ПОСОБИЯ
ДЛЯ
ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ

В. А. КРОГИУС

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

ГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО 1928

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ТРУДОВОЙ ШКОЛЫ

В. А. КРОГИУС

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ 5-ОЕ
46-АЯ — 55-АЯ ТЫС.

Допущено Научно-Педагогической Секцией Государственного Ученого Совета

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1928 ЛЕНИНГРАД

Государственное издательство
Типография имени Н. Бухарина
Ленинград

У. 21. Гиз № 29257/Л.
Ленинградский Областлит № 182
Тираж 10000. 7½ л.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Предлагаемый курс тригонометрии разделяется на две части, при чем обе части самостоятельны и могут быть изучены отдельно.

Первая часть, как и во многих учебниках тригонометрии, посвящена изучению тригонометрических функций острого угла и решению треугольников. Но, в отличие от других учебников, в ней для углов второй четверти введено только понятие о синусе и притом не обычным путем. Выводы первой части, может быть, кажутся нам более сложными, чем те аналитические выводы, к которым мы привыкли; но эти выводы имеют и преимущество: они носят более геометрический характер. Сведения, даваемые первой частью, удовлетворяют всем требованиям, которые обыкновенно предъявляются курсом физики средней школы и совершенно достаточны для техника-практика.

Во второй части тригонометрические функции рассматриваются в общем виде, при чем они определены как отношения радиуса и его проекций на две взаимно-перпендикулярные оси. Такие определения, с одной стороны, являются естественным обобщением определений, данных в первой части. С другой стороны, они избавляют от необходимости вводить особые (довольно искусственные) тригонометрические линии. Знаки функций, определенных таким образом, совершенно естественно вытекают из соглашения относительно положительных и отрицательных направлений координатных осей и не требуют никаких дополнительных условий. Эти определения дают более естественное и более обоснованное приложение полученных результатов к вопросам аналитической геометрии и механики. Для строгого и обоснованного вывода теорем тригонометрии, при этом изложении, пришлось дополнительно ввести некоторые основные положения теории векторов. Соответственно этому выводы формул приведения, сложения и вычитания дуг изложены иначе, чем в большинстве учебников. Все доказательства справедливы для произвольных дуг и не требуют поэтому никаких обобщений.

Если бы преподаватель желал воспользоваться теми определениями и выводами, которые приняты мною, но не одобрял проведенного здесь распределения курса, то он мог бы, пользуясь этим учебником, придерживаться такого порядка: сначала пройти о решении прямоугольного треугольника по первой части, затем по второй части о тригонометрических функциях и, наконец, теоремы о косоугольных треугольниках. При таком порядке прохождения курса было бы естественнее взять те выводы, относящиеся к косоугольным треугольникам, которые даны (мелким шрифтом) во второй части: они более согласуются с данными здесь определениями, чем обычные выводы этих теорем.

Если бы преподаватель сомневался в удобопонятности для учащегося вывода формулы $\cos(a+b)$ при помощи проектирования, то он мог бы воспользоваться обычным способом вывода, приведенным (мелким шрифтом) в § 67. Однако, этот вывод, как мне кажется, несколько нарушил бы стройность и дух того изложения, которое проведено в других доказательствах и выводах. Для сильных учеников (или класса) сравнение этих двух методов было бы, может быть, полезным для оценки плодотворности теоремы о проекции вектора.

В этом курсе нет объяснения того, как пользоваться логарифмо-тригонометрическими таблицами, во-первых, потому, что во всех таблицах, принятых в наших школах, есть объяснения приемов пользования ими, и поэтому едва ли есть необходимость помещать эти объяснения еще и в учебник (тем более, что даже объяснения, помещенные в таблицах, не читаются большинством учащихся); во-вторых, таблицы, изданные различными авторами, устроены не вполне одинаково, и поэтому приводить объяснения — значило бы связывать преподавателя выбором таблиц. Некоторые образцы вычислений (по натуральным, по четырехзначным и пятизначным логарифмическим таблицам) даны в этом учебнике.

Особым случаям решения треугольников и четырехугольников отведено очень мало места, а введение вспомогательного угла совсем опущено. Первому я придаю очень малое образовательное и практическое значение, а второе, по крайней мере в качестве метода приведения к логарифмическому виду, считаю совершенно бесполезным.

В заключение позволю себе заметить, что при составлении настоящего курса я больше всего пользовался учебником Lock and Child «A new trigonometry» и лекциями Левитуса, читанными им в 1911—1912 году и изданными на правах рукописи. Кроме того, воспользовался также замечаниями и советами друзей и знакомых, которыми они делились со мною, в особенности Е. В. Бабанского, Г. М. Фихтенгольца и С. И. Шохор-Троцкого. Приношу им свою искреннюю благодарность.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

Со времени появления первого издания этого учебника Комиссариатом народного просвещения были выпущены 1) Примерные программы в 1918 году и 2) Программы, разработанные комиссиями по составлению программ при Отделе единой трудовой школы в 1921 году. Первые петербургские программы по тригонометрии составлены вполне по плану этого учебника, вышедшего ранее этих программ. В последней программе (составленной Г. М. Фихтенгольцем) рекомендуется то расположение материала, которое в предисловии к первому изданию предложено мною для преподавателя, не сочувствующего распределению курса, проведенному в этом учебнике. В объяснительной записке последней программы сделан ряд указаний, веско обоснованных, которые выполнены уже и в первом издании этого учебника. Только указание на желательность ознакомления учащихся с триангуляцией, с определением расстояний и размеров небесных тел, с измерениями на местности не осуществлено мною. Но обусловлено это совсем не моим несочувствием этому взгляду, а тем, что характер этих приложений, их объем и точность зависят в значительной степени от того, насколько обстоятельно изучается астрономия, какие приборы имеются в распоряжении школы, какие измерения проделаны учащимися на первой ступени.

Во втором издании сделаны по сравнению с первым некоторые изменения: 1) добавлены формулы Мольвейде; 2) немного изменены выводы формул приведения и теоремы сложения; 3) приведено решение еще некоторых простых уравнений; 4) выведена зависимость между круговыми функциями отрицательного и положительного аргумента; 5) прибавлено замечание о малых углах.

В заключение считаю приятным долгом, кроме лиц, указанных в первом издании, поблагодарить П. А. Компанийца и Д. С. Селиванова за те соображения, которыми они поделились со мною

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ.

В этом издании сделаны по сравнению со вторым некоторые изменения.

Чтобы больше подчеркнуть тот смысл, который может иметь в глазах ученика введение тригонометрических функций, при определении каждой функции даны маленькие задачи, решаемые при помощи значений этой функции; таким образом определение каждой функции ассоциируется с некоторой задачей. Затем, приведены некоторые практические вопросы, решаемые при помощи прямоугольных (§ 21 и § 23) и косоугольных (§ 33) треугольников. В § 22 введена основная теорема о площадях проекций плоских фигур на плоскость. В § 34 дано понятие о триангуляции. В практических приложениях я старался дать примеры, которые были бы интересны сами по себе или имели практическое и теоретическое значение.

В § 46 указана связь значений тригонометрических функций с длиной линий на круге. Это имеет не только историческое значение, но очень удобно в некоторых задачах, например, при изучении гармонического колебательного движения.

Но самое существенное дополнение, внесенное в это издание,— исторический очерк тригонометрии, в котором обращено наибольшее внимание на историю возникновения тригонометрических функций, вопрос, наиболее понятный учащемуся, и только мельком указано на их применение в математическом анализе.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ.

Это издание отличается от предыдущего очень незначительно.

Глава о проекциях дополнена теоремой о проекции замыкающей (§ 42), что дало возможность несколько короче и проще изложить теорему сложения (§ 66); введением § 42 трудность этой теоремы разделена: теорема более подготовлена.

Геометрическое изображение тригонометрических функций посредством линий в круге приведено более подробно (§ 46) и рассмотрено для всех четвертей. При желании преподавателя этот параграф может быть опущен.

В § 70 приведено в общей форме исследование формул для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Таблица значений тригонометрических функций дана теперь с тремя десятичными знаками (вместо двух).

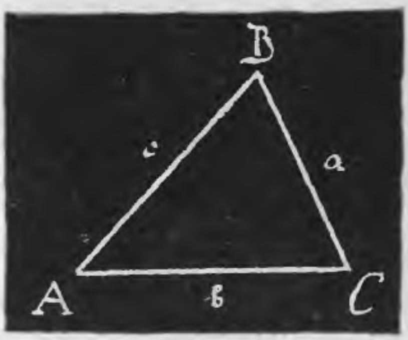
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

О ФУНКЦИЯХ ОСТРОГО УГЛА И РЕШЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Всякий плоский замкнутый многоугольник может быть разбит прямыми на треугольники; а всякий треугольник разбивается высотою на два треугольника и может быть рассматриваем как сумма или разность двух прямоугольных треугольников. Поэтому бо́льшая часть вопросов, относящихся к многоугольникам, может быть сведена к вопросам, относящимся к треугольникам или даже к прямоугольным треугольникам.

Переходя к изучению треугольников, условимся углы и стороны треугольников называть его элементами. Углы треугольника (см. черт. 1) будем обозначать (заглавными) буквами A, B, C, а противолежащие им стороны соответственно (строчными) буквами a, b, c; таким образом, стороны будут всегда обозначены теми же (малыми) буквами, какими (но большими) обозначены противолежащие им углы. В прямоугольном треугольнике буквою C условимся обозначать прямой угол, а буквою c — гипотенузу.

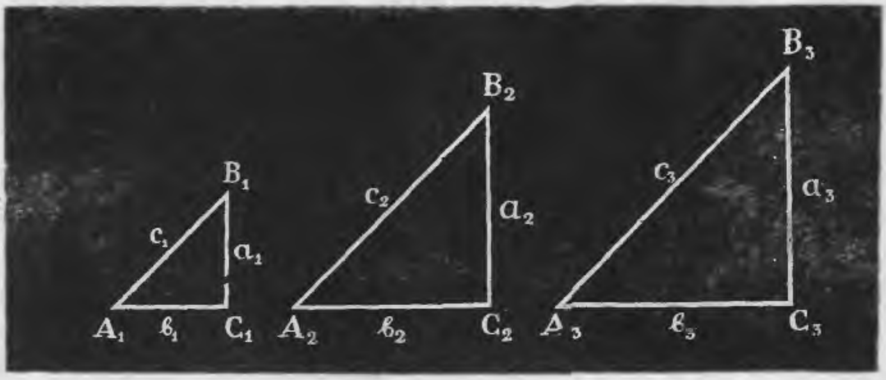


Черт. 1.

§ 2. Решить треугольник значит — по данным его элементам вычислить остальные. Так как треугольник вполне определяется тремя элементами (как это видно из признаков равенства треугольников), то вообще достаточно трех элементов (в числе которых должен быть по меньшей мере один отрезок) для определения остальных. Прямоугольный же треугольник определяется вполне, если (кроме прямого угла) заданы два элемента (но, конечно, не два угла).

О СИНУСЕ ОСТРОГО УГЛА.

§ 3. Если два прямоугольных треугольника имеют по равному (острому) углу A, то они подобны (так как имеют по два равных угла); следовательно, их стороны пропорциональны, а другие острые



Черт. 2.

углы равны между собой. Рассмотрим (черт. 2) ряд прямоугольных треугольников

$$A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2, \ldots\ldots A_nB_nC_n$$

имеющих по равному острому углу

$$\angle A_1 = \angle A_2 = \ldots\ldots = \angle A_n.$$

Так как треугольники подобны, то

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{c_n} \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Отношение $\frac{a}{c}$ остается в этих треугольниках постоянным (без изменения).

Если мы, оставив гипотенузу c без изменения, увеличим или уменьшим острый угол A, то катет a возрастет или убудет, и поэтому отношение $\frac{a}{c}$ (противолежащего углу A катета к гипотенузе) при изменении угла A также меняется. Каждому значению угла A соответствует определенное значение отношения $\frac{a}{c}$. Другими словами, отношение $\frac{a}{c}$ есть функция[1]) угла A. Эту функцию — отношение $\frac{a}{c}$ — называют *синусом угла A*.

[1]) Предполагается, что учащийся знаком с термином «функция», однако напомним ее определение.

Если переменная y связана с переменной x так, что каждому значению x соответствуют определенные значения y, то x называют *независимой перемен-*

Итак, *синус острого угла есть отношение противолежащего углу катета к гипотенузе.*

Для обозначения синуса угла A пишут $\sin A$. Согласно определению,

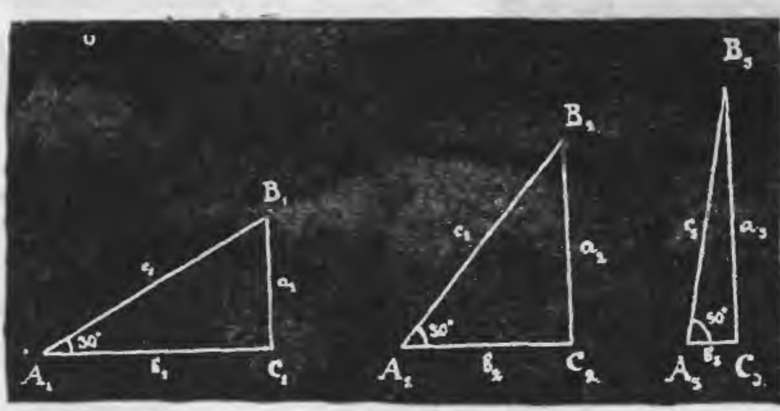
$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Применяя это определение к углу B, получаем

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

(так как против угла B лежит катет b).

§ 4. Приближенные численные значения синусов острых углов можно проще всего найти, построив на миллиметровой бумаге прямоугольные треугольники с гипотенузой длиною в 100 миллиметров; измеряя затем лежащие против угла A катеты в миллиметрах и разделяя полученные числа на 100 *мм* (на c), найдем приближенные значения синусов углов A. Эти измерения на миллиметровой бумаге



Черт. 3.

(черт. 3: $c_1 = c_2 = c_3 = 100$ *мм*; $\angle A_1 = 30°$; $\angle A_2 = 50°$; $\angle A_3 = 80°$) дают следующие результаты:

$$B_1C_1 = a_1 = 50 \text{ мм}, \quad B_2C_2 = a_2 = 77 \text{ мм}, \quad B_3C_3 = a_3 = 98 \text{ мм}.$$

ной или аргументом, а переменную y — ее *функцией*. Например, если указана зависимость

$$y = 3x^2 - 1,$$

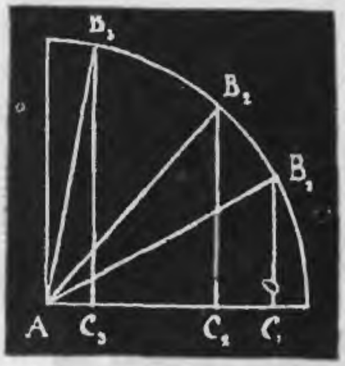
то, давая x произвольные значения, получим ряд соответствующих значений y: y есть функция x. Еще пример. Объем шара есть функция его радиуса: задавая произвольные значения радиуса, получаем соответствующие значения объема шара.

Поэтому,

$$\sin 30^\circ = 0{,}50;\quad \sin 50^\circ = 0{,}77;\quad \sin 80^\circ = 0{,}98$$

с точностью до 0,01.

Если желательно сохранить место, то можно расположить треугольники так, чтобы катет, прилегающий к углу A, оставался одним и тем же, а гипотенуза вращалась вокруг вершины A (черт. 4). Пользуясь миллиметровой бумагой, мы можем обойтись и без прямых B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 . . . и даже без прямых AB_1, AB_2, AB_3 . . . Необходимо иметь только положение точек B_1, B_2, B_3 . . . и отсчитывать по вертикальному направлению в миллиметрах их расстояния от (горизонтальной) прямой AC.



Черт. 4.

Высшая математика дает возможность вычислить синусы углов с какой угодно точностью. В нижеприведенной таблице даны приближенные значения синуса с двумя знаками после запятой. (См. табл. на стр. 11.)

§ 5. Как видно из приведенной таблицы, значения синуса заключаются между нулем и единицей, т. е. *синус острого угла* всегда *выражается правильной дробью.* Это можно было предвидеть, так как, согласно определению, синус острого угла есть отношение длины катета к длине гипотенузы, т. е. отношение меньшего числа к большему. С другой стороны, на основании определения можно заключить, что *синус*, как отношение одного отрезка к другому, *есть отвлеченное число.*

Пользуясь приведенной таблицей, можно по данному значению угла найти значение синуса, — и обратно. Например,

$$\sin 56^\circ = 0{,}83.$$

Обратно, при помощи этой таблицы можно по данному значению синуса найти соответствующий ему угол. Положим, синус некоторого угла равен 0,29. Угол, соответствующий этому значению синуса, равен 17°.

§ 6. При помощи значений синуса можно решать некоторые практические вопросы. Приведем несколько примеров этого.

Положим, угол, составленный направлением дороги с горизонтом, равен $A = 15^\circ$ (черт. 4). Найти, насколько выше данного места находится точка, удаленная от него на 70 *м.*

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \sin A;\quad B_1C_1 = AB_1 \sin A.$$

Подставляя данные значения, получаем:

$$BC = 70\cdot\sin 15^\circ = 70\cdot 0{,}26 = 18{,}2\ \text{м.}\ ^{1)}$$

---

1) Следует заметить, что уклон в 15° — довольно значительный уклон. Например, на шоссейных дорогах не допускается уклон более 4°, да и то только для гористых местностей.

Таблица значений синусов острых углов.

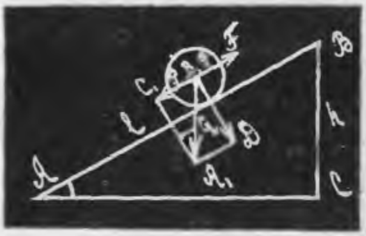
Угол.	Синус.	Угол.	Синус.	Угол.	Синус.	Угол.	Синус.
1	0,02	24	0,41	47	0,73	70	0.94
2	0,03	25	0,42	48	0,74	71	0,95
3	0,05	26	0,44	49	0,75	72	0,95
4	0,07	27	0,45	50	0.77	73	0,96
5	0,09	28	0,47	51	0,78	74	0,96
6	0,10	29	0,48	52	0,79	75	0,97
7	0,12	30	0,50	53	0,80	76	0,97
8	0,14	31	0,52	54	0.81	77	0,97
9	0,16	32	0,53	55	0,82	78	0,98
10	0,17	33	0,54	56	0,83	79	0,98
11	0,19	34	0,56	57	0,84	80	0,98
12	0,21	35	0,57	58	0,85	81	0,99
13	0,22	36	0,59	59	0,86	82	0,99
14	0,24	37	0,60	60	0,87	83	0,99
15	0,26	38	0,62	61	0.87	84	0,99
16	0,28	39	0,63	62	0,88	85	1.00
17	0,29	40	0,64	63	0,89	86	1,00
18	0,31	41	0,66	64	0,90	87	1,00
19	0,33	42	0,67	65	0,91	88	1.00
20	0,34	43	0,68	66	0,91	89	1,00
21	0,36	44	0,69	67	0,91		
22	0,37	45	0.71	68	0,93		
23	0,39	46	0,72	69	0,93		

Какую силу P надо приложить вдоль наклонной плоскости к грузу в Q *кг*, чтобы он был в равновесии на плоскости, наклон которой равен A?

Силу $Q = B_1A_1$ (черт. 5) можно разложить на две силы B_1D и B_1C_1, из которых первая перпендикулярна к плоскости и производит только давление на плоскость; силу $P = B_1C_1$ надо уравновесить силой B_1F, равной ей и противоположно направленной, чтобы удержать тело от скатывания по наклонной плоскости. (Трение не принимается во внимание.) Угол $B_1A_1C_1 = A$;

$$\frac{P}{Q} = \sin A_1 = \sin A;$$

следовательно, $P = Q \sin A$.



Черт. 5.

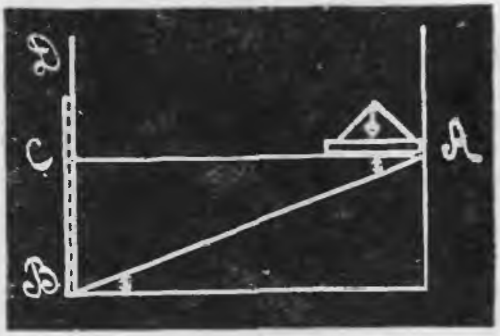
Тот же результат можно получить на основании такого рассуждения: работа силы для подъема груза с уровня AC до высоты точки B не должна зависеть от пути. Если поднимать груз Q вдоль $BC = h$, то работа равна Qh; если же катить груз вдоль $AB = l$, то работа равна Pl; значит, $Qh = Pl$; но

$$\frac{h}{l} = \sin A;\ h = l \sin A;$$

поэтому $Ql \sin A = Pl$, т. е. $P = Q \sin A$.

Если $Q = 12$ *кг*, $A = 12^\circ$, то $P = 12 \cdot \sin 12^\circ = 12 \cdot 0{,}21 = 2{,}52$ *кг*.

Если угол наклона равен только 6°, то усилие, потребное, чтобы двигать груз вдоль плоскости, должно равняться 0,1 его веса; для того чтобы понять, сколь велико это усилие, стоит только принять во внимание, что трение на порядочной дороге составляет только $\frac{1}{25}$ веса, а на хорошем шоссе только $\frac{1}{50}$ (цифры округлены).



Черт. 6.

Чтобы определить наклон дороги, можно поступать таким образом. В точке B (черт. 6) ставим вертикально рейку с делениями BD (около 2 *м*) и, отмерив расстояние AB (около 4 *м*), устанавливаем с помощью ватерпаса горизонтальную планку AC; отмеряем расстояние EC; тогда $\frac{BC}{AB} = \sin A$.

Например, $AB = 4$ *м*; $BC = 0{,}73$ *м*; $\sin A = \frac{0{,}73}{4} = 0{,}18$. По таблице находим $A = 11^\circ$ (приблизительно).

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПРИ ПОМОЩИ ЗНАЧЕНИЙ СИНУСА.

§ 7. Значения синуса позволяют решать прямоугольные треугольники. Покажем это на следующих трех примерах.

