi + (\alpha - \varphi) + \varphi + (\beta - \varphi) + \varphi + (\gamma - \varphi)}{6}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{6}(f(\varphi) + f(\alpha - \varphi) + f(\varphi) + f(\beta - \varphi) + f(\varphi) + f(\gamma - \varphi)). \end{aligned}$$

Воспользовавшись монотонностью логарифма, эти неравенства можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{\varphi}{\sin \varphi}\right)^6 \leq \left(\frac{\pi/6}{\sin(\pi/6)}\right)^6 \leq \frac{\varphi^3(\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)}{\sin^3 \varphi \sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}.$$

Учитывая, что  $\sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi) \sin(\gamma - \varphi) = \sin^3 \varphi$ , получаем

$$\varphi^3 \leq (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi).$$

в) Из неравенства  $\varphi^3 \leq (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)$  следует, что

$$64\varphi^6 \leq 4^3 \varphi(\alpha - \varphi) \varphi(\beta - \varphi) \varphi(\gamma - \varphi).$$

Ясно также, что

$$4\varphi(\alpha - \varphi) \leq \alpha^2, \quad 4\varphi(\beta - \varphi) \leq \beta^2, \quad 4\varphi(\gamma - \varphi) \leq \gamma^2. \quad \square$$

Пусть  $P$  — первая точка Брокера треугольника  $ABC$ . Выберем на его сторонах  $CA$ ,  $AB$  и  $BC$  точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $\angle APA_1 = \angle BPB_1 = \angle CPC_1 = \alpha$  (рис. 12.4). Тогда треугольники  $APA_1$ ,  $BPB_1$  и  $CPC_1$  подобны. Это означает, что при поворотной гомотетии с центром  $P$ , углом поворота  $\alpha$  и коэффициентом гомотетии  $\frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$  треугольник  $ABC$  переходит в треугольник  $A_1B_1C_1$ .

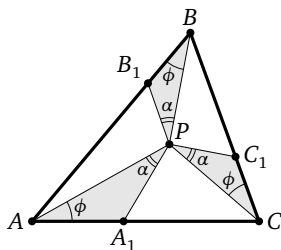


Рис. 12.4

**Теорема 4.** Пусть вершины  $B$  и  $C$  треугольника фиксированы, а вершина  $A$  движется так, что угол Брокера  $\varphi$  треугольника  $ABC$  остаётся постоянным. Тогда точка  $A$  движется по окружности радиуса  $\frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 3}$ , где  $a = BC$  (окружность Нейберга).

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S},$$

где  $S$  — площадь треугольника. По теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} \alpha.$$

Сложив три аналогичных равенства, получим

$$4S(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = a^2 + b^2 + c^2, \quad \text{т. е. } 4S \operatorname{ctg} \varphi = a^2 + b^2 + c^2.$$

Таким образом, для треугольника с вершинами в точках с координатами  $(\pm \frac{a}{2}, 0)$  и  $(x, y)$  угол Брокера  $\varphi$  определяется равенством

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2}{2ay},$$

т. е.  $2x^2 + 2y^2 + \frac{3a^2}{2} = 2ay \operatorname{ctg} \varphi$ . Последнее уравнение задаёт окружность радиуса  $\frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 3}$  с центром  $(0, \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \varphi)$ .  $\square$

**Теорема 5.** Опустим из точки  $M$  перпендикуляры  $MA_1$ ,  $MB_1$  и  $MC_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Для фиксированного треугольника  $ABC$  множество точек  $M$ , для которых угол Брокера треугольника  $A_1B_1C_1$  имеет заданное значение, состоит из двух окружностей, причём одна из них расположена внутри описанной окружности треугольника  $ABC$ , а другая вне её (окружности Шюуте).

Доказательство. Пусть  $a_1, b_1, c_1$  — длины сторон треугольника  $A_1B_1C_1$ ,  $S_1$  — его площадь. В теореме речь идёт о множестве то-

чек  $M$ , для которых выполняется равенство

$$4S_1 \operatorname{ctg} \varphi = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на окружности с диаметром  $AM$ , поэтому

$$a_1 = B_1C_1 = AM \sin B_1AC_1 = \frac{aAM}{2R},$$

где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ . Таким образом,

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \frac{a^2AM^2 + b^2BM^2 + c^2CM^2}{4R^2},$$

поэтому если  $(x, y)$  — координаты точки  $M$  в некоторой прямоугольной системе координат, то

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}(x^2 + y^2) + px + qy + r,$$

где  $p, q, r$  — постоянные числа.

Для  $S_1$  тоже можно получить выражение через координаты  $(x, y)$  точки  $M$ . При этом начало системы координат удобно расположить в центре  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ . В таком случае

$$S_1 = \frac{S_{ABC}}{4R^2} |R^2 - x^2 - y^2|.$$

Доказательство этой формулы можно найти, например, в моей книге «Задачи по планиметрии», 2-е или 3-е издание, задача 5.102.

Уравнение  $S_1 = 0$  определяет описанную окружность треугольника  $ABC$ . Это множество соответствует нулевому углу Брокара. Углу Брокара  $\varphi$  соответствует множество

$$\pm \operatorname{ctg} \varphi \frac{S_{ABC}}{4R^2} (R^2 - x^2 - y^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} (x^2 + y^2) + px + qy + r.$$

При этом знак плюс берётся для точек внутри описанной окружности, а знак минус берётся для точек вне описанной окружности. Легко видеть, что каждое из полученных уравнений является уравнением окружности. Дело в том, что если  $f = 0$  и  $g = 0$  — уравнения окружностей, то  $\lambda f = g$  тоже уравнение окружности. Более того, центр окружности  $\lambda f = g$  лежит на прямой, соединяющей центры окружностей  $f = 0$  и  $g = 0$ . В нашем случае центром одной окружности служит центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , а центром второй окружности служит точка, для которой величина  $a^2AM^2 + b^2BM^2 + c^2CM^2$  минимальна (точка Лемуана).  $\square$

Из теоремы 1 следует, что обе точки Брокара треугольника  $ABC$  и центр его описанной окружности лежат на одной и той же окружности Схоуте. Можно доказать, что на той же окружности лежит и точка Лемуана.

### 13. Многочлены Чебышёва

Многочлены Чебышёва являются одним из наиболее замечательных семейств многочленов. Они часто встречаются во многих областях математики, от теории аппроксимации до теории чисел и топологии трёхмерных многообразий. Мы обсудим некоторые наиболее простые, но весьма важные свойства многочленов Чебышёва.

Определение многочленов Чебышёва основано на том, что  $\cos n\varphi$  полиномиально выражается через  $\cos \varphi$ , т. е. существует такой многочлен  $T_n(x)$ , что  $T_n(x) = \cos n\varphi$  при  $x = \cos \varphi$ . В самом деле, формула

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi\cos(n\varphi)$$

показывает, что

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Многочлены  $T_n(x)$ , определённые этим рекуррентным соотношением и начальными условиями  $T_0(x) = 1$  и  $T_1(x) = x$ , обладают нужным свойством. Эти многочлены  $T_n(x)$  называют *многочленами Чебышёва*.

Непосредственно из того, что  $T_n(x) = \cos n\varphi$  при  $x = \cos \varphi$ , следует, что  $|T_n(x)| \leq 1$  при  $x \leq 1$ . А из рекуррентного соотношения следует, что  $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ , где  $a_1, \dots, a_n$  — целые числа.

Наиболее важное свойство многочленов Чебышёва было обнаружено самим П. Л. Чебышёвым. Оно заключается в следующем.

**Теорема 1.** Пусть  $P_n(x) = x^n + \dots$  — многочлен степени  $n$  со старшим коэффициентом 1, причём

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{при } |x| \leq 1.$$

Тогда  $P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ . (Иными словами, многочлен  $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$  — наименее уклоняющийся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  многочлен степени  $n$  со старшим коэффициентом 1.)

Доказательство. Мы воспользуемся лишь одним свойством многочлена  $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ , а именно тем, что  $T_n\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) = \cos k\pi = (-1)^k$  при  $k = 0, 1, \dots, n$ . Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - P_n(x).$$

Его степень не превосходит  $n - 1$ , поскольку старшие члены многочленов  $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$  и  $P_n(x)$  равны. Из того, что  $|P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  при  $|x| \leq 1$ , следует, что в точке  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$  знак числа  $Q(x_k)$  совпадает со знаком числа  $T_n(x_k)$ . Таким образом, в концах каждого отрезка  $[x_{k+1}, x_k]$  многочлен  $Q(x)$  принимает значения разного знака, поэтому у многочлена  $Q(x)$  на этом отрезке есть корень. Чуть более аккуратные рассуждения нужны в том случае, когда  $Q(x_k) = 0$ . В этом случае либо  $x_k$  — двукратный корень, либо внутри одного из отрезков  $[x_{k+1}, x_k]$  и  $[x_k, x_{k-1}]$  есть ещё один корень. Это следует из того, что в точках  $x_{k+1}$  и  $x_{k-1}$  многочлен  $Q(x)$  принимает значения одного знака (рис. 13.1).



Рис. 13.1

Количество отрезков  $[x_{k+1}, x_k]$  равно  $n$ , поэтому многочлен  $Q(x)$  имеет по крайней мере  $n$  корней. Для многочлена степени не более  $n - 1$  это означает, что он тождественно равен нулю, т. е.  $P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ .  $\square$

Для пары многочленов  $P$  и  $Q$  можно определить их композицию  $P \circ Q(x) = P(Q(x))$ . Многочлены  $P$  и  $Q$  называют коммутирующими, если  $P \circ Q = Q \circ P$ , т. е.  $P(Q(x)) = Q(P(x))$ .

**Теорема 2.** Многочлены Чебышёва  $T_n(x)$  и  $T_m(x)$  коммутирующие.

Доказательство. Пусть  $x = \cos \varphi$ . Тогда

$$T_n(x) = \cos(n\varphi) = \cos \psi = y \quad \text{и} \quad T_m(y) = \cos(m\psi) = \cos(mn\varphi),$$

поэтому  $T_m(T_n(x)) = \cos(mn\varphi)$ . Аналогично  $T_n(T_m(x)) = \cos(mn\varphi)$ . Таким образом, равенство  $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x))$  выполняется при  $|x| < 1$ , а значит, это равенство выполняется при всех  $x$ .  $\square$

Многочлены Чебышёва являются единственным нетривиальным примером коммутирующих многочленов. Дело в том, что любая пара коммутирующих многочленов после линейной замены вида  $P \mapsto l_1 \circ P \circ l_2$ , где  $l_i = a_i x + b_i$ , оказывается либо парой многочленов Чебышёва, либо парой многочленов  $x^n$  и  $x^m$ , либо парой «степеней»  $P \circ P \circ \dots \circ P$  одного и того же многочлена (при этом, возможно,

потребуется линейная замена с комплексными коэффициентами  $a_i, b_i$ ). Эта теорема была доказана в 1922 г. американским математиком Риттом; все известные её доказательства весьма сложные.

В некоторых случаях вместо многочлена  $T_n(x)$  удобно рассматривать многочлен  $P_n(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$  со старшим коэффициентом 1. Многочлены  $P_n(x)$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x),$$

поэтому  $P_n(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами.

Если  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ , то  $z + z^{-1} = 2 \cos \varphi$  и  $z^n + z^{-n} = 2 \cos(n\varphi)$ . Поэтому

$$P(z + z^{-1}) = 2T_n(\cos \varphi) = 2 \cos n\varphi = z^n + z^{-n},$$

т. е. многочлен  $P_n(x)$  соответствует полиномиальному выражению величины  $z^n + z^{-n}$  через  $z + z^{-1}$ .

