РАЦИОНАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И ПРИМЕРОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. А. МАЗАНИК

МИНСК 1969

А. А. МАЗАНИК

РАЦИОНАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И ПРИМЕРОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАРОДНАЯ АСВЕТА»
МИНСК 1968

§ 1. РАЗЛИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ПРИМЕРОВ

Большинство решаемых в школе задач и примеров допускают не одно, а несколько различных в той или иной степени решений. Рассмотрим несколько способов решения задач и примеров из разных разделов школьного курса математики. Сравнение решений позволяет ознакомиться с сущностью рациональности решения и одновременно выяснить причины появления различных решений.

1. Арифметический пример

$$\left[\left(\frac{23}{36}+\frac{5}{21}\right)+\left(1\frac{1}{9}-\frac{5}{21}\right)\right]\cdot 2:\left(\frac{3}{5}:\frac{6}{7}\right)$$

можно решить, выполняя по отдельности шесть действий. Но если воспользоваться правилом прибавления разности двух чисел и правилом деления числа на частное двух чисел, то этот пример можно решить в два действия:

$$1)\ \left(\frac{23}{36}+\frac{5}{21}\right)+\left(1\frac{1}{9}-\frac{5}{21}\right)=\frac{23}{36}+\frac{5}{21}+1\frac{1}{9}-\frac{5}{21}=$$

$$=1\frac{23+4}{36}=1\frac{3}{4};$$

$$2)\ 1\frac{3}{4}\cdot 2:\left(\frac{3}{5}:\frac{6}{7}\right)=\frac{7}{4}\cdot 2:\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{7}=\frac{7\cdot 2\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 7}=5.$$

Очевидно, что при втором способе решения вычисления значительно проще, чем при первом способе.

2. При решении примеров на тождественные преобразования алгебраических выражений, особенно с тригонометрическими функциями, различные решения получаем

в зависимости от применяемых формул. Пусть требуется доказать тождество:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha),\text{ где } \alpha\neq 45^\circ+180^\circ\cdot n.$$

а) Преобразуем левую часть, применяя формулы приведения:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)+\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha}=\frac{2\sin 45^\circ\cdot\cos(45^\circ-\alpha)}{2\cos 45^\circ\cdot\sin(45^\circ-\alpha)}=$$

$$=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}[90^\circ-(45^\circ-\alpha)]=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$$

Решение несколько упрощается при замене $\cos\alpha$ на $\sin(90^\circ+\alpha)$.

б) Если применить формулу преобразования $a\sin x+$ $+b\cos x$ в произведение введением вспомогательного угла, получим:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$$

в) Разделим почленно числитель и знаменатель на $\cos\alpha$:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$$

Можно доказывать данное тождество, преобразовывая правую часть:

г) $$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)}=\frac{\sin 45^\circ\cdot\cos\alpha+\cos 45^\circ\cdot\sin\alpha}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha-\sin 45^\circ\cdot\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

д) $$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Рассмотрим еще уравнение:

$$\sin x+\cos x=1.$$

а) Так как $x = \pi + 2k\pi$ не есть корни этого уравнения, можно применить универсальную подстановку:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Получим:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1, \quad \text{откуда} \quad 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=0.$$

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$; $x = 2k\pi$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

б) Применяем формулы кратных и половинных углов:

$$\sin x = 1 - \cos x; \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

1) $\sin\frac{x}{2} = 0$; $x = 2k\pi$;

2) $\cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}$. Решаем как однородное относительно синуса и косинуса уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

в) Преобразуем левую часть в произведение:

1) Используя формулы приведения, будем иметь:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x_2 = 2k\pi$.

2) Используя формулу преобразования $a\sin x + b\cos x$, получим: $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$; $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{\pi}{4} + x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{4} + n\pi$.

При $n = 2k$ $\quad x = 2k\pi$,

при $n = 2k+1$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

г) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1,$$

откуда

$$\sin 2x = 0; \quad x = k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Но при этом способе решения возможно появление посторонних корней, поэтому необходимо делать проверку полученных корней. Так как функция $\sin x + \cos x$ периодическая с периодом 2π, то достаточно проверить лишь следующие 4 значения для x: 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$. Сделав подстановку, убеждаемся, что уравнению удовлетворяют лишь первые два решения: $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$. Вновь получаем ответ:

$$x = 2k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

3. Рассмотрим задачу по алгебре на составление уравнений.

Выполнение некоторой работы было поручено двум бригадам. Сначала первая из них работала треть того времени, которое необходимо второй бригаде для выполнения всей работы; потом вторая бригада работала треть того времени, которое потратила бы на всю работу первая бригада. После этого оказалось, что было выполнено $\frac{13}{18}$ всей работы. Сколько времени потребовалось бы для выполнения всей работы каждой бригаде в отдельности, если обе бригады вместе могут выполнить ее за $3\frac{3}{5}$ часа.

Эту задачу можно решать как составлением одного уравнения с одним неизвестным, так и составлением системы двух уравнений с двумя неизвестными.

а) Один из возможных вариантов составления уравнения с одним неизвестным такой.

Пусть для выполнения всей работы первой бригаде нужно было бы x часов. Значит, за 1 час она выполняет $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а вместе со второй бригадой они выполняют за 1 час $1 : 3\frac{3}{5} = \frac{5}{18}$ всей работы. Следовательно, вторая бригада за 1 час выполняет $\frac{5}{18} - \frac{1}{x} = \frac{5x-18}{18x}$ часть всей работы. Тогда для выполнения всей работы второй бригаде потребовалось бы $\frac{18x}{5x-18}$ часов.

Учитывая первое условие, получаем уравнение:

$$\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{18x}{5x-18}\right) + \frac{5x-18}{18x} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x\right) = \frac{13}{18},$$

которое решается сравнительно просто:

$$\frac{6}{5x-18} + \frac{5x-18}{54} = \frac{13}{18}; \quad 324 + (5x-18)^2 = 39(5x-18);$$

$$x^2 - 15x + 54 = 0.$$

По теореме Виета $x_1 = 6$; $x_2 = 9$.

Время, нужное второй бригаде для выполнения всей работы, будет соответственно 9 часов или 6 часов.

Решение полученного уравнения можно несколько упростить введением вспомогательного неизвестного: $5x - 18 = z$.

Если принять за неизвестное время, необходимое второй бригаде для выполнения всей работы, то ничего нового по сравнению с приведенным решением не получим.

б) Можно было бы принять за неизвестное x часть работы, которую выполняет первая бригада за $3\frac{3}{5}$ часа, тогда вторая бригада за это время выполнит $1 - x$ часть работы. За 1 час первая бригада выполняет $\frac{5x}{18}$, а вторая бригада — $\frac{5(1-x)}{18}$ часть всей работы. Теперь можно найти время, необходимое каждой бригаде для выполнения всей работы в отдельности: первой бригаде — $\frac{18}{5x}$ часов, второй — $\frac{18}{5(1-x)}$ часов.

Как и в предыдущем случае, составляем уравнение:

$$\frac{5x}{18} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{18}{5(1-x)}\right] + \frac{5(1-x)}{18} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{18}{5x}\right] = \frac{13}{18},$$

решив которое, найдем:

$$x_1 = \frac{2}{5} \text{ и } x_2 = \frac{3}{5}.$$

Для ответа на вопрос задачи нужно еще найти время, необходимое каждой бригаде для выполнения всей работы.

в) Решим эту задачу составлением системы уравнений. Пусть первой бригаде требуется для выполнения всей работы x часов, а второй — y часов. Тогда за 1 час первая бригада выполняет $\frac{1}{x}$ часть, а вторая — $\frac{1}{y}$ часть всей работы. Составим два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{3} + \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{3} = \frac{13}{18}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18}. \end{cases}$$

Полученную систему можно решать различными способами:

1) Из второго уравнения находим:

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{18} - \frac{1}{y} = \frac{5y - 18}{18y}.$$

Подставляем это значение в первое уравнение, предварительно умножив обе его части на 3:

$$\frac{5y - 18}{18} + \frac{18}{5y - 18} = \frac{13}{6}.$$

После преобразований $y^2 - 15y + 54 = 0$; $y_1 = 6$; $y_2 = 9$, тогда $x_1 = 9$; $x_2 = 6$.

2) Освободившись от знаменателей, получим:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{13}{6} xy, \\ x + y = \frac{5}{18} xy. \end{cases}$$

Теперь уже труднее из второго уравнения найти одно из неизвестных. Найдя, что $x = \frac{y}{\frac{5}{18} y - 1}$, придем к способу 1.

3) Возведем второе уравнение полученной системы в квадрат: $x^2 + y^2 + 2xy = \frac{25}{324} x^2y^2$.

Заменяя $x^2 + y^2$ его значением, получим:

$$\frac{13}{6}xy + 2xy = \frac{25}{324}x^2y^2; \quad \frac{25}{6}xy = \frac{25}{324}x^2y^2;$$

$$xy \neq 0; \quad 1 = \frac{xy}{54}; \quad xy = 54.$$

Но тогда $x + y = 15$. Решая устно систему $\begin{cases} x + y = 15, \\ xy = 54, \end{cases}$ найдем x и y.

4) Вводим новые переменные: $x + y = t$; $xy = s$, тогда $x^2 + y^2 = t^2 - 2s$. Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t^2 - 2s = \frac{13}{6}s, \\ t = \frac{5}{18}s, \end{cases}$

или после преобразований $\begin{cases} t^2 = \frac{25}{6}s, \\ t = \frac{5}{18}s. \end{cases}$

Так как по смыслу задачи $t \neq 0$ и $s \neq 0$, то, разделив первое уравнение на второе почленно, имеем: $t = 15$; тогда $s = 54$. Дальнейшее решение такое же, как и в способе 3.

5) Укажем еще один прием решения исходной системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{13}{6}xy = 0, \\ x + y = \frac{5}{18}xy. \end{cases}$

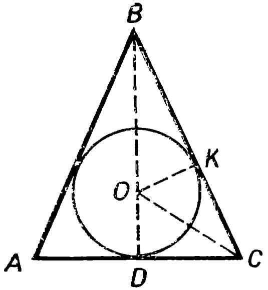
Первое уравнение является однородным относительно x и y. Так как $xy \neq 0$, делим его, например, на y^2, получим:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{13}{6}\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0, \quad \text{откуда} \left(\frac{x}{y}\right)_1 = \frac{3}{2}; \ \left(\frac{x}{y}\right)_2 = \frac{2}{3}.$$

Подставляя во второе уравнение $x_1 = \frac{3}{2}y_1$ и $x_2 = \frac{2}{3}y_2$, найдем $y_1 = 6$; $y_2 = 9$, тогда $x_1 = 9$; $x_2 = 6$

6) Возможны еще и иные варианты решения рассматриваемой системы, так же как возможны вообще другие системы уравнений. Например, принимая за x часов время работы первой бригады в действительности, а за y — часть работы, выполненную этой бригадой за 1 час, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y + \frac{1}{3x} = \frac{5}{18}, \\ y \cdot x + \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = \frac{13}{8}. \end{cases}$$



Черт. 1.

Второе уравнение после упрощения примет вид:

$$18x^2y^2 - 13xy + 2 = 0; \quad \text{тогда}$$

$$xy = \frac{1}{2} \text{ или } xy = \frac{2}{9}.$$

Подставляя в первое уравнение $y = \frac{1}{2x}$ и $y = \frac{2}{9x}$, найдем $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Теперь легко можно найти время, необходимое каждой бригаде для выполнения всей работы в отдельности.

4. Рассмотрим несколько задач по геометрии.

а) Найти радиус r окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC (черт. 1), у которого $AB = BC = 10$ *см* и $AC = 12$ *см*.

Определив высоту BD по теореме Пифагора $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (*см*), радиус r можно найти различными способами:

1) Из подобия треугольников BOK и BDC:

$$\frac{BO}{OK} = \frac{BC}{DC}; \qquad \frac{8 - r}{r} = \frac{10}{6}, \text{ откуда } r = 3 \text{ см}.$$

2) По свойству биссектрисы OC треугольника BCD

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{DC}; \qquad \frac{8 - r}{r} = \frac{10}{6}.$$

3) Используя формулу площади треугольника, описанного около окружности радиуса r, найдем:

$$S = r \cdot p; \quad r = \frac{S}{p} = \frac{6 \cdot 8}{6 + 10} = 3 \text{ (см)}.$$

Различные решения появляются в зависимости от того, какие свойства фигуры использовались при составлении плана решения.

б) Вычислить радиус R окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, и c.

Наиболее простым является решение с применением

формулы $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

Но если на исходные данные наложить некоторые ограничения, то решение можно упростить. Если, например, $a=6$; $b=8$; $c=10$, то треугольник будет прямоугольным, и тогда

$$R=\frac{c}{2}.$$

Ограничения на исходные данные могут быть различными по форме. Рассмотрим, например, задачу:

Построить окружность, касающуюся двух данных прямых a и b и проходящую через данную точку A.

Эта задача обычно решается методом подобия: строим вспомогательную окружность, касающуюся данных прямых, и гомотетично преобразовываем ее в искомую окружность.

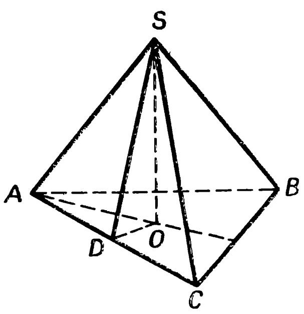
Решение может быть существенно упрощено, если указать, что данные прямые параллельные, или, что данная точка A принадлежит одной из данных прямых.

В первом случае вначале устанавливаем геометрическое место центров окружностей, касающихся данных параллельных прямых: их ось симметрии; в результате находим радиус искомой окружности, равный половине расстояния между данными прямыми. Построим окружность с центром в точке A найденного радиуса. Точки пересечения этой окружности с построенной осью симметрии прямых a и b будут центрами искомых окружностей.

Если известно, что точка A принадлежит одной из данных прямых, то для отыскания центра искомой окружности находим точку пересечения оси симметрии прямых a и b и перпендикуляра, восставленного из точки A к соответствующей прямой.

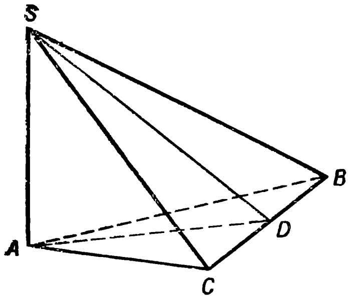
в) Рассмотрим одну стереометрическую задачу:

В треугольной пирамиде две боковые грани — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых, являющиеся сторонами основания, равны b и образуют между собой угол α. Определить объем этой пирамиды.



Черт. 2.

Пусть $\angle ASC=\angle ASB=90°$; $SC=SA=SB$; $AB=AC=b$ и $\angle BAC=\alpha$ (черт. 2). Так как $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H$, то для решения



Черт. 3

задачи нужно найти высоту пирамиды, ибо $S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} b^2 \times \sin\alpha$.

Опустим из точки S перпендикуляр $SO = H$ на плоскость основания. Треугольники ASB и ASC прямоугольные и равнобедренные, поэтому $\angle SAB = \angle SAC = 45^\circ$. Следовательно, проекцией SA на плоскость основания является OA — биссектриса угла BAC. Построим $SD \perp AC$ и точку D соединим с точкой O. По теореме о трех перпендикулярах $AC \perp DO$, ибо $AC \perp DS$, где DO есть проекция наклонной SD на плоскость основания.

$$AD = DC = \frac{b}{2}, \quad \text{тогда} \quad SD = AD = \frac{b}{2}.$$

$DO = AD \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. По теореме Пифагора

$$H = SO = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$= \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}$, причем $\alpha = \angle BAC < \angle SAC + \angle SAB = 90^\circ$.

Итак, получили: $V = \frac{1}{6} b^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$ (куб. ед).

Изменим расположение данной пирамиды (черт. 3).

$\angle SAC = \angle SAB = 90^\circ$; $AC = SA = AB$; $SC = SB = b$ и $\angle CSB = \alpha$.

$SA \perp AC$ и $SA \perp AB$, значит $SA \perp$ пл. ABC, то есть высотой пирамиды является ребро SA. $H = SA = SC \times \sin 45^\circ = \frac{b\sqrt{2}}{2} = AC = AB$.

Чтобы найти площадь основания, проведем $SD \perp BC$ и точку D соединим с точкой A, тогда AD является проекцией наклонной SD на плоскость основания и $BC \perp AD$ по теореме о трех перпендикулярах.

$$CD = \frac{1}{2} CB = SC \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2};\ AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{2} - b^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos\alpha};$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} CB \cdot AD = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos\alpha} = \frac{b^2}{\sqrt{2}} \times$$

$$\times \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha};\ V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{b^3}{6} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha} \text{ (куб. ед.)},$$

где $\cos\alpha > 0$.

Мы видим, что решение задачи зависит от выбора чертежа, причем важным элементом решения является обоснование и пояснение к выполняемым вычислениям.

Заметим, что возможны и другие решения этой задачи как при первом выборе основания пирамиды, так и при втором, но принципиально нового они ничего не дают.

§ 2. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПОНЯТИЯ РАЦИОНАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

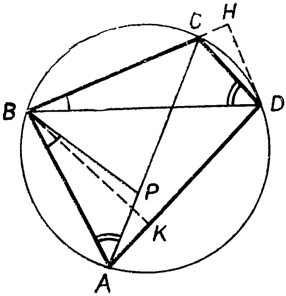
1. При изучении любой математической дисциплины большинство задач и примеров можно решать различными способами. Сравнивая способы решения одной и той же задачи, можно определить более рациональное решение.

Но что понимать под рациональным решением? Можно ли определить «рациональное решение» так, чтобы, имея одно конкретное решение задачи, утверждать, рациональное оно или нет?

По нашему мнению, невозможно дать логически строгое общее определение наиболее рационального решения без сравнения с некоторым другим решением.

Укажем основные причины, в силу которых нельзя дать такое определение.

При сравнении нескольких решений необходимо учитывать объем знаний, применяемых при решении предложенной задачи. Разберем в качестве примера несколько раз-



Черт. 4.

личных доказательств теоремы Птолемея, рассматриваемой обычно на кружковых занятиях.

Во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

а) Для доказательства выразим диагонали четырехугольника через стороны, используя понятие подобия треугольников и формулы квадрата стороны треугольника, лежащей против острого или тупого угла[1].

Приведенное там решение можно упростить, выполнив следующее вспомогательное построение. Построим угол ABP, равный углу CBD (черт. 4). $\angle BAP = \angle BDC$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC. Следовательно, $\triangle ABP \sim \triangle CBD$, откуда

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{CD}, \quad AB \cdot CD = AP \cdot BD, \tag{1}$$

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = \angle ABC - \angle ABP = \angle PBC.$$

$\angle BCP = \angle BDA$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB. Значит, $\triangle PBC \sim \triangle ABD$, откуда

$$\frac{BC}{PC} = \frac{BD}{AD}, \quad BC \cdot AD = PC \cdot BD. \tag{2}$$

Складывая почленно (1) и (2), получим:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AP \cdot BD + PC \cdot BD = BD \times$$
$$\times (AP + PC) = BD \cdot AC.$$

Это доказательство связано с построением вспомогательного отрезка BP, причем необходимость его построения нельзя обосновать, исходя из условия задачи, так что такое доказательство носит слишком искусственный характер.

б) Если считать известной теорему косинусов, то можно дать и другое, более естественное решение этой задачи на доказательство.

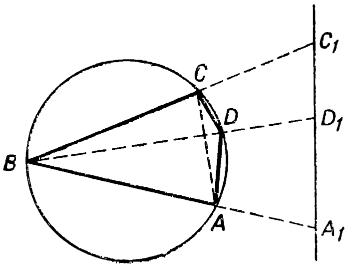
---

[1] Б. Делоне и О. Житомирский. Задачник по геометрии, Гостехиздат, 1949, стр. 177.

Для упрощения записей обозначим, как и в первом способе решения (черт. 4): $BD = m$; $AC = n$; $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$ и $\angle BCD = \alpha$, тогда $\angle BAD = 180° - \alpha$. По теореме косинусов можно записать:

$$m^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(180° - \alpha) = a^2 + d^2 + 2ad\cos\alpha.$$



Черт. 5.

Исключим $\cos\alpha$, для чего умножим первое равенство на ad, а второе на bc и сложим почленно. Получим:

$$(ad + bc)m^2 = adb^2 + adc^2 + bcd^2 + bca^2 = (ab + cd)(bd + ac);$$

$$m^2 = \frac{(ab + cd)(bd + ac)}{ad + bc}.$$

Аналогично для второй диагонали получим:

$$n^2 = \frac{(ad + bc)(bd + ac)}{ab + cd}.$$

Перемножая полученные формулы, будем иметь:

$$m^2n^2 = (ac + bd)^2, \text{ откуда } mn = ac + bd.$$

в) Решение оказывается более простым, если использовать понятие инверсии.

Взяв точку B за полюс (черт. 5), выполним над точками A, D и C произвольную инверсию, степень которой k. Данная окружность преобразуется в прямую, на которой будут лежать точки A_1, D_1 и C_1, обратные точкам A, D и C. В равенство $A_1D_1 + D_1C_1 = A_1C_1$ подставим значения:

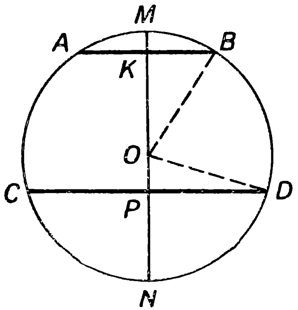
$$A_1D_1 = \frac{k \cdot AD}{BA \cdot BD}; \quad D_1C_1 = \frac{k \cdot DC}{BD \cdot BC}; \quad A_1C_1 = \frac{k \cdot AC}{BA \cdot BC},$$

получим:

$$\frac{k \cdot AD}{BA \cdot BD} + \frac{k \cdot DC}{BD \cdot BC} = \frac{k \cdot AC}{BA \cdot BC}$$

и после преобразований:

$$AD \cdot BC + DC \cdot BA = AC \cdot BD.$$



Черт. 6.

Таким образом, при расширении объема знаний возможно появление новых, нередко более простых решений некоторых задач.

2. Решение многих задач состоит не только из вычислений или построений, но включает еще необходимые пояснения и обоснования. Может оказаться, что вычисления при одном способе решения проще, чем при другом, но обоснования и пояснения значительно сложнее.

Рассмотрим, в качестве примера, такую несложную задачу:

Две параллельные хорды равны 14 *м* и 40 *м*, а расстояние между ними 39 *м*. Определить радиус круга.

Предположим, что центр круга O (черт. 6) расположен между данными хордами: $AB = 14$ *м* и $CD = 40$ *м*. Построим диаметр MN, перпендикулярный данным хордам, тогда:

$$KP = 39 \text{ м},\ KB = \frac{1}{2}AB = 7 \text{ м и } PD = \frac{1}{2}CD = 20 \text{ м}.$$

Рассмотрим треугольники KOB и ODP. Обозначим $OB = OD = R$, $OP = x$, а значит $KO = 39 - x$. По теореме Пифагора

$$7^2 + (39 - x)^2 = R^2 \quad \text{и} \quad 20^2 + x^2 = R^2.$$

Приравнивая левые части этих равенств, получим:

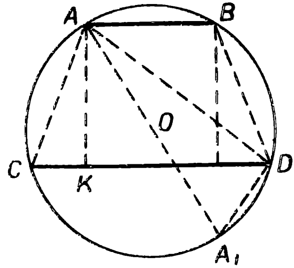
$$49 + (39 - x)^2 = 400 + x^2;\ 49 + 1521 - 78x + x^2 = 400 + x^2;$$

$$78x = 1170;\quad x = 15 \ (\text{м}).$$

Из второго равенства найдем:

$$R^2 = 400 + 225 = 625;\quad R = 25 \text{ м}.$$

В условии задачи не указано, как расположены данные хорды относительно центра круга: по разные или по одну сторону от него. Поэтому нужно дополнительно исследовать, как изменится решение задачи и ответ к ней, если предположить, что обе данные хорды лежат по одну сторону от центра круга, ибо приведенное решение существенно связано с чертежом. Для этого понадобится выполнить новый чертеж и проанализировать все решение, что ничуть не легче для учащихся, чем вновь решить задачу, но при ином расположении данных.



Черт. 7.

Рассмотрим еще одно решение этой задачи (черт. 7). $AB = 14$ *м*; $CD = 40$ *м*; $AB \parallel CD$ и $AK = 39$ *м*. Проведем диаметр через точку A и рассмотрим два прямоугольных треугольника: $\triangle ACK$ и $\triangle AA_1D$ $(AK \perp CD)$.

Так как $\angle ACK = \angle AA_1D$ (вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD), то $\triangle ACK \backsim \triangle AA_1D$, откуда

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AD}{AA_1}; \qquad AA_1 = \frac{AD \cdot AC}{AK}.$$

$$CK = \frac{1}{2}(CD - AB) = 13 \ (м).$$

По теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{39^2 + 13^2} = 13\sqrt{3^2 + 1} = 13\sqrt{10}\,(м);$$

$$AD = \sqrt{AK^2 + KD^2} = \sqrt{39^2 + 27^2} = 15\sqrt{10} \ (м).$$

$$AA_1 = \frac{15\sqrt{10} \cdot 13\sqrt{10}}{39} = 50\,(м); \ R = \frac{1}{2}AA_1 = 25 \ (м).$$

При таком способе решения требуется еще обоснование, что диаметр AA_1 обязательно пересекает хорду CD, то есть доказать, что если $CD > AB$, то отрезки CD и AA_1 пересекаются.

В обоих вариантах решения этой несложной задачи понадобилось проводить дополнительное исследование, ибо использовалось в той или иной степени взаимное расположение соответствующих элементов на чертеже.

Чтобы избегнуть такого дополнительного исследования, можно решать задачу следующим способом.

Обозначим (черт. 6) $MK = x$, а $PN = y$, тогда, независимо от расположения центра круга относительно хорд AB и CD, можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} PD^2 = MP \cdot PN, \\ KB^2 = MK \cdot KN, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} 400 = y(39 + x), \\ 49 = x(39 + y). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем: $x = 1$; тогда $y = 10$.

Так как $2R = MK + KP + PN = 1 + 39 + 10 = 50$ (*м*), то $R = 25$ (*м*).

При этом способе вычислительная часть решения более громоздкая, чем при первом способе, но теперь уже нет надобности ни в каком дополнительном исследовании взаимного расположения данных элементов.

Для задач на построение в свое время была создана теория геометрографии, простоты построения. Каждому элементарному построению приписывают так называемый коэффициент простоты и путем простого арифметического подсчета определяют коэффициент простоты построения заданной фигуры соответствующими инструментами. Но в школьной практике эта теория не нашла своего применения, так как кроме трудности выполняемого построения приходится учитывать и трудности анализа, доказательства и исследования.

3. При оценке рациональности решения следует учитывать его доступность для учащихся. Уже при решении простейших арифметических задач нельзя рациональность решения оценивать формально по числу вопросов.

Общеизвестны трудности, имеющие место при решении задач на пропорциональную зависимость методом приведения к единице. Рассмотрим такую задачу:

Отопление здания осиновыми дровами обходится в 360 рублей. Сколько будет стоить отопление того же здания березовыми дровами, если 7 *куб. м* березовых дров дают столько же тепла, сколько 12 *куб. м* осиновых дров, но 3 *куб. м* березовых дров стоят столько же, сколько 5 *куб. м* осиновых?

Для этой задачи нельзя применить ни способ приведения к единице, ни даже способ образования сложных единиц. Наиболее простым и понятным для учащихся решением является решение, основанное на пропорциональной зависимости величин:

1. Сколько стоило бы отопление здания березовыми дровами, если бы 1 *куб. м* березовых дров стоил столько же, сколько 1 *куб. м* осиновых?

$$360 \text{ руб.} \cdot \frac{7}{12} = 210 \text{ руб.}$$

2. Сколько будет стоить отопление здания березовыми дровами?

$$210 \text{ руб.} \cdot \frac{5}{3} = 350 \text{ руб.}$$

Так как состав каждого класса неоднородный, то нужно внимательно относиться к оценке способов решений в зависимости от возможностей учеников. Не следует забывать, что главное — р е ш и т ь задачу, а потом уже рассматривать его рациональность.

Стремление решать задачи и примеры рационально не должно противоречить пониманию решения. Не может быть одобрено решение, пусть даже и рациональное, но которое недоступно, непонятно для большинства учащихся данного класса.

Например, в восьмилетней школе учащиеся неоднократно решают составлением уравнений или систем уравнений задачи на смеси вида: «К 6 *л* спирта крепостью в 32° добавили спирта крепостью в 80° и получили смесь крепостью в 40°. Сколько литров спирта было добавлено?»

Приравнивая количества чистого спирта, получим уравнение: $6 \cdot \frac{32}{100} + x \cdot \frac{80}{100} = (6 + x) \cdot \frac{40}{100}$, которое после упрощений всегда приводится к виду:

$$6 \cdot 32 + x \cdot 80 = (6 + x) \cdot 40.$$

Отдельные учащиеся после решения одной-двух задач такого вида нередко сразу записывают уравнение: $6 \cdot 32 + x \cdot 80 = (6 + x) \cdot 40$. Такое решение неприемлемо, ибо учащиеся не могут объяснить, какой реальный смысл имеет произведение количества смеси на ее крепость в градусах.

4. При оценке рациональности решения необходимо учитывать и время, понадобившееся на отыскание его. Из истории математики известны примеры, когда крупнейшие ученые тратили десятки лет для упрощения решения некоторых задач.

Более того, надо как-то определять и напряженность умственной деятельности при отыскании того или иного решения. А это уже не может быть объективным критерием, так как разные люди для выполнения одной и той же работы тратят неодинаковое время и работают с различным напряжением.

Все вышесказанное приводит нас к выводу о том, что в общем виде нельзя дать строгого определения наиболее рационального решения, которое можно было бы применить в качестве критерия при оценке простоты решения. Сказывается и отсутствие универсального алгоритма, овладение которым позволило бы найти рациональный способ решения любой задачи.

Поэтому понятие рациональности решения следует раскрывать перед учащимися посредством разбора как можно большего числа конкретных примеров.

§ 3. НЕОБХОДИМОСТЬ ОБУЧЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМ РЕШЕНИЯМ

1. Требование, чтобы учащиеся не просто решали задачи и примеры, а решали их рационально, должно сопровождаться соответствующим обучением. Без помощи учителя они могут и не найти наиболее рационального решения.

Обычно учащиеся применяют в первую очередь знания изучаемого материала и навыки, полученные при решении предшествующих упражнений. Если задачи или примеры решались определенным методом или по одной и той же схеме, то и для заданного упражнения они изберут тот же знакомый им путь решения, даже если он и нерационален. Указание учителя на существование более простого решения не дает должного эффекта, если учащиеся не подготовлены к восприятию предложенного решения. Оно кажется им искусственным, которого они сами не смогли бы найти.

Чтобы учащиеся естественно воспринимали определенный способ решения, у них не должно быть ни малейшего сомнения в возможности самостоятельно отыскать это решение. Поэтому применяемые, пусть даже и искусственные, способы решения должны быть тщательно разъяснены и обоснованы.