Положим, в прямоугольном треугольнике заданы гипотенуза и острый угол:

$$c = 5{,}4 \text{ см};\quad A = 25^\circ.$$

Найти остальные элементы. Из таблицы имеем:

$$\sin A = \sin 25^\circ = 0{,}42,$$

а на основании определения синуса

$$\sin A = \sin 25^\circ = \frac{a}{5{,}4},$$

откуда

$$\frac{a}{5{,}4} = 0{,}42 \text{ или } a = 5{,}4 \text{ см} \times 0{,}42 = 2{,}3 \text{ см}$$

(если сохранить в произведении два знака). Зная стороны a и c, по теореме Пифагора получим:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5{,}4^2 - 2{,}3^2} = \sqrt{23{,}87} = 4{,}9 \text{ см}.$$

Но этот последний результат можно получить проще, если еще раз воспользоваться таблицей. Действительно,

$$B = 90^\circ - A = 65^\circ;\quad \sin B = \sin 65^\circ = 0{,}91\ ^{1)} = \frac{b}{5{,}4},$$

откуда

$$b = 5{,}4\ \textit{см} \times 0{,}91 = 4{,}9\ \textit{см}.$$

Другой пример. Пусть в прямоугольном треугольнике заданы катет и противолежащий ему острый угол. Найти остальные элементы.

$$a = 27\ \textit{см},\ A = 40^\circ.$$

Имеем

$$\sin A = \sin 40^\circ = 0{,}64 = \frac{27}{c},$$

следовательно,

$$c = \frac{27\ \textit{см}}{0{,}64} = 42\ \textit{см}.$$

Далее,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{42^2 - 27^2} = \sqrt{1035} = 32\ \textit{см},$$

или, проще:

$$\sin B = \sin 50^\circ = 0{,}77 = \frac{b}{42},$$

значит,

$$b = 42\ \textit{см} \times 0{,}77 = 32\ \textit{см}.$$

Третий пример. Пусть заданы два катета прямоугольного треугольника, найти остальные элементы.

$$a = 0{,}45\ \textit{м},\quad b = 0{,}57\ \textit{м}.$$

Имеем:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0{,}45^2 + 0{,}57^2} = \sqrt{0{,}5274} = 0{,}73\ \textit{м}.$$

Далее получаем:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{0{,}45}{0{,}73} = 0{,}62,$$

отсюда по таблице находим:

$$A = 38^\circ,\quad B = 90^\circ - A = 52^\circ.$$

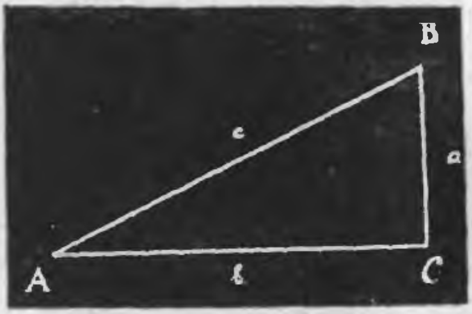
О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ОСТРОГО УГЛА.

§ 8. Рассматривая решение этих трех задач, легко убедиться, что вычисления в первой задаче проще, чем в остальных. Действительно, в первой задаче необходимо сделать только два перемножения приближенных чисел; между тем, во второй задаче приходится уже делить приближенные числа, а в третьей нельзя обойтись без извлечения квадратного корня из суммы квадратов двух приближенных

---

[1]) Число 0,91 взято из таблицы.

чисел. Для того чтобы во всех задачах этого рода сделать вычисления по возможности более простыми, следует вычислить и поместить в таблицу, подобную приведенной для синусов, не только отношение катета к гипотенузе, но и все другие возможные отношения сторон прямоугольного треугольника. Из трех сторон a, b, c прямоугольного треугольника (см. черт. 7) можно составить шесть (число размещений из трех по два) различных отношений:



Черт. 7.

$$\frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}.$$

Каждое из этих отношений зависит от величины острого угла треугольника и не зависит от длины сторон треугольника, т. е. остается постоянным для всех подобных друг другу треугольников. Каждое из этих отношений определяется величиною *острого угла* A, *каждое из них есть функция угла* A.

Эти шесть отношений называются *тригонометрическими функциями* угла. Каждая из этих функций носит особое название. Приближенные значения этих функций приведены в таблице на стр. 22. Если по этой таблице надо найти значение тригонометрической функции угла, не превосходящего 45°, то следует прочесть заглавие столбца сверху, а число градусов слева; если же угол больше 45°, то заглавие столбца надо читать снизу, а число градусов справа. Например,

$$\operatorname{tg} 62° = 1{,}881; \quad \cos 75° = 0{,}259.$$

§ 9. *Отношение* $(a:c)$ *противолежащего* (угла A) *катета к гипотенузе называется синусом угла* (A), что записывается так:

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Отношение $(a:b)$ *противолежащего* (углу A) *катета к прилежащему* (к углу A) *катету называется тангенсом угла* (A), что записывается так:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

$$\left(\text{или } \operatorname{tang} A = \frac{a}{b}, \quad \text{или } \tan A = \frac{a}{b}\right).$$

Чтобы найти приближенные значения тангенса, проще всего поступить таким образом. Отложить (например, по горизонтальному направлению) катет $b = 100$ *мм* (черт. 8) и, построив при вершине A заданные углы (30°, 45°, 68°), измерить другой катет. Получаем: $CB_1 = 58$ *мм*, $CB_2 = 100$ *мм*, $CB_3 = 248$ *мм*. Поэтому $\operatorname{tg} 30° = 0{,}58$; $\operatorname{tg} 45° = 1{,}00$; $\operatorname{tg} 68° = 2{,}48$.

Имея таблицу значений тангенса, можно решать разнообразные практические задачи.

На сколько выше должен быть фундамент с одной стороны дома, чем с другой, если ширина дома равна 8 *м*, а наклон места 5°?

$\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A$; $BC = AC \cdot \operatorname{tg} A$; $BC = 8 \cdot \operatorname{tg} 5° = 8 \cdot 0{,}09 = 0{,}72$ метра (1 аршин приблизительно.)

С возвышенного места (черт. 9) башня видна под углом $DCA = 25°$; этот угол разделяется горизонтальной прямой на части в 19° и 6°. Расстояние от точки C до башни равно 40 *м*. Найти высоту башни. $BD = BC \operatorname{tg} \alpha$; $BA = BC \operatorname{tg} \beta$; $AD = BC (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = 40 \cdot (\operatorname{tg} 19° + \operatorname{tg} 6°) = 40 \cdot (0{,}34 + 0{,}11) = 40 \cdot 0{,}45 = 18$ *м*.

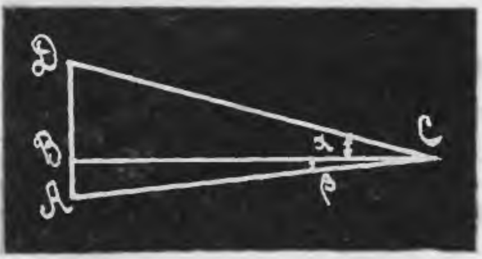
Под каким углом к горизонту видна гора, высота которой 3 *км*, из точки, удаленной от нее на 30 *км* (черт. 5).

$$\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A; \quad \frac{3}{30} = 0{,}1 = \operatorname{tg} A.$$

По таблице видно, что угол A заключается между 5° и 6°; его можно принять равным 5,5°.

Черт. 8.

Отношение ($b:c$) *прилежащего* (к углу A) *катета к гипотенузе называется косинусом угла* (A), что записывается так:



Черт. 9.

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\left(\text{или } \operatorname{cs} A = \frac{b}{c}\right).$$

Чтобы получить приближенные значения косинуса, следует сделать то же построение, как и для синуса (см. черт. 4), и отмерять отрезки AC: $AC_1 = 87$ *мм*; $AC_2 = 64$ *мм*; $AC_3 = 17$ *мм*; значит, $\cos 30° = 0{,}87$; $\cos 50° = 0{,}64$; $\cos 80° = 0{,}17$.

Таблица значений косинуса дает возможность просто решить некоторые задачи.

Известно, что по склону горы на определенной площади нельзя посадить столько деревьев, сколько их можно посадить на горизонтальной площади. Так как они не должны затемнять друг друга, то их можно посадить столько, сколько можно посадить на горизонтальной площади, находящейся под данной площадью (проекции данной площади).

Если угол наклона горы 30°, а ширина поля по склону (по линии наибольшего ската) 120 метров, то какова должна быть ширина горизонтального поля, на котором умещается столько же культурных растений, сколько на данном? (См. черт. 7.)

$\frac{AC}{AB} = \cos A$; $AC = AB \cos A$; $AC = 120 \cos 30° = 120 \cdot 0{,}866 = 103{,}92 \cong 104$ *м*.

Найти радиус пятидесятой земной параллели, принимая радиус земли равным 6360 *км* (черт. 10).

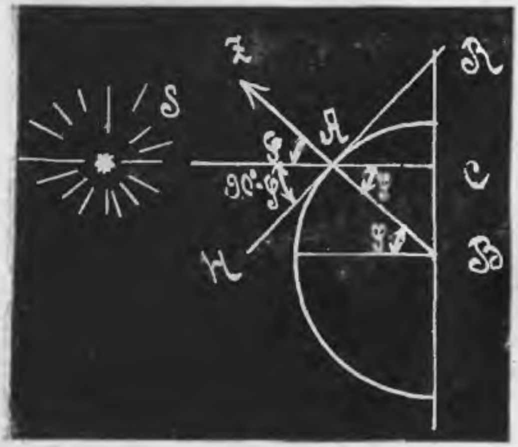
$AC = AB \cos \varphi$. $AC = 6360 \cos 50° = 6360 \cdot 0{,}643 = 4089{,}48 \cong 4090$ *км*.

Отношение ($b:a$) *прилежащего* (к углу A) *катета к противолежащему* (углу A) *катету называется котангенсом угла* (A), что записывается так:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$$

$$\left(\text{или } \operatorname{cotg} B = \frac{b}{a},\right.$$

$$\left.\text{или } \cot A = \frac{b}{a}\right).$$



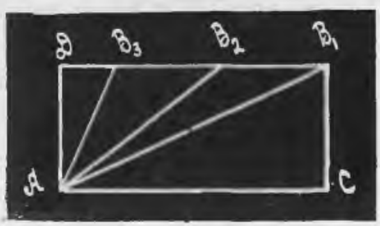
Черт. 10.

Чтобы получить приближенные значения котангенса, можно поступать таким образом. Отложить по вертикальному направлению (черт. 11) $AD = 100$ *мм*; через точку D провести $DB \perp AD$ и построить заданные углы в 25°, 40°, 70°. Остается измерить DB в миллиметрах, $DB_1 = 214$; $DB_2 = 119$; $DB_3 = 36$. Согласно определению,

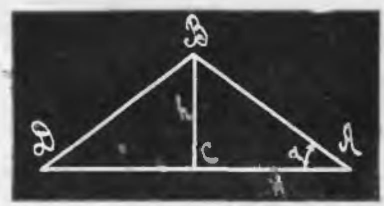
$$\operatorname{ctg} 25^\circ = \frac{AC}{B_1C} = \frac{DB_1}{AD} = 2{,}14; \quad \operatorname{ctg} 40^\circ = \frac{DB_2}{AD} = 1{,}19;$$

$$\operatorname{ctg} 70^\circ = \frac{DB_3}{AD} = 0{,}36.$$

При насыпании гравия в кучу он образует конус (черт. 12), угол наклона



Черт. 11.



Черт. 12.

которого равен $\alpha = 33^\circ$. Найти ширину кучи, высота которой $h = 28$ вершк. (Объем такой кучи равен 1/2 куб. сажени.)

$$\frac{AC}{h} = \operatorname{ctg}\alpha; \quad AC = h \operatorname{ctg}\alpha; \quad AD = 2h \operatorname{ctg}\alpha; \quad AD = 28 \cdot 2 \cdot 1{,}54 = 86{,}2 \text{ вершка.}$$

Отношение ($c:b$) *гипотенузы к прилежащему* (к углу A) *катету называется секансом угла* (A), что записывается так:

$$\sec A = \frac{c}{b}$$

$$\left(\text{или } \operatorname{sc} A = \frac{c}{b}\right).$$

Значения секанса можно получить как числа, обратные значениям косинуса:

$$\sec A = \frac{c}{b} = 1 : \frac{b}{c} = 1 : \cos A;$$

например,

$$\sec 28^\circ = \frac{1}{\cos 28^\circ} = \frac{1}{0{,}883} = 1{,}133.$$

Расстояние между двумя пунктами A и B по плану [1]) равно 120 *м*; каково расстояние между ними по дороге, средний наклон которой к горизонту равен 32°? (Черт. 5.)

$$\frac{AB}{AC} = \sec A; \quad AB = AC \sec A; \quad AB = 120 \cdot 141{,}38 \simeq 141 \text{ м}.$$

Отношение ($c : a$) *гипотенузы к противолежащему углу* (A) *катету называется косекансом угла* (A), что записывается так:

$$\csc A = \frac{c}{a}$$

$$\left(\text{или } \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}, \text{ или } \operatorname{cosc} A = \frac{c}{a}\right).$$

Значения косеканса можно получить как числа, обратные значениям синуса; действительно,

$$\csc A = \frac{c}{a} = 1 : \frac{a}{c} = \frac{1}{\sin A};$$

например,

$$\csc 40^\circ = \frac{1}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{0{,}643} = 1{,}555.$$

Какое расстояние надо пройти по дороге, наклонной к горизонту на 25°, чтобы подняться на 10 метров? (Черт. 5.)

$$\frac{AB}{BC} = \csc A; \; AB = BC \csc A; \; AB = 10 \csc 25^\circ = 10 \cdot 2{,}37 = 23{,}7 \text{ м}.$$

§ 10. Применяя эти определения к углу B (черт 7), можно написать:

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

(отношение противолежащего катета к гипотенузе);

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

---

[1]) На планах и картах наносятся расстояния, отнесенные к горизонтальной плоскости. В противном случае, холмистую местность нельзя было бы уместить.

(отношение прилежащего катета к гипотенузе);

$$\operatorname{tang} B = \frac{b}{a}$$

(отношение противолежащего катета к прилежащему);

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}$$

(отношение прилежащего катета к противолежащему);

$$\sec B = \frac{c}{a}$$

(отношение гипотенузы к прилежащему катету);

$$\csc B = \frac{c}{b}$$

(отношение гипотенузы к противолежащему катету).

Сравнивая эти выражения функций угла B с функциями угла A (см. предыдущий параграф), заключаем, что

$$\sin B = \cos A = \frac{b}{c}; \quad \cos B = \sin A = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \quad \sec B = \csc A = \frac{c}{a}; \quad \csc B = \sec A = \frac{c}{b} \ldots (1)$$

Эти формулы показывают, что тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника просто выражаются через тригонометрические функции другого его острого угла. Но острые углы A и B прямоугольного треугольника связаны между собою зависимостью

$$A + B = 90°.$$

Вообще *углы, сумма которых равна 90°, называются взаимно-дополнительными*; таковы, например, углы в 67° и 23°, в 38°42′51″ и 51°17′9″

Острые углы прямоугольного треугольника — углы взаимно-дополнительные, так как

$$A + B = 90°.$$

Отсюда

$$A = 90° - B, \text{ или } B = 90° - A.$$

Если в вышеприведенных соотношениях (1) заменить угол B равной ему разностью $90° - A$, то они перепишутся следующим образом:

$$\sin (90° - A) = \cos A; \quad \cos (90° - A) = \sin A; \quad \operatorname{tg} (90° - A) = \operatorname{ctg} A.$$
$$\operatorname{ctg} (90° - A) = \operatorname{tg} A; \quad \sec (90° - A) = \csc A; \quad \csc (90° - A) = \sec A \ldots (2)$$

Функцию, название которой отличается от названия данной прибавлением или отниманием частицы «ко», будем называть *кофункцией*; например, котангенс есть кофункция тангенса. Этот термин позволяет все соотношения (2) выразить такой простой фразой:

функция данного угла равна кофункции дополнительного угла. Например, $\mathrm{ctg}\ 67° = \mathrm{tg}\ 23°$, $\sin 38°42'51'' = \cos 51°17'9''$.

Этой зависимостью пользуются в таблицах, помещая слева и справа числа градусов, дополняющие друг друга до 90°, а сверху и снизу названия функции и кофункции.

Для решения прямоугольных треугольников при помощи этих шести функций необходимо иметь в своем распоряжении таблицу значений их для всевозможных острых углов. Если ограничиться только углами, выраженными целым числом градусов, то достаточно знать элементы 89-ти прямоугольных треугольников с острыми углами, начиная с 1° до 89°. Но, принимая во внимание соотношения (1) или (2) и замечая, что один из углов A или B, наверное, не превосходит 45° (так как их сумма равна 90°), заключаем, что достаточно составить таблицу значений тригонометрических функций от 1° до 45° включительно.

Обращаясь, например, к прямоугольному треугольнику с острым углом в 37° и гипотенузой в 100 *мм*, находим измерением, что катеты равны 60 и 80 *мм*, откуда получаем:

$$\sin 37° = \cos 53° = 0{,}60; \quad \cos 37° = \sin 53° = 0{,}80;$$
$$\mathrm{tg}\ 37° = \mathrm{ctg}\ 53° = 0{,}75; \quad \mathrm{ctg}\ 37° = \mathrm{tg}\ 53° = 1{,}33;$$
$$\sec 37° = \csc 53° = 1{,}25; \quad \csc 37° = \sec 53° = 1{,}67.$$

В прямоугольном треугольнике с гипотенузой, равной 100 *мм*, и острым углом в 27° посредством измерения находим, что катеты равны 45 и 89 *мм*, откуда получаем:

$$\sin 27° = \cos 63° = 0{,}54; \quad \cos 27° = \sin 63° = 0{,}89;$$
$$\mathrm{tg}\ 27° = \mathrm{ctg}\ 63° = 0{,}51: \quad \mathrm{ctg}\ 27° = \mathrm{tg}\ 63° = 1{,}97;$$
$$\sec 27° = \csc 63° = 1{,}12; \quad \csc 27° = \sec 63° = 2{,}22.$$

Если задан угол, то можно построить треугольник и, смерив его стороны, найти приближенные значения тригонометрических функций даннаго угла, вычислив отношения соответствующих сторон. Напротив того, по данному значению одной из функций легко построить угол.

Например, задано

$$\sin x = \frac{3}{5}.$$

Построим треугольник с катетом равным 3 единицам длины и гипотенузой,— 5 единицам длины. Тогда угол, лежащий против катета, равного 3 единицам длины, и есть искомый; остается измерить его с помощью транспортира.

Если $\mathrm{tg}\ x = 0{,}85$, то построим треугольник с катетами 85 *мм* и 100 *мм*, или 1,7 *см* и 2,0 *см*. Угол, лежащий против меньшего катета, и есть искомый. Заметим, что построение угла по данному тангенсу точнее, чем по транспортиру.

Аналогично этим примерам не представит затруднения найти

Таблица значений тригонометрических функций

°	sin	cos	tg	ctg	sec	csc	—
1	0,017	1,000	0.017	57,290	1,000	57,229	89
2	0,035	0,999	0,035	28.636	1,001	28,654	88
3	0,052	0,999	0,052	19,081	1,001	19,107	87
4	0,070	0,998	0,070	14,301	1.002	14,336	86
5	0,087	0,996	0,087	11,430	1,004	11,474	85
6	0,105	0,995	0,105	9,514	1,006	9,567	84
7	0,122	0,993	0,123	8,144	1,008	8,206	83
8	0,139	0,990	0,141	7,115	1,010	7,185	82
9	0,156	0,988	0,158	6,314	1.012	6,392	81
10	0,174	0,985	0,176	5,671	1,015	5,759	80
11	0,191	0,982	0,194	5,145	1,019	5,241	79
12	0,208	0.978	0.213	4,705	1,022	4.810	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	1,026	4.445	77
14	0 242	0,970	0,249	4,011	1,031	4,134	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	1,035	3,864	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	1,040	3,628	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	1,046	3,420	73
18	0.309	0.951	0,325	3.078	1,051	3,236	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	1,058	3,072	71
20	0,342	0,940	0,364	2.747	1,064	2,924	70
21	0,358	0.934	0.384	2,605	1,071	2,790	69
22	0,375	0,927	0,404	2,475	1,079	2.669	68
23	0,391	0,921	0,424	2,356	1.086	2,559	67
24	0,407	0,914	0,445	2,246	1,095	2,459	66
25	0,423	0,906	0,466	2,145	1,103	2,366	65
26	0,438	0,899	0,488	2,050	1,113	2,281	64
27	0,454	0,891	0,510	1,963	1,122	2,203	63
28	0,469	0,883	0,532	1,881	1,133	2,130	62
29	0,485	0,875	0,554	1,804	1,143	2.063	61
30	0,500	0,866	0,577	1,732	1,155	2,000	60
31	0,515	0,857	0,601	1,664	1,167	1,942	59
32	0,530	0.848	0,625	1,600	1,179	1,887	58
33	0,545	0,839	0.649	1,540	1,192	1,836	57
34	0,559	0,829	0,675	1,483	1,206	1,788	56
35	0,574	0,819	0,700	1,428	1,221	1,743	55
36	0,588	0,809	0.727	1,376	1,236	1,701	54
37	0,602	0,799	0,754	1,327	1,252	1.662	53
38	0,616	0,788	0,781	1,280	1,269	1.624	52
39	0,629	0,777	0,810	1,235	1,287	1,589	51
40	0,643	0,766	0,839	1,192	1,305	1,556	50
41	0,656	0,755	0,869	1,150	1,325	1,524	49
42	0,669	0.743	0,900	1,111	1,346	1,494	48
43	0,682	0,731	0,933	1,072	1,367	1,466	47
44	0,695	0,719	0,966	1,036	1,390	1,440	46
45	0,707	0,707	1,000	1,000	1,414	1,414	45
—	cos	sin	ctg	tg	csc	sec	°

построением угол по каждой из тригонометрических функций, строя треугольник по двум заданным катетам или по гипотенузе и катету.

Если по приведенной таблице надо найти значение тригонометрической функции угла, не превосходящего 45°, то следует прочесть заглавие столбца сверху, а число градусов слева; если же угол превосходит 45°, то заглавие столбца надо читать снизу, а число градусов справа, например,

$$\operatorname{tg} 62° = 1{,}88.$$

Это число 1,88 помещено на пересечении столбца, озаглавленного сверху «ctg» и строки, в которой слева написано 28°, значит

$$\operatorname{ctg} 28° = 1{,}88,$$

$$\operatorname{tg} 62° = \operatorname{ctg} 28°,$$

как и должно быть, так как $62° + 28° = 90$.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

§ 11. Раньше чем решать прямоугольные треугольники при помощи этой таблицы, заметим некоторые зависимости между элементами прямоугольного треугольника.