С помощью многочленов  $P_n$  можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 3.** Если оба числа  $\alpha$  и  $\cos(\alpha\pi)$  рациональны, то число  $2 \cos(\alpha\pi)$  целое, т. е.  $\cos(\alpha\pi) = 0, \pm \frac{1}{2}$  или  $\pm 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha = \frac{m}{n}$  — несократимая дробь. Положим  $x_0 = 2 \cos t$ , где  $t = \alpha\pi$ . Тогда

$$P_n(x_0) = 2 \cos(nt) = 2 \cos(n\alpha\pi) = 2 \cos(m\pi) = \pm 2.$$

Поэтому  $x_0$  — корень многочлена  $P_n(x) \mp 2 = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$  с целыми коэффициентами. Пусть  $x_0 = 2 \cos(\alpha\pi) = \frac{p}{q}$  — несократимая дробь. Тогда

$$p^n + b_1p^{n-1}q + \dots + b_nq^n = 0,$$

а значит,  $p^n$  делится на  $q$ . Но числа  $p$  и  $q$  взаимно простые, поэтому  $q = \pm 1$ , т. е.  $2 \cos(\alpha\pi)$  — целое число.  $\square$

## 14. Метод усреднения и геометрические неравенства

При доказательстве многих геометрических неравенств бывает полезен следующий факт. Пусть на плоскости даны две системы векторов  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  и  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ , причём для любой прямой сумма длин проекций на неё векторов первой системы больше суммы длин проекций векторов второй системы. Тогда сумма длин векторов первой системы больше суммы длин векторов второй системы. Чтобы доказать это утверждение, фиксируем на плоскости систему координат и рассмотрим прямую  $l$ , образующую угол  $\varphi$  с осью  $Ox$ . Если вектор  $\vec{a}$  образует с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ , то длина его проекции на прямую  $l$  равна  $a|\cos(\varphi - \alpha)|$ , где  $a$  — длина вектора  $\vec{a}$ . Таким образом, среднее значение длины проекции вектора  $\vec{a}$  равно

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a|\cos(\varphi - \alpha)| d\varphi = \frac{2a}{\pi}.$$

В частности, среднее значение длины проекции не зависит от угла  $\alpha$ , т. е. не зависит от положения вектора  $\vec{a}$ . Если сумма длин проекций векторов  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  на любую прямую больше суммы длин проекций векторов  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ , то соответствующее неравенство выполняется и для средних значений сумм длин проекций, а значит,

$$a_1 + \dots + a_n > b_1 + \dots + b_m.$$

Приведём некоторые примеры использования доказанного выше геометрического факта. Начнём с достаточно простой теоремы, которую легко доказать и другими способами.

1. Если один выпуклый многоугольник расположен внутри другого выпуклого многоугольника, то периметр внешнего многоугольника больше периметра внутреннего.

В самом деле, пусть  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  — векторы сторон внешнего многоугольника,  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$  — векторы сторон внутреннего многоугольника. Для выпуклого многоугольника сумма длин проекций его сторон ровно в два раза больше длины проекции самого многоугольника. Ясно также, что проекция внутреннего многоугольника расположена внутри внешнего многоугольника, поэтому её длина меньше.

Разберём теперь более сложный пример, для которого трудно получить доказательство другими способами.

2. Выпуклые многоугольники с периметрами  $P_1, \dots, P_n$  расположены так, что не существует прямой, разделяющей данные многоугольники (т. е. не существует прямой, которая не пересекает данные многоугольники, но по обе стороны от неё лежит хотя бы один данный многоугольник). Тогда данные многоугольники можно заключить в выпуклый многоугольник периметра не более  $P_1 + \dots + P_n$ .

Если прямая  $l$  не разделяет данные многоугольники, то их проекция на прямую, перпендикулярную прямой  $l$ , представляет собой один отрезок, а не несколько отрезков. Это означает, что сумма длин проекций векторов сторон данных многоугольников на любую прямую не меньше суммы длин проекций векторов сторон их выпуклой оболочки<sup>1</sup>. Следовательно, периметр выпуклой оболочки данных многоугольников не превосходит  $P_1 + \dots + P_n$ .

В некоторых случаях бывает полезен и тот факт, что среднее значение длины проекции вектора длиной  $a$  равно  $\frac{2a}{\pi}$ .

3. Если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше 1, то его периметр меньше  $\pi$ .

Пусть периметр рассматриваемого многоугольника равен  $P$ . Тогда среднее значение суммы длин проекций его сторон равно  $\frac{2P}{\pi}$ . Из условия следует, что длина проекции многоугольника на любую прямую меньше 1, т. е. сумма длин проекций сторон меньше 2. Поэтому  $\frac{2P}{\pi} < 2$ , а значит,  $P < \pi$ .

Следующий пример связан с выпуклыми фигурами постоянной ширины. Так называют выпуклые фигуры, для которых длина проекции на все прямые одна и та же. Эту длину проекции называют в таком случае *шириной* фигуры постоянной ширины.

Очевидным примером выпуклой фигуры постоянной ширины является круг. Но есть и другие фигуры постоянной ширины. Простейший пример даёт фигура, ограниченная дугами трёх окружностей радиуса  $R$  с центрами в вершинах правильного треугольника со стороной  $R$  (рис. 14.1). Легко проверить, что длина проекции этой фигуры на любую прямую равна  $R$ .

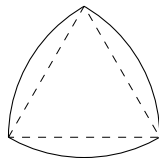


Рис. 14.1

<sup>1</sup> Выпуклой оболочкой нескольких многоугольников называют наименьший выпуклый многоугольник, их содержащий.

4. Периметр любой выпуклой фигуры постоянной ширины  $d$  равен  $\pi d$ .

Границу данной выпуклой фигуры можно с любой точностью приблизить выпуклым многоугольником. При этом длина проекции многоугольника на любую прямую будет заключена между  $d - \varepsilon$  и  $d + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число. Следовательно, периметр такого выпуклого многоугольника заключён между  $\pi(d - \varepsilon)$  и  $\pi(d + \varepsilon)$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем, что периметр данной выпуклой фигуры равен  $\pi d$ .

5. Пусть на плоскости даны векторы  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ , сумма длин которых равна  $L$ . Тогда из них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше  $\frac{L}{\pi}$ .

Среднее значение суммы длин проекций данных векторов равно  $\frac{2L}{\pi}$ , поэтому существует прямая, для которой сумма длин проекций данных векторов не меньше  $\frac{2L}{\pi}$ . Введём на этой прямой направление. Тогда можно будет рассматривать проекции векторов со знаком, и сумма длин проекций будет равна  $p - n$ , где  $p$  — сумма положительных проекций,  $n$  — сумма отрицательных проекций. Так как  $p - n \geq \frac{2L}{\pi}$  и  $p \geq 0$ ,  $-n \geq 0$ , то одно из чисел  $p$  или  $-n$  не меньше  $\frac{L}{\pi}$ . Пусть для определённости  $p \geq \frac{L}{\pi}$ . Тогда длина суммы векторов, проекции которых на выбранную прямую положительны, не меньше  $\frac{L}{\pi}$ . В самом деле, сумму этих векторов можно представить в виде суммы двух ортогональных векторов, длина одного из которых равна  $p \geq \frac{L}{\pi}$ .

К вычислению среднего значения длины проекции вектора можно подойти и по-другому. Этот новый подход интересен для нас тем, что таким же способом можно будет вычислить и среднее значение длины вектора в пространстве. Пусть на плоскости каждому углу  $\varphi$  сопоставлено число  $f(\varphi)$ . Тогда среднее значение функции  $f$  равно

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$ . Геометрический смысл этого интеграла следующий.

Фиксируем на плоскости точку  $O$  и сопоставим каждому углу  $\varphi$  конец  $X$  единичного вектора  $\vec{OX}$ , направление которого соответствует углу  $\varphi$ . В результате каждому углу  $\varphi$  будет соответствовать точка окружности с центром  $O$ , причём разность двух углов будет равна длине соответствующей дуги. Разобьём окружность на мелкие ду-

ги и рассмотрим сумму  $\sum_k f(\varphi_k) \Delta l_k$ , где  $\varphi_k$  — некоторая точка  $k$ -й дуги,  $\Delta l_k$  — длина этой дуги. При измельчении разбиения эта сумма стремится к  $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$ . Чтобы получить среднее значение функции  $f$ , этот интеграл нужно разделить на длину окружности, т. е. на  $2\pi$ .

Теперь можно аналогичным образом определить среднее значение длины проекции вектора в пространстве. Фиксируем в пространстве точку  $O$  и сопоставим каждому направлению в пространстве конец  $X$  единичного вектора  $\overrightarrow{OX}$ , соответствующего этому направлению. В результате получим сферу радиуса 1 с центром  $O$ . Интересующая нас функция  $f$  равна длине проекции вектора  $\vec{a}$  на луч  $OX$ . Чтобы определить её среднее значение, нужно разбить сферу на достаточно мелкие области и рассмотреть сумму  $\sum_k f(X_k) \Delta S_k$ , где  $X_k$  — точка  $k$ -й области,  $\Delta S_k$  — площадь этой области. Затем нужно вычислить предел таких сумм при измельчении разбиения и поделить этот предел на площадь поверхности сферы, т. е. на  $4\pi$ . Вместо разбиения сферы на мелкие области можно также рассматривать выпуклые многогранники, достаточно хорошо приближающие данную сферу. При этом можно считать, что для грани  $M_k$  точка  $X_k$  определяется как конец вектора  $\overrightarrow{OX_k}$ , перпендикулярного  $M_k$ . В таком случае  $f(X_k) = a \Delta S_k |\cos \varphi_k|$ , где  $\Delta S_k$  — площадь грани  $M_k$ ,  $\varphi_k$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\overrightarrow{OX_k}$ . Легко проверить, что

$$\Delta S_k |\cos \varphi_k| = \Delta S'_k,$$

где  $\Delta S'_k$  — площадь проекции грани  $M_k$  на плоскость, ортогональную вектору  $\vec{a}$ . Таким образом, рассматриваемая сумма  $\sum_k f(X_k) \Delta S_k$  равна сумме площадей проекций граней многогранника на плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{a}$ . В пределе эта сумма равна удвоенной площади сечения сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Таким образом, среднее значение длины проекции вектора  $\vec{a}$  на прямые в пространстве равно  $\frac{2aS_1}{S_2}$ , где  $S_1$  — площадь экваториального сечения сферы,  $S_2$  — площадь поверхности сферы. Для сферы единичного радиуса  $S_1 = \pi$  и  $S_2 = 4\pi$ , поэтому среднее значение равно  $\frac{a}{2}$ .

С помощью среднего значения длины вектора в пространстве теми же способами, которыми мы пользовались в случае плоскости, можно доказать следующие утверждения.

6. Если один выпуклый многогранник расположен внутри другого выпуклого многогранника, то площадь поверхности внутреннего многогранника меньше площади поверхности внешнего многогранника.

В данном случае мы каждой грани сопоставляем перпендикулярный ей вектор, длина которого равна площади грани.

7. Если площадь любой проекции выпуклого многогранника не превосходит 1, то площадь его поверхности не превосходит 4.

8. Пусть в пространстве даны векторы  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ , сумма длин которых равна  $L$ . Тогда среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше  $\frac{L}{4}$ .

В заключение обсудим одно утверждение, которое можно было бы сформулировать и в случае плоскости, но оно более интересно в пространстве.