Например, решая уравнение вида $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$, нередко применяется способ сравнения слагаемых $x_1 = a$; $x_2 = \frac{1}{a}$. Но нужно подробно обосновать это решение, показать его возможность и естественность: эти значения неизвестного удовлетворяют исходному уравнению и исчерпывают все корни, ибо уравнение второй степени больше двух корней иметь не может.

Аналогично для уравнения $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a+b+1}{a+b-1}$ очевиден один корень: $x=a+b$. Но это решение нельзя признать приемлемым, если не разъяснено, что никаких других решений у этого уравнения первой степени быть не может.

И на кружковых занятиях, знакомя учащихся с тем или иным способом решения, нужно тщательно разъяснять сущность применяемого способа. Например, решая примеры вида

$$\frac{340\cdot 273+272}{340+341\cdot 272} \text{ или } \frac{244\cdot 395-151}{244+395\cdot 243} \text{ (VII класс),}$$

надо их обосновать алгебраически:

$$\frac{a\cdot(b+1)+b}{a+(a+1)\cdot b} \text{ и соответственно } \frac{a\cdot b-(b-a)}{a+b\,(a-1)}.$$

Подготовка учащихся к восприятию наиболее рациональных приемов решения определенных типов задач и примеров может проводиться в процессе решения системы подготовительных упражнений и при изложении теоретического материала.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих это утверждение.

2. В настоящее время в школах используются различные приемы устных и полуписьменных вычислений для упрощения решений, в частности приемы, основанные на применении переместительного и сочетательного законов сложения и умножения. Но этого нельзя сказать о применении распределительного закона. Учащиеся знают, что $(a+b)\cdot k=ak+bk$, но при решении даже простейших примеров вида: $2\frac{1}{7}\cdot 7$ или $3\frac{1}{27}\cdot 3$ многие из них обращают смешанное число в неправильную дробь и выполняют действия по общему правилу.

Не удивительно, что при решении задач учащиеся очень редко используют распределительный закон. Решая, например, задачу: «На запасном пути могут поместиться только 120 товарных вагонов при средней длине вагона в 7,6 *м*. Сколько поместится на этом пути четырехосных пассажирских вагонов длиной в 19,2 *м* каждый, если на этом пути будут помещены еще 24 товарных вагона?», учащиеся длину свободного пути вычисляют в три действия: $7{,}6\cdot 120-$ $-7{,}6\cdot 24$, вместо двух действий: $7{,}6\cdot(120-24)$.

Для преодоления этого недочета необходимо везде, где это уместно, обращать внимание учащихся на целесообразность применения распределительного закона для упрощения решений. Такого вида упрощения встречаются не только в курсе арифметики, но и в алгебре и в геометрии.

Большое значение имеют и специально подобранные системы задач. Например, чтобы приучить учащихся при решении задач на движение находить расстояния, на которые тела сближаются за единицу времени, полезно решать такие задачи, в которых целесообразность сложения или вычитания скоростей становится необходимостью, как например:

а) Из двух городов, расстояние между которыми 390 *км*, выходят одновременно навстречу друг другу два автомобиля: один со скоростью 55 *км* в час, другой со скоростью 75 *км* в час. Через сколько часов автомобили встретятся?

б) Из деревни в город отправились одновременно пешеход и велосипедист. Найти расстояние между ними через 2 часа, если скорость велосипедиста на 7 *км* в час больше скорости пешехода.

Постепенно и при решении более сложных задач на движение учащиеся применяют формулу $a \cdot k \pm b \cdot k = (a \pm b) \cdot k$.

Но если при решении подобных задач встречается применение этой формулы, то чрезвычайно редко можно встретить применение ее в промежуточных вычислениях. Рассмотрим задачу:

Из совхоза надо вывезти 12 000 *т* зерна. На вывозке работает 5 семитонных и 14 пятитонных автомашин. Каждая автомашина сделала 15 рейсов. Сколько зерна осталось невывезенным?

Обычно получали следующее решение[1]:

1) Сколько зерна вывезли 5 семитонных автомашин за один рейс?

$$7\ т \cdot 5 = 35\ т.$$

2) Сколько зерна вывезли 5 семитонных автомашин за 15 рейсов?

$$35\ т \cdot 15 = 525\ т.$$

[1] С. А. Пономарев. Задачник-практикум по арифметике, Учпедгиз, М., 1961.

3) Сколько зерна вывезли 14 пятитонных автомашин за один рейс?

$$5\ m \cdot 14 = 70\ m.$$

4) Сколько зерна вывезли 14 пятитонных автомашин за 15 рейсов?

$$70\ m \cdot 15 = 1050\ m.$$

5) Сколько зерна вывезено всеми автомашинами за 15 рейсов?

$$525\ m + 1050\ m = 1575\ m.$$

6) Сколько зерна осталось невывезенным?

$$12\,000\ m - 1575\ m = 10\,425\ m.$$

Очень редко при решении данной задачи учащиеся IV—V классов объединяют 2-й, 4-й и 5-й вопросы в два вопроса:

а) Сколько зерна вывезли все автомашины за 1 рейс?

$$35\ m + 70\ m = 105\ m.$$

б) Сколько зерна вывезено всеми автомашинами за 15 рейсов?

$$105\ m \cdot 15 = 1575\ m.$$

Только когда ставим конкретно задание: «Как можно упростить полученное решение?», некоторые из них указывают на это упрощение.

Учащиеся редко применяют для упрощения вычислений известные им правила о прибавлении и вычитании суммы и разности двух чисел, о делении суммы и разности на число, о делении и умножении на произведение или частное двух чисел. Если в начале курса арифметики, когда повторяются эти правила, отдельные пятиклассники применяют их при вычислениях с целыми числами, то очень редки случаи, чтобы учащиеся раскрыли скобки, используя соответствующее правило, при решении примеров вида:

$$12\frac{1}{3} - \left(1\frac{1}{7} - \frac{2}{3}\right) + \ldots .$$

Чтобы учащиеся сознательно и творчески применяли законы арифметических действий и зависимости между компонентами, учителю нужно неоднократно возвращаться к этим теоретическим вопросам при изучении не только арифметики, но и алгебры, требуя не столько правильных формулировок, сколько понимания и умения применять их при решении различных упражнений.

3. При изучении систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными в IX классе решаются задачи вида:

1) Выяснить, сколько решений имеет каждая из данных систем уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y=0, \\ x-3y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-6y=5, \\ -8x+12y=10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-y=6, \\ 6x-2y=12. \end{cases}$

2) При каких значениях a и b следующие системы уравнений имеют бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} ax+by=6, \\ 5x-3y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax-y=b, \\ 4x+3y=10. \end{cases}$

3) При каких значениях m и n следующие системы уравнений не совместны:

а) $\begin{cases} mx-4y=n, \\ 2x+y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-my=n, \\ 2x+3y=5. \end{cases}$

4) При каких значениях a система уравнений:

$$\begin{cases} ax-y=3, \\ -x+ay=-3 \end{cases}$$

имеет единственное решение; имеет бесконечное множество решений или является несовместной?

Если изложение проводилось по учебнику А. П. Киселева, даже с применением определителей второго порядка, то каждая из этих задач требует письменного решения, причем с непростыми вычислениями. Но если выводы были сформулированы через пропорциональность коэффициентов, то все эти задачи могут быть легко и быстро решены даже устно. Для решения первых трех задач устно сравниваем коэффициенты при неизвестных, а в случае их пропорциональности и свободные члены.

При формулировке результатов исследования систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными через пропорциональность коэффициентов задачи типа 4-й и даже более сложные на решение систем уравнений, имеющиеся в задачниках, решаются значительно проще и быстрее. Геометрическое истолкование также становится более понятным и доступным, ибо легче объяснить, почему прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ с угловыми коэффициентами $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ и $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ (при $b_1 \neq 0$ и

$b_2 \neq 0$) пересекаются, если $k_1 \neq k_2$, а при $k_1 = k_2$ параллельны или совпадают.

Все это говорит о том, что при изложении теоретического материала следует учитывать и необходимость обоснования наиболее рациональных приемов и способов решения примеров и задач по соответствующему материалу.

4. Использование характеристических свойств арифметической и геометрической прогрессий значительно упрощает решение многих задач. Например, задачи вида «Между числами a и b вставить число так, чтобы получить три члена арифметической (геометрической) прогрессии» допускают устное решение. С применением этих свойств легко решаются и более сложные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии, как например: «Три числа, составляющие арифметическую прогрессию, дают в сумме 3. Найти эти числа, если при прибавлении к ним соответственно 1, 7 и 17 получается геометрическая прогрессия».

Обозначим члены арифметической прогрессии через a_1, a_2, a_3. Так как $a_1 + a_3 = 2a_2$, то из первого условия получим: $3a_2 = 3$; $a_2 = 1$, тогда $a_1 = 1 - d$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1 + d$. По второму условию числа $1 - d + 1 = 2 - d$; $1 + 7 = 8$ и $1 + d + 17 = 18 + d$ составляют геометрическую прогрессию, значит, $8^2 = (2 - d) \cdot (18 + d)$.

Решая это уравнение, получим: $d_1 = -2$; $d_2 = -14$.

Ответ. 3; 1; -1 или 15; 1; -13.

Аналогично решаются и задачи вида: «Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из этих чисел отнять 1, а от большего отнять 19, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа».

Обозначим члены геометрической прогрессии через b, bq и bq^2, тогда числа $b - 1$, bq и $bq^2 - 19$ составляют арифметическую прогрессию. Для определения b и q получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} b + bq + bq^2 = 65, \\ (b - 1) + (bq^2 - 19) = 2bq. \end{cases}$$

После преобразования получим:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} b + bq \ + bq^2 = 65, \\ b - 2bq + bq^2 = 20. \end{cases} \\ \hline \quad 3bq \qquad\quad = 45; \end{array} \quad bq = 15; \ b = \frac{15}{q}.$$

Подставим значение b в первое уравнение и найдем: $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$. Так как по условию $|q| > 1$, то дробное значение q_2 не подходит.

Теперь легко находим $b = 5$. Ответ. 5; 15; 45.

Заметим, что подобные задачи с четырьмя членами проще и легче решать в том случае, когда неизвестные исходные числа составляют геометрическую прогрессию.

Действительно, при решении задачи «Найти четыре числа, составляющие арифметическую прогрессию, такие, что после прибавления к ним соответственно чисел k, m, n и p получим четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию» для отыскания первого числа a и разности прогрессии d получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a+d+m)^2 = (a+k)(a+2d+n), \\ (a+2d+n)^2 = (a+d+m)(a+3d+p); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + d^2 + m^2 + 2ad + 2ma + 2md = a^2 + \\ + 2ad + (k+n)a + 2kd + kn, \\ a^2 + 4d^2 + n^2 + 4ad + 2na + 4nd = a^2 + \\ + 4ad + 3d^2 + (m+p)a + (3m+p)d + mp; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2 + 2(m-k)d + (2m-k-n)a = kn - m^2, \\ d^2 + (4n-3m-p)d + (2n-m-p)a = mp - n^2. \end{cases}$$

Исключив d^2, получим уравнение первой степени относительно d и a, из которого выразим a через d и подставим в одно из этих уравнений. Найдя d и затем a, делаем проверку, ибо при таком способе решения всегда одно из решений не подходит, так как для вновь получаемой геометрической прогрессии $b_2 = b_3 = 0$, в то время как b_1 и b_4 — отличны от нуля.

А при решении задачи «Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, такие, что после вычитания от них соответственно чисел k, m, n и p, получаем числа, образующие арифметическую прогрессию» для отыскания первого члена b и знаменателя q получим систему:

$$\begin{cases} 2(bq-m) = (b-k) + (bq^2-n), \\ 2(bq^2-n) = (bq-m) + (bq^3-p), \end{cases}$$

которая решается довольно просто, ибо после простейших преобразований можно легко найти q, а затем и b.

Действительно, раскрыв скобки и собрав неизвестные, получим:

$$\begin{cases} bq^2 - 2bq + b = k + n - 2m, \\ bq^3 - 2bq^2 + bq = m + p - 2n. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое почленно, найдем сразу

$$q = \frac{m + p - 2n}{k + n - 2m}.$$

Поэтому целесообразно задачи первого вида переделывать в задачи второго вида. Решения вторым способом будут значительно проще, чем первым.

5. Обучение учащихся рациональным способам решения упражнений должно проводиться не только на уроках, но и на кружковых занятиях. Рассмотрим, в качестве примера, вопросы, относящиеся к теореме Безу.

Раньше изучение теоремы Безу было предусмотрено программой, поэтому в школе разбирали в связи с этим и решение уравнений высших степеней последовательным делением на двучлены вида $x - a$. В настоящее время эти вопросы в большинстве случаев рассматриваются на кружковых занятиях.

Частное от деления $f(x)$ на $x - a$ можно находить непосредственным делением углом, располагая многочлен $f(x)$ по нисходящим степеням буквы x. Но такой способ является весьма нерациональным, поэтому учащимся следует показать и другие возможные приемы.

Для того чтобы получить частное от деления квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ на $x - k$, которое будет многочленом первой степени $mx + p$, достаточно найти m и p. Легко сообразить, что $mx \cdot x = ax^2$ и $pk = -c$, то есть $m = a$ и $p = -\frac{c}{k}$. Например, требуется найти частное от деления $2x^2 + 5x - 3$ на $x + 3$. Легко получить, что $m = 2$ и $p = -\frac{-3}{-3} = -1$, значит, частное $g(x) = 2x - 1$.

Для многочленов степени выше второй этот прием неприменим. Но если $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка, то частное можно найти разложением $f(x)$ на множители: $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$. Например:

Найти частное от деления

$$f(x) = x^7 - 3x^6 - 3x^5 + 9x^4 + 2x^2 - 7x + 3 \text{ на } x - 3.$$

$f(x) = (x^7 - 3x^6) - 3(x^5 - 3x^4) + 2(x^2 - 3x) - (x - 3) = (x - 3)(x^6 - 3x^4 + 2x - 1)$, значит $g(x) = x^6 - 3x^4 + 2x - 1$.

Более общим и более рациональным способом отыскания частного и остатка от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ является применение так называемой схемы Горнера.

Схему Горнера можно разъяснить учащимся, рассматривая многочлен $f(x)$ n-й степени или ограничиться многочленом некоторой определенной степени, не ниже 4-й, что также позволит учащимся подметить закономерность составления коэффициентов частного по коэффициентам делимого.

Нередко схему Горнера целесообразно применять и в случае, когда требуется найти только остаток от деления $f(x)$ на $x - a$, если вычисление значения $f(x)$ оказывается громоздким.

6. Рассмотренные примеры подтверждают, что учащихся действительно нужно о б у ч а т ь рациональным приемам решений задач и примеров. С другой стороны, охватить все многообразие возможных способов решений практически невозможно, так как большинство решаемых в школе упражнений допускает варьирование решений.

Следовательно, обучение нужно вести так, чтобы учащиеся овладели общими приемами рациональных решений.

В последующих главах и рассматриваются некоторые общие положения о рациональности решений, которые относятся не к отдельным упражнениям, а охватывают значительные группы задач и примеров. Это позволяет правильно организовать обучение учащихся рациональности решений и сформулировать конкретные методические рекомендации.

Заметим, что решение одной задачи несколькими способами, даже без оценки их с точки зрения рациональности, имеет большее значение для математического развития учащихся, чем решение многих задач, но одним и тем же способом.

Перейдем теперь к разбору отдельных, заслуживающих внимания общих положений о рационализации решений задач и примеров.

§ 4. ОТ ЧЕГО ЗАВИСИТ ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ

1. Часть задач формулируется так, что само условие уже предопределяет способ решения. Почти все несложные арифметические задачи имеют такое «прозрачное» условие, например:

Ученик купил 2 карандаша по 3 коп. за штуку и книгу за 12 коп. Сколько он уплатил за всю покупку?

В этой задаче условие сформулировано так, что план решения очевиден:

1) 3 коп. $\times$ 2 = 6 коп.; 2) 6 коп. + 12 коп. = 18 коп., и никакого иного решения быть не может. В задачах с такими «прозрачными» условиями выбор способа решения определяется однозначно самим условием задачи.

Аналогичное положение наблюдается и при решении более сложных задач. Поучительным примером является задача № 2293 из «Сборника задач и упражнений по арифметике» Е. С. Березанской:

Купили ткань трех сортов: 49,5 *м* первого сорта за 188,1 руб.; второго сорта в 1,5 раза больше, чем первого, по цене, которая составляет 0,4 цены первого сорта; ткани третьего сорта купили на такую же сумму, как и ткани второго сорта, причем 4 *м* ткани третьего сорта стоили столько же, сколько стоили 3 *м* ткани второго сорта. $\frac{2}{3}$ всей купленной ткани использовали для пошивки белья, $\frac{1}{3}$ остатка — для пошивки косынок и остальное — для полотенец. Сколько ткани израсходовали на белье, косынки и на полотенца в отдельности?

Задача сформулирована так, что при первоначальном чтении условия намечается план решения: находим цену 1 *м* ткани первого сорта, затем цену, количество и стоимость ткани второго сорта и, наконец, вычислив стоимость 3 *м* ткани второго сорта, определяем цену и количество купленной ткани третьего сорта. В результате находим общее количество купленной ткани, что позволит ответить на вопрос задачи.

Не было случая, чтобы хоть один шестиклассник без помощи учителя обратил внимание на тот факт, что для решения задачи достаточно знать лишь количество купленной ткани всех трех сортов, а не их стоимость, поэтому задачу можно решать без учета стоимости ткани первого сорта и цены ткани второго сорта.

Заметим, что эта задача предлагалась учащимся после изучения обратной пропорциональной зависимости, так что они могли найти, сколько купили метров ткани третьего сорта, определив предварительно число метров ткани второго сорта (74,25 *м*), ибо ткани третьего сорта купили на такую же сумму, как и ткани второго сорта, причем 4 *м* ткани третьего сорта стоило столько же, сколько стоило 3 *м* ткани второго сорта. Следовательно, ткани третьего сорта купили

$$74{,}25 \text{ м} \times \frac{4}{3} = 99 \text{ м}.$$

При решении таких задач требуется специальное указание учителя о необходимости найти несколько решений предложенной задачи. Сами учащиеся всегда ограничиваются отысканием решения, естественно следующего из самого условия.

Подобные задачи имеются не только в арифметике, но и в алгебре и геометрии. Пусть, например, семиклассникам после изучения систем уравнений предложена для решения задача:

Ученик за 3 общие тетради и 2 карандаша уплатил 66 коп. Другой ученик за такие же 2 общие тетради и 4 карандаша уплатил 52 коп. Сколько стоила общая тетрадь и сколько стоил карандаш?

Условие задачи подсказывает следующее решение: принимаем цену общей тетради за x коп., а цену одного карандаша — за y коп. Тогда легко составить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 66, \\ 2x + 4y = 52. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим, что общая тетрадь стоила 20 коп., а карандаш — 3 коп.

В данном случае такое естественное для учащихся решение является и наиболее рациональным. Задачу можно решать, составляя одно уравнение с одним неизвестным, но процесс составления уравнения оказывается сложнее и более громоздким, чем в случае составления системы. Упрощения при решении уравнения по сравнению с решением системы не компенсируют усложнений при составлении уравнения.

В случае геометрических задач появляются некоторые особенности, связанные с выполнением чертежей. Для задач вида «Построить параллелограмм по двум смежным сторонам и углу между ними» учащиеся, усвоившие понятие параллелограмма, смогут наметить план построения, не выполняя никакого вспомогательного чертежа, ибо условие предопределяет выбор плана решения.

И для решения стереометрических задач вида «Вычислить площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагональ основания и боковое ребро, если ребро куба равно 4 *см*» нет необходимости выполнять иллюстрирующий условие чертеж. В сечении получается прямоугольник, основанием которого является диагональ основания куба, равная $4\sqrt{2}$ *см*, а высотой — боковое ребро в 4 *см*, значит $S = 4\sqrt{2} \cdot 4 = 16\sqrt{2}\,(см^2)$.

Аналогичное положение имеем и при решении задач на вычисление поверхностей и объемов тел, когда все необходимые для решения величины даны в условии задачи, как например: «Вычислить объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 9 *см* и 4 *см*, а высота — 6 *см*».

Но иногда условие становится «прозрачным» только после выполнения соответствующего чертежа. Рассмотрим задачу на доказательство:

На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC отложены соответственно отрезки AB_1, BC_1 и CA_1, равные между собой. Точки A_1, B_1 и C_1 соединены прямыми. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ тоже равносторонний.

Выполнив соответствующий чертеж, учащиеся без труда устанавливают необходимость доказательства равенства треугольников AB_1A_1, BC_1B_1 и CA_1C_1, для чего нужно установить равенство отрезков: $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Рассмотрим стереометрическую задачу:

Найти объем правильной четырехугольной призмы, диагональ которой d образует с боковой гранью угол α.

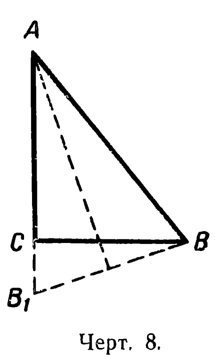
Построив чертеж призмы и выяснив, какой угол является данным углом α, получаем возможность и необходимость вычисления стороны основания призмы: $a = d \cdot \sin\alpha$. Дальнейшее решение зависит от знаний и навыков ученика. Зная, что диагональ квадрата со стороной a равна $a\sqrt{2}$, высоту определяем по формуле $H = \sqrt{d^2 - (a\sqrt{2})^2} = d\sqrt{1 - 2\sin^2\alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}$.

Высоту можно определить, найдя диагональ боковой грани: $d_1 = d \cdot \cos\alpha$; тогда $H = \sqrt{d_1^2 - a^2} = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}$[1].

Ясно, что «прозрачность» условия является понятием относительным: очевидное для одного ученика является сложным для другого. Рассмотрим задачу:

Построить прямоугольный треугольник по катету и разности гипотенузы и второго катета.

Для многих шестиклассников эта задача является сравнительно трудной. Но если у них в процессе решения арифметических и геометрических задач выработались прочные навыки в применении аналитико-синтетического метода, если ученики приучены, следуя от вопроса задачи, учитывать известные элементы и комбинировать их так, чтобы они позволили построить искомую фигуру, то отыскание плана построения не вызывает больших затруднений. Действительно, начертим произвольный треугольник ABC (черт. 8) и посмотрим, какие элементы искомого треугольника даны. Пусть известным является катет CB, но надо еще показать разность гипотенузы и второго катета, ибо для решения задачи нужно учесть все данные. Разность на чертеже можно получить различными способами: откладывая гипотенузу AB на катете AC от точки A или от точки C, или откладывая катет AC на гипотенузе AB вновь от точки A или от точки B. Из четырех вариантов приемлемым является построение отрезка $AB_1 = AB$, ибо только в этом случае получаем достаточно жесткую фигуру BCB_1, позволяющую затем построить и искомый треугольник.



Черт. 8.

Рассмотренные примеры показывают, что при решении несложных

[1] В подобных задачах следует проводить и исследование; в данном случае $\cos 2\alpha > 0$, так как $0 < \alpha < 45°$.

задач, условия которых предопределяют выбор способа решения, нужно специально обращать внимание учащихся на возможность других вариантов решений. Предлагая им решить дома задачу, допускающую различные решения, целесообразно указать, что нужно не только решить задачу, но решить ее несколькими способами и найти наиболее простое решение. При разборе домашнего задания рассматриваем различные решения и выбираем лучшее из них. Если учащиеся не указали самого простого решения, то находим его вместе с ними.

2. Мы уже говорили, что на выбор способа решения существенно влияет теоретический материал, изучаемый учащимися, а также система предшествующих упражнений.

Все сказанное относится и к выбору рациональных решений. Приведем такой пример.

На уроке алгебры с учащимися разбирали преобразование в произведение тригонометрических выражений введением вспомогательного угла. Были решены примеры:

$$\frac{1}{2} - \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\alpha; \quad \sqrt{2} + 2\sin\alpha = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\alpha\right);$$

$$3 - 4\sin^2\alpha = 4\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\alpha\right] = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\alpha\right).$$

Затем учащимся предлагалось преобразовать в произведение выражение: $\frac{1}{2} - \sin^2\alpha$. Учащиеся решали этот пример так:

$$\frac{1}{2} - \sin^2\alpha = \sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{1}{2}\cos 2\alpha.$$

Никто из них не увидел возможности существенного упрощения преобразования:

$$\frac{1}{2} - \sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cos 2\alpha.$$

Если при решении предшествующего примера рассмотреть и преобразование с применением формулы $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$;

$$3-4\sin^2\alpha = 3-2(1-\cos 2\alpha) = 1+2\cos 2\alpha =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}+\cos 2\alpha\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right),$$

то при преобразовании $\frac{1}{2}-\sin^2\alpha$ большинство учащихся выполняет его более простым способом.

Значит, на выбор решения влияет и система упражнений, предшествующих решаемому примеру или задаче. Если, например, в процессе решения задач вывести формулы для стороны и апофемы правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса R, а после этого предложить вычислить площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса R, то все учащиеся решают эту задачу так:

$$S = 12\cdot\frac{1}{2}R\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = 3R^2.$$

Если же перед решением этой задачи не будут выведены формулы для a_{12} и k_{12}, то учащиеся находят и более простое решение, принимая за основание каждого из 12 треугольников радиус R; высота тогда равна $\frac{a_6}{2}=\frac{R}{2}$, и

$$S = 12\cdot\frac{1}{2}R\cdot\frac{R}{2} = 3R^2.$$

3. Разнообразие методов решений упражнений существенно зависит от содержания применяемых в школе учебников и задачников. Проанализируем, в качестве примера, тему «Иррациональные уравнения».

При изложении теоретического материала в учебнике «Алгебра», ч. II А. П. Киселева рассматривались лишь вопросы особенностей такого способа решения. Главное внимание сосредоточено на появлении посторонних корней при возведении обеих частей уравнения в квадрат.

Поэтому и с учащимися разбирался только способ решения иррациональных уравнений возведением обеих частей в некоторую степень. Им рекомендовалось при наличии двух радикалов уединять один из них, а при наличии трех радикалов оставлять два из них в одной части, а один — в другой части. Что касается рациональности таких решений, то в лучшем случае ограничивались лишь разбором примеров, в которых числовые данные позволяли получить более простое решение при отступлении от этих общих рекомендаций.

Например, иногда решение уравнения с двумя квадратными радикалами оказывается проще, если оба радикала оставить в одной части. Решая уравнения с тремя радикалами, нередко важно, сколь удачно сгруппированы эти радикалы. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{5(x-1)}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x-2}.$$

Возведя почленно обе части в квадрат, получим:

$$5x-5-2\sqrt{(5x-5)(2x-3)}+2x-3=3x-2;$$

$$4x-6=2\sqrt{10x^2-25x+15};\ 2x-3=\sqrt{10x^2-25x+15}.$$

Возводим еще раз почленно в квадрат:

$$4x^2-12x+9=10x^2-25x+15;$$

$$6x^2-13x+6=0;\quad x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{3}{2}.$$

Учитывая исходные подкоренные выражения, целесообразно перегруппировать радикалы:

$$\sqrt{5\cdot(x-1)}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-2}.$$

Тогда $5x-5=2x-3+2\sqrt{(2x-3)\cdot(3x-2)}+3x-2;$

$$0=2\sqrt{(2x-3)\cdot(3x-2)},\quad \text{откуда}$$

$$(2x-3)(3x-2)=0;\quad x_1=\frac{2}{3};\quad x_2=\frac{3}{2}.$$

Очевидно, что второе решение значительно проще по сравнению с первым. Проверка в обоих случаях производится одинаково, в результате чего получим, что $x=\frac{2}{3}$ не удовлетворяет исходному уравнению. Ответ. $x=\frac{3}{2}$.

Аналогичное замечание относится и к решению иррациональных уравнений, содержащих четыре радикала. Например:

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}.$$

Возводя обе части в квадрат, мы получим выражение, содержащее два радикала и двучлен вида $ax+b$. Для дальнейшего решения потребуется еще два раза возводить в квадрат, причем получающиеся выражения будут довольно громоздкими.

Но если переписать этот пример так:

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{5x-4}=\sqrt{4x-3}-\sqrt{3x-2},$$

то, возводя обе части в квадрат, получим:

$$7x-5-2\sqrt{10x^2-13x+4}=7x-5-2\sqrt{12x^2-17x+6}.$$

После упрощений: $10x^2-13x+4=12x^2-17x+6$; откуда $2x^2-4x+2=0$; $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$;

$$x=1.$$

Выполнив проверку, найдем, что $x=1$.

Правда, в сборнике Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова были и примеры, для решения которых удобно применять производные пропорции.

Заметим, что применение производных пропорций к решению уравнений стало чрезвычайной редкостью в школьном преподавании. Некоторые учащиеся даже не знают, как можно решать такой пример: «Найти x из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{x+1}{x-1}$, применяя производные пропорции». Это уравнение они могут решать лишь обычными преобразованиями.

Приведем пример на применение производных пропорций к решению иррациональных уравнений.

$$\frac{2a+b-2x-\sqrt{b(4a+b-4x)}}{2a+b-2x+\sqrt{b(4a+b-4x)}}=\frac{a+b-2x}{a},$$

где $a>0$; $b>0$.

Составляя производную пропорцию, будем иметь:

$$\frac{2a+b-2x}{\sqrt{b(4a+b-4x)}}=\frac{2a+b-2x}{2x-b}.$$

Следовательно, $2a+b-2x=0$ или $\sqrt{b(4a+b-4x)}=$ $=2x-b$, откуда $x_1=\frac{2a+b}{2}$ и $x_{2,3}=\pm\sqrt{ab}$

Проверка показывает, что $x_1=\frac{2a+b}{2}$ и $x_2=-\sqrt{ab}$ не подходят, а $x_3=+\sqrt{ab}$ удовлетворяет уравнению лишь при условии, что $b\leqslant 4a$. Следовательно, при $b>4a$ уравнение решений не имеет, а при $b\leqslant 4a$ $x=\sqrt{ab}$.

Обычное же решение этого примера чрезвычайно громоздко и для большинства учащихся оказывается очень трудным.

В «Сборнике задач по алгебре» для педучилищ А. Н. Барсукова есть отдельный параграф «Предварительный анализ иррациональных уравнений», в котором даны примеры, связанные с понятием арифметического значения квадратного радикала и с исследованием области допустимых значений для неизвестного. Сами упражнения сформулированы так: «Не решая уравнений, объяснить — почему каждое из них не может иметь решений (действительных)».

Аналогичные примеры появились и в вышедшем вскоре «Сборнике задач по алгебре», ч. II П. А. Ларичева. Более того, имеются примеры, решение которых существенно упрощается при использовании этих свойств, как например:

$$№\ 551_2.\qquad (5x+4)^{\frac{1}{2}}+(2x-1)^{\frac{1}{2}}=(3x+1)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt{5x+4}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1};$$

$$5x+4=3x+1-2\sqrt{(3x+1)\cdot(2x-1)}+2x-1;$$

$$4=-2\sqrt{(3x+1)\cdot(2x-1)}.$$

Так как $\sqrt{(3x+1)\cdot(2x-1)}\geqslant 0$, то последнее равенство невозможно ни при каком x, значит, исходное уравнение решений не имеет.

