

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

Н. Ф. Добрынина

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Конспект лекций



Пенза
Издательство
Пензенского государственного
университета
2007



УДК 517
Д56

Р е ц е н з е н т ы:

Кафедра «Информатика и методика преподавания информатики»
Пензенского государственного педагогического университета
им. В. Г. Белинского

Кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой «Алгебра»
Пензенского государственного педагогического университета
им. В. Г. Белинского

А. А. Ловков

Добрынина, Н. Ф.

Д56

Квадратурные формулы: конспект лекций / Н. Ф. Добрынина. –
Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. – 100 с.: ил. – Библиогр.: с. 100.

Рассматриваются квадратурные формулы для вычисления определенных интегралов в одномерном и двумерном случаях. Даны построение простейших квадратурных формул, интерполяционные квадратуры, квадратуры с наивысшей алгебраической степенью точности и квадратуры, содержащие наперед заданные узлы. Излагается проблема сходимости квадратурного процесса. В многомерном случае акцент делается на методе статистических испытаний.

Конспект лекций подготовлен на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначен для студентов специальности «Прикладная математика».

УДК 517

© Добрынина Н. Ф., 2007

© Издательство Пензенского государственного
университета, 2007

Лекции «Квадратурные формулы» посвящены методам приближенного вычисления определенных интегралов.

В 1-й лекции строятся простейшие формулы для приближенного вычисления интегралов по отрезку. Эти формулы называются *квадратурными*. Изучается вопрос о повышении точности вычисления интегралов за счет разбиения отрезка на части, за счет повышения степени полиномов, для которых квадратуры точны, за счет сведения интегралов от функций с особенностями к интегралам от гладких функций.

В лекциях 2–9 решаются вопросы оптимизации вычислений определенных интегралов.

В лекциях 10–11 дается обобщение изученных квадратурных формул на определенные интегралы; изучаются формулы для приближенного вычисления, которые называются *кубатурными*.

Л е к ц и я 1

Простейшие квадратурные формулы

1. Метод неопределенных коэффициентов

Простейшие квадратурные формулы получим из следующих соображений. Вычисляется интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Если $f(x) \approx \text{const}$ на отрезке $[a, b]$, то можно положить $I \approx (b - a)f(\zeta)$, где ζ – произвольная точка на $[a, b]$. Если в качестве ζ взять среднюю точку отрезка, то получим *формулу прямоугольников*

$$I \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Предположим, что подынтегральная функция на отрезке интегрирования близка к линейной функции; тогда интеграл будет приближенно равняться площади трапеции с высотой $(b - a)$ и основаниями $f(a)$ и $f(b)$ (рис. 1). В результате получим *формулу трапеций*

$$I \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

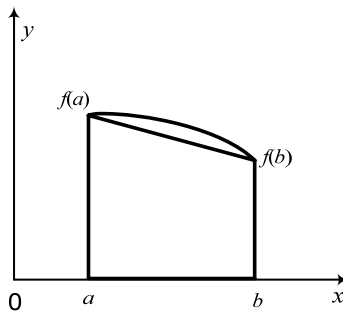


Рис. 1

Более сложные квадратурные формулы строятся методом неопределенных коэффициентов:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx S(f) = c_1 f(-1) + c_2 f(0) + c_3 f(1).$$

Погрешность формулы

$$R(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx - S(f)$$

является линейным функционалом, и если подынтегральную функцию представить в виде многочлена $f = \sum_{j=0}^m a_j x^j$, то имеем

$$R(f) = \sum_{j=0}^m a_j R(x^j).$$

Нужно добиться выполнения равенств $R(1) = 0, \dots, R(x^l) = 0$ при возможно большем значении l . Нужно определить три неизвестных постоянных $c_i (i = 1, 2, 3)$, тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} R(1) = 2 - (c_1 + c_2 + c_3) = 0, \\ R(x) = 0 - (-c_1 + c_3) = 0, \\ R(x^2) = \frac{2}{3} - (c_1 + c_3) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $c_1 = c_3 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{4}{3}$, т. е. получили квадратурную формулу (квадратуру), точную для многочленов третьей степени, называемую *формулой Симпсона*.

В вычислениях определенного интеграла мы перешли от отрезка $[a, b]$ к отрезку $[-1, 1]$. Такой переход удобен тем, что арифметические выкладки при построении квадратурной формулы оказываются короче.

Подынтегральная функция часто приближается не многочленами, а обобщенными многочленами, т. е. линейными комбинациями вида

$$\sum_{j=0}^m b_j \varphi_j(x),$$

где $\varphi_j(x)$ – линейно независимые функции. Методом неопределенных коэффициентов строится квадратура.

Когда подынтегральную функцию можно представить в виде произведения некоторой фиксированной функции $p(x)$ и многочлена, то квадратурная формула находится в виде

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{j=1}^n C_j F(x_j). \quad (2)$$

Функцию $p(x)$ называют *весом*, или *весовой функцией*; квадратурная формула в этом случае точна для всех многочленов степени m .

2. Оценки погрешности квадратурной формулы

Нужно вычислить интеграл (2) в разд. 1. Если квадратура точна для многочленов $P_m(x)$ степени m , то

$$R(P_m) = I(P_m) - S(P_m) = 0,$$

поэтому

$$R(f) = R(f - P_m) + R(P_m) = R(f - P_m)$$

при любом многочлене степени m . Оценив в $R(f)$ каждое слагаемое, получим оценку

$$|R(f)| \leq \int_a^b |f(x)| |p(x)| dx + \sum_{j=1}^n |C_j| |f(x_j)| \leq V \sup_{[a,b]} |f(x)|, \quad (1)$$

где

$$V = \int_a^b |p(x)| dx + \sum_{j=1}^n |C_j|.$$

Очевидно, что погрешность квадратурной формулы оценивается

$$|R(f)| \leq |R(f - P_m)| \leq V \|f - P_m\|_C$$

при любом $P_m(x)$, норма определяется по формуле

$$\|f - P_m\|_C = \sup_{[a,b]} |f(x) - P_m(x)|.$$

Возьмем нижнюю грань по всем многочленам степени m , получим оценку

$$|R(f)| \leq V \inf_{P_m} \|f - P_m\|_C. \quad (2)$$

Условие, что квадратура точна для многочлена нулевой степени, имеет вид

$$I(1) = \int_a^b p(x) dx = S(1) = \sum_{j=1}^n C_j.$$

При $p(x) \geq 0$ и $C_j \geq 0$ имеем

$$\sum_{j=1}^n |C_j| = \sum_{j=1}^n C_j = \int_a^b p(x) dx,$$

поэтому $V = 2 \int_a^b p(x) dx$. По формуле (1) получаем оценку погрешности

$$|R(f)| \leq 2 \left(\int_a^b p(x) dx \right) \|f - P_m\|_C.$$

Если в качестве $P_m(x)$ взять интерполяционный многочлен по нулям многочлена Чебышева, то получим

$$\|f - P_m\|_C \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+1}}{2^m (m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_C.$$

В конкретном случае для веса $p(x) \equiv 1$ и формул прямоугольников, трапеций и Симпсона имеем $V = 2(b-a)$ и

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^{m+2}}{2^{2m}(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_C.$$

Для формул прямоугольников и трапеций ($m=1$) погрешность квадратурной формулы

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{8} \|f''\|_C;$$

для формулы Симпсона ($m=3$)

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{1536} \|f^{(4)}\|_C.$$

Можно получить и более точные формулы оценки погрешности.

Рассмотрим универсальный способ получения наиболее точных оценок. В качестве многочлена $P_m(x)$ возьмем сумму первых $m+1$ членов разложения функции по формуле Тейлора в точке x_0 отрезка $[a, b]$. Обозначим сумму — $P_m(x)$, остаточный член — $r_m(x)$, тогда функция примет вид

$$f(x) = P_m(x) + r_m(x).$$

Возьмем остаточный член в интегральной форме:

$$r_m(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt.$$

Подставим эту оценку в интеграл

$$I(r_m(x)) = \int_a^b p(x) \left(\int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt \right) dx$$

и сменим порядок интегрирования. Получим

$$I(r_m(x)) = \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) dt,$$

где
$$K(t) = \int_t^b p(x) \frac{(x-t)^m}{m!} dx.$$

Таким образом, оценка погрешности примет вид

$$R(f) = \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) dt - \sum_{j=1}^n C_j \int_a^{x_j} \frac{(x_j-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt.$$

Образуем новую функцию

$$(x_j - t)_+ = \begin{cases} x_j - t, & t \in [a, x_j]; \\ 0, & t \notin [a, x_j]. \end{cases}$$

Используя новое обозначение, получим погрешность в виде

$$R(f) = \int_a^b Q(t) f^{(v+1)}(t) dt, \quad Q(t) = K_m(t) - \sum_{j=1}^n C_j \frac{(x_j - t)_+^m}{m!}. \quad (3)$$

Отсюда следует оценка погрешности

$$|R(f)| \leq \left(\int_a^b |Q(t)| dt \right) \|f^{(m+1)}\|_C. \quad (4)$$

Если $Q(t)$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$, то по теореме о среднем из формулы (3) получаем

$$|R(t)| = \left(\int_a^b Q(t) dt \right) f^{(m+1)}(\zeta), \quad a \leq \zeta \leq b. \quad (5)$$

Оценим погрешность формулы трапеций:

$$\int_t^b (x-t) dt = \frac{(b-t)^2}{2},$$

$$Q(t) = \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{(b-a)}{2} (b-t) = (a-t)(b-t) \leq 0.$$

Подставляя $Q(t)$ в формулу (5), получим

$$\int_a^b Q(t)dt = -\frac{(b-a)^3}{12}, R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta_1).$$

В случае формулы прямоугольников

$$Q(t) = \frac{(b-t)^2}{2} - (b-a)\left(\frac{a+b}{2} - t\right) = \frac{(t - (a+b)/2)^2}{2} \geq 0;$$

подставляя $Q(t)$ в формулу (5), получим

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\zeta_2).$$

Контрольные вопросы

1. Понятие квадратурной формулы.
2. Формула трапеций.
3. Погрешность квадратурной формулы.
4. Формула Симпсона.
5. Понятие оценки погрешности.
6. Оценки погрешности для формул прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Л е к ц и я 2

Числа и многочлены Бернулли

1. Числа Бернулли

Многочлены и числа Бернулли потребуются для построения формул Эйлера – Маклорена и других формул, служащих для увеличения точности приближенных квадратур.

Числа Бернулли могут быть определены с помощью производящей функции. Пусть t – комплексная переменная. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{t}{e^t - 1}. \quad (1)$$

Точки $t = 2k\pi i$, где k – любое целое число, являются нулями знаменателя; все они простые. В круге $|t| < 2\pi$ функция $g(t)$ регулярна и может быть разложена в степенной ряд по степеням t :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum \frac{B_n}{n!} t^n, \quad |t| < 2\pi. \quad (2)$$

Числа B_n называются *числами Бернулли*.

Если в формуле (2) обе части умножить на $e^t - 1 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v}{v!}$, то получится следующее равенство:

$$\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = t.$$

Из формулы видно, что $B_0 = 1$, и для $n = 2, 3, \dots$ должно выполняться равенство

$$\frac{B_0}{n!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \frac{B_2}{(n-2)!2!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = 0$$

Это равенство позволяет последовательно вычислить все числа Бернулли. Ему можно придать более удобную форму, если умножить обе части на $n!$ и прибавить в обеих частях B_n :

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k = B_n.$$

Можно проверить, что все числа Бернулли с нечетными индексами, большими единицы, равны нулю:

$$B_{2k+1} = 0, k > 0. \quad (3)$$

Значения нескольких первых чисел Бернулли с четными индексами имеют вид

$$B_0 = 1, B_2 = -\frac{1}{6}, B_4 = \frac{1}{30}, B_6 = -\frac{1}{42},$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}.$$

При вычислении чисел Бернулли четных номеров используется формула

$$B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} (1 + 2^{-2k} + 3^{-2k} + 4^{-2k} + \dots). \quad (4)$$

При больших k справедливо приближенное равенство

$$B_{2k} \approx 2(-1)^{k-1} (2k)! (2\pi)^{-2k}.$$

2. Многочлены Бернулли

Определим многочлены Бернулли с помощью производящей функции

$$g(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1}. \quad (1)$$

Функция регулярна в круге $|t| < 2\pi$ и может быть разложена в ряд по степеням t :

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n. \quad (2)$$

Функция $B_n(x)$ является многочленом степени n и называется *многочленом Бернулли*. Получим формулу для многочлена Бернулли.

Множитель e^{xt} в формуле (1) заменим рядом $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu} t^{\nu}}{\nu!}$ и дробь $\frac{t}{e^t - 1}$ заменим по формуле (1.2). Тогда получим тождество

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu} t^{\nu}}{\nu!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n, |t| < 2\pi.$$

Сравнение коэффициентов при t^n приводит к равенству

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{x^n B_0}{n!} + \frac{x^{n-1} B_1}{(n-1)! 1!} + \dots + \frac{B_n}{n!}.$$

После умножения на $n!$ получается выражение для $B_n(x)$:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_{n-k} x^k. \quad (3)$$

Формула (3) показывает, что многочлен Бернулли есть многочлен, старший член которого равен x^n .

Рассмотрим некоторые свойства многочленов Бернулли.

1. Начальные значения многочленов Бернулли при $x = 0$ соответствуют числам Бернулли:

$$B_n(0) = B_n. \quad (4)$$

Это видно из формулы (3).

2. Дифференцируемость и интегрируемость $B_n(x)$.

Вычислим производную от производящей функции:

$$te^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} t^n.$$

Левая часть отличается от производящей функции только множителем t , поэтому

$$te^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^{n+1}. \quad (5)$$

Отсюда

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x). \quad (6)$$

Правило интегрирования многочленов Бернулли следует из формул (5) и (6):

$$B_n(x) = B_n + n \int_0^x B_{n-1}(t) dt. \quad (7)$$

3. Свойство преобразования аргумента многочлена Бернулли, следующее из теоремы об умножении аргумента.

Пусть m – любое положительное число

$$e^{mxt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(mx)}{n!} t^n.$$

С другой стороны, может быть получено разложение

$$\begin{aligned} e^{mxt} \frac{t}{e^t - 1} &= \frac{1}{m} e^{mxt} \frac{mt(1 + e^t + \dots + e^{(m-1)t})}{e^{mt} - 1} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{e^{(x+\frac{s}{m})mt} mt}{e^{mt} - 1} = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x + \frac{s}{m}) m^n}{n!} t^n. \end{aligned}$$

Из двух последних разложений следует теорема об умножении аргумента:

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_n(x + \frac{s}{m}). \quad (8)$$

4. Свойство неоднозначного представления многочлена Бернулли, вытекающее из теоремы о представлении многочленов $B_n(x)$.

Чтобы изучить поведение $B_n(x)$, нужно ввести новую переменную $z = x(1-x)$. Всякий многочлен $B_n(x)$ четного номера $n = 2k$ может быть разложен по степеням z :

$$(-1)^k [B_{2k}(x) - B_{2k}] = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k,v} z^{k-v}, \quad (9)$$

причем $F_{k,0} = 1$, и $F_{k,v} > 0$ ($v = 1, 2, \dots, k-2$). Всякий многочлен Бернулли нечетного номера $n = 2k-1$ может быть представлен в форме

$$(-1)^k B_{2k-1}(x) = (1-2x) \sum_{v=0}^{k-2} H_{k,v} z^{k-1-v}, \quad (10)$$

где все коэффициенты $H_{k,v}$ ($v = 0, 1, \dots, k-2$) положительные.

5. Свойство симметрии распределения значений $B_n(x)$.

Рассмотрим точку $x = \frac{1}{2}$ на оси x . Точки x и $1-x$ расположены симметрично на единичном отрезке. Переменная $z = x(1-x)$ не изменит своего значения при замене x на $1-x$. Из этих рассуждений и формулы (9) следует, что

$$B_{2k}(1-x) = B_{2k}(x). \quad (11)$$

График многочлена $B_{2k}(x)$ является линией, симметричной относительно прямой $x = \frac{1}{2}$.

В формуле (10) множитель $\sum_{v=0}^{k-2} H_{k,v} z^{k-1-v}$ принимает одинаковые значения в точках x и $1-x$. Множитель $(1-2x)$ при замене x на $1-x$ сохраняет абсолютную величину, но изменяет знак:

$$B_{2k-1}(1-x) = -B_{2k-1}(x). \quad (12)$$

График многочлена $B_{2k-1}(x)$ имеет центр симметрии в точке $x = \frac{1}{2}$.