9. Пусть один тетраэдр расположен внутри другого тетраэдра. Тогда отношение суммы длин рёбер внутреннего тетраэдра к сумме длин внешнего тетраэдра не превосходит  $\frac{4}{3}$ , причём это отношение может быть сколь угодно близко к  $\frac{4}{3}$ . (В частности, сумма длин рёбер внутреннего тетраэдра может быть больше суммы длин рёбер внешнего тетраэдра.)

Мы докажем сразу более общее утверждение.

10. Пусть многогранник с  $t$  вершинами расположен внутри многогранника с  $n$  вершинами. Тогда отношение суммы попарных расстояний внутреннего многогранника к сумме длин рёбер внешнего многогранника не превосходит  $\frac{t^2}{4(n-1)}$  при чётном  $t$  и  $\frac{t^2-1}{4(n-1)}$  при нечётном  $t$ .

Это утверждение достаточно доказать для проекций многогранников на прямую. В случае прямой требуемое утверждение очевидным образом получается из следующей леммы.

**Лемма.** Пусть на отрезке длиной  $d$  расположено  $k$  точек, причём концы отрезка входят в эту систему  $k$  точек. Тогда минимальная сумма попарных расстояний между данными точками равна  $(k-1)d$ , а максимальная сумма расстояний между точками равна  $\frac{k^2 d}{4}$  при чётном  $k$  и  $\frac{(k^2-1)d}{4}$  при нечётном  $k$ .

**Доказательство.** Пусть  $A$  и  $B$  — концы рассматриваемого отрезка. Для любой точки  $X$  этого отрезка выполняется равенство  $AX +$

$+BX = d$ , поэтому сумма попарных расстояний между данными точками равна  $(k-1)d + \Sigma$ , где  $\Sigma$  — сумма попарных расстояний для системы из  $k-2$  точек, которая получается из данной системы точек после выбрасывания точек  $A$  и  $B$ . Минимальное значение  $\Sigma$  равно 0; оно достигается в том случае, когда все  $k-2$  точки сосредоточены в одном из концов отрезка  $AB$ . Максимальное значение  $\Sigma$  может получиться лишь в том случае, когда в новую систему из  $k-2$  точек входят обе точки  $A$  и  $B$  (мы предполагаем, что  $k-2 \geq 2$ ). Снова выбросим точки  $A$  и  $B$  и рассмотрим систему из  $k-4$  точек и т. д. В итоге получаем, что если  $k = 2s$ , то сумма попарных расстояний максимальна в том случае, когда  $s$  точек расположены в одном конце отрезка и  $s$  точек расположены в другом конце отрезка; эта сумма равна  $s^2d = \frac{k^2d}{4}$ . Если же  $k = 2s + 1$ , то в одном конце отрезка должно быть расположено  $s$  точек, а в другом  $s + 1$  точка; в этом случае сумма равна  $s(s+1)d = \frac{(k^2-1)d}{4}$ .  $\square$

## 15. Хроматический многочлен графа

Рассмотрим систему из нескольких точек и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек. При этом нас будет интересовать лишь то, какие именно пары точек соединены отрезками. Более того, эти отрезки можно считать не прямолинейными, а криволинейными. Такую систему точек называют *графом*; сами точки называют *вершинами* графа, а отрезки — *рёбрами* графа.

Граф называют *планарным*, если его можно расположить на плоскости так, чтобы его рёбра попарно не пересекались. Например, граф, изображённый на рис. 15.1, не планарный. Это следует из решения известной задачи о трёх домах и трёх колодцах: «Можно ли каждый из трёх домов соединить дорожкой с каждым из трёх колодцев так, чтобы эти дорожки не пересекались?»

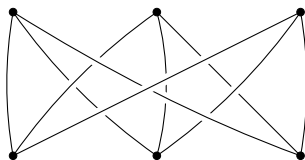


Рис. 15.1

В 1890 г. было доказано, что вершины любого планарного графа можно раскрасить в 5 цветов так, что концы любого ребра будут разноцветными. После этого долго была популярна задача четырёх красок: «Любой ли планарный граф можно раскрасить в 4 цвета?» (Под раскраской графа здесь и далее подразумевается такая раскраска вершин графа, что концы любого ребра разноцветные.) Лишь в 1977 г. был получен утвердительный ответ. Доказательство опиралось на перебор огромного количества различных вариантов, выполненный с помощью компьютера.

С раскрасками графов связано одно интересное явление, которое мы сейчас обсудим. Пусть  $G$  — некоторый граф, а  $f(G, x)$  — количество раскрасок этого графа в  $x$  цветов. Удивительным образом оказывается, что  $f(G, x)$  — многочлен степени  $n$ , где  $n$  — число вер-

шин графа. Прежде чем доказывать это утверждение, разберём два простых примера.

Наиболее прост тот случай, когда у графа  $G$  нет вообще никаких рёбер, а есть только  $n$  вершин. В этом случае каждую вершину можно окрасить любым цветом, независимо от остальных вершин. Поэтому  $f(G, x) = x^n$ .

Другой крайний случай — граф  $G$  с  $n$  вершинами, любые две из которых соединены ребром. В этом случае все вершины должны быть разноцветными, поэтому  $f(G, x) = x(x-1)\dots(x-n+1)$ .

В обоих случаях  $f(G, x)$  — многочлен степени  $n$ . Как мы сейчас убедимся, из этого уже следует, что  $f(G, x)$  — многочлен степени  $n$  для любого графа  $G$  с  $n$  вершинами.

Рассмотрим граф  $G_n^+$  с  $n$  вершинами, в котором две вершины  $A$  и  $B$  соединены ребром. Сопоставим ему граф  $G_n^-$ , в котором все вершины и рёбра те же самые, за исключением того, что в нём нет ребра, соединяющего вершины  $A$  и  $B$ . Сопоставим графу  $G_n^+$  также граф  $G_{n-1}$ , в котором все вершины и рёбра такие же, как у графов  $G_n^+$  и  $G_n^-$ , за исключением того, что в нём вершины  $A$  и  $B$  отождествлены друг с другом (при этом могут возникнуть двойные рёбра, но мы их заменяем на обычные рёбра). Примеры графов  $G_n^-$ ,  $G_n^+$  и  $G_{n-1}$  приведены на рис. 15.2. При этом двойное ребро, соединяющее вершины  $A=B$  и  $D$ , заменено на обычное (однократное) ребро.

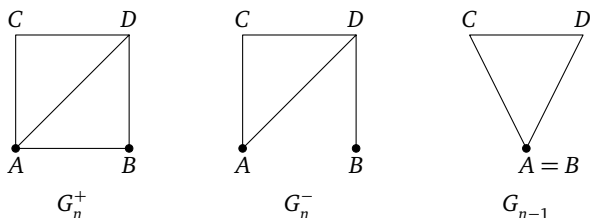


Рис. 15.2

Любая раскраска графа  $G_n^-$  с одноцветными вершинами  $A$  и  $B$  соответствует определённой раскраске графа  $G_{n-1}$ , а любая раскраска с разноцветными вершинами  $A$  и  $B$  — раскраске графа  $G_n^+$ . Поэтому

$$f(G_n^-, x) = f(G_n^+, x) + f(G_{n-1}, x). \quad (1)$$

С помощью формулы (1) несложно доказать, что если  $G_n$  — граф с  $n$  вершинами, то  $f(G_n, x)$  — многочлен степени  $n$ . Применим для

этого индукцию по  $n$ . При  $n = 1$  граф состоит из одной точки, поэтому  $f(G_1, x) = x$ . Предположим, что для любого графа  $G_{n-1}$  с  $n - 1$  вершиной функция  $f(G_{n-1}, x)$  представляет собой многочлен степени  $n$ . Возьмём произвольный граф  $G_n^-$  с  $n$  вершинами. Применив несколько раз формулу (1), можно перейти от графа  $G_n^-$  к графу с  $n$  вершинами, любые две из которых соединены ребром. Хроматический многочлен полученного графа равен  $x(x - 1) \dots (x - n + 1)$ , поэтому

$$f(G_n^-, x) = x(x - 1) \dots (x - n + 1) + f_1 + \dots + f_k,$$

где  $f_1, \dots, f_k$  — многочлены степени  $n - 1$ .

При доказательстве мы воспользовались тем, что хроматический многочлен графа, все вершины которого соединены рёбрами, равен  $x(x - 1) \dots (x - n + 1)$ . Но можно воспользоваться и тем, что хроматический многочлен графа, у которого вообще нет рёбер, равен  $x^n$ . Для этого формулу (1) нужно записать в виде

$$f(G_n^+, x) = f(G_n^-, x) - f(G_{n-1}, x). \quad (2)$$

Применив такую формулу несколько раз, можно перейти от графа  $G_n^+$  к графу с  $n$  вершинами, у которого вообще нет рёбер. Поэтому

$$f(G_n^+, x) = x^n - g_1 - \dots - g_l, \quad (3)$$

где  $g_1, \dots, g_l$  — хроматические многочлены графов с  $n - 1$  вершиной.

Второй способ доказательства имеет некоторые преимущества. Например, записав хроматический многочлен графа в виде (3), мы без труда докажем следующую теорему, которую сформулировал и доказал в 1932 г. американский математик Хасслер Уитни.

**Теорема.** *Хроматический многочлен графа с  $n$  вершинами имеет вид*

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \dots, \quad \text{где } a_i \geq 0.$$

## 16. Диофантовы уравнения для многочленов

При доказательстве неразрешимости многих диофантовых уравнений для многочленов весьма эффективным оказывается следующее утверждение.

**Теорема 1** (Мейсон). Пусть  $a(x)$ ,  $b(x)$  и  $c(x)$  — попарно взаимно простые многочлены, связанные соотношением  $a + b + c = 0$ . Тогда степень каждого из этих многочленов не превосходит  $n_0(abc) - 1$ , где  $n_0$  — количество различных корней многочлена.

**Доказательство.** Положим  $f = \frac{a}{c}$  и  $g = \frac{b}{c}$ . Тогда  $f$  и  $g$  — рациональные функции, связанные соотношением  $f + g + 1 = 0$ . Проинтегрировав это равенство, получим  $f' = -g'$ . Поэтому

$$\frac{b}{a} = \frac{g}{f} = -\frac{f'/f}{g'/g}.$$

Рациональные функции  $f$  и  $g$  имеют специальный вид  $\prod (x - \rho_i)^{r_i}$ ,  $r_i \in \mathbb{Z}$ . Для функции  $R(x) = \prod (x - \rho_i)^{r_i}$  выполняется равенство

$$\frac{R'}{R} = \sum \frac{r_i}{x - \rho_i}.$$

Пусть  $a(x) = \prod (x - \alpha_i)^{a_i}$ ,  $b(x) = \prod (x - \beta_j)^{b_j}$ ,  $c(x) = \prod (x - \gamma_k)^{c_k}$ . Тогда

$$\begin{aligned} f'/f &= \sum \frac{a_i}{x - \alpha_i} - \sum \frac{c_k}{x - \gamma_k}, \\ g'/g &= \sum \frac{b_j}{x - \beta_j} - \sum \frac{c_k}{x - \gamma_k}. \end{aligned}$$

Поэтому после умножения на многочлен

$$N_0 = \prod (x - \alpha_i)(x - \beta_j)(x - \gamma_k)$$

степени  $n_0(abc)$  рациональные функции  $\frac{f'}{f}$  и  $\frac{g'}{g}$  становятся многочленами степени не выше  $n_0(abc) - 1$ . Таким образом, из взаимной простоты многочленов  $a(x)$  и  $b(x)$  и из равенства

$$\frac{b}{a} = -\frac{N_0 f / f'}{N_0 g / g'}$$

следует, что степень каждого из многочленов  $a(x)$  и  $b(x)$  не превосходит  $n_0(abc) - 1$ . Для многочлена  $c(x)$  доказательство аналогично.  $\square$

Из теоремы 1 можно извлечь интересные следствия, которые мы формулируем как теоремы 2—4.