По определению синуса имеем:

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ и } \sin B = \frac{b}{c},$$

что можно представить в таком виде:

$$a = c \sin A \text{ и } b = c \sin B.$$

Оба эти равенства можно формулировать так: *катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего катету угла.*

Таким же образом по определению косинуса:

$$\cos A = \frac{b}{c} \text{ и } \cos B = \frac{a}{c},$$

следовательно,

$$b = c \cos A \text{ и } a = c \cos B,$$

что формулируется так: *катет равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего* (к катету) *угла.*

По определению тангенса:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b},\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{a},$$

следовательно,

$$a = b \operatorname{tg} A \text{ и } b = a \operatorname{tg} B,$$

т. е. *катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего* (к первому катету) *угла.*

По определению котангенса:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b},$$

значит,

$$b = a \operatorname{ctg} A, \quad a = b \operatorname{ctg} B,$$

т. е. *катет равен другому катету, умноженному на котангенс прилежащего* (к первому катету) *угла.*

Подобные же соотношения легко получить при помощи определений секанса и косеканса, а именно:

$$c = b \sec A \text{ и } c = a \sec B$$

$$c = a \csc A \text{ и } c = b \csc B,$$

т. е. гипотенуза равна катету, умноженному на секанс прилежащего к нему угла, или гипотенуза равна катету, умноженному на косеканс противолежащего ему угла.

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

§ 12. Прямоугольный треугольник вполне определен, если заданы два его элемента (из которых, по крайней мере, один не должен быть углом). Заданными элементами могут быть: 1) гипотенуза и острый угол, 2) катет и острый угол, 3) катет и гипотенуза и 4) оба катета. Соответственно этому различают четыре основных случая решения прямоугольного треугольника. Они называются *основными* в отличие от особенных, когда задаются какие-нибудь другие элементы,

I. Заданы гипотенуза и острый угол.

$$A = 35°, \quad c = 47 \text{ см.}$$

Имеем

$$a = c \sin A = 47 \cdot 0{,}57 = 27 \text{ см}, \; b = c \cos A = 47 \cdot 0{,}82 = 38{,}5 \text{ см.} ^{1})$$

$$B = 90° - A = 55°.$$

II. Заданы катет и острый угол.

$$a = 8{,}1 \text{ см}, \; A = 58°.$$

Имеем

$$b = a \operatorname{ctg} A = 8{,}1 \cdot 0{,}625 = 5{,}0625 \cong 5{,}1 \text{ см}; \quad c = a \csc A = 8{,}1 \cdot 1{,}179 =$$
$$= 9{,}5499 \cong 9{,}5 \text{ см.}$$

III. Заданы гипотенуза и один из катетов.

$$a = 3{,}7 \text{ см}, \quad c = 6{,}2 \text{ см.}$$

---

[1]) Значения 0,57 и 0,82 взяты из таблицы.

Из соотношения

$$a = c \sin A$$

имеем

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{3,7}{6,2} = 0,60,$$

отсюда по таблице находим

$$A = 37^\circ,$$

и далее:

$$b = c \cos A = 6,2 \cdot 0,80 = 5,0 \textit{ см.}$$

IV. Заданы оба катета.

$$a = 5,7 \textit{ см}, \quad b = 12,2 \textit{ см.}$$

Имеем

$$a = b \operatorname{tg} A; \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{5,7}{12,2} = 0,47,$$

отсюда

$$A = 25^\circ \quad \text{и} \quad c = a \csc A = 5,7 \cdot 2,37 = 13,5 \textit{ см.}$$

§ 13. В этих задачах данные были приведены с небольшой точностью, и ответы получены с незначительной точностью. В тех случаях, когда требуется бóльшая точность, пришлось бы прибегнуть к более сложным вычислениям и воспользоваться более подробной таблицей значений тригонометрических функций, чем приведенная выше. Для упрощения вычислений пользуются, как известно, логарифмами. Но пользоваться только обыкновенными логарифмами при вычислениях с тригонометрическими функциями не очень удобно, так как пришлось бы находить сначала по таблице тригонометрических функций значение функции и затем еще в логарифмических таблицах логарифм найденного в первой таблице числа. Обычно употребляются не такие таблицы, как приведенные на стр. 22 (таблицы так называемых «натуральных» тригонометрических функций), а таблицы логарифмов тригонометрических функций. В этих таблицах против каждого угла записан логарифм того значения, которое функция имеет для данного угла.

В четырехзначных таблицах находим, например,

$$\log \sin 35^\circ 46' = 9,7668, \quad \log \operatorname{ctg} 35^\circ 46' = 0,1425.$$

Пятизначные таблицы дают

$$\log \sin 30^\circ 52' 43'' = 9,71030; \quad \log \operatorname{ctg} 30^\circ 52' 43'' = 0,22331.$$

По заданному логарифму функции находим угол, например (по четырехзначным таблицам),

$$\log \operatorname{tg} x = 9,4563; \quad x = 15^\circ 57';$$

по пятизначным таблицам

$$\log \cos y = 9,65437; \quad y = 63^\circ 10' 46''.$$

Приведем два примера логарифмических вычислений для решения прямоугольного треугольника. В первом примере вычисления сделаны по четырехзначным, а во втором по пятизначным таблицам.

Первый пример. Положим, заданы угол A и гипотенуза c. Пусть

$$A = 35°, \ c = 47 \text{ см.}$$

Вычисляем по формулам

$$a = c \sin A; \quad b = c \cos A.$$

$$\begin{array}{rl} \log c = 1,6721 \\ \log \sin A = 9,7588 \\ \hline \log a = 1,4307 \\ a = 26,96 \text{ см.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log c = 1,6721 \\ \log \cos A = 9,9131 \\ \hline \log b = 1,5855 \\ b = 38,50 \text{ см.} \end{array}$$

Второй пример. Положим, заданы катет a и гипотенуза c. Пусть

$$a = 3,7 \text{ см}; \quad c = 6,2 \text{ см.}$$

Вычисления произведем по формулам

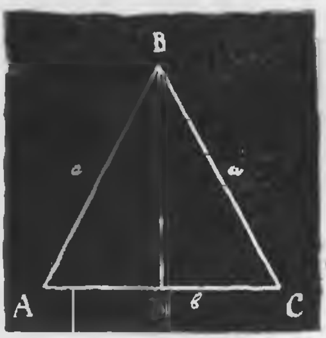
$$\sin A = \frac{a}{c}; \ b = c \cos A.$$

$$\begin{array}{rl} \log a = 0,56820 \\ \log c = 0,79239 \\ \hline \log \sin A = 9,77581 \\ A = 36°38'21'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log c = 0,79239 \\ \log \cos A = 9,90440 \\ \hline \log b = 0,69679 \\ b = 4,9750 \text{ см.} \end{array}$$

В этих двух примерах данные те же, как и в первом и третьем примерах предыдущего параграфа.[1])

§ 14. При помощи формул, относящихся к прямоугольному треугольнику, в очень многих случаях могут быть решаемы равнобедренные и правильные многоугольники.

Положим, в равнобедренном треугольнике ABC (черт. 13) заданы стороны $a = c$ и сторона b. Разбивая треугольник на два прямоугольных треугольника, имеем из прямоугольного треугольника ABD:



Черт. 13.

$$\frac{b}{2} = c \cos A,$$

отсюда

$$\cos A = \frac{b}{2c}; C = A; \quad B = 180° - 2A.$$

---

1) Конечно, следовало бы обращаться к четырехзначным или пятизначным логарифмическим таблицам только в том случае, если данные приведены с большей точностью, а не с двумя цифрами, как здесь. Но здесь данные взяты те же самые для того, чтобы, сравнивая результаты, можно было судить о погрешности, происходящей от приближенного вычисления по натуральным таблицам.

Численный пример. Дано

$$a = c = 15{,}26; \quad b = 10{,}72.$$

Четырехзначные таблицы дают

$$A = C = 69°26'; \quad B = 41°8'.$$

Пятизначные таблицы дают

$$A = C = 69°26'11''; \; B = 41°7'38''.$$

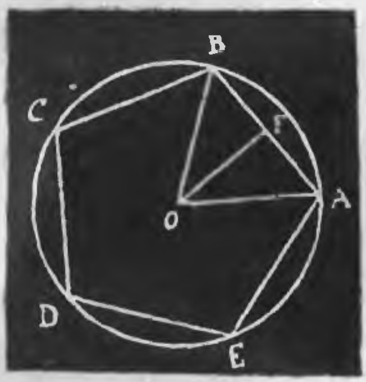
Положим, в правильном пятиугольнике $ABCDE$ (черт. 14) задан радиус описанного круга $OA = R$. Требуется найти периметр. Из треугольника AOF имеем:

$$AF = R \sin AOF, \text{ но } \angle AOF = \frac{360°}{10} = 36°;$$

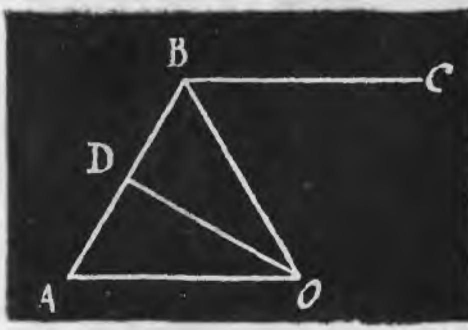
значит

$$AF = R \sin 36°; \; AB = 2AF;$$

$$AB + BC + \ldots + EA = 10AF = 10R \sin 36°.$$



Черт. 14.



Черт. 15.

Если $R = 4{,}235$ *см*, то периметр равен 24,89 *см*. (Пятизначные таблицы дают 24,893 *см*.)

Положим, задано число сторон правильного многоугольника n и сторона его a (черт. 15).

Найти площадь (AB и BC две последовательные стороны этого многоугольника). Пусть O центр описанного круга.

$$\angle AOD = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}; \; AD = \frac{a}{2}.$$

Из треугольника AOD имеем:

$$OD = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180°}{n}. \text{ Пл. } AOB = AD \cdot OD = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180°}{n}.$$

Так как весь многоугольник разбивается на n треугольников, равных AOB, то площадь многоугольника равна

$$\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Если $a = 7{,}234$ *см*, $n = 7$, то площадь равна 190,1 *см*². (Пятизначные таблицы дают 190,17.)

ИЗМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОСТРОГО УГЛА.

§ 15. Замечательно, что тригонометрические функции острых углов, введенные как отношения сторон *прямоугольного* треугольника, дают возможность решать не только прямоугольные треугольники, но даже остроугольные и тупоугольные. Займемся поэтому изучением изменений и некоторых свойств этих функций.

Черт. 16.

Определения, приведенные на стр. 16 и 17, годятся для всякого острого угла, но сами по себе неприменимы для прямого угла и угла в нуль градусов, так как в прямоугольном треугольнике острый угол может быть как угодно близким к прямому углу или к углу в нуль градусов, но не может сделаться равным 0° или 90°.

Введем понятие о тригонометрических функциях прямого угла при помощи следующего определения. Значениями функций угла в 90° назовем пределы значения их для острого угла при неограниченном приближении его к 90°; если же такого предела не существует, то будем говорить, что соответствующая тригонометрическая функция не имеет никакого определенного значения для угла в 90°. Будем в треугольнике ABC (черт. 16) увеличивать угол A, оставляя гипотенузу без изменения. Ясно, что при этом катет b может быть сделан сколь угодно малым, т. е.

$$\text{пред. } (b) = 0.$$

Так как c остается без изменения и $a^2 = c^2 - b^2$, то

$$\text{пред. } a^2 = c^2 - \text{пред. } b^2 = c^2, \text{ т. е. пред. } (a) = c.$$

Поэтому

$$\sin 90^\circ = \text{пред. } (\sin A)_{A=90^\circ} = \text{пред. } \frac{a}{c} = \frac{\text{пр. } a}{c} = \frac{c}{c} = 1.$$

$$\cos 90^\circ = \text{пред. } (\cos A)_{A=90^\circ} = \text{пред. } \frac{b}{c} = \frac{\text{пр. } b}{c} = \frac{0}{c} = 0;$$

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = \text{пред. } (\operatorname{ctg} A)_{A=90^\circ} = \text{пред. } \frac{b}{a} = \frac{\text{пр. } b}{\text{пр. } a} = \frac{0}{c} = 0.$$

$$\csc 90^\circ = \text{пред. } (\csc A)_{A=90^\circ} = \text{пред. } \frac{a}{c} = \frac{c}{\text{пр. } a} = \frac{c}{c} = 1,$$

Отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ (как отношения конечных чисел к бесконечно-малым) по мере увеличения угла возрастают и делаются сколь угодно большими, поэтому они не имеют определенного предела. Согласно приведенному условию говорят, что тангенс и секанс $\left(\text{выражаемые отношениями } \frac{a}{b} \text{ и } \frac{c}{b}\right)$ не имеют для прямого угла никакого определенного значения, а желая выразить, что их численные значения по мере приближения угла к прямому неограниченно возрастают, пишут такие условные равенства:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty; \quad \sec 90^\circ = \infty$$ [1])

и говорят, что тангенс и секанс прямого угла равны бесконечности.

Подобным же образом значениями тригонометрических функций угла в 0° называют пределы значений их при неограниченном уменьшении угла; если же такого предела не существует, то функция не имеет определенного значения для угла в нуль градусов. Уменьшая в треугольнике ABC неограниченно угол A и оставляя гипотенузу без изменения, легко убедиться в том, что

$$\text{пред. } a = 0; \quad \text{пред. } b = c.$$

Поэтому

$$\sin 0^\circ = \text{пред. } (\sin A)_{A=0^\circ} = \text{пред } \frac{a}{c} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \text{пред. } (\cos A)_{A=0^\circ} = \text{пред. } \frac{b}{c} = 1.$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \text{пред. } (\operatorname{tg} A)_{A=0^\circ} = \text{пред. } \frac{a}{b} = 0$$

$$\sec 0^\circ = \text{пред. } (\sec A)_{A=0^\circ} = \text{пред. } \frac{c}{b} = 1.$$

Котангенс и косеканс, как отношения $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$, неограниченно возрастают по мере уменьшения угла A и для 0° не имеют никакого значения, что записывают условно в таком виде:

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \infty; \quad \csc 0^\circ = \infty.$$

Сравнивая значения функций 0° с значениями функций угла в 90°, замечаем, что для этих углов, так же как и для всяких двух дополнительных углов, справедливо положение: каждая функция данного угла равна кофункции дополнительного угла [2]), например:

$$\sin 0^\circ = \cos 90^\circ; \quad \operatorname{ctg} 90^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ.$$

§ 16. Рассмотрим, как изменяются тригонометрические функции при возрастании угла от 0° до 90°. Вообразим себе треугольник, острый угол которого растет, а гипотенуза остается без изменения;

---

[1]) ∞ знак бесконечности.

[2]) Отдельная проверка этого соотношения для углов 0° и 90° необходима, так как тригонометрические функции этих углов введены при помощи особого определения.

тогда катет a также возрастает, а катет b убывает. Поэтому отношения

$$\frac{a}{c}, \frac{a}{b}, \frac{c}{b}$$

(в первой дроби возрастает числитель при постоянном знаменателе; во второй дроби числитель возрастает, а знаменатель убывает; в третьей дроби знаменатель убывает при постоянном числителе) возрастают, т. е. *синус, тангенс* и *секанс* (функции, названия которых не имеют частицы «ко») *возрастают* при возрастании угла. При этом, как легко видеть, всегда

$$\frac{a}{c} < \frac{a}{b} < \frac{c}{b}, \text{ т. е. } \sin A < \operatorname{tg} A < \sec A.$$

Напротив того, отношения

$$\frac{b}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a},$$

т. е. косинус, котангенс, косеканск убывают при возрастании угла от 0° до 90°, при чем

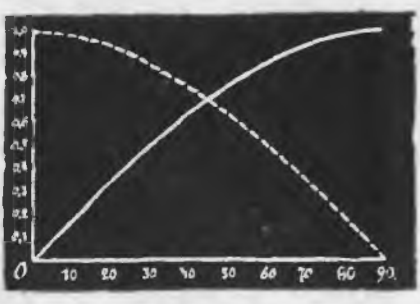
$$\frac{b}{c} < \frac{b}{a} < \frac{c}{a}, \text{ т. е. } \cos A < \operatorname{ctg} A < \csc A.$$

Все эти заключения легко подтвердить значениями, взятыми из таблицы. Заметим, что синус и косинус острого угла, как отношения катета к гипотенузе, всегда меньше единицы; напротив того, секанс и косеканс острого угла, как отношения гипотенузы к катету, всегда больше единицы. Легко заметить, что для угла в 45° тангенс и котангенс равны единице. Действительно, если угол $A = 45°$, то и $B = 45°$, прямоугольный треугольник равнобедренный, $a = b$, и поэтому

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg} A_{A=45°} = \frac{a}{b} = 1; \ \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

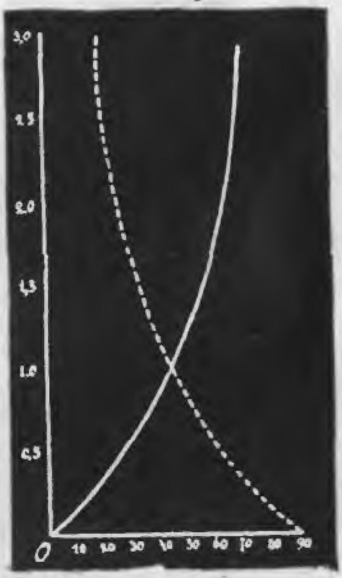
А так как тангенс возрастает, то тангенсы острых углов, меньших 45°, всегда меньше единицы, а тангенсы углов, превосходящих 45°, — больше единицы. Обратное имеет место для котангенса.

§ 17. Чтобы получить представление о том, как именно изменяются тригонометрические функции, воспользуемся графическим изображением их. На миллиметровой (или другой) клетчатой бумаге (черт. 17, 18, 19) проведем координатные оси, т. е. две взаимно-перпендикулярные прямые: горизонтальную OX и вертикальную OY. Отложим на оси OX в каком-нибудь масштабе отрезки, соответ-

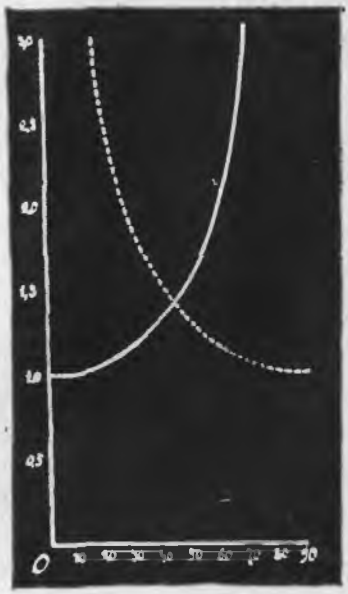


Черт. 17.

ствующие углам от 0° до 90°. В точках делений отложим по вертикальному направлению отрезки, дающие значения функций в какомнибудь масштабе. Если отрезки расположить достаточно часто, то получается почти плавная линия. Эта линия и есть график рассматриваемой функции. На чертежах 17, 18, 19 изображены графики тригонометрических функций. На чертеже 17 даны графики синуса (сплошной линией) и косинуса (пунктирной линией); на чертеже 18 графики тангенса (сплошной) и котангенса (пунктирной линией) и на чертеже 19 графики секанса (сплошной) и косеканса (пунктирной



Черт 18.



Черт. 19.

линией). Графики тангенса, котангенса, секанса и косеканса не умещаются целиком на чертеже (да и не могут уместиться), так как значения этих функций для углов, близких к 0° или к 90°, становятся больше всякого наперед заданного числа.

График синуса не только показывает, что синус все время возрастает по мере увеличения угла, но что возрастание это все время замедляется и для углов, превосходящих 80°, становится очень медленным. Убывание косинуса, напротив того, все ускоряется и делается наиболее быстрым для углов, близких к 90°. Тангенс возрастает сначала почти так же, как и синус, но потом возрастание его делается все более и более быстрым и для углов, больших 60°, становится чрезвычайно быстрым (по сравнению с первоначальным). Нетрудно на графике проследить возрастание или убывание других функций.

Графики тригонометрических функций позволяют не только найти значение тригонометрической функции для каждого угла, но и обратно — по значению тригонометрической функции найти значение угла. Положим, что требуется найти tg 55°; отмеряя на чертеже 18 против деления, соответствующего 55°, вертикальный отрезок вверх до графика тангенса, находим tg 55° = 1,43, а в трехзначных натуральных таблицах находим 1,428.

Найдем еще угол, косинус которого равен 0,9. Отложив на чертеже 17 по оси *ОУ* отрезок 0,9, проведем через конец этого отрезка прямую, параллельную *ОХ*, до пересечения с графиком косинуса и найдем на оси *ОХ* число градусов, соответствующее данному косинусу, а именно 25°; таблицы дают также 25°. Легко видеть, что таблица дает все то, что дает график, и обратно — все, что дает график, можно получить и из таблицы. Но преимущество графика в том, что на нем изменения функции более наглядны — они прямо усматриваются из рассмотрения графика; зато таблицы дают большую точность. Поэтому общие свойства функции легче видеть на графиках, но численные значения лучше брать из таблиц.

Например, из чертежа 17 легко заключить, что значение синуса делается равным значению косинуса для угла в 45° и равно приблизительно 0,7. (Таблицы дают 0,707.)

При помощи чертежа 18 нетрудно решить, например, такой вопрос: найти угол, для которого значение тангенса вдвое более значения котангенса. Из чертежа легко усмотреть, что это может иметь место только для угла, большего 45°. Измерив значения тангенса и котангенса для угла в 60°, замечаем, что тангенс приблизительно в три раза больше котангенса; очевидно, что искомый угол лежит между 45° и 60°. Дальнейшие пробы суживают границы искомого угла и показывают, что искомый угол равен приблизительно 53°. По таблицам заключаем, что искомый угол лежит между 54° и 55° и притом ближе к 55°. (Можно было бы с самого начала определить искомый угол по графику на-глаз и затем уже по таблицам найти границы.)

Все подобного рода вопросы легко решаются с помощью графиков. Для решения вопросов, связанных с сравнением значений синуса (и косинуса) со значениями тангенса (и котангенса) или секанса (и косеканса), следует графики их поместить на одном чертеже.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ОСТРОГО УГЛА.

§ 18. По данному значению функции можно, пользуясь таблицами (или графиками), найти соответствующее значение острого угла, а по найденному углу можно уже определить значения других тригонометрических функций. Таким образом значение одной из тригонометрических функций определяет значения всех остальных. Покажем, что по данному значению одной из функций можно найти значения остальных непосредственно вычислением, не находя даже угла, функция которого задана. Для этого выведем некоторые зависимости между значениями тригонометрических функций одного угла.