К сожалению еще нередки случаи, когда учащиеся, получив уравнение $4=-2\sqrt{(3x+1)\cdot(2x-1)}$, продолжают решение возведением обеих частей в квадрат. Получив квадратное уравнение, находят два корня и только после проверки устанавливают, что уравнение решений не имеет.

Наличие таких примеров в школьном задачнике вынуждает учителя знакомить учащихся с решениями иррациональных уравнений, исследуя область допустимых решений. В результате получило развитие решение иррациональных уравнений посредством исследования области изменения неизвестного.

Для иллюстрации сущности этого метода укажем на решение иррационального уравнения, предложенного на V Международной математической олимпиаде (см. Математика в школе, 1963 г., № 6), «Найти все вещественные корни уравнения

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

где p — вещественный параметр».

Это уравнение можно решать и обычным методом.

$$\sqrt{x^2-p}=x-2\sqrt{x^2-1};$$

$$x^2-p=x^2+4(x^2-1)-4x\sqrt{x^2-1};$$

$$4x\sqrt{x^2-1}=4x^2-(4-p);$$

$$16x^2(x^2-1)=16x^4+(4-p)^2-8x^2(4-p):$$

$$-16x^2=(4-p)^2-8x^2(4-p);$$

$$8x^2(2-p)=(4-p)^2.$$

Очевидно, что при $p\geqslant 2$ последнее уравнение не имеет решения. Если $p<2$, то $8x^2=\frac{(4-p)^2}{2-p}$; $x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$, ибо $x<0$ не удовлетворяет исходному уравнению.

Проверим это значение x:

$$A=\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{(4-p)^2}{8(2-p)}-p}+$$

$$+2\sqrt{\frac{(4-p)^2}{8(2-p)}-1}=\sqrt{\frac{9p^2-24p+16}{8(2-p)}}+$$

$$+2\sqrt{\frac{p^2}{8(2-p)}}=\frac{|3p-4|+2|p|}{\sqrt{8(2-p)}}.$$

1) Если $p<0$, то $A=\frac{4-3p-2p}{\sqrt{8(2-p)}}=\frac{4-5p}{\sqrt{8(2-p)}}\neq\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$.

2) Если $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$, то $A=\frac{4-3p+2p}{\sqrt{8(2-p)}}=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$.

3) Если $\frac{4}{3}<p<2$, то $A=\frac{3p-4+2p}{\sqrt{8(2-p)}}=\frac{5p-4}{\sqrt{8(2-p)}}\neq$ $\neq\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$.

Следовательно, если $p<0$ или $p>\frac{4}{3}$, то уравнение решений не имеет; если же $0\leqslant p\leqslant\frac{4}{3}$, то единственным решением является

$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}.$$

Сравнение этих двух решений показывает, что для учащихся легче второе решение, хотя оно и требует дополнительной проверки. Это особенно заметно, если рассматривать обычные иррациональные уравнения с числовыми данными.

Но из этого не следует, что учащихся вообще не нужно знакомить с решением иррациональных уравнений посредством исследования области изменения неизвестного. Этот прием позволяет быстро и просто решать отдельные уравнения. Кроме того, на вступительных экзаменах в вузы нередко для решения предлагают иррациональные неравенства. И если при решении уравнений можно непосредственной проверкой определить, какие из полученных корней являются посторонними, то для неравенств это сделать весьма трудно. Рассмотрим в качестве примера неравенство

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}.$$

Возведем его дважды почленно в квадрат:

$$x+6-2\sqrt{(x+1)(x+6)}+x+1>2x-5;$$

$$\sqrt{x^2+7x+6}<6;\quad x^2+7x+6<36;\quad x^2+7x-30<0;$$

$$\triangle=49+120=169>0;\quad x_1=-10;\quad x_2=3.$$

Получаем:

$$-10<x<3.$$

Произвести проверку получившихся корней неравенства для учащихся затруднительно.

Если исследовать область изменения неизвестного и решать неравенство с учетом знаков получающихся выражений, то тогда посторонние корни появиться не могут. Такое решение будет выглядеть примерно следующим образом:

Вначале находим область допустимых значений для x: $x\geqslant\frac{5}{2}$; $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>0$ при всех допустимых значениях x, значит, исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+7x+6}<6,\\ x\geqslant\frac{5}{2};\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x^2+7x-30<0,\\ x\geqslant\frac{5}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}-10<x<3,\\ x\geqslant\frac{5}{2}.\end{cases}$$

Ответ. $\frac{5}{2}\leqslant x<3$.

Исследование множества допустимых значений аргумента применяется при решении не только иррациональных уравнений, но и многих трансцендентных уравнений. Рассмотрим уравнение $\arcsin\left(\frac{1}{2}+x\right)+\arccos\left(x^2+1\right)=$ $=\frac{\pi}{6}$.

Самым простым решением этого уравнения является следующее. Так как областью определения функции $y=\arccos z$ является отрезок $-1\leqslant z\leqslant 1$, то $x^2+1\leqslant 1$, что возможно лишь при $x=0$. Значит, никакие другие значения x не могут быть корнями исходного уравнения. Непосредственной подстановкой значения $x=0$ в уравнение убеждаемся, что $x=0$ удовлетворяет уравнению.

В последние годы как на олимпиадах, так и на вступительных экзаменах в вузы предлагаются примеры, для решения которых требуется исследовать область изменения функции.

Например, чтобы решить уравнение $2\cos x=x^2+\frac{1}{x^2}$, нужно сравнить области изменения функций левой и правой частей уравнения. Так как $2\cos x\leqslant 2$, а $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$, как сумма двух взаимно обратных положительных чисел, то единственное возможное решение получим, когда обе части уравнения равны 2.

Но $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ лишь при $x^2=1$, а $2\cos(\pm 1)=2\cos 1<$ <2, значит, уравнение решений не имеет.

Аналогично решается уравнение

$$2\cos\frac{x}{2}=3^x+3^{-x}.$$

Как и в предыдущем примере, $2\cos\frac{x}{2}\leqslant 2$, а 3^x+ $+\frac{1}{3^x}\geqslant 2$, значит, решение может быть лишь тогда, когда $2\cos\frac{x}{2}=2$ и $3^x+\frac{1}{3^x}=2$. Решаем эту систему двух уравнений с одним неизвестным.

Из второго уравнения системы находим $x=0$, которое удовлетворяет и первому уравнению, ибо $2\cos 0=2$, значит, уравнение имеет единственное решение $x=0$.

Анализ тригонометрических уравнений, предлагавшихся в последние 2—3 года на вступительных экзаменах в МГУ и в другие ведущие вузы страны, показывает, что многие из них целесообразно преобразовывать к виду $f(x) = \varphi(x)$, причем при всех допустимых значениях аргумента $f(x) \geqslant A$, а $\varphi(x) \leqslant A$. Решив одно из уравнений $f(x) = A$ или $\varphi(x) = A$, непосредственной подстановкой найденных корней одного из уравнений во второе уравнение устанавливаем, какие из них являются решениями исходного уравнения. Рассмотрим несколько таких примеров.

1) Сколько решений на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ имеет уравнение $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$?

Оценим выражение $\sin x + 2\sin 2x - \sin 3x = \sin x + 4\sin x\cos x - 3\sin x + 4\sin^3 x = \sin x(4\sin^2 x + 4\cos x - 2) = \sin x(4 - 4\cos^2 x + 4\cos x - 2) = \sin x[3 - (2\cos x - 1)^2] < 3$, ибо при $2\cos x = 1$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Уравнение решений не имеет

2) Решить уравнение $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \cdot \sin^2 3x$.

$$\sin^2 x - \sin x \cdot \sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^4 3x = -\frac{1}{4}\sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^4 3x;$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 = -\frac{1}{4}\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x$$

Левая часть неотрицательна, а правая — неположительна, значит, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x = 0, \\ \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x = 0. \end{cases}$$

а) $\begin{cases} \sin^2 3x = 0, \\ \sin x = 0; \end{cases}$ $\quad x = k\pi.$ $\qquad$ б) $\begin{cases} \cos^2 3x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases}$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

В «Сборнике задач по алгебре» П. А. Ларичева имеются примеры, при решении которых учащиеся знакомятся с применением вспомогательных неизвестных, причем к первому из таких примеров дано специальное указание. Почти все такие примеры целесообразно решать, принимая выражение $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ за новое неизвестное, например:

$$3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2;$$

$$3(x^2 + 5x + 1) + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2 + 3.$$

Обозначим $\sqrt{x^2+5x+1}=y$, тогда получим уравнение

$$3y^2+2y-5=0;\quad y_1=-\frac{5}{3};\quad y_2=1.$$

Так как $\sqrt{x^2+5x+1}\geqslant 0$, то y_1 не подходит;

$$\sqrt{x^2+5x+1}=1;\quad x^2+5x+1=1;\quad x_1=-5;\quad x_2=0.$$

Заметим, что этот же прием применим и при решении многих уравнений степени выше второй, как например:

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0.$$

Это уравнение можно решать, перебирая все делители свободного члена. Делителями числа 24 являются:

$$\pm 1;\quad \pm 2;\quad \pm 3;\quad \pm 4;\quad \pm 6;\quad \pm 8;\quad \pm 12;\quad \pm 24.$$

Легко видеть, что отрицательные значения x не могут являться корнями этого многочлена, ибо все слагаемые будут положительными, значит, остается проверить лишь положительные делители.

Проверим $x=1$. При подстановке получим: $1-10+$ $+35-50+24=0$, следовательно, имеем первый корень $x_1=1$.

Делим многочлен на $x-1$, получим новое уравнение:

$$x^3-9x^2+26x-24=0.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x=1$ не есть корень этого нового уравнения. Проверяя $x=2$, убеждаемся, что $x_2=2$.

Разделив на $x-2$, получим $x^2-7x+12=0$.

По теореме Виета найдем: $x_3=3$ и $x_4=4$.

Вместо проверки делителей свободного члена, исходное уравнение можно решить и так:

$(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$, откуда $x^2-5x=-4$ или $x^2-5x=-6$, следовательно, $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$ и $x_4=4$.

Рассмотрим еще такое уравнение:

$$\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}-\frac{18}{x^2+2x+1}=0.$$

Обозначим $x^2+2x+1=(x+1)^2=y$

Исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{y-4}+\frac{18}{y+1}-\frac{18}{y}=0.$$

Теперь уже все преобразования значительно упрощаются, получаем квадратное уравнение относительно y:

$$y^2+y+18y^2-72y-18y^2+54y+72=0;$$

$$y^2-17y-72=0, \text{ откуда } y_1=9 \text{ и } y_2=8.$$

Следовательно, $x+1=\pm\sqrt{9}$ и $x+1=\pm\sqrt{8}$ или $x_1=2$; $x_2=-4$; $x_{3,4}=-1\pm2\sqrt{2}$.

Метод введения вспомогательных неизвестных для решения иррациональных уравнений получил свое дальнейшее развитие под влиянием олимпиадных заданий. Уже традиционными стали примеры вида $\sqrt[3]{(1+x)^2}+4\sqrt[3]{(1-x)^2}=5\sqrt[3]{1-x^2}$.

Делим обе части на $\sqrt[3]{1-x^2}$ и обозначаем $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}=y$.

Получим уравнение: $y+\frac{4}{y}=5$;

$$y^2-5y+4=0; \quad y_1=1; \quad y_2=4.$$

Теперь уже легко найти, что $x_1=0$, а $x_2=\frac{63}{65}$.

Рассмотрим еще такое уравнение:

$$2x+2\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=35.$$

Пусть $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=y$, тогда $2x+7+2\sqrt{x^2+7x}=y^2$, значит, исходное уравнение запишется так: $y^2+y=42$, откуда

$$y_1=6; \quad y_2=-7.$$

Так как $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}>0$, то $y_2=-7$ не подходит. остается решить уравнение: $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$;

$$\sqrt{x+7}=6-\sqrt{x}; \quad x+7=36-12\sqrt{x}+x;$$

$$12\sqrt{x}=29; \quad x=\frac{841}{144}.$$

Подготавливая учеников к математическим олимпиадам, учителя знакомят их с решением иррациональных уравний умножением на сопряженное, а также и с методом решения иррациональных уравнений сведением к системе неизвестных, например: $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$.

Пусть $8x+4=a^3$; $8x-4=b^3$, значит $\begin{cases} a-b=2, \\ a^3-b^3=8. \end{cases}$

Решаем эту систему, предварительно разделив второе уравнение на первое почленно. Получим:

$$4=a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab=4+3ab;\quad 3ab=0.$$

$$1)\ a=0;\quad 8x+4=0;\quad x_1=-\frac{1}{2}.$$

$$2)\ b=0;\quad 8x-4=0;\quad x_2=+\frac{1}{2}.$$

В заключение рассмотрим решение иррациональных уравнений методом разложения на множители, который, как уже указывалось, явно недооценивается при решении алгебраических уравнений. Приведем решение нескольких уравнений. Заметим, что при таком решении часто отпадает необходимость в обязательной проверке корней, ибо нередко мы обходимся без возведения обеих частей уравнения в квадрат.

$$1)\ (a-x)\sqrt{b+x}-(b+x)\sqrt{a-x}=ab\left(\frac{1}{\sqrt{b+x}}-\frac{1}{\sqrt{a-x}}\right),$$

где $a>0$ и $b>0$.

Освободившись в данном уравнении от знаменателей, получим:

$$(a-x)(b+x)\sqrt{a-x}-(b+x)(a-x)\sqrt{b+x}=$$
$$=ab(\sqrt{a-x}-\sqrt{b+x});$$

$$(a-x)(b+x)(\sqrt{a-x}-\sqrt{b+x})=ab(\sqrt{a-x}-\sqrt{b+x}).$$

Имеем два уравнения: $\sqrt{a-x}-\sqrt{b+x}=0$ и $(a-x)\times$ $\times(b+x)=ab$.

Из первого уравнения легко находим, что $x_1=\frac{a-b}{2}$; из второго уравнения — $x_2=0$; $x_3=a-b$.

Все три значения x удовлетворяют исходному уравнению.

$$2)\ \frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{3}.$$

Обозначим левую часть через A и преобразуем ее:

$$A = \frac{x^2 - x - 2 + (x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2 + x - 2 + (x+1)\sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+1) + (x-1)\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+2) + (x+1)\sqrt{x^2-4}}$$

Если $x \geqslant 2$, то $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$, и в числителе и в знаменателе можно вынести за скобки множители. Получим:

$$A = \frac{\sqrt{x-2}\,[\sqrt{x-2}\,(x+1) + (x-1)\sqrt{x+2}]}{\sqrt{x+2}\,[(x-1)\sqrt{x+2} + (x+1)\sqrt{x-2}]} = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

Если $x \leqslant -2$, то $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{-(x+2)} \cdot \sqrt{2-x}$ и тогда

$$A = \frac{\sqrt{2-x}\,[-\sqrt{2-x}\,(x+1) + (x-1)\sqrt{-(x+2)}]}{\sqrt{-(x+2)}\,[-(x-1)\sqrt{-(x+2)} + (x+1)\sqrt{2-x}]} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2-x}{-(x+2)}} = -\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

Если $-2 < x < 2$, то $\sqrt{x^2-4}$ не имеет смысла в области действительных чисел.

По условию $A = \frac{1}{3}$, следовательно, при $x \leqslant -2$ уравнение решения не имеет, ибо при всех действительных значениях x $A \leqslant 0$.

Остается рассмотреть лишь случай $x \geqslant 2$. В этом случае получаем уравнение

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{9}; \quad 8x = 20, \quad x = \frac{5}{2}.$$

Найденное значение x удовлетворяет условию $x \geqslant 2$. Проверка показывает, что оно удовлетворяет и исходному уравнению.

4. Решая задачи и примеры определенного типа, учащиеся постепенно создают себе правила о едином подходе к их решению. В результате появляется формальный, поч-

ти механический подход, что снижает ценность решения соответствующих задач и примеров. Например, при доказательстве алгебраических тождеств учащиеся, а нередко и сами учителя, делают ошибочный вывод, что такие упражнения являются по существу обычными примерами на упрощение алгебраических выражений, с той лишь разницей, что ответ дан не в конце задачника, а в самом условии. И не удивительно, ибо почти все примеры на доказательство тождеств, имеющиеся в «Сборнике задач по алгебре» П. А. Ларичева, ч. I, действительно сводятся к обычному упрощению левой части тождества, в результате чего получается выражение, стоящее в правой части. Рассмотрим типичный пример на доказательство тождеств:

№ 1149_2[1]
$$\left[\frac{2}{(m+n)^3}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m^2+2mn+n^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)\right]:\frac{m-n}{m^3n^3}=\frac{mn}{m-n}.$$

Обычное упрощение левой части даст нам выражение, стоящее в правой части:

$$\left[\frac{2}{(m+n)^3}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m^2+2mn+n^2}\cdot\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)\right]:\frac{m-n}{m^3n^3}=$$
$$=\left[\frac{2}{(m+n)^3}\cdot\frac{n+m}{mn}+\frac{1}{(m+n)^2}\cdot\frac{n^2+m^2}{m^2n^2}\right]:\frac{m-n}{m^3n^3}=$$
$$=\frac{2mn+n^2+m^2}{(m+n)^2\,m^2n^2}\cdot\frac{m^3n^3}{m-n}=\frac{mn}{m-n};\quad\frac{mn}{m-n}=\frac{mn}{m-n}.$$

Но такое доказательство тождеств не всегда является приемлемым, так как в отдельных случаях лучше преобразовывать не левую часть, а правую, а иногда и обе части по отдельности. Чтобы на этот факт обратить внимание учащихся, нужно решать примеры, в которых приходится не просто упрощать алгебраические выражения, а преобразовывать одну (или обе) часть тождества к определенному ответу, как например, доказать тождество:

$$\operatorname{tg}^3\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\sec\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha\sec^2\alpha=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha.$$

---

[1] Номер указан по изданию 1961 года.

Большинство учащихся начинает преобразовывать левую часть так:

$$\operatorname{tg}^3\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sec\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha\sec^2\alpha=$$

$$=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha\sin^2\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^3\alpha\sin^3\alpha}.$$

На этом преобразование левой части прекращают и приступают к преобразованию правой части:

$$\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\frac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}{\cos^3\alpha\sin^3\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}{\cos^3\alpha\sin^3\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^3\alpha\sin^3\alpha}.$$

Остается сравнить полученные результаты.

Это тождество можно доказать и другим способом, преобразовывая левую часть с учетом нужного ответа:

$$\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sec\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\sec^2\alpha=$$

$$=\operatorname{tg}^3\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sec\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=$$

$$=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sec\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha+\frac{\sin^2\alpha-1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha.$$

Рассмотрим еще один пример. Требуется доказать тождество $\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)+$ $+\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)=1$.

Возможно такое оригинальное решение.

Так как $2\alpha+(30^\circ-\alpha)=90^\circ-(60^\circ-\alpha)$, то

$$\operatorname{tg}[2\alpha+(30^\circ-\alpha)]=\operatorname{tg}[90^\circ-(60^\circ-\alpha)];$$

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) =$$
$$= 1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha),$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) +$$
$$+ \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = 1.$$

Навыки в преобразовании одного алгебраического выражения в другое нужны учащимся для установления тождественности выражений. При решении задач, особенно по стереометрии с применением тригонометрии, в зависимости от избранного способа решения, ответы могут быть записаны по-разному. Нередко даже правильный ответ, полученный учеником, не совпадает с ответом, приведенным в задачнике, поэтому необходимо установить их тождественность, для чего одно выражение надо преобразовать в требуемое другое выражение.

Чтобы приучить учащихся выделять нужные им выражения при преобразованиях, целесообразно решать так называемые условные тождества. Пусть требуется доказать, что

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ если } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$
$$\text{и } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0.$$

По-видимому для решения примера нужно первое из данных условий возвести в квадрат, выделив при этом выражение $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$. Действительно, наиболее рациональным будет такое решение:

$$1 = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} +\right.$$
$$\left. + \frac{yz}{bc}\right) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{xyz}{abc}\left(\frac{c}{z} + \frac{b}{y} + \frac{a}{x}\right) =$$
$$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве условных тождеств учащиеся учатся преобразовывать выражения не как придется, а с учетом условия. Рассмотрим еще такой пример.

Доказать, что если $\cos x = \cos a \cdot \cos b$, то

$$\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}.$$

Для решения нужно произведение тангенсов преобразовать так, чтобы выделить выражения, содержащие только $\cos x$. Это можно сделать, если применить формулы преобразования произведения синусов и косинусов в сумму. Действительно:

$$\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}=\frac{\sin\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}\cdot\cos\frac{x-a}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos a-\cos x)}{\frac{1}{2}(\cos a+\cos x)}=\frac{\cos a-\cos a\cdot\cos b}{\cos a+\cos a\cdot\cos b}=$$

$$=\frac{1-\cos b}{1+\cos b}=\frac{2\sin^2\frac{b}{2}}{2\cos^2\frac{b}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}.$$

Навыки в выделении выражений, требуемых условием, приобретенные учащимися при решении условных тождеств, окажут большую пользу при отыскании рациональных способов доказательства алгебраических тождеств.

Решая уравнения первой степени, учащиеся приходят к выводу о целесообразности такой последовательности выполнения преобразований: освобождаются от дробей; упрощают полученное уравнение; собирают члены, содержащие неизвестное, в одной части уравнения, а известные — в другой; приводят подобные члены и делят обе части уравнения на коэффициент при неизвестном. Даже уравнение вида: $5(x-2)=15$ многие из них решают, придерживаясь этого трафарета: раскрывают скобки, переносят известное в правую часть, складывают и делят обе части уравнения на коэффициент при x, хотя это уравнение может быть решено устно: $x = 15 : 5 + 2 = 5$.

Решая уравнения с дробными коэффициентами, учащиеся обязательно преобразовывают его в уравнение с целыми коэффициентами. Пусть требуется решить уравнение вида:

$$\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-x\right)=0.$$

Наиболее распространенным (из лучших) решением является такое:

$$\frac{x}{6}-\frac{2x-1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{x}{3}=0.$$

Умножим на 12, получим:

$$2x-4x+2-1+4x=0; \quad 2x+1=0; \quad x=-\frac{1}{2}.$$

Редко можно встретить решение этого уравнения без освобождения от дробных коэффициентов:

$$\frac{x}{6}-\frac{x}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{x}{3}=0;$$

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}=0; \quad x=-\frac{1}{2}.$$

При решении квадратных уравнений $ax^2+bx+c=0$, когда a есть дробное число, учащиеся всегда предварительно приводят к общему знаменателю, ибо решение уравнения с целыми коэффициентами для них легче, чем с дробными, хотя коэффициенты при этом усложняются. Но если $4ac$ будет целым числом, то значительно проще решать уравнение без освобождения от знаменателя. Например, решая уравнение $\frac{1}{16}x^2+3x-108=0$, не следует умножать все члены на 16, ибо тогда получим уравнение $x^2+48x-1728=0$;

$$x=-24\pm\sqrt{576+1728}=-24\pm\sqrt{2304}=-24\pm 48.$$

Вычисления оказались громоздкими, причем некоторые учащиеся письменно находили квадрат числа 24 и значение квадратного корня из 2304.

Если же сразу воспользоваться формулой корней, получим:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+27}}{2\cdot\frac{1}{16}}=(-3\pm 6)\cdot 8=-24\pm 48.$$

Вычисления значительно упростились и можно устно находить все необходимые промежуточные результаты.

Поэтому необходимо не только поощрять, но разъяснять с помощью специально подобранных примеров целесообразность отступления в конкретных случаях от схемы решения, применяемой для многих упражнений данного типа. Надо приучать учащихся указывать из нескольких возможных решений то, которое скорее и проще других ведет к цели.

Например, еще нередки случаи, когда учащиеся для отыскания корней квадратного уравнения $(x-a)\cdot(x-b)=0$ раскрывают скобки и применяют формулу корней квадратного уравнения. Мы считаем, что в подобных недочетах виноват учитель. Если бы с учащимися основательно разобрали решение уравнений методом разложения на множители, а не ограничивались лишь решением этим способом неполных квадратных уравнений вида $ax^2+bx=x\cdot(ax+b)=0$, то таких нерациональных решений учащиеся не допускали бы.

Следует учитывать, что при этом выигрыш был бы не только в упрощении отыскания корней квадратного трехчлена, но и при решении неравенств второй степени и при исследовании квадратных функций. Этот способ применим при решении иррациональных и трансцендентных уравнений, в частности, тригонометрических уравнений. Учащиеся могли бы даже решать отдельные уравнения степени выше второй, допускающие разложение на рациональные множители.

Надо смелее применять устное нахождение корней квадратных уравнений по теореме Виета, что значительно облегчает и решение уравнений, сводящихся к квадратным, а также решение задач на составление квадратных уравнений при изучении многих тем алгебры и геометрии. Системы вида $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=15 \end{cases}$ тоже можно решать устно, не составляя вспомогательного уравнения $z^2-8z+15=0$, а используя тот же прием, что и при применении теоремы Виета для приведенных квадратных уравнений.

Целесообразно на внеклассных занятиях с восьмиклассниками рассмотреть использование теоремы Виета при отыскании корней уравнений $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами. Для этого используем известный метод преобразования уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ с целыми коэффициентами к приведенному уравнению $y^n+b_1y^{n-1}+\cdots+b_n=0$ с целыми же коэффициентами, умножая обе части исходного уравнения на a_0^{n-1} и заменяя a_0x на y.

Умножим все коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0$ на a, получим $a^2x^2+abx+ac=0$. Обозначим $ax=y$, тогда $y^2+by+ac=0$, и теперь к полученному уравнению применяем теорему Виета. Надо лишь помнить, что $x=\frac{y}{a}$.[1]

Рассмотрим, например, уравнение $3x^2-5x+2=0$. Устно преобразовываем его к уравнению $y^2-5x+6=0$, корни которого $y_1=2$; $y_2=3$, значит, $x_1=\frac{2}{3}$; $x_2=1$.

Даже при небольшой тренировке учащиеся быстро и легко решают устно этим приемом большинство встречающихся им квадратных уравнений.

Устное вычисление корней квадратного трехчлена облегчает решение и более сложных примеров. Рассмотрим уравнение, в котором устное разложение квадратного трехчлена на линейные множители позволяет значительно упростить решение.

$$\frac{14x-4}{2x+1}-\frac{3x-3}{2x^2-x-1}-\frac{30(2x-3)}{3x-2}+\frac{26(2x^2-3x-2)}{4x^2-1}=$$
$$=\frac{39}{(2x+1)(6x^2-7x+2)};$$
$$\frac{14x-4}{2x+1}-\frac{3(x-1)}{(x-1)(2x+1)}-\frac{30(2x-3)}{3x-2}+$$
$$+\frac{26(2x+1)(x-2)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{39}{(2x+1)(3x-2)(2x-1)};$$
$$\frac{14x-7}{2x+1}-\frac{60x-90}{3x-2}+\frac{26x-52}{2x-1}=\frac{39}{(2x+1)(3x-2)(2x-1)}.$$

Умножая числители на соответствующие дополнительные множители и приведя подобные члены, получим: $118x^2-137x+39=0$, откуда $x_1=\frac{39}{59}$; $x_2=\frac{1}{2}$ не подходит.

Для повышения уровня математического образования немалую роль играют оригинальные, изящные и простые решения сложных задач. Приведем такой пример.

Решая уравнения с неизвестными в знаменателе, учащиеся признают лишь метод освобождения от знаменателя. Но очень часто предварительное исключение целой части в каждой из дробей значительно упрощает решение. Возьмем уравнение

$$\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=4+\frac{x-7}{x-1}.$$

[1] Можно этот результат получить сравнением корней уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $x^2+bx+ac=0$.

При обычном решении нам придется четыре раза находить произведение трех двучленов: $(2x-1)(x+2)(x-1)+$ $+(3x-1)\ (x+1)\ (x-1)=4(x-1)\ (x+1)\ (x+2)+$ $+(x-7)(x+2)(x+1)$.

Даже при наиболее рациональном умножении этих двучленов получается довольно громоздкое решение.

Исключая же целое число из каждой дроби, получим:

$$2-\frac{3}{x+1}+3-\frac{7}{x+2}=4+1-\frac{6}{x-1}$$

или

$$\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}-\frac{6}{x-1}=0.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим квадратное уравнение:

$$3(x+2)(x-1)+7(x^2-1)-6(x+1)(x+2)=0.$$

Очевидно, что второй способ решения значительно проще по сравнению с первым.

Рассмотрим более сложный пример.

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

Исключая из дробей целые части, в данном случае многочлены, получим:

$$x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}=x+2+\frac{2}{x+2}+$$
$$+x+3+\frac{3}{x+3}$$

или

$$\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}.$$

Перегруппируем слагаемые для упрощения вычислений:

$$\frac{4}{4+x}-\frac{3}{x+3}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1};$$

найдем

$$\frac{x}{x^2+7x+12}=\frac{x}{x^2+3x+2},$$

откуда $x_1=0$ и $x^2+7x+12=x^2+3x+2$.

Из второго уравнения $x_2=-2\frac{1}{2}$.

Решение этого примера обычным способом слишком громоздкое.

Иногда учитель, сам того не замечая, приучает учащихся к нерациональным методам решения. Например, изучая системы уравнений, в которых неизвестные входят в знаменатели дробей $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$, делается вывод, что «всего проще такую систему можно решить посредством введения вспомогательных неизвестных»[1].

Этот вывод ошибочен, так как, например, системы вида

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = b \end{cases}$$

проще всего решать устно, складывая и вычитая почленно эти уравнения. Получим:

$$\frac{2}{x} = a + b; \quad \frac{2}{y} = a - b, \text{ то есть } x = \frac{2}{a+b}; \ y = \frac{2}{a-b}.$$

Нецелесообразно вводить вспомогательные неизвестные и для систем вида

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{3}{16}, \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Устно определяем, что

$$\frac{2}{x-y} = \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{x+y} = \frac{1}{8},$$

откуда

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 16, \quad \text{значит, } x = 12; \ y = 4. \end{cases}$$

Введение вспомогательных неизвестных оправдано при решении более сложных систем, где применение устных вычислений для большинства учащихся затруднительно. Например, систему вида

$$\begin{cases} \frac{2}{3x+y-2} + \frac{3}{x+4y+1} + \frac{7}{24} = 0, \\ \frac{1}{3x+y-2} - \frac{2}{x+4y+1} + \frac{7}{12} = 0 \end{cases}$$

хорошо решать, полагая $\frac{1}{3x+y-2} = s$ и $\frac{1}{x+4y+1} = t$.

[1] А. П. Киселев. Алгебра, ч. I, § 104.

5. Рассмотрим вопрос о выборе неизвестных при решении алгебраических задач на составление уравнений. Решая такие задачи, учащиеся VI—VIII классов приходят к выводу о целесообразности за исходные неизвестные принимать те величины, которые требуется определить. Но решение многих задач упрощается при более удачном выборе неизвестных величин.