**Теорема 2** (Дэвенпорт). Пусть  $f$  и  $g$  — взаимно простые многочлены ненулевой степени. Тогда

$$\deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2} \deg f + 1.$$

Доказательство. Если  $\deg f^3 \neq \deg g^2$ , то

$$\deg(f^3 - g^2) \geq \deg f^3 = 3 \deg f \geq \frac{1}{2} \deg f + 1.$$

Поэтому можно считать, что  $\deg f^3 = \deg g^2 = 6k$ .

Рассмотрим многочлены  $F = f^3$ ,  $G = g^2$  и  $H = F - G = f^3 - g^2$ . Ясно, что  $\deg H \leq 6k$ . Согласно теореме 1 имеем

$$\max(\deg F, \deg G, \deg H) \leq n_0(FGH) - 1 \leq \deg f + \deg g + \deg H - 1,$$

т. е.

$$6k \leq 2k + 3k + \deg H - 1.$$

Таким образом,  $\deg H \geq k + 1 = \frac{1}{2} \deg f + 1$ . □

*Замечание.* Для многочленов

$$f(t) = t^6 + 4t^4 + 10t^2 + 6,$$

$$g(t) = t^9 + 6t^7 + 21t^5 + 35t^3 + \frac{63}{2}t$$

неравенство Дэвенпорта обращается в равенство.

**Теорема 3.** Пусть  $f$ ,  $g$  и  $h$  — взаимно простые многочлены, причём хотя бы один из них — не константа. Тогда равенство

$$f^n + g^n = h^n$$

не может выполняться при  $n \geq 3$ .

Доказательство. Согласно теореме 1 степень каждого из многочленов  $f^n$ ,  $g^n$  и  $h^n$  не превосходит

$$\deg f + \deg g + \deg h - 1.$$

Сложив эти три неравенства, получим

$$n(\deg f + \deg g + \deg h) \leq 3(\deg f + \deg g + \deg h - 1) - 1.$$

Следовательно,  $n \leq 3$ . □

Диофантово уравнение  $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$  для многочленов  $f, g, h$  имеет очевидное решение, если одно из чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  равно 1. Поэтому будем считать, что  $\alpha, \beta, \gamma \geq 2$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — натуральные числа, причём  $2 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Тогда уравнение

$$f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$$

имеет взаимно простые решения лишь для следующих наборов  $(\alpha, \beta, \gamma)$ :  $(2, 2, \gamma)$ ,  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  и  $(2, 3, 5)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $a, b$  и  $c$  — степени многочленов  $f, g$  и  $h$ . Тогда согласно теореме 1 имеем

$$\alpha a \leq a + b + c - 1, \quad (1)$$

$$\beta b \leq a + b + c - 1, \quad (2)$$

$$\gamma c \leq a + b + c - 1. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\alpha(a + b + c) \leq \alpha a + \beta b + \gamma c \leq 3(a + b + c) - 3,$$

а значит,  $\alpha < 3$ . По условию  $\alpha \geq 2$ , поэтому  $\alpha = 2$ . При  $\alpha = 2$  неравенство (1) принимает вид

$$a \leq b + c - 1. \quad (4)$$

Сложив неравенства (4), (2) и (3), получим

$$\beta b + \gamma c \leq 3(b + c) + a - 3.$$

Учитывая, что  $\beta \leq \gamma$ , и ещё раз применяя неравенство (4), получаем

$$\beta(b + c) \leq 4(b + c) - 4,$$

а значит,  $\beta \leq 4$ , т. е.  $\beta = 2$  или  $3$ .

Остаётся доказать, что если  $\beta = 3$ , то  $\gamma \leq 5$ . При  $\beta = 3$  неравенство (2) принимает вид

$$2b \leq a + c - 1. \quad (5)$$

Сложив неравенства (4) и (5), получим

$$b \leq 2c - 2.$$

В таком случае из неравенства (4) следует, что

$$a \leq 3c - 3.$$

Из двух последних неравенств и неравенства (3) следует, что

$$\gamma c \leq 6c - 6,$$

поэтому  $\gamma \leq 5$ . □

Многочлены, удовлетворяющие соотношению  $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$ , тесно связаны с правильными многогранниками. Подробно эта связь описана в книге Ф. Клейна «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени» (М.: Наука, 1989); там же указан способ построения этих многочленов. Мы приведём лишь конечный результат.

Случай  $\alpha = \beta = 2$ ,  $\gamma = n$  связан с вырожденным правильным многогранником — плоским  $n$ -угольником. Требуемое соотношение имеет вид

$$\left(\frac{x^n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^n-1}{2}\right)^2 = x^n.$$

Случай  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 3$  связан с правильным тетраэдром. Соотношение имеет вид

$$12i\sqrt{3}(x^5-x)^2 + (x^4-2i\sqrt{3}x^2+1)^3 = (x^4+2i\sqrt{3}x^2+1)^3.$$

Случай  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 4$  связан с кубом и правильным октаэдром. Соотношение имеет вид

$$(x^{12}-33x^8-33x^4+1)^2 + 108(x^5-x)^4 = (x^8+14x^4+1)^3.$$

Случай  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 5$  связан с додекаэдром и икосаэдром. Соотношение имеет вид  $T^2 + h^3 = 1728f^5$ , где

$$T = x^{30} + 1 + 522(x^{25} - x^5) - 10005(x^{20} + x^{10}),$$

$$H = -(x^{20} + 1) + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10},$$

$$f = x(x^{10} + 11x^5 - 1).$$

## 17. Прямые Паскаля

В 1640 г. Блез Паскаль, которому было тогда 16 лет, напечатал в виде афиши тиражом 50 экземпляров своё сочинение «Опыт о кониках» («Essai sur les coniques»). Эти афиши были прибиты на стенах домов и розданы учёным. «Опыт о кониках» содержал несколько определений и лемм; доказательства отсутствовали. Основной теоремой этого сочинения была теорема о вписанном шестиугольнике. Эту теорему теперь называют теоремой Паскаля, а сам Паскаль, по свидетельству Лейбница, называл её «мистическим шестиугольником» (Hexagramma mysticum). Эта теорема заключается в следующем. Если шестиугольник  $ABCDEF$  вписан в окружность, то точки пересечения продолжений его противоположных сторон (т. е. прямых  $AB$  и  $DE$ ;  $BC$  и  $EF$ ;  $CD$  и  $AF$ ) лежат на одной прямой. Паскаль также отметил, что из этой теоремы с помощью центральной проекции можно получить аналогичное утверждение для шестиугольника, вписанного в произвольное коническое сечение (эллипс, параболу, гиперболу).

В теореме Паскаля шестиугольник  $ABCDEF$  не обязательно выпуклый; в данном случае шестиугольником можно считать произвольную замкнутую шестизвенную ломаную. Для шести фиксированных точек окружности существует ровно 60 замкнутых шестизвенных ломаных с вершинами в этих точках. В самом деле, выберем одну из шести точек; её можно соединить с любой из пяти оставшихся точек, затем новую точку можно соединить с любой из четырёх оставшихся точек и т. д. В результате получаем  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$  различных вариантов, но при этом одну и ту же шестизвенную ломаную мы считаем дважды, так как при нашем способе подсчёта учитывается и направление обхода ломаной. Таким образом, количество различных шестизвенных ломаных с вершинами в данных точках равно  $\frac{120}{2} = 60$ . Этим 60 шестизвенным ломаными соответствуют 60 прямых Паскаля. Якоб Штейнер (1827) установил, что эти 60 прямых можно разбить на 20 троек прямых, пересекающихся в одной точке. Впоследствии Киркман (1850) более детально исследовал конфигурацию 60 прямых Паскаля и установил, что помимо 20 точек Штейнера они пересекаются по три ещё в 60 точках.

Известно много разных доказательств теоремы Паскаля, но все они не очень простые. Мы приведём одно из возможных доказательств, которое позволяет получить также и доказательства теорем Штейнера и Киркмана.

Введём для удобства следующее обозначение. Будем считать, что прямая  $AB$  задаётся уравнением  $l_{AB} = 0$ ; это уравнение определено с точностью до пропорциональности. В координатах  $x, y$  функция  $l_{AB}$  имеет вид  $l_{AB}(x, y) = ax + by + c$ , причём  $l_{AB}$  обращается в нуль в точках  $A$  и  $B$ .

**Лемма.** Пусть точки  $A, B, C$ , и  $D$  лежат на окружности, заданной уравнением второй степени  $f = 0$ . Тогда

$$f = \lambda l_{AB} l_{CD} + \mu l_{BC} l_{AD},$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — некоторые числа.

**Первое доказательство.** Пусть  $X$  — точка данной окружности, отличная от точек  $A, B, C$  и  $D$ . Выберем числа  $\lambda$  и  $\mu$  так, что

$$\lambda_1 l_{AB}(X) l_{CD}(X) + \mu_1 l_{BC}(X) l_{AD}(X) = 0,$$

и рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$f_1 = 0, \quad \text{где } f_1 = \lambda_1 l_{AB} l_{CD} + \mu_1 l_{BC} l_{AD}.$$

Эта кривая задаётся уравнением второй степени и проходит через точки  $A, B, C, D$  и  $X$ . Но если кривая второй степени пересекает окружность в пяти различных точках, то эта кривая совпадает с окружностью, а значит,  $f = \alpha f_1$ , где  $\alpha$  — некоторое число.  $\square$

**Второе доказательство.** Введём косоугольную систему координат с осями  $AB$  и  $AD$ . Тогда прямые  $AB$  и  $AD$  задаются уравнениями  $y = 0$  и  $x = 0$  соответственно, а уравнение  $f = 0$ , задающее окружность, является уравнением второй степени относительно  $x$  и  $y$ .

Ограничения функций  $f$  и  $\lambda l_{AB} l_{CD} + \mu l_{BC} l_{AD} = \lambda y l_{CD} + \mu x l_{BC}$  на любую из осей координат являются квадратными трёхчленами с двумя общими корнями ( $A$  и  $B$  или  $A$  и  $D$ ). Поэтому числа  $\lambda$  и  $\mu$  можно подобрать так, что многочлен

$$P(x, y) = f(x, y) - \lambda y l_{CD}(x, y) - \mu x l_{BC}(x, y)$$

обращается в нуль как при  $x = 0$ , так и при  $y = 0$ . Это означает, что он делится на  $xy$ , т. е.  $P(x, y) = qxy$ , где  $q$  — константа. В точке  $C$  многочлен  $P$  обращается в нуль, а  $xy \neq 0$ . Поэтому  $q = 0$ , т. е.

$$f = \lambda l_{AB} l_{CD} + \mu l_{BC} l_{AD}.$$

$\square$

С помощью леммы мы докажем теоремы Паскаля, Штейнера и Киркмана. Рассмотрим шестиугольник  $ABCDEF$ , вершины которого лежат на окружности  $f = 0$ . Четырёхугольники  $ABCD$ ,  $AFED$  и  $BEFC$  вписаны в эту окружность, поэтому  $f$  можно представить в любом из следующих видов:

$$f = \lambda_1 l_{AB} l_{CD} + \mu_1 l_{AD} l_{BC}, \quad (1)$$

$$f = \lambda_2 l_{AF} l_{ED} + \mu_2 l_{AD} l_{EF}, \quad (2)$$

$$f = \lambda_3 l_{BE} l_{CF} + \mu_3 l_{BC} l_{EF}. \quad (3)$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$\lambda_1 l_{AB} l_{CD} - \lambda_2 l_{AF} l_{ED} = (\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}) l_{AD}.$$

Пусть  $X$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $ED$ . В точке  $X$  обращаются в нуль функции  $l_{AB} l_{CD}$  и  $l_{AF} l_{ED}$ , а функция  $l_{AD}$  в этой точке в нуль не обращается. Следовательно, в точке  $X$  обращается в нуль функция  $\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}$ , т. е. точка  $X$  лежит на прямой  $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$ . Аналогично доказывается, что точка пересечения прямых  $CD$  и  $AF$  лежит на прямой  $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$ . Очевидно также, что точка пересечения прямых  $BC$  и  $EF$  лежит на прямой  $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$ . В результате получаем следующее утверждение.