При $x = 0$ из (11) получается $B_{2k}(1) = B_{2k}$; из (12) при $k \geq 2$ следует $B_{2k-1}(1) = -B_{2k-1}$. Каждый многочлен Бернулли, кроме $B_1(x)$, на концах отрезка $[0,1]$ принимает одинаковые значения:

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n. \quad (13)$$

6. Характерное изменение многочленов Бернулли на отрезке $[0, 1]$.

Нам потребуются значения $B_n\left(\frac{1}{2}\right)$, которые можно вычислить с помощью теоремы об умножении аргумента. Если в формуле (8) положить $m = 2$ и $x = \frac{1}{2}$, то получим

$$B_n(1) = 2^{n-1} \left[B_n\left(\frac{1}{2}\right) + B_n(1) \right].$$

Но так как $B_n(1) = B_n$ ($n > 1$), то при любом n

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -(1 - 2^{-n+1})B_n. \quad (14)$$

Вместо многочленов Бернулли будем использовать более удобные для записи многочлены

$$y_n(x) = B_n(x) - B_n.$$

Вычислим сначала многочлен четного номера $n = 2k$. По формуле (9) имеем

$$(-1)^k y_{2k}(x) = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k,v} z^{k-v}. \quad (15)$$

Точки $x = 0$ и $x = 1$ являются нулями функции $y_k(x)$. Исследование функции (15) показывает, что при изменении x от 0 до $\frac{1}{2}$ многочлен $(-1)^k y_{2k}(x)$ будет возрастать от 0 до

$(-1)^k y_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left| B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2k} \right| = (2 - 2^{-2k+1})|B_{2k}|$. Когда x изменяется

от $\frac{1}{2}$ до 1, функция убывает до 0.

Рассмотрим теперь многочлен $y_n(x)$ нечетного номера $n = 2k - 1$. Будем считать $k \geq 2$, тогда

$$\left. \begin{aligned} y_{2k-1}(x) &= B_{2k-1}(x) \\ (-1)^k y_{2k-1}(x) &= (1-2x) \sum_{v=0}^{k-2} H_{k,v} z^{k-1-v}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Точки $x = 0$ и $x = 1$ являются нулями функции $y_{2k-1}(x)$. Из формулы (16) следует, что $x = \frac{1}{2}$ есть простой нуль $y_{2k-1}(x)$ и других нулей на отрезке $[0,1]$ этот многочлен не имеет. Знак функции $y_{2k-1}(x)$ определяется неравенствами

$$(-1)^k y_{2k-1}(x) > 0 \text{ при } 0 < x < \frac{1}{2},$$

$$(-1)y_{2k-1}(x) < 0 \text{ при } \frac{1}{2} < x < 1.$$

На рис. 1 изображены графики различных многочленов Бернулли.

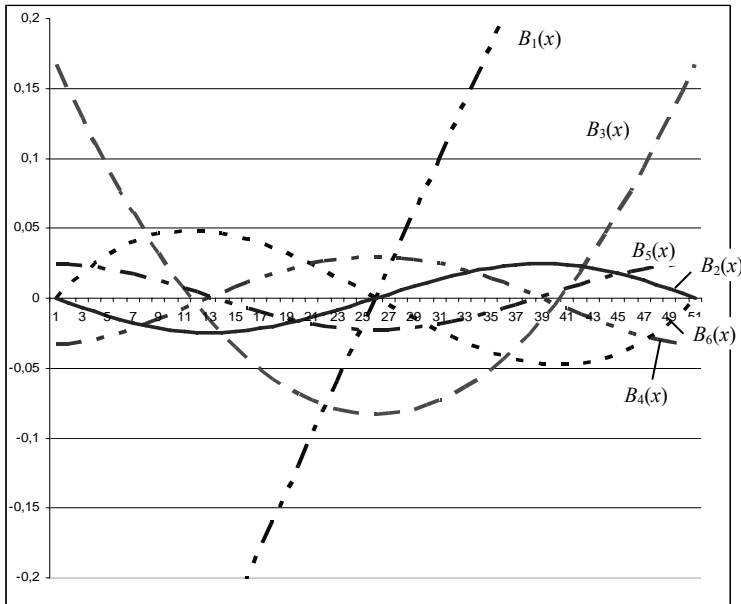


Рис. 1

Приведем несколько первых многочленов Бернулли в аналитической форме

$$B_0(x) = 1;$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2};$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6};$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x;$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30};$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x;$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42};$$

$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x;$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30};$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x;$$

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}.$$

3. Периодические функции, связанные с многочленами Бернулли

Наряду с многочленами Бернулли можно ввести периодические функции Бернулли $B_n^*(x)$ с периодом, равным 1, определенные по формулам

$$B_n^*(x) = B_n(x), \quad 0 \leq x < 1,$$

$$B_n^*(x+1) = B_n^*(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

тогда $B_0^*(x)$ — есть постоянная, равная 1; $B_1^*(x)$ — разрывная функция и имеет скачок величиной (-1) в целых точках; $B_n^*(x)$ при $n > 1$ — непрерывная функция.

Построим тригонометрические ряды Фурье для $B_n^*(x)$. С этой целью построим ряд Фурье для производящей функции

$$g(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1}$$

при $0 \leq x < 1$. Воспользуемся записью ряда в показательной форме

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i2\pi mx};$$

$$C_m = \int_0^1 g e^{-i2\pi mx} dx = \frac{t}{e^t - 1} \int_0^1 e^{xt} e^{-i2\pi mx} dx = \frac{t}{t - i2\pi m}.$$

$C_0 = 1$. Объединив члены ряда, соответствующие значениям индекса m и $-m$, получим:

$$g(x, t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{t}{t - i2\pi m} e^{i2\pi mx} + \frac{t}{t + i2\pi m} e^{-i2\pi mx} \right].$$

Можно показать, что для любых значений x на отрезке $[0, 1]$ ряд, стоящий в правой части равенства, будет сходиться при всяких t , отличных от $i2k\pi$ при $k = 0, \pm 1, \dots$. При этом, если исключить из ряда несколько первых членов, имеющих полюсы в ограниченной части σ плоскости t , то оставшийся ряд будет сходиться равномерно относительно t в σ . Легко можно оправдать возможность изменения порядка суммирования при построении степенного ряда для функции $g(x)$.

Если считать $|t| < 2\pi$ и разложить правую часть по степеням t ,

$$\frac{t}{t - i2\pi m} = -\frac{t}{i2\pi m} \frac{1}{1 - \frac{t}{i2\pi m}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{i2\pi m} \right)^n,$$

$$\frac{t}{t + i2\pi m} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{t}{i2\pi m} \right)^n,$$

то коэффициентом при t^n будет тригонометрический ряд для $\frac{B_n(x)}{n!}$.

$$g(x, t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(i2\pi m)^n} t^n e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{(i2\pi m)^n} t^n e^{i2\pi m x} \right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(i2\pi)^n} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{m^n} e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{m^n} e^{i2\pi m x} \right].$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t для $n > 1$, получим

$$B_n^*(x) = \frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{m^n} e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{m^n} e^{i2\pi m x} \right].$$

Для четных и нечетных индексов вычисления дают следующие результаты:

$$B_{2k}^* = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m x}{m^{2k}}, \quad (1)$$

$$B_{2k+1}^*(x) = \frac{(-1)^{k-1} (2k+1)!}{2^{2k} \pi^{2k+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m x}{m^{2k+1}}. \quad (2)$$

4. Разложение произвольной функции по многочленам Бернулли

При построении квадратурной формулы приближенного вычисления, определенного интеграла необходимо разложение подынтегральной функции по многочленам Бернулли. Рассмотрим теорему.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ ν -кратно непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$, то при любом $x \in [0,1]$ имеет место равенство

$$f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{B_k(x)}{k!} [f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)] - \frac{1}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(t) [B_\nu^*(x-t) - B_\nu^*(x)] dt. \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\rho_\nu(x) = \frac{1}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(t) B_\nu^*(x-t) dt.$$

Считая $\nu > 1$, выполним интегрирование по частям:

$$\rho_\nu = \frac{B_\nu(x)}{\nu!} [f^{(\nu-1)}(1) - f^{(\nu-1)}(0)] + \rho_{\nu-1}.$$

Если выполнить это преобразование $\nu - 1$ раз, то получим формулу разложения (1).

Разложение по многочленам Бернулли ν -кратно непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ на произвольном конечном интервале $[a, b]$ получается из формулы (1) с помощью линейного преобразования аргумента:

$$f(x) = \frac{1}{h} \int_a^b f(t) dt + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{h^{k-1} B_k\left(\frac{x-a}{h}\right)}{k!} [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] - \frac{h^{\nu-1}}{\nu!} \int_a^b f^{(\nu)}(t) \left[B_\nu^*\left(\frac{x-t}{h}\right) - B_\nu^*\left(\frac{x-a}{h}\right) \right] dt, \quad h = b - a. \quad (2)$$

Контрольные вопросы

1. Производящая функция, необходимая для вычисления чисел Бернулли. Числа Бернулли и их свойства.
2. Производящая функция, необходимая для построения многочленов Бернулли.
3. Чему равны начальные значения многочленов Бернулли?
4. Дифференцирование и интегрирование многочленов Бернулли.
5. Теорема об умножении аргумента в многочлене Бернулли.
6. Симметрия распределения значений многочленов Бернулли.
7. Характер изменения многочленов Бернулли на отрезке $[0, 1]$.
8. Понятие периодических функций Бернулли.
9. Разложение произвольной функции по многочленам Бернулли.

Л е к ц и я 3

Квадратурные формулы и задачи, связанные с ними

1. Квадратурные суммы

Рассматривается задача нахождения численного значения однократного интеграла. Геометрический смысл вычисления определенного интеграла сводится к вычислению площади криволинейной трапеции, или квадратуры. Рассмотрим методы построения квадратур, которые позволяют приближенно вычислить интеграл с помощью конечного числа значений интегрируемой функции и производных от нее.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx;$$

где $[a, b]$ – любой конечный отрезок на числовой оси; $f(x)$ – произвольная функция некоторого класса. Функция $p(x)$ есть некоторая фиксированная функция.

Простейшие квадратурные формулы, позволяющие приближенно находить значения интеграла, задаются в форме линейной комбинации нескольких значений функции

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (1)$$

Сумма $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ называется *квадратурной суммой*. Равенства вида (1) называются механическими квадратурами, поскольку им легко можно придать механический смысл, т. е. они содержат $2n + 1$ параметров: n узлов x_k , n коэффициентов A_k и число узлов n . Все эти параметры нужно подобрать так, чтобы формула (1) давала достаточно малую погрешность для всех функций $f(x)$ из некоторого класса функций F . При построении квадратурной формулы нужно

стремиться к тому, чтобы при заданном n постараться выбрать узлы x_k и веса A_k так, чтобы точность вычислений была наивысшей.

Рассмотрим различные способы задания узлов и весов.

1. Допустим, что нам задан класс F функций $f(x)$. Рассмотрим систему функций

$$\omega_m(x) \quad (m=1,2,\dots) \quad (2)$$

таких, что произведения $p(x)\omega_m(x)$ суммируемы на $[a,b]$. образуем линейную комбинацию

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(x).$$

При вычислении интеграла $\int_a^b p f dx$, за «расстояние» между функцией f и линейной комбинацией s_n можно принять величину

$$\rho(f, s_n) = \int_a^b |p(f - s_n)| dx. \quad (3)$$

Систему (3) будем считать полной в классе F . Это означает, что для каждой функции $f \in F$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая линейная комбинация s_n , для которой $\rho(f, s_n) < \varepsilon$.

Оценим погрешность квадратурной формулы

$$\left| \int_a^b p f dx - \int_a^b p s_n dz \right| < \int_a^b |p(f - s_n)| dx = \rho(f, s_n).$$

Из неравенства видно, что интеграл $\int_a^b p f dx$ может быть вычислен со сколь угодно высокой точностью, если интегрируемую функцию заменить специально подобранной линейной комбинацией. Очевидно, что точность вычислений будет тем выше, чем большее число первых функций ω_k будем брать при образовании s_n . Таким образом, приходим к выводу, что нужно стремиться выбором x_k и A_k

добиться того, чтобы формула (1) давала точный результат для возможно большего числа первых функций $\omega_n(x)$.

В связи с этим вводится новое понятие: равенство (1) имеет *степень точности* m относительно функций (2), если оно верно для $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$

$$\int_a^b p \omega_i dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_i(x_k) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

и не верно для ω_{m+1} . Этот путь выбора x_k и A_k есть путь повышения степени точности равенства (1). Особый интерес имеют формулы, которые обладают наивысшей возможной степенью точности.

Если класс функций F задан, то при построении равенства (1) остается произвол в выборе системы функций $\omega_n (n = 1, 2, \dots)$. Требование полноты, которому должна удовлетворять система, не полностью определяет систему и дает широкие возможности выбора $\omega_n(x)$.

Приведем примеры выбора $\omega_n(x)$. Пусть $[a, b]$ есть любой конечный отрезок. Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P(x)$, отличающийся от $f(x)$ меньше чем на ε :

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Это свойство называется свойством полноты алгебраических многочленов в пространстве непрерывных функций C . Отсюда следует полнота системы многочленов в смысле метрики (3).

Примем систему степеней $x: 1, x, x^2, \dots$ за функции $\omega_n(x)$. Будем считать, что равенство (1) имеет *алгебраическую степень точности* m , если оно верно для всевозможных многочленов степени m и не верно для многочленов степени $m + 1$. Это равносильно тому, что равенство

$$\int_a^b p x^i dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^i$$

выполняется для $i = 0, 1, \dots, m$ и не будет выполняться для $i = m + 1$.

Можно ожидать, что квадратурная формула (1) будет иметь тем меньшую погрешность для многих непрерывных на отрезке функций, чем выше будет ее алгебраическая степень точности.

2. Пусть задан класс F функций f . Постараемся построить квадратурную формулу (1) так, чтобы она была «наилучшей». Для каждой функции f погрешность формулы (1) имеет значение

$$R(f) = \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций f , может быть взята верхняя грань $|R(f)|$:

$$R = \sup_f |R(f)|.$$

Можно выбрать x_k и A_k так, чтобы R имело наименьшее возможное значение для всех функций $f \in F$. Такую формулу будем называть *формулой с наименьшей оценкой остатка в классе F* .

3. Рассмотренные два направления в проблеме выбора узлов и весов не являются единственными. Можно строить квадратурные формулы, подчиняя выбор узлов и весов другим целям. Нужно сделать формулу (1) верной для функции, сохраняющей постоянное значение на $[a, b]$. Это можно достичь только за счет выбора коэффициентов A_k . Если потребовать, чтобы (1) была верной для $f \equiv 1$, то получится следующее условие:

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b p(x) dx. \quad (4)$$

Предположим, что значения функции f , входящие в квадратурную сумму, находятся в результате измерений и содержат случайные погрешности. Допустим, что все $f(x_k)$ получены в результате измерений одинаковой точности.

Значение квадратурной суммы также будет содержать случайную погрешность. Поставим следующую задачу: так выбрать коэффици-

енты A_k , чтобы квадратурная сумма $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ при выполнении условия (4) имела наименьшую квадратичную погрешность. Известно, что если аргументы z_1, \dots, z_n линейной функции $y = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$ есть случайные величины, подчиняющиеся нормальным законам распределения с одной и той же квадратичной погрешностью, и если коэффициенты линейной функции подчинены условию $\sum_{k=1}^n a_k = 1$, то средняя квадратичная погрешность суммы будет иметь наименьшее значение в том случае, когда все коэффициенты равны между собой. Поэтому квадратурная формула с равными коэффициентами

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx C [f(x_1) + \dots + f(x_n)] \quad (5)$$

будет иметь наименьшую квадратичную погрешность.

2. Приближенное вычисление периодических функций

Рассмотрим конечный отрезок интегрирования $[a, b]$, который всегда можно путем линейного преобразования привести к отрезку $[0, 2\pi]$. Исследуем интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ есть 2π -периодическая функция. Будем исследовать приближенные квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(x) \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (2)$$

Узлы x_k принадлежат отрезку $0 \leq x < 2\pi$.

Для приближения периодических функций используют тригонометрические многочлены:

$$T_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (3)$$

где a_0, a_k, b_k ($k = 1, \dots, m$) – некоторые постоянные.