При составлении уравнений учащимся рекомендуется учитывать, какие величины сравниваются в условии задачи. Обычно в условии задачи можно выделить как бы две части, одна из которых позволяет ввести обозначения, а вторая — составить уравнение. Но нередко отступление от этих рекомендаций позволяет существенно упростить решение задачи. Пусть требуется решить задачу:

Лодочник, гребя по течению, проплывает n метров за k часов; гребя против течения, он проплывает это же расстояние за время на c часов больше. Определить часовую скорость течения.

Принимаем скорость течения реки за x *м* в час. Уравнение составим, учитывая, что на прохождение n метров против течения лодочнику требуется на c часов больше. Скорость лодки по течению реки будет $\frac{n}{k}$ *м/ч*, а против течения — $\left(\frac{n}{k} - 2x\right)$ *м/ч*. Получаем уравнение: $n : \left(\frac{n}{k} - 2x\right) - k = c$, решив которое, найдем: $x = \frac{nc}{2k(k+c)}$ *м/ч*.

Но в данной задаче уравнение можно составить значительно проще. При тех же обозначениях будем сравнивать скорости.

x *м/ч* — скорость течения реки;

$\frac{n}{k}$ *м/ч* — скорость лодки по течению;

$\frac{n}{k+c}$ *м/ч* — скорость лодки против течения.

Получаем уравнение: $\frac{n}{k} - \frac{n}{k+c} = 2x$;

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{k} - \frac{n}{k+c}\right) = \frac{nc}{2k(k+c)}.$$

Как видим, и составление уравнения, и решение его во втором случае значительно проще.

Многие задачи по алгебре могут быть решены как составлением одного уравнения с одним неизвестным, так и составлением системы уравнений с несколькими неизвестными. В большинстве случаев составление системы уравнений значительно проще, чем составление уравнения с одним неизвестным, но решение системы сложнее, чем решение уравнения. Поэтому при оценке простоты решения нужно сравнивать, насколько составление системы уравнений проще, чем составление уравнения, и в какой степени это упрощение компенсирует усложнение вычислений. Рассмотрим такую задачу:

Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми d *км*, и встретились через t часов. Не останавливаясь, они продолжали путь, и первый прибыл в B на a часов раньше, чем второй прибыл в A. Найти скорость каждого велосипедиста.

Приведем краткие записи решений этой задачи составлением одного уравнения с одним неизвестным и составлением системы двух уравнений с двумя неизвестными.

I способ

x *км/ч* — скорость первого велосипедиста;

xt *км* — расстояние, которое проедет первый велосипедист до встречи:

$(d - xt)$ *км* — расстояние, которое проедет второй велосипедист до встречи;

$\frac{d}{x}$ *ч* — время, за которое первый велосипедист проедет все расстояние;

$\frac{d - xt}{t}$ *км/ч* — скорость второго велосипедиста;

$\frac{d}{\frac{d - xt}{t}}$ *ч* — время, за которое второй велосипедист проедет все расстояние.

Теперь можно составить уравнение: $\frac{d}{x} + a = \frac{dt}{d - xt}$;

$$atx^2 + d\,(2t - a)\,x - d^2 = 0;$$

$$x = \frac{d\,[(a-2t) \pm \sqrt{(a-2t)^2 + 4at}]}{2at}.$$

Так как должно быть $x > 0$, то

$x = \frac{d\,[(a-2t) - \sqrt{(a-2t)^2 + 4at}]}{2at}$ не подходит.

Скорость второго велосипедиста вычисляем по формуле:

$$\frac{d-xt}{t}=\frac{d\left[a+2t-\sqrt{(a-2t)^2+4at}\right]}{2at}.$$

II способ

x *км/ч* — скорость первого велосипедиста;
y *км/ч* — скорость второго велосипедиста.

Легко получаем два уравнения системы:

$$\begin{cases} t(x+y)=d, \\ \dfrac{d}{y}-\dfrac{d}{x}=a. \end{cases}$$

Решая систему подстановкой $y=\frac{d}{t}-x$, получаем то же уравнение, что и в первом случае:

$$\frac{dt}{d-xt}-\frac{d}{x}=a;$$

$$atx^2+d(2t-a)x-d^2=0.$$

Если решение задачи составлением уравнения с одним неизвестным требует довольно трудных рассуждений при установлении зависимости между неизвестной и данными величинами, а решение системы весьма простое, то правомерно считать рациональным решение задачи составлением системы уравнений.

При сравнении, какой же из способов проще, с применением системы уравнений или одного уравнения с одним неизвестным, нужно учитывать и возможность разных решений системы.

Рассмотрим задачу:

Две бригады рабочих, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу за 8 дней. Если бы работало $\frac{2}{3}$ рабочих первой бригады и 0,8 —второй, то работа была бы выполнена за $11\frac{1}{4}$ дня. За сколько дней могла бы выполнить эту работу каждая бригада в отдельности?

Если принять, что первая бригада одна может выполнить всю работу за x дней, а вторая — за y дней, то легко составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 8 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ 11\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + 11\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

Упростив второе уравнение, получим:

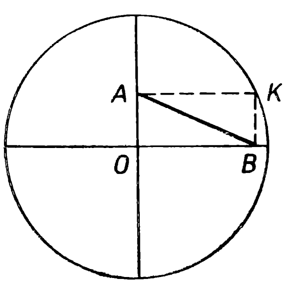
$$\begin{cases} 8 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ 7\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 9 \cdot \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

Рациональность решения задачи зависит от того, как будет решена эта система уравнений. Если из первого уравнения вычесть второе, получим $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = 0$, то есть $y = 2x$. Тогда $8 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{2x} = 1$, то есть $12 \cdot \frac{1}{x} = 1$; $x = 12$ (дней), значит, $y = 24$ дня.

6. Все основные положения о влиянии изучаемого теоретического материала и системы предшествующих упражнений на выбор способа решения предложенной задачи имеют место и при решении геометрических задач.

Если, например, при изучении теоремы Пифагора предложить задачу на вычисление длины некоторого элемента прямоугольного треугольника, то учащиеся ищут решение только с применением этой теоремы. Интересна такая задача:

Из произвольной точки K окружности радиуса R опущены перпендикуляры KA и KB на два взаимно перпендикулярных диаметра (черт. 9). Определить длину отрезка AB.



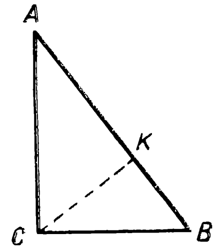
Черт. 9.

Большинство учащихся пытается определить вначале отрезки OA и OB, чтобы применить теорему Пифагора. И только убедившись в том, что эти отрезки в силу произвольности точки K вычислить нельзя, учащиеся находят самое простое решение: $AB = OK = R$.

Возьмем еще такую задачу:

Определить площадь прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна 25 *см*, а перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен 12 *см*.

Выполнив чертеж прямоугольного треугольника (черт. 10), учащиеся нередко вычисляют вначале отрезки AC и BC, равные 20 *см* и 15 *см*, а затем находят площадь по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$ (*см*^{2}).



Черт. 10.

Здесь имеет место шаблонность в применении для вычисления площади прямоугольного треугольника формулы $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ вместо более удобной в данном случае формулы $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.

Сказывается и шаблонность в применении чертежа прямоугольного треугольника. Стоит предложить выполнить чертеж так, чтобы гипотенуза AB была расположена горизонтально, и почти все учащиеся применяют уже формулу $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.

Шаблонность в пространственных представлениях учащихся еще в большей степени заметна при решении стереометрических задач. Рассмотрим общеизвестную задачу о вычислении объема треугольной пирамиды.

Через три вершины куба, являющиеся вторыми концами ребер, исходящих из одной вершины, проведена плоскость, отсекающая от куба треугольную пирамиду. Вычислить объем этой пирамиды, если ребро куба равно a.

Нередки случаи, когда учащиеся за основание пирамиды принимают правильный треугольник, получившийся в сечении куба плоскостью, и вычисляют высоту, опущенную на это основание. Решение оказывается чрезмерно громоздким, в то время как объем можно вычислить весьма просто, приняв за основание пирамиды один из прямоугольных треугольников, являющихся частью грани куба. В этом случае перпендикулярное ему ребро куба будет высотой пирамиды, и значит,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a\right) \cdot a = \frac{1}{6} a^3.$$

Интересно, что такое простое решение находят все учащиеся, на чертеже у которых три указанных ребра исходят из вершины нижнего основания куба. Если же взять одну из вершин верхнего основания, то теперь уже требуется мысленно повернуть получившуюся пирамиду, чтобы она заняла привычное для них положение.

Заметим, что если через 1—2 урока решать задачу: «Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, площади их равны 6 $м^2$, 4$м^2$ и 3$м^2$. Найти объем пирамиды», то по-прежнему часть учащихся не догадывается за основание пирамиды принять любую из этих боковых граней, ибо в условии сказано «боковые грани». Приняв же за основание одну их этих граней, можно ограничиться вычислением лишь одного перпендикулярного ей ребра, которое будет высотой пирамиды.

Следует остановиться на одной особенности, присущей только геометрическим задачам. Однажды на вступительных экзаменах была предложена задача:

В правильную четырехугольную пирамиду, у которой сторона основания равна a и двугранные углы при основании равны α, вписан шар. Определить объем куба, вписанного в этот шар.

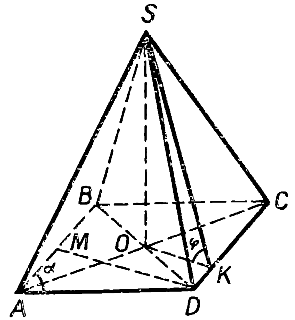
Многие из учащихся не решили эту задачу, так как не смогли показать на чертеже вписанный в шар куб, нарисовав шар, вписанный в пирамиду. В процессе решения стереометрических задач у них настолько выработалась привычка делать чертеж к решению каждой задачи, что они отказались от решения задачи, не сумев построить соответствующий чертеж. При устном собеседовании оказалось, что почти все из них легко вычисляют радиус шара, вписанного в эту пирамиду: $R = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; зная диагональ куба $2R$, без труда могут найти его ребро.

В другой год была предложена задача:

Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R.

И здесь учащиеся потратили много времени, чтобы нарисовать окружность, описанную около боковой грани, хотя для решения задачи нет никакой необходимости в этом построении, ибо сторону основания пирамиды, то есть основание равнобедренного треугольника, у которого известны угол при вершине и радиус описанной около треугольника окружности, легко найти по формуле $a = 2R \cdot \sin \alpha$. Определив затем высоту пирамиды, легко вычисляем ее объем.

Следовательно, в процессе обучения учащихся нужно рассматривать и задачи, когда целесообразно вместо чертежа всей фигуры выполнять рисунки отдельных ее частей либо решать вообще без чертежа.



Черт. 11.

7. Учитель при изложении теоретического материала и при решении упражнений должен помнить о содержании последующего материала и выделять те положения, которые понадобятся в будущем. Изучая, например, площадь параллелограмма, нужно обязательно разъяснить учащимся, что полученная формула применима и для вычисления площади ромба. Более того, нужно решить несколько задач на вычисление площади ромба по формуле $S = a \cdot h$. В противном случае они будут применять лишь формулу: «площадь ромба равна половине произведения его диагоналей». Даже в задачах вида «Найти площадь ромба со стороной 10 *см* и острым углом в 60°» они будут находить диагонали ромба, хотя проще найти высоту $h = 5\sqrt{3}$ *см*, тогда $S = 10 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ (*см*²). Это объясняется тем, что в учебниках геометрии обычно выделено отдельно утверждение, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, но нигде в явной форме не сказано, что площадь ромба равна произведению основания на высоту.

Рассмотрим еще стереометрическую задачу.

Найти объем пирамиды, в основании которой лежит ромб со стороной a и острым углом α, а все боковые грани которой наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом φ.

Значительная часть учащихся решает эту довольно простую задачу примерно так (черт. 11):

$$AO = AD \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}; \quad AC = 2a\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$OD = AD \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\alpha}{2}; \quad BD = 2a\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2a\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2a\sin\frac{\alpha}{2} = a^2\sin\alpha.$$

$$OK \perp DC; \quad H = SO = OK \cdot \operatorname{tg}\varphi; \quad OK = OC \cdot \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= a\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}a\sin\alpha; \; SO = \frac{1}{2}a\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi;$$

$$V = \frac{1}{3}a^2\sin\alpha \cdot \frac{1}{2}a\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi \text{ (куб. ед.)}.$$

Решение существенно упрощается, если вычислить высоту ромба: $DM = AD \cdot \sin\alpha = a\sin\alpha$. Тогда легко найти, что $S_{\text{осн.}} = AB \cdot DM = a \cdot a\sin\alpha = a^2\sin\alpha$;

$$OK = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{2}a\sin\alpha.$$

Заметим, что выражение для площади основания $S = a^2\sin\alpha$ можно было бы написать сразу, рассматривая ромб как совокупность двух равных треугольников со сторонами a и a и углом между ними α. Высоту основания тогда можно найти без ее построения:

$$h = \frac{S_{\text{осн.}}}{a} = a\sin\alpha.$$

Рассмотрим еще формулу для вычисления высоты треугольника по известным его трем сторонам:

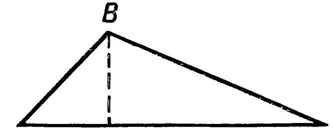
$$h_a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2}.$$

В таком виде она применяется очень редко, а преобразовывается к виду

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Преобразование первоначальной формулы, при всей его громоздкости, окупается более ранним ее применением, да и вывод формулы Герона для вычисления площади треугольника существенно упрощается:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



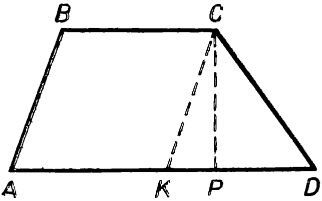
Черт 12.

Упрощается и решение многих задач, например:

Определить высоту треугольника, у которого основание равно 51 *см*, а боковые стороны 20 *см* и 37 *см*.

Если основываться только на теореме Пифагора, то получим такое решение (черт. 12).

Обозначим $AD = x$, тогда $DC = 51 - x$. Выражая BD из треугольников ABD и BDC и приравнивая полученные выражения, получим уравнение:



Черт. 13.

$$20^2 - x^2 = 37^2 - (51 - x)^2; \; 400 - x^2 = 1369 - 2601 + \\ + 102x - x^2; \; 102x = 1632; \; x = 16.$$

Найдя $AD = 16$ *см*, легко теперь найдем высоту BD: $BD = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{4 \cdot 36} = 12$ (*см*).

Если же использовать выведенную формулу, то вычисления значительно упрощаются:

$$h = \frac{2}{51} \cdot \sqrt{54 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 34} = \frac{2}{51} \cdot 17 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 12 \, (см).$$

Существенно упрощаются и решения задач вида «Определить высоту и диагонали трапеции, если основания равны 25 *см* и 11 *см*, а боковые стороны равны 13 *см* и 15 *см*».

Проведем $CK \parallel BA$ (черт. 13), получим треугольник KCD, у которого $KC = 13$ *см*, а $KD = AD - AK = 25 - 11 = 14$ (*см*).

Высота треугольника $CP = \frac{2}{14} \cdot \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{7} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 = 12$ (*см*). Теперь уже легко вычислить и значения диагоналей.

8. Вопросы, рассмотренные в предыдущих параграфах, подтверждают наличие у учащихся так называемой линейности мышления. Ученикам трудно выбраться из круга освоенных и усвоенных ими правил, формул и методов, они упорно идут по старым, протоверенным следам. Доступные рациональные способы решения того или иного упражнения закрыты для них прежде найденными способами решения подобных упражнений.

Но было бы грубейшей ошибкой считать целесообразным отказаться от сообщения учащимся общих методов и приемов, применяемых для решения значительной части упражнений определенного типа.

Надо не отвергать, а поощрять общие правила и рекомендации, к которым приходят учащиеся в процессе решения упражнений. Более того, учитель должен и сам давать учащимся советы о наиболее типичных способах решения задач и примеров того или иного вида. Рассмотрим задачи на отыскание экстремумов. Решим наиболее простую из них:

Периметр прямоугольника равен 16 *см*. Таких прямоугольников может быть бесконечное множество. Найти тот из них, площадь которого наибольшая.

Эту задачу можно решать элементарными средствами. Наиболее простое решение получим, если одну из сторон прямоугольника примем за $(4 - x)$ *см*. Тогда вторая сторона будет $(4 + x)$ *см*, а площадь $S = (4 - x)(4 + x) = 16 - x^2$.

Очевидно, что наибольшей площадь будет при $x = 0$, то есть, когда все стороны прямоугольника по 4 *см*.

После изучения свойств квадратной функции эту задачу можно решить другим способом, более естественным и понятным для учащихся. Обозначим одну сторону прямоугольника через x *см*, тогда вторая сторона будет $(8 - x)$ *см*, а площадь его $S = x(8 - x) = 8x - x^2$. Требуется исследовать этот квадратный многочлен, рассматриваемый на отрезке $[0; 8]$.

В результате обычных стандартных преобразований получим, что этот многочлен имеет наибольшее значение при $x = 4$.

Используя понятие производной, мы несколько быстрее и проще решим эту задачу, так как легче можно исследовать функцию $S = 8x - x^2$; $S' = 8 - 2x$, значит, $S = 0$ при $x = 4$. $S'(x < 4) > 0$; $S'(x > 4) < 0$, следовательно, при $x = 4$ данная функция принимает максимальное значение.

Безусловно, учащиеся должны понять и усвоить применение производной к отысканию точек экстремума функций. Пусть даже решение некоторых задач с применением производной и не является рациональным, но учащиеся должны знать этот, вполне доступный для них единый способ. Ведь при решении элементарными средствами каждый новый тип задач требует и новых приемов их решения, а нередко такие решения носят весьма искусственный характер.

Учащихся нужно обучать достаточно общим способам решения большой группы задач или примеров. Большую пользу оказывают и даваемые учителем всевозможные правила, практические советы, особенно по вопросу отыскания решения. Например, для отыскания решений задач на вычисление дроби (процента) от числа и числа по его дроби, задач на пропорциональное деление целесообразно приучить учащихся данную в условии величину выражать в частях (процентах); при решении задач на построение многоугольников полезно, хотя и не всегда, применять «идею вспомогательного треугольника» и т. п.

Учителю необходимо собирать, систематизировать, обобщать подобные практические советы по решению определенного вида задач и примеров и добиваться, чтобы учащиеся применяли их. Но нужно предостерегать от шаблонного использования этих рекомендаций всегда и везде. Поэтому после решения нескольких упражнений, подтверждающих определенную рекомендацию, решаем 1—2 упражнения, для которых известные ранее способы решения являются нерациональными.

Общие способы решений упражнений должны стать прочным достоянием учащихся, но наряду с этим должно быть и умение использовать особенности каждого частного упражнения, позволяющие решить его проще.

9. Не требуется доказывать, что выбор способа решения зависит от условия решаемого упражнения. Иногда кажущиеся незначительными изменения в условии упражнения требуют применения совершенно нового способа решения, подчас существенно отличающегося от первоначального. Сравним, например, решения следующих двух уравнений:

а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$ и б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

Применяя формулу

$$\operatorname{tg}(x + 2x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x},$$

в первом случае получим:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(x + 2x)(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x) - \operatorname{tg} 3x =$$
$$= \operatorname{tg} 3x(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x - 1) = -\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0$$

Имеем три простейших уравнения:

$$\operatorname{tg} x = 0; \quad x = k\pi.$$

$$\operatorname{tg} 2x = 0; \quad x = k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{tg} 3x = 0; \quad x = k \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Анализируя полученные значения для x, найдем, что $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$.

Во втором случае будем иметь: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x) + \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x (2 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)$. Преобразовывать выражение $2 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x$ в произведение трудно и нецелесообразно. Уравнение решаем так:

$$\operatorname{tg} 3x (2 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x) = 0;$$

1) $\operatorname{tg} 3x = 0$; $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$.

2) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 2$; $\operatorname{tg} x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2$; $\operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x$;

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}$; $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$.

Рассмотрим еще, например, две задачи на построение, которые на первый взгляд несущественно отличаются друг от друга:

а) Построить окружность, касающуюся данной прямой PQ и данной окружности $(O; OA)$ в заданной на ней точке A.

б) Построить окружность, касающуюся данной прямой PQ в заданной на ней точке M и данной окружности $(O; R)$.

Сравнивая их решения[1], видим, что даже при внешне несущественном отличии в условии задач требуются совершенно разные способы решения.

§ 5. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ ВОПРОСА ЗАДАЧИ

1. При выборе способа решения существенное значение имеет вопрос задачи. Поэтому следует обращать внимание на формулировку вопроса задачи, чтобы не находить величин, отыскание которых не является необходимым для решения задачи. Рассмотрим задачу:

С двух участков общей площадью в 357 *га* собрали урожай картофеля в среднем по 20 *т* 8 *ц* с 1 *га*. Определить

---

[1] А. А. Мазаник. Задачи на построение по геометрии в восьмилетней школе, изд-во «Народная асвета», Минск, 1967.

площадь каждого участка, если известно, что с одного участка собрали на 21 008 *ц* больше, чем с другого.

Рекомендуется такое решение этой задачи[1]:

Предварительно надо узнать урожай, полученный с двух участков: 20 *т* 8 *ц* = 208 *ц*; 208 · 357 = 74 256 (*ц*); затем делим его на две части, из которых одна больше другой на 21 008 *ц*.

Но в этой задаче не обязательно находить, сколько картофеля собрано с обоих участков. Можно решить задачу, определив, на сколько площадь одного участка больше площади другого: 21 008 : 208 = 101 (*га*), а затем уже легко определить площадь каждого участка по их сумме и разности.

Мы видим, что решение может быть значительно упрощено, если учитывать конкретный вопрос задачи.

В этом отношении поучительно решение следующей задачи[2]: За два года колхоз выдал на трудодни 630 *т* зерна. Во второй год выдано на 126 *т* больше, чем в первый. За первый год колхозники выработали 126 000 трудодней и столько же за второй год. На сколько увеличилась выдача зерна на трудодень?

1) Чему равна удвоенная выдача зерна на трудодни за первый год?

$$630 - 126 = 504 \ (т).$$

2) Чему равна выдача зерна на трудодни за первый год?

$$504 : 2 = 252 \ (т).$$

3) Чему равна выдача зерна на трудодни за второй год?

$$252 + 126 = 378 \ (т).$$

4) Сколько выдано зерна на трудодень в первом году?

$$252\,000 : 126\,000 = 2 \ (кг).$$

5) Сколько выдано зерна на трудодень во втором году?

$$378\,000 : 126\,000 = 3 \ (кг).$$

6) На сколько увеличилась выдача зерна на трудодень?

$$3 - 2 = 1 \ (кг).$$

Ответ. На 1 *кг*.

---

[1] Е. С. Березанская. Методика арифметики, Учпедгиз, М., 1955.

[2] С. А. Пономарев. Задачник-практикум по арифметике, Учпедгиз, М., 1961.

Задачу можно решить значительно проще. Нам не нужно знать, сколько зерна выдавали на трудодень в первый и второй год, а требуется найти, на сколько увеличилась выдача зерна на трудодень. Так как число трудодней, которое выработали колхозники во второй год, такое же, как и в первый год, кроме того, известно, что во второй год выдано на 126 *т* зерна больше, чем в первый, то для ответа на вопрос задачи достаточно разделить 126 000 *кг* зерна на число трудодней:

$$126\,000 : 126\,000 = 1 \ (\text{кг}).$$

Имеющееся в условии данное «за два года колхоз выдал на трудодни 630 *т* зерна» является лишним. Наличие лишних данных очень часто определяет нерациональное решение. Например, после повторения с учащимися изменения разности с изменением уменьшаемого и вычитаемого, когда это свойство закрепили в процессе решения соответствующих примеров и простейших задач, была предложена задача:

На автомобильном заводе за определенное время изготовлено 2700 легковых автомашин, грузовых автомашин изготовлено на 800 больше. За это же время отправлено с завода 2300 легковых автомашин, а грузовых—на 300 меньше. Каких машин осталось на заводе больше и на сколько?

Все учащиеся дали примерно следующее решение:

1) Сколько грузовых автомашин изготовил завод?

$$2700 + 800 = 3500.$$

2) Сколько грузовых автомашин отправлено с завода?

$$2300 - 300 = 2000.$$

3) Сколько легковых автомашин осталось на заводе?

$$2700 - 2300 = 400.$$

4) Сколько грузовых автомашин осталось на заводе?

$$3500 - 2000 = 1500.$$

5) На сколько больше осталось на заводе грузовых автомашин, чем легковых?

$$1500 - 400 = 1100.$$

Если же эту задачу сформулировать, убрав лишние данные, следующим образом: «На автомобильном заводе за определенное время грузовых автомашин изготовлено на 800 больше, чем легковых. За это же время с завода отправлено грузовых автомашин на 300 меньше, чем легковых. Каких машин осталось на заводе больше и на сколько?», то теперь учащиеся решают ее в одно действие: $800 + 300 = 1100$, так как разность между числом изготовленных грузовых автомашин и числом легковых была 800, а затем она еще увеличилась на 300.

2. И в алгебре при решении примеров мы нередко встречаемся с аналогичным положением. Пусть, например, требуется найти вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x - i = yi, \\ x - i^2 = 2a - y, \end{cases}$$

где a — комплексный параметр.

Вот одно из решений этого примера[1]:

Решив два данных уравнения относительно x и y, найдем:

$$x = \frac{2ai}{1+i} = a(1+i); \quad y = \frac{2a-1-i}{1+i} = a - 1 - ai.$$

Пусть $a = m + ni$. Тогда $x = (m + ni)(1 + i) = m - n + i(m + n)$; $y = m + ni - 1 - (m + ni)i = m + n - 1 + i(n - m)$.

Чтобы x и y были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы мнимые части чисел x и y равнялись нулю, то есть, чтобы $\begin{cases} m + n = 0, \\ m - n = 0. \end{cases}$ Это дает $m = n = 0$ и, следовательно, $a = m + ni = 0$. Итак, получаем: $x = 0$, $y = -1$.

Данный пример можно решить значительно проще, если учесть, что требуется найти вещественные значения для x и y. Из первого уравнения получим, что $x = 0$ и $y = -1$. Чтобы эти значения неизвестных удовлетворяли и второму уравнению, нужно, чтобы $0 - i^2 = 2a - (-1)$, то есть $1 = 2a + 1$, откуда $a = 0$.

Итак, система имеет единственное вещественное решение $x = 0$, $y = -1$ при $a = 0$.

Большое место в алгебре занимают примеры на вычисление числовых значений алгебраических выражений. Такие примеры формулируются по-разному.

---

[1] К. У. Шахно. Пособие по математике для поступающих в вузы, Минск, 1962.

Иногда указывается, что предварительно требуется упростить данное алгебраическое выражение, как например[1]:

№ 776_4. Найти числовое значение выражения, предварительно упростив его:

$$(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a^2 - 2ab + b^2) \quad \text{при} \quad a = -4\frac{3}{4},$$

$$b = 3{,}25.$$

Данное выражение легко и быстро упрощается: $(a-b)^3 : (a-b)^2 = a - b$, и вычисление числового значения оказывается весьма простым: $a - b = -4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4} = -8$.

№ 778_4. Упростить и найти числовое значение:

$$\frac{(c+d)(-a-b)-(c-b)(d-a)}{(ab+bc+cd+ad)\cdot abcd}$$

при $a = -3$, $b = -4$, $c = 5$, $d = 6$.

$$\frac{(c+d)(-a-b)-(c-b)(d-a)}{(ab+bc+cd+ad)\cdot abcd} =$$

$$= \frac{-ac-ad-bc-bd-cd+ca+bd-ab}{(ab+bc+cd+ad)\cdot abcd} =$$

$$= \frac{-(ad+bc+cd+ab)}{(ab+bc+cd+ad)\cdot abcd} = -\frac{1}{abcd} = -\frac{1}{360}.$$

Все подобные примеры решаются с обязательным предварительным упрощением исходного алгебраического выражения, независимо от рациональности решения, если даже непосредственная подстановка числовых значений букв и приводит к более простому решению, как например, в № 778_4.

$$\frac{11\cdot 7 - 9\cdot 9}{(12-20+30-18)\,360} = \frac{-4}{4\cdot 360} = -\frac{1}{360}.$$

Конечно, сами тождественные преобразования должны выполняться рационально. В том же примере № 778_4 не следует выражение $(ab+bc+cd+ad)$ в знаменателе раскладывать на множители, ибо тогда придется и числитель раскладывать на множители, хотя эти выражения целиком сокращаются, что существенно упрощает решение.

[1] Номера примеров указаны по «Сборнику задач по алгебре» П. А. Ларичева, ч. I, изд. 1951 г.

Но если аналогичные примеры сформулированы без указания на необходимость предварительного упрощения исходного алгебраического выражения, то в этом случае вначале нужно выяснить, следует ли преобразовывать алгебраическое выражение или же сразу заменить все буквы их числовыми значениями. Рассмотрим два примера.

№ 779_4. Найти числовое значение алгебраического выражения

$$\frac{1-a^2}{(2+ax)^2-(a-x)} \text{ при } a=0{,}5 \text{ и } x=-2.$$

При беглом анализе структуры примера замечаем, что существенных упрощений при тождественных преобразованиях не получим. Поэтому сразу подставляем значения букв, производя некоторые вычисления устно. Получим:

$$\frac{1-0{,}25}{(2-1)^2-(0{,}5+2)}=\frac{0{,}75}{1-2{,}5}=\frac{0{,}75}{-1{,}5}=-0{,}5.$$

№ 162. Вычислить числовое значение алгебраического выражения

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy} \quad \text{при} \quad x=1, \quad y=\frac{3}{4}.$$

Числитель можно преобразовать как разность квадратов, что позволит существенно упростить исходное выражение. Поэтому начинаем с тождественных преобразований:

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy}=\frac{2x\cdot 2y}{4xy}=1.$$

Иногда целесообразно выполнить преобразование части условия примера, так как весьма трудно увидеть возможность упрощения после тождественных преобразований всего примера.

Требуется определить числовое значение выражения

$$a^4-4a^3-4a^2+16a-8 \text{ при } a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Непосредственная подстановка значения a в данное выражение приводит к очень громоздким вычислениям. Но вычисления значительно упрощаются, если предварительно разложить на множители сумму первых четырех членов:

$$a^4-4a^3-4a^2+16a=a^3(a-4)-4a(a-4)=$$
$$=(a-4)\,a\,(a^2-4)=(a-4)(a-2)\,a\,(a+2).$$

Теперь уже можно непосредственно подставить значение a, объединяя попарно $(a-4)(a+2)$ и $(a-2)a$. Получим: $[(\sqrt{2}+\sqrt{3}-3)(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3)]\cdot[(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)]-8=[(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-9]\cdot[(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1]-8=(2\sqrt{6}-4)(2\sqrt{6}+4)-8=(24-16)-8=0$.