**Теорема (Паскаль).** Если точки  $A, B, C, D, E$  и  $F$  лежат на одной окружности, то точки пересечения прямых  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $EF$ ,  $CD$  и  $FA$  лежат на одной прямой.

Но продолжим рассуждения дальше. Приравнивая выражения из формул (2) и (3), получим, что точки пересечения прямых  $AF$  и  $BE$ ,  $ED$  и  $CF$ ,  $AD$  и  $BC$  лежат на прямой  $\mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC}$ . А приравняв выражения из формул (1) и (3), получим, что точки пересечения прямых  $AB$  и  $CF$ ,  $CD$  и  $BE$ ,  $AD$  и  $EF$  лежат на прямой  $\mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$ . Легко проверить, что полученные прямые

$$\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}, \quad \mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC}, \quad \mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$$

пересекаются в одной точке. В самом деле, если  $X$  — точка пересечения первых двух из этих прямых, то

$$\mu_1 \mu_2 l_{BC}(X) l_{AD}(X) = \mu_2 \mu_3 l_{EF}(X) l_{BC}(X).$$

Сократив на  $\mu_2 l_{BC}(X)$ , получим  $\mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$  (мы не будем останавливаться на обсуждении вырожденного случая, когда  $\mu_2 l_{BC}(X) = 0$ ).

Будем называть *прямой Паскаля* шестиугольника, вписанного в окружность, прямую, на которой лежат точки пересечения пар

его противоположных сторон. При этом, как мы уже говорили, шестиугольником можно считать и замкнутую самопересекающуюся ломаную. Доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом.

**Теорема (Штейнер).** Пусть точки  $A, B, C, D, E, F$  лежат на одной окружности. Тогда прямые Паскаля шестиугольников  $ABCDEF$ ,  $ADEBCF$  и  $ADCFEB$  пересекаются в одной точке.

Напомним, что при доказательстве этой теоремы исходными четырёхугольниками были  $ABCD$ ,  $AFED$  и  $BEFC$ . Можно исходить также из четырёхугольников  $ABFE$ ,  $ABDC$  и  $CDFE$ . Тогда получим следующее утверждение

**Теорема (Киркман).** Пусть точки  $A, B, C, D, E, F$  лежат на одной окружности. Тогда прямые Паскаля шестиугольников  $ABFDCE$ ,  $AEFBDC$  и  $ABDFEC$  пересекаются в одной точке.

Нетрудно убедиться, что каждая из 60 прямых Паскаля, соответствующих шести фиксированным точкам окружности, входит ровно в одну тройку Штейнера и в три тройки Киркмана.

## 18. Теоремы о бабочке и о двух бабочках

Лемма, на которой было основано доказательство теорем Паскаля, Штейнера и Киркмана в рассказе о прямых Паскаля, бывает полезна и при доказательстве многих других геометрических теорем. Напомним её формулировку.

**Лемма.** Пусть точки  $A, B, C$ , и  $D$  лежат на окружности, заданной уравнением второй степени  $f = 0$ . Тогда

$$f = \lambda l_{AB} l_{CD} + \mu l_{BC} l_{AD},$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — некоторые числа.

Самопересекающийся четырёхугольник до некоторой степени похож на бабочку. С этим обстоятельством связаны названия следующих двух утверждений.

**Теорема (о бабочке).** Пусть хорды  $KL$  и  $MN$  проходят через середину  $O$  хорды  $AB$ . Тогда прямые  $KN$  и  $ML$  пересекают прямую  $AB$  в точках, равноудалённых от точки  $O$ .

**Теорема (о двух бабочках).** Пусть стороны самопересекающихся четырёхугольников  $KLMN$  и  $K'L'M'N'$ , вписанных в одну и ту же окружность, пересекают хорду  $AB$  этой окружности в точках  $P, Q, R, S$  и  $P', Q', R', S'$  соответственно. Тогда если три из точек  $P, Q, R, S$  совпадают с тремя из точек  $P', Q', R', S'$ , то и оставшиеся точки тоже совпадают.

**Доказательство теоремы о бабочке.** Пусть  $f = 0$  — уравнение данной окружности. Согласно лемме

$$f = \lambda l_{KL} l_{MN} + \mu l_{KN} l_{ML}.$$

Это равенство выполняется и для ограничений всех рассматриваемых функций на прямую  $AB$ . Введём на прямой  $AB$  координату  $x$ , приняв точку  $O$  за начало координат. Тогда можно считать, что  $f = x^2 - a$  и  $l_{KL} l_{MN} = x^2$ , поэтому  $l_{KN} l_{ML} = bx^2 - c$ . Следовательно, корни уравнения  $l_{KN} l_{ML} = 0$  равноудалены от точки  $O$ , что и требовалось.  $\square$

**Доказательство теоремы о двух бабочках.** Согласно лемме

$$\lambda l_{KL} l_{MN} + \mu l_{KN} l_{ML} = f = \lambda' l_{K'L'} l_{M'N'} + \mu' l_{K'N'} l_{M'L'}.$$

Рассмотрев ограничение этого равенства на прямую  $AB$ , получим равенство вида

$$\begin{aligned}\alpha(x-p)(x-q) + \beta(x-r)(x-s) = \\ = \alpha'(x-p)(x-q) + \beta'(x-r)(x-s').\end{aligned}\quad (1)$$

При этом требуется доказать, что  $s = s'$ .

Равенство (1) можно преобразовать к виду

$$\alpha''(x-p)(x-q) = (x-r)[\beta(x-s) - \beta'(x-s')].$$

В том случае, когда точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  попарно различны,  $(x-p)(x-q)$  не делится на  $(x-r)$ . Поэтому  $\beta(x-s) - \beta'(x-s') = 0$ . Следовательно,  $s = s'$ .  $\square$

## 19. Двоякопериодические последовательности

Последовательность чисел  $a_1, \dots, a_N$  может обладать следующим свойством: сумма любых  $n$  последовательных её членов положительна, а сумма любых  $m$  последовательных членов отрицательна. Выясним, какой может быть наибольшая длина  $N$  такой последовательности для данных  $n$  и  $m$ .

Разберём сначала случай, когда числа  $n$  и  $m$  не имеют общих делителей. Прежде всего докажем, что  $N \leq n + m - 2$ . Предположим, что последовательность  $a_1, \dots, a_{n+m-1}$  обладает требуемым свойством. Тогда можно рассмотреть следующую таблицу:

$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_n$
$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_{n+1}$
.....			
$a_m$	$a_{m+1}$	$\dots$	$a_{m+n-1}$

Сумма чисел в каждой строке этой таблицы положительна, а сумма чисел в каждом столбце отрицательна. Поэтому сумма всех чисел таблицы должна быть как положительной, так и отрицательной. Полученное противоречие показывает, что последовательность длины  $n + m - 1$  не может обладать требуемым свойством.

Займёмся теперь построением примера требуемой последовательности длины  $n + m - 2$ . Для построения примера удобно использовать двоякопериодические последовательности с периодами  $n$  и  $m$ :  $a_{i+n} = a_i$  и  $a_{i+m} = a_i$ . Сопоставим двоякопериодической последовательности граф, вершины которого занумерованы числами от 1 до  $n + m - 1$ , а рёбра соединяют вершины с номерами  $i$  и  $i + n$  и вершины с номерами  $i$  и  $i + m$ . Для  $n = 4$  и  $m = 7$  соответствующий граф изображён на рис. 19.1; в этом случае  $n + m - 2 = 9$ .

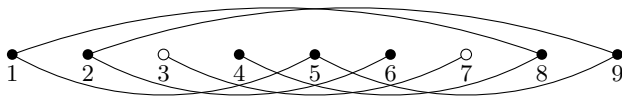


Рис. 19.1

Полученный граф несвязен. Он состоит из двух компонент: вершины одной компоненты на рисунке чёрные, а другой — белые. Это-

му графу можно сопоставить двоякопериодическую последовательность  $x, x, y, x, x, x, y, x, x$ . Сумма любых четырёх её последовательных членов равна  $3x + y$ , а сумма любых семи последовательных членов равна  $5x + 2y$ . Остаётся подобрать числа  $x$  и  $y$  так, чтобы выполнялись неравенства  $3x + y > 0$  и  $5x + 2y < 0$ . Это можно сделать, потому что прямые  $3x + y = 0$  и  $5x + 2y = 0$  разбивают плоскость на четыре части и в одной из этих частей требуемые неравенства выполняются.

Для произвольных взаимно простых  $m$  и  $n$  требуемую последовательность можно построить точно так же. Убедимся прежде всего, что граф получается несвязный. Для определённости можно считать, что  $m > n$ . Если  $m = n - 1$ , то вершина с номером  $n$  не соединена рёбрами с остальными вершинами. Строение графа при  $m > n - 1$  поясняет рис. 19.2. Есть две группы по  $n - 2$  вершины, из каждой из которых выходит одно длинное ребро и одно короткое. Есть группа из  $m - n - 2$  вершин, из каждой из которых выходят два коротких ребра. И есть четыре вершины, из каждой из которых выходит одно короткое ребро. Граф, у которого из четырёх вершин выходит по одному ребру, а из остальных вершин выходит по два ребра, состоит из двух компонент.

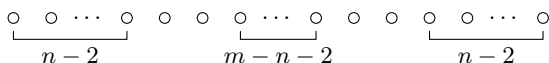


Рис. 19.2

По графу мы строим двоякопериодическую последовательность, для которой сумма любых  $n$  последовательных членов равна  $ax + by$  ( $a + b = n$ ), а сумма любых  $m$  последовательных членов равна  $cx + dy$  ( $c + d = m$ ). При этом  $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ . Действительно, если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ , т. е.  $\frac{n}{b} = \frac{m}{d}$ , а это противоречит взаимной простоте чисел  $n$  и  $m$ .

Теперь несложно доказать, что если наибольший общий делитель чисел  $n$  и  $m$  равен  $d$ , то наибольшая длина требуемой последовательности равна  $n + m - d - 1$ . Предположим, что существует требуемая последовательность длины

$$n + m - d = \left( \frac{n}{d} + \frac{m}{d} - 1 \right) d.$$

Разобьём эту последовательность на участки длины  $d$  и рассмотрим последовательность длины  $\frac{n}{d} + \frac{m}{d} - 1$ , составленную из сумм чисел, входящих в эти участки. Эта последовательность обладает требуемым свойством для взаимно простых чисел  $\frac{n}{d}$  и  $\frac{m}{d}$ , но выше уже было показано, что последовательность длины  $\frac{n}{d} + \frac{m}{d} - 1$  не может обладать требуемым свойством.