По определениям тригонометрических функций имеем:

$$\frac{a}{c}=\sin A,\quad \frac{b}{c}=\cos A,\quad \frac{a}{b}=\operatorname{tg} A,\quad \frac{b}{a}=\operatorname{ctg} A,\quad \frac{c}{b}=\sec A,\quad \frac{c}{a}=\csc A.$$

Теорема Пифагора дает: $a^2+b^2=c$. Разделяя обе части этого равенства последовательно на c^2, на b^2 и на a^2, получаем:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{I});\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2+1=\left(\frac{c}{b}\right)^2\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{II})$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2+1=\left(\frac{c}{a}\right)^2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{III})$$

Кроме того, напишем очевидные тождества:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}=1\ .\ .\ (\mathrm{IV});\qquad \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}=1\ .\ .\ (\mathrm{V});\qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1\ .\ .\ .\ (\mathrm{VI})$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{VII});\qquad \frac{b}{a}=\frac{b}{c}:\frac{a}{c}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{VIII}).$$

Эти восемь равенств переписываются при помощи записанных выше определений таким образом:

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1\ ^{1)}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

$$\operatorname{tg}^2 A+1=\sec^2 A\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

$$\operatorname{ctg}^2 A+1=\csc^2 A\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

$$\sin A\cdot\csc A=1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

$$\cos A\cdot\sec A=1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

$$\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{ctg} A=1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{\cos A}{\sin A}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

Таким образом мы получили восемь соотношений, связывающих шесть тригонометрических функций и справедливых для какого-угодно острого угла. Легко проверить, что они справедливы также для углов в 0° и 90°, для чего надо только подставить численные значения тригонометрических функций этих углов в приведенные восемь равенств.

§ 19. Нетрудно обнаружить, что из восьми приведенных равенств пять не зависят одно от другого, в то время как остальные три могут быть выведены из них. Действительно, возьмем пять равенств из приведенных восьми, например, равенства (1), (2), (3), (4), (5). Разделив обе части равенства (1) на $\cos^2 A$, получаем:

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+1=\frac{1}{\cos^2 A},$$

---

1) Вместо $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$, $(\operatorname{tg} A)^2$ и т. д. пишут: $\sin^2 A$, $\cos^2 A$, $\operatorname{tg}^2 A$ и т. д

но на основании равенства (5)

$$\frac{1}{\cos A} = \sec A,$$

поэтому

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + 1 = \sec^2 A.$$

Сравнивая это равенство с равенством (2), заключаем, что

$$\operatorname{tg}^2 A = \left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2, \text{ т. е. } \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},$$

(так как все тригонометрические функции положительны), а это и есть равенство (7). Таким же образом, разделяя (1) на $\sin^2 A$, получаем:

$$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} + 1 = \frac{1}{\sin^2 A},$$

что на основании равенства (5) дает

$$\left(\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2 + 1 = \csc^2 A;$$

сравнивая этот результат с равенством (3), получаем:

$$\operatorname{ctg}^2 A = \left(\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2, \text{ т. е. } \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A},$$

а это и есть равенство (8). Перемножив полученные уже равенства (7) и (8), получаем равенство (6).

Подобным же образом (но еще проще) можно было бы, например, из равенств (1), (4), (5), (6), (7) вывести остальные. Но нельзя, например, из равенств (4), (5), (6), (7), (8) получить остальные, так как равенство (6) есть следствие равенства (7) и (8). Необходимо взять, по крайней мере, одно из равенств (1), (2), (3), т. е. теорему Пифагора в скрытом виде.

Итак, независимых равенств не больше пяти.

Нетрудно показать, что среди приведенных восьми равенств не только не больше пяти независимых, но что число независимых равенств и не меньше пяти. Действительно, для определения пяти неизвестных необходимо иметь не менее пяти независимых уравнений. Поэтому стоит только показать, что из этих восьми уравнений могут быть определены пять неизвестных, как этим самым будет обнаружено, что число независимых уравнений не меньше пяти.

Положим, значение одной из функций, например, тангенса некоторого угла, задано. Выразим остальные функции через тангенс. Из (2) имеем

$$\sec A = \sqrt{\operatorname{tg}^2 A + 1}\ [1];$$

---

[1]) Перед знаком корня оставлен только знак $+$, так как тригонометрические функции положительны.

из (5)

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 A + 1}};$$

из (7)

$$\sin A = \cos A \cdot \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 A + 1}};$$

из (4)

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 A + 1}}{\operatorname{tg} A};$$

наконец, из (6)

$$\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}.$$

Этим показано, что из приведенных восьми соотношений можно выбрать пять независимых. С другой стороны, этим на частном примере решена задача, поставленная выше, а именно: по данному значению одной из функций (без помощи таблиц тригонометрических функций) найти значения остальных функций того же угла. Решим ту же задачу еще для одного примера: выразим все функции через синус. Из (1) получаем

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A};$$

из (7)

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}};$$

из (8)

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A};$$

из (4)

$$\csc A = \frac{1}{\sin A};$$

и, наконец, из (5)

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}};$$

Полученными выражениями мы сейчас воспользуемся для вычисления значений тригонометрических функций некоторых углов.

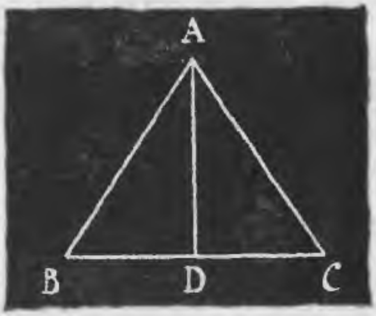
§ 20. Уже выше (см. стр. 28) было замечено, что $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$. Подставляя эти значения в (только-что выведенные) формулы, выражающие другие функции через тангенс, получаем:

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2}; \ \csc 45^\circ = \sqrt{2}; \ \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \ \cos A\, 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

Найдем еще значения тригонометрических функций 30°. Проведем для этого в равностороннем треугольнике ABC (черт. 20) высоту AD. ($AB = BC = CA = a$, $A = B = C = 60°$.) Тогда



Черт. 20.

$$BD = \frac{a}{2};\quad \angle BAD = \frac{A}{2} = 30°.$$

Из прямоугольного треугольника BAD (по определению синуса)

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}.$$

Отсюда по формулам (выведенным в предыдущем параграфе), выражающим остальные функции через синус, имеем:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

$$\sec 30° = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};\quad \csc 30° = 1 : \frac{1}{2} = 2.$$

Итак,

$$\sin 30° = \frac{1}{2};\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}.$$

Применяя формулы, связывающие функции дополнительных углов ($60° = 90° - 30°$), получаем:

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60° = \frac{1}{2};\ \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3};\ \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sec 60° = 2;\ \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

§ 21. Две точки A и B находятся (черт. 21) на одной горизонтальной прямой ABC с основанием башни, высота которой $h = 30$ *м*. Точки A и B видны из вершины башни под углами понижения[1]) $\alpha = 31°$ и $\beta = 52°$. Найти расстояние AB.

$$AC = h \operatorname{ctg} \alpha;\ BC = h \operatorname{ctg} \beta;\ AB = h(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta).$$

$$AB = 30 \cdot (1{,}664 - 0{,}781) = 26{,}49 \simeq 26{,}5 \text{ м}.$$

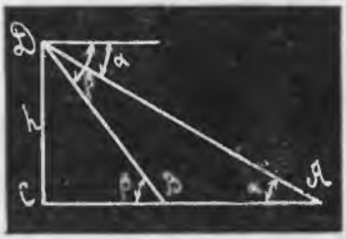
Эта задача может, например, служить для определения ширины реки.

---

[1]) Углом понижения называется угол, образованный горизонтальной прямой с лучом зрения, направленным наклонно вниз.

Если AB известно, а CD неизвестио, то легко найти CD, т. е. решить вопрос об определении высоты предмета, к основанию которого нельзя подойти. Пусть $AB = d$, тогда

$$CD = \frac{d}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}.$$



Черт 21.

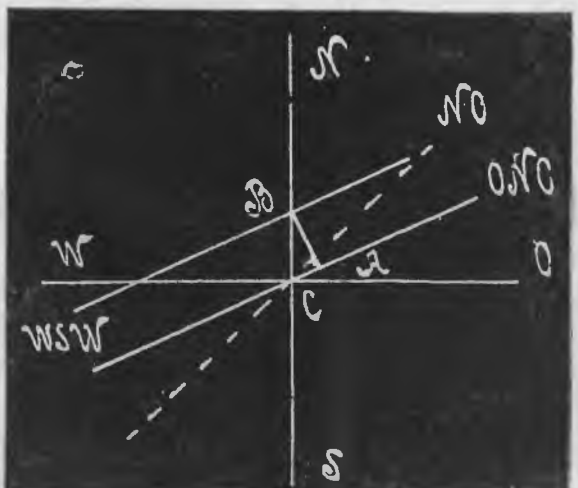
Черт. 22.

Найти широту места, для которого в полдень, в день весеннего равноденствия, тень гномона (вертикального шеста) высотою $h = 2$ *м* имеет длину $l = 2{,}5$ *м*.

В день весеннего равноденствия направление на солнце AS параллельно экваториальному радиусу (черт. 10, иа стр. 16) и составляет с вертикальной прямой AZ угол φ, а с горизонтом AH угол $(90^\circ - \varphi)$.

На основании условий задачи заключаем, что (черт. 22)

$$\frac{l}{h} = \operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi) = \operatorname{tg} \varphi \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25; \text{ отсюда } \varphi = 51^\circ 20'$$



Черт. 23.

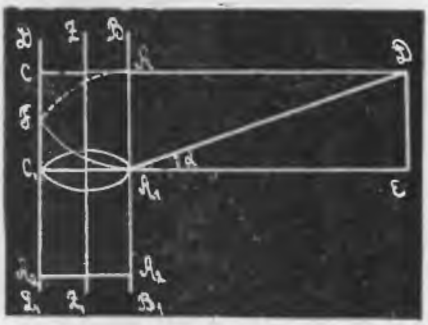
Найти высоту солнца, если стена высотою в $h = 4$ *м* отбрасывает тень шириною в $b = 6{,}7$ *м*. В момент наблюдения солнце находится как-раз на юге (черт. 23); стена имеет направление, делящее угол между направлениями на северо-восток и на восток пополам. На чертеже ширина тени $AB = b$.

*

В точке C стена отбрасывает тень BC. Направление стены составляет с направлением на восток (O) угол в $22{,}5°$; угол $ABC = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$; $AB = b = BC \sin 67°30'$. Но на основании предыдущей задачи легко видеть, что длина тени $BC = l = h \operatorname{ctg} \alpha$, где α — высота солнца над горизонтом. Подставляя это выражение в предыдущее равенство. получаем $b = h \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin 67°30'$; отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h \sin 67°30'}{b} =$$

$$= \frac{4 \cdot \sin 67°30'}{6{,}7}; \ \alpha = 28°53'.$$



Черт. 24.

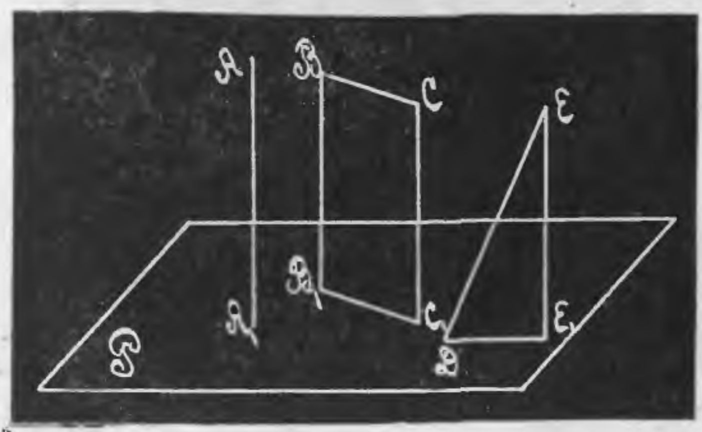
Свернем прямоугольник A_1ADE (черт. 24), диагональ которого A_1D_1, в круговой цилиндр A_1ACC_1; при этом диагональ прямоугольника расположится на поверхности цилиндра и займет положение A_1FA. Эта линия A_1FA неплоская (не лежит в одной плоскости); линия эта называется винтовой; если она получена от свертывания одного прямоугольника, то она один раз обвивается вокруг цилиндра: начало и конец ее расположены на одной образующей AA_1. Но если взять ряд таких прямоугольников, то винтовая линия будет несколько раз обвиваться вокруг цилиндра. Отрезок AA_1 называется «ходом» винта или «высотой шага»; угол α — угол подъема винта.

Пусть высота шага $h = 26$ *мм*, а диаметр сечения $d = 23$ *мм*. Найти угол подъема.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DE}{A_1E} = \frac{h}{\pi d}; \ \operatorname{tg} \alpha = \frac{26}{\pi \cdot 23}; \text{ отсюда } \alpha = 19°47'.$$

О ПРОЕКЦИЯХ НА ПЛОСКОСТЬ.

§ 22. Проекцией данной точки A (черт. 25) на плоскость P называют основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки A на

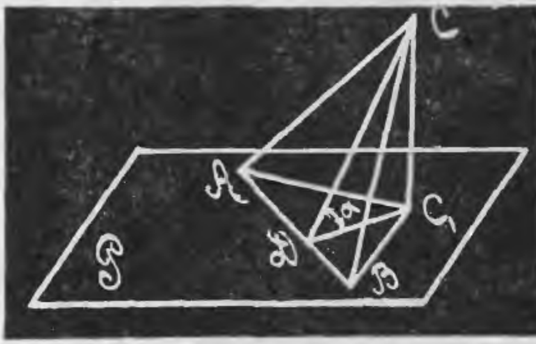


Черт. 25.

плоскость. Если проектируемая точка D лежит на плоскости, то проекция точки совпадает с ней самой. Проекцией отрезка на плоскость называют отрезок на плоскости, лежащий между проекциями концов отрезка. Например, B_1C_1 есть проекция BC, а DE_1 есть проекция DE. Проекцией многоугольника будем называть многоугольник, образованный проекциями сторон данного многоугольника.

Площадь проекции треугольника на плоскость равна площади самого треугольника, умноженной на косинус угла, образованного плоскостью проекций с плоскостью треугольника.

Докажем эту теорему сначала для того случая, когда одна сторона (AB) треугольника, (черт. 26) лежит на плоскости. Точка C_1 — проекция точки C. Таким образом ABC_1 — проекция треугольника ABC. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot DC$, а площадь треугольника ABC_1 равна $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot DC_1$, но $DC_1 = DC\cos\alpha$ (угол α образован плоскостью треугольника ABC с плоскостью P), отсюда площадь $ABC_1 = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot DC\cdot\cos\alpha =$ площадь $ABC\cdot\cos\alpha$, что и высказывается теоремой.

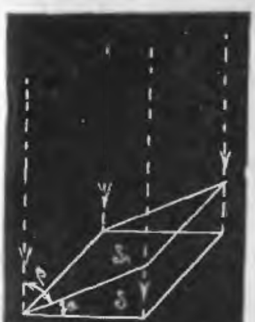


Черт. 26.

Очевидно, что эта теорема остается справедливой и для того случая, когда одна сторона треугольника не совпадает, но параллельна плоскости.

Чтобы доказать эту теорему для остальных случаев, следует через одну из вершин провести прямую, параллельную плоскости, и приложить теорему к каждому из образовавшихся треугольников. Пусть S, S_1 и S_2 — площади всего треугольника и каждого из образовавшихся, s, s_1 s_2 — площади их проекций; тогда $s_1 = S_1\cos\alpha$, $s_2 = S_2\cos\alpha$, поэтому $s_1 \pm s_2 = (S_1 \pm S_2)\cos\alpha$, т. е. $s = S\cos\alpha$.

Нетрудно распространить эту теорему на случай любого многоугольника (разбивая на треугольники) и на какую угодно плоскую фигуру (методом пределов).



Черт. 27.

§ 23. Положим, из потока параллельных лучей (или силовых линий) мы выделяем пучок, поперечное сечение которого (черт. 27) равно s кв. ед. Если плоскость, на которую падают лучи, перпендикулярна к направлению лучей, то этот пучок осветит площадку s; если же повернуть плоскость на угол α, то тот же пучок упадет на площадку s_1. Но $s = s_1\cos\alpha$. Чем больше площадь, которую освещает пучок лучей, тем яркость освещения меньше: во сколько раз первая больше, во столько раз вторая меньше. Поэтому отношение яркостей освещения A и A_1 этих двух площадок равно.

$$A:A_1=\frac{1}{s}:\frac{1}{s_1}=s_1:s=1:\cos\alpha, \text{ т. е. } A_1=A\cos\alpha, \text{ или } A_1=A\sin\beta.$$

Значит, яркость освещения пропорциональна синусу угла, образованного направлением лучей с плоскостью.

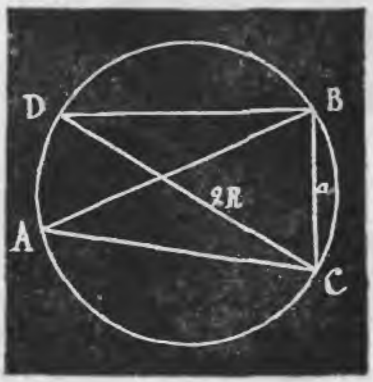
Найти отношение нагревания лучами солнца поверхности земли в полдень в день весеннего равноденствия для места, широта которого $\varphi=60^\circ$, к нагреванию экватора.

Из чертежа 10 на стр. 16 видно, что лучи солнца на экваторе падают отвесно, а под широтою φ составляют с поверхностью земли угол $90^\circ-\varphi$. Поэтому нагревание на широте φ равно $A_1=A\cos\varphi=\frac{1}{2}A$.

(A — означает нагревание на экваторе.)

ФОРМУЛЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 24. Рассмотрим сначала *остроугольный* треугольник ABC (черт. 28). Опишем около него окружность. Обозначим радиус описанного круга буквой R. Проведем из вершины C диаметр CD и соединим противоположный конец его с точкой B. Треугольник CDB — прямоугольный (угол B — вписанный, опирающийся на диаметр). Из треугольника BCD имеем: $BC=DC\sin BDC$, но $\angle BDC=\angle A$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), поэтому



Черт. 28.

$$a=2R\sin A, \text{ или } 2R=\frac{a}{\sin A}.$$

(Так как угол A не равен 0°, то $\sin A$ не равен нулю, и поэтому можно делить на $\sin A$.) Поступая таким же образом относительно других вершин (или по аналогии), можно получить:

$$2R=\frac{a}{\sin B} \text{ и } 2R=\frac{c}{\sin A}.$$

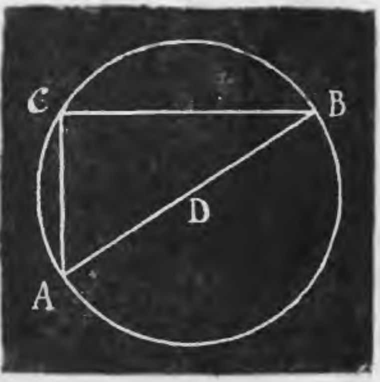
Отсюда выводим

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

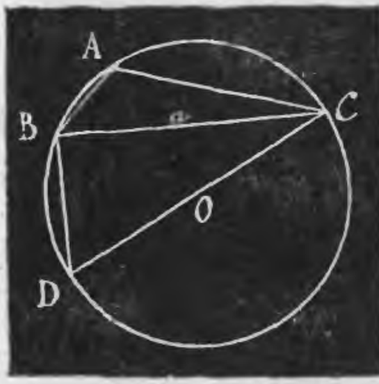
То же самое соотношение справедливо и для прямоугольных треугольников. Действительно, пусть угол C прямой, тогда $\sin C=1$. Кроме того, $a=c\sin A$ и $b=c\sin B$, или

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{1} \text{ и } \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{1}, \text{ т. е. } \frac{c}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \ldots \quad (1)$$

(заменив единицу через $\sin C$). И в данном случае также $2R=\frac{c}{\sin C}$, или $2R=c$, или $R=\frac{c}{2}$. Действительно, описав окружность (черт. 29) из середины D гипотенузы радиусом, равным половине ее, заключаем, что окружность должна пройти через вершину C. (Если бы



Черт. 29.



Черт. 30.

точка C оказалась вне круга, угол C был бы меньше прямого; если бы точка C была внутри круга, угол C был бы больше прямого.)

Рассмотрим еще треугольник ABC (черт. 30) с тупым углом A. Опишем опять окружность и проведем через точку C диаметр CD. Обозначив угол BDC буквой A_1, имеем из прямоугольного треугольника BCD:

$$a=2R\sin A_1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Углы A и A_1 измеряются соответственно половинами дуг BDC и BAC. Эти две дуги дают в сумме окружность и содержат поэтому 360°, а сумма их половин равна 180°. Значит,

$$A+A_1=180°;\ A_1=180°-A.$$

[Такие два угла (каковы A и A_1), сумма которых равна 180°, будем называть *пополнительными*.] Получаем из равенства (2)

$$2R=\frac{a}{\sin A_1}.$$

Кроме того, проведя диаметры из других вершин, будем, как и для остроугольного треугольника, иметь:

$$2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Итак,

$$\frac{a}{\sin A_1}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \text{ или } \frac{a}{\sin(180°-A)}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \quad (3)$$

Значит, равенство (1) видоизменяется в данном случае только тем, что вместо тупого угла следует взять пополнительный к нему острый угол. Чтобы не было и этого различия и чтобы можно было всегда пользоваться формулой (1) независимо от назначения угла A, введем условное равенство

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

т. е. будем считать синусом тупого угла синус пополнительного ему (острого) угла. (Далее мы увидим, что и другие соображения приведут нас к тому же равенству.) Такое определение мы имеем право ввести, так как до сих пор синус тупого угла совсем не был определен. Пользуясь равенством (3), из равенства (2) заключаем, что для всяких треугольников справедливо соотношение

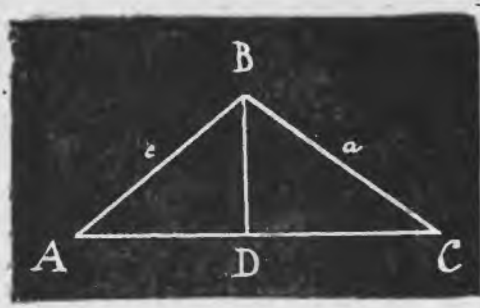
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Эта теорема носит название **теоремы синусов** и может быть формулирована так: *стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.* В геометрии установлено, что в треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона. Теорема же синусов устанавливает, сверх этого, что одна сторона треугольника относится к другой, как синусы углов, им противолежащих.