3. Выделим отдельно вопросы преобразования алгебраических сумм тригонометрических функций в произведения. С такими преобразованиями учащиеся встречаются при доказательстве различных тождеств, при решении тригонометрических уравнений, при решении геометрических задач с применением тригонометрии. В зависимости от задания, преобразование суммы в произведение может выполняться по-разному.

Часть учащихся обязательно преобразовывает ответ к виду, удобному для логарифмирования. Другие же не упрощают ответа, оставляя его в полученном виде, даже при всей очевидности упрощений.

По нашему мнению, для правильного разрешения этого вопроса следует исходить из рациональности решения. Если нужно вычислить числовое значение выражения $1+\sin x+\cos x$ при заданном угле $x=\alpha$, то наиболее простой способ — найти сумму этих трех чисел: $1+\sin\alpha+\cos\alpha$. Преобразование этого выражения в произведение никаких упрощений в вычисления не внесет. Даже в случае вычисления числового значения выражения $1+\cos\alpha$ нецелесообразно преобразовывать его к виду $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ при всей простоте этого преобразования, ибо легче и быстрее найти $1+\cos\alpha$, чем $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, зная угол α.

Но получив ответ, содержащий, например, выражение вида $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, целесообразно выполнить преобразование с целью упрощения:

$$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогичным образом объясняем целесообразность преобразования выражений вида:

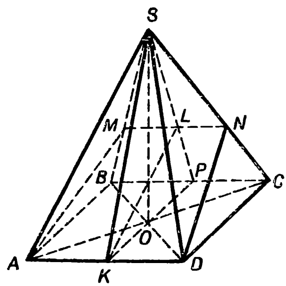
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-$$

$$-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha.$$

Поэтому считаем существенным недостатком, если ученик, например, выражение $S=a^2\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$ не приводит к виду $S=2a^2\sin\alpha$.

При оценке рациональности решения задач по геометрии с применением тригонометрии нельзя не учитывать сложности тождественных преобразований, выполняемых при упрощении ответов или промежуточных результатов. Рассмотрим, в качестве примера, различные решения задачи:

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, двугранный угол при основании равен α. Через ребро этого двугранного угла проведена плоскость, делящая его пополам. Определить площадь получившегося сечения (черт. 14).



Черт. 14.

Так как пояснения к чертежу и обоснования просты и одинаковы для всех решений, сравним лишь вычисления, выполняемые при следующих трех способах решения:

$$\angle SKP=\angle SPK=\alpha;\quad \angle SKL=\angle LKP=\frac{\alpha}{2};$$

$$\angle KLP=180^\circ-\alpha-\frac{\alpha}{2}=180^\circ-\frac{3}{2}\alpha;\quad KP=a.$$

I способ

Из $\triangle KLP$ $\dfrac{KL}{\sin\alpha}=\dfrac{KP}{\sin\left(180^\circ-\frac{3}{2}\alpha\right)}$; $KL=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

Из $\triangle SKL$ $\dfrac{SL}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{SK}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$; $\dfrac{SL}{SK} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

Но $SK = SP$ и из подобия треугольников SMN и SBC $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{SL}{SP} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$, откуда $MN = a\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$, тогда

$$AD + MN = a + a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \frac{a}{\sin\frac{3}{2}\alpha}\left(\sin\frac{3}{2}\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{\sin\frac{3}{2}\alpha} 2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{a}{\sin\frac{3}{2}\alpha}\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{3}{2}\alpha}.$$

II способ

Из того же треугольника KLP найдем LP и KL:

$$\frac{LP}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin\frac{3}{2}\alpha};\quad LP = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha}.$$

Как и в предыдущем решении $KL = \dfrac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

$$SP = \frac{a}{2\cos\alpha};\qquad SL = SP - LP = \frac{a}{2\cos\alpha} - \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha} =$$

$$= a\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{2\cos\alpha\cdot\sin\frac{3}{2}\alpha} =$$

$$= a\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{2\cos\alpha\sin\frac{3}{2}\alpha} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha\sin\frac{3}{2}\alpha};$$

$$\frac{MN}{BC}=\frac{SL}{SP}=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\alpha}{2\cos\alpha\sin\frac{3}{2}\alpha\cdot a}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha};$$

$$MN=a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha}.$$

Дальнейшее решение такое же, как и при первом способе решения.

III способ

Применим свойство биссектрисы угла треугольника:

$$\frac{SK}{KP}=\frac{SL}{LP}.$$

Обозначив $SL=x$, получим уравнение:

$$\frac{x}{\frac{a}{2\cos\alpha}-x}=\frac{\frac{a}{2\cos\alpha}}{a}=\frac{1}{2\cos\alpha},\ \text{откуда}$$

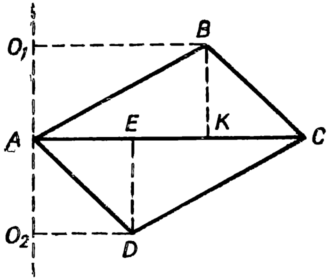
$$2x\cos\alpha=\frac{a}{2\cos\alpha}-x;\ x(2\cos\alpha+1)=\frac{a}{2\cos\alpha};$$

$$x=\frac{a}{2\cos\alpha}:(1+2\cos\alpha).$$

$$\frac{MN}{a}=\frac{x}{\frac{a}{2\cos\alpha}}=\frac{1}{1+2\cos\alpha};\ MN=\frac{a}{1+2\cos\alpha}.$$

Продолжение решения такое же, как и в предыдущих способах. Но если найденное для MN выражение привести к выражению, полученному в первом способе решения, то тогда третий способ становится весьма сложным. Выполняемые при этом преобразования носят весьма искусственный характер.

4. Рассмотрим класс задач на тела вращения, полученные от вращения треугольников около оси, проходящей через одну из его вершин. В большинстве таких задач требуется определить объем и поверхность соответствующего тела. Поэтому целесообразно вычислять объем, применяя



Черт. 15.

лемму: объем тела, полученного при вращении треугольника вокруг оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через его вершину, но не пересекающей противоположной стороны, равен произведению поверхности, образуемой противоположной стороной, на одну треть высоты, опущенной на эту сторону.

Пусть требуется вычислить объем тела, полученного при вращении параллелограмма около оси, проходящей через вершину острого угла, перпендикулярно большей диагонали, если стороны параллелограмма 70 *см* и 42 *см*, а угол между ними 120° (черт. 15). $AB = 70$ *см*, $BC = 42$ *см*; $\angle ABC = 120°$, $O_1O_2 \perp AC$. Требуется найти V — объем тела вращения.

Учащиеся обычно приводят такое решение.

Тело вращения представляет собой два усеченных конуса, полученные при вращении трапеций O_1BCA и $ACDO_2$, из которых удалены два конуса, полученные при вращении треугольников AO_1B и AO_2D.

Обозначим объемы соответствующих тел через V_{BC}, V_{DC}, V_{AB} и V_{AD}, тогда $V = V_{BC} + V_{DC} - V_{AB} - V_{AD}$.

Для вычисления объемов этих тел определим вначале линейные элементы. Из $\triangle ABC$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120° = 4900 + 1764 + 2940 = 9604 = 98^2$; $AC = 98$ *см*.

$$p = \frac{1}{2}(70 + 42 + 98) = 105 \ (см).$$

$$BK = \frac{2}{98}\sqrt{105 \cdot 7 \cdot 35 \cdot 63} = \frac{1}{49} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{3} =$$
$$= 15\sqrt{3} \ (см).$$

Из $\triangle ABK$ $AK = \sqrt{70^2 - (15\sqrt{3})^2} = \sqrt{4900 - 675} = \sqrt{4225} = 65$ (*см*).

$$KC = AC - AK = 98 - 65 = 33 \ (см).$$

$\triangle ADE = \triangle BKC$, как прямоугольные, у которых $AD = BC$ и $\angle CAD = \angle ACB$, следовательно, $DE = BK = 15\sqrt{3}$ *см*, $AE = KC = 33$ *см*.

Теперь вычисляем объемы всех четырех тел:

$$V_{BC} = \frac{1}{3} \cdot 15\sqrt{3}\pi (98^2 + 98 \cdot 65 + 65^2) =$$

$= 5\sqrt{3}\pi (9604 + 6370 + 4225) = 100\,995\sqrt{3}\pi$ (*см*^{3}) и т. д.

Получим: $V = 100\,995\sqrt{3}\pi + 69\,635\sqrt{3}\pi - 21\,125\sqrt{3}\pi - 5445\sqrt{3} \cdot \pi = 144\,060\sqrt{3}\pi$ (*см*^{3}).

О т в е т. $V = 144\,060\sqrt{3}\pi$ *см*^{3} $\approx 0,78$ *м*^{3}.

Это решение может быть упрощено. Например, для вычисления высоты BK можно воспользоваться другой формулой площади треугольника: $S_\Delta = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$, тогда получим:

$$BK = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 70 \cdot 42 \cdot \sin 120°}{98} = 15\sqrt{3} \text{ (}см\text{)}.$$

Более того, решение существенно упрощается, если решать эту задачу в общем виде. Обозначим $AC = R$; $O_1B = r_1$; $O_2D = r_2$; $BK = DE = h$, причем $r_1 + r_2 = R$.

Получим: $V = V_{BC} + V_{DC} - V_{AB} - V_{AD} = \frac{1}{3}\pi \cdot h(R^2 + Rr_1 + r_1^2) + \frac{1}{3}\pi \cdot h(R^2 + Rr_2 + r_2^2) - \frac{1}{3}\pi h r_1^2 - \frac{1}{3}\pi h r_2^2 = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + Rr_1 + Rr_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot h[2R^2 + R(r_1 + r_2)] = \pi h R^2$.

Подставив числовые данные, получим:

$$V = \pi \cdot 15\sqrt{3} \cdot 98^2 = 144\,060\sqrt{3}\pi \text{ (}см^3\text{)}.$$

Очевидно, что последнее решение значительно проще первого.

Но если в этой же задаче требуется определить объем и поверхность тела вращения, то тогда уже нельзя обойтись без вычисления r_1 и r_2. Объем лучше вычислять, используя лемму об объеме тела, полученного при вращении треугольника, что оказывается не сложнее, чем приведенное ранее решение в общем виде. Действительно, если предварительно найти площади поверхностей, полученных от вращения BC и DC, то достаточно найти длины перпендикуляров, опущенных из точки A на продолжения сторон BC и DC.

$$h_{BC} = AB \cdot \sin 60^\circ = 70 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 35\sqrt{3} \text{ (}см\text{)};$$

$$h_{DC} = 42 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3} \text{ (}см\text{)}.$$

Так как $S_{BC} = 6846\pi$ $см^2$ и $S_{DC} = 9170\pi$ $см^2$, то

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6846\pi \cdot 35\sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot 9170\pi \cdot 21\sqrt{3} =$$

$$= 144\,060\sqrt{3}\pi \text{ (}см^3\text{)}.$$

5. Решение большинства задач сводится к последовательному решению отдельных простых задач. Все сказанное о влиянии вопроса задачи на выбор рационального способа решения относится и к этим вспомогательным промежуточным задачам. Так как ответы на промежуточные задачи используются как данные величины при решении последующих задач, то возможны упрощения решения при удачном представлении промежуточных ответов.

Напомним общеизвестное доказательство теоремы об объеме усеченной пирамиды. Если для вычисления высоты достроенной пирамиды применять формулу $\frac{B}{b} = \frac{(H+x)^2}{x^2}$, соответствующую теореме об отношении площадей сечений пирамиды плоскостями, параллельными основанию, то доказательство оказывается весьма громоздким. Более рациональное доказательство получаем, применяя эту теорему, записанную в виде $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{H+x}{x}$.

Рассмотрим еще задачу:

Определить объем конуса, зная его высоту H и боковую поверхность S.

Для ее решения не обязательно находить радиус основания конуса, достаточно найти его квадрат, что несколько упрощает все решение.

При решении последней задачи мы встречаемся с иррациональным числом π. Оно входит во все формулы длины окружности, площади круга, объемов и поверхностей тел вращения. Если исходные величины заданы в общем виде, как в только что рассмотренной задаче, то незачем в ответе и в промежуточных вычислениях заменять π его числовым значением. Если исходные данные числовые, то и в этом случае не всегда нужно ответ задачи, и особенно промежуточные ответы, вычислять до конца. В различных сборниках геометрических задач нередко можно встретить такие ответы: площадь круга равна 36π *см*^{2}; объем цилиндра равен 225π *см*^{3} и т. п. Вначале следует установить, сколь необходимо производить эти вычисления, нельзя ли в промежуточных выкладках выражать определяемые величины через π, не подставляя его числового значения. Возьмем, например, задачу:

Площади оснований усеченного конуса 4 *м*^{2} и 16 *м*^{2}. Через середину его высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найти площадь сечения.

Чтобы определить радиус r круга, получившегося в сечении, нужно знать значения r_1 и r_2 — радиусов верхнего и нижнего оснований. Легко находим $r_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ *м* и $r_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$ *м*. Определять числовые значения этих радиусов, подставляя вместо π его значение с той или иной степенью точности, нецелесообразно, так как мы можем найти $r = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ (*м*), а при нахождении площади сечения число π сокращается:

$$S_{\text{сеч.}} = \pi \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 9 \ (\text{м}^2).$$

Заметим, что решение этой задачи с применением теоремы об отношении площадей сечений конуса плоскостями, параллельными основанию, оказывается для учащихся более сложным по сравнению с приведенным, хотя числовые данные подобраны так, что высота достроенного конуса равна высоте усеченного конуса, что несколько упрощает второе решение.

6. Таким образом, при отыскании наиболее простого решения нужно обращать внимание на вопрос задачи, чтобы не находить величин, отыскание которых не является необходимым. Так как многие задачи и примеры требуют решения ряда простых задач или выполнения нескольких

действий, то необходимо приучать учащихся критически относиться и к решению этих вспомогательных простых задач или примеров. При этом нужно учитывать, что над получаемыми промежуточными ответами в дальнейшем производятся те или иные операции.

Но нельзя слепо следовать этому выводу, ибо в отдельных конкретных случаях можно получить более рациональное решение как раз при отступлении от этой рекомендации.

Например, при решении составлением уравнения задачи: «Требуется перевезти на противоположный берег некоторое количество людей. Если сажать по 4 человека в лодку, то 6 останется без места, если же по 6, то одна лодка будет свободной. Сколько было человек?» лучше за неизвестное принять не число всех переправлявшихся людей, а число лодок. В этом случае и составление уравнения, и само уравнение значительно упрощается.

Это замечание относится и к решению примеров. Рассмотрим уравнение, которое обычно решается на кружковых занятиях, $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$, где $a>0$. Выполняя дважды почленное возведение в квадрат, данное уравнение преобразуется к виду: $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$.

Учащиеся не могут выразить x через a из полученного уравнения 4-й степени. Но уравнение можно решить, если предварительно выразить a через x: $a^2-a(2x^2+1)+$ $+(x^4-x)=0$;

$$a=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^4+4x^2+1-4x^4+4x}}{2}=$$

$$=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^2+4x+1}}{2}=\frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}.$$

Решая теперь два квадратных уравнения

$$2a=2x^2+1+2x+1 \text{ и } 2a=2x^2+1-2x-1,$$

найдем четыре значения x.

Рассмотрим еще одно подобное уравнение:

$$x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0.$$

Решать его лучше всего не относительно x, а относительно $\sqrt{3}$. Имеем: $x(\sqrt{3})^2+(2x^2+1)\sqrt{3}+(x^3-1)=0$, значит,

$$\sqrt{3} = \frac{-(2x^2+1) \pm \sqrt{4x^4+4x^2+1-4x^4+4x}}{2x} =$$

$$= \frac{-(2x^2+1) \pm (2x+1)}{2x}.$$

Решая получившиеся два квадратных уравнения, найдем все три корня исходного уравнения. Четвертое значение неизвестного $x = 0$ не удовлетворяет исходному уравнению.

§ 6. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ СТРУКТУРЫ УПРАЖНЕНИЯ И ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

1. Рассмотрим простой арифметический пример:

$$4\frac{3}{4} + 4\frac{7}{9} - 3\frac{1}{4} + 1\frac{5}{12} + 1\frac{7}{12} - 2\frac{7}{9}.$$

Если не обращать внимания на дробные части слагаемых, то такие примеры лучше всего решать, приводя все дроби к общему знаменателю, найдя предварительно результат действий над целыми числами. Получим:

$$5\,\frac{27+28-9+15+21-28}{36} = 5\frac{54}{36} = 6\frac{1}{2}.$$

Учитывая же дробные члены слагаемых, целесообразно применить переместительный и сочетательный законы сложения, в результате чего решение примера упростится:

$$\left(4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4}\right) + \left(4\frac{7}{9} - 2\frac{7}{9}\right) + \left(1\frac{5}{12} + 1\frac{7}{12}\right) =$$

$$= 1\frac{1}{2} + 2 + 3 = 6\frac{1}{2}.$$

Решение вторым способом значительно проще и понятнее для учащихся, так как все действия просты, кроме того, все вычисления могут быть выполнены устно.

Такое же положение и с раскрытием скобок при решении арифметических примеров. Сравним два одинаковых по структуре примера:

1) $2\frac{1}{12} - \left(1\frac{2}{7} - \frac{5}{12}\right)$ и 2) $5\frac{1}{3} - \left(1\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)$.

Во втором из них можно и не применять правила вычитания разности двух чисел, в то время как в первом примере применение этого правила существенно упростит вычисления.

Рассмотрим еще такой пример.

Требуется вычислить произведение трех чисел: a, b и c.

В зависимости от числовых значений сомножителей рациональными будут различные вычисления. Если $a = 329$, $b = 273$ и $c = 546$, то естественным и наиболее простым является обычное вычисление произведений столбиком. Вначале находим произведение $329 \cdot 273$, а затем умножаем его на 546.

При $a = 25$, $b = 273$ и $c = 4$ вычисления значительно упростятся, если применить переместительный и сочетательный законы для умножения: $25 \cdot 273 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 273 = 27\,300$.

Взяв $a = 1\frac{1}{11}$, $b = 1{,}125$ и $c = 3\frac{2}{3}$, их произведение вычисляем в обыкновенных дробях в одно действие:

$$1\frac{1}{11} \cdot 1{,}125 \cdot 3\frac{2}{3} = \frac{12 \cdot 9 \cdot 11}{11 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

А произведение $6{,}25 \cdot 0{,}023 \cdot 16$ проще всего вычислить так:

$$\left(6\frac{1}{4} \cdot 16\right) \cdot 0{,}023 = 100 \cdot 0{,}023 = 2{,}3.$$

В данной работе мы не останавливаемся на устном решении задач и примеров. Этот вопрос достаточно подробно рассмотрен в нашей работе «Устные упражнения в курсе математики средней школы» [1]. Подчеркнем лишь, что устные решения, особенно в сочетании с письменными, значительно упрощают решения упражнений. Вот как примерно должны выглядеть записи при решении примера на применение законов арифметических действий: $\left[13\frac{1}{6} - 10\frac{5}{12} : 5 + \left(2\frac{3}{8} + 3\frac{1}{2} + 4\frac{5}{8}\right) : 10\right] : 2 = \left(13\frac{1}{6} - 2\frac{1}{12} + 10\frac{1}{2} : 10\right) : 2 = \left(11\frac{1}{12} + 1\frac{1}{20}\right) : 2 = 12\frac{8}{60} : 2 = 6\frac{1}{15}$.

[1] Изд-во «Народная асвета», Минск, 1966.

Надо как можно больше решать хороших примеров, помогающих учащимся убедиться в полезности применения законов арифметических действий к упрощению вычислений, и выработать навыки применения рациональных приемов вычислений. В школе решают мало примеров на замену умножения делением и наоборот:

$$35\frac{14}{15} : \frac{7}{15} = 35\frac{14}{15} \cdot \frac{15}{7} = 5\frac{2}{15} \cdot 15 = 77;$$

$$39\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = 39\frac{2}{5} : 3 = 13\frac{2}{15};$$

$$15\frac{3}{7} : 0{,}25 = 15\frac{3}{7} \cdot 4 = 60\frac{12}{7} = 61\frac{5}{7};$$

$$27{,}36 \cdot 0{,}125 = 27{,}36 \cdot \frac{1}{8} = 27{,}36 : 8 = 3{,}42.$$

Правила, облегчающие арифметические вычисления, надо не только знать, но и уметь пользоваться ими. Нужно настойчиво вырабатывать у учащихся привычку, прежде чем решать пример, «прикидывать», что им выгодно делать и что невыгодно.

2. Рассмотрим теперь вопрос о двух формах записи решения арифметических и алгебраических примеров, называемых нами в дальнейшем способами: 1) отдельно по действиям; 2) последовательными преобразованиями, цепочкой. Нельзя указать какой из них является рациональным, не учитывая структуру примера и исходные данные.

Решение цепочкой состоит в том, что записи решения примера выполняются в виде последовательно расположенных тождественных преобразований, причем действия, требующие громоздких выкладок, выполняются отдельно от основных записей, а все остальные выполняются устно. Такое решение является рациональным по сравнению с решением по действиям, если почти все они могут быть выполнены устно и если адновременно можно выполнять несколько действий. Если же, например, для выполнения каждого действия нам понадобится переписать весь пример, то даже и в случае отсутствия действий, требующих записей в стороне от основных, решение цепочкой будет менее рациональным, чем решение по действиям.

При решении примеров на все действия с дробями цепочкой нередко в числителе и знаменателе основной дроби выделяются множители, которые сокращаются целиком или частично, в то время как при решении по действиям числитель и знаменатель вычисляются отдельно, а поэтому несокращенные множители сохраняются до конца вычислений, существенно усложняя решение. Приведем один пример:

$$\frac{\left[\frac{(a+b)^2}{4ab}-1\right]\cdot\left[\frac{(a-b)^2}{4ab}+1\right]}{\left[\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right]\cdot\left[\frac{(a-b)^2}{ab}+1\right]}:$$

$$:\frac{[(a^3+b^3)+3ab\,(a+b)]\cdot[(a^3-b^3)-3ab\,(a-b)]}{[(a+b)^3-3ab\,(a+b)]\cdot[(a-b)^3+3ab\,(a-b)]}=$$

$$=\frac{\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4ab}\cdot\frac{a^2-2ab+b^2+4ab}{4ab}}{\frac{a^2+2ab+b^2-ab}{ab}\cdot\frac{a^2-2ab+b^2+ab}{ab}}\times$$

$$\times\frac{(a+b)\,(a^2+2ab+b^2-3ab)\cdot(a-b)\,(a^2-2ab+b^2+3ab)}{(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)\cdot(a^3-b^3-3a^2b+3ab^2)}=$$

$$=\frac{(a-b)^2\,(a+b)^2\cdot ab\cdot ab\cdot(a+b)\,(a^2-ab+b^2)\,(a-b)\,(a^2+ab+b^2)}{4ab\cdot 4ab\cdot(a^2+ab+b^2)\,(a^2-ab+b^2)\,(a+b)^3\cdot(a-b)^3}=\frac{1}{16}.$$

При таком решении часть преобразований выполняется устно. Более того, здесь уже трудно установить отдельные действия, рассматривать ли, например, $(a+b)^3-3ab(a+b)$ как одно действие или как три отдельных действия:

1) $3ab\,(a+b)=3a^2b+3ab^2$; 2) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

3) $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(3a^2b+3ab^2)=a^3+b^3$.

Иногда и при решении примеров на все действия с радикалами трудно выделить отдельные действия. Даже на олимпиадах многие учащиеся испытывают затруднения при решении примера:

$$\frac{(\sqrt{63}-\sqrt{18})\,(\sqrt{28}+\sqrt{8})\,(\sqrt{45}+\sqrt{20})\,(\sqrt[3]{24}-\sqrt{8})}{(\sqrt[3]{81}-\sqrt{18})\cdot\sqrt{4-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{11}}}.$$

Они пытаются перемножать выражения, заключенные в отдельные скобки и получают настолько громоздкие выражения, что запутываются в своих же записях, и не могут довести решение до конца. Но этот пример просто решается цепочкой:

$$\frac{(3\sqrt{7}-3\sqrt{2})(2\sqrt{7}+2\sqrt{2})(3\sqrt{5}+2\sqrt{5})(2\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})}{(3\sqrt[3]{3}-3\sqrt{2})\cdot\sqrt{16-11}}=$$

$$=\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{2})\,2(\sqrt{7}+\sqrt{2})\cdot 5\sqrt{5}\cdot 2(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})}{3(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{5}}=$$

$$=20\,(7-2)=100.$$

Чтобы знакомить учащихся с решением примеров «цепочкой», следует подбирать такие примеры, для которых применение метода последовательных преобразований действительно упрощает решение. Учителю нужно иметь несколько подобных примеров, с помощью которых ему удастся убедить учащихся в большой пользе нового способа решения. Приведем один из таких примеров из «Сборника задач и упражнений по арифметике» Е. С. Березанской:

$$\frac{0{,}8:\left(\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)}{0{,}64-\frac{1}{25}}+\frac{\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}+1{,}2\cdot 0{,}5:\frac{4}{5}.$$

Этот пример такой, что при каждом переписывании можно производить действия над многими числами. Числовые данные допускают применение устных вычислений, отпадает необходимость в делении на 1. Решение выглядит так:

$$\frac{0{,}8:1}{0{,}6}+\frac{1:\frac{4}{7}}{3\frac{11}{36}\cdot 2\frac{2}{17}}+0{,}6:\frac{4}{5}=\frac{4}{3}+\frac{\frac{7}{4}}{\frac{119\cdot 36}{36\cdot 17}}+\frac{3\cdot 5}{5\cdot 4}=$$

$$=1\frac{1}{3}+\frac{7}{4\cdot 7}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=2\frac{1}{3}.$$

Полезно сравнить это решение с решением по действиям. Сравнение подобных двух записей решения убеждает учащихся в полезности и необходимости применения способа последовательных преобразований для решения примеров. Затраченное на ознакомление с этим методом время окупается экономией времени при последующем решении некоторых арифметических примеров, а самое главное, облегчает изучение алгебраического материала.

Знакомим учащихся и с таким решением примеров, когда выгодно сочетать оба способа: по действиям и цепочкой. Например, требуется вычислить:

$$\frac{\left(1\frac{16}{75}+2{,}46\right):(55{,}1:5)}{1\frac{2}{3}:1\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{2}{15}+0{,}15\right)}+\frac{9{,}72-6\frac{13}{25}}{40{,}5\cdot\frac{2}{9}:9}.$$

В этом примере лучше всего применить метод последовательных преобразований, а сложения в скобках, требующие выкладок, затруднительных для многих учащихся, выполняем отдельно.

Аналогично поступаем и при решении примеров вида:

$$\left\{1-\left[x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2\right\}^{-1}\cdot(1+x^2)^{-1}\cdot\left[x^0\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\right.$$
$$\left.-x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Отдельным действием преобразовываем выражение в фигурных скобках:

$$1-\left[x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2=1-x^2(1+x^2)^{-1}=$$
$$=1-\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Теперь легко и быстро решаем весь пример:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{-1}\cdot(1+x^2)^{-1}\cdot\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]=$$
$$=(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}.$$

Навыки в тождественных преобразованиях арифметических выражений закрепляются при вычислении числовых значений алгебраических выражений, а впоследствии этот способ применяется при решении примеров из разных разделов курса алгебры, включая преобразования тригонометрических выражений. Упражнения должны быть такими, чтобы применение способа последовательных преобразований действительно упрощало решение.

Иногда при решении арифметических примеров можно встретиться с целесообразностью решения примера по действиям, но некоторую часть его вычислить цепочкой. Например, в 1965/66 учебном году экзаменационные работы для восьмых классов школ РСФСР содержали примеры вида [1]:

а) $\dfrac{4{,}58+6{,}275:(1{,}25^3-1{,}25^2\cdot 0{,}45)}{49{,}533:16{,}5-2{,}522}$;

б) $\dfrac{42{,}5904:6{,}08-1{,}245}{(18{,}2^2-5{,}6^2+23{,}8\cdot 7{,}4):5{,}95+35{,}2}$.

Каждый из этих примеров лучше всего решать по действиям, но выражения, стоящие в скобках, проще вычислять методом последовательных преобразований. Используя знания алгебры, в частности разложение на множители, можно существенно упростить вычисления: вместо 4—5 сравнительно громоздких действий все преобразования можно провести устно, записывая лишь промежуточные результаты. Действительно:

а) $1{,}25^3-1{,}25^2\cdot 0{,}45=1{,}25^2\cdot(1{,}25-0{,}45)=$
$=1{,}25\cdot 1{,}25\cdot 0{,}8=1{,}25$;

б) $18{,}2^2-5{,}6^2+23{,}8\cdot 7{,}4=(18{,}2-5{,}6)\cdot(18{,}2+5{,}6)+$
$+23{,}8\cdot 7{,}4=23{,}8\cdot(12{,}6+7{,}4)=23{,}8\cdot 20=476$.

В заключение заметим, что учащиеся, умеющие оценивать рациональность различных методов решения, легко могут устно устанавливать наиболее рациональные пути и способы преобразований. В результате они находят подчас весьма оригинальные решения. Рассмотрим несколько примеров:

$$\frac{\left(\frac{7}{2000}+0{,}0065\right):0{,}001}{\left(\frac{3}{3125}+0{,}00004\right)\cdot\frac{1}{0{,}0001}}=\frac{\frac{7}{2}+6{,}5}{\frac{240\cdot 4}{25\cdot 4}+0{,}4}=\frac{10}{9{,}6+0{,}4}=1;$$

$$\left(\frac{2a+b}{a^2-4b^2}-2a-b\right)\cdot\frac{2a+4b}{2a+b}-\frac{2}{a-2b}=$$
$$=\frac{(2a+b)(1-a^2+4b^2)}{(a+2b)(a-2b)}\cdot\frac{2(a+2b)}{2a+b}-\frac{2}{a-2b}=$$
$$=\frac{2-2a^2+8b^2-2}{a-2b}=\frac{-2(a^2-4b^2)}{a-2b}=-2(a+2b).$$

---

[1] «Математика в школе», 1967, № 1.

3. Аналогичным образом поступаем и при установлении вида дробей (обыкновенных или десятичных), в которых целесообразно решать примеры на все действия с обыкновенными и десятичными дробями. Чтобы указать, когда и в каких дробях целесообразнее решать такие примеры, нужно внимательно изучать их структуру и заданные числа. Ведь многие обыкновенные дроби нельзя обратить в конечную десятичную дробь, а иногда конечные десятичные дроби весьма неудобно обращать в обыкновенные.