Для построения примера последовательности длины  $n + m - d - 1$  нужно взять последовательность, построенную для чисел  $\frac{n}{d}$  и  $\frac{m}{d}$ , и вставить в начале и в конце, а также между членами последовательности наборы из  $d - 1$  нулей. Например, для  $n = 12$  и  $m = 21$  получим последовательность 0, 0, x, 0, 0, x, 0, 0, y, 0, 0, x, 0, 0, x, 0, 0, x, 0, 0, y, 0, 0, x, 0, 0, x, 0, 0.

## 20. Теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии

Теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии имеет интересную историю. П. Бодэ (Pierre Joseph Henry Baudet, 1891—1921) высказал следующую гипотезу:

(А) *если натуральные числа разбиты каким-то образом на два класса, то для любого натурального числа  $l$  в одном из этих классов найдётся арифметическая прогрессия длины  $l$  (т. е. данному классу принадлежат числа  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (l - 1)d$  при некоторых  $a$  и  $d$ ).*

Эта гипотеза быстро стала известной. Её пытались доказать многие математики. Но доказать эту гипотезу оказалось нелегко. Первые существенные результаты получили известные математики Э. Артин и О. Шрайер.

Сначала Шрайер показал, что гипотеза Бодэ эквивалентна следующему утверждению:

(Б) *для любого натурального числа  $l$  существует такое натуральное число  $N(l)$ , что если числа  $1, 2, \dots, N(l)$  разбиты на два класса, то один из этих классов содержит арифметическую прогрессию длины  $l$ .*

Затем Артин показал, что утверждение (Б) эквивалентно следующему утверждению:

(В) *для любых натуральных  $l$  и  $k$  существует такое натуральное число  $N(l, k)$ , что если числа  $1, 2, \dots, N(l, k)$  разбиты на  $k$  классов, то один из этих классов содержит арифметическую прогрессию длины  $l$ .*

Утверждение (А) очевидным образом следует из (В). Но, как оказалось, доказывать удобнее всего именно утверждение (В), используя двойную индукцию по  $k$  и по  $l$ . Такое довольно сложное доказательство как раз и придумал Ван дер Варден в 1927 г.

Разбиение множества на  $k$  классов можно наглядно представить как раскраску в  $k$  цветов. В таком случае утверждение (В) формулируется следующим образом:

(В') для любых натуральных  $l$  и  $k$  существует такое натуральное число  $N(l, k)$ , что если числа  $1, 2, \dots, N(l, k)$  раскрашены в  $k$  цветов, то найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины  $l$ .

Впоследствии появились как новые доказательства теоремы Ван дер Вардена, так и её обобщения. Мы обсудим одно существенное обобщение этой теоремы, доказательство которого сравнительно несложно. Это доказательство принадлежит П. Андерсону<sup>1</sup>.

Рассмотрим в  $n$ -мерном пространстве<sup>2</sup> множество точек, координаты которых — целые неотрицательные числа. Будем называть это множество *решёткой*, а точки этого множества будем называть *точками решётки*.

**Теорема.** Пусть  $S$  — конечное множество точек решётки. Тогда для любой раскраски точек решётки в  $k$  цветов существуют такое натуральное число  $a$  и такой вектор  $v$  с целыми неотрицательными координатами, что множество  $aS + v$  (т. е. образ  $S$  при гомотетии с коэффициентом  $a$  и сдвиге на вектор  $v$ ) одноцветное. При этом для числа  $a$  и для координат вектора  $v$  можно указать оценки, зависящие только от множества  $S$  и числа  $k$ .

*Замечание.* Теорема Ван дер Вардена получается при  $n = 1$  и  $S = \{1, 2, \dots, l\}$ .

При доказательстве теоремы удобно рассматривать куб со стороной  $N$ , состоящий из всех точек решётки с координатами от 0 до  $N - 1$ . Этот куб мы обозначим  $K_N$ ; он состоит из  $N^n$  точек решётки, где  $n$  — размерность пространства. Утверждение теоремы для множества  $S$  можно сформулировать так:

( $A_S$ ) существует такое натуральное число  $N$ , зависящее от количества цветов  $k$ , что при любой раскраске точек куба  $K_N$  в  $k$  цветов этот куб содержит одноцветное множество вида  $aS + v$ .

План доказательства теоремы следующий. Если  $S$  состоит из одной точки, то утверждение  $A_S$  очевидно. Поэтому достаточно доказать, что если  $w$  — точка решётки, не входящая в  $S$ , то из утверждения ( $A_S$ ) следует утверждение ( $A_{S \cup w}$ ), где  $S \cup w$  — множество, полученное из  $S$  добавлением точки  $w$ . Для доказательства этого нам

<sup>1</sup>Anderson P. G. A generalization of Baudet's conjecture (Van der Waerden's theorem) // Amer. Math. Monthly. 1976. V. 83. P. 359. P. 361.

<sup>2</sup>Если читатель плохо знаком с понятием многомерного пространства или же совсем не знаком с этим понятием, то он может считать, что  $n = 2$  или  $3$ ; теорема Ван дер Вардена имеет дело с  $n = 1$ .



Пусть верны утверждения  $(A_S)$  и  $(C_{S,w,p})$ . Тогда существует такое натуральное число  $N_p$ , что для любой раскраски куба  $K_{N_p}$  в  $k$  цветов найдутся натуральные числа  $a_1, \dots, a_p$  и вектор  $v$ , для которых каждое из множеств  $T_0, T_1, \dots, T_p$  одноцветное. Рассмотрим индуцированную раскраску в  $k' = k^{N_p}$  цветов, соответствующую кубу  $K_{N_p}$ . Доказанное выше утверждение  $(C_{S,w,1})$  можно применить к этой раскраске. В результате получим, что существует куб  $K_{N'}$ , содержащий одноцветные (в индуцированной раскраске) множества  $a'w + v'$  и  $a'S + v'$ . Одноцветность в индуцированной раскраске множества  $a'S + v'$  означает, что в исходной раскраске кубы  $K_{N_p} + a's + v'$  одинаково раскрашены для всех точек  $s$  множества  $S$ . Каждый из этих одинаково раскрашенных кубов содержит одноцветные множества

$$T_q + a's + v', \quad q = 0, 1, \dots, p,$$

причём цвет этих множеств не зависит от  $s$ . Таким образом, получаем одноцветные множества

$$T'_{q+1} = a'S + T_q + v'.$$

Добавив к ним одноцветное множество  $T'_0 = a'w + T_0 + v'$ , получим требуемый набор одноцветных множеств

$$T'_0 = (a' + a_1 + \dots + a_p)w + v'',$$

$$T'_1 = a'S + (a_1 + a_2 + \dots + a_p)w + v'',$$

.....

$$T'_{p+1} = (a' + a_1 + \dots + a_p)S + v'',$$

где  $v'' = v + v'$ .

Шаг 2. Если утверждение  $(C_{S,w,p})$  верно при всех натуральных  $p$ , то верно утверждение  $(A_{S \cup w})$ .

Мы воспользуемся лишь тем, что утверждение  $(C_{S,w,p})$  верно при  $p = k$ , где  $k$  — количество цветов. В таком случае получаем одноцветные множества  $T_0, T_1, \dots, T_k$ . Этих множеств больше, чем цветов, поэтому у двух из них цвета одинаковые. Пусть, например, цвета множеств  $T_r$  и  $T_q$ , где  $r < q$ , одинаковые. Напомним, что

$$T_r = (a_1 + \dots + a_{r-1})S + (a_r + \dots + a_{q-1})w + (a_q + \dots + a_p)w + v,$$

$$T_q = (a_1 + \dots + a_{r-1})S + (a_r + \dots + a_{q-1})S + (a_q + \dots + a_p)w + v.$$

Положим  $a' = a_r + \dots + a_{q-1}$  и  $v' = (a_1 + \dots + a_{r-1})S + (a_q + \dots + a_p)w + v$ , где  $s$  — некоторая точка множества  $S$ . Тогда  $a'(S \cup w) + v'$  — одноцветное множество требуемого вида.

## 21. Изогонально сопряжённые точки

С каждым треугольником  $ABC$  связано весьма интересное преобразование плоскости. Это преобразование устроено следующим образом. Пусть  $P$  — некоторая точка. Отразим прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  относительно биссектрис углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Полученные прямые пересекаются в одной точке  $Q$  (рис. 21.1). Для доказательства этого утверждения и для изучения свойств преобразования  $P \rightarrow Q$  удобно воспользоваться так называемыми трилинейными координатами, которые мы сейчас введём.

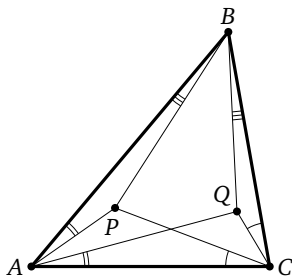


Рис. 21.1

Пусть  $a, b, c$  — расстояния от точки  $X$ , лежащей внутри треугольника  $ABC$ , до сторон  $BC, CA, AB$ . Тогда набор чисел  $(a, b, c)$  называют *трилинейными координатами* точки  $X$ . При этом набор  $(a, b, c)$  рассматривается с точностью до пропорциональности, т. е. набор  $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ , где  $\lambda > 0$ , соответствует той же самой точке, что и набор  $(a, b, c)$ . В таком случае любой набор  $(a, b, c)$ , где  $a, b, c > 0$ , однозначно задаёт внутреннюю точку треугольника  $ABC$ . В самом деле, множество точек с трилинейными координатами вида  $(a, b, x)$ , где  $a$  и  $b$  — фиксированные числа, представляет собой отрезок  $CK$ , где  $K$  — некоторая точка стороны  $AB$ . При движении по этому отрезку величина  $\frac{a}{x}$  монотонно изменяется от 0 до  $\infty$ .

Трилинейные координаты можно определить не только для внутренних точек треугольника, но и для всех точек плоскости. Будем считать, что  $a, b, c$  — расстояния от точки  $X$  до прямых  $BC, CA, AB$  с учётом знака, т. е.  $a > 0$ , если точки  $X$  и  $C$  лежат по одну сторону от прямой  $BC$ , и  $a < 0$ , если точки  $X$  и  $C$  лежат по разные стороны от прямой  $BC$ ; знаки чисел  $b$  и  $c$  определяются аналогично.

Множество точек с трилинейными координатами вида  $(a, b, x)$ , где  $a$  и  $b$  — фиксированные числа, представляет собой прямую, проходящую через вершину  $C$ . При симметрии относительно биссектрисы угла  $C$  эта прямая переходит в прямую, состоящую из точек с трилинейными координатами вида  $(b, a, x)$ , или, что то же самое,  $(a^{-1}, b^{-1}, y)$ . Таким образом, если точка  $P$  имеет трилинейные координаты  $(a, b, c)$ ,

то искомая точка  $Q$  однозначно определяется как точка с трилинейными координатами  $(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1})$ . В таком случае точки  $P$  и  $Q$  называются *изогонально сопряжёнными* относительно треугольника  $ABC$ .

Изогональное сопряжение имеет ровно четыре неподвижные точки (т.е. четыре точки, которые изогонально сопряжены сами с собой). Эти точки имеют трилинейные координаты  $(1, 1, 1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 1)$  и  $(1, 1, -1)$ . Ясно, что первая из этих точек — центр вписанной окружности, а три другие точки — центры внеписанных окружностей.

Очевидно также, что первая и вторая точки Брокара изогонально сопряжены.