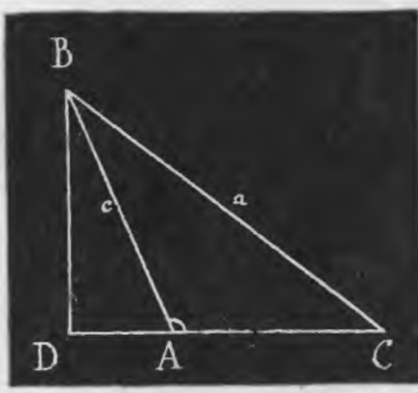
§ 25. Замечательна формула, связывающая стороны треугольника с косинусом одного из углов.

Для случая, когда сторона a (черт. 31) лежит против острого угла A, по известной теореме геометрии: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD$, но $AD = c\cos A$, поэтому

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \ldots\ldots \quad (1).$$



Черт. 31.



Черт. 32.

Последняя формула справедлива и для того случая, когда угол A прямой. Действительно, $\cos 90^\circ = 0$, и последняя формула принимает вид $a^2 = b^2 + c^2$, что, конечно, справедливо, согласно теореме Пифагора.

Наконец, если угол A тупой (черт. 31), то $a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AD$, но $AD = c\cos(180^\circ - A)$, поэтому

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180^\circ - A) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Стремясь к общности формул и замечая, что косинус тупого угла еще не определен, дадим такое определение: *косинусом тупою угла называется косинус пополнительною острою угла, взятый со знаком минус.* Тогда

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

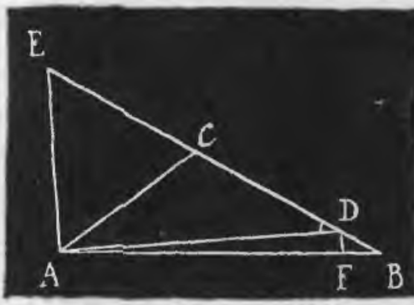
и формула (2) принимает также вид

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

т. е. *квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон дез удвоенного произведения их, умноженною на к синус угла между ними.* (Мы дали именно такое определение косинуса тупого угла, так как при всяком другом определении квадрат стороны треугольника, лежащей против тупого угла, выражался бы иной формулой, чем квадрат стороны, лежащей против острого угла.) Эта теорема называется иногда **теоремой косинусов.**

§ 26. Перейдем теперь к выводу так называемой **теоремы тангенсов.**

Пусть в треугольнике ABC (черт. 33) сторона $a > b$, тогда $A > B$ (против большей стороны лежит больший угол). Отложим на прямой BC от точки C в обе стороны отрезки CD и CE, равные b; тогда получим равнобедренные треугольники ACD и ACE. Отрезки DB и EB соответственно равны $(a - b)$ и $(a + b)$. Проведем еще через точку D вспомогательную прямую DF, параллельную AE. Угол EAD — прямой; действительно, если из центра C описать окружность радиусом CD, то она пройдет через точки E, A, D, и угол EAD — вписанный, опирающийся на диаметр;



Черт. 33.

$$\angle ADF = \angle EAD = 90^\circ;\ \angle CDA = \frac{180^\circ - C}{2} = \frac{A+B}{2};\ \angle DAF =$$

$$= A - \angle CAD = A - \angle CAD = A - \frac{A+B}{2} = \frac{A-B}{2}$$

(буквами A, B и C обозначены, конечно, углы треугольника ABC).

Из прямоугольного треугольника ADF имеем

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{DF}{DA}.$$

Из прямоугольного же треугольника ADE имеем

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{EA}{DA}.$$

Разделяя почленно первое равенство на второе, получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}} = \frac{DF}{EA}.$$

Наконец, из подобия треугольников DFB и EAB заключаем, что

$$\frac{DF}{EA}=\frac{DB}{EB}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Итак,

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}=\frac{a-b}{a+b},$$

т. е. *отношение тангенса полуразности двух углов треугольника к тангенсу их полусуммы равно отношению разности противолежащих сторон к их сумме.*

Из треугольника ABE, по теореме синусов:

$$\frac{BE}{AB}=\frac{\sin BAE}{\sin AEB}.$$

Выразив эти два угла через углы A, B, C треугольника и сделав соответствующие упрощения, получим

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Подобным же образом из треугольника ADB

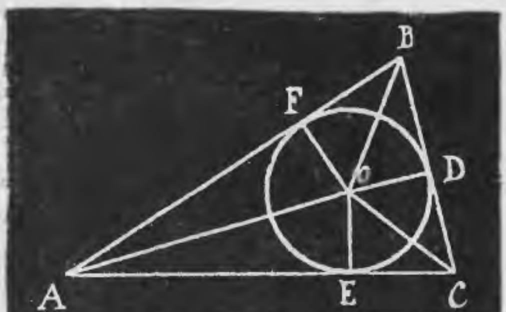
$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin DAB}{\sin ADB},$$

что после упрощения дает

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) носят название формул Мольвейде.

§ 27. Выведем еще третью и последнюю формулу, необходимую для решения косоугольных треугольников, а именно выражение тангенса половины угла треугольника в зависимости от сторон.



Черт. 34.

Впишем в треугольник ABC (черт. 34) окружность. Точки D, E и F — точки касания; пусть точка O — центр вписанного круга (точка пересечения биссектрис). Обозначим радиус вписанного круга буквой r, а периметр треугольника $2p$ (тогда $2p = a + b + c$).

Разбивая треугольник ABC

на треугольники AOB, BOC и COA, заключаем, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников BOC, COA и AOB, площади которых выражаются соответственно так:

$$\frac{ar}{2},\quad \frac{br}{2},\quad \frac{cr}{2}.$$

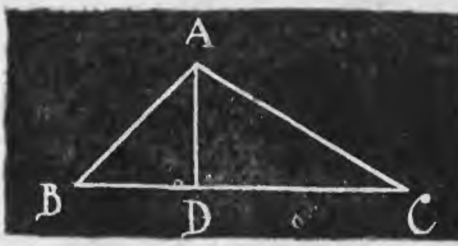
(Высота каждого из этих треугольников равна r, а основаниями служат стороны a, b, c). Складывая эти выражения, получаем:

$$\text{площ. } ABC = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = rp \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

С другой стороны, для площади треугольника в курсе геометрии выводится выражение

$$\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Приведем вывод этой формулы. В треугольнике ABC (черт. 35) опустим высоту AD. (Если треугольник ABC прямоугольный или тупоугольный, то буквой A назовем вершину прямого или тупого угла).



Черт. 35.

Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{AD \cdot a}{2}.$$

Чтобы получить выражение (2), остается выразить высоту AD через стороны. Из прямоугольного треугольника ABD имеем

$$AD^2 = c^2 - BD^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

а из треугольника ABC получаем

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BD;$$

отсюда

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a};$$

подставляя в равенство (3), получаем

$$AD^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2.$$

Разложение на множители дает

$$AD^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

$$\frac{2ac - a^2 - c^2 - b^2}{2a} = \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)}{2a} =$$

$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a} = \frac{(a+c+b)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c)}{4a^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(-a+b+c)(a-b+c)\,(a+b-c)}{4a^2}.$$

Значит,

$$AD=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2a}.$$

Площадь же треугольника равна

$$AD\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Наконец, заменяя $a+b+c$ через $2p$, имеем:

$$-a+b+c=-2a+2p=2(p-a);$$
$$a-b+c=2(p-b)$$
$$a+b-c=2(p-c).$$

Поэтому площадь треугольника равна

$$\frac{1}{4}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Сравнивая приведенные два выражения (1) и (2) для площади треугольника, получаем:

$$rp=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=$$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Из треугольника AOE (черт. 34) имеем:

$$r=AE\operatorname{tg}\frac{A}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Отрезок AE очень просто выражается через стороны треугольника. Действительно, заметим, что $AE=AF$, $BF=BD$, $CD=CE$ (как касательные, проведенные из одной точки).

Обозначим отрезок AE буквой x, BF — буквой y, CD — буквой z, тогда

$$2x+2y+2z=2p, \text{ или } x+y+z=p \quad \ldots\ldots (6)$$

но и из чертежа явствует, что

$$y+z=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Вычитая из (6) равенство (7), получаем

$$AE=x=p-a,$$

значит,

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Сравнивая (8) с (4), имеем:

$$(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad \ldots\ldots (9)$$

При замене буквы A на B придется также заменить a на b, в результате чего получаем

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

и подобным же образом

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$ [1])

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

§ 28. Применим теперь выведенные формулы к решению треугольников в основных случаях. Различают четыре основных случая, а именно, заданы: 1) два угла и сторона, 2) две стороны и угол, лежащий между ними, 3) две стороны и угол, лежащий против одной из них, и 4) три стороны.

Первый случай. Решить треугольник по заданной стороне и двум углам. Заданы a, B и C, найти A, b, c.

Имеем

$$A=180^\circ-(B+C);\ \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A},$$

откуда

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A};$$

и таким же образом

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Задача решена.

Пример: $a=15{,}67$ *см*, $A=30°42'$, $B=75°57'$.

Получаем:

$$C=180^\circ-(A+B)=73°21'$$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=29{,}78; \qquad c=\frac{a\sin C}{\sin A}=29{,}41.$$

---

[1]) Если требуется найти все углы треугольника, то вычисления удобнее вести по формуле (9), чем по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

так как для вычисления углов надо только найти

$$\log\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

и затем вычитать соответственно $\log(p-a)$, $\log(p-b)$, $\log(p-c)$.

$$\begin{array}{rl} \log a = & 1,1951 \\ \log \sin B = & 9,9868 \\ -\log \sin A = & 0,9220 \\ \hline \log b = & 1,4739 \\ b = & 29,78 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 1,1951 \\ \log \sin C = & 9,9814 \\ -\log \sin A = & 0,2920 \\ \hline \log c = & 1,4685 \\ c = & 29,41 \end{array}$$

Вычисления по пятизначным таблицам дают:

$$C = 73°21' \qquad b = 29,775 \qquad c = 29,406.$$

§ 29. *Второй случай.* Решить треугольник по заданным двум сторонам и углу, лежащему между ними. Заданы a, b, C; найти A, B, c. По теореме тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}$$

если $a > b$. Если же $a < b$, то

$$\left.\frac{b-a}{b+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+A}{2}}\right\},$$

имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

Все величины, входящие во вторую часть равенства, известны $\left(\text{так как } \frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}\right)$. Это равенство может быть переписано еще таким образом:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$\left(\text{так как углы } \frac{A+B}{2} \text{ и } \frac{C}{2} \text{ дополнительные}\right)$. Значит, угол $\frac{A-B}{2}$ может быть найден по таблицам. Введем обозначения

$$\frac{A+B}{2} = m; \quad \frac{A-B}{2} = n.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем:

$$A = m + n; \quad B = m - n.$$

Затем, сторона c находится по теореме синусов:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ или } c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Пример. $a = 56,23$ *см*, $b = 40,28$ *см*, $C = 65°24$. Формулы

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \text{ и } c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

дают

$$A=71°45'; \; B=42°51'; \; c=53{,}83 \text{ см.}$$

$$a-b=15{,}95 \text{ см}; \; a+b=96{,}51 \text{ см}; \; \frac{C}{2}=32°42'$$

$$\begin{aligned} \log(a-b) &= 1{,}2028 \\ \text{д. } \log(a+b) &= 8{,}0155 \\ \log \operatorname{ctg}\frac{C}{2} &= 0{,}1925 \\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} &= 9{,}4108 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{A+B}{2} &= 57°18' = m \\ \frac{A-B}{2} &= 14°27' = n \\ \hline A &= 71°45' = m+n \\ B &= 42°51' = m-n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1{,}7499 \\ \log \sin C &= 9{,}9587 \\ \text{д. } \log \sin A &= 0{,}0024 \\ \hline \log c &= 1{,}7110 \end{aligned}$$

$$c=51{,}41 \text{ см.}$$

Пятизначные таблицы дают: $A=71°44'10''$; $B=42°51'50''$; $c=$ $=51{,}41$ *см.*

Сторону c немного проще получить по формуле Мольвейде (см. стр. 42), а именно

$$c=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

или

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

В нашем примере

$$\begin{aligned} \log(a-b) &= 1{,}2028 \\ \log\cos\frac{C}{2} &= 9{,}9251 \\ \text{д. } \log\sin\frac{A-B}{2} &= 0{,}6029 \\ \hline \log c &= 1{,}7308 \\ c &= 53{,}80 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log(a+b) &= 1{,}9845 \\ \log\sin\frac{C}{2} &= 9{,}7326 \\ \text{д. } \log\cos\frac{A-B}{2} &= 0{,}0140 \\ \hline \log c &= 1{,}7311 \\ c &= 53{,}84 \end{aligned}$$

Вычисление третьей стороны по одной из формул Мольвейде проще, чем вычисление по теореме синусов: во-первых, здесь один логарифм [а именно $\log(a-b)$ или $\log(a+b)$] уже найден и, во-вторых, приходится пользоваться функциями углов $\frac{C}{2}$ и $\frac{A-B}{2}$, а таблицы уже были открыты в соответствующих местах; стоит только сразу, тогда же выписать $\log\cos\frac{C}{2}$, $\log\sin\frac{A-B}{2}$ или $\log\sin\frac{C}{2}$, $\log\cos\frac{A-B}{2}$.

Если не требуется большой точности или данные приведены с небольшим числом цифр, то удобно воспользоваться формулой, приведенной в § 25.

При заданных a, b, C, вычисляем c по формуле $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

а затем из $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ находим $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ и $C = 180° - (A + B)$. Более точные вычисления по этим формулам неудобны, так как эти формулы нелогарифмические.

Пример. $a = 4,7$; $b = 5,4$; $C = 49°50'$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 22,09 + 29,16 - 50,76 \cdot 0,645 = 18,51,$$

отсюда

$$c = 4,30; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{22,09 + 18,51 - 29,16}{40,42} = 0,283,$$

и $B = 73°34'$; $A = 56°36'$.

Вычисления по пятизначным таблицам дают

$$B = 73°34'9''; \ A = 56°35'51''; \ c = 4,3021.$$

Очень удобно применять этот способ решения, пользуясь таблицами квадратов и корней квадратных или логарифмической линейкой.

§ 30. *Третий случай.* Решить треугольник по заданным двум сторонам и углу, лежащему против одной из них. Заданы a, b, A. найти B, C, c. По теореме синусов получаем

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Заметим, что здесь требуется найти угол B по данному значению его синуса (вторая часть последнего равенства содержит только известные величины), а синус не должен превышать единицы. Поэтому, если вторая часть последнего равенства больше единицы, то задача невозможна: предложенные данные не определяют никакого треугольника. Кроме того (если требование $\frac{b \sin A}{a} < 1$ удовлетворено), здесь возникает затруднение другого рода: дело в том, что, кроме острого угла B, удовлетворяющего уравнению $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, существует еще тупой угол, дополнительный к углу B, синус которого равен тому же числу, что и синус B. Который из этих углов принадлежит решаемому треугольнику? Исследуем этот вопрос, рассмотрев все возможные случаи.

I. Пусть $a > b$. Угол A может быть либо больше, либо меньше прямого. Так как $b < a$ и $\sin A < 1$, то $b \sin A < a$, т. е. $\sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$ и, значит, задача имеет решение. Угол B в этом случае меньше угла A (так как $b < a$), и потому угол B, наверное, острый; значение его найдем из таблиц и обозначим буквой B_1. Угол $B_2 = 180° - B_1$ удовлетворяет уравнению $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, но не удовлетворяет условию $B < A$. Значит, для искомого угла найдется значение и притом только одно (найденное в таблицах).

II. Пусть $a < b$, $A < 90°$. Так как $b > a$, $\sin A < 1$, то, очевидно, может случиться, что

$$b \sin A > a; \ b \sin A = a; \ b \sin A < a.$$

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев:

1) $b\sin A > a$, или $\frac{b\sin A}{a} > 1$, значит, нет такого угла, синус которого равнялся бы $\frac{b\sin A}{a}$. Задача невозможна.

2) $b\sin A = a$, тогда $\frac{b\sin A}{a} = 1$; значит, угол B — прямой. Поэтому b — гипотенуза этого треугольника, и можно решать треугольник по формулам $c = b\cos A$ и $C = 90° - A$.

3) $b\sin A < a$, тогда $\frac{b\sin A}{a} < 1$. Из таблиц найдем B_1 — значение угла B; но угол $B_2 = 180° - B_1$ также удовлетворяет как условию $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$, так и условию $B > A$. Поэтому в данном случае имеем два решения: два различные треугольника — один с острым углом B_1, другой с тупым углом B_2 — удовлетворяют условиям задачи. Решение треугольника заканчивается по формулам

1) $C_1 = 180° - A - B_1$; $c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A}$ (угол $C_1 \gtrless 90°$).

2) $C_2 = 180° - A - B_2$; $c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A}$ (угол $C_2 < 90°$, так как $B_2 > 90°$).

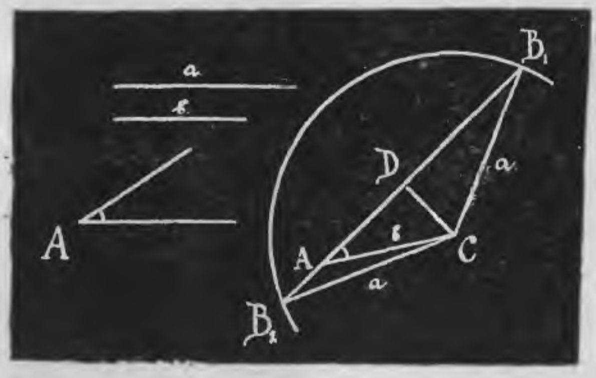
Нет надобности останавливаться на 3-м случае: $a = b$, так как в этом случае сразу заключаем, что $B = A$, и заканчиваем решение треугольника (разбив его на два прямоугольных треугольника) по формулам $C = 180° - A$; $c = 2b\cos A$.

Подтвердим геометрическим построением правильность приведенного анализа.

Заданы стороны a, b и угол A.

I случай. $a > b$.

Строим угол A (черт. 36) и на одной стороне его откладываем $AC = b$; из конца C этого отрезка радиусом, равным a, описываем дугу до пересечения с другой стороной угла A и ее продолжением в точках B_1 и B_2. (Точки B_1 и B_2, наверное, лежат по разные стороны от точки A: большие наклонные CB_1 и CB_2 имеют большие проекции DB_1 и DB_2, чем более короткая сторона CA, имеющая проекцию DA.) Получаем два треугольника AB_1C и AB_2C. Но легко заметить, что только первый удовлетворяет заданным условиям: во втором нет заданного угла A. Заметим еще, что длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB_1 (из $\triangle ACD$) равна $CD = b\sin A$.



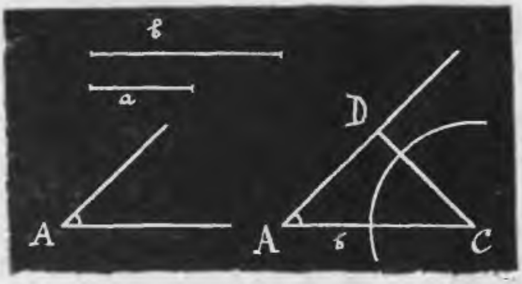
Черт. 36.

II случай. $b > a$.

Этот случай разбивается на следующие.

1) $b > a$ и $b \sin A > a$.

Делаем то же построение, что и в предыдущем случае (черт. 37). Отрезок a меньше перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB ($a < b \sin A$), и поэтому дуга, описанная радиусом, равным a, не пересекает стороны AB. Значит, в этом случае никакого треугольника не получается.



Черт. 37.

2) $b > a$ и $b \sin A = a$.

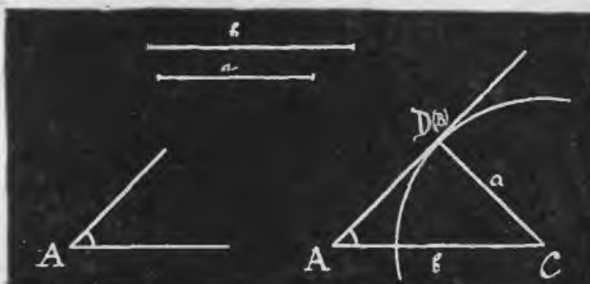
Выполняя то же построение (черт. 38) замечаем, что дуга, описанная из точки C, касается в этом случае стороны AB, так как

$$CD = b \sin A = a.$$

3) $b > a$ и $b \sin A < a$.

В данном случае дуга, описанная радиусом a (черт. 39), пересекает прямую AB (так как $a > b \sin A = CD$) в двух точках B_1 и B_2, лежащих по одну сторону от точки A (так как меньшая наклонная a имеет меньшую проекцию, чем бо́льшая наклонная b). Оба треугольника AB_1C и AB_2C удовлетворяют условиям: действительно, оба треугольника имеют заданный угол A, заданные стороны a и b. Задача имеет в данном случае два решения, как было найдено и аналитическим путем. Заметим еще, что углы B_1 и B_2 пополнительны, так как $B_2 + DB_2C = 180°$, а угол $DB_2C = B_1$, ибо треугольник B_1B_2C — равнобедренный.

Итак, все положения, полученные выше аналитическим путем, подтверждены теперь при помощи построения.



Черт. 38.

Примеры.

I.

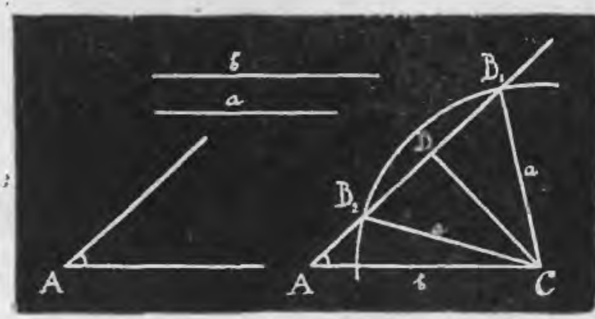
$a = 45{,}23$; $b = 32{,}68$; $A = 72°34'$.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a};$$

$$B = 43°35';$$

$$C = 180° - (A + B) = 63°51'.$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 42{,}55$$



Черт. 39.

$$\begin{aligned} \log b &= 1,5142 \\ \log \sin A &= 9,9796 \\ \text{д. } \log a &= 8,3446 \\ \hline \log \sin B &= 9,8384 \\ B &= 43°35' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log a &= 1,6554 \\ \log \sin C &= 9,9531 \\ \text{д. } \log \sin A &= 0,0204 \\ \hline \log c &= 1,6289. \end{aligned}$$

Хотя угол $(180° - 43°35') = 136°25'$ имеет тот же синус, как и $43°35'$, но здесь можно взять только $43°35'$, так как угол B должен быть меньше угла A.

Пятизначные таблицы дают: $B = 43°34'39''$;

$$C = 63°51'21''; \ c = 42,557.$$

II.