Формула (2) имеет *тригонометрическую степень точности* m , если она верна для всевозможных тригонометрических многочленов до степени m включительно, и существует многочлен степени $m + 1$, для которого она не верна.

Составим функцию

$$T(x) = \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{x - x_k}{2}.$$

Так как $\sin^2 \frac{x - x_k}{2} = \frac{1}{2}[1 - \cos(x - x_k)]$, то $T(x)$ есть многочлен степени n . Для него квадратурная формула (2) не может быть точной, так как $\int_0^{2\pi} T(x) dx > 0$, тогда как $\sum_{k=1}^n A_k T(x_k) = 0$. Это объясняется

тем, что все узлы x_k являются корнями многочлена $T(x)$. Тригонометрическая степень точности (2) всегда меньше n , и соответствующим выбором x_k и A_k мы можем ее сделать самое большее равной $n - 1$.

Оказывается, что наивысшая степень точности $n - 1$ достигается простейшей квадратурной формулой с равными коэффициентами

$$A_k = \frac{2\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и равноотстоящими узлами.

Рассмотрим на числовой оси любую сетку равноотстоящих точек с шагом $h = \frac{2\pi}{n}$. Пусть α есть точка сетки, ближайшая к нулю справа или совпадающая с нулем. Точки $\alpha + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) лежат на отрезке $0 \leq x < 2\pi$. Примем их за узлы x_k и построим квадратурную формулу

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\alpha + (k-1) \frac{2\pi}{n}\right). \quad (4)$$

Покажем, что она является точной для всевозможных тригонометрических многочленов до степени $n-1$ включительно. Для этого достаточно показать, что равенство (4) точное для функций e^{imx} ($m=0, 1, \dots, n-1$). В случае $m=0$ утверждение очевидно. При $1 \leq m < n-1$

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \frac{1}{im} (e^{im2\pi} - 1) = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^n e^{im[\alpha+(k-1)h]} = e^{im\alpha} \sum_{k=1}^n e^{i(k-1)mh} = e^{im\alpha} \frac{e^{imnh} - 1}{e^{imh} - 1} = e^{im\alpha} \frac{e^{im2\pi} - 1}{e^{imh} - 1} = 0,$$

что и доказывает утверждение.

3. Остаток квадратурной формулы и его представления

Значение остатка квадратурной формулы

$$R(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (1)$$

зависит от ее вида и от свойств интегрируемой функции. С помощью формулы (1) трудно проследить, какое влияние на остаток оказывают структурные свойства функции. Под структурными свойствами функции понимаются такие свойства, как ограниченность изменения, абсолютная непрерывность, выполнение условия Липшица, принадлежность к классу дифференцируемости. Чтобы упростить задачу исследования остатка $R(f)$, нужно построить другие представления остатка.

Пусть рассматривается класс F функций, обладающий каким-либо структурным свойством. Можно построить квадратурную формулу, которая способна представить всякую функцию из класса F . Такую квадратурную формулу называют *структурной формулой*.

Рассмотрим структурную формулу и представление остатка в случае, если функция $f(x)$ принадлежит классу $C_r[a, b]$. Характерное представление функций этого класса дает формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} (x-\alpha)^i + \int_{\alpha}^x f^{(r)}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (2)$$

где α – любая точка отрезка $[a, b]$.

Интеграл с переменной границей удобно заменить на определенный интеграл по отрезку $[a, b]$. Для этого нужно ввести «гасящую» функцию, позволяющую уничтожить в определенном интеграле лишние участки интегрирования. Определим «гасящую» функцию равенствами

$$E(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Равенство (2) может быть записано в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} (x-\alpha)^i + \int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \quad (3)$$

Если за параметр α принять один из концов интервала интегрирования, например $\alpha = a$, то формула (3) упростится:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \int_a^b f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad r \geq 1. \quad (4)$$

Получим представление остатка $R(f)$, характерное для класса $C_r[a, b]$. Для этого подставим формулу (3) в равенство (1):

$$R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} R[(x-\alpha)^i] + R \left[\int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt \right]. \quad (5)$$

Будем считать, что в двукратном интеграле

$$\int_a^b p(x) \int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt dx,$$

входящем в последний член правой части равенства (5), допустима перемена порядка интегрирования. Тогда остаток квадратуры примет форму

$$R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} R[(x-\alpha)^i] + \int_a^b f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (6)$$

где ядро остатка $K(t)$ имеет вид

$$K(t) = \int_a^b p(x) \{E(x-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \sum_{k=1}^n A_k \{E(x_k-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!}. \quad (7)$$

Если считать $t \neq \alpha$ и $t \neq x_k$ ($k=1, \dots, n$), то для $K(t)$ можно получить следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} t < \alpha, \quad K(t) &= -\int_a^t p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx + \sum_{x_k < t} A_k \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!}; \\ t > \alpha, \quad K(t) &= \int_t^b p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \sum_{x_k > t} A_k \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Аналогично может быть построено представление остатка для других классов функций.

Контрольные вопросы

1. Понятие квадратурной суммы.
2. Понятие степени точности квадратурной формулы.
3. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы.
4. Наилучшая квадратурная формула.
5. Квадратурная формула с наименьшей оценкой остатка.
6. Особенности приближенного вычисления периодических функций.
7. Понятие тригонометрической степени точности.
8. Понятие остатка квадратуры.
9. Понятие структурной квадратурной формулы.
10. Представление остатка, характерное для класса $C_r[a, b]$.

Л е к ц и я 4

Интерполяционные квадратурные формулы

1. Общий вид интерполяционных квадратурных формул

Для построения квадратурных сумм часто пользуются интерполированием подынтегральной функции. Во многих случаях построенные таким путем квадратурные формулы обладают хорошей точностью и удобны для применения.

Выберем на отрезке интегрирования $[a, b]$ n произвольных точек x_1, x_2, \dots, x_n и интерполируем функцию f по ее значениям в этих точках:

$$f(x) = P(x) + r(x), \quad (1)$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n). \quad (2)$$

Здесь $r(x)$ – остаток интерполирования.

Точное значение интеграла будет

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)P(x)dx + \int_a^b p(x)r(x)dx.$$

Если интерполирование (1) было достаточно точным и остаток $r(x)$ имел малые значения всюду на отрезке $[a, b]$, то вторым слагаемым можно пренебречь. После этого получится приближенное равенство

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (3)$$

где

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx. \quad (4)$$

Квадратурные формулы (3), коэффициенты которых определяются по формулам (4), называются *интерполяционными*. Для них справедлива теорема.

Теорема 1. Для того, чтобы квадратурная формула (1) была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной для всевозможных многочленов степени не выше $n - 1$.

Доказательство. Всякий многочлен $P(x)$ степени $\leq n - 1$ может быть представлен в форме

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Если коэффициенты A_k имеют значения (4), то равенство (3) будет точным для $P(x)$. Требование, чтобы равенство (3) было точным для всех многочленов степени $\leq n - 1$, равносильно тому, что при всяких $P(x_k)$ должно выполняться равенство

$$\int_a^b p(x) \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} P(x_k) dx = \sum_{k=1}^n A_k P(x_k).$$

Но тогда все коэффициенты A_k должны иметь значения, определяемые по формуле (4), и формула (3) будет интерполяционной.

Из теоремы видно, что коэффициенты A_k квадратурной формулы определяются условием, чтобы формула давала точный результат всякий раз, когда f есть многочлен степени $\leq n - 1$. Узлы квадратурной формулы x_k остаются произвольными и можно воспользоваться возможностью их выбора для достижения тех или иных целей.

Для остатка интерполяционной квадратуры можно получить более глубокие результаты, чем приведенные в лекции 2. Остаток квадратурной формулы (3) равен интегралу от остатка разложения функции $r(x)$

$$R(f) = \int_a^b p(x)r(x)dx = \int_a^b p(x)\omega(x)f(x, x_1, \dots, x_n)dx. \quad (5)$$

В более развернутом виде выражение остатка квадратуры имеет вид

$$R(f) = \int_a^b p(x)\omega(x) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)} \left(x + \sum_{v=1}^n t_v (x_v - x_{v-1}) \right) dx, \quad x_0 = x. \quad (6)$$

Если воспользоваться остатком интерполирования в форме Лагранжа $r(x) = \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\xi)$, $a < \xi < b$, то остаток квадратуры можно представить в виде

$$R(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b p(x)\omega(x) f^{(n)}(\xi) dx. \quad (7)$$

Если функция и ее производные ограничены на отрезке $[a, b]$, т. е. если выполняются неравенства

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M_n, \quad x \in [a, b], \quad (8)$$

то оценка квадратуры принимает вид

$$\left| R(f) \right| \leq M_n \int_a^b p(x)\omega(x) dx. \quad (9)$$

Если $p(x)\omega(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, то оценка (9) является точной и улучшена быть не может. Более точная оценка остатка интерполяционной квадратуры для ограниченных функций имеет вид

$$\left| R(f) \right| \leq M_n \int_a^b |K(t)| dt. \quad (10)$$

2. Формулы Ньютона – Котеса

Среди интерполяционных формул наиболее широко известны формулы Ньютона – Котеса. Они относятся к случаю постоянного веса и конечного отрезка интегрирования. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Отрезок $[a, b]$ разделим на n равных частей $h = \frac{b-a}{n}$. Построим интерполяционную квадратурную формулу с узлами $a, a+h, a+2h, \dots, a+nh=b$. Чтобы коэффициенты квадратуры не зависели от промежутка $[a, b]$, запишем формулу в виде

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(a+kh). \quad (2)$$

Величины $B_k^n = (b-a)^{-1} A_k$ будут иметь значения

$$B_k^n = (b-a)^{-1} \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-a-kh)\omega'(a+kh)} dx,$$

где $\omega(x) = (x-a)(x-a-h)\dots(x-a-nh)$. Если ввести новую переменную t , положив $x = a+th$, то

$$\omega(x) = h^{n+1} t(t-1)(t-2)\dots(t-n), \quad x-a-kh = h(t-k),$$

$$\omega'(a+kh) = (-1)^{n-k} h^n k!(n-k)!,$$

и таким образом,

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n t(t-1)\dots(t-k+1)(t-k-1)\dots(t-n) dt. \quad (3)$$

Котесом были вычислены коэффициенты для n от 1 до 10. Анализ поведения коэффициентов B_k^n при изменении номера k , начиная с $n=6$, показывает, что они «ведут себя неправильно», часть коэффициентов отрицательная. Поэтому нужно асимптотическое представление коэффициентов:

при $1 \leq k \leq n-1$

$$B_k^n = \frac{(-1)^{k-1} n!}{k!(n-k)! n \ln^2 n} \left[\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n-k} \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 n} \right) \right], \quad (4)$$

при $k=0, \quad k=n$

$$B_0^n = B_n^n = \frac{1}{n \ln n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right) \right]. \quad (5)$$

Из полученных коэффициентов видно, что при больших значениях n в формуле Ньютона – Котеса будут встречаться как положительные, так и отрицательные коэффициенты, с большими значениями по абсолютной величине. Отсюда следует, что малые ошибки в вычислении значений функции $f(a + kh)$ могут дать большую погрешность в квадратурной сумме. Поэтому формулы Ньютона – Котеса непригодны для вычислений при большом числе узлов.

Найдем более простое и удобное для приложений выражение остатка для формул Ньютона – Котеса. По формуле (5) в лекции 1 имеем

$$R(f) = \int_a^b \omega(x) f(x, a, h, \dots, a + nh) dx. \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда n – четное число и в квадратурной формуле берется нечетное число узлов. Многочлен $\omega(x) = (x - a)(x - a - h) \dots (x - a - nh)$ будет обладать свойством $\omega(a + z) = -\omega(a + nh - z)$, и график его будет симметричным относи-

тельно середины отрезка $[a, b]$. Введем функцию $\Omega(x) = \int_a^x \omega(t) dt$. Для

нее справедливо $\Omega(a) = 0$, $\Omega(a + nh) = \Omega(b) = 0$. Покажем, что $\Omega(x)$ не обращается в нуль нигде внутри $[a, b]$. Для этого рассмотрим ин-

тегралы $I_\nu = \int_{a+\nu h}^{a+(\nu+1)h} \omega(x) dx$. Утверждение будет доказано, если устано-

вить, что последовательность чисел $I_0, I_1, \dots, I_{\frac{n}{2}-1}$ убывает по абсолютной величине.

Если в интеграле $I_v = \int_{a+vh}^{a+(v+1)h} (x-a)(x-a-h)\dots(x-a-nh)dx$ заменить переменную x , положив $x = y + h$, то он преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I_v &= \int_{a+(v-1)h}^{a+vh} (y-a+h)\dots(y-a)\dots(y-a-(n-1)h)dy = \\ &= \int_{a+(v-1)h}^{a+vh} \frac{y-a+h}{y-a-nh} \omega(y)dy = \\ &= \frac{\eta-a+h}{\eta-a-nh} I_{v-1}, \quad a+(v-1)h < \eta < a+vh. \end{aligned}$$

Чтобы последовательность интегралов была убывающая, должно выполняться неравенство $\eta - a + h < nh - \eta + a$, или $\eta - a < \frac{n-1}{2}h$.

Последнее неравенство выполняется, поскольку

$$\eta < a + nh, \quad \eta - a < vh \leq \left(\frac{n}{2} - 1\right)h.$$

Проинтегрируем формулу (6) по частям и применим теорему о среднем значении:

$$\begin{aligned} R(f) &= \Omega(x)f(x, a, \dots, a+nh) \Big|_a^b - \int_a^b f'_x(x, a, \dots, a+nh)\Omega(x)dx = \\ &= -f'_x(\eta, a, \dots, a+nh) \int_a^b \Omega(x)dx, \quad a < \eta < b. \end{aligned}$$

Так как

$$f(x, a, \dots, a+nh) = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} f^{(n+1)}(x + t_1(a-x) + h \sum_{v=2}^{n+1} t_v),$$

то

$$f'_x(x, a, \dots, a+nh) = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} (1-t_1) f^{(n+2)}(x + t_1(a-x) + h \sum_{v=2}^{n+1} t_v).$$

Применим теорему о среднем к последнему интегралу:

$$f'_x(\eta, a, \dots, a + nh) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}, \quad a < \xi < b.$$

Получаем

$$\int_a^b \Omega(x) dx = x\Omega(x) \Big|_a^b - \int_a^b x\Omega'(x) dx = - \int_a^b x\omega(x) dx.$$

Доказано, что для остатка интерполяционной квадратуры Ньютона – Котеса верно равенство

$$R(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x\omega(x) dx. \quad (7)$$

Найдем знак остатка. Функция $\Omega(x) = \int_a^x \omega(t) dt$ сохраняет знак на отрезке $[a, b]$, поэтому достаточно выяснить ее знак в одной точке, например $x = a + h$

$$\Omega(a + h) = \int_a^{a+h} \omega(t) dt.$$

При $a < t < a + h$ в произведении $\omega(t) = (t-a)(t-a-h)\dots(t-a-nh)$ первый множитель положительный, все остальные отрицательные и $\text{sign}\Omega(t) = (-1)^n$, $t \in (a, b)$. Так как $\int_a^b x\omega(x) dx = - \int_a^b \Omega(x) dx$, то

$\int_a^b x\omega(x) dx = (-1)^{n+1} = -1$ ввиду четности n . Таким образом, дока-

зана теорема 2.

Теорема 2. Если число узлов $n + 1$ в формуле (2) Ньютона – Котеса нечетное и функция f имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка $n + 2$, то внутри $[a, b]$ существует точка ξ такая, что для остатка $R(f)$ квадратурной формулы верно равенство (7). Коэффициент при $f^{(n+2)}(\xi)$ – отрицателен.

Отметим два следствия из этой теоремы.

1. Если число узлов $n + 1$ в формуле (2) нечетное, то алгебраическая степень точности формулы равна $n + 1$.

Это видно из представления остатка в равенстве (7). Формула (2) будет точной всякий раз, когда f есть многочлен степени $\leq n + 1$. Если f есть многочлен степени $n + 2$, то $f^{(n+2)}$ будет величиной, отличной от нуля и $R(f) \neq 0$.

2. Будем считать, что производная $f^{(n+2)}$ существует и есть непрерывная на $[a, b]$ функция; составим представление остатка. Положим $r = n + 2$, для остатка получится выражение

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+2)}(t)K(t)dt. \quad (8)$$

При $p(x) \equiv 1$ ядру остатка можно придать форму

$$K(t) = \frac{(b-t)^{n+2}}{(n+2)!} - \sum_{k=1}^n A_k E(a+kh-t) \frac{(a+kh-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Видно, что ядро остатка $K(t)$ есть неположительная функция с постоянным знаком на $[a, b]$. Действительно, из формулы (7) видно, что коэффициент при $f^{(n+2)}(\xi)$ – отрицательный и должно выполняться условие $K(t) \leq 0$.