Чтобы вычислить, например, выражение

$$7{,}144 : 2{,}35 - 2{,}85 \cdot 0{,}4 + 3{,}8,$$

нет смысла обращать десятичные дроби в обыкновенные. Но чтобы выполнить действия в примере вида $\frac{5{,}2 \cdot 14{,}4 \cdot 6{,}75}{1{,}2 \cdot 8 \cdot 19{,}5 \cdot 2{,}7}$, целесообразно перейти к обыкновенным дробям, хотя все числа в этом примере заданы в десятичных дробях. Действительно, при выполнении вычислений в десятичных дробях учащимся трудно произвести сокращения, а переходя к обыкновенным, получим:

$$\frac{\frac{26}{5} \cdot \frac{72}{5} \cdot \frac{27}{4}}{\frac{6}{5} \cdot 8 \cdot \frac{39}{2} \cdot \frac{27}{10}} = \frac{26 \cdot 72 \cdot 27 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10}{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 39 \cdot 27} = \frac{18}{18} = 1.$$

Для того чтобы быстро и легко определить, в каких дробях проще решать предложенный пример, учащиеся должны овладеть навыками устного перевода одних дробей в другие. Они должны знать наизусть перевод десятичных дробей вида 0,5; 0,75; 0,25; 0,125; 0,375 и т. п. в обыкновенные, твердо знать и условия, при которых обыкновенная дробь не может быть преобразована в конечную десятичную дробь

Заметим, что в большинстве случаев лучше всего часть вычислений производить в одних дробях, а некоторые — в других. Рассмотрим такой пример:

$$\frac{\left(2\frac{1}{2} + 0{,}75\right) \cdot \frac{4}{11}}{(45{,}5 - 44{,}3) : 0{,}2}.$$

Здесь проще вычисления в знаменателе произвести в десятичных дробях, а вычисления в числителе — в обыкновенных. Надо показать учащимся и возможность совместного выполнения действий над обыкновенными и десятичными дробями. Если, например, требуется 0,567 умножить на $\frac{3}{7}$, можно 0,567 разделить на 7 и умножить на 3.

Учащиеся испытывают затруднения при делении целого числа или десятичной дроби на десятичную дробь, если деление нацело не выполняется, то есть, если частное не может быть выражено конечной десятичной дробью, как например, 4 : 0,2625. Поэтому полезно решать примеры вида:

Выразить частное конечной десятичной дробью, если это возможно, или обыкновенной дробью.

а) 637 : 16; 1000 : 575; 15 285 : 15; 679 : 14;

б) 0,357 : 17; 6 : 19,2; 7,84 : 35;

в) 835 : 0,35; 717 : 1,5; 1326 : 0,52;

г) 0,4 : 0,225; 4,815 : 1,8; 2,7 : 1,08.

При проверке решений примеров и задач, выполняемых учащимися дома или в классе, следует выяснять, в каких дробях производились вычисления, оценивая всякий раз их рациональность.

4. Рассмотрим решение систем уравнений. Довольно редко применяется так называемый способ исключения свободных членов при решении систем уравнений первой степени. Например, систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$$

можно решать методом алгебраического сложения, умножая каждое из уравнений на числа, позволяющие исключить одно из неизвестных. Но решение будет проще, если исключить свободные члены. Вычитая почленно, получим $-x + 2y = 0$; $x = 2y$.

Подставляя это выражение для x в одно из уравнений, найдем $y = 1$, тогда $x = 2$.

Чтобы решить систему уравнений $\begin{cases} 457x - 228y = 1, \\ 527x - 261y = 5, \end{cases}$

в которой правые части и не равны, все равно лучше применить метод исключения свободных членов, так как вычисления существенно упрощаются. Умножим первое уравнение на -5, получим:

$$\begin{cases} -2285x + 1140y = -5, \\ 527x - 261y = 5 \end{cases}$$
$$\overline{-1758x + 879y = 0;} \qquad -2x + y = 0,\ y = 2x.$$

Теперь легко можно найти x и y: $457x - 456x = 1$; $x = 1$, тогда $y = 2$.

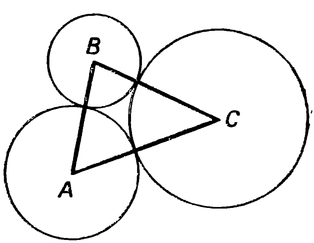
Вряд ли сами учащиеся додумаются до этого способа решения систем уравнений. Учитель должен не только ознакомить их с тем или иным приемом решения, но и использовать его при последующем изучении материала.

В первой части учебника алгебры А. П. Киселева излагается искусственный прием решения системы $\begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c \end{cases}$ сложением всех трех уравнений. Найдя $x + y + z = \frac{1}{2}(a + b + c)$, легко находим значения неизвестных.

Если ограничиться лишь решением двух-трех подобных систем и в дальнейшем не возвращаться к таким примерам, то вскоре учащиеся совершенно забудут этот прием решения систем. Поэтому при изучении последующего материала, причем не только в алгебре, но и в геометрии, следует использовать эту систему. Возьмем геометрическую задачу на построение.

Принимая вершины треугольника со сторонами a, b и c за центры трех окружностей, построить эти три окружности так, чтобы они касались друг друга извне.

Обозначив радиусы искомых окружностей с центрами в A, B и C (черт. 16) соответственно через x, y и z, легко составить систему уравнений:



Черт. 16.

$$\begin{cases} y + z = a, \\ z + x = b, \\ x + y = c. \end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения, определим $x = p - a$; $y = p - в$ и $z = p - c$, где $2p = a + в + c$.

Аналогичным способом можно решить задачу: «Дана окружность и на ней три точки K, M и N. Вписать в эту окружность такой треугольник, чтобы его биссектрисы при продолжении встречали окружность в точках K, M и N», вычислив предварительно дуги, стягиваемые сторонами искомого треугольника.

Полезно к этой системе сводить более сложные системы, как например:

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{18}{5}, \\ \dfrac{xz}{z+x}=\dfrac{36}{13}, \\ \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{12}{5} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{18}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{36}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12}. \end{cases}$$

Складывая все три уравнения почленно, получим:

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{19}{36}$, откуда $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{1}{z}=$ $=\dfrac{1}{9}$. Значит, $x=4$, $y=6$, $z=9$.

Идея метода решения таких систем применяется и при решении систем 2-й степени. Чтобы решить, например, систему $\begin{cases} yz=24, \\ zx=10, \\ xy=15, \end{cases}$ лучше всего перемножить почленно все три уравнения. Получим:

$$x^2y^2z^2=3600; \quad xyz=\pm 60.$$

1) $xyz=+60$; $\quad x=\dfrac{5}{2}$; $y=6$; $\quad z=4$.

2) $xyz=-60$; $\quad x=-\dfrac{5}{2}$; $\quad y=-6$; $\quad z=-4$.

Почленно перемножая все три уравнения, легко решаем и систему вида $\begin{cases} \dfrac{yz}{x}=\dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{zx}{y}=\dfrac{15}{2}, \\ \dfrac{xy}{z}=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$

Получаем $xyz = 30$. Деля почленно на каждое из уравнений системы, найдем:

$x^2 = 9$, $y^2 = 4$, $z^2 = 25$, то есть $x = \pm 3$, $y = \pm 2$ и $z = \pm 5$.

Знаки выбираем так, чтобы произведение всех трех неизвестных было положительным, получим 4 решения: (3; 2; 5), (—3; 2; —5), (3; —2; —5) и (—3; —2; 5).

Большие возможности для проявления инициативы и сообразительности в отыскании рациональных решений представляют системы уравнений второй степени, где трафаретное решение подстановкой или сложением нередко приводит к уравнению степени выше второй, решение которых недоступно для учащихся. Приведем несколько примеров с краткими решениями.

$$\text{а)} \begin{cases} x + y + z = 24, & (1) \\ y - x = z - y, & (2) \\ yz + zx + xy = 183. & (3) \end{cases}$$

Из (2) $x + z = 2y$, тогда из (1) $y = 8$, а (3) представляем в виде: $xz + y(x + z) = 183$, откуда $xz = 183 - 8 \cdot 16 = 55$, и так как $x + z = 16$, то $x_1 = 5$, $z_1 = 11$; $x_2 = 11$, $z_2 = 5$.

$$\text{б)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, & (1) \\ z^2 + u^2 = \ \ 5, & (2) \\ xy + zu = 14, & (3) \\ xyzu = 24. & (4) \end{cases}$$

Возведем (3) в квадрат и вычтем учетверенное (4), получим:

$$(xy - zu)^2 = 100; \quad xy - zu = \pm 10.$$

Учитывая (3), найдем:

$$xy = 12,\ zu = \ \ 2 \quad \text{или} \qquad (1)$$

$$xy = \ \ 2,\ zu = 12. \qquad (2)$$

Решая с (1) и (2), получим все 16 решений системы.

$$\text{в)} \begin{cases} 2(x^2 + y^2) = -5(x + y), \\ \dfrac{x^4 + y^4}{x^4 - y^4} = \dfrac{41(y - x)}{80}. \end{cases}$$

Перемножив почленно данные уравнения, получаем однородное относительно x и y уравнение:

$$\frac{x^4+y^4}{(x^2-y^2)^2}=\frac{41}{32},$$

откуда $y=\pm 3x$ или $y=\pm\frac{1}{3}x$.

Подставляя последовательно в первое уравнение, найдем:

$$x_1=-1;\quad x_2=\frac{1}{2};\quad x_3=-3;\quad x_4=-\frac{3}{2};\quad x_5=0;$$

$$y_1=-3;\quad y_2=-\frac{3}{2};\quad y_3=-1;\quad y_4=\frac{1}{2};\quad y_5=0.$$

Значение $x_5=0$; $y_5=0$ не удовлетворяет второму уравнению.

Системы, подобные рассмотренным, довольно часто получаются и при решении геометрических задач.

Вычислить стороны прямоугольного треугольника, зная его периметр 60 и высоту на гипотенузу 12.

Обозначив катеты и гипотенузу соответственно через a, b и c, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ a+b+c=60, \\ ab=12c. \end{cases}$$

Исключаем a и b одновременно, учитывая, что $(a+b)^2=$ $=a^2+b^2+2ab$; $(60-c)^2=c^2+24c$, откуда $c=25$.

Тогда

$$\begin{cases} a+b=60-25=35, \\ ab=12\cdot 25=300. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что катеты равны 15 и 20.

5. До сих пор мы рассматривали влияние структуры упражнения и исходных данных на выбор рационального решения для арифметических и алгебраических примеров. При решении задач обнаруживается та же зависимость. Разберем задачу на совместную работу.

Двое рабочих взялись выполнить некоторую работу за 30 дней. Через 6 дней один из них заболел, а другой продолжал работу и закончил ее за 40 дней. За сколько дней каждый из них в отдельности мог бы выполнить эту работу?

Наиболее распространенное решение подобных задач — составление системы уравнений. Полагая, что первый рабочий мог выполнить всю работу за x дней, а другой — за y дней, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{30}, \\ \frac{6}{x} + \frac{40}{y} + \frac{6}{y} = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, определим, что $x = 75$ дней, $y = 50$ дней.

Но если вначале арифметически найти, что другой рабочий мог выполнить всю работу один за 50 дней, ибо оставшиеся $\frac{4}{5}$ всей работы он выполнил за 40 дней, то тогда время, нужное одному первому рабочему для выполнения всей работы, легко найти из уравнения:

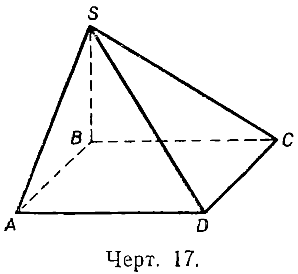
$$30 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{50}\right) = 1, \text{ откуда } x = 75 \text{ (дней).}$$

Независимо от числовых данных оба способа приемлемы всегда, причем второй способ несколько проще первого.

Сравним с арифметической задачей вида: «Сколько досок пойдет на настилку пола в комнате, длина которой $6\frac{2}{3}$ *м*, ширина $5\frac{1}{4}$ *м*, если длина каждой доски $6\frac{2}{3}$ *м*, а ширина ее составляет $\frac{3}{80}$ длины?».

Решение этой задачи существенно зависит от длины комнаты и длины досок. Так как они равны, то достаточно ширину комнаты разделить на ширину одной доски, чего нельзя сделать, если длина доски не равна длине комнаты.

Рассмотрим еще задачу № 24 из § 7 «Сборника задач по геометрии», ч. II Н. Рыбкина.



Черт. 17.

Основание пирамиды — прямоугольник, площадь которого равна 1 $м^2$, две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к основанию под углами в 30° и 60°. Найти объем.

Пусть у пирамиды $SABCD$ (черт. 17) грани SAB и SBC перпендикулярны основанию, а грани SDC и SAD образуют с основанием соответственно углы в $30°$ и $60°$.

Установив, что $SB \perp$ пл. $ABCD$, и доказав, применяя теорему о трех перпендикулярах, что $\angle SCB = 30°$ и $\angle SAB = 60°$, как линейные углы соответствующих двугранных углов, приступаем к вычислению высоты пирамиды SB.

Обозначим $AB = x$; $BC = y$, тогда из $\triangle SBC$ получим: $SB = BC \cdot \operatorname{tg} 30° = y \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle SAB$ $SB = AB \cdot \operatorname{tg} 60° = x\sqrt{3}$.

Приравнивая, находим: $x\sqrt{3} = y\frac{\sqrt{3}}{3}$, то есть $x = \frac{1}{3}y$. Но $xy = 1$, значит, $y^2 = 3$, $y = \sqrt{3}$.

Тогда $SB = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$ (*м*) и объем $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \times SB = \frac{1}{3}$ (*м*^{3}).

Решение несколько упрощается, если принять $SB = z$, тогда $BC = SB \cdot \operatorname{ctg} 30° = z \cdot \sqrt{3}$; $AB = SB \cdot \operatorname{ctg} 60° = z \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$BC \cdot AB = z \cdot \sqrt{3} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = z^2 = 1, \text{ значит, } z = 1.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{3}$ (*м*^{3}).

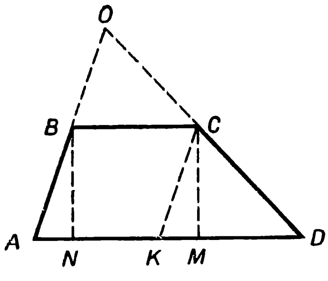
Оба эти способа решения применимы, каковы бы ни были острые линейные углы α и β. Но в данном случае $\alpha + \beta = 30° + 60° = 90°$, поэтому возможно и такое решение.

Повернем мысленно SBC вокруг SB на $90°$, получим прямоугольный треугольник ASC_1, у которого $\angle ASC_1 = 90°$. Следовательно, $SB^2 = AB \cdot BC = 1$, откуда $SB = 1$ *м*.

Очевидно, что это решение применимо лишь в том случае, когда $\alpha + \beta = 90°$. Если же $\alpha + \beta \neq 90°$, то никакого упрощения решения не получим.

Подобная картина наблюдается и при решении планиметрических задач. Ограничимся примером одной задачи:

Вычислить площадь трапеции, у которой параллельные стороны равны 60 *см* и 20 *см*, а непараллельные — 13 *см* и 37 *см*.



Черт. 18.

Возможны различные решения (черт. 18):

1) Обозначим $AN=x$, тогда $MD=40-x$. Найдем высоту трапеции $h=BN=CM$ из треугольников ABN и CMD по теореме Пифагора. Приравнивая полученные для h выражения, вычислим x, а затем определим и площадь.

2) Продолжим боковые стороны до пересечения и вычислим площадь треугольника AOD, найдя предварительно его боковые стороны, тогда площадь трапеции равна $\frac{8}{9}$ площади треугольника AOD.

3) Проведя $CK \parallel BA$, найдем $KM=AN=x$ по теореме о квадрате стороны, лежащей против острого угла треугольника:

$$37^2 = 13^2 + 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot x,$$

а затем легко находим высоту и площадь трапеции.

4) Высоту треугольника KCD можно вычислить по известной формуле (см. учебник геометрии А. П. Киселева), выражающей высоту треугольника через три его стороны.

5) Высоту треугольника KCD можно вычислить по формуле Герона:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

6) Если учесть конкретные данные задачи, то достаточно найти площадь треугольника KCD по формуле Герона, а площадь трапеции равна удвоенной площади этого треугольника, ибо у параллелограмма $ABCD$ основание $AK=\frac{1}{2}KD$. Необходимо, чтобы учащиеся, найдя какое-нибудь определенное решение, возвращались к условию задачи и устанавливали, не позволяют ли конкретные данные упростить решение.

Несомненную пользу приносят и домашние задания вида: «Найти несколько способов решения задачи и выбрать из них самый простой», причем предлагаемая задача или пример должны допускать различные решения, чтобы учащиеся не выдумывали сверхискусственных решений, не дающих никакого упрощения. На уроках следует больше практиковать самостоятельное решение задач и примеров. Анализируя и сравнивая различные предлагаемые учащимися решения, всякий раз указываем, какие из них более рациональные и почему.

6. Наибольшую сложность для учителя представляет обучение учащихся искусственным приемам решения задач и примеров, обусловленных определенной зависимостью между исходными данными.

Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}$$

Ясно, что решение существенно зависит от того, как мы скомбинируем эти четыре члена между собой. Если сразу приводить к общему знаменателю, то вычисления окажутся весьма громоздкими, ибо придется четыре раза находить произведения трех двучленов.

Решение несколько упростится, если сначала привести к общему знаменателю только левую часть уравнения. После преобразований получим уравнение: $\frac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}=$ $=\frac{6}{x+6}$, которое затем преобразовывается в уравнение $25x^2-90x+72=0$, откуда $x_1=\frac{6}{5}$; $x_2=\frac{12}{5}$.

Но если уравнение переписать так: $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=$ $=\frac{6}{x+6}-\frac{1}{x-1}$ и преобразовать по отдельности левую и правую части, то решение значительно упрощается:

$$\frac{5x-12}{(x-2)(x-3)}=\frac{5x-12}{(x+6)(x-1)},$$

откуда

1) $5x-12=0$; $x=\frac{12}{5}$;

2) $(x-2)(x-3)=(x+6)(x-1)$; $-5x+6=5x-6$; $x=\frac{6}{5}$.

В большинстве примеров, решаемых в школе, сама запись условия подсказывает способ решения. Например, требуется решить уравнение $(x^2-7x+3)^2+10(x^2-7x+3)+21=0$.

Для учащихся естественно обозначить $x^2-7x+3=y$, получим уравнение $y^2+10y+21=0$, откуда $y_1=-7$; $y_2=-3$.

Решая затем уравнения $x^2-7x+3=-7$ и $x^2-7x+3=-3$, получим все 4 корня: 1; 2; 5; 6.

Несколько сложнее решается уравнение $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$, ибо здесь предварительно нужно разделить на x^4.

Дальнейшее решение аналогично предшествующему.

При решении таких примеров от учащихся требуется умение устно оценивать возможные планы решения, видеть заранее результаты выполняемых преобразований. Без этого они не смогут не только рационально выполнить задание, но и вообще справиться с ним.

Чтобы решить уравнение $(x+5)^4-13(x+5)^2x^2+36x^4=0$, нужно установить, можно ли свести его к виду $a^2=b^2$, для чего нужно к обеим частям прибавить по $25(x+5)^2x^2$. Уравнение примет вид:

$$(x+5)^4+12(x+5)^2x^2+36x^4=25(x+5)^2x^2;$$

$$[(x+5)^2+6x^2]^2=[5(x+5)x]^2.$$

1) $7x^2+10x+25=+(5x^2+25x)$; $2x^2-15x+25=0$;

$$x_1=\frac{5}{2};\quad x_2=5;$$

2) $7x^2+10x+25=-(5x^2+25x)$; $12x^2+35x+25=0$;

$$x_3=-\frac{5}{3};\quad x_4=-\frac{5}{4}.$$

Без помощи учителя учащиеся не смогут найти обозначения, существенно упрощающие решение. Например, в задачниках по алгебре встречаются системы, получающиеся при решении некоторых задач аналитической геометрии, вида:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}, \\ x-2y+3z=4. \end{cases}$$

Пусть $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=t$, тогда $x=2t$, $y=3t$, $z=4t$;

из второго уравнения находим: $8t = 4$, $t = \frac{1}{2}$, следовательно, $x = 1$; $y = \frac{3}{2}$; $z = 2$.

Аналогично решаются и системы вида:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}, \\ 2x + 3y - 4z + 7 = 0. \end{cases}$$

Вводим параметр t, получим: $x = 3t + 1$, $y = 4t - 1$, $z = 5t + 2$. Подставляя во второе уравнение, найдем: $t = -1$, тогда $x = -2$; $y = -5$; $z = -3$.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ

1. Для упрощения решений большое значение имеют формулы. Более того, введение некоторых из них мотивируется необходимостью упрощения вычислений и преобразований.

Например, квадратное уравнение можно решить выделением полного квадрата, но такие решения довольно сложны и громоздки. Так как процесс решения уравнения $x^2 + px + q = 0$ один и тот же независимо от числовых значений p и q, проделываем требуемые преобразования в общем виде и в дальнейшем используем конечный результат: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Аналогичные примеры можно привести и из других разделов школьного курса математики.

Каждую из формул $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ учащиеся всегда могут вывести, но знание этих формул в готовом виде не только упрощает выполняемые преобразования, но нередко помогает найти и план решения. То же относится и к формулам вида:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;$$

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \varphi) \quad \text{и т. п.}$$

Зная сторону a равностороннего треугольника, легко найти, что высота его $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Знание же этой формулы позволяет устно получить формулы: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = 2r = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, применение которых упрощает решение многих геометрических задач.

2. Эффективность применения формул существенно зависит от того, сколь успешно учащиеся узнают и применяют известные им формулы в необычной ситуации. Многие восьмиклассники не замечают возможности сокращения дроби $\frac{x - \sqrt{ax}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$, хотя дробь вида $\frac{a^2 - ab}{a - b}$ сокращают все.

Упростить выражение $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ можно, умножив числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, сопряженное со знаменателем. Но если ученик видит, что $a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$, то он сразу сможет записать ответ: $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, применяя формулу разности квадратов.

Заметим, что в VIII—IX классах выбор наиболее простого способа решения упражнений приобретает особо важное значение, ибо с введением иррациональных выражений преобразования и вычисления усложняются. Почему, например, многие учащиеся не могут довести до конца преобразование вида:

$$\left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)?$$

Главной причиной является формальное знание формул сокращенного деления и умножения. Вместо того чтобы записать частное от деления разности (суммы) кубов на разность (сумму) оснований, учащиеся приводят выражения в скобках к общему знаменателю и, не разложив на множители получившиеся в числителе четырехчлены, перемножают их. Получается весьма громоздкое решение.

Преобразование значительно упрощается, если учесть, что $a\sqrt{a}=(\sqrt{a})^3:\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\right.$ $\left.-\sqrt{a}\right)=(1+\sqrt{a}+\sqrt{a^2}+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+\sqrt{a^2}-\sqrt{a})=$ $=(1+\sqrt{a})^2(1-\sqrt{a})^2=(1-a)^2.$

Если учащиеся усвоили формулы сокращенного умножения и деления не формально, то они легко и быстро выполняют действия в примерах вида $\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\times$ $\times\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2$, где $x>0$; $y>0$.

Они вначале устно решают этот пример, после чего запись решения не вызывает затруднений:

$$(\sqrt{x^2}+\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}+\sqrt{xy})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2=$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=1.$$

Такое применение формул сокращенного деления упрощает и решение отдельных иррациональных уравнений, как например: $\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b$, где $a>b>0$.

Разделив числитель на знаменатель, получим: $a-x+$ $+\sqrt{(a-x)(x-b)}+x-b=a-b$ или $\sqrt{(a-x)(x-b)}=$ $=0$, откуда $x_1=a$; $x_2=b$.

К сожалению, многие учащиеся не узнают известных им формул не только в случае иррациональных выражений. Пусть требуется решить уравнение $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}+2=0$.

Приведя к общему знаменателю, получим: $(x-a)^2+$ $+(x-b)^2+2(x-a)\cdot(x-b)=0$, значит, $[(x-a)+$ $+(x-b)]^2=0$; $(2x-a-b)^2=0$; $x=\frac{a+b}{2}$.

Нередко восьмиклассники раскрывают скобки $(x-a)\times$ $\times(x-b)$, $(x-a)^2$ и $(x-b)^2$, получают громоздкое и довольно сложное решение.

Интересен и такой пример иррационального уравнения:

$$x^4+x^2-2x\sqrt{x^4-12}-12=0.$$

Многие учащиеся не замечают, что здесь квадрат разности $(\sqrt{x^4-12}-x)^2=0$, значит, $\sqrt{x^4-12}-x=0$ или $x^4-x^2-12=0$. Решив полученное уравнение, найдем $x=\pm 2$. Мнимые корни $x=\pm i\sqrt{3}$ не подходят, так как решение иррациональных уравнений рассматривается в области действительных чисел. Не подходит и $x=-2$.

3. Если учащиеся приучены свободно переставлять левую и правую части равенств, или, как говорят, свободно читать формулы и справа налево, то решения многих примеров существенно упрощаются, как например:

1) Вычислить $\cos 75° \cdot \cos 15° + \sin 75° \cdot \sin 15°$.

2) Упростить $\sin\alpha \sin 3\alpha - \cos\alpha \cdot \cos 3\alpha$.

3) Решить уравнение $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 0$ и т. п.

Иногда от учащихся требуется умение увидеть подобную формулу, заданную в не совсем обычном виде. Однажды было предложено решить уравнение $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$.

Большинство учащихся решали это уравнение, используя формулы двойного аргумента: $2\sin x\cos^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x$.

1) $\sin x = 0$; $x = k\pi$.

2) $2\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$ или $\cos^2 x + \sin^2 x = 0$ — уравнение решений не имеет.

Ответ. $x = k\pi$.

Были и решения с применением формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму: $\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) = \frac{1}{2}[(\sin 3x + \sin(-x)]$, откуда $\sin x = 0$; $x = k\pi$.

Лишь немногие заметили, что здесь применима формула синуса разности двух углов:

$$\sin 2x\cos x - \cos 2x \sin x = 0;\ \sin(2x - x) = 0;\ x = k\pi.$$

Приведем еще такой пример.

Решить уравнение $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3(\sin x + \cos x)$.

Наиболее простое решение получим, если увидим здесь формулы для $\sin 3x$ и $\cos 3x$. Перегруппируем члены уравнения $4\cos^3 x - 3\cos x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\cos 3x = \sin 3x$; $\operatorname{tg} 3x = 1$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$.

Учащиеся, усвоившие формулы кратных аргументов, смогут решить и такой пример, требующий несколько искусственного решения:

Доказать тождество $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

4. Умелое использование формул не только упрощает решение задач и примеров, но и облегчает отыскание плана решения, в том числе и наиболее простого решения.

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x$.

Для большинства десятиклассников такое задание оказывается весьма трудным. Они могут преобразовать эту функцию к виду $y = a(\sin^2 x + \cos^2 x) + (c - a)\cos^2 x + b\sin x\cos x = a + (c - a)\cos^2 x + b\sin x\cos x$, но после этого еще нельзя дать ответа на поставленный вопрос.

Если же они знают формулу $m\sin\alpha + n\cos\alpha = \sqrt{m^2 + n^2}\sin(\alpha + \varphi)$, то смогут найти и дальнейшее преобразование:

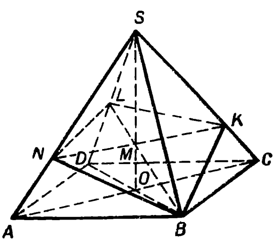
$$y = a + (c - a)\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{b}{2}\sin 2x =$$

$$= a + \frac{c - a}{2} + \frac{1}{2}[(c - a)\cos 2x + b\sin 2x] =$$

$$= \frac{a + c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (c - a)^2} \cdot \sin(2x + \varphi).$$

Вывод о значении формул для отыскания плана решения относится не только к примерам. Рассмотрим задачу:

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Боковое ребро образует с высотой угол в 30°. Найти площадь сечения, проведенного через вершину основания перпендикулярно к противоположному боковому ребру (черт. 19).



Черт. 19.

Учащиеся, хорошо знающие формулы, относящиеся к равностороннему треугольнику, рассуждают примерно так: $NK \perp BL$, значит, $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} BL \cdot NK$. Но $SD = SB = b$ и $\angle DSB = 60°$, следовательно, $\triangle SBD$ — равносторонний треугольник со стороной $b = BD = a\sqrt{2}$ и высотой $BL = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Так как $NK \parallel AC$, а SO и BL — медианы треугольника, то $SM : SO = NK : AC = 2 : 3$, значит, $NK = \frac{2}{3}$. $AC = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$. Следовательно,

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

При плохом знании соответствующих формул решение этой задачи оказывается довольно трудным, так как, кроме обоснования решения, много внимания требует выяснение возможности вычисления определенных элементов.

Пусть, например, требуется найти арифметическую прогрессию, если сумма n ее членов $S_n = 2n^2 - 3n$. Формулы суммы n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

не позволяют решить задачу, так как имеем только одно условие (уравнение), которого недостаточно для отыскания a_1 и d. Но если учащиеся понимают конкретный смысл суммы n членов арифметической прогрессии, что $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, и поэтому $S_1 = a_1$; $S_2 = S_1 + a_2$; $S_3 = S_2 + a_3$; ..., то они без труда решат предложенную задачу.

Вычислив $S_1 = -1$; $S_2 = 2$, легко найти, что $a_1 = -1$; $a_2 = 2 - (-1) = 3$, значит, $d = a_2 - a_1 = 4$.

При таком восприятии суммы n членов арифметической прогрессии учащиеся самостоятельно найдут и наиболее рациональное решение задачи: «Найти десятый член арифметической прогрессии, если сумма n ее членов $S_n = 3n^2 - 2n$».

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = (3 \cdot 100 - 2 \cdot 10) - (3 \cdot 81 - 2 \cdot 9) = 55.$$

Попутно заметим, что многие выпускники не могут доказывать методом математической индукции формулы для суммирования n членов числовой последовательности только из-за непонимания, что $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$.

Следовательно, учитель должен не только вывести ту или иную формулу, но и раскрыть ее содержание, что лучше всего сделать в процессе решения специально подобранных задач и примеров.

5. Для учащихся наибольшую трудность представляет тот случай, когда одно и то же выражение может быть преобразовано по-разному в зависимости от применяемых формул, как например:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1;$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) =$$

$$= \sin^2 2x \operatorname{ctg}^2 2x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} \text{ и т. п.}$$

Возьмем уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$. Переход к косинусам по формуле $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ никаких упрощений не дает. Замена синусов кратных дуг через $\sin x$ и $\cos x$ приводит к довольно сложному решению.

Можно перейти к косинусам, воспользовавшись формулой $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, получим $\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$. Преобразовывая в произведение, найдем:

$$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cdot \cos x.$$

1) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

2) $\cos 3x = \cos 7x$; $7x = \pm 3x + 2k\pi$;

а) $7x = -3x + 2k\pi$; $10x = 2k\pi$; $x = \frac{k\pi}{5}$;

б) $7x = 3x + 2k\pi$; $4x = 2k\pi$; $x = \frac{k\pi}{2}$.

Ответ. $x = \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{k\pi}{5}$.

Но можно применить формулу $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$, предварительно переписав исходное уравнение:

$$\sin^2 x - \sin^2 3x = \sin^2 4x - \sin^2 2x.$$

Тогда $-\sin 4x \sin 2x = \sin 6x \sin 2x$.