1) $a = 3,175$; $b = 5,698$; $A = 63°33'$.

Логарифм синуса B равен 0,2133; значит, синус угла B получился бы больше единицы, что невозможно. Решения нет.

2) $a = 63,53$; $b = 80,15$; $A = 52°26'$.

Получаем $\log \sin B = 0,0000$, т. е. синус угла B равен единице; поэтому угол B равен 90°. Треугольник прямоугольный, гипотенуза его b. $C = 90° - A = 37°34'$, значит,

$$c = b \cos A$$

и для c получаем значение 48,87.

Пятизначные таблицы дают:

$$B = 90°, \ C = 37°34', \ c = 48,866.$$

3) $a = 7,843$; $b = 9,567$; $A = 48°31'$.

Получаем $\log \sin B = 9,9609$; отсюда $B_1 = 66°3'$ или $B_2 = 180° - 66°3' = 113°57$. Оба значения, как B_1, так и B_2 пригодны, так как оба удовлетворяют условиями

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \text{ и } B > A.$$

Таким образом, получаем два треугольника, один с углом B_1, другой с углом B_2. В первом треугольнике $C_1 = 180° - A - B_1 = 65°26'$ и сторона $c_1 = 9,522$. Во втором треугольнике $C_2 = 180° - A - B_2 = 17°32'$ и сторона $c_2 = 3,154$.

Вычисления по пятизначным таблицам дают:

$$C_1 = 65°26'30''; \ c_1 = 9,5220 \text{ и } C_2 = 17°31'30'', \ c_2 = 3,1525.$$

§ 31. *Четвертый случай.* Решить треугольник по заданным трем сторонам. Заданы a, b, c. Найти A, B, C. Применим формулы для тангенсов половин углов треугольника.

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{p-a} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Все величины во второй части известны$\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$; поэтому найдется определенное значение для половины угла A. Таким же образом найдем значения других углов треугольника.

Для возможности задачи необходимо и достаточно, чтобы каждая из разностей $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ была положительная. Условие это необходимо: если бы, например, $(p-a)$ было отрицательным, то отношение

$$\frac{r}{p-a}$$

было бы также отрицательным, т. е. тангенс острого угла (половина угла треугольника — угол острый) был бы отрицательным, что невозможно. Оно достаточно, так как при соблюдении его тангенсы половин всех углов треугольника вещественны и положительны. Условие $(p-a)>0$ дает

$$\frac{a+b+c}{2}-a>0, \text{ или } \frac{b+c-a}{2}>0, \text{ т. е. } b+c>a.$$

Значит, условие $p-a>0$ выражает, что сумма двух сторон a и b должна быть больше третьей. (Условия $p-b>0$ и $p-c>0$ равносильны таким: $a+c>b$ и $a+b>c$.)

Пример. $a=14{,}27$ *см*, $b=20{,}41$ *см*, $c=21{,}68$ *см*.

$$2p=a+b+c=56{,}36;\ p=28{,}18;\ p-a=13{,}91;\ p-b=7{,}77;$$

$$p-c=6{,}50.$$

$$\begin{aligned} \log(p-a)&=1{,}1433\\ \log(p-b)&=0{,}8904\\ \log(p-c)&=0{,}8129\\ \text{д. }\log p&=8{,}5501\\ \hline &1{,}3967 \end{aligned}$$

$$1{,}3967:2=0{,}6983.$$

$$\begin{array}{ccc} 0{,}6983 & 0{,}6983 & 0{,}6983\\ \text{д. }\log(p-a)=8{,}8567 & \text{д. }\log(p-b)=9{,}1096 & \text{д. }\log(p-c)=9{,}1871\\ \log\operatorname{tg}\frac{A}{2}=9{,}5550 & \log\operatorname{tg}\frac{B}{2}=9{,}8079 & \log\operatorname{tg}\frac{C}{2}=9{,}8854\\ \frac{A}{2}=19^\circ45' & \frac{B}{2}=32^\circ43' & \frac{C}{2}=37^\circ32'\\ A=39^\circ30' & B=65^\circ26' & C=75^\circ4'. \end{array}$$

Вычисления по пятизначным таблицам дают

$$A=39^\circ29'26'',\ B=65^\circ26'58'',\ C=75^\circ3'38''.$$

Если численные значения сторон приведены с небольшой точностью, то удобно воспользоваться формулой, выведенной в § 26 (теоремой косинусов). Из равенства $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, имеем:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

откуда находим угол A и таким же образом углы B и C.

Примеры: $a = 3{,}4$; $b = 4{,}3$; $c = 5{,}1$.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18{,}49 + 26{,}01 - 11{,}56}{43{,}86} = 0{,}751;\ A = 41°20'$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{11{,}56 + 26{,}01 - 18{,}49}{34{,}68} = 0{,}550;\ B = 56°39'$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{11{,}56 + 18{,}49 - 26{,}01}{29{,}24} = 0{,}138;\ C = 82°4'$$

Вычисления по таблицам дают

$$A = 41°19'14'',\ B = 56°37'16'',\ C = 82°3'32''.$$

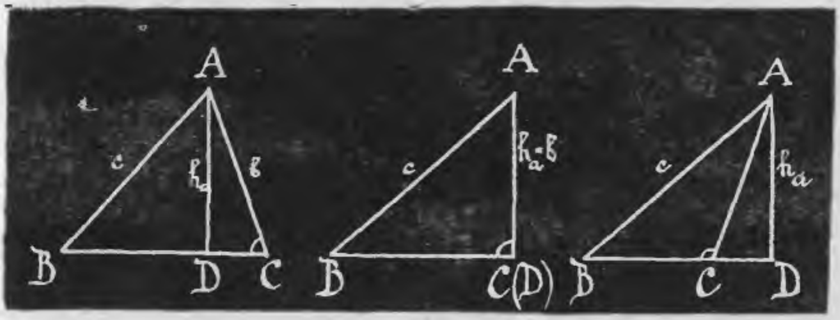
В особенности удобно пользоваться этими формулами, если иметь таблицу квадратов чисел и таблицу натуральных тригонометрических функций.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ДЛЯ РАДИУСОВ КРУГОВ ВПИСАННОГО И ОПИСАННОГО.

§ 32. В курсах геометрии даются следующие выражения для площади треугольника:

$$s = \frac{a h_a}{2} \ldots\ldots (1) \qquad s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ldots (2)$$

где h_a — высота, опущенная на сторону a, p — полупериметр треугольника. Из треугольника ADC (черт. 40) имеем $h_a = b \sin C$.



Черт. 40.

Если $C < 90°$, то $h_a = b \sin C$.
Если $C = 90°$, то $h_a = b$; $\sin C = 1$, т. е. $h_a = b \sin C$.
Если $C > 90°$, то $h_a = b \sin(180° - C) = b \sin C$.
Подставляя в выражение (1) для площади, получаем

$$s = \frac{ab \sin C}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Наконец, выражая сторону b в функции других элементов, имеем по теореме синусов $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$. Подставляя это выражение в равенство (3), получаем

$$s = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

При выводе теоремы синусов, как промежуточный результат, было получено выражение радиуса описанного круга.

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

Умножая числитель и знаменатель последней дроби на ab и обратив внимание на то, что $2ab\sin C$ есть учетверенная площадь треугольника, получаем:

$$R=\frac{abc}{4s},$$

выражение, в которое все стороны входят одинаково.

При выводе формулы для тангенса половины угла треугольника мы имели для радиуса вписанного круга

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}}=\frac{s}{p}.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

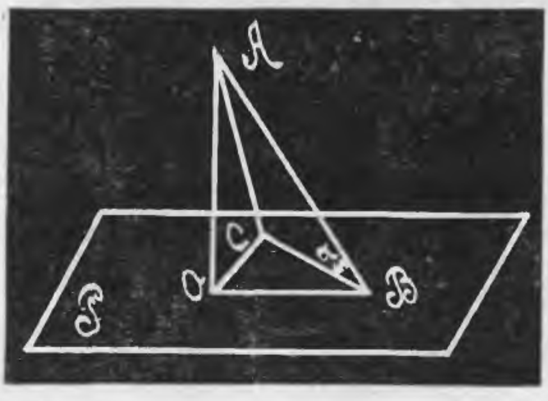
§ 33. Найти высоту горы или башни, к основанию которой нельзя подойти.

Пусть A вершина горы (черт. 41); O — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость P; B — точка горизонтальной плоскости P. Требуется найти высоту точки A над плоскостью P. Для этого измеряют расстояние d точки B от некоторой точки C, которая лежит на плоскости P или вне ее. Поместившись в пункты B и C, наблюдатель измеряет углы $ACB=\gamma$, $ABO=\beta$, $ABC=\alpha$. Угол ABO есть угол, составленный прямой AB с горизонтальной плоскостью. Из треугольника ABC имеем

$$\frac{AB}{d}=\frac{\sin\gamma}{\sin CAB}, \text{ но } \sin CAB=\sin(\alpha+\gamma), \text{ отсюда } AB=\frac{d\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)},$$

а из треугольника OAB получаем

$$OA=AB\sin\beta, \text{ т. е. } OA=\frac{d\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$$



Черт. 41.

С вершины башни измерены углы α и β, образованные направлениями на точки A и B (черт. 42) с вертикальным направлением. При основании O измерен угол $AOB=\gamma$. Точки A и B лежат в одной горизонтальной плоскости с основанием башни O.

Высота башни равна $h=12$ *м*. Найти расстояние AB.

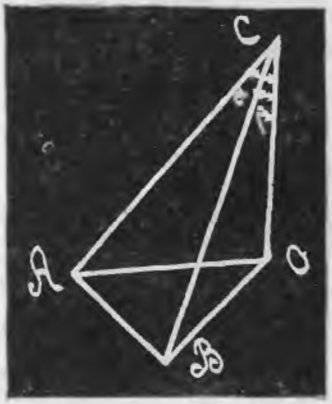
$\alpha=80°15'$; $\beta=75°7'$; $\gamma=65°34'$.

$AO=h\operatorname{tg}\alpha$; $BO=h\operatorname{tg}\beta$;
$AB^2=(h\operatorname{tg}\alpha)^2+(h\operatorname{tg}\beta)^2-2h^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma,$

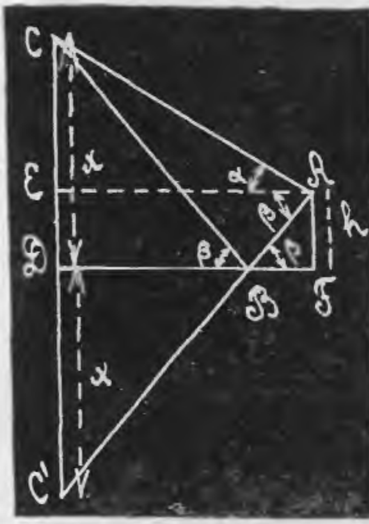
отсюда

$$AB = h\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma} = 65{,}6 \sim 66\ \text{м}.$$

Со скалы, находящейся на берегу озера, направление на облако C (черт. 43) составляет с горизонтом угол α, а направление на отражение C' облака в озере угол β. Зная высоту скалы h, найти высоту облака.



Черт. 42.



Черт. 43.

Обозначим неизвестную высоту CD буквой x. Расстояние $CD = C'D$ (так как предмет и изображение находятся на одинаковом расстоянии от плоского зеркала).

1-е решение. Из треугольника CAE и $C'AE$ получаем

$$CE = x - h = AE\operatorname{tg}\alpha;\quad C'E = x + h = AE\operatorname{tg}\beta.$$

Деля одно равенство на другое, получаем

$$\frac{x-h}{x+h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

отсюда

$$x = h\,\frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}.$$

2-е решение. Из точки C падает луч CB и, отразившись в точке B от поверхности воды, идет по направлению BA. Из треугольника CAB

$$\frac{CB}{AB} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)},$$

так как $\angle CBA = 180^\circ - 2\beta$; $\angle CAB = \alpha + \beta$; значит $\angle ACB = \beta - \alpha$.

Из подобия треугольников CDB и AFB имеем

$$\frac{x}{h} = \frac{CB}{BA} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)},$$

поэтому

$$x = h\,\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Первое решение несомненно проще. Из сравнения выражений x заключаем, что

$$\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

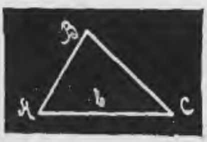
Следует заметить, что для логарифмических вычислений вторая формула удобнее первой. Действительно, вычисляя по первой формуле, надо по $\log\operatorname{tg}\alpha$ и $\log\operatorname{tg}\beta$ найти $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, и далее, найдя их сумму и разность, снова для вычисления частного найти $\log(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)$ и $\log(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)$. Вторая формула требует только нахождения $\log\sin(\beta+\alpha)$ и $\log\sin(\beta-\alpha)$. Такие формулы, как вторая, называются в отличие от формулы такого вида, как первая, логарифмическими. Важно уметь преобразовывать нелогарифмические формулы в логарифмические.

Этой задачей мы займемся во второй части (см. § 71).

ТРИАНГУЛЯЦИЯ.

§ 34. Чтобы снять план местности, обыкновенно поступают так. Выбирают на местности достаточное число точек (не слишком удаленных друг от друга) и соединяют их (мысленно) прямыми. Таким образом местность разбивается на треугольники, получается сеть треугольников. Точки следует выбрать так, чтобы из каждой точки (вершины треугольника) были видны обе другие вершины, и чтобы из каждой точки, лежащей внутри треугольника, были видны все вершины треугольника.

Затем надо определить все элементы полученной сети треугольников, а для этого надо уметь выполнять две операции: во-первых, измерять расстояние между двумя пунктами и, во-вторых, измерять угол, составленный двумя прямыми (черт. 44) AB и AC, при чем обе точки B и C видны из точки A. Первая операция производится (обычно) посредством мерной цепи. Она требует вообще большой затраты времени и возможна только при выполнении ряда условий: например, того, чтобы измеряемое расстояние лежало на ровной местности и было везде доступным. Но даже при соблюдении этих условий (вообще довольно редких) точное измерение расстояния — очень трудная задача. Измерение углов можно произвести значительно точнее и требует оно гораздо меньше времени. Поэтому обычно непосредственно измеряют только один отрезок, называемый базисом; но измеряют его, по возможности, точно. Затем, переходя последовательно в каждую из вершин треугольников, измеряют углы между направлениями на другие вершины треугольников. После этого все отрезки находят посредством вычисления, т. е. решения треугольников, углы которых измерены. Здесь встретятся две основные задачи.



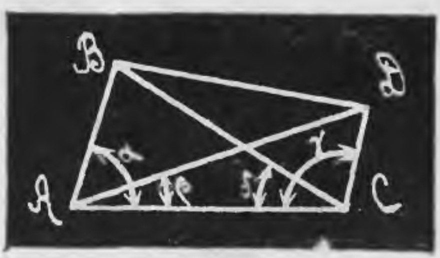
Черт. 44.

1. Найти отрезок, один конец которого совпадает с концом базиса (найти расстояние от заданной точки до неприступной точки.)

2. Найти длину отрезка, концы которого не совпадают с концами базиса (найти расстояние между двумя неприступными точками.) Решим эти задачи.

Найти расстояние от неприступной точки до другой доступной.

Точка A (черт. 44) доступна, точка B — недоступна (например, лежит на островке реки, куда перебираться неудобно или невозможно). Измеряем базис $AC=b$ и углы A и C.



Черт. 45.

Получаем

$$AB = \frac{b \sin C}{\sin (A + C}$$

Найти расстояние между двумя недоступными точками B и D. Измеряем базис $AC = b$ (черт. 45) и углы: $\angle BAC = \alpha$, $DAC = \beta$; $\angle DCA = \gamma$; $\angle BCA = \delta$.

Из треугольников BCA и DCA находим

$$BC = \frac{b \sin \alpha}{\sin (\alpha + \delta)}; \quad DC = \frac{b \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

Когда BC и DC найдены, остается вычислить BD из треугольника BCD, в котором известны две стороны и угол, лежащий между ними.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

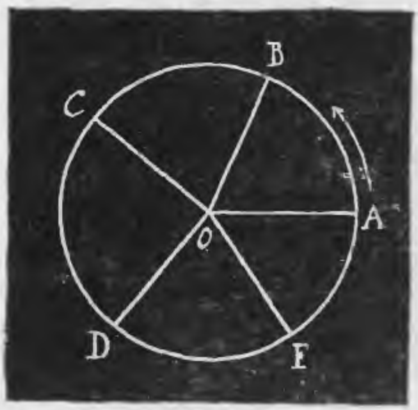
УЧЕНИЕ О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ УГЛА И ДУГИ.

§ 35. В первой части этой книги при изучении тригонометрических функций были введены некоторые ограничения. Сначала мы рассматривали функции только острых углов, несколько позже были введены понятия о тригонометрических функциях углов в 0^0 и 90^0. Затем было еще введено понятие о синусе тупого угла посредством формулы $\sin(180^0 - A) = \sin A$ Возникает вопрос, нельзя ли вообще понятия о функциях острых углов распространить на углы, превышающие прямой? Если бы это оказалось возможным, то и графики функций, например график синуса, не обрывался бы, как он обрывается на черт. 17 в точке, соответствующей углу в 90^0, и мог бы быть продолжен далее.

В этой, второй, части мы будем изучать тригонометрические функции всяких углов. Но для этого необходимо ввести некоторые предварительные понятия.

§ 36. Обобщим раньше всего понятие угла и дуги. Если вращать отрезок OA (черт. 46) вокруг точки O в сторону (указанную на чертеже стрелкою), обратную направлению движения часовой стрелки, то точка A займет последовательно положения B, C, D, E. Описав окружность, точка A вернется в свое первоначальное положение, во второй раз опишет окружность и т. д. Соответственно этому мы будем рассматривать не только дуги, меньшие окружности, но также дуги, бóльшие чем окружность, дуги, равные нескольким окружностям, и даже дуги сколь угодно большие. Все эти дуги будем считать положительными. Напротив того, дуги, описанные точкой A при вращении



Черт. 46.

ее в противоположную сторону, т. е. по часовой стрелке, будем считать отрицательными. Но окружность разделяют на 360 градусов: значит, теперь введены дуги, бо́льшие 360°, а также дуги, измеряемые отрицательным числом градусов.

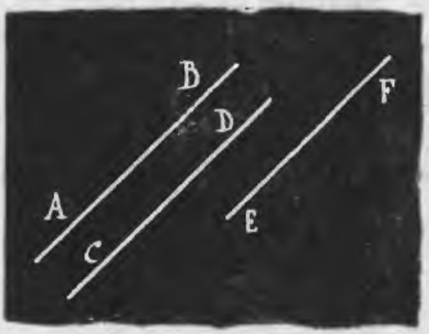
При переходе точки A в положение B и C, OA принимает положения OB и OC, которые образуют с первоначальным направлением углы AOB и AOC. В геометрии обыкновенно рассматривают углы в пределах от 0° до 180°; теперь же мы условимся говорить, что и дальнейшие положения, которые занимает радиус, образуют с первоначальным углы AOD, AOF (отмеченные на чертеже) и т. д. Таким образом понятие угла обобщено, и мы можем рассматривать углы, даже превосходящие 360°, а также углы отрицательные, образованные вращением радиуса в сторону движения часовой стрелки.

Первоначальное положение радиуса есть положение OA; мы будем называть радиус OA неподвижным, или начальным; радиус же, образующий другую сторону угла, будем называть подвижным, или конечным. Например, радиус OC есть конечный радиус угла AOC. Если подвижный радиус совпадает с неподвижным, не совершив ни одного обращения ни в ту, ни в другую сторону, т. е. когда нет никакого угла, то говорят, что подвижный и неподвижный радиусы образуют друг с другом угол, равный нулю. (Так же, как о двух совпадающих точках говорят, что расстояние между ними равно нулю.) Отсюда легко видеть, что всякий угол измеряется тем же положительным или отрицательным числом (или нулем), как и соответствующая ему дуга.

§ 37. При повороте радиуса на 360° он снова принимает свое прежнее положение; поэтому, например, все углы, начальный радиус которых OA, а конечный OD, отличаются друг от друга на целое число полных оборотов радиуса OD, т. е. на $360° k$, где k — какое-либо целое (положительное или отрицательное или равное нулю) число. Обозначив один из этих углов буквою φ, мы можем значение каждого из этих углов рассматривать как алгебраическую сумму $\varphi + 360° k$; здесь k равно нулю или целому, положительному или отрицательному числу, указывающему, сколько оборотов по направлению движения часовой стрелки или по обратному направлению было сделано, чтобы перейти от угла φ к углу $\varphi + 360° k$; обо всех этих углах мы будем говорить, что они имеют одинаковый геометрический вид. Все это можно дословно повторить и относительно дуг, т. е. во всем этом параграфе заменить слово «угол» словом «дуга».

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ О ВЕКТОРАХ И ПРОЕКЦИЯХ.

§ 38. Подобно тому как углы и дуги мы считаем положительными и отрицательными, отрезки на прямой, как известно, также принято считать в одну сторону положительными, в другую — отрицательными. Прямую, на которой откладываются положительные и отрицательные отрезки, называют *осью*. Чаще всего рассматривают горизонтальную и вертикальную оси. На горизонтальной оси принято считать отрезки в правую сторону положительными, влево — отрицательными; на вертикальной же оси положительными считают обыкновенно отрезки, направленные вверх, а отрицательными — направленные вниз. О ряде параллельных прямых говорят, что они имеют одинаковое направление [1]), что они определяют собой некоторое направление. Конечно, и одной прямой достаточно для определения направления. Если в отрезке различают: 1) направление прямой, на которой он отложен, 2) смысл его (положительный или отрицательный) и 3) длину его, то этот отрезок называется *вектором*.



Черт. 47.

Например, отрезок AB (черт. 47) имеет определенное направление, определенный смысл (от A к B) и определенную длину; обозначим этот вектор символом $\overline{AB}$. Векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, имеющие одинаковое направление (отложены на параллельных осях), одинаковый смысл и одинаковую длину, будем называть геометрически равными: $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$.

Векторы $\overline{BA}$, $\overline{DC}$ и $\overline{FE}$ имеют то же направление, что и векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, но противоположный смысл. Числовое значение длины вектора, взятое со знаком плюс или минус (в зависимости от смысла вектора), называют алгебраической величиной вектора. Если первые три вектора ($\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$) положительны, то последние три ($\overline{BA}$, $\overline{DC}$, $\overline{FE}$) отрицательны.