Докажем теорему 3, аналогичную теореме 2, но для четного числа узлов.

Теорема 3. Если число узлов $n + 1$ в формуле Ньютона – Котеса (2) четное и f имеет непрерывную на $[a, b]$ производную порядка $n + 1$, то внутри $[a, b]$ существует точка ξ такая, что для остатка $R(f)$ квадратуры (2) верно равенство (9). Коэффициент при $f^{(n+1)}(\xi)$ есть число отрицательное.

Доказательство. Пусть n – нечетное число, а число узлов в формуле (2) – четное. В этом случае многочлен $\omega(x)$ в точках, равноотстоящих от концов отрезка, принимает одинаковые значения:

$\omega(a+z) = \omega(a+nh-z)$. График многочлена будет линией, симметричной относительно прямой $x = \frac{a+b}{2}$.

Чтобы упростить выражение остатка в формуле (6), разделим отрезок $[a, b]$ на две части: $[a, a+(n-1)h]$ и $[a+(n-1)h, b]$. На втором отрезке многочлен $\omega(x)$ сохраняет знак, и к интегралу на этом отрезке можно применить теорему о среднем значении.

Тогда погрешность квадратурной формулы имеет вид

$$R(f) = \int_a^{a+(n-1)h} \omega(x) f(x, a, \dots, a+nh) dx + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{a+(n-1)h}^b \omega(x) dx = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим первый из интегралов в правой части. Отделим в многочлене $\omega(x)$ множитель $x - a - nh$ и положим $\omega(x) = (x - a - nh)\omega_1(x)$. Следовательно,

$$I = \int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) f(x, a, \dots, a+(n-1)h) dx - f(a, \dots, a+nh) \int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) dx.$$

Так как интеграл $\int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) dx = 0$, то второй член в выражении для I_1 исчезает. Первый член есть интеграл вида (6) и его можно привести к виду

$$I_1 = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_a^{a+(n-1)h} x \omega_1(x) dx.$$

Коэффициент при $f^{(n+1)}(\xi_2)$ есть число отрицательное. Для остатка $R(f)$ получим

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_a^{a+(n-1)h} \omega(x) dx + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{a+(n-1)h}^b \omega(x) dx.$$

Ввиду того, что коэффициенты при $f^{(n+1)}(\xi_2)$ и $f^{(n+1)}(\xi_1)$ отличны от нуля и одного знака, а $f^{(n+1)}(x)$ есть непрерывная функция, то между ξ_1 и ξ_2 существует такая точка ξ , что

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)^b}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx. \quad (9)$$

Теорема доказана.

Из теоремы следуют два утверждения.

1. Если число узлов $n+1$ в формуле (2) – четное, то алгебраическая степень точности (2) равна $n+1$.

2. Если число узлов $n+1$ в (2) – четное и функция f имеет непрерывную производную порядка $n+1$ на $[a, b]$, то остаток формулы (2) можно представить в форме

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt, \quad (10)$$

где ядро остатка $K(t)$ есть знакопостоянная неположительная функция на $[a, b]$:

$$K(t) = \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^n A_k E(a+kh-t) \frac{(a+kh-t)^n}{n!}. \quad (11)$$

3. Простейшие формулы Ньютона – Котеса

Формулы Ньютона – Котеса с большим числом узлов редко применяются в вычислительной практике. Предпочитают пользоваться формулами с малым числом узлов. Для уменьшения погрешности результата предварительно разбивают отрезок $[a, b]$ на достаточно большое число малых интервалов и к каждому из них применяют квадратурную формулу с малым числом узлов.

Пусть $n = 1$. В этом случае интерполирование функции f выполняется по двум ее значениям на концах отрезка интегрирования. Равенство (2) приводится к известной формуле трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]. \quad (1)$$

Так как $\omega(x) = (x-a)(x-b)$, то формула остатка имеет вид

$$R = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (2)$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$, рассмотрим частичный отрезок $[a+kh, a+(k+1)h]$ и к нему применим формулу (1)

$$\begin{aligned} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(a+kh) + f(a+(k+1)h)] + \\ &+ \frac{h^2}{2!} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f''(t) y_2^* \left(\frac{a+kh-t}{h} \right) dt. \end{aligned}$$

После суммирования по всем частичным отрезкам получим формулу трапеций с остатком в виде определенного интеграла

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h \left[\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] + \frac{h^2}{2!} \int_a^b f''(t) y_2^* \left(\frac{a-t}{h} \right) dt, \quad (3) \\ h &= \frac{b-a}{n}, \quad f = f(a+kh). \end{aligned}$$

Поскольку ядро остатка знакопостоянное, к интегралу может быть применена теорема о среднем значении и остаток принимает вид

$$R(f) = -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\xi).$$

Разберем другой случай и положим $n = 2$. Интерполирование функции f выполняется по значениям в трех точках: $a, \frac{a+b}{2}, b$. Квадратурная формула (2) из лекции 2 будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (4)$$

Остаток, найденный с помощью формулы (7) из лекции 2, имеет вид

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b x(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi). \quad (5)$$

Считая n четным числом, разделим $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Возьмем удвоенный частичный отрезок $[a + (k-1)h, a + (k+1)h]$ и применим к нему формулу (4):

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x)dx = 2h \left[\frac{1}{6} f_{k-1} + \frac{4}{6} f_k + \frac{1}{6} f_{k+1} \right] + \frac{2}{9} h^4 \int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f^{(4)}(t) \left\{ y_4^* \left(\frac{a + (k-1)h - t}{2h} \right) + 2y_4^* \left(\frac{a + kh - t}{2h} \right) - \frac{1}{8} \right\} dt.$$

Применяя это равенство к отрезкам

$$[a, a + 2h], [a + 2h, a + 4h], \dots, [a + (n-2)h, a + nh]$$

и суммируя результаты, получим *формулу парабол*, или *правило Симпсона*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})] + R(f), \quad (6)$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi). \quad (7)$$

При $n = 3$ получим формулу, которая называется *правилом трех восьмых*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx H \left[\frac{1}{8} f(a) + \frac{3}{8} f\left(a + \frac{1}{3}H\right) + \frac{3}{8} f\left(a + \frac{2}{3}H\right) + \frac{1}{8} f(a+H) \right], \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega(x) &= (x-a) \left(x-a - \frac{1}{3}H \right) \left(x-a - \frac{2}{3}H \right) (x-a-H), \\ R(f) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b \omega(x) dx = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi), \quad H = b-a. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Пусть число n кратно 3. Разделим $[a, b]$ на n равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Возьмем строенный отрезок $[a + kh, a + (k+3)h]$ и применим к нему правило трех восьмых. Записав такие равенства для отрезков

$$[a, a + 3h], [a + 3h, a + 6h], \dots, [a + (n-3)h, a + nh]$$

и сложив результаты, получим окончательную формулу правила трех восьмых:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8} \{ (f_0 + f_n) + 2(f_3 + f_6 + \dots + f_{n-3}) + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1}) \} + R(f), \quad (10)$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (11)$$

Когда число частичных отрезков n кратно 2 и 3, для вычисления интеграла могут быть применены и правило парабол, и правило трех восьмых. Обе эти формулы имеют одинаковую алгебраическую степень точности и одинаково просты в применении. Однако сравнение остаточных членов в формулах (7) и (11) показывает, что применение правила трех восьмых дает погрешность примерно в два раза больше. Поэтому чаще применяется формула Симпсона.

Контрольные вопросы

1. Понятие интерполяционных квадратурных формул.
2. Необходимое и достаточное условия для того, чтобы квадратурная формула была интерполяционной.

3. Представление остатка интерполяционной квадратуры.
4. Формулы Ньютона – Котеса.
5. Почему формулы Ньютона – Котеса непригодны для вычислений при большом числе узлов?
6. Форма остатка формулы Ньютона – Котеса.
7. Простейшие формулы Ньютона – Котеса, остатки этих квадратур.
8. Формула Симпсона и правило трех восьмых имеют одинаковую степень точности. Погрешность какой из двух формул выше и во сколько раз?

Л е к ц и я 5

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности

1. Общие теоремы

Квадратурная формула

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (1)$$

при фиксированном числе узлов содержит $2n$ параметров A_k и x_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Параметры нужно выбрать так, чтобы формула (1) была точной для многочленов возможно более высокой степени. В лекции 4 мы выяснили, что при произвольном выборе узлов и при определенном выборе коэффициентов A_k формула (1) будет точной для всех многочленов степени $\leq n - 1$. При этом требовании формула (1) должна быть интерполяционной.

Для увеличения точности квадратурной формулы (1) можно воспользоваться n узлами x_k . Степень точности при определенных условиях можно увеличить на n единиц и сделать формулу, верной для всех многочленов степени $\leq 2n - 1$. Выясним условия, которым должны удовлетворять A_k и x_k , чтобы формула имела степень точности $\leq 2n - 1$.

Построим многочлен $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ по узлам x_k . Этот многочлен можно разложить по степеням x : $\omega(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots$. Корни этого многочлена совпадают с узлами x_k . К корням многочлена $\omega(x)$ предъявляются требования: они должны быть действительными, различными и не выходить за границы отрезка интегрирования.

Теорема 1. Для того, чтобы формула (1) была точной для всех многочленов степени $\leq 2n - 1$ необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной и многочлен $\omega(x)$ был ортогонален по весу $p(x)$ ко всем многочленам $Q(x)$ степени $< n$:

$$\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx = 0. \quad (2)$$

Доказательство. Проверим необходимость условия. Если формула (1) верна для многочленов степени $\leq 2n - 1$, то она верна и для многочленов степени $\leq n - 1$ и поэтому должна быть интерполяционной.

Пусть $Q(x)$ – любой многочлен степени $\leq n - 1$. Произведение $f(x) = \omega(x)Q(x)$ есть многочлен степени $\leq 2n - 1$ и для него равенство (1) должно быть точным. Но $f(x_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и поэтому

$$\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx = 0,$$

что доказывает необходимость ортогональности.

Убедимся в достаточности условий. Пусть f – произвольный многочлен степени $\leq 2n - 1$. Разделив f на ω , можно представить f в форме

$$f = Q\omega + \rho,$$

где $Q(x)$ и $\rho(x)$ – многочлены степеней $\leq n - 1$. Так как $\omega(x_k) = 0$ то

$$f(x_k) = \rho(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx + \int_a^b p(x)\rho(x)dx.$$

Первый из интегралов правой части равен нулю по условию ортогональности. Так как степень $\rho(x)$ не больше $n-1$, а формула (1) интерполяционная, то должно быть точным равенство

$$\int_a^b p(x)\rho(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k \rho(x_k).$$

Ввиду того, что $f(x_k) = \rho(x_k)$ ($k=1,2,\dots,n$), должно быть верным равенство

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

и формула (1) действительно будет точной для произвольных многочленов степени $\leq 2n-1$. Теорема доказана.

Вопрос о возможности построения квадратурной формулы связан с существованием многочлена $\omega(x)$ степени n , обладающего свойством ортогональности (2). Если весовая функция $p(x)$ изменяет знак на $[a,b]$, то многочлен $\omega(x)$ может не существовать. Корни многочлена могут не удовлетворять указанным выше условиям. Поэтому потребуем, чтобы вес $p(x)$ был неотрицательной функцией на $[a,b]$. Из теории ортогональных многочленов известно, что многочлен $\omega(x)$ степени n , ортогональный по весу $p(x)$ ко всем многочленам меньших степеней, будет существовать при всяких n . Корни многочлена будут действительными, различными и лежать внутри отрезка интегрирования. Поэтому справедливо утверждение:

если вес $p(x) \geq 0$, то квадратурная формула (1), точная для всяких многочленов степени $\leq 2n-1$, существует при всех $n=1,2,\dots$.

Осталось выяснить, будет ли $2n-1$ наивысшей алгебраической степенью точности формулы (1). Для знакопостоянного веса справедлива теорема 2.

Теорема 2. Если $p(x) \geq 0$, то ни при каком выборе x_k и A_k равенство (1) не может быть верным для всех многочленов степени $2n$.

Доказательство. Для многочлена $f(x) = \omega^2(x)$, имеющего степень $2n$, интеграл $\int_a^b p(x)f(x)dx > 0$, так как вес $p(x)$ неотрицательный. Квадратурная сумма $\sum A_k f(x_k) = 0$ так как $f(x_k) = 0$. Поэтому для $f(x) = \omega^2(x)$ равенство (1) не может быть верным.

Построим квадратурную формулу, имеющую наивысшую степень точности. Для этого рассмотрим систему ортогональных на $[a, b]$ многочленов $P_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) по весу $p(x)$. Будем считать многочлены нормированными. Возьмем из этой системы многочлен степени n . Корни $P_n(x)$ будут узлами x_k разыскиваемой квадратурной формулы.

Коэффициенты A_k определяются равенством, равносильным равенству (4) в лекции 4:

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{P_n(x)}{(x-x_k)P_n'(x_k)} dx. \quad (3)$$

Для вычисления интеграла (3) воспользуемся тождеством Кристоффеля–Дарбу, положив в нем $t = x_k$. Тогда оно примет вид

$$\sum_{s=0}^{n-1} P_s(x)P_s(x_k) = -\frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{P_n(x)P_{n+1}(x_k)}{x-x_k},$$

где a_n означает старший коэффициент в многочлене $P_n(x)$.

Умножим обе части равенства на $p(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[a, b]$. Поскольку многочлены ортонормированные, то после интегрирования получим равенство

$$1 = -\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k) \int_a^b p(x) \frac{P_n(x)}{x-x_k} dx.$$

Отсюда A_k будет иметь вид

$$A_k = -\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{P'_n(x_k)P_{n+1}(x_k)}. \quad (4)$$

Полученное выражение можно упростить, если использовать рекуррентное соотношение между ортонормированными многочленами:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k) + \frac{a_{n-1}}{a_n} P_{n-1}(x_k) = 0.$$

Коэффициенты A_k примут вид

$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)}. \quad (5)$$

Отметим, что все коэффициенты квадратурной формулы, имеющей наивысшую степень точности $2n-1$, положительны. Это следует из теоремы 3.

Теорема 3. Если квадратурная формула (1) верна для всевозможных многочленов степени $2n-2$, то все ее коэффициенты A_k положительны.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \left[\frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2$. Это многочлен степени $2n-2$ и для него равенство (1) должно быть верным. Но

$$f(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i; \\ \omega'^2(x_i), & k = i. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_a^b p(x) \left[\frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2 dx = A_i \omega'^2(x_i),$$

$$A_i = \int_a^b p(x) \left[\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} \right]^2 dx > 0.$$

Теорема доказана.

Перейдем к изучению остатка квадратуры.

Теорема 4. Если f имеет производную порядка $2n$ на $[a, b]$, то существует такая точка $\eta \in [a, b]$, что для остатка квадратуры наимышей степени точности верно равенство

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx, \quad a \leq \eta \leq b. \quad (6)$$

Доказательство. Построим интерполяционный многочлен $H(x)$ степени $\leq 2n - 1$, удовлетворяющий условиям

$$H(x_k) = f(x_k), \quad H'(x_k) = f'(x_k).$$

Остаток интерполирования $r(x) = f(x) - H(x)$ имеет следующее представление:

$$r(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \omega^2(x),$$

где ξ – некоторая точка, лежащая между x и узлами x_k .

Таким образом,

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) H(x) dx + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x) f^{(2n)}(\xi) \omega^2(x) dx.$$

Поскольку квадратурная формула верна для всех многочленов степени $\leq 2n - 1$, а степень многочлена $H(x)$ также $\leq 2n - 1$, то

$$\int_a^b p(x) H(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k H(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

и для остатка квадратуры имеет место равенство

$$R(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b f^{(2n)}(\xi) p(x) \omega^2(x) dx.$$

Теорема доказана.

Далее докажем теорему о сходимости квадратурного процесса.

Пусть $p(x)$ – неотрицательная весовая функция на $[a, b]$ и $\omega_n(x)$ ($n=0, 1, \dots$) – принадлежащая ей система ортогональных многочленов. Пусть $x_k^{(n)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) – корни многочлена $\omega_n(x)$ и $A_k^{(n)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) – соответствующие им коэффициенты квадратурной формулы наивысшей степени точности.