1) $\sin 2x = 0$; $x = \frac{k\pi}{2}$;

2) $\sin 6x = \sin(-4x)$; $6x = -(-1)^k 4x + k\pi$;

а) $k = 2n$; $6x = -4x + 2n\pi$; $x = \frac{n\pi}{5}$;

б) $k = 2n + 1$; $6x = 4x + (2n+1)\pi$; $2x = (2n+1)\pi$; $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Иногда бывает трудно устно определить, какой из возможных способов решения будет более простым, приходится выполнять все решение и лишь после этого сравнивать их. Рассмотрим уравнение $\sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \sin 6x = \frac{1}{4}\sin 4x$.

Наиболее простым кажется такое решение:

1) $\sin 4x = 0$; $4x = k\pi$; $x = \frac{k\pi}{4}$;

2) $\sin 2x \sin 6x = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{4}$;

$\cos 8x - \cos 4x + \frac{1}{2} = 0$; $2\cos^2 4x - \cos 4x - \frac{1}{2} = 0$;

$\cos 4x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$; $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Но более рациональным оказывается другое решение:

$$\sin 2x \sin 4x \sin 6x = \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x.$$

1) $\sin 2x = 0$; $2x = k\pi$; $x = \frac{k\pi}{2}$;

2) $2\sin 4x \sin 6x = \cos 2x$; $\cos 2x - \cos 10x = \cos 2x$;

$\cos 10x = 0$; $10x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{20}(1 + 2k)$.

Не только решение получилось более простым, записи ответов тоже оказались значительно более удобными.

Пусть требуется решить уравнение

$$\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 3 = 0.$$

Заменив $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получим:

$$4\sin^2 x \cos^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0,$$

или $$4\sin^2 x - 4\sin^4 x + 4\sin^2 x - 3 = 0;$$
$$4\sin^4 x - 8\sin^2 x + 3 = 0,$$
откуда
$$\sin^2 x = \frac{3}{2} \text{ или } \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

Первое уравнение $\sin^2 x = \frac{3}{2}$ корней не имеет, ибо $|\sin x| \leqslant 1$, а второе $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Но решение несколько упростится, если перейти к $\cos 2x$, а именно: $1 - \cos^2 2x + 2(1 - \cos 2x) - 3 = 0$;
$$\cos^2 2x + 2\cos 2x = 0; \quad \cos 2x(\cos 2x + 2) = 0.$$

Так как $\cos 2x + 2 \neq 0$, значит, $\cos 2x = 0$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Оба способа решения привели к квадратному уравнению, но второй из них оказался проще, так как получили неполное квадратное уравнение, что при устной прикидке вряд ли можно предусмотреть.

Заметим, что если при первом решении заменять не $\cos^2 x$, а $\sin^2 x$, то решение тоже будет простым:
$$4\cos^2 x - 4\cos^4 x + 4 - 4\cos^2 x - 3 = 0;$$
$$4\cos^4 x = 1; \ \cos^2 x = \frac{1}{2}; \ \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Очевидно, что учащиеся смогут находить подобные варианты решений, если они приучены решать упражнения разными способами и делать их сравнительный анализ. От учителя требуется при подготовке к уроку весьма тщательно проанализировать всевозможные решения, чтобы, в случае необходимости, указать и разъяснить наиболее рациональное из них.

Рассмотрим еще такой пример: «Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$». Учащиеся знают формулу $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$. Но ее можно использовать по-разному.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\cos x=$
$=2\cdot 1\cdot 1=2;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$

Второй способ оказывается не только более простым, но и более общим. Этим способом легко и просто можно найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{nx}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin kx}$ при любых значениях k и n. Довольно просто вычисляются и пределы вида:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

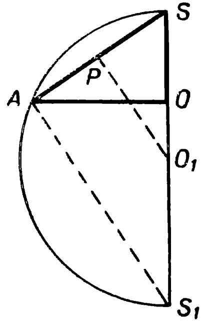
Именно таким, довольно общим приемам решения определенного вида упражнений и нужно обучать учащихся, обращая их внимание и на те конкретные случаи, когда этот общий прием не является самым простым.

Возьмем еще одну геометрическую задачу:

В данной пирамиде все боковые ребра равны 9 *см*, а ее высота 5 *см*. Определить радиус описанного шара.

Проведем полуплоскость, проходящую через диаметр описанного шара и боковое ребро SA, в сечении получим фигуру, изображенную на чертеже 20. Наиболее распространенным является следующее решение: $AP=PS$; $O_1P\perp AS$; $\triangle AOS\sim\triangle O_1PS$, откуда

$$\frac{AS}{OS}=\frac{O_1S}{PS};\ O_1S=\frac{AS\cdot PS}{OS}=$$
$$=\frac{9\cdot 9}{2\cdot 5}=8{,}1\ (см).$$



Черт. 20.

Если учащиеся знают формулу, выражающую свойство катета прямоугольного треугольника, то более рациональным будет такое решение (черт. 20): $\angle SAS_1=90°$; $AO\perp SS_1$, значит, $AS^2=$ $=SO\cdot SS_1$, тогда $R=\frac{1}{2}\cdot SS_1=\frac{AS^2}{2SO}=$ $=8{,}1$ (*см*).

6. Мы видим, что применение формул действительно позволяет находить рациональные решения задач и примеров. В связи с этим возникает вопрос: какие же формулы должны знать учащиеся наизусть?

Набор формул и отнесение их к основным и вспомогательным зависит от учебников и задачников, применяемых в школе.

Рассмотрим, например, формулу $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \varphi)$, где угол φ определяется из условий $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

В учебнике «Прямолинейная тригонометрия» Н. Рыбкина этой формулы не было, и лишь в § 71 излагались три способа решения уравнения $a \sin x + b \cos x = c$, среди которых приведено и решение посредством вспомогательного угла, деля обе части на b и полагая $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi$.

В учебнике «Тригонометрия» С. И. Новоселова уже находим специальный параграф: «§ 25. Преобразование в произведение выражения $a \sin \alpha + b \cos \alpha$», где дан вывод соответствующей формулы. Но в «Сборнике задач по тригонометрии» П. В. Стратилатова, которым пользовались при изучении тригонометрии по учебнику С. И. Новоселова, нет примеров на применение этой формулы.

Если же рассмотреть учебник «Алгебра и элементарные функции», ч. 2 Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой, то легко видеть, что от учащихся требуется знать эту формулу наизусть (§ 167). В противном случае учащиеся не смогут устно определить область изменения функций: $y = 3 \sin x + 4 \cos x$; $y = 12 \sin x - 5 \cos x$, как это требуется в упражнении № 1567 (изд. 1966 г.).

Следовательно, исходя из требований программы и учитывая возможности учащихся каждого конкретного класса, учитель должен проанализировать учебники и задачники и установить перечень формул, обязательных для запоминания. Вывод каждой из таких формул должен быть известен учащимся.

Большое значение имеет и умение устно преобразовать известную формулу, чтобы получать вспомогательные формулы, ибо нередко решение упрощается при применении несколько преобразованной формулы. Например, применение известной формулы куба суммы двух чисел в виде

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ упрощает и облегчает решение многих алгебраических и тригонометрических упражнений.

а) Доказать, что трехчлен $x^3 + px + q$ обращается в нуль при

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(рассматриваются лишь действительные значения корней)[1]. Обозначим кубические корни через a и b, получим:

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) =$$

$$= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \cdot (a+b) = -q + 3\left(-\frac{p}{3}\right)x =$$

$$= -q - px,$$

тогда

$$x^3 + px + q = -q - px + px + q = 0.$$

б) Доказать тождество: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = 1.$

$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) =$
$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = 1; \quad 1 = 1.$

Эту преобразованную формулу куба суммы целесообразно применять при решении иррациональных уравнений (см., например, № 552 из «Сборника задач по алгебре», ч. II П. А. Ларичева, изд. 1957 г.) и при решении систем уравнений. Рассмотрим две такие системы двух уравнений высших степеней.

$$\text{в)} \begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 160, \\ (x+y)(x^2+y^2) = 580. \end{cases}$$

Сложим и вычтем почленно оба эти уравнения, получим систему уравнений, равносильную данной:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 370, \\ xy(x+y) = 210. \end{cases}$$

[1] П. А. Ларичев. Сборник задач по алгебре, ч. II, Учпедгиз, 1951, № 395(2).

Теперь легко найти, что $(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y) = 370+3\cdot 210 = 1000$, значит, $x+y=10$, и тогда $xy = 210:10 = 21$. Следовательно, x и y являются корнями уравнения $z^2 - 10z + 21 = 0$.

Ответ. (7; 3) и (3; 7).

г) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 17 - x^3y^3, \\ x + y = 5 - xy, \end{cases}$

поэтому $(5-xy)^3 = 17 - x^3y^3 + 3xy(5-xy)$; после преобразований: $x^2y^2 - 5xy + 6 = 0$, откуда $xy = 3$ или $xy = 2$.

Соответственно $x+y=2$ или $x+y=3$.

Так как система из двух уравнений $xy=3$ и $x+y=2$ действительных решений не имеет, остается решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Ответ. (1; 2) и (2; 1).

Полезно знакомить учащихся со справочниками по математике, где имеются формулы, не изучаемые в школе, но умелое использование которых может существенно упростить решения некоторых упражнений. Например, формулы суммы квадратов и кубов нескольких чисел натурального ряда; формула извлечения квадратного корня из комплексных чисел в алгебраической форме; таблица биномиальных коэффициентов; формула площади четырехугольника, аналогичная формуле Герона; формулы площади треугольника через R и r; формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$ и т. п.

Рассмотрим формулы синуса и косинуса половинного угла:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

В приложениях не меньшее значение имеют формулы:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\text{или } 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, легко устно получаемые из исходных формул. Учащиеся с трудом находят аргумент φ из формул: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$; $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ при переводе комплексных чисел

$a+bi$ из алгебраической формы в тригонометрическую. Несколько проще находить φ по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, но при этом следует еще устанавливать, в какой четверти расположено комплексное число, ибо период тангенса равен π. Аргументы чисел, лежащих на координатных осях, учащиеся должны знать наизусть, что позволяет просто и быстро записывать в тригонометрической форме действительные и чисто мнимые числа, сразу указывая их модуль и аргумент.

Нецелесообразно и применение общих формул корней простейших тригонометрических уравнений при решении таких, как $\sin x = \pm 1$; $\cos x = 0$; $\cos x = \pm 1$, ибо ответы, исходя из свойств функций, можно записать несколько проще. В случае уравнения $\cos x = 0$ вместо $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ записываем $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; если $\sin x = 1$, то вместо $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi$ записываем $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и т. д.[1]

Мы уже говорили, что при оценке рациональности решений нельзя ограничиваться лишь сравнением вычислений или преобразований, надо учитывать и остальные составные части решения. Это замечание относится и к применению формул, где также нужно учитывать все решение. Приведем такой пример.

Проверить равенство $\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{5}{13} = \operatorname{arc\,tg}\frac{63}{16}$.

В принципе безразлично, вычислять ли от обеих частей синус или косинус, так как выполняемые преобразования будут одинаковыми. Но в подобных примерах мало установить равенство значений функции, нужно еще исследовать, принадлежат ли углы в левой и правой частях к одному промежутку монотонности этой функции. И теперь уже не безразлично, будем ли мы сравнивать синусы или косинусы.

В левой части имеем сумму двух острых углов, которая находится в промежутке от 0 до π, поэтому целесообразно вычислять косинус этой суммы: $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{5}{13}\right) = \sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\cdot\sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = -\frac{16}{65} < 0$.

---

[1] Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. Алгебра и элементарные функции, ч. I, «Просвещение», М., 1966.

Так как $\operatorname{arctg}\frac{63}{16}$ есть острый угол, то $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{63}{16}\right) > 0$. Следовательно, данное равенство не имеет места.

Если вычислять значения синуса от обеих частей равенства, то решение значительно усложняется, ибо пришлось бы доказывать, что $\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{5}{13} > \frac{\pi}{2}$.

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

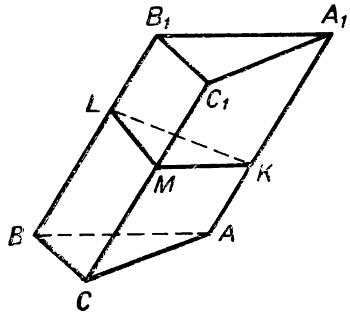
1. Как отыскание решений, так и их оформление нередко упрощаются при применении вспомогательных утверждений, в частности, различных лемм, изучаемых в теоретическом курсе математики. Рассмотрим, например, лемму о подобии треугольников. На основании этой леммы доказываются все признаки подобия треугольников, она используется и при изложении раздела «подобные многоугольники».

И при решении задач по геометрии нередко значительно проще установить подобие треугольников ссылкой на лемму, чем на один из признаков подобия треугольников. Возьмем такую простую задачу:

Боковая сторона треугольника разделена на пять равных частей, и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию. Основание равно 20 *см*. Определить отрезки параллельных прямых, заключенные между боковыми сторонами.

Для ее решения устанавливаем, что полученные треугольники подобны данному треугольнику. Это нетрудно сделать, используя первый признак подобия треугольников, но легче и проще получить тот же результат ссылкой на лемму.

2. Применение лемм упрощает не только обоснование решения, но нередко и сами вычисления. Рассмотрим, например, лемму о равновеликости наклонной и прямой призм. Целесообразно, после того как учащиеся усвоят, что объем любой призмы равен произведению основания на высоту, обратить их внимание на возможность получения новой формулы: объем призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения призмы на ее боковое ребро, которая легко получается из леммы. Применение этой новой фор-



Черт. 21.

мулы при вычислении объемов некоторых наклонных призм приводит к довольно простым решениям. Приведем в качестве иллюстрации две задачи из § 16 «Сборника задач по геометрии», ч. II Н. Рыбкина.

№ 53_1. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 *м*, а расстояние между ними 26 *м*, 25 *м* и 17 *м*. Определить ее объем.

Для решения этой задачи достаточно найти площадь перпендикулярного сечения, стороны которого как раз и равны расстояниям между боковыми ребрами: 26 *м*, 25 *м* и 17 *м*. По формуле Герона

$$S = \sqrt{34 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17} = 2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 3 = 204 \ (м^2).$$

Объем призмы $V = 204 \cdot 15 = 3060$ ($м^3$).

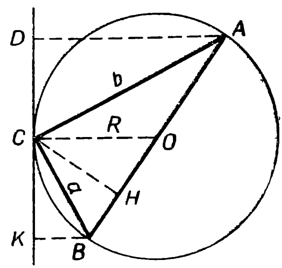
№ 55. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней m^2, а расстояние ее от противолежащего ребра $2a$. Чему равен объем призмы?

Различных треугольных призм, удовлетворяющих условиям задачи, бесконечное множество, но задача определенная, ибо все они будут равновелики. Нам кажется, что ее вообще нельзя решить без применения рассматриваемой леммы.

Для решения проведем перпендикулярное сечение KLM данной наклонной призмы (черт. 21). Будем считать, что известна площадь грани BCC_1B_1, значит, $BB_1 \cdot ML = m^2$. Высота треугольника KLM на сторону ML, являющаяся перпендикуляром к плоскости грани BCC_1B_1, будет равна расстоянию от ребра AA_1 до плоскости грани BCC_1B_1, то есть равна $2a$. Тогда $S_{KLM} = \frac{1}{2} 2a \cdot KL$; $V = a \cdot KL \times \times BB_1 = am^2$ (куб. ед.).

Мы уже указывали, что решение многих стереометрических задач можно упростить, если применять лемму об объеме тела, полученного при вращении треугольника ABC вокруг оси, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через его вершину C, но не пересекающей стороны AB. Поэтому ограничимся примером лишь одной задачи.

Определить объем тела, полученного от вращения прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b вокруг касательной, проведенной к окружности, описанной около этого треугольника, в вершине прямого угла C (черт. 22).



Черт. 22.

Очевидно, что $AB = 2R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $CH = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Площадь поверхности, полученной при вращении гипотенузы AB $S_{AB} = \pi \cdot AB \cdot (AD + BK) = \pi \cdot 2R \cdot 2R = \pi(a^2 + b^2)$, ибо радиус OC, являющийся средней линией трапеции $ABKD$, равен полусумме $\frac{AD + BK}{2}$. Следовательно,

$$V_{\text{т.вр.}} = S_{AB} \cdot \frac{1}{3} \cdot CH = \frac{1}{3}\pi(a^2 + b^2) \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi ab\sqrt{a^2 + b^2} \text{ (куб. ед.)}.$$

Обычное же решение: $V_{\text{т. вр.}} = V_{\text{ус. к.}} - V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot KD(AD^2 + AD \cdot KB + KB^2) - \frac{1}{3}\pi KB^2 \cdot KC - \frac{1}{3}\pi AD^2 \cdot CD$ оказывается значительно сложнее.

Применение этой леммы допустимо и при решении как бы обратных, по сравнению с рассмотренной, задач вида: «В конус, имеющий объем V и боковую поверхность S, вписана полусфера так, что основание полусферы лежит на основании конуса. Найти радиус полусферы».

Данный конус можно рассматривать как тело, полученное от вращения прямоугольного треугольника около своего катета, а искомый радиус полусферы есть высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу. По лемме $V = S \cdot \frac{1}{3}r$, откуда $r = \frac{3V}{S}$.

3. Нужно обращать внимание учащихся и на те утверждения, которые в учебнике даже не выделены в виде отдельной леммы, но знание которых имеет большое значение в отыскании рациональных решений.

Например, в учебнике «Тригонометрия» С. И. Новоселова теорема синусов доказывается с использованием формул $a = 2R \cdot \sin A$, но вывод их дается в процессе доказательства самой теоремы синусов.

Мы ранее приводили примеры задач, при решении которых применение этой леммы существенно упрощает как отыскание, так и оформление решения.

Рассмотрим еще такой пример. В учебнике «Алгебра и элементарные функции», ч. 2 Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой при доказательстве неравенства «для любого острого угла x $\sin x < x < \operatorname{tg} x$» (§ 213, изд. 1966 г.) получена формула $|\sin x| \leqslant |x|$ для всех действительных значений x. Знание последней формулы значительно облегчает решение многих задач на установление непрерывности функций, а также при проверке, что определенное число A является пределом данной функции в некотором процессе.

4. Остановимся на применении так называемых задач-теорем, когда результаты ранее решенных задач рассматриваются при решении последующих задач как теоремы. Например, при решении задач по стереометрии часто приходится рассматривать проекцию наклонной, образующей равные углы со сторонами угла, расположенного в плоскости проекции. Поэтому целесообразно, чтобы учащиеся не хуже, чем обычную теорему, знали, что «если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной будет служить биссектрисой данного угла» (задача № 28 из § 1 «Сборника задач по геометрии», ч. II Н. Рыбкина). При решении многих задач на пирамиды и наклонные призмы уже не нужно всякий раз обосновывать проекцию бокового ребра, в результате чего решение упрощается.

Во всех сборниках конкурсных задач и в других пособиях для поступающих в вузы решения многих задач на вычисление поверхностей пирамид излагаются с применением теоремы о площади проекции плоской фигуры, что тоже упрощает решение.

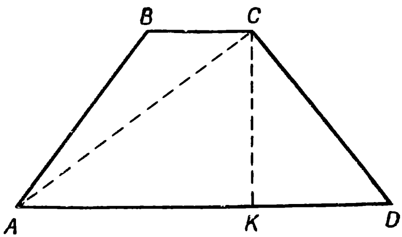
Считаем целесообразным ознакомить учащихся с этой теоремой для любого плоского многоугольника. Можно ограничиться разбором задачи из § 19 «Сборника задач по тригонометрии» Н. Рыбкина:

«Если все боковые грани какой-либо пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания под углом α, то

$S_{бок} = \frac{Q}{\cos\alpha}$ и $S_{полн.} =$

$$= \frac{2Q\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

где S — поверхность, Q —площадь основания. Доказать».



Черт 23

При решении последующих задач на пирамиды, все боковые грани которых образуют с основанием равные двугранные углы, требуем от учащихся, где только уместно, применять эти формулы.

Изучая равнобедренную трапецию, устанавливаем, что углы при основаниях равны, диагонали равны, что, проведя высоту из вершины меньшего основания на большее, получаем на большем основании отрезок, равный средней линии трапеции. Применение этих предложений упрощает решение многих задач.

Например, требуется найти высоту и боковую сторону равнобедренной трапеции (черт. 23), зная, что $AD = 25$; $BC = 7$; $AC = 20$.

Так как отрезок AK равен средней линии, то $AK = \frac{25+7}{2} = 16$, после чего легко найти CK и CD

Или возьмем задачу: «Найти площадь равнобедренной трапеции (черт. 23), зная, что $AC = d$ и $\angle CAK = 45°$».

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot CK = AK\cdot CK = \frac{d^2}{2}.$$

Конечно, не следует считать, что каждую задачу надо решать так, чтобы учащиеся обязательно запоминали полученный при ее решении результат.

В пособиях по математике для поступающих в вузы и в других сборниках задач по математике авторы приводят решения задач и примеров. Для сокращения изложения решений часто даются ссылки на ранее решенные задачи. При оценке рациональности таких решений нужно учитывать эту особенность, ибо возможно, что при отдельном, изолированном рассмотрении такого решения оно сказывается нерациональным.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ ИЗ СМЕЖНЫХ ДИСЦИПЛИН

1. Имеется много работ, в которых показано большое значение алгебры для курса арифметики, в частности, при решении так называемых типовых арифметических задач. Более того, в настоящее время проектом новой программы предусмотрено органическое объединение многих разделов курса алгебры и арифметики.

Верно и обратное утверждение: арифметическое решение многих задач из школьных сборников задач по алгебре значительно проще по сравнению с решением посредством составления уравнений или систем уравнений. Рассмотрим решение задачи:

Отец делит апельсины между тремя сыновьями. Младшему он дает половину того, что имеет, и еще пол-апельсина, второму — половину остатка и еще пол-апельсина, наконец, старшему сыну — половину нового остатка и еще пол-апельсина; после этого у него апельсинов не остается. Сколько апельсинов было у отца первоначально?

Обозначим через x число апельсинов, которое имел отец до распределения их между сыновьями. Первому сыну он дает $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$ апельсинов, у него остается $x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=$ $=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$ апельсинов.

Затем он дает второму сыну половину остатка, или $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$ и еще $\frac{1}{2}$ апельсина, что составляет $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$. У него остается тогда

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}.$$

Наконец, он дает третьему сыну $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}=$ $=\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{8}\right)$ апельсинов, а так как у него ничего больше не остается, то должно быть: $\frac{x}{8}+\frac{1}{8}=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$.

Решая это уравнение, получим $x = 7$. Таким образом, у отца первоначально было 7 апельсинов.

Это наиболее простое алгебраическое решение данной задачи является сложным для многих семиклассников, поэтому она и предлагается на математических олимпиадах. Арифметическое же решение ее известным методом «с конца» доступно даже для пятиклассников.

В 1967 году на математической олимпиаде для учащихся седьмых классов школ города Могилева была предложена задача:

Мальчик накопил на покупку фотоаппарата 5,2 руб. Остальные деньги ему дали отец и два старших брата. Оказалось, что первый брат дал 25% суммы, собранной на покупку без него, второй брат дал $33\frac{1}{3}\%$ суммы, собранной на покупку без него, и отец дал 50% суммы, собранной без него. Сколько рублей заплатил мальчик за фотоаппарат?

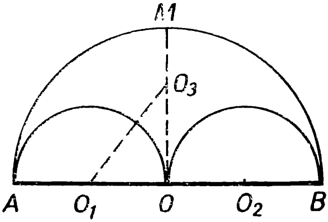
Эта задача весьма просто решается арифметически. Приняв за 1 всю стоимость фотоаппарата, находим, что первый брат дал $\frac{1}{5}$, второй — $\frac{1}{4}$ и отец дал $\frac{1}{3}$. Следовательно, они втроем дали $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60}$ стоимости фотоаппарата. Тогда накопленные мальчиком 5,2 руб. составляют $1 - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$. Значит, за фотоаппарат мальчик заплатил 5,2 руб. $: \frac{13}{60} = 24$ рубля.

Большинство семиклассников, участников олимпиады, пытались решать ее алгебраически, составлением системы уравнений. Решение оказалось столь трудным, что почти никто из них не решил эту задачу.

Собеседования с участниками олимпиад и их учителями математики показывают, что рациональность арифметических решений подобных задач увидели лишь учащиеся тех VII—VIII классов, в которых на уроках алгебры неоднократно при решении задач привлекались арифметические методы для упрощения решения, а на кружковых занятиях проводили сравнительную оценку алгебраического и арифметического решения отдельных задач.

Можно напомнить и известную задачу о косцах Л. Н. Толстого, легко решаемую арифметически с использованием геометрической иллюстрации, но которая непосильна для большинства семиклассников при требовании алгебраического решения.

В отдельных случаях рациональные решения получаем при умелом сочетании алгебраического и арифметического методов. Мы уже приводили примеры задач на составление уравнений, решение которых существенно упрощается, если некоторые величины предварительно вычислить арифметически.



Черт 24.

2. Решение многих геометрических задач вычислительного характера в VI—VII классах, решаемых обычно арифметически, значительно упрощается, если применить уравнения. Например, решение задачи: «Один из углов треугольника на 20° больше второго и на 50° меньше третьего угла Определить углы этого треугольника» посредством составления уравнения значительно проще, чем арифметически.

В «Сборнике задач по алгебре», ч. I П. А. Ларичева имеется довольно много задач с геометрическим содержанием для решения составлением уравнений при изучении алгебры в VI классе

Алгебраический метод решения отдельных, даже сложных, задач на построение также доступен учащимся, ибо достаточно получить соответствующую формулу для определения искомой величины, чтобы стало ясным все решение задачи

Пусть, например, нужно решить задачу:

Дана полуокружность AMB (черт 24) с диаметром $AB = 2R$ и две полуокружности на этом диаметре с радиусами $\frac{R}{2}$ Построить окружность, касающуюся трех данных полуокружностей

Вычислим радиус искомой окружности. По теореме Пифагора $O_1O_3^2 = O_1O^2 + OO_3^2$, где O_3 — центр искомой окружности Приняв O_3M за x, получим уравнение $\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - x)^2$, решив которое, найдем: $x = \frac{R}{3}$.

Рассмотрим еще такую задачу:

Построить равнобедренный треугольник, зная угол при вершине α и площадь K^2.

Ее можно решить методом подобия, но значительно проще применить тригонометрические функции. Обозначив боковую сторону искомого треугольника через x, получим уравнение $\frac{1}{2} x^2 \sin \alpha = K^2$, откуда $x = \sqrt{\frac{K}{\sin \alpha} \cdot 2K}$. Построив x, легко построить искомый треугольник.

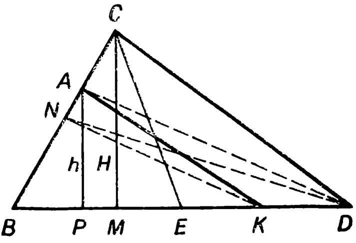
Из приведенных примеров не следует делать вывод, что алгебраический метод решения задач на построение всегда приводит к простейшим решениям. Для большинства конструктивных задач наиболее простыми являются геометрические решения. Ограничимся разбором одной задачи.

На стороне треугольника дана точка A. Требуется провести через нее прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника на две равные части.

В сборнике «Избранные задачи элементарной математики» (изд-во «Высшая школа», Минск, 1964) дано такое решение: «Допустим, что требуемая прямая есть AK. Надо найти положение точки K (черт. 25).

Проводим медиану треугольника CE и высоту треугольника $CM = H$. Перпендикуляр AP из точки A на основание равен h. Известно, что медиана треугольника делит его на равновеликие части, то есть $S_{BCE} = S_{CED}$. Тогда $S_{BAK} = S_{BCE}$, но $S_{BAK} = \frac{BK \cdot h}{2}$ и $S_{BCE} = \frac{BE \cdot H}{2}$. Следовательно, $BK \cdot h = BE \cdot H$, то есть $\frac{BE}{BK} = \frac{h}{H}$. Остается построить отрезок BK, как четвертый пропорциональный».

Значительно проще чисто геометрическое решение. Проведем медиану DN (черт. 25) и через точку N проведем прямую $NK \parallel AD$. Прямая AK делит площадь треугольника BCD на две равновеликие части. Действительно, $S_{BND} = S_{DNC}$; треугольники NAK и NDK равновелики, поэтому $S_{BAK} = S_{ACDK}$.



Черт. 25.

Для отыскания решения арифметических и алгебраических задач часто используют геометрические иллюстрации. Более того, применение геометрических знаний упрощает и делает более понятными решения некоторых из них[1].

Сравним два доказательства известного неравенства, что среднее геометрическое любых двух положительных чисел не больше их среднего арифметического. Алгебраически его получают обычным методом доказательства неравенств.

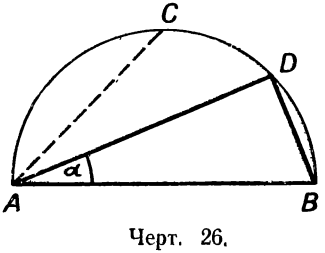
Если же после изучения свойства перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, показать геометрическое доказательство этого неравенства (всякая хорда в круге не больше его диаметра), это заинтересовывает учащихся и надолго остается у них в памяти.

3. Остановимся на вопросах применения тригонометрии при решении геометрических задач на вычисление. Нередко, если в условии задачи фигурируют углы α, β, φ, применяют тригонометрию, если же даны углы в 30°, 45° и т. п., то решают без применения тригонометрии, вычисляя нужные элементы по теореме Пифагора.

Необходимо отказаться от такого разделения задач на чисто геометрические и на задачи, решаемые с применением тригонометрии. Где только приемлемо, нужно и при решении задач, в условия которых входят углы вида 45°, 60°, применять значения тригонометрических функций этих углов.

Рассмотрим задачу № 42 из § 16 «Сборника задач по геометрии», ч. II Н. Рыбкина.

ACDB — данная полуокружность радиуса R, C — ее середина, D — середина дуги CB. Определить объем прямой призмы, у которой основанием служит треугольник ADB, а боковое ребро равно хорде AC.



Черт. 26.

Выполним чертеж фигуры основания призмы (черт. 26), где угол $\alpha = 22°30'$.

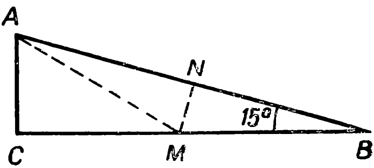
$$V = S_{осн.} \cdot H;$$

$$H = AC = R\sqrt{2}.$$

Чтобы найти площадь прямоугольного треугольника ADB, учащиеся пытаются

[1] А. И. Островский, Б. А. Кордемский. Геометрия помогает арифметике, Физматгиз, М., 1960.

определить катеты AD и DB, что сделать без применения тригонометрии довольно трудно, ибо DB есть сторона правильного вписанного восьмиугольника, а соответствующую формулу $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ они обычно не помнят.



Черт. 27.

Применяя тригонометрию, получим: $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AD \cdot DB =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2R\cos\alpha \cdot 2R\sin\alpha = R^2\sin 2\alpha = R^2\sin 45^\circ = \frac{1}{2}R^2\sqrt{2},$$

тогда $V = \frac{1}{2}R^2\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = R^3.$

Эту задачу можно решить и без применения тригонометрии, но несколько искусственным способом.