Поэтому

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

или

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0;$$

можно, конечно, также писать

$$\overline{AB} + \overline{FE} = 0.$$

§ 39. Докажем следующую теорему [2]) (Шаля); *если три точки A, B, C лежат на одной оси, то,* как бы ни были расположены точки A, B, C одна относительно другой, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

Положим, точки A и B расположены так, что, перемещаясь по

---

[1]) Кроме термина «направление» (Richtung, direction) далее введен термин «смысл» (Sinn, sens). Иногда термина «смысл» не вводят, и тогда придают слову «направление» то значение, которое здесь придано слову «смысл». Введение обоих терминов дает бóльшую определенность понятий.

[2]) Эта теорема принадлежит Мёбиусу, хотя ее называют обыкновенно теоремой Шаля.

оси в положительном смысле, мы встречаем точку A раньше точки B. Тогда могут представиться три случая, изображенные на чертеже 48: 1) точка C находится за точкой B, 2) точка C — между точками A и B и 3) точка C лежит на оси раньше точки A.

В первом случае:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC} \text{ или } \overline{AB}+\overline{BC}=-\overline{CA}, \text{ т. е. } \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

Во втором случае:

$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}, \text{ или } \overline{AB}=-\overline{BC}-\overline{CA}, \text{ т. е. } \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

В последнем случае:

$$\overline{CA}+\overline{AB}=\overline{CB}, \text{ или } \overline{AB}+\overline{CA}=-\overline{BC}, \text{ т. е. } \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

Черт. 48.

Итак, теорема доказана для тех случаев, когда точка A лежит (в положительном смысле) раньше точки B. Если же точка B лежит раньше точки A, то очевидно, что свойства точки A будут принадлежать точке B и обратно. Поэтому для этого случая можно в доказанном равенстве вместо B написать A и обратно.

Получаем

$$\overline{BA}+\overline{AC}+\overline{CB}=0,$$

изменяя знаки

$$-\overline{BA}-\overline{AC}-\overline{CB}=0, \text{ или } \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

А это и есть то равенство, справедливость которого следовало доказать. Итак, теорема доказана для всех случаев

Из этой теоремы следует, что во всяком случае

$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}.$$

Действительно, равенство

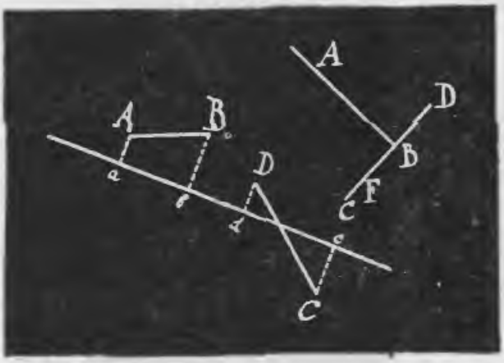
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

можно переписать в виде

$$\overline{AB}=-\overline{BC}-\overline{CA}, \text{ или } \overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}.$$

§ 40. Приведем основные понятия теории проекций.

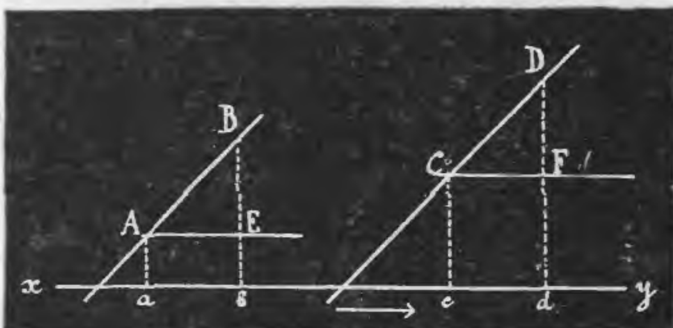
Проекцией точки A на данную ось CD (черт. 49) называют основание B перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. Если проектируемая точка лежит на оси, на которую проектируют, то проекция точки совпадает с ней самой: так, точка F есть проекция точки F на ось CD. Проекцией вектора на ось называют вектор на данной оси между проекциями начала и конца данного вектора. Например, проекцией вектора $\overline{AB}$ служит вектор $\overline{ab}$, которому мы приписываем знак плюс; $\overline{cd}$ — проекции вектора $\overline{CD}$ — приписываем знак минус. Векторы $\overline{ba}$ и $\overline{dc}$ служат проекциями векторов $\overline{BA}$ и $\overline{DC}$.



Черт. 49.

§ 41. Докажем, что *проекции геометрически равных векторов на ту же ось* (или на параллельные оси) *геометрически равны между собою.*

Пусть (черт. 50) векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны между собою, т. е. имеют одинаковое направление, о д и н а к о в ы й смысл и одинаковую длину. Требуется доказать, что проекции их $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ на ось xy равны между собою. Для доказательства проведем через начала A и C обоих векторов оси, параллельные оси xy

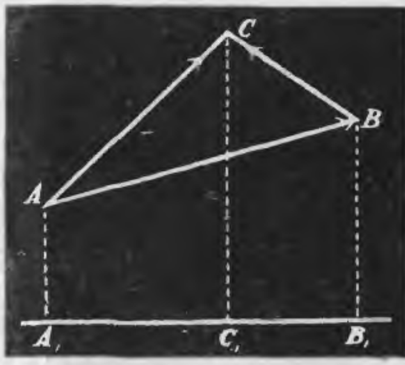


Черт. 50.

и отметим на них проекции $\overline{AE}$ и $\overline{CF}$ векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Прямоугольные треугольники ABE и CDF равны ($\angle A = \angle C$, $\overline{AB} = \overline{CD}$), значит, $\overline{AE} = \overline{CF}$ (смысл их одинаков). Но $\overline{ab} = \overline{AE}$, $\overline{cd} = \overline{CF}$ (из прямоугольников $AEba$ и $CFdc$); значит, $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, т. е. проекции геометрически равных векторов на ту же ось геометрически равны между собою. Из чертежа, относящегося к этому доказательству, легко заключить, что проекции вектора на параллельные оси равны между собою (например, на оси AE и xy).

На основании этого свойства можно при проектировании один вектор заменять другим, геометрически равным первому.

§ **42.** Пусть даны какие-нибудь три точки A, B, C. Тогда вектор $\overline{AC}$ называется замыкающим векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ (черт. 51), которые называются составляющими. Пусть проекции этих точек на ось будут A_1, B_1, C_1. Очевидно A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 — проекции векторов AB, BC, AC. А так как $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = 0$, или $\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} = \overline{A_1C_1}$, то *сумма проекций составляющих векторов равна проекции замыкающего вектора.*

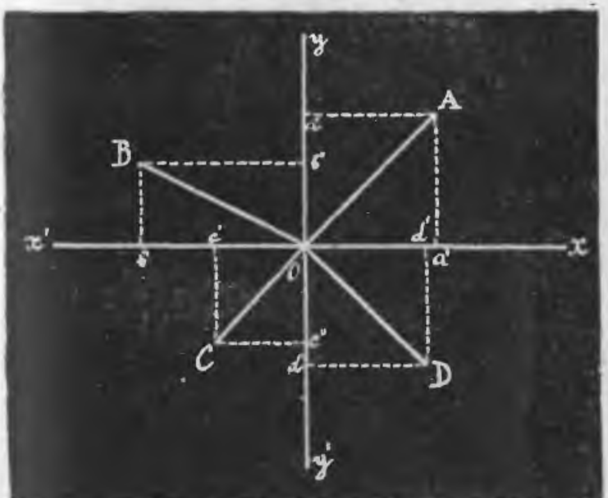


Черт. 51.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЩЕМ ВИДЕ.

§ **43.** Обобщим теперь понятие о тригонометрических функциях. Допустим для определенности, что одна из сторон выбранного нами угла расположена горизонтально и направлена вправо. Продолжим эту сторону, приняв ее за ось и проведем через вершину угла другую ось, перпендикулярную к первой. Получим оси xx и yy. На первой оси примем за положительное — направление вправо, а на вертикальной — направление вверх.

Этими осями вся плоскость разделяется на четыре части xOy, yOx', $x'Oy'$, $y'Ox$, которые называют четвертями (или квадрантами): xOy — первая четверть, yOx' — вторая четверть, $x'Oy'$ — третья четверть, $y'Ox$ — четвертая четверть. Точку O пересечения осей назовем началом. Подвижный радиус, образующий различные углы с Ox, будем называть радиусом - вектором и обозначать буквой R. При этом будем принимать за начало радиуса вектора точку O, а радиус - вектор будем считать всегда положительным, т. е. будем приписывать R знак плюс, как бы радиус-вектор ни был расположен.



Черт. 52.

Радиусы-векторы $\overline{OA}$. $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и OD образуют с Ox углы, лежащие соответственно в первой, второй, третьей и четвертой четверти. $\overline{Oa'}$, $\overline{Ob'}$, $\overline{Oc'}$ и $\overline{Od'}$ — их проекции на ось Ox (горизонтальные проекции); $\overline{Oa''}$, $\overline{Ob''}$, $\overline{Oc''}$, $\overline{Od''}$ — их проекции на ось Oy (вертикальные проекции). Так как точка O — начало радиуса-вектора и лежит на обеих осях, то O служит также началом всех проекций радиуса-вектора на ту и на другую ось. Поэтому каждая из проекций положительна или отрицательна, смотря по тому, лежит ли ее конец правее или левее, или же выше или ниже точки O. Проекции $\overline{Oa'}$, $\overline{Od'}$, $\overline{Oa''}$, $\overline{Ob''}$ — положительны, остальные отрицательны. Условимся обозначать проекцию на ось Ox буквой x, а на ось Oy буквой y.

Если $\underline{xx}$ и $\underline{yy}$ — оси координат, то x и y — координаты той точки, в которую проведен радиус-вектор.

Чтобы найти обе проекции какого-нибудь из радиусов-векторов (OA, OB, OC, OD), достаточно рассматривать только один из треугольников, полученных при проектировании. Действительно, например, вектор $\overline{Ob''}$ равен вектору $\overline{b'B}$, поэтому нет надобности в треугольнике OBb'', а можно ограничиться рассмотрением треугольника $Ob'B$; здесь $\overline{OB}$ — радиус-вектор, $\overline{Ob'}$ — его проекция на ось Ox, $\overline{b'B}$ — его проекция на Oy.

§ 44. Для острого угла $xOA = \varphi$, на основании определений, данных в первой части, имеем:

$$\sin\varphi = \frac{\overline{a'A}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{Oa''}}{\overline{OA}}; \quad \cos\varphi = \frac{\overline{Oa'}}{\overline{OA}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\overline{a'A}}{\overline{Oa'}} = \frac{\overline{Oa''}}{\overline{Oa'}};$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\overline{Oa'}}{\overline{a'A}} = \frac{\overline{Oa'}}{\overline{Oa''}}; \quad \sec\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{Oa'}}; \quad \csc\varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{a'A}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{Oa''}}.$$

Введя для радиуса-вектора и его проекций обозначения R, x и y, получаем:

$$\sin\varphi = \frac{y}{R}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{R}; \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x};$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y}; \quad \sec\varphi = \frac{R}{x}; \quad \csc\varphi = \frac{R}{y}.$$

Обобщая эти равенства, справедливые для углов первой четверти, можно дать следующие определения для тригонометрических функций любых углов.

Синусом угла называется отношение проекции радиуса-вектора на (вертикальную) ось Oy к самому радиусу-вектору.

Косинусом угла называется отношение проекции радиуса-вектора на (горизонтальную) ось Ox к самому радиусу-вектору.

Тангенсом угла называется отношение проекции радиуса-вектора на (вертикальную) ось Oy к проекции его на (горизонтальную) ось Ox.

Котангенсом угла называется отношение проекции радиуса-вектора на (горизонтальную) ось Ox к проекции его на (вертикальную) ось Oy.

Секансом угла называется отношение радиуса-вектора к проекции его на (горизонтальную) ось Ох.

Косекансом угла называется отношение радиуса-вектора к проекции его на (вертикальную) ось Оу.

Приведенные соотношения можно переписать в таком виде:

$$y = R \sin \varphi; \quad x = R \cos \varphi; \quad y = x \operatorname{tang} \varphi$$

$$x = y \operatorname{ctg} \varphi; \quad R = x \sec \varphi; \quad R = y \csc \varphi.$$

Из этих соотношений чаще других встречается первое и второе.

Если x и y — координаты, то эти соотношения можно формулировать так.

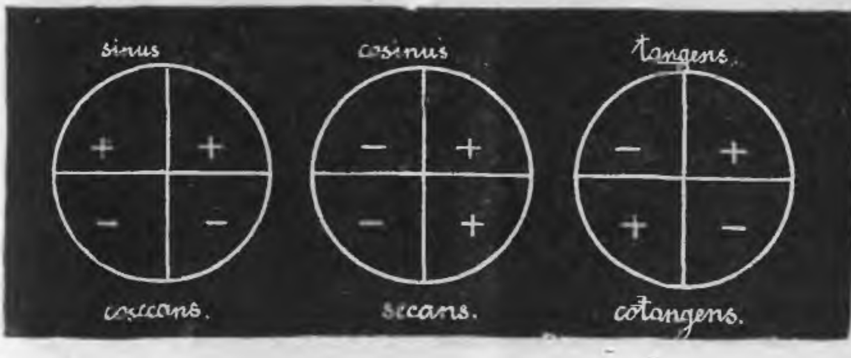
Ордината точки равна произведению радиуса-вектора на синус угла, образованного им с положительным направлением оси х-ов.

Абсцисса точки равна произведению радиуса-вектора на косинус того же угла.

В виду того, что угол и соответствующая ему дуга измеряются одним и тем же числом градусов, можно говорить не только о функции угла, но и о функции дуги.

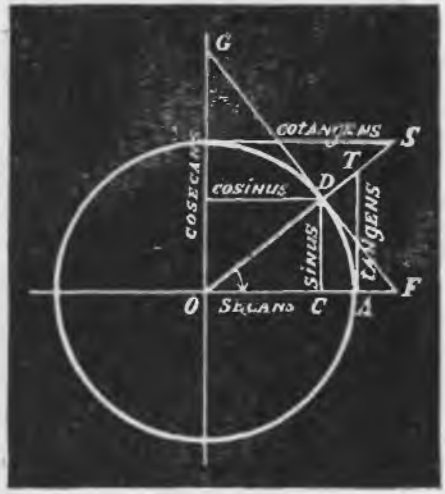
§ 45. Принимая во внимание, что R считается всегда положительным, выводим следующие заключения. Синус и косеканс имеют тот же знак, как (вертикальная) проекция на ось Oy. Знак косинуса и секанса совпадает со знаком (горизонтальной) проекции на ось Ox. Наконец, тангенс и котангенс положительны или отрицательны, смотря по тому, имеют ли обе проекции одинаковые или различные знаки.

Так как y имеет знак минус для углов (дуг) третьей и четвертой четверти, то синус и косеканс отрицательны в третьей и четвертой четверти; так как x имеет знак минус для углов (дуг) второй и третьей четверти, то косинус и секанс отрицательны во второй и третьей четверти. Наконец, тангенс и котангенс отрицательны во второй и четвертой четверти: только в этих четвертях проекции имеют различные знаки. Эти результаты удобно записать в том виде, как они представлены на чертеже 53.

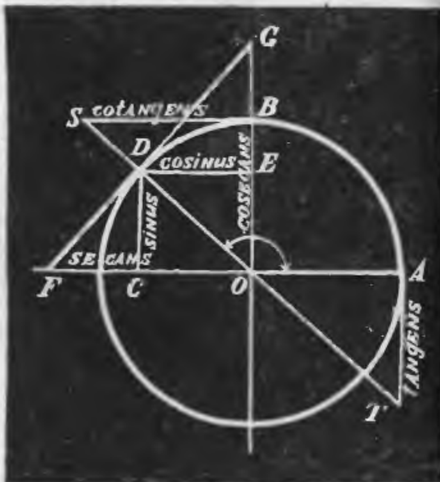


Черт. 53.

§ 46. Чтобы изобразить значения тригонометрических функций угла φ, сделаем построения, приведенные на чертежах 54, 55, 56 и 57. Будем обозначать через CD, OE, OC, ED, AT, BS, OF и OG не самые отрезки, а векторы,



Черт. 54.

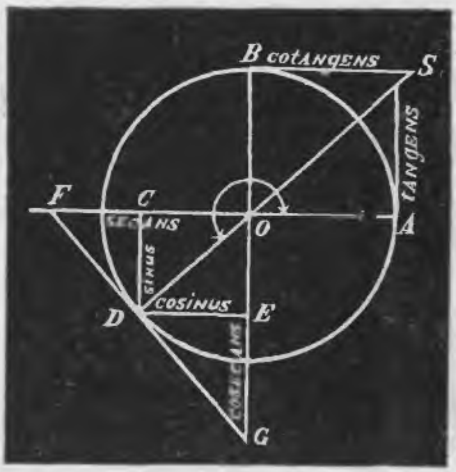


Черт. 55.

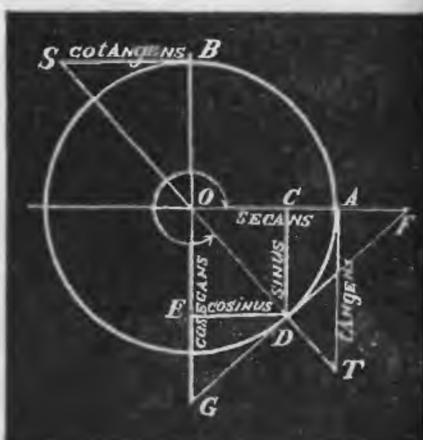
т. е. будем приписывать им определенные знаки Тогда по отношению к этим чертежам будут иметь место соотношения

$$\sin\varphi = \frac{OE}{R} = \frac{CD}{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{ED}{R} = \frac{OC}{R}$$



Черт. 56



Черт. 57.

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{CD}{OC}=\frac{AT}{R}.$$

Последнее равенство следует из подобия треугольников OCD и OAD и справедливо не только численно, но и по знаку: для углов первой и третьей четверти CD и OC имеют одинаковые знаки и AT — положительно; для углов второй и четвертой четверти CD и OC имеют противоположные знаки и AT — отрицательно.

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{OC}{CD}=\frac{BS}{R}.$$

Это равенство следует из подобия треугольников OCD и OBS; оно, как легко убедиться, справедливо не только численно, но и по знаку. (В первой и третьей четверти BS положительно, во второй и четвертой — отрицательно.)

Подобным же образом из подобия треугольников OCD и ODF и треугольников OCD и ODF:

$$\sec\varphi=\frac{OD}{OC}=\frac{OF}{R}$$

$$\csc\varphi=\frac{OD}{CD}=\frac{OG}{R}.$$

Справедливость этих равенств по знаку также легко проверить.

Если принять радиус равным единице, то из приведенных равенств следует, что отмеченные на чертежах векторы действительно дают значения приписанных при них функций угла φ.

Примечание. При выполнении этих построений надо тангенс всегда откладывать на касательной, проведенной через начало дуги, а котангенс на касательной, проведенной через конец дуги в 90°.

Эти чертежи выясняют происхождение названий тангенс (касательная) и секанс (секущая); а синус является здесь полухордой. В прежнее время понятия тригонометрических функций относили к этим линиям на круге, не принимая даже радиуса равным единице.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО УГЛА.

§ 47. Легко показать, что восемь соотношений, связывающих тригонометрические функции одного угла, выведенные в первой части для острого угла (см. § 18), остаются справедливыми для любого угла. Так как R, x и y, т. е. радиус-вектор и обе проекции его, образуют прямоугольный треугольник, каков бы ни был угол (как это видно на чертежах 54, 55, 56 и 57 для угла второй и четвертой четверти), то

$$x^2+y^2=R^2$$

независимо от знаков x и y, так как оба возвышены в квадрат. А отсюда (как это подробно объяснено в § 18), деля последовательно на R^2, x^2 и y^2 и пользуясь определениями функций, получаем:

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\operatorname{tg}^2\varphi+1=\sec^2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$\operatorname{ctg}^2\varphi+1=\csc^2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Из тождеств

$$\frac{y}{R}\cdot\frac{R}{y}=1;\quad \frac{x}{R}\cdot\frac{R}{x}=1;\quad \frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1$$

имеем:

$$\sin\varphi \cdot \csc\varphi = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\cos\varphi \cdot \sec\varphi = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Наконец, тождества

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{R} : \frac{x}{R} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} = \frac{x}{R} : \frac{y}{R}$$

дают:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Из этих формул, как и в первой части, получим выражения всех тригонометрических функций в зависимости от какой-нибудь одной, с той, однако, разницей, что при извлечении корня теперь уже нет основания откидывать знак минус, так как каждая из тригонометрических функций может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Поэтому, например, выражения всех функций через тангенс следующие:

$$\sec\varphi = \pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}; \quad \cos\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}};$$

$$\sin\varphi = \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}};$$

$$\csc\varphi = \pm\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi}; \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

(Подобным же образом видоизменяются выражения тригонометрических функций через синус.) Соответственно этому задача: по данному значению функции найти значения других функций (задача, имевшая в первой части одно решение) оказывается уже не вполне определенной. Так, например, если задать

$$\sin\varphi = \frac{3}{5},$$

то получаем

$$\csc\varphi = \frac{5}{3}; \ \cos\varphi = \pm\frac{4}{5}; \ \sec\varphi = \pm\frac{5}{4}; \ \operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{3}{4}; \ \operatorname{ctg}\varphi = \pm \text{[illegible]}$$

Причина этого, конечно, та, что по данному, например, значению синуса $\frac{3}{5}$ нельзя знать, лежит ли угол в первой или во второй четверти; если φ в первой четверти (например, $0° < \varphi < 90°$), то косинус, тангенс, котангенс и секанс положительны; если же φ во второй четверти (например, $90° < \varphi < 180°$), то они отрицательны; косеканс, однако, наверное положителен.

ИЗМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

§ 48. Так как начальный и конечный радиусы углов, имеющих одинаковый геометрический вид, расположены одинаково, то очевидно, что проекции радиуса-вектора для этих углов те же самые, а потому значения тригонометрических функций этих углов равны между собой. Отсюда формулы

$$\sin(360°k+\varphi)=\sin\varphi;\ \cos(360°k+\varphi)=\cos\varphi \text{ и т. д.}$$

для всех тригонометрических функций (здесь k — произвольное целое число, положительное, отрицательное или равное нулю).

Заменив в этих формулах φ через $-\varphi$ (это можно сделать, так как φ произвольный угол), найдем

$$\sin(360°k-\varphi)=\sin(-\varphi);\ \cos(360°k-\varphi)=\cos(-\varphi) \text{ и т. д}$$

Давая k последовательные целые значения, получим ряд углов, последовательно отличающихся друг от друга на 360°, для которых значения тригонометрических функций остаются без изменения.