Теорема 5. Если отрезок $[a, b]$ – конечный и функция f непрерывна на нем, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx. \quad (7)$$

Доказательство. Поскольку f непрерывна на $[a, b]$, при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P(x)$, что для всяких $x \in [a, b]$ будет

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \quad (8)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| \leq \left| \int_a^b p f dx - \int_a^b p P dx \right| + \\ & + \left| \int_a^b p P dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) \right| + \left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right|. \end{aligned}$$

С учетом формулы (8)

$$\left| \int_a^b p f dx - \int_a^b p P dx \right| < \varepsilon \int_a^b p dx$$

и

$$\left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \varepsilon \int_a^b p dx.$$

Кроме того, если m – степень многочлена $P(x)$, то при $2n - 1 \geq m$, будет выполняться

$$\int_a^b p P dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)})$$

и для таких n выполняется неравенство

$$\left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| < 2\varepsilon \int_a^b p dx,$$

что доказывает формулу (7) и теорему.

2. Постоянная весовая функция

Исторически сложилось так, что первой найденной формулой наивысшей степени точности является *формула Гаусса*. Она служит для вычисления интегралов вида

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

взятых по конечному отрезку $[a, b]$ с постоянным весом.

Линейным преобразованием всякий конечный отрезок $[a, b]$ может быть преобразован в стандартный отрезок. Чтобы сделать более простым использование свойств симметрии узлов x_k и коэффициентов A_k , за такой стандартный отрезок мы примем $[-1, 1]$ и будем считать, что интеграл (1) приведен к виду

$$\int_{-1}^1 f(x) dx. \quad (2)$$

Ортогональную систему многочленов с постоянным весом на отрезке $[-1, 1]$ образуют многочлены Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Построим квадратурную формулу с n узлами:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \quad (3)$$

имеющую наивысшую степень точности $2n - 1$. Узлы ее нужно взять в корнях многочлена Лежандра степени n :

$$P_n(x_k^{(n)}) = 0.$$

Простые вычисления с помощью формул (4) и (5) разд. 1 этой лекции дадут коэффициенты в виде

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{\left[1 - (x_k^{(n)})^2\right] \left[P_n'(x_k^{(n)})\right]^2} \quad (4)$$

Выражение остаточного члена формулы Гаусса вычисляется по формуле

$$R(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!} \left[\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 f^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (5)$$

Контрольные вопросы

1. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы квадратурная формула была точной для многочленов степени $\leq 2n - 1$.
2. Квадратурная формула, имеющая наивысшую степень точности.
3. При каких условиях коэффициенты точной квадратурной формулы положительные?
4. Остаток квадратуры наивысшей степени точности.
5. Понятие сходимости квадратурного процесса на примере конечного интервала и непрерывной функции.
6. Узлы, коэффициенты и остаток формулы Гаусса.

Л е к ц и я 6

Квадратурные формулы с наименьшей оценкой остатка

1. Задача минимизации остатка квадратурной формулы

В теории квадратур возникла потребность построения формул, которые были бы приспособлены для вычисления интегралов от функций, принадлежащих заданному классу. Пусть дан класс функций $\{f\} = F$. Для каждой функции $f \in F$ остаток квадратуры $R(f)$ имеет определенное численное значение

$$R(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (1)$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех без исключения функций класса F , может быть принято число

$$R = \sup_f |R(f)| = \sup_f \left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \right|. \quad (2)$$

Остаток квадратуры зависит от x_k и A_k . Нужно воспользоваться возможностями выбора узлов и коэффициентов для того, чтобы придать R наименьшее значение. На выбор x_k и A_k налагаются ограничительные условия. Виды условий связаны с выбором класса F функций f и способа задания самих функций. Об этом говорят следующие примеры.

1. Если функции f заданы таблично, то мы будем сильно стеснены в выборе узлов и должны считать, что x_k берутся только из числа табличных значений аргументов.

2. Пусть мы хотим построить квадратурную формулу, имеющую наименьшую оценку остатка для всех функций с непрерывной производной порядка r , удовлетворяющей условию $|f^{(r)}| \leq M_r$. Чтобы можно было выполнить оценку остатка для таких функций, мы должны считать, что квадратурная формула верна для всевозможных многочленов степени $\leq r-1$. Это равносильно выполнению следующего равенства:

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \int_a^b p x^i dx \quad (i=0,1,\dots,r-1). \quad (3)$$

Линейным преобразованием отрезок $[a,b]$ всегда можно свести к отрезку $[0,1]$, будем считать, что это преобразование выполнено.

2. Минимизация остатка в классах функций $L_q^{(r)}$

Функция f принадлежит классу $L_q^{(r)}$ ($q \geq 1$), если f имеет на $[0,1]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производная порядка r суммируема со степенью q на $[0,1]$.

Всякая функция $f \in L_q^{(r)}$ может быть представлена в форме

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \int_0^1 f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (1)$$

где $f^{(i)}(0)$ есть числа и $f^{(r)}(t)$ – некоторая измеримая и суммируемая на отрезке $[0,1]$ со степенью q функция.

Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \rho(x) f(x) dx$, где $f \in L_q^{(r)}$, весовая функция $\rho(x)$ измерима и суммируема на отрезке $[0,1]$.

Пусть для приближенного вычисления интеграла взята некоторая квадратурная сумма

$$\int_0^1 \rho f dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (2)$$

Мы хотим получить формулу, которую будем считать «наилучшей» для всех функций $f \in L_q^{(r)}$ ($q \geq 1$), если равенство (2) является точным для всевозможных многочленов степени $< r$. Если воспользоваться представлением (1) функций класса $L_q^{(r)}$, то остаток квадратуры $R(f)$ можно привести к виду

$$R(f) = \int_0^1 \rho f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (3)$$

$$K(t) = \int_0^1 \rho(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{r-1}}{(r-1)!}. \quad (4)$$

Рассмотрим множество $\{f\} = F$ функций f , удовлетворяющих условию

$$\left\{ \int_0^1 |f^{(r)}|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \leq M_r.$$

Согласно неравенству Гельдера, для $R(f)$ в классе F имеет место оценка

$$|R(f)| \leq \left[\int_0^1 |f^{(r)}|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\int_0^1 |K|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq M_r \left[\int_0^1 |K|^p dt \right], \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Поэтому точная верхняя граница равна

$$R = \sup_F |R(f)| = M_r \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

От выбора x_k и A_k зависит только интеграл $\int_0^1 |K(t)|^p dt$. Нужно подобрать веса и узлы таким образом, чтобы интеграл имел наименьшее значение. Если такие x_k и A_k существуют, то соответствующая им квадратурная формула считается «наилучшей» во всем классе $L_q^{(r)}$.

Задача минимизации $\int_0^1 |K(t)|^p dt$ может быть истолкована как задача наилучшего приближения в метрике L_p функции $\int_0^1 \rho(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx$ с помощью функций вида

$$\sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

При произвольных $\rho(x)$, r и n такая задача в конечном виде не решается. Рассмотрим несколько частных случаев, когда решение может быть найдено.

Будем считать вес постоянным: $\rho(x) \equiv 1$ и рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (6)$$

Предположим f абсолютно непрерывной и производную f' суммируемой со степенью q . Это соответствует случаю $r = 1$. Формулу (6) будем считать точной, если $f = 1$. Тогда коэффициенты должны подчиняться условию

$$\sum_{k=1}^n A_k = 1.$$

Остаток $R(f)$ в классе $L_q^{(1)}$ имеет точную оценку

$$R = \sup_f |R(f)| = M_1 \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad M_1^q = \int_0^1 |f'|^q dx;$$

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t).$$

Ядро остатка $K(t)$ есть кусочно-линейная функция со старшим коэффициентом, равным -1 , для которой узлы x_k являются точками разрыва. Скачок функции $K(t)$ в узле x_k равен коэффициенту A_k . Если x_k лежат внутри отрезка $[0,1]$, то на концах при $t=0$ и $t=1$ ядро обращается в нуль.

Задача минимизации интеграла $\int_0^1 |K(t)|^p dt$ при условии $\sum_{k=1}^n A_k = 1$ дает ответ: узлы x_k должны быть расположены в точках $x_k = \frac{2k-1}{2n}$ ($k=1, 2, \dots, n$). Коэффициенты A_k все должны быть одинаковыми, и так как сумма их равна 1, то $A_k = \frac{1}{n}$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Соответствующая квадратурная формула имеет вид

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + R(f) \quad (7)$$

и является хорошо известной формулой прямоугольников с ординатами в средних точках. Остаток ее в классе $L_q^{(1)}$ имеет оценку

$$|R(f)| \leq M_1 \frac{1}{2n \sqrt[p]{p+1}}, \quad M_1 = \left\{ \int_0^1 |f'|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

3. Минимизация остатка в классах функций C_r

Функция f принадлежит классу C_r , если она имеет непрерывную производную порядка r на отрезке $[0, 1]$. Характерное представление функций $f \in C_r$ дается равенством

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \int_0^1 f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (1)$$

где $f^{(i)}(0)$ – любые числа и $f^{(r)}(t)$ – произвольная функция, непрерывная на отрезке $[0, 1]$.

Для построения квадратурной формулы

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (2)$$

имеющей наименьшую оценку остатка в C_r , мы должны считать, что равенство (2) является точным для любого многочлена степени $< r$. Тогда остаток (2) может быть представлен в виде

$$R(f) = \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (3)$$

где

$$K(t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Рассмотрим множество F функций $f \in C_r$, удовлетворяющих условию $|f^{(r)}| \leq M_r$. На F верна оценка

$$|R(f)| \leq M_r \int_0^1 |K(t)| dt.$$

Верхняя грань оценки погрешности

$$R = \sup_F |R(f)| \leq M_r \int_0^1 |K(t)| dt. \quad (4)$$

Мы должны так подобрать x_k и A_k , чтобы $\int_0^1 |K(t)| dt$ имел наименьшее значение при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \frac{1}{i+1} \quad (i=0,1,\dots,r-1). \quad (5)$$

Положим $r=1$ и рассмотрим класс функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$. В этом случае мы должны требовать, чтобы квадратурная формула давала точный результат для постоянной величины, что равносильно выполнению условия связи

$$\sum_{k=1}^n A_k = 1.$$

Ядро $K(t)$ имеет значение

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t).$$

Решение задачи минимизации остатка в классе функций C_1 имеет оценку

$$|R(f)| \leq M_1 \frac{1}{4n}, \quad |f'(x)| \leq M_1.$$

Рассмотрим класс дважды дифференцируемых функций и положим $r=2$.

Считая, что минимум ядра существует, применим к нахождению минимума ядра правила нахождения условного экстремума функции. Составим вспомогательную функцию

$$F = U + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^n A_k - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{k=1}^n A_k x_k - \frac{1}{2} \right)$$

и приравняем нулю ее частные производные по узлам x_k и коэффициентам A_k :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -A_i \int_0^1 S(t)E(x_i - 1)dt + \lambda_2 A_i = 0, \quad (6)$$

$$S(t) = \text{sign}K(t),$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = -\int_0^1 S(t)E(x_i - t)(x_i - t)dt + \lambda_1 + \lambda_2 x_i = 0 \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда видно, что для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ должно быть

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(t)dt = 0, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} tS(t)dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Следовательно, на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ядро $K(t)$ есть многочлен второй степени со старшим членом $\frac{1}{2}t^2$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике L на $[x_i, x_{i+1}]$. Известно, что среди многочленов степени n наименее отклоняются от нуля в метрике L на отрезке $[-1, 1]$ будет многочлен

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{2^n \sqrt{1-x^2}}$$

В частности, при $n = 2$ это будет многочлен $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}$.

С помощью линейного преобразования $t = \alpha_i + h_i x$, $\alpha_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $h_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$ перейдем от отрезка $[-1, 1]$ к отрезку $[x_i, x_{i+1}]$. Ядро остатка $K(t)$ примет вид

$$K(t) = \frac{h_i^2}{2} P_2\left(\frac{t - x_i}{h_i}\right), \quad x_i \leq t \leq x_{i+1}.$$

Исходя из вида ядра $K(t)$, повторяя рассуждения, проделанные ранее, приходим к выводу, что справедливы следующие утверждения:

1. Узлы и коэффициенты должны иметь значения

$$x_i = \frac{\sqrt{3} + 4(i-1)}{2}h, \quad h = \left[\sqrt{3} + 2(n-1) \right]^{-1},$$

$$A_i = 2h \quad (i = 2, \dots, n-1), \quad A_1 = A_n = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}h.$$

2. Указанные узлы и коэффициенты доставляют наименьшее значение интегралу $\int_0^1 |K(t)| dt$ и такие значения являются единственными.

3. Остаток $R(f)$ квадратурной формулы для указанных узлов и коэффициентов имеет в классе C_2 оценку

$$|R(f)| \leq M_2 \frac{h^2}{8}, \quad |f''| \leq M_2.$$

4. Квадратурная сумма $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ есть сумма Римана и для всякой интегрируемой на отрезке $[0, 1]$ в смысле Римана функции выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^1 f dx.$$

4. Задача минимизации оценки остатка квадратурной формулы с закрепленными узлами

Построим квадратурную формулу с заданными узлами и с наименьшей оценкой остатка. В приложениях чаще всего встречается случай равноотстоящих узлов и постоянной весовой функции. Разде-

лим отрезок интегрирования $[0, 1]$ на n равных частей с шагом $h = \frac{1}{n}$. В квадратурной формуле

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1)$$

можно произвольно выбрать $n+1$ коэффициент A_k . Если потребовать, чтобы равенство (1) было точным для всевозможных многочленов степени n , то коэффициенты A_k вполне определяются и формула (1) совпадает с интерполяционной формулой Ньютона – Котеса. Будем считать, что формула (1) дает точный результат для многочленов степени $r-1 < n$. Это накладывает следующие ограничения на выбор A_k :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^n A_k &= 1, \\ \sum_{k=1}^n A_k k^i &= \frac{n^i}{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если производная порядка $r-1$ от f есть непрерывная функция, то остаток квадратуры представим в форме

$$\left. \begin{aligned} R(f) &= \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt, \\ K(t) &= \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{\left(\frac{k}{n} - t\right)^{r-1}}{(r-1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Среди $n+1$ чисел A_k остаются произвольными $n+1-r$ и выбором их нужно воспользоваться для уменьшения оценки погрешности квадратуры. На различных классах функций минимизация проводится по-разному.

Рассмотрим класс функций $L_q^{(1)}$, для которых

$$\left\{ \int_0^1 |f'|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq M_1.$$

Если считать, что квадратурная формула будет точной в случае $f = \text{const}$ и, следовательно, ее коэффициенты удовлетворяют первому из условий (2), то для таких функций будет верна следующая оценка остатка

$$|R(f)| \leq \left\{ \int_0^1 |f'|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_0^1 |K|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq M_1 \left\{ \int_0^1 |K|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \sup_f |R(f)|.$$

От чисел A_k в оценке погрешности зависит лишь интеграл $\int_0^1 |K(t)|^p dt$, и коэффициенты A_k нужно выбрать так, чтобы придать интегралу наименьшее значение. Ядро остатка $K(t)$ имеет в данном случае значение

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right)$$

и является линейной функцией на каждом из отрезков разбиения

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k.$$

В точках разбиения $t = \frac{i}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ядро $K(t)$ имеет разрыв первого рода со скачком A_i и предельные значения его на концах отрезка $[0, 1]$ равны A_0 и $-A_n$.

Решая задачу на условный экстремум относительно функции $K(t)$ при условии $\sum_{i=0}^n A_i = 1$, получим

$$A_0 = A_n = \frac{1}{2n}, \quad A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Квадратурная формула, которую мы нашли, является хорошо известной формулой трапеций

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right] + R(f)$$

и остаток ее $R(f)$ будет иметь оценку

$$|R(f)| \leq \frac{M_1}{2n(p+1)^p}, \quad M_1 = \left\{ \int_0^1 |f'|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Контрольные вопросы

1. Точность квадратурной формулы для функций данного класса.
2. Задача минимизации остатка квадратуры.
3. Минимизация остатка в классах $L_q^{(r)}$.
4. «Наилучшая» квадратурная формула во всем классе функций.
5. Минимизация остатка в классах C_r .
6. Задача минимизации оценки остатка квадратуры.
7. Задача минимизации оценки остатка квадратуры с закрепленными концами.