Опустим из точки D перпендикуляр на AB, являющийся половиной стороны квадрата, вписанного в данную окружность. Следовательно,

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{1}{2}R\sqrt{2} = \frac{1}{2}R^2\sqrt{2}.$$

Рассмотрим еще задачу:

Доказать, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в 15° составляет восьмую часть квадрата гипотенузы.

Возможно следующее геометрическое решение (черт. 27).

Пусть $AC = b$; $BC = a$; $AB = c$. Проведем AM так, чтобы $\angle BAM = 15^\circ$, тогда $\angle AMC = \angle MAB + \angle MBA = 30^\circ$; $AM = 2AC = 2b$, значит, и $MB = 2b$.

Построим $MN \perp AB$, тогда $\triangle MNB \sim \triangle ACB$ и $MB : AB = NB : BC$ или $2b : c = \frac{c}{2} : a$; $2ab = \frac{c^2}{2}$ или $ab = \frac{c^2}{4}$. Но $S = \frac{1}{2}ab = \frac{c^2}{8}$.

Решение носит несколько искусственный характер, но ее можно решить весьма просто, применив тригонометрию

При тех же обозначениях имеем: $a = c \cdot \cos 15°$;

$$b = c \cdot \sin 15°; \quad S = \frac{1}{2}\, ab = \frac{1}{2} c^2 \cdot \sin 15° \cdot \cos 15° =$$

$$= \frac{1}{4} c^2 \sin 30° = \frac{1}{8} c^2.$$

Рассмотрим алгебраическую задачу:

В данный круг вписать прямоугольник наибольшей площади.

Если за аргумент принять одну из сторон прямоугольника x, то для площади S получаем функцию $S = x\sqrt{R^2 - x^2}$, исследование которой сложно. Но, приняв за аргумент угол между диагональю и одной из сторон прямоугольника, получим:

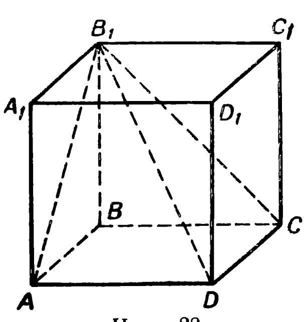
$S = 2R \sin\alpha \cdot 2R \cos\alpha = 2R^2 \sin 2\alpha$, откуда легко находим, что

$$S_{\text{наиб.}} = 2R^2 \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Надо умело сочетать оба приема решения. Главным критерием при этом должна быть рациональность получаемых решений. Чтобы найти, например, катет, лежащий против угла в 30°, незачем применять тригонометрию, а сразу записать, что он равен половине гипотенузы. В случае же угла в 60° лучше воспользоваться значением синуса этого угла.

Возьмем задачу № 17 из § 16 «Сборника задач по геометрии», ч. II Н. Рыбкина.

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с одной гранью угол в 30°, а с другой — в 45°. Определить объем.



Черт. 28.

Не приводя обоснований из-за их простоты, рассмотрим лишь соответствующие вычисления, считая (черт. 28), что $\angle AB_1D = 45°$, а $\angle DB_1C = 30°$. Тогда $DC = \frac{1}{2}\, l$; $AB_1 = l \cdot \cos 45° = l\frac{\sqrt{2}}{2}$; $AD = AB_1$; $AB = DC$;

$B_1B = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}$. $V = AB \cdot AD \times$ $\times BB_1 = \frac{l}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{8} l^3 \sqrt{2}.$

Для упрощения решений надо использовать и материал из других разделов той же дисциплины, казалось бы совершенно не относящийся к рассматриваемому.

Пусть требуется доказать, что в правильном треугольнике сумма отрезков перпендикуляров, опущенных из любой точки внутри треугольника на его стороны, равна высоте.

Наиболее простое решение получим, если точку O (черт. 29) соединим с вершинами треугольника и сравним сумму площадей получившихся трех треугольников с площадью треугольника ABC. Приняв сторону треугольника за a, имеем:

$$\frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} ay + \frac{1}{2} az = \frac{1}{2} ah, \text{ значит, } x + y + z = h.$$

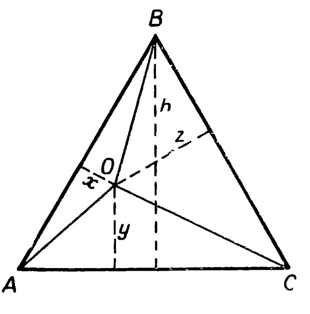
Хотя в условии задачи ничего не говорится о площади треугольников, но именно подсчет площадей позволил получить наиболее рациональное решение.

Сравнением площадей весьма просто решается и следующая задача на вычисление:

Точка M, лежащая внутри равностороннего треугольника со стороной m, удалена от двух его сторон на a и b. Найти расстояние ее от третьей стороны. Легко определить, что $x = \frac{m\sqrt{3}}{2} - (a + b)$.

Аналогом этого приема при решении стереометрических задач является сравнение объемов. Рассмотрим такой пример.

В вершине A треугольной пирамиды $SABC$ сходятся три прямых угла. В пирамиду вписан куб так, что одна вершина куба лежит в точке A, а другая—на грани SBC. Найти ребро куба, если известно, что $AC = a$, $AB = b$ и $AS = c$.



Черт. 29.

Соединив вершину куба D, лежащую на грани SBC, с точками A, B, C и S, получим три пирамиды с одинаковыми высотами x, равными ребру куба. Сравнивая объемы, получим уравнение: $\frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}abx + \frac{1}{6}acx + \frac{1}{6}bcx$, откуда $x = \frac{abc}{ab + ac + bc}$.

Ранее приводились примеры тригонометрических уравнений, решения которых оказывались весьма простыми в результате использования алгебраического неравенства $a^2 + \frac{1}{a^2} \geqslant 2$. Но нередко применение тригонометрии упрощает доказательство неравенств.

Пусть требуется доказать неравенство $\left|\frac{2a}{1+a^2}\right| \leqslant 1$.

Наличие знака абсолютной величины усложняет алгебраическое доказательство этого неравенства. Но если принять $a = \operatorname{tg}\alpha$, что возможно при любом действительном значении a, получим: $\frac{2a}{1 + a^2} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$, и неравенство становится очевидным.

Решение задач на построение значительно упрощается, причем не только оформление, но и отыскание решения, при применении результатов некоторых задач на доказательство. Например, с учащимися VII класса почти всегда решают задачу на доказательство: «Если у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны, то такой параллелограмм есть ромб». Зная это предложение, семиклассники легко находят решение задачи: «Построить ромб по двум его диагоналям», причем доказательство правильности построения опускается из-за его очевидности.

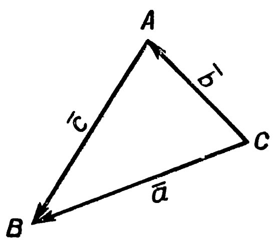
Применяются не только результаты ранее решенных задач, но и методы их решения. Например, наиболее рациональное решение задачи на вычисление: «Определить высоту трапеции, зная ее основания $a = 28$, $b = 16$ и диагонали $d_1 = 17$ и $d_2 = 39$», получим, если используем идею решения соответствующей задачи на построение: «Построить трапецию по двум основаниям и двум диагоналям». Переместив одну из диагоналей в направлении оснований на расстояние, равное меньшему основанию, получим треугольник с двумя известными сторонами, и высота трапеции может быть вычислена по формуле

$$h = \frac{2}{a + b}\sqrt{p(p - a - b)(p - d_1)(p - d_2)},$$

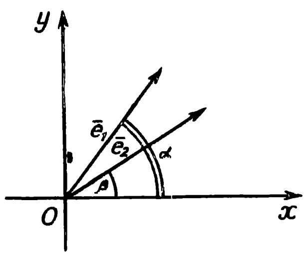
$$\text{где } p = \frac{1}{2}(a + b + d_1 + d_2).$$

Аналогично поступаем и при вычислении медианы треугольника по трем данным сторонам, используя идею построения треугольника по двум сторонам и медиане на третью сторону.

5. В заключение заметим, что на выбор рациональных решений существенно влияют изменения в программе по математике. При ознакомлении учащихся с новыми понятиями и методами возможно упрощение как при изложении теоретического материала, так и при решении задач. Ограничимся таким примером.



Черт. 30.



Черт. 31.

Во многих школах в последние годы изучают элементы векторной алгебры, включая и понятие скалярного умножения векторов. В результате можно упростить доказательство некоторых теорем и вывод отдельных формул.

Например, доказательство теоремы косинусов становится весьма простым. Для любого треугольника можно записать, что $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ (черт. 30). Возведем это равенство скалярно в квадрат: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\overline{ab} = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$, то есть получим теорему косинусов.

Существенно упрощается и вывод формулы сложения для косинуса. Рассмотрим два единичных вектора $\bar{e}_1 (\cos\alpha, \sin\alpha)$ и $\bar{e}_2 (\cos\beta, \sin\beta)$ (черт. 31) и вычислим их скалярное произведение $\bar{e}_1 \bar{e}_2 = \cos(\alpha - \beta)$. С другой стороны, учитывая координаты этих векторов, получим: $\bar{e}_1 \bar{e}_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

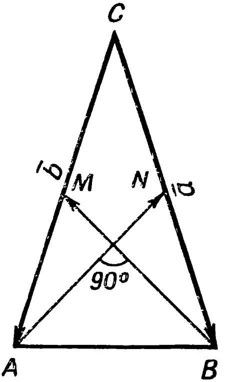
Сравнивая эти два равенства, находим, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Очевидно, что применение векторной алгебры позволяет находить и более рациональные способы решения задач. Пусть требуется вычислить угол при вершине равнобедренного треугольника, у которого медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Рассматривая боковые стороны и медианы к ним как векторы (черт. 32), легко находим:

$\overline{AN} = \frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b} = \frac{\bar{a} - 2\bar{b}}{2}$; $\overline{BM} = \frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a} = \frac{\bar{b} - 2\bar{a}}{2}$. По условию $AN \perp BM$, значит, $\overline{AN} \cdot \overline{BM} = 0$ или $\frac{\bar{a} - 2\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{b} - 2\bar{a}}{2} = 0$. $\bar{a}\bar{b} - 2b^2 - 2a^2 + 4\bar{a}\bar{b} = 0$; $5\bar{a}\bar{b} = 4a^2$, ибо $b = a$, $5a \cdot a \times \cos C = 4a^2$, откуда $\cos C = 0{,}8$.



Черт. 32

По таблицам находим, что $\angle C \approx 36^\circ 52'$.

Без применения векторной алгебры решения этой задачи являются довольно сложными и громоздкими.

При исключении из программы тех или иных разделов также может оказаться, что ранее известное учителю рациональное решение определенной задачи неприемлемо для учащихся, не имеющих требуемых знаний.

Иногда материал остается, но изменяется методика его изложения. Возьмем тему «Решение неравенств второй степени». В прошлые годы изложение теории этого вопроса проводилось на основе разложения квадратного трехчлена на линейные множители, что позволяло ознакомить учащихся с так называемым «методом промежутков», применяемым и к решению более сложных неравенств. В учебнике «Алгебра и элементарные функции» Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой материал изложен так, что не допускает обобщений. В таких случаях, по нашему мнению, нужно показывать учащимся и другой подход к решению подобных упражнений.

Заметим, что и примеры вида «Выяснить, при каких значениях x дробь $\frac{x^2 + 2x - 3}{2x - x^2}$ положительна?» можно решать значительно проще, чем предложенным авторами способом (см. пример 3, § 62). Разложив числитель и знаменатель на линейные множители, исходное неравенство заменяем неравенством:

$$f(x) = (x+3) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) < 0.$$

Так как при $x > 2$ $f(x) > 0$, следовательно, $f(x) < 0$ при $1 < x < 2$ и при $-3 < x < 0$.

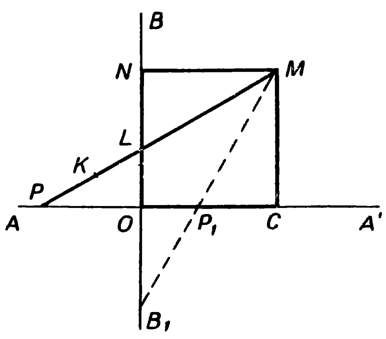
§ 10. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ

1. Изложенный ранее материал свидетельствует о той большой работе, которую должен проводить учитель по обучению учащихся отысканию не просто решения, а рационального решения.

Из всех вопросов, относящихся к этой проблеме, наибольшую сложность представляет метод вспомогательных неизвестных. Учитывая важность и сложность такого метода, мы решили выделить этот вопрос в отдельный параграф, хотя ранее уже неоднократно приводились примеры применения вспомогательных неизвестных при решении различных упражнений.

2. Если при решении задачи или примера введение вспомогательного неизвестного может существенно упростить решение, но такой прием не имеет теоретического значения, да и на практике он применим лишь к одному-двум упражнениям, то в подобных случаях следует просто подсказать, какую величину целесообразно принять за неизвестное.

В качестве примера приведем так называемую задачу Паппа Александрийского, которую еще Ньютон избрал для пояснения того, как выбор неизвестного упрощает решение: «Дан квадрат $OCMN$. Через его вершину M провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между прямыми AA' и BB', совпадающими со сторонами OC и ON данного квадрата, имел данную длину $2m$» (черт. 33).



Черт. 33.

Пусть MP — искомая прямая, где $PK = KL = m$.

Если за неизвестное принять отрезок OP, то получим уравнение 4-й степени, причем не биквадратное, а если положить $MK = x$, получим уравнение $x^4 - 2(m^2 + a^2)x^2 + m^4 - 2m^2a^2 = 0$, где a — сторона квадрата, которое легко можно решить $\left(x^2 = m^2 + a^2 + \sqrt{a^2(4m^2 + a^2)}\right)$, а затем построением найти положение точки P.

Рассмотрим такой алгебраический пример: «Найти четыре последовательных целых числа, произведение которых равно a».

Можно за неизвестное x принять наименьшее из них, тогда получим уравнение:

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = a, \text{ то есть } x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - a = 0.$$

Если же обозначить буквой x среднее арифметическое искомых чисел, то получим биквадратное уравнение

$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = a$, которое решается легко.

В таких случаях нужно подсказать учащимся, какую величину целесообразно принять за неизвестное, чтобы получить более простое решение.

3. Если определенный прием введения вспомогательных неизвестных имеет применение при решении большого числа упражнений, причем не требует дополнительного теоретического обоснования, то такой способ решения должен быть разобран с учащимися детально (см., например, § 4).

Таким же образом следует поступать и в тех случаях, когда теоретическое обоснование применяемого метода доступно учащимся и объяснение его не требует много времени.

Рассмотрим, например, решение систем уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2, \end{cases}$$

левые части которых есть однородные многочлены 2-й степени, подстановкой $y = kx$. Обоснование этого приема весьма простое. Приравняв свободные члены, после почленного вычитания получим однородное относительно

x и y уравнение, которое решается делением на x^2 (или на y^2) с заменой $\frac{y}{x}=k$.

Поэтому при решении таких систем можно не исключать свободные члены. Заменив y на kx, находим два выражения для x^2 и сравниваем их. Решив полученное уравнение относительно k, вычисляем x^2, а затем легко определяем значения x и y.

Конечно, учащиеся должны уметь применять и способ исключения свободных членов. Более того, полезно решить несколько систем таких, что именно уравнивание правых частей дает простое решение, как, например:

$$\begin{cases} x^2+4xy-2y^2=5(x+y) \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y). \end{cases}$$

Найдя $x+y$ из обоих уравнений и приравняв их, получим:

$$\frac{x^2+4xy-2y^2}{5}=\frac{5x^2-xy-y^2}{7}.$$

После упрощений будем иметь: $18x^2-33xy+9y^2=0$.

1) $x=0$, тогда и $y=0$;

2) $x\neq 0$; делим на x^2 и обозначим $\frac{y}{x}=k$, получим:

$9k^2-33k+18=0$; $\quad k=\frac{33\pm\sqrt{1089-648}}{18}=\frac{33\pm 21}{18}$

$k_1=3$; $k_2=\frac{2}{3}$, значит, $y=3x$ или $y=\frac{2}{3}x$.

Подставив в одно из исходных уравнений, найдем ответ:

$$(0;\ 0);\ (-4;\ -12);\ (3;\ 2).$$

4. Вопросы рациональности решений задач и примеров должны рассматриваться и на кружковых занятиях. Систематическая тренировка в сравнительной оценке способов решений, в отыскании наиболее простых путей решения развивает сообразительность учащихся и их находчивость. В частности, на кружковых занятиях целесообразно рассматривать те приемы введения вспомогательных неизвестных, теоретическое обоснование которых по разным причинам доступно не для всех учащихся.

В последнее время широкое распространение при решении систем уравнений с двумя неизвестными получил способ введения вспомогательных неизвестных вида $x+y=u$; $xy=v$. Его теоретической основой является теорема о том, что всякий симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов $x+y$ и xy.

Не излагая данную теорему в общем виде, можно ограничиться разбором нескольких примеров, при решении которых нецелесообразно отделять x от y. Вычисления производим так, чтобы сохранять симметрию. Обычно стараются вычислить $x+y$ и xy, а найдя эти выражения, составляют уравнение вида $t^2+pt+q=0$. Если последнее уравнение имеет два корня α и β, то данная система имеет решения: $x=\alpha$; $y=\beta$ и $x=\beta$; $y=\alpha$.

Рассмотрим две такие системы.

$$\begin{cases} 19x^2-26xy+19y^2=91, \\ 47x^2-26xy+47y^2=91(x+y). \end{cases}$$

Из первого уравнения: $19(x+y)^2-64xy=91$;

из второго уравнения: $47(x+y)^2-120xy=91(x+y)$.

Исключая из этих уравнений xy, получим: $(x+y)^2-8(x+y)+15=0$, откуда $x+y=5$ или $x+y=3$, тогда соответственно, $xy=6$ или $xy=\frac{5}{4}$.

Из системы уравнений $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$

найдем $x_1=2$ и $x_2=3$, а тогда $y_1=3$ и $y_2=2$.

Из второй системы уравнений $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=\frac{5}{4} \end{cases}$

найдем $x_3=\frac{5}{2}$ и $x_4=\frac{1}{2}$, а тогда $y_3=\frac{1}{2}$ и $y_4=\frac{5}{2}$.

Возьмем более сложную систему:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^3+y^3=12xy, \\ 3(x+y)=xy \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$x^2-xy+y^2=36$, или $(x+y)^2-3xy=36$.

Заменяя $xy=3(x+y)$, найдем: $(x+y)^2-9(x+y)-36=0$, откуда $x+y=12$ или $x+y=-3$.

Следовательно, имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 36 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = -9, \end{cases}$$

решив которые, найдем:

$x_1 = 6$ и $y_1 = 6$; $x_{2,3} = \frac{3}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ и $y_{2,3} = \frac{3}{2}(-1 \mp \sqrt{5})$.

Мы стремились систему уравнений свести к квадратному уравнению относительно $x + y$ или xy. Этот прием применим и при решении многих других систем, не являющихся симметричными относительно x и y. Пусть требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 14, \\ y^2 + xy + y = 28. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получим: $(x + y)^2 + (x + y) - 42 = 0$, откуда $x + y = -7$ или $x + y = 6$.

Решаем полученные уравнения с одним из данных уравнений. Вынеся из первых двух членов общий множитель x (или y), имеем: $x(x + y) + x = 14$. Теперь легко находим $x_1 = -\frac{7}{3}$ и $x_2 = 2$, тогда $y_1 = -\frac{14}{3}$ и $y_2 = 4$.

Разбирая на занятиях кружка решения систем уравнений из олимпиадных сборников, показываем, что в отдельных случаях целесообразно выполнять другие подстановки, как, например: $x - y = u$; $xy = v$ или $x + y = u$; $x - y = v$. Приведем пример, когда лучше всего применять подстановку $x^2 + y^2 = u$; $xy = v$.

$$\begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 41(x^2 + y^2), \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

Из второго уравнения $x^2 + y^2 = 13 - xy$. Возведем в квадрат: $x^4 + y^4 = 169 - 26xy - x^2y^2$ и подставим в первое уравнение. Получим $5x^2y^2 + 89xy - 312 = 0$, откуда $xy = 3$ или $xy = -20{,}8$, тогда $x^2 + y^2 = 10$ или $x^2 + y^2 = 33{,}8$.

Из уравнений $xy = 3$ и $x^2 + y^2 = 10$ найдем: $x_{1,2} = \pm 1$ и $x_{3,4} = \pm 3$, а значит, $y_{1,2} = \pm 3$ и $y_{3,4} = \pm 1$. Вторые два уравнения $xy = -20{,}8$ и $x^2 + y^2 = 33{,}8$ дают мнимые корни.

5. В геометрии аналогом вспомогательных неизвестных являются вспомогательные построения. Иногда достаточно построить вспомогательную прямую, отрезок или другую какую-либо фигуру, чтобы найти простейшее решение предложенной задачи.

Рассмотрим задачу на построение:

Построить окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в заданной на ней точке A.

Эта задача не из простых, так как легко найти лишь одну прямую, на которой лежит центр искомой окружности, а именно прямую, проходящую через центр данной окружности и через точку A. Но этого для определения центра искомой окружности в общем случае недостаточно, нужно еще учесть, что искомая окружность должна касаться данной прямой.

Если через точку A провести касательную к данной окружности, то решение становится очевидным: искомая окружность должна касаться данной прямой и построенной вспомогательной прямой, значит, центр ее лежит на их оси симметрии.

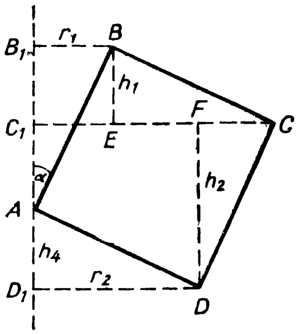
Такая же картина наблюдается и при решении задач на доказательство и на вычисление. Возьмем такую простую задачу:

«Доказать, что у равнобедренной трапеции углы при основании равны». Достаточно через вершину меньшего основания провести прямую, параллельную другой боковой стороне. Установив, что получившийся треугольник равнобедренный, легко получаем требуемое свойство углов трапеции.

При решении сложных геометрических задач нередко приходится выполнять довольно громоздкие преобразования и вычисления. Для упрощения рекомендуем вводить вспомогательные обозначения, являющиеся как бы вспомогательными неизвестными. При этом не следует сразу вычислять их, вполне достаточно лишь установить, что в случае необходимости всегда можно определить их через данные величины.

Заметим, что геометрические задачи очень редко решаются в общем виде, разве лишь когда в самом условии нет числовых данных. А ведь не всегда целесообразно производить вычисления, не получив общей формулы решения задачи.

Пусть требуется определить объем тела, полученного от вращения квадрата со стороной a вокруг оси, проходящей через одну из его вершин и составляющей с одной из его сторон угол α (черт. 34).



Черт. 34.

Записав формулу для объема искомого тела вращения в виде $V = V_1 + V_2 - V_3 - V_4$, (1) где V_1 — объем усеченного конуса, образованного вращением трапеции CC_1B_1B; V_2 — объем усеченного конуса, образованного вращением трапеции DD_1C_1C, а V_3 и V_4 — соответственно объемы конусов, образованных вращением треугольников BAB_1 и DD_1A, учащиеся начинают определять элементы, необходимые для вычисления этих объемов при помощи тригонометрических формул и подставляют их в формулу (1). Нередко даже хорошо подготовленные ученики с большим трудом справляются с упрощением полученного выражения. Очевидно, что этот прием нерационален.

Следует приучать учащихся производить всевозможные алгебраические преобразования до подстановки тригонометрических формул. Так, в данном случае, заметив, что (черт. 34) $r_1 = h_1 = h_4$; $AB_1 = h_3 = h_2 = r_2$ и $C_1C = r_3 = r_1 + r_2$, выражение (1) можно переписать в виде:

$$V = \frac{1}{3}\pi \{ r_1 [r_1^2 + (r_1 + r_2)^2 + r_1(r_1 + r_2)] + r_2 [r_2^2 + (r_1 + r_2)^2 + r_2(r_1 + r_2)] - r_1^2 r_2 - r_1 r_2^2 \}$$

или после раскрытия скобок и приведения подобных:

$$V = \pi (r_1^3 + r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2 + r_2^3) = \pi (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2).$$

Подставляя теперь вместо r_1 и r_2 их значения, получим:

$$V = \pi\, a^3 (\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Нужно приучать учащихся смелее вводить дополнительные обозначения требуемых для решения величин, считая их известными, при этом следим лишь за тем, чтобы впоследствии их действительно можно было вычислить. Этот прием особенно эффективен при решении многих задач на тела вращения по геометрии, в том числе и с применением тригонометрии.

Это замечание относится не только к задачам на тела вращения. Например, требуется определить площадь диагонального сечения правильной усеченной четырехугольной пирамиды, площади оснований которой равны Q_1 и Q_2, а боковая поверхность — P.

Обозначив стороны оснований через a, b и высоту пирамиды через h, легко найдем, что $S_{\text{сеч.}} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} \cdot h$, причем $a^2 = Q_1$, $b^2 = Q_2$ и $2(a+b)l = P$, где l — апофема боковой грани.

Из этих уравнений легко определить a, b и l, а затем

и $h: a = \sqrt{Q_1}$;

$$b = \sqrt{Q_2}; \quad l = \frac{P}{2(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})};$$

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{P^2}{4(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2} - \frac{(\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2})^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})} \cdot \sqrt{P^2 - (Q_1 - Q_2)^2}.$$

Следовательно,

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})}{2} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})} \cdot \sqrt{P^2 - (Q_1 - Q_2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{P^2 - (Q_1 - Q_2)^2}.$$

Задачу можно решить проще, не вычисляя промежуточных величин, считая их как бы известными:

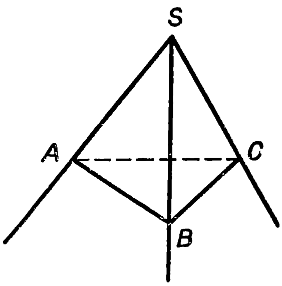
$$S_{\text{сеч}} = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{[2(a+b)l]^2 - (a^2 - b^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{P^2 - (Q_1 - Q_2)^2}.$$

В задачах по стереометрии с применением тригонометрии часто выбор нерационального решения является причиной того, что задача не доводится до конца.

Приведем еще такой пример.

Плоскость отсекает на ребрах прямого трехгранного угла отрезки, составляющие арифметическую прогрессию с разностью 2 *см*. Найти отрезки, если площадь сечения равна 14 *см*^{2} (черт. 35). Пусть $SA = x$; $SB = x+2$; $SC = x+4$. Тогда стороны треугольника ABC, получившегося в сечении, будут равны соответственно: $\sqrt{2x^2+4x+4}$; $\sqrt{2x^2+8x+16}$ и $\sqrt{2x^2+12x+20}$.



Черт. 35.

Используя формулу Герона в виде $S = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}$, придем к уравнению $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x - 240 = 0$

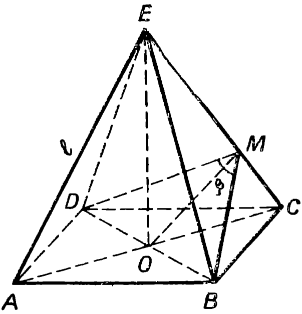
Решить его большинство девятиклассников не сумеет. Между тем, обозначив отрезки через $x-2$, x и $x+2$, после аналогичных преобразований приходим к уравнению $28 = \sqrt{3x^4 + 16}$.

Это уравнение легко решается, получаем $x = 4$. Значит, длины отрезков ребер трехгранного угла будут 2 *см*, 4 *см* и 6 *см*.

Многие геометрические задачи, особенно вычислительного характера, решаются посредством составления уравнений. К таким решениям полностью относятся высказанные ранее замечания о месте и значении вспомогательных неизвестных при решении алгебраических упражнений.

Укажем лишь, что следует смелее вводить вспомогательные угловые величины. Сравним, для примера, два решения задачи:

Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен β.



Черт. 36.

В «Сборнике задач по элементарной математике» Н. П. Антонова и др. (Физматгиз, М., 1961) дано такое решение: «Проводим высоту OM треугольника OCE (черт. 36); тогда $\angle BMD = \beta$. Обозначим $OC = OB$ через x и найдем x из формулы $OC^2 = CE \cdot CM$, где $CE = l$ и $CM = \sqrt{x^2 - OM^2}$. Из треугольника OMB находим $OM = OB \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = x \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, так что

$$CM = x\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Подставляя в формулу $OC^2 = CE \cdot CM$, получаем уравнение: $x^2 = l \cdot x\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}$. Корень $x = 0$ не соответствует условию, так что имеем:

$$x = OC = l\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Следовательно, $H = \sqrt{CE^2 - OC^2} = \sqrt{l^2 - x^2} = l\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. Теперь находим $V = \frac{1}{3}\,2x^2H$

О т в е т. $V = \frac{2}{3}l^3 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right)$».

Решение упрощается, если за вспомогательное неизвестное принять угол $\varphi = \angle ECO$ (черт. 36). Действительно: $\sin\varphi = \frac{OM}{OC} = \frac{OM}{OB} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$; $H = EC \cdot \sin\varphi = l \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$;

$$OC = EC \cdot \cos\varphi = l\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = l\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

$$S_{\text{осн.}} = 2 \cdot OC^2 = 2l^2\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right);$$

$$V = \frac{2}{3}\, l^3 \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right).$$

СОДЕРЖАНИЕ

Алексей Архипович Мазаник

Рациональное решение задач и примеров по математике

Издательство «Народная асвета»
Государственного комитета
Совета Министров БССР по печати,
Минск, Ленинский проспект, 83а.

* * *

Редактор З. В. Старинская
Художественный редактор Ю. Д. Королев
Технический редактор В. Н. Жук
Корректор Л. Н Жаковко

Сдано в набор 6/VIII 1968 г. Подписано к печати 6/III 1969 г. Формат 84×108 1/32. Физ. печ. л. 4,5. Усл. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 6,72. Тираж 51 000 экз. Заказ 1208. Цена 19 коп. Бум. тип. № 3.

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа
Государственного комитета Совета Министров БССР
по печати,
Минск, Красная, 23.

Мазаник А. А.

Рациональное решение задач и примеров по математике. Пособие для учителей. Минск, «Нар. асвета», 1968.

144 с. с илл. 51 000 экз. 19 к.

На основе собственного опыта и опыта работы других учителей г. Могилева автор предлагает разнообразные методы обучения учащихся рациональным приемам решения задач и примеров. В книге рассматривается возможность упрощения решения большого числа упражнений, а также зависимость решения от формулировки задачи, от структуры и числовых данных условия. Подробно освещен также вопрос об использовании знаний из смежных школьных дисциплин для упрощения решений.

Все теоретические положения автор иллюстрирует примерами и задачами из курса математики средней школы.

Рекомендуется учителям математики.

$\frac{6\text{-}6}{115\text{-}68М}$ $\frac{М\ 13}{51\ (07)}$

Цена 19 коп.