Докажем теперь некоторые менее очевидные, но более интересные свойства изогонального сопряжения.

**Теорема 1.** *Центр описанной окружности и точка пересечения высот изогонально сопряжены.*

**Доказательство.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника  $ABC$ . Тогда его центр описанной окружности имеет трилинейные координаты  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .

Вычислим теперь трилинейные координаты точки пересечения высот  $H$ . Вычислим, например, длину отрезка  $HA_1$ , где  $A_1$  — основание высоты, опущенной из вершины  $A$ . Ясно, что

$$HA_1 = BH \cos \gamma \quad \text{и} \quad BH \sin \alpha = BC \cos \beta = 2R \sin \alpha \cos \beta,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности. Поэтому  $HA_1 = 2R \cos \beta \cos \gamma$ . Это означает, что точка пересечения высот имеет трилинейные координаты  $\left(\frac{1}{\cos \alpha}, \frac{1}{\cos \beta}, \frac{1}{\cos \gamma}\right)$ .  $\square$

**Теорема 2.** *Точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до вершин, изогонально сопряжена с точкой, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до сторон.*

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что точка, для которой минимальна сумма квадратов до вершин, — это точка пересечения медиан  $M$ . Доказательство этого утверждения основано на том, что  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$ . В самом деле, из этого равенства следует, что если  $X$  — произвольная точка, то

$$\begin{aligned} XA^2 + XB^2 + XC^2 &= |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC}|^2 = \\ &= 3XM^2 + 2(\overrightarrow{XM}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + MA^2 + MB^2 + MC^2 = \\ &= 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA^2 + MB^2 + MC^2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что точка пересечения медиан имеет трилинейные координаты  $(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1})$ , где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника. Это утверждение непосредственно следует из того, что площади треугольников  $AMB$ ,  $BMC$  и  $CMA$  равны. Поэтому точка, изогонально сопряжённая с точкой пересечения медиан, имеет трилинейные координаты  $(a, b, c)$ .

Рассмотрим произвольную точку с трилинейными координатами  $(x, y, z)$ . Расстояния от этой точки до сторон треугольника равны  $kx, ky, kz$ , где число  $k$  определяется соотношением

$$k(ax + by + cz) = 2S$$

( $S$  — площадь треугольника  $ABC$ ). Таким образом, сумма квадратов расстояний от рассматриваемой точки до сторон равна  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$ .

Требуется доказать, что эта сумма минимальна в том случае, когда  $(x, y, z) = (a, b, c)$ , т. е.

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Доказательство последнего неравенства совсем несложно.  $\square$

**Теорема 3.** *Описанная окружность треугольника изогонально сопряжена бесконечно удалённой прямой. Иными словами, если  $X$  — точка описанной окружности, а прямые  $a, b, c$  симметричны прямым  $AX, BX, CX$  относительно биссектрис углов  $A, B, C$ , то прямые  $a, b, c$  параллельны (рис. 21.2).*

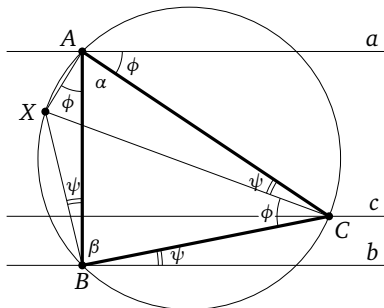


Рис. 21.2

**Доказательство.** Покажем, например, что сумма углов  $\alpha + \varphi$  и  $\beta + \psi$ , которые отрезок  $AB$  образует с прямыми  $a$  и  $b$ , равна  $\pi$ . В самом деле,  $\varphi + \psi = \gamma$ , а  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .  $\square$

*Замечание.* Несложно доказать, что в трилинейных координатах бесконечно удалённая прямая и описанная окружность задаются соответственно уравнениями  $ax + by + cz = 0$  и  $ayz + bzx + cxy = 0$ , где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника.

**Теорема 4.** Пусть все углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ . Тогда точка, из которой все стороны треугольника  $ABC$  видны под углом  $120^\circ$  (точка Торричелли), изогонально сопряжена с точкой, проекции которой на стороны треугольника  $ABC$  образуют равносторонний треугольник.

*Доказательство.* Точку Торричелли  $T$  можно построить следующим образом. Построим на сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом правильные треугольники  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$ . Тогда описанные окружности этих треугольников пересекаются в точке  $T$ . Из этого построения следует, что отрезки  $AC_1$ ,  $C_1B$ ,  $BA_1$ ,  $A_1C$ ,  $CB_1$ ,  $B_1A$  видны из точки  $T$  под углом  $60^\circ$ , поэтому  $T$  — точка пересечения отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Теперь уже легко показать, что точка  $T$  имеет трилинейные координаты

$$\left( \frac{1}{\sin(60^\circ + \alpha)}, \frac{1}{\sin(60^\circ + \beta)}, \frac{1}{\sin(60^\circ + \gamma)} \right).$$

В самом деле, расстояния от точки  $C_1$  до прямых  $BC$  и  $CA$  равны  $\sin(60^\circ + \beta)$  и  $\sin(60^\circ + \alpha)$ . Поэтому отношение расстояний от точки  $T$  до сторон  $BC$  и  $CA$  равно  $\sin(60^\circ + \beta) : \sin(60^\circ + \alpha)$ .

Итак, нужно доказать, что проекции на стороны треугольников  $ABC$  точки с трилинейными координатами

$$(\sin(60^\circ + \alpha), \sin(60^\circ + \beta), \sin(60^\circ + \gamma))$$

образуют правильный треугольник. Для этого мы поступим следующим образом. Рассмотрим точку  $P$ , из которой стороны треугольника видны под углами  $60^\circ + \alpha$ ,  $60^\circ + \beta$ ,  $60^\circ + \gamma$ , и покажем, что:

- 1) проекции  $A_1B_1$ ,  $C_1$  точки  $P$  на стороны треугольника  $ABC$  образуют правильный треугольник;
- 2) точка  $P$  имеет трилинейные координаты

$$(\sin(60^\circ + \alpha), \sin(60^\circ + \beta), \sin(60^\circ + \gamma)).$$

Точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности с диаметром  $CP$ . Поэтому

$$\angle PA_1B_1 = \angle PCB_1 = \angle PCA.$$

Аналогично  $\angle PA_1C_1 = \angle PBA$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\angle B_1A_1C_1 &= \angle PCA + \angle PBA = (\gamma - \angle PCB) + (\beta - \angle PBC) = \\ &= \beta + \gamma + \angle BPC - 180^\circ = 60^\circ.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что и остальные углы треугольника  $A_1B_1C_1$  равны  $60^\circ$ .

Чтобы вычислить трилинейные координаты точки  $P$ , заметим сначала, что

$$AP : BP : CP = \sin(60^\circ + \alpha)^{-1} : \sin(60^\circ + \beta)^{-1} : \sin(60^\circ + \gamma)^{-1}.$$

Дело в том, что по теореме синусов

$$B_1C_1 = AP \sin B_1AC_1 = AP \sin(60^\circ + \alpha).$$

Кроме того, как мы уже убедились,  $B_1C_1 = C_1A_1 = A_1B_1$ . Ясно также, что  $PA_1 \cdot BC = BP \cdot CP \sin(60^\circ + \alpha)$ . Поэтому

$$PA_1 : PB_1 : PC_1 = \sin(60^\circ + \alpha) : \sin(60^\circ + \beta) : \sin(60^\circ + \gamma),$$

что и требовалось.  $\square$

**Теорема 5** (Морли). Пусть вершины треугольника  $ABC$  расположены в комплексной плоскости на единичной окружности  $|z|=1$ ; пусть, далее,  $a, b, c$  — комплексные координаты этих вершин. Тогда точки  $p$  и  $q$ , изогонально сопряжённые относительно треугольника  $ABC$ , связаны соотношением

$$p + q + abc\bar{p}\bar{q} = a + b + c.$$

**Доказательство.** На комплексной плоскости биссектрисы внешнего и внутреннего углов между векторами  $z$  и  $w$  совпадают с биссектрисами внешнего и внутреннего углов между векторами  $z'$  и  $w'$  тогда и только тогда, когда  $\frac{zw}{\bar{z}\bar{w}} = \frac{z'w'}{\bar{z}'\bar{w}'}$ . Поэтому если лучи  $AP$  и  $AQ$  симметричны относительно биссектрисы угла  $A$ , то

$$\frac{(p-a)(q-a)}{(\bar{p}-\bar{a})(\bar{q}-\bar{a})} = \frac{(b-a)(c-a)}{(\bar{b}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{a})}.$$

Выражение в правой части равенства равно  $a^2bc$ , так как  $ab(\bar{b}-\bar{a}) = a-b$  и  $ac(\bar{c}-\bar{a}) = a-c$ . Следовательно,

$$pq - a(p+q) + a^2 = a^2bc\bar{p}\bar{q} - abc(\bar{p}+\bar{q}) + bc.$$

Аналогично получаем

$$pq - b(p+q) + a^2 = b^2ac\bar{p}\bar{q} - abc(\bar{p}+\bar{q}) + ac.$$

Рассмотрим разность этих двух равенств и сократим обе части на  $a-b$ . В результате получим требуемое равенство.  $\square$

**Теорема 6.** Пусть точки  $P_1$  и  $P_2$  изогонально сопряжены. Опустим из точки  $P_i$  перпендикуляры  $P_iA_i$ ,  $P_iB_i$ ,  $P_iC_i$  на стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Тогда описанные окружности треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  совпадают.

**Доказательство.** Докажем, что точки  $B_1, B_2, C_1, C_2$  лежат на одной окружности. В самом деле,

$$\angle P_1B_1C_1 = \angle P_1AC_1 = \angle P_2AB_2 = \angle P_2CB_2,$$

а так как  $\angle P_1B_1A = \angle P_2C_2A$ , то  $\angle C_1B_1A = \angle B_2C_2A$ . Центр окружности, на которой лежат указанные точки, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$ , а оба этих перпендикуляра проходят через середину  $O$  отрезка  $P_1P_2$ , т. е.  $O$  — центр этой окружности. В частности, точки  $B_1$  и  $C_1$  равноудалены от точки  $O$ . Аналогично точки  $A_1$  и  $B_1$  равноудалены от точки  $O$ , т. е.  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ . Кроме того,  $OB_1 = OB_2$ .  $\square$

В том случае, когда  $P_1$  — точка пересечения высот, а  $P_2$  — центр описанной окружности, совпадение двух описанных окружностей означает, что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности (*окружность Эйлера*).

Более интересное утверждение получается в том случае, когда точка  $P_1$  лежит на описанной окружности треугольника. В этом случае точка  $P_2$  будет бесконечно удалённой. Это означает, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника из произвольной точки описанной окружности, лежат на окружности бесконечного радиуса, т. е. они лежат на одной прямой (эту прямую часто называют *прямой Симсона*, но более правильное название — *прямая Уоллеса*.) Прямая Уоллеса для точки  $P_1$  перпендикулярна направлению бесконечно удалённой точки  $P_2$ , т. е. она перпендикулярна тем прямым, которые получаются из прямых  $AP_1, BP_1, CP_1$  при симметрии относительно биссектрис углов  $A, B, C$ . (Это утверждение эквивалентно тому, что окружность в каждой точке перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку; правда, в данном случае мы имеем дело с окружностью бесконечного радиуса.)

Приведём в заключение без доказательства ещё одно свойство геометрических фигур, связанное с изогонально сопряжёнными точками.