Л е к ц и я 7

Квадратурн ы формулы, содержащие наперед заданные узлы

1. Общие теоремы

Иногда возникает необходимость построения таких квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее, другая часть узлов может быть взята произвольно, выбором таких узлов можно распоряжаться для достижения тех или иных целей.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l f(a_l), \quad (1)$$

в которой m узлов a_1, \dots, a_m фиксированы. Она содержит $2n + m$ параметров A_k, x_k ($k = 1, \dots, n$) и B_l ($l = 1, \dots, m$). Попытаемся выбрать параметры так, чтобы равенство (1) стало точным для многочленов возможно более высокой степени.

Введем два многочлена, связанных с узлами a_l и x_k :

$$\Omega(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m), \quad \omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

За счет выбора коэффициентов A_k и B_l формулу (1) можно сделать верной для многочленов степени $n + m - 1$. Чтобы равенство (1) было верным для многочленов более высокой степени, нужно специально подобрать узлы x_k .

Теорема 1. Для того, чтобы формула (1) была точной для многочленов степени $2n + m - 1$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) она была интерполяционной и 2) многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на отрезке $[a, b]$ по весу $p(x)\Omega(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени $< n$.

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна, так как, если формула (1) верна для всех многочленов степени $n + m - 1$, то она должна быть интерполяционной. Необходимость второго условия проверяется, если положить $f = \Omega\omega Q$. Функция f есть многочлен, степень которого $\leq 2n + m - 1$. Так как f в точках a_l и x_k исчезает, то квадратурная сумма для такой функции обращается в нуль и будет выполняться условие

$$\int_a^b p(x)\Omega(x)\omega(x)Q(x)dx = 0 \quad (2)$$

и тогда равенство (1) будет точным.

Достаточность условий теоремы следует из таких предположений. Пусть f есть произвольный многочлен степени $2n + m - 1$. Его можно представить в форме

$$f = \Omega(x)\omega(x)Q(x) + r(x),$$

где $Q(x)$ и $r(x)$ – степени $\leq n - 1$ и $\leq n + m - 1$ соответственно. При этом очевидно, $f(a_l) = r(a_l)$ ($l = 1, \dots, m$) и $f(x_k) = r(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$).

Если выполнено условие ортогональности (2) и формула (1) – интерполяционная, то будет верной следующая цепочка равенств:

$$\int_a^b p f dx = \int_a^b p \Omega \omega Q dx + \int_a^b p r dx = \int_a^b p r dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l r(a_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l f(a_l).$$

Достаточность условий теоремы доказана.

Таким образом, построение квадратурной формулы (1), верной для алгебраических многочленов степени $2n + m - 1$, приводит к нахождению многочлена $\omega(x)$ степени n , ортогонального на $[a, b]$ по весу $p\Omega$ ко всякому многочлену меньшей степени. Корни многочлена $\omega(x)$ должны быть действительными, различными и принадлежать отрезку $[a, b]$. Кроме того, они должны быть отличны от фиксированных узлов a_l ($l = 1, \dots, m$).

Допустим, что многочлен $\omega(x)$, обладающий указанными свойствами, существует. Тогда формула (1) может быть построена и она верна для многочленов степени $2n + m - 1$. Для изучения алгебраической степени точности данной квадратурной формулы получим представление остатка. Выполним интерполирование f на $[a, b]$ с помощью многочлена $H(x)$ степени $\leq 2n + m - 1$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned} H(a_l) &= f(a_l) \quad (l = 1, \dots, m), \\ H(x_k) &= f(x_k), \quad H'(x_k) = f'(x_k) \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Если f имеет производную порядка $2n + m$ во всех точках отрезка $[a, b]$, то остаток интерполирования $r(x) = f(x) - H(x)$ представим в форме

$$r(x) = \Omega(x)\omega^2(x) \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}, \quad a < \xi < b.$$

Для остатка квадратуры $R(f)$ справедливо равенство $R(f) = R(H) + R(r)$. Поскольку формула (1) верна для всех многочленов степени $2n + m - 1$, то $R(H) = 0$. Кроме того, во всех узлах a_l и x_k остаток интерполирования $r(x)$ обращается в нуль и поэтому квадратурная сумма для $r(x)$ исчезает

$$\sum_{k=1}^n A_k r(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l r(a_l) = 0.$$

Следовательно,

$$R(f) = R(r) = \int_a^b p r dx = \int_a^b p(x) \Omega(x) \omega^2(x) \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!} dx. \quad (3)$$

Отсюда видно, что если

$$I = \int_a^b p \Omega \omega^2 dx \neq 0,$$

то степень точности формулы (1) равна $2n + m - 1$.

Формула (1) является интерполяционной, поэтому ее коэффициенты должны иметь следующие значения:

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) \Omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k) \Omega(x_k)} dx, \quad (4)$$

$$B_l = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) \Omega(x)}{(x - a_l) \omega(a_l) \Omega'(a_l)} dx. \quad (5)$$

Для коэффициентов A_k можно дать другое представление, более удобное для вычислений. Допустим, что существует единственная система многочленов $\Pi_s(x)$ ($s = 1, 2, \dots$), где Π_s – ортонормированная система по весу $\rho(x) = p(x) \Omega(x)$ на отрезке $[a, b]$. Многочлен Π_s может отличаться от $\omega(x)$ только постоянным множителем

$$A_k = \frac{1}{\Pi'_n(x_k) \Omega(x_k)} \int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} dx.$$

В лекции 5 для интеграла $\int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} dx$ были получены следующие два выражения:

$$\int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} dx = - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi_{n+1}(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi_{n-1}(x_k)}.$$

Под α_n здесь подразумевается старший коэффициент многочлена $\Pi_n(x)$.

Таким образом, коэффициенты квадратурной формулы могут быть вычислены по одной из двух формул:

$$A_k = -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi'_n(x_k) \Pi_{n+1}(x_k) \Omega(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k) \Omega(x_k)}. \quad (6)$$

2. Формулы частного вида

При построении квадратурных формул, рассмотренных в лекции 5, все узлы и коэффициенты выбирались так, чтобы каждая из них была точной для многочленов возможно более высокой степени. Стремясь обобщить эту идею, А. А. Марков рассматривал такие формулы, в которых для повышения точности используется произвольный выбор коэффициентов A_k и лишь части узлов x_k . Другая же часть узлов может быть фиксирована любым способом.

Будем считать функцию $p(x)$, входящую в интеграл (1) разд. 1, неотрицательной: $p(x) \geq 0$. Чтобы другая весовая функция, участвующая в исследованиях, $\rho(x) = p(x)\Omega(x)$ сохраняла знак, мы должны предположить, что $\Omega(x)$ также сохраняет свой знак на $[a, b]$ и, следовательно, ни один из фиксированных узлов a_l не лежит внутри $[a, b]$. Если не допускать квадратурных формул с узлами, лежащими вне $[a, b]$, то мы должны ограничиться рассмотрением следующих случаев А. А. Маркова:

- 1) $m = 1$ и берется один фиксированный узел $a_1 = a$;
- 2) $m = 1$ и фиксирован узел $a_1 = b$.

Второй случай приводится к первому с помощью линейного преобразования $x = a + b - t$ и отдельно рассматриваться не будет.

- 3) $m = 2$ и берутся два фиксированных узла $a_1 = a$, $a_2 = b$.

Ввиду знакопостоянства $\rho(x) = p(x)\Omega(x)$ на $[a, b]$, многочлен $\omega(x)$, ортогональный по весу ρ на $[a, b]$ ко всякому многочлену степени $< n$, существует при всяком n . Корни x_k — действительные,

простые и все лежат внутри отрезка $[a, b]$. Поэтому квадратурные формулы (1) разд. 1 точные для всевозможных многочленов степени $2n + m - 1$ и в случаях Маркова могут быть построены при любых n . Алгебраическая точность таких формул будет равна $2n + m - 1$.

Построение начнем с первого случая $m = 1$, $a_1 = a$:

$$\int_a^b p f dx = Af(a) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (1)$$

Наивысшая степень точности формулы равна $2n$.

Здесь $\Omega(x) = x - a$; x_k – корни многочлена Π_s степени n , ортогонального на $[a, b]$ по весу $\rho(x) = (x - a)p(x)$ ко всякому многочлену степени $< n$. Используя формулу (6) разд. 1, получаем удобное средство для вычисления коэффициентов A_k :

$$A_k = -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi'_n(x_k) \Pi_{n+1}(x_k) \Omega(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k) \Omega(x_k)}. \quad (2)$$

Пользуясь формулой (5) разд. 1, найдем

$$A = \Pi_n^{-1}(a) \int_a^b p(x) \Pi_n(x) dx. \quad (3)$$

Легко показать, что все коэффициенты положительные.

Если f имеет непрерывную производную порядка $2n + 1$, то остаток $R(f)$ может быть представлен в виде

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_a^b p(x)(x-a)\omega^2(x) dx, \quad a < \eta < b. \quad (4)$$

Рассмотрим третий случай, когда два заранее заданных узла лежат на границах интервала интегрирования $a_1 = a$, $a_n = b$:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = Af(a) + Bf(b) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (5)$$

Наивысшая степень точности такой формулы равна $2n + 1$; $\Omega(x) = (x - a)(x - b)$; x_k – корни многочлена Π_s степени n , ортогонального на отрезке $[a, b]$ по весу $\rho(x) = (x - a)(x - b)p(x)$ ко всякому многочлену меньшей степени.

Коэффициенты A_k , A и B вычисляются с помощью формул (4) и (5) разд. 1:

$$A_k = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k) (x_k - a)(x_k - b)}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= [\omega(a)(a-b)]^{-1} \int_a^b p(x)(x-b)\omega(x)dx, \\ B &= [\omega(b)(b-a)]^{-1} \int_a^b p(x)(x-a)\omega(x)dx, \\ \omega(x) &= (x-x_1)\dots(x-x_n). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Остаточный член $R(f)$ представим в форме

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b p(x)(x-a)(x-b)\omega^2(x)dx. \quad (8)$$

Контрольные вопросы

1. Какие условия необходимы и достаточны, чтобы квадратурная формула с фиксированными узлами была точной?
2. Представление остатка квадратуры для дифференцируемой $2n + m$ раз функции на отрезке $[a, b]$ с фиксированными узлами.
3. Построение квадратурных формул с использованием идеи А. А. Маркова.
4. Квадратурные формулы с одним и двумя закрепленными узлами.

Л е к ц и я 8

Квадратурные формулы с равными коэффициентами

1. Нахождение узлов

Квадратурные формулы с равными коэффициентами

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx c \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (1)$$

очень удобны при численных расчетах. Это привлекло внимание многих ученых и побудило их заняться разработкой теории этих формул. Впервые в общем случае задачу о построении таких формул сделал П. Л. Чебышев, поэтому квадратурные формулы с равными коэффициентами называют *формулами Чебышева*.

Формула (1) содержит $n + 1$ параметров c, x_1, \dots, x_n и выбором их можно сделать равенство точным для всевозможных многочленов степени $\leq n$. Требованию точного выполнения формулы (1) для $f \equiv 1$ удовлетворяет следующее уравнение:

В алгебре многочленов хорошо известны соотношения между элементарными симметрическими функциями A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и функциями s_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Они даются следующими равенствами, которые часто называют *соотношениями Ньютона*:

$$\begin{aligned} s_1 + A_1 &= 0, \\ s_2 + A_1 s_1 + 2A_2 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ s_n + A_1 s_{n-1} + A_2 s_{n-2} + \dots + nA_n &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Система уравнений позволяет последовательно найти все коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) по известным значениям s_k из системы (3). По A_i может быть построен многочлен $\omega(x)$. Узлы квадратурной формулы найдем, если приравняем нулю многочлен $\omega(x)$; корни многочлена и будут узлами x_k . По смыслу изучаемой задачи узлы x_k должны быть различными, действительными и принадлежать отрезку интегрирования. Таким образом, возможно построение формулы (1), верной для многочленов $\omega(x)$, коэффициенты A_i которого найдены указанным способом.

2. Интегралы с постоянной весовой функцией

Рассмотрим случай, когда весовая функция постоянна. Отрезок интегрирования приведем к отрезку $[-1, 1]$ и рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c \sum_{k=1}^n f(x_k). \tag{1}$$

Коэффициент c и узлы x_k выберем так, чтобы формула (1) давала точный результат для многочленов степени n . Коэффициент c определится из требования, чтобы формула (1) была точной для $f = 1$ и будет иметь значение

$$c = \frac{2}{n}.$$

Поскольку

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1},$$

система уравнений вида (3) разд. 1 для определения узлов x_1, \dots, x_n будет такой:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{n}{3}, \\ s_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0, \\ s_4 &= x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = \frac{n}{5}, \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = \frac{n}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Коэффициенты многочлена $\omega(x)$ должны быть найдены из системы (6) разд. 1, которая в рассматриваемом случае имеет форму

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \frac{n}{3} + 2A_2 &= 0, \\ A_3 &= 0, \\ \frac{n}{5} + \frac{n}{3}A_2 + 4A_4 &= 0, \\ A_5 &= 0, \\ \frac{n}{7} + \frac{n}{5}A_2 + \frac{n}{3}A_4 + 6A_6 &= 0, \\ A_7 &= 0, \\ \dots &\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Все коэффициенты A_k нечетных номеров равны нулю и в многочлен $\omega(x)$ будут входить либо только четные, либо только нечетные степени x :

$$\omega(x) = x^n + A_2x^{n-2} + A_4x^{n-4} + \dots$$

Корни $\omega(x)$, являющиеся узлами формулы (1), располагаются на отрезке $[-1, 1]$ симметрично относительно точки $x = 0$. В частности, если n есть число нечетное, то один из корней обязательно равен нулю.

Отметим еще один факт, касающийся точности квадратурных формул рассматриваемого вида. Пусть n – число четное: $n = 2m$. Соответствующие значения x_k должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ \dots & \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $n + 1 = 2m + 1$ есть число нечетное, а узлы x_k расположены симметрично относительно $x = 0$, то будет выполняться равенство

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} = 0,$$

откуда следует, что формула (1) будет точной не только для многочленов степени n , но также для многочленов степени $n + 1$.

Можно построить квадратурные формулы для нескольких первых значений n . Далее приведена формула Чебышева (1)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

с действительными узлами для $n = 1$ (1) 7, 9 :

$$n = 1 \quad x_1 = 0;$$

$$n = 2 \quad x_2 = -x_1 = 0,577350;$$

$$n = 3 \quad x_3 = -x_1 = 0,701107, x_2 = 0;$$

$$n = 4 \quad x_4 = -x_1 = 0,794654, \quad x_3 = -x_2 = 0,187592;$$

$$n = 5 \quad x_5 = -x_1 = 0,832498, \quad x_4 = -x_2 = 0,374541, \quad x_3 = 0;$$

$$n = 6 \quad x_6 = -x_1 = 0,866247, \quad x_5 = -x_2 = 0,422519, \quad x_4 = -x_3 = 0,266635;$$

$$n = 7 \quad x_7 = -x_1 = 0,883862, \quad x_6 = -x_2 = 0,529657, \quad x_5 = -x_3 = 0,323912;$$
$$x_4 = 0;$$

$$n = 9 \quad x_9 = -x_1 = 0,911589, \quad x_8 = -x_2 = 0,601019, \quad x_7 = -x_3 = 0,528762;$$
$$x_6 = -x_4 = 0,167906, \quad x_5 = 0.$$

Для $n = 8$ среди корней многочлена $\omega(x)$ будут комплексные числа и поэтому формула Чебышева (1) с действительными узлами не может быть построена.

Вычисление узлов было продолжено для нескольких значений n , больших 9, но каждый раз оказывалось, что некоторые из корней $\omega(x)$ были комплексными и формула Чебышева (1) не могла быть построена. В работах С. Н. Бернштейна показано, что построить формулу Чебышева для $n > 9$, верную для многочленов степени n , невозможно.

Контрольные вопросы

1. Нахождение узлов квадратурной формулы с равными коэффициентами.
2. Нахождение узлов квадратурной формулы с равными коэффициентами и с постоянной весовой функцией.
3. Увеличивается ли точность квадратурной формулы при четном числе узлов?
4. При каких значениях n возможно построить точную квадратурную формулу Чебышева?

Л е к ц и я 9

Сходимость квадратурного процесса

1. Проблема сходимости квадратурного процесса

Рассмотрим последовательность квадратурных формул, число узлов n в которых может принимать все целые значения $n = 1, 2, \dots$. Такая последовательность определяется двумя треугольными матрицами: матрицей узлов

$$X = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & & & & \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \dots & x_n^{(n)} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (1)$$

и матрицей коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & & & & \\ A_1^{(2)}, & A_2^{(2)} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(n)}, & A_2^{(n)}, & \dots & A_n^{(n)} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Возьмем квадратурную формулу, соответствующую строкам номера n этих матриц:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f) = Q_n(f) + R_n(f). \quad (3)$$

Квадратурный процесс, определяемый матрицами X и A , сходится для функции f , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x)f(x)dx. \quad (4)$$

Сходимость процесса зависит как от свойств интегрируемой функции f , так и от выбора квадратурных формул, и задача исследования сходимости в общем виде состоит в выяснении таких связей между свойствами f и свойствами матриц X и A .

Две основные проблемы теории сходимости могут быть сформулированы следующим образом.

1. Заданы матрицы X и A , нужно определить, для какого класса F функций f можно гарантировать выполнение (4).

2. Задан класс F функций f и нужно определить, каким условиям должны удовлетворять матрицы X и A , чтобы можно было гарантировать сходимость квадратурного процесса для всех функций $f \in F$.

Ограничимся изучением сходимости для случая конечного отрезка интегрирования.

2. Сходимость квадратурного процесса

Изучим квадратурный процесс (3) разд. 1, определяемый матрицей узлов (1) разд. 1 и матрицей коэффициентов (2) разд. 1. Вес $p(x)$ может быть любой суммируемой функцией. Пусть задан некоторый класс F функций f . Нужно выяснить, каким условиям нужно подчинить X и A для того, чтобы квадратурный процесс сходился для всех функций заданного класса.

Теорема 1. Для того, чтобы квадратурный процесс (3) разд. 1 сходился для всякой функции f , непрерывной на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена;
 2) существует число K такое, что при $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n \left| A_k^{(n)} \right| \leq K. \quad (1)$$

Доказательство. Если на множестве функций, непрерывных на $[a, b]$, определить норму следующим способом: $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$, то

такое множество можно рассматривать как линейное нормированное пространство C типа Банаха. Квадратурная сумма

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \text{ и интеграл } I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \text{ есть два ли-}$$

нейных функционала, определенных на C . Значения $Q_n(f)$ и $I(f)$ принадлежат числовому пространству, которое также принадлежит пространству типа Банаха.

К задаче выяснения условий сходимости квадратурного процесса $Q_n(f) \rightarrow I(f)$, $n \rightarrow \infty$, может быть применена теорема Банаха о сходимости последовательности линейных операторов. Необходимым и достаточным условием сходимости является выполнение двух требований: 1) сходимость на множестве элементов, всюду плотном в пространстве, где определены операторы, и 2) ограниченность в совокупности норм операторов.

За множество, всюду плотное в C , по теореме Вейерштрасса о возможности сколь угодно точного равномерного приближения всякой непрерывной функции многочленами может быть принято множество алгебраических многочленов, и первым требованием в рассматриваемой задаче будет требование сходимости квадратурного процесса для всякого многочлена.

Норма функционала $Q_n(f)$ имеет значение

$$\|Q_n\| = \sup_{|f| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| = \sum_{k=1}^n \left| A_k^{(n)} \right|.$$

Выполнение неравенства (1) есть требование ограниченности в совокупности норм функционалов $Q_n(f)$. Теорема доказана.

Две следующие теоремы являются следствиями теоремы 1.

Теорема 2. Если все коэффициенты $A_k^{(n)}$ неотрицательны, то для сходимости квадратурного процесса для данной непрерывной функции необходимо и достаточно, чтобы он сходиллся для всякого многочлена.

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Достаточность условия видна из того, что для многочлена нулевой степени $f = 1$ должна выполняться сходимость

$$Q_n(1) \rightarrow \int_a^b p dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому значения $Q_n(1)$, $n = 1, 2, \dots$ ограничены: $Q_n(1) \leq K$. Но

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = Q_n(1) \leq K,$$

и выполняется не только первое, но и второе условие теоремы 1, и процесс сходится для всякой непрерывной функции.

Частный вид теоремы 1 можно сформулировать в виде теоремы 3, в которой коэффициенты квадратурной формулы ограничены и конечны.

Теорема 3. Для сходимости интерполяционного квадратурного процесса для любой непрерывной функции необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \leq K < \infty.$$

Доказательство. Второе условие теоремы 1 является также условием теоремы 3, первое условие теоремы 1 выполнено, так как если

f есть многочлен, то, когда n станет больше степени многочлена, будет выполняться равенство $Q_n(f) = \int_a^b p f dx$.

Выясним условия сходимости квадратурного процесса в классах дифференцируемых функций. Введем кусочно-постоянную функцию $F_{n0}(x) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(x - x_k^{(n)})$. Наряду с ней будем рассматривать первообразные функции любого порядка r , удовлетворяющие начальным условиям $F_{nr}^{(j)}(a) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, r-1$):

$$F_{nr}(x) = \int_a^x F_{n0}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(x - x_k^{(n)}) \frac{(x - x_k^{(n)})^r}{r!}. \quad (2)$$

Теорема 4. Для того, чтобы квадратурный процесс (1) при $n \rightarrow \infty$ сходиллся для всякой функции $f \in C_r[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) процесс сходится для многочлена;
- 2) полные вариации первообразных функций порядка r $F_{nr}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, ограничены в совокупности:

$$\text{Var} F_{nr}(t) \leq M.$$

Доказательство. Если $f \in C_r[a, b]$ при $r \geq 1$, разлагая f по формуле Тейлора около точки b , можно представить функцию в форме

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + \int_b^x f^{(r)}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt = \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) E(t-x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \end{aligned}$$

Наоборот, каковы бы ни были числа $f^{(i)}(b)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f^{(r)}(t)$, $f(x)$, определенная такой формулой, принадлежит классу $C_r[a, b]$.

Остаток квадратуры $R_n(f)$ вычисляется по следующей формуле, характерной для класса $C_r[a, b]$:

$$\begin{aligned}
 R_n(f) &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + \\
 &+ (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) \left[\int_a^b p(x) E(t-x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(t-x_k^{(n)}) \frac{(t-x_k^{(n)})^{r-1}}{(r-1)!} \right] dt = \\
 &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) \left[\int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right] dt. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Сходимость квадратурного процесса, ввиду независимости параметров формулы $f^{(i)}(b)$ ($i = 0, 1, \dots, r-1$) и $f^{(r)}(t)$, равносильна тому, что при $n \rightarrow \infty$

$$R_n[(x-b)^i] \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-1 \quad (4)$$

и

$$R_n^*(f^{(r)}) = \int_a^b f^{(r)}(t) \left[\int_a^t p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right] dt \rightarrow 0. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) означают, что квадратурный процесс должен сходиться для всякого многочлена степени $\leq r-1$.

Условие (5) должно выполняться при любой непрерывной функции $f^{(r)}$. Если на множестве функций $f^{(r)}$ ввести норму $\|f^{(r)}\| = \max_t |f^{(r)}(t)|$, то мы можем его рассматривать как пространство C . По теореме Банаха, стремление $R_n^*(f^{(r)})$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ равносильно выполнению двух требований:

1. Функционал $R_n^*(f^{(r)})$ должен стремиться к нулю на множестве элементов, всюду плотном в C . Но требование $R_n^*(f^{(r)}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, когда $f^{(r)}$ есть полином любой степени, совместно с формулой (4) эквивалентно тому, что квадратурный процесс должен сходиться для всякого многочлена.

2. Нормы функционалов $R_n^*(f^{(r)})$, $n = 1, 2, \dots$, должны быть ограничены в совокупности:

$$\|R_n^*\| = \left| \int_a^b \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right| dt \leq L, \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметив, что $\int_a^b \int_a^t p \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx dt$ не зависит от n , можно сказать,

что ограниченность норм $\|R_n^*\|$ равносильна ограниченности совокупности интегралов от $|F_{n,r-1}(t)|$:

$$\int_a^b |F_{n,r-1}(t)| dt \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как $\frac{d}{dt} F_{n,r}(t) = F_{n,r-1}(t)$, последние неравенства означают

$$\text{Var}_a^b F_{nr}(t) \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Можно убедиться в том, что все изложенное остается верным и в случае $r = 0$. Теорема 4 доказана.

Контрольные вопросы

1. Понятие сходимости квадратурного процесса.
2. Сформулировать две основные проблемы сходимости.
3. Какие два условия должны выполняться для того, чтобы квадратурный процесс сходил для всякой непрерывной на конечном отрезке функции?

4. Условие сходимости квадратурного процесса при неотрицательных коэффициентах $A_k^{(n)}$ для непрерывной функции.

5. Какие условия необходимы, чтобы квадратурный процесс сошелся для всякой функции $f \in C_r[a, b]$?

Л е г ч и я 10

Простейшие способы вычисления кратных интегралов

1. Метод ячеек

Рассмотрим двойной интеграл по прямоугольнику $G (a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta)$. По аналогии с формулой средних значений можно приближенно заменить функцию ее значением в центральной точке прямоугольника. Тогда интеграл легко вычисляется:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x, y) dx dy \approx S f(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$S = (b - a)(\beta - \alpha),$$

$$\bar{x} = \frac{a + b}{2}, \bar{y} = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (1)$$

Для повышения точности можно разбить область интегрирования G на прямоугольные ячейки (рис. 1)

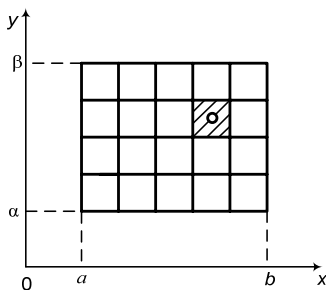


Рис. 1

Приближенно вычисляя интеграл в каждой ячейке по формуле средних и обозначая через $S_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i$ соответственно площадь ячейки и координаты ее центра, получим

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy \approx \sum_i S_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i). \quad (2)$$

Справа стоит интегральная сумма; следовательно, для любой непрерывной $f(x, y)$ она сходится к значению интеграла, когда диаметры всех ячеек стремятся к нулю.

Оценим погрешность интегрирования. Формула (1) по самому ее выводу точна для $f(x, y) = \text{const}$. Но непосредственной подстановкой легко убедиться, что формула точна и для любой линейной функции. Действительно, разложим функцию по формуле Тейлора:

$$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \xi f'_x + \eta f'_y + \frac{1}{2} \xi^2 f''_{xx} + \xi \eta f''_{xy} + \frac{1}{2} \eta^2 f''_{yy} + \dots, \quad (3)$$

где $\xi = x - \bar{x}$, $\eta = y - \bar{y}$, а все производные берутся в центре ячейки. Подставляя это разложение в правую и левую части квадратурной формулы (1) и сравнивая их, получим выражение погрешности этой формулы:

$$R = \int_a^\beta \int_a^b f(x, y) dx dy - S f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \frac{1}{24} S \left[(b-a)^2 f''_{xx} + (\beta-\alpha)^2 f''_{yy} \right]. \quad (4)$$

Пусть в обобщенной кубатурной формуле (2) стороны прямоугольника разбиты соответственно на N и M равных частей. Тогда погрешность интегрирования (4) для единичной ячейки равна

$$R_i \approx \frac{1}{24} S_i \left[\left(\frac{b-a}{N} \right)^2 f''_{xx} + \left(\frac{\beta-\alpha}{M} \right)^2 f''_{yy} \right].$$

Суммируя это выражение по всем ячейкам, получим погрешность обобщенной формулы

$$R \approx \frac{1}{24} \left[\left(\frac{b-a}{N} \right)^2 \iint_G f''_{xx} dx dy + \left(\frac{\beta-\alpha}{M} \right)^2 \iint_G f''_{yy} dx dy \right] = O(N^{-2} + M^{-2}), \quad (5)$$

т. е. формула имеет второй порядок точности.

Обобщим формулу ячеек на более сложные области. Легко видеть, что для линейной функции $f(x, y)$ формула вида (1) будет точна в области произвольной формы, если под S подразумевать площадь области, а под \bar{x}, \bar{y} – координаты центра тяжести, вычисляемые по обычным формулам:

$$S = \iint_G dx dy, \quad \bar{x} = \frac{1}{S} \iint_G x dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \iint_G y dx dy. \quad (6)$$

Практическую ценность такая кубатурная формула имеет только для областей простой формы, где площадь и центр тяжести легко определяются, например, для треугольника, правильного многоугольника, трапеции. Это значит, что обобщенную формулу (2) можно применять к областям, ограниченным ломаной линией, поскольку такую область всегда можно разбить на прямоугольники и треугольники.

Для области с криволинейной границей формулу (2) применяют иным способом. Наложим на область G прямоугольную сетку. Те ячейки сетки, все точки которых принадлежат области, назовем *внутренними*; если часть точек ячейки принадлежит области, а часть – нет, то назовем ячейку *граничной*. Площадь внутренней ячейки равна произведению ее сторон. Площадью граничной ячейки будем считать площадь той ее части, которая попадет внутрь G ; эту площадь вычислим приближенно, заменяя в пределах данной ячейки истинную границу области на хорду. Эти площади подставим в формулу (2) и вычислим интеграл.

Оценим погрешность формулы (2). В каждой внутренней ячейке ошибка составляет $O(N^{-2})$ по отношению к значению интеграла по данной ячейке. В каждой граничной ячейке относительная ошибка есть $O(N^{-1})$, так как центр прямоугольной ячейки не совпадает с центром тяжести ячейки, входящей в интеграл ее части. Но граничных ячеек примерно в N раз меньше, чем внутренних. Поэтому при суммировании по ячейкам общая погрешность будет $O(N^{-2})$, если функция дважды дифференцируема, а граница области есть кусочно-гладкая кривая; это означает второй порядок точности.

Вычисление площади граничной ячейки довольно трудоемко, так как требует определения положения границы внутри ячейки. Можно вычислять интегралы по граничным ячейкам более грубо или не включать их в сумму (2). Погрешность при этом будет $O(N^{-1})$, и для хорошей точности потребуется более подробная сетка.

Метод ячеек переносится на большее число измерений.

2. Последовательное интегрирование

Рассмотрим интеграл по прямоугольнику, разбитому сеткой на ячейки. Его можно вычислить последовательным интегрированием:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(y) dy,$$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Каждый однократный интеграл легко вычисляется на данной сетке по квадратурным формулам. Последовательное интегрирование по обоим направлениям приводит к кубатурным формулам, которые являются *прямым произведением* одномерных квадратурных формул

$$F(y_j) \approx \sum_i c_i f(x_i, y_j), \quad I \approx \sum_j c_j F(y_j),$$

или

$$I \approx \sum_{i,j} c_{ij} f(x_i, y_j), \quad c_{ij} = c_i c_j. \quad (1)$$

Например, если по каждому направлению выбрана обобщенная формула трапеций, а сетка равномерная, то веса кубатурной формулы равны $\frac{c_{ij}}{h_x h_y} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ соответственно для внутренних, граничных

и угловых узлов сетки. Легко показать, что для дважды непрерывно дифференцируемых функций эта формула имеет второй порядок точности.

Вообще говоря, для разных направлений можно использовать квадратурные формулы разных порядков точности p и q . Тогда

главный член погрешности имеет вид $R = O(h_x^p + h_y^q)$. Многократно сгущать сетку при этом условии нелегко, если $p \neq q$; поэтому желательно для всех направлений использовать квадратурные формулы одинакового порядка точности.

Можно подобрать веса и положение линий сетки так, чтобы каждая одномерная квадратурная формула была точна для многочлена максимальной степени, т. е. была формулой Гаусса; тогда

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{4}(b-a)(\beta-\alpha)\gamma_i\gamma_j, & x_i &= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\xi_i, \\ y_j &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\xi_j, & 1 \leq i, j \leq n, \end{aligned} \quad (2)$$

где ξ, γ – нули многочленов Лежандра и соответствующие веса. Эти формулы рассчитаны на функции высокой гладкости и дают для них большую экономию в числе узлов по сравнению с более простыми формулами.

Метод последовательного интегрирования можно применять к области произвольной формы с криволинейной границей. Для этого проведем через область хорды параллельные оси Ox , и на них введем узлы, расположенные на каждой хорде так, как нам требуется. Представим интеграл в виде

$$\begin{aligned} I &= \iint_G f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(y) dy, \\ F(y) &= \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

Сначала вычислим интеграл по x вдоль каждой хорды по какой-нибудь одномерной квадратурной формуле, используя введенные узлы. Затем вычислим интеграл по y ; здесь узлами будут служить проекции хорд на ось ординат.