**Теорема 7.** Фокусы любого эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены.

## 22. Кубические кривые, связанные с треугольником

Каждому треугольнику можно многими разными способами сопоставить кубическую кривую, т. е. кривую, заданную уравнением вида

$$\sum_{i+j \leq 3} a_{ij} x^i y^j = 0.$$

Некоторые из таких кубических кривых обладают интересными геометрическими свойствами. Эти кубические кривые, или *кубики*, обычно называют по именам геометров, впервые их исследовавших: кубика Дарбу, кубика Томсона, кубика Нейберга, кубика Мак-Кэя.

Наиболее интересные свойства кубик, связанных с треугольником, так или иначе используют изогональное сопряжение относительно этого треугольника. Поэтому наше изложение будет опираться на свойства изогонального сопряжения, о которых шла речь в предыдущем рассказе. Мы будем также пользоваться введёнными там трилинейными координатами. Несложно понять, что в трилинейных координатах  $(x, y, z)$  кубическая кривая задаётся уравнением вида

$$\sum_{i+j+k=3} c_{ijk} x^i y^j z^k = 0.$$

Первоначально кубики, связанные с треугольником, определялись посредством разнообразных геометрических конструкций. Но наиболее известные из этих кубик можно получить единой конструкцией<sup>1</sup>. Эта конструкция основывается на следующем утверждении.

**Теорема.** Пусть на плоскости задана точка  $F$ . Для данного треугольника  $ABC$  рассмотрим всевозможные пары изогонально сопряжённых точек  $P$  и  $Q$ , для которых прямая  $PQ$  проходит через точку  $F$ . Тогда точки  $P$  и  $Q$  замечают кубическую кривую, которая проходит через вершины треугольника, через центры вписанной и трёх внеписанных окружностей, а также через саму точку  $F$ .

---

<sup>1</sup> Cundy H. M., Parry C. F. Some cubic curves associated with a triangle // Journal of Geometry. 1995. V. 53. P. 41—66.

Доказательство. Пусть точка  $F$  имеет трилинейные координаты  $(f_1, f_2, f_3)$ . Если точка  $P$  имеет трилинейные координаты  $(x, y, z)$ , то точка  $Q$ , изогонально сопряжённая с ней, имеет трилинейные координаты  $(x^{-1}, y^{-1}, z^{-1})$ , т. е.  $(yz, zx, xy)$ . Поэтому условие, что точки  $P, Q, F$  лежат на одной прямой, запишется в виде

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$f_1 x(y^2 - z^2) + f_2 y(z^2 - x^2) + f_3 z(x^2 - y^2) = 0. \quad (1)$$

Легко проверить, что точка  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , точки  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 1)$  и точки  $I = (1, 1, 1)$ ,  $I_a = (-1, 1, 1)$ ,  $I_b = (1, -1, 1)$ ,  $I_c = (1, 1, -1)$  лежат на кривой, заданной уравнением (1), т. е. координаты указанных точек удовлетворяют этому уравнению.  $\square$

Непосредственно из геометрического определения кривой (1) видно, что она переходит сама в себя при изогональном сопряжении. В самом деле, если точка  $P$  лежит на этой кривой, то и изогонально сопряжённая с ней точка  $Q$  тоже лежит на этой кривой.

Точку  $F$ , с помощью которой строится кубическая кривая (1), будем называть *центром вращения* для этой кривой.

### Кубика Дарбу

Центром вращения для этой кривой служит точка  $\hat{H}$ , симметричная точке пересечения высот  $H$  относительно центра описанной окружности  $O$ . Легко проверить, что точка  $\hat{H}$  имеет трилинейные координаты

$$(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma, \cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha, \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta),$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — углы треугольника.

В трилинейных координатах кубика Дарбу задаётся уравнением

$$(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)x(y^2 - z^2) + \dots = 0.$$

(Мы написали только коэффициент при  $x(y^2 - z^2)$ ; коэффициенты при  $y(z^2 - x^2)$  и при  $z(x^2 - y^2)$  записываются очевидным образом.)

Кубика Дарбу проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание.

**Теорема 1.** Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — проекции точки  $D$  на прямые  $BC, CA, AB$ . Точка  $D$  лежит на кубике Дарбу тогда и только тогда, когда прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке.

Доказательство. Согласно теореме Менелая прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A,$$

где  $AC_1$  и т.д. — ориентированные длины отрезков (т.е. числа  $AC_1$  и  $C_1B$  имеют один и тот же знак, если точка  $C_1$  лежит на отрезке  $AB$ , а если точка  $C_1$  лежит вне отрезка  $AB$ , то эти числа имеют противоположные знаки).

Пусть  $(x, y, z)$  — нормированные трилинейные координаты точки  $D$ , т.е.  $x, y, z$  — расстояния от точки  $D$  до прямых  $BC, CA, AB$  с учётом знака. Легко проверить, что  $AC_1 = \frac{z \cos \alpha + y}{\sin \alpha}$  и т.д. Поэтому прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} (z \cos \alpha + y)(y \cos \gamma + x)(x \cos \beta + z) = \\ = (z \cos \beta + x)(x \cos \gamma + y)(y \cos \alpha + z). \end{aligned}$$

Полученное уравнение легко преобразуется в уравнение кубики Дарбу. □

*Замечание 1.* Если равенство

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$$

выполняется для некоторой точки  $D$ , то такое же равенство выполняется и для точки  $D'$ , симметричной точке  $D$  относительно центра описанной окружности. Поэтому кубика Дарбу симметрична относительно центра описанной окружности.

*Замечание 2.* Несложно доказать, что прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда существует кривая второго порядка, касающаяся сторон треугольника (или их продолжений) в точках  $A_1, B_1, C_1$ .

### Кубика Томсона

Центром вращения для этой кривой служит центр масс  $M$ . Напомним, что центр масс треугольника имеет трилинейные координаты  $(bc, ca, ab)$ .

В трилинейных координатах кубика Томсона задаётся уравнением

$$bcx(y^2 - z^2) + cay(z^2 - x^2) + abz(x^2 - y^2) = 0.$$

По-другому это уравнение можно записать в виде

$$(\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)x(y^2 - z^2) + \dots = 0.$$

Кубика Томсона проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности, середины сторон, середины высот.

Из замечания 2 к теореме 1 видно, что кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание. Рассмотрим всевозможные кривые второго порядка, касающиеся сторон данного треугольника или их продолжений. Выделим среди них те кривые второго порядка, для которых перпендикуляры к сторонам треугольника в точках касания пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения этих перпендикуляров заматают кубику Дарбу. Можно доказать, что центры выделенных таким образом кривых второго порядка заматают кубику Томсона.

### Кубика Мак-Кэя

Центром вращения для этой кривой служит центр описанной окружности  $O$ . Напомним, что центр описанной окружности имеет трилинейные координаты  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .

В трилинейных координатах кубика Мак-Кэя задаётся уравнением

$$\cos \alpha x(y^2 - z^2) + \cos \beta y(z^2 - x^2) + \cos \gamma z(x^2 - y^2) = 0.$$

Кубика Мак-Кэя проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

**Теорема 2.** Пусть вершины треугольника расположены в точках  $a, b, c$  единичной окружности на комплексной плоскости. Точка, соответствующая комплексному числу  $z$ , лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(z - a)(z - b)(z - c) = abc(a\bar{z} - 1)(b\bar{z} - 1)(c\bar{z} - 1).$$

**Доказательство.** Пусть точки  $z$  и  $w$  изогонально сопряжены относительно данного треугольника. Тогда согласно теореме Морли (теорема 1 из предыдущего рассказа) точки  $z$  и  $w$  связаны соотношением

$$z + w + abc\bar{z}\bar{w} = a + b + c. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\bar{z} + \bar{w} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}zw = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \quad (3)$$

Умножим обе части соотношения (3) на  $abc\bar{z}$  и вычтем из полученного выражения соотношение (2). В результате получим

$$w = \frac{a+b+c-z-(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-\bar{z})abc\bar{z}}{1-|abcz|^2}. \quad (4)$$

По определению кубики Мак-Кэя прямая  $zw$  проходит через центр описанной окружности, т. е. через начало координат. Это условие можно записать следующим образом:  $z\bar{w} = \bar{z}w$ . Подставив это соотношение в формулу (4), после несложных преобразований получим требуемое уравнение.  $\square$

**Следствие.** Кубика Мак-Кэя пересекает описанную окружность треугольника в трёх точках, являющихся вершинами правильного треугольника. (Мы учитываем только точки пересечения, отличные от вершин исходного треугольника.)

**Доказательство.** Будем считать, что вершины треугольника расположены в точках единичной окружности на комплексной плоскости. Тогда для точки  $z$ , лежащей на описанной окружности треугольника, выполняется равенство  $\bar{z} = z^{-1}$ . Поэтому точки пересечения кубики Мак-Кэя с описанной окружностью удовлетворяют уравнению

$$(z-a)(z-b)(z-c) = -z^{-3}abc(z-a)(z-b)(z-c).$$

Если исключить вершины треугольника, то останутся точки, удовлетворяющие соотношению  $z^3 = -abc$ . Эти точки образуют правильный треугольник.  $\square$

Будем считать, что  $\angle PQR$  — величина угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор  $\overrightarrow{QP}$  так, чтобы он стал сонаправлен с вектором  $\overrightarrow{QR}$ .

**Теорема 3.** Точка  $M$  лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

**Доказательство.** Снова будем считать, что вершины треугольника расположены на единичной окружности на комплексной плоскости. Положим  $\alpha = \angle MAB$ ,  $\beta = \angle MBC$ ,  $\gamma = \angle MCA$ . Пусть  $z$  — комплексное число, соответствующее точке  $M$ . Тогда

$$\frac{b-a}{z-a} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{b-\bar{a}} = e^{2i\alpha}, \quad \text{т. е. } e^{2i\alpha} = -ba\bar{z} - 1\bar{z} - a.$$

Поэтому

$$e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -abc \frac{(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Таким образом, точка  $z$  лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда  $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$ , т. е.  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .  $\square$

Легко проверить, что

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA - \angle MAC - \angle MCB - \angle MBA = (2n + 1)\pi.$$

Поэтому точка  $M$  лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA + 2l\pi.$$

### Кубика Нейберга

Центром вращения для этой кривой служит бесконечно удалённая точка прямой  $ОН$ . Иными словами, кубика Нейберга состоит из таких пар изогонально сопряжённых точек  $P$  и  $Q$ , что прямая  $PQ$  параллельна прямой  $ОН$ .

В трилинейных координатах кубика Нейберга задаётся уравнением

$$(\cos \alpha - 2 \cos \beta \cos \gamma)x(y^2 - z^2) + \dots = 0.$$

Кубика Нейберга является бесспорным лидером по количеству замечательных точек треугольника, через которые она проходит. Действительно, эта кривая проходит через следующие точки: центр описанной окружности; ортоцентр; вершины правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника  $ABC$  (как внешним, так и внутренним образом); точки, симметричные вершинам треугольника  $ABC$  относительно его сторон; две точки, из которых стороны треугольника  $ABC$  видны под углом  $60^\circ$  или  $120^\circ$  (изогональные центры треугольника); две точки, для которых выполняется соотношение  $AH \cdot BC = BH \cdot CA = CH \cdot AB$  (изодинамические центры треугольника).

*Научно-популярное издание*

Виктор Васильевич Прасолов

РАССКАЗЫ О ЧИСЛАХ, МНОГОЧЛЕНАХ И ФИГУРАХ

Подписано к печати 20.03.2017 г. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная.  
Объем 5,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».  
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru

---