Контрольные вопросы

1. Кубатурная формула метода ячеек.
2. Погрешность кубатурной формулы ячеек.

3. Особенности вычисления кратного интеграла по области с криволинейной границей.
4. Последовательное интегрирование кратного интеграла.
5. Последовательное интегрирование по произвольной области.

Л е к ц и я 11

Метод статистических испытаний

1. Случайные величины

Пусть нужно измерить значение некоторой величины ξ , на которую влияет большое число различных факторов. Мы не можем учесть их действие, поэтому заранее не известно, какое значение примет эта величина.

Величину ξ называют *случайной с плотностью распределения* $\rho(x)$, если вероятность того, что величина примет значения между

x_1 и x_2 , равна $\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$. По смыслу вероятности $\rho(x)$ неотрицательна и нормирована:

$$\rho(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (1)$$

Очевидно, если значения ξ заключены между a, b , то $\rho(x) = 0$ вне указанных пределов и интеграл (1) надо брать только по отрезку $[a, b]$. Величина ξ может быть дискретной, т. е. принимать только определенные значения x_i с вероятностями ρ_i . Дискретную величину можно формально объединить с непрерывной, если положить

$$\rho(x) = \sum_i \rho_i \delta(x - x_i), \quad \rho_i > 0, \quad \sum_i \rho_i = 1,$$

где $\delta(x - x_i)$ есть δ -функция.

Рассмотрим равномерно распределенную случайную величину. Для этого введем следующую случайную функцию:

$$\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \rho(x) dx. \quad (2)$$

Она принимает значения $0 \leq \gamma \leq 1$ и монотонно зависит от ξ . Вероятность того, что γ лежит между $\gamma_1 = \gamma(\xi_1)$ и $\gamma_2 = \gamma(\xi_2)$, равна вероятности того, что ξ лежит между ξ_1 и ξ_2 . А последняя вероятность есть $\int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(x) dx = \gamma_2 - \gamma_1$, т. е. она равна длине интервала по γ и не зависит от положения этого интервала. Это значит, что $\gamma(\xi)$ с равной вероятностью принимает любое значение на отрезке $[0, 1]$. Поэтому ее называют *случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$* . Плотность распределения γ равна $\bar{\rho}(\gamma) = 1$ при $0 \leq \gamma \leq 1$ и $\bar{\rho}(\gamma) = 0$ вне этого отрезка.

2. Разыгрывание случайной величины

Из всех случайных величин проще всего разыгрывать (моделировать) равномерно распределенную величину γ . Рассмотрим, как это делается.

Возьмем какое-то устройство, на выходе которого с вероятностью $1/2$ могут появляться цифры 0 или 1; появление той или иной цифры должно быть случайным. Таким устройством может быть бросаемая монета, игральная кость (четно – 0, нечетно – 1) или специальный генератор, основанный на подсчете числа радиоактивных распадов.

Запишем γ как двоичную дробь $\gamma_{11} = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ и на место последовательных разрядов будем ставить цифры, выдаваемые генератором: например, $\gamma_{11} = 0,010110\dots$. Поскольку в первом разряде с равной вероятностью могут стоять 0 или 1, это число с равной вероятностью лежит в левой или правой половине отрезка $0 \leq \gamma \leq 1$. Поскольку во втором разряде тоже 0 и 1 равновероятны, число с равной вероятностью лежит в каждой половине этих половин и так далее. Значит, двоичная дробь со случайными цифрами действительно с равной вероятностью принимает любое значение на отрезке $0 \leq \gamma < 1$.

Строго говоря, разыграть можно только конечное число разрядов k . Поэтому распределение будет не вполне требуемым; математическое ожидание $M\gamma$ окажется меньше $\frac{1}{2}$ на величину $\approx 2^{-k-1}$ (ибо значение $\gamma = 0$ возможно, а значение $\gamma = 1$ невозможно). Чтобы этот фактор не сказывался, следует брать многоразрядные числа.

Так как реальные случайные числа имеют погрешности, то вводятся *псевдослучайные числа*. Реальные генераторы случайных чисел не свободны от систематических ошибок: несимметричность монеты, дрейф нуля и так далее. Поэтому качество выдаваемых ими чисел проверяют специальными тестами. Простейший тест – вычисление для каждого разряда частоты появления нуля. Более сложные тесты – это вычисление коэффициентов корреляции последовательных чисел

$$\kappa = \sum_i (\gamma_i - \frac{1}{2})(\gamma_{i+1} - \frac{1}{2})$$

или групп разрядов внутри числа; эти коэффициенты должны быть близкими к нулю.

Если какая-то последовательность чисел удовлетворяет этим тестам, то ее можно использовать в расчетах по методу статистических испытаний, не интересуясь ее происхождением. Разработаны алгоритмы построения таких последовательностей; символически их записывают рекуррентными формулами

$$\gamma_i = f(\gamma_{i-1}) \quad \text{или} \quad \gamma_i = f(\gamma_{i-1}, \gamma_{i-2}, \dots, \gamma_{i-k}). \quad (1)$$

Такие числа называют псевдослучайными и вычисляют на ЭВМ.

Наиболее употребителен несложный алгоритм, связанный с выделением дробной части произведения

$$\gamma_i = \{A\gamma_{i-1}\}, \quad (2)$$

где A – очень большая константа, фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Строго говоря, закономерность псевдослучайных чисел должна быть незаметна по отношению к требуемому частному применению.

Перейдем к произвольному распределению случайной величины. Для разыгрывания случайной величины с неравномерным распреде-

лением $\rho(x)$ можно воспользоваться формулой (2) разд. 1. Разыграем γ и определим ξ из равенства

$$\gamma_i = \int_{-\infty}^{\xi_i} \rho(x) dx .$$

Если интеграл берется в конечном виде и формула несложная, то это наиболее удобный случай. Для некоторых важных распределений – Гаусса, Пуассона – соответствующие интегралы не берутся и разработаны специальные способы разыгрывания.

3. Вычисление интеграла

Значение случайной функции $f(\xi)$ заключено между $f(x)$ и $f(x + dx)$, если ξ заключено между x и $x + dx$; вероятность этого события равна $\rho(x)dx$. Математическое ожидание случайной функции и ее дисперсия соответственно равны

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho(x)dx , \quad (1)$$

$$Df(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - Mf(\xi)]^2 \rho(x)dx = Mf^2(\xi) - [Mf(\xi)]^2 . \quad (2)$$

Таким образом, *одномерный интеграл можно рассматривать как математическое ожидание случайной функции $f(\xi)$, аргумент которой есть случайная величина с плотностью распределения $\rho(x)$.*

Существует два способа вычисления статистического вычисления интегралов.

Первый способ статистического вычисления интегралов. Математическое ожидание можно приближенно вычислить на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей: *если η есть случайная величина, то среднее арифметическое многих испытаний*

$\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i$ *тоже есть случайная величина с тем же математическим ожиданием $M\zeta_N = M\eta$, причем при $N \rightarrow \infty$ распределение*

ζ_N стремится к гауссову (нормальному) распределению с дисперсией $D\zeta_N = \frac{1}{N}D\eta$.

При большом числе испытаний дисперсия ζ_N мала, т. е. значение среднеарифметического с хорошей вероятностью будет близко к математическому ожиданию. Поэтому можно положить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i), \quad (3)$$

где ξ – случайная величина с плотностью распределения $\rho(x)$. Оценим дисперсию отдельного испытания по формуле (2), заменяя в ней математические ожидания на суммы типа (3); тогда дисперсия среднеарифметического значения приближенно равна

$$\Delta_N \approx \frac{1}{N} Df(\xi) \approx \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^2(\xi_i) - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \right]^2 \right\}. \quad (4)$$

Появление делителя $N-1$ вместо N перед фигурной скобкой обосновывается в теории вероятностей; правда, это существенно при очень малых числах испытаний.

Ответ в методе статистических испытаний носит вероятностный характер и в принципе может сколь угодно сильно отличаться от значения интеграла. Однако, согласно свойствам нормального распределения, с вероятностью 99,7 % ошибка не превосходит $3\sqrt{\Delta_N}$. Вероятной называют ошибку $0,675\sqrt{\Delta_N}$, соответствующую 50%-й вероятности; реальная ошибка обычно близка к этой величине – примерно вдвое больше или меньше. Таким образом, выполняя расчеты по формулам (3)–(4), мы одновременно с интегралом получаем неплохую оценку ошибки.

При увеличении числа испытаний N погрешность ответа будет убывать примерно как $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Поэтому на точность выше 0,1 % в методе статистических испытаний трудно рассчитывать. В сложных

задачах погрешность возрастает до 1...10 %. Поскольку погрешность имеет вероятностный характер, то зависимость $\frac{1}{\sqrt{N}}$ относится не к самой погрешности, а лишь к ширине доверительного интервала. Поэтому нельзя приписывать методу статистических испытаний строгий порядок точности.

Второй способ статистического вычисления применяется к интегралам вида $\int_0^1 f(x)dx$, причем на отрезке интегрирования $0 \leq f(x) \leq 1$. Произвольный интеграл можно привести к такому виду линейной заменой масштабов.

Возьмем случайные числа γ_i , равномерно распределенные на единичном отрезке. Будем рассматривать последовательные пары чисел $(\gamma_{2i}, \gamma_{2i+1})$ как координаты (x_i, y_i) точек в единичном квадрате на плоскости x, y (рис. 1).

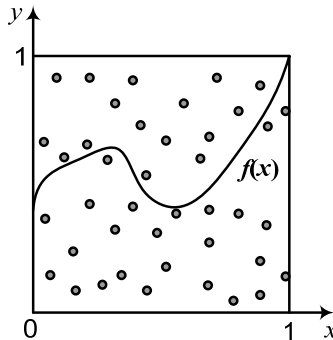


Рис. 1

Эти точки будут случайными и равномерно распределенными в этом квадрате. Поэтому вероятность попадания точки под кривую $y = f(x)$ равна величине площади, заключенной под кривой, т. е. искомому интегралу. Условие попадания точки под кривую есть $\gamma_{2i+1} < f(\gamma_{2i})$; та доля общего числа испытаний, которая удовлетворяет этому условию, дает приближенное значение интеграла.

4. Кратные интегралы

Второй способ легко обобщается на многомерные интегралы $I = \int_G f(x, y, z) dx dy dz$ по единичному кубу G (для определенности мы выбираем трехмерное пространство), если $0 \leq f(x, y, z) \leq 1$ внутри этого куба. Рассмотрим куб в четырехмерном пространстве x, y, z, u и случайные равномерно распределенные в нем точки; координатами этих точек будут последовательные четверки случайных чисел γ_{4i+k} , $k = 0, 1, 2, 3$. Доля случайных точек, удовлетворяющая неравенству $\gamma_{4i+3} < f(\gamma_{4i}, \gamma_{4i+1}, \gamma_{4i+2})$, даст приближенное значение искомого интеграла. Чем больше число измерений, тем более жесткими тестами нужно проверять качество псевдослучайных чисел, используемых в расчете.

Для гладких функций можно получить более хорошие результаты при несложном построении сетки, если выбрать число узлов $N = k^m$, где m – число измерений. Разобьем единичный куб на N кубиков со стороной $\frac{1}{k}$, в каждом кубике выберем одну случайную точку и вычислим по этим точкам интеграл. Дисперсия этого метода есть $\Delta_N = O(N^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{m}})$, т. е. она меньше оценки $O(N^{-\frac{1}{2}})$, получающейся при обычном применении метода Монте-Карло.

Поскольку дисперсия второго способа велика, первый способ статистического вычисления интегралов точнее. Пусть $\rho(x, y, z) \geq 0$ есть многомерная плотность распределения некоторой случайной величины. Тогда аналогично одномерному случаю,

$$\int_G f(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz = Mf(\xi, \eta, \zeta) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i). \quad (1)$$

Как найти случайную трехмерную точку с заданным распределением плотности по тройке равномерно распределенных случайных чисел $\gamma_{3i}, \gamma_{3i+1}, \gamma_{3i+2}$? Для этого надо свести разыгрывание многомерной плотности к последовательным разыгрываниям одномерных случайных величин с плотностями $R(x), R(y), R(z)$.

Для разыгрывания координаты x построим одномерную плотность распределения по этой координате при произвольных остальных координатах

$$R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y, z) dy dz .$$

Очевидно, функция $R(x)$ неотрицательна и нормирована на единицу, т. е. удовлетворяет предъявленным к плотности требованиям. Поэтому формула разыгрывания имеет вид

$$\gamma_{3i} = \int_{-\infty}^{\xi_i} R(x) dx .$$

Теперь одна координата разыграна. Надо найти плотность распределения по второй координате при фиксированной первой координате и произвольной третьей. Если первую координату зафиксировать, а по третьей проинтегрировать, то полученное выражение не удовлетворяет условию нормировки (интеграл по y не равен 1). Нормируя его, получим искомую плотность

$$R(y, \xi_i) = R^{-1}(\xi_i) \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi_i, y, z) dz .$$

Вторая координата разыгрывается по формуле

$$\gamma_{3i+1} = \int_{-\infty}^{\eta_i} R(y, \xi_i) dy .$$

Плотность распределения по третьей координате при фиксированных первых двух координатах пропорциональна $\rho(\xi_i, \eta_i, z)$. Для нормировки надо положить

$$R(z, \xi_i, \eta_i) = R^{-1}(\xi_i) R^{-1}(\eta_i, \xi_i) \rho(\xi_i, \eta_i, z) ,$$

тогда интеграл по ячейке равен единице. Соответственно формула разыгрывания имеет вид

$$\gamma_{3i+2} = \int_{-\infty}^{\zeta_i} R(z, \xi_i, \eta_i) dz .$$

Подставляя полученные координаты в формулу (1), вычислим искомый интеграл.

Нелегко подобрать такой вид плотности $\rho(x, y, z)$, чтобы она содержала основные особенности подынтегральной функции. Обычно пытаются выделить плотность вида $\rho(x, y, z) = \rho_1(x)\rho_2(y)\rho_3(z)$, ибо тогда каждая координата разыгрывается независимо от остальных и легче подобрать интегрируемые выражения для одномерных плотностей.

Какими методами удобнее вычислять интегралы – сеточными или статистическими? Точность метода статистических испытаний невелика, и для однократных интегралов он явно невыгоден. Для многих измерений положение резко меняется.

Пусть функция m переменных интегрируется по сеточным формулам p -го порядка точности, причем сетка имеет n шагов по каждой переменной. Тогда полное число узлов есть $N = n^m$, а погрешность расчета $\varepsilon \approx n^{-p}$. Поэтому число узлов, требуемое для достижения данной точности ε , есть $N \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{p}}$; оно экспоненциально растет при увеличении числа измерений.

При интегрировании методом статистических испытаний погрешность $\varepsilon \approx N^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому полное число узлов есть $N \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ независимо от числа измерений.

Очевидно, если число измерений $m < 2p$, то сеточные методы требуют меньшего числа узлов и более выгодны. Если $m > 2p$, то статистические методы выгодней. Чем больше число измерений, тем больший выигрыш дают статистические методы.

Контрольные вопросы

1. Понятие случайной величины.
2. Равномерное распределение случайной величины.
3. Разыгрывание случайной величины.
4. Псевдослучайные числа.
5. Вычисление интеграла методом Монте-Карло.

6. Вычисление кратных интегралов сеточным методом.
7. Вычисление кратных интегралов статистическим методом.

Список литературы

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жуков, Г. П. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 599 с.
2. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 327 с.
3. Крылов, В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М.: Наука, 1966. – 370 с.
4. Крылов, В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, Т. И. Монастырский. – Т. 1. – М.: Наука, 1976. – 303 с.
5. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1988. – 255 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Л е к ц и я 1. Простейшие квадратурные формулы	4
Л е к ц и я 2. Числа и многочлены Бернулли	11
Л е к ц и я 3. Квадратурные формулы и задачи, связанные с ними	23
Л е к ц и я 4. Интерполяционные квадратурные формулы	32
Л е к ц и я 5. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности	45
Л е к ц и я 6. Квадратурные формулы с наименьшей оценкой остатка	54
Л е к ц и я 7. Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы	66
Л е к ц и я 8. Квадратурные формулы с равными коэффициентами	73
Л е к ц и я 9. Сходимость квадратурного процесса	79
Л е к ц и я 10. Простейшие способы вычисления кратных интегралов	86
Л е к ц и я 11. Метод статистических испытаний	91
Список литературы	100