§ 49. Обратим внимание на значения тригонометрических функций *углов в 90°, 180°, 270°, 360°. Так как для угла в 90° проекция на* ось Oy (вертикальная проекция) совпадает с радиусом-вектором и притом положительна, а проекция на ось Ox (горизонтальная) равна нулю, то $\sin 90°=\frac{R}{R}=1$, $\cos 90°=\frac{0}{R}=0$, $\text{ctg}\ 90°=\frac{0}{R}=0$, $\csc 90°=$ $=\frac{R}{R}=1$.

Для тангенса и секанса получаются выражения

$$\text{tg}\ 90°=\frac{R}{0};\ \sec 90°=\frac{R}{0},$$

но так как деление на нуль не имеет смысла, то для тангенса и секанса в этом случае не получим никакого определенного значения. Следует, однако, заметить, что для острых углов, достаточно близких к углу в 90°, тангенс и секанс делаются сколь угодно большими (как частное от деления конечного числа, не превосходящего R, на бесконечно-малое), оставаясь положительными. Если же рассматривать углы второй четверти, то для углов, достаточно близких к углу в 90°, тангенс и секанс делаются по абсолютной величине сколь угодно большими, сохраняя отрицательные значения. Этот результат записывают иногда так:

$$\text{tg}\ 90°=\pm\infty,\ \sec 90°=\pm\infty.$$

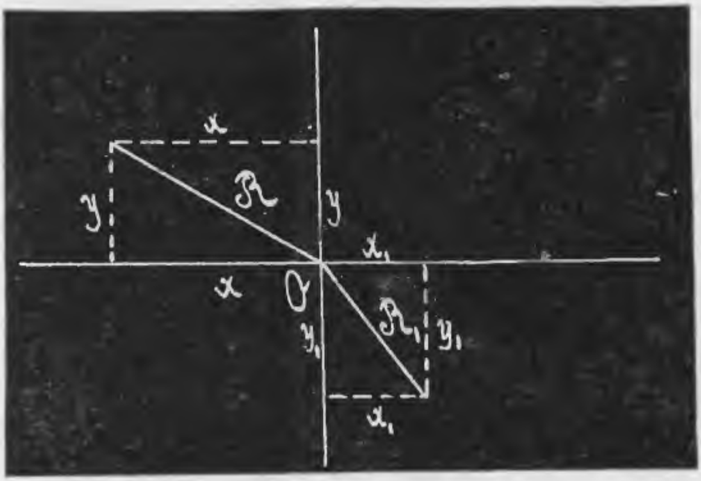
Знак $+$, как получающийся при возрастании угла, поставлен раньше знака минуса.

Для угла в 180° имеем:

$$\sin 180°=\frac{0}{R}=0;\ \cos 180°=\frac{-R}{R}=-1;\ \text{tg}\ 180°=\frac{0}{R}=0;$$

$$\sec 180°=\frac{R}{-R}=-1.$$

Для котангенса и косеканса не получается определенных значений, но значения этих функций для углов второй четверти, приближающихся к 180°, делаются по абсолютной величине сколь угодно



Черт. 58.

большими, при чем котангенс остается отрицательным, а косеканс положительным; для углов третьей четверти, приближающихся к углу в 180°, и котангенс и косеканс также возрастают неограниченно по абсолютной величине, но котангенс сохраняет положительные значения, а косеканс — отрицательные. Поэтому пишут $\operatorname{ctg} 180° = \mp \infty$; $\csc 180° = \pm \infty$.

Продолжая подобные же рассуждения для углов в 270° и 360°, найдем:

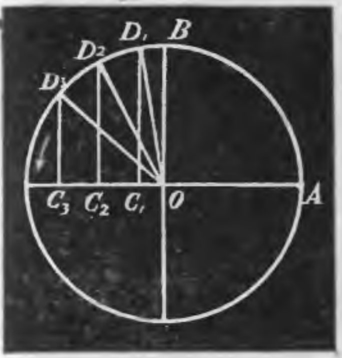
$$\sin 270° = -1;\ \cos 270° = 0;\ \operatorname{tang} 270° = \pm \infty;\ \operatorname{ctg} 280° = 0;$$
$$\sec 270° = \mp \infty;\ \csc 270° = -1.$$
$$\sin 360° = 0;\ \cos 360° = 1;\ \operatorname{tang} 360° = 0;\ \operatorname{ctg} 360° = \mp \infty;$$
$$\sec 360° = 1;\ \csc 360° = \mp \infty.$$

А так как тригонометрические функции угла в 360° равны тригонометрическим функциям 0°, то

$$\sin 0° = 0;\ \cos 0° = 1;\ \operatorname{tg} 0° = 0;\ \operatorname{ctg} 0° = \mp \infty;\ \sec 0° = 1;$$
$$\csc 0° = \mp \infty.$$

При переходе угла через 90° от углов первой четверти к углам второй четверти тангенс и секанс переходят от неограниченно-больших положительных к неограниченно-большим отрицательным значениям. Такой скачок функции (когда она переходит от одного значения к другому, не приобретая промежуточных значений) называют *разрывом функции.* Тангенс и секанс претерпевают разрывы для углов в 90° и 270°, а котангенс и косеканс для углов в 0° и 180°.

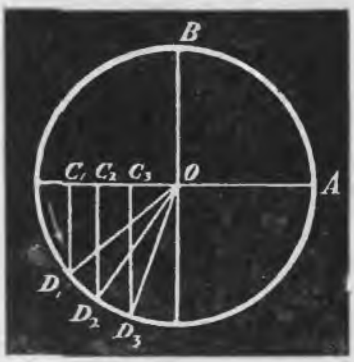
§ 50. Рассматривая углы, лежащие во второй четверти (черт. 59), замечаем, что по мере увеличения угла, при постоянном R, y убывает, а x, оставаясь отрицательным, численно возрастает (т. е. убывает). Поэтому *синус* $\left(\text{равный } \frac{y}{R}\right)$ во второй четверти *убывает*, *косинус* $\left(\text{равный } \frac{x}{R}\right)$, будучи отрицательным, *численно возрастает*, т. е. убывает. Синусы дуг AD_1, AD_2, AD_3 изображены векторами C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, а косинусы их векторами OC_1, OC_2, OC_3. Тангенс $\left(\text{равный } \frac{y}{x}\right)$ во второй четверти отрицателен и численно убывает (частное численно убывающего ряда чисел на численно возрастающий ряд чисел), т. е. возрастает.



Черт. 59.

Котангенс, как величина, обратная тангенсу $\left(\text{ctg } \varphi = \frac{1}{\text{tg } \varphi}\right)$, конечно, убывает: он возрастает по абсолютной величине, оставаясь отрицательным.

Совершенно таким же образом получаем, что в третьей четверти по мере возрастания угла (черт. 60) x возрастает, убывая по абсолютной величине, а y убывает, возрастая по абсолютной величине. Поэтому в третьей четверти синус убывает (возрастает численно, оставаясь отрицательным), косинус возрастает (убывает численно, оставаясь отрицательным), тангенс возрастает (положителен), котангенс убывает.



Черт. 60.

В четвертой четверти (черт. 61) x положителен и по мере возрастания угла возрастает, y же отрицателен и убывает по абсолютной величине, значит y возрастает. Поэтому синус в четвертой четверти возрастает (численно убывает), косинус возрастает (положителен), тангенс возрастает, убывая численно, и котангенс убывает, возрастая численно.

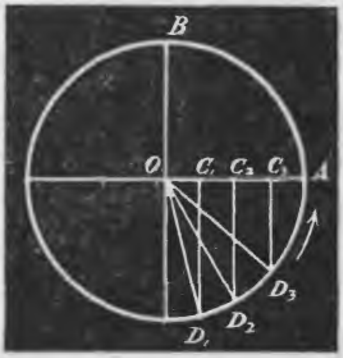
Изменений секанса и косеканса мы рассматривать не будем. С одной стороны, эти функции употребляются реже других, а с другой стороны, значения их обратны значениям косинуса и синуса, и поэтому секанс и косеканс убывают или возрастают, смотря по тому, возрастают или убывают косинус и синус.

Запишем полученные результаты в следующей таблице.

Как видно из этой таблицы, значения синуса и косинуса то возрастают, то убывают, колеблясь между границами -1 и $+1$, т. е.

Функция \ Угол.	0°	От 0° до 90°	90°	От 90° до 180°	180°	От 180° до 270°	270°	От 270° до 360°	360°
Sinus . .	0	+ возр. +	+ 1	+ убыв. +	0	− убыв. −	− 1	− возр. −	0
Cosinus .	+ 1	+ убыв. +	0	− убыв. −	− 1	− возр. −	0	+ возр. +	+ 1
Tangens .	0	+ возр. +	$\pm\infty$	− возр. −	0	+ воз . +	$\pm\infty$	− возр. −	0
Cotangens	$\mp\infty$	+ убыв. +	0	− убыв. −	$\mp\infty$	+ убыв. +	0	− убыв. −	$\mp\infty$

значения их по абсолютной величине не больше единицы. Напротив того, тангенс и котангенс могут принимать всевозможные значения, как положительные, так и отрицательные.



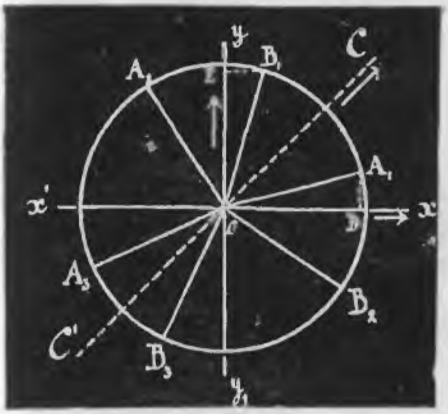
Черт. 61.

Замечательно, что функция тангенс, принимая через каждые 180° те же самые значения, всегда возрастает. Это возможно только при существовании разрывов (которые тангенс претерпевает при углах в 90°, 270° и т. д.). Действительно, если тангенс достиг некоторого определенного значения (например, $+1$), то для того, чтобы он снова приобрел (прошел через) то же самое значение ($+1$), все возрастая (ведь тангенс всегда возрастает), необходимо, чтобы он раньше вернулся к значениям, меньшим данного ($+1$), не проходя через него ($+1$), т. е. чтобы произошел разрыв функции. Функция котангенс также приобретает через 180° те же значения и всегда убывает: она претерпевает разрывы при углах в 0°, 180° и т. д.

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ.

§ 51. Обобщим теперь справедливость формул, связывающих тригонометрические функции *взаимно-дополнительных углов*. (Взаимно-дополнительными называются углы, сумма которых равна 90°). Положим, что мы имеем некоторый угол (черт. 62), обозначенный на чертеже $xOA = \varphi$ (примеры: $xOA_1 = 12°$, $xOA_2 = 124°$, $xOA_3 = 204°$), дополнительный же угол $xOB = 90° - \varphi$ (примеры: $xOB_1 = 90° - 12° = 78°$, $xOB_2 = 90° - 124° = -34°$, $xOB_3 = 90° - 204° = -114°$). Эти углы можно выразить как углы $45° - \alpha$ и $45° + \alpha$, т. е. один получается из угла в 45° прибавлением α, другой вычитанием α. Другими словами, если проведем $C'C$, составляющую с $x'x$ угол в $+45°$, то OB_1 составляет с OC угол, равный α, OA_1 составляет с OC угол $-\alpha$. (Примеры: $12° = 45° - 33°$, $78° = 45° + 33°$; $-34° = 45° - 79°$, $124° = 45° + 79$; $-114° = 45° - 159°$; $204° = 45° + 159°$), при чем OB_1 и

OA_1 расположены по разные стороны и симметричны относительно OC. Отсюда заключаем, что при повертывании чертежа вокруг оси $C'C$, OB_1 займет положение OA_1 и обратно. При этом Oy займет положение Ox и обратно, а Ox' займет положение Oy' и обратно, т. е. вертикальная (на ось Oy) проекция одного радиуса-вектора совпадает с горизонтальной (на ось Ox) проекцией другого радиуса вектора и обратно, сохраняя тот же знак: другими словами, при переходе от угла $90° - \varphi$ к углу φ надо y заменить буквой x и обратно, не меняя знака. Значит, синус одного угла $\left(\frac{y}{R}\right)$ равен косинусу $\left(\frac{x}{R}\right)$ другого угла, косинус одного равен синусу другого и т. д.

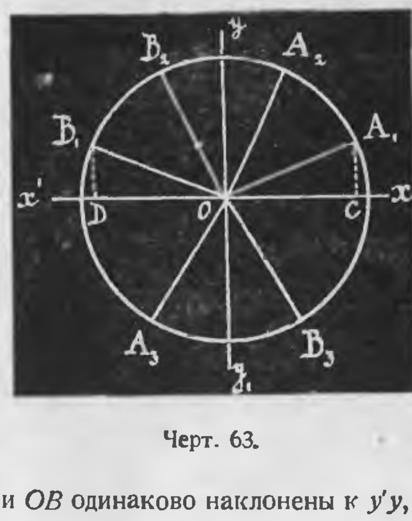


Черт. 62.

$$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi;\ \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi;\ \mathrm{tg}(90° - \varphi) = \mathrm{ctg}\,\varphi;$$
$$\mathrm{ctg}(90° - \varphi) = \mathrm{tg}\,\varphi \ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\mathrm{I})$$

Ясно, что вывод этих формул сделан для любого значения угла φ.

§ 52. Кроме выведенных формул, связывающих функции углов, сумма которых равна 90°, мы выведем еще формулы для сравнения функций углов, сумма которых равна 180°. (Углы, сумма которых равна 180°, называются *взаимно-пополнительными.*) Пусть дан (черт. 63) некоторый угол $xOA = \varphi$ (примеры: $xOA_1 = 23°$, $xOA_2 = 66°$, $xOA_3 = 238°$) и пополнительный к нему угол $xOB = 180° - \varphi$ (примеры: $xOB_1 = 180° - 23° = 157°$, $xOB_2 = 180° - 66° = 114°$, $xOB_3 = 180° - 238° = -58°$). Эти два угла можно выразить, как углы $90° - \alpha$ и $90° + \alpha$ (сумма их равна 180°), т. е. один получается из угла в 90° прибавлением α, другой вычитанием α. Значит, Oy составляет с OB угол равный α, а с OA угол $-\alpha$. (Примеры: $23° = 90° - 67°$, $157° = 90° + 67°$, $66° = 90° - 24°$, $114° = 90° + 24°$; $-58° = 90° - 148°$, $238° = 90° + 148°$.) Таким образом OA и OB образуют с Oy равные углы разных знаков, иными словами, — OA и OB одинаково наклонены к $y'y$, но лежат по разные стороны от yy: чертеж симметричен относительно $y'y$. При повертывании чертежа вокруг $y'y$ OB займет положение,

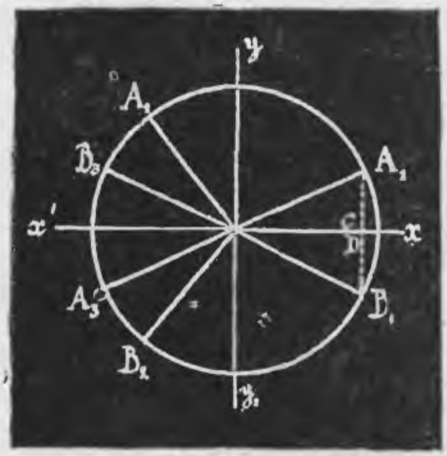


Черт. 63.

которое занимало OA, $y'y$ останется в том же положении, Ox' и Ox обменяются местами, т. е. вертикальные (на ось $y'y$) проекции обоих радиусов-векторов совпадают, а горизонтальные (на ось $x'x$) проекции отличаются знаком. Поэтому при переходе от угла $180° - \varphi$ к углу φ надо y оставлять без перемены, а у x переменять знак. Поэтому синус (и косеканс) не изменят своего значения (в их выражения не входит горизонтальная проекция), а другие функции изменят знак. Итак,

$$\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi\ ^{1)};\quad \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi\ ^{1)};$$
$$\operatorname{tg}(180° - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi;\quad \operatorname{ctg}(180° - \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi \quad \ldots (II)$$

§ 53. Наконец, выведем еще связь между функциями углов, отличающихся друг от друга только знаком. Пусть задан (черт. 64) некоторый угол $xOA = \varphi$ (примеры: $xOA_1 = 25°$, $xOA_2 = 128°$, $xOA_3 = 205°$) и угол $-\varphi$ (примеры: $xOB_1 = -25°$, $xOB_2 = -128°$, $xOB_3 = -205°$), полученный вращением начального радиуса-вектора в противоположную сторону. OA и OB образуют с xx равные углы, но расположенные по разные стороны от $x'x$. Следовательно, чертеж симметричен относительно $x'x$. При повертывании чертежа вокруг оси $x'x$, Oy и Oy примут соответственно положения Oy' и Oy, а Ox и Ox' останутся неподвижными, т. е. вертикальная (на ось $y'y$) проекция одного радиуса-вектора заменяется вертикальной же проекцией другого радиуса-вектора с обратным знаком, а горизонтальные (на ось $x'x$) проекции обоих радиусов-векторов совпадают. Поэтому при переходе от угла $-\varphi$ к углу φ надо заменить y через $-y$, а x оставить без изменения. При этом значение косинуса (и секанса) не изменится (в их выражения входит только горизонтальная проекция), а остальные функции изменят только знак. Значит,



Черт. 64.

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi;\quad \cos(-\varphi) = \cos\varphi;\quad \operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi;$$
$$\operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (III$$

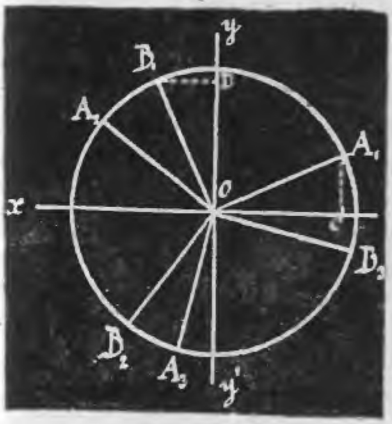
Эти формулы можно переписать, прибавляя к углу, написанному в первой части 360°, еще (см. § 48) в таком виде:

$$\sin(360° - \varphi) = -\sin\varphi;\quad \cos(360° - \varphi) = \cos\varphi;\quad \operatorname{tg}(360° - \varphi) =$$
$$= -\operatorname{tg}\varphi;\quad \operatorname{ctg}(360° - \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi \quad \ldots\ldots (IV)$$

---

[1]) Эти формулы были уже приведены в первой части, где они были приняты по другим соображениям (см. §§ 24 и 25).

§ 54. Подобным же образом выведем формулы, связывающие тригонометрические функции углов, разность которых равна 90°. Положим (черт. 65), имеем некоторый угол $xOA = \varphi$ (примеры: $xOA_1 = 24°$, $xOA_2 = 144°$, $xOA_3 = 255°$) и угол $xOB = 90° + \varphi$ (примеры: $xOB_1 = 114°$, $xOB_2 = 234°$, $xOB_3 = 345°$). Если повернуть чертеж в отрицательном смысле (т. е. по часовой стрелке) на 90°, то OB займет то положение, которое занимало OA, Oy и Oy' займут соответственно положения Ox и Ox', а Ox и Ox' перейдут соответственно в положения Oy' и Oy. Следовательно, вертикальная (на ось Oy) проекция радиуса-вектора OB совгадает с горизонтальной проекцией OA, а горизонтальная проекция OB заменится вертикальной проекцией OA, взятой с обратным знаком. Значит, при переходе от угла $90° + \varphi$ к углу φ надо заменить y через x, а x через $-y$. Поэтому синус $\left(\frac{y}{R}\right)$ заменяется косинусом $\left(\frac{x}{R}\right)$, а косинус $\left(\frac{x}{R}\right)$ синусом с обратным знаком $\left(-\frac{y}{R}\right)$ и т. д.



Черт. 65.

$$\sin(90° + \varphi) = \cos\varphi;\ \cos(90° + \varphi) = -\sin\varphi;\ \operatorname{tg}(90° + \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi;$$
$$\operatorname{ctg}(90° + \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (V)$$

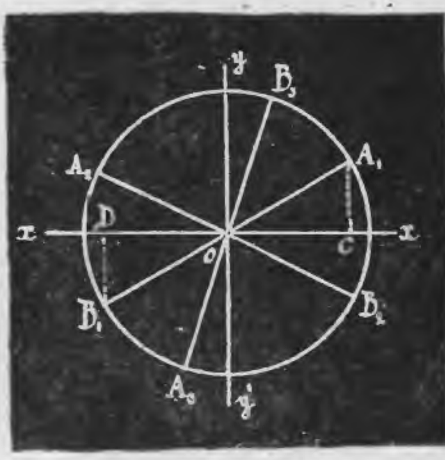
§ 55. Теперь сравним между собою функции углов, разность которых равна 180°. Положим, имеем (черт. 66) некоторый угол $xOA = \varphi$ (примеры: $xOA_1 = 29°$, $xOA_2 = 154°$, $xOA_3 = 255°$) и угол $xOB = 180° + \varphi$ (примеры: $xOB_1 = 209°$, $xOB_2 = 334°$, $xOB_3 = 435°$). Чтобы радиус-вектор OB принял положение OA, надо повернуть чертеж вокруг точки O в отрицательном смысле (т. е. по часовой стрелке) на 180°. Тогда Ox, Oy, Ox', Oy' займут соответственно положения Ox', Oy', Ox и Oy, т. е. обе проекции меняют только свой знак. При переходе от угла $180° + \varphi$ к углу φ следует x и y заменить через $-x$ и y. Поэтому синус и косинус (в выражения которых проекции входят только в числителе) переменяют знак, а тангенс и котангенс (в которых и числитель и знаменатель переменяют знак) остаются без перемены.

Итак,

$$\sin(180° + \varphi) = -\sin\varphi;\ \cos(180° + \varphi) = -\cos\varphi;\ \operatorname{tg}(180° + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi;\ \operatorname{ctg}(180° + \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi \ . \ . \ (VI)$$

Аналогичным образом могут быть выведены формулы для перехода от угла

$270° - \varphi$ и $270° + \varphi$ к углу φ.



Черт. 66.

§ 56. Пользуясь формулами

I, II, III и принимая во внимание, что они справедливы для любого угла φ, легко получить формулы для углов $90^\circ + \varphi$, $180^\circ + \varphi$, $270^\circ - \varphi$, $270^\circ + \varphi$.

На основании формул I и III:

$$\sin(90^\circ + \varphi) = \sin[90^\circ - (-\varphi)] = \cos(-\varphi) = \cos\varphi$$

Подобным же образом

$$\cos(90^\circ + \varphi) = -\sin\varphi;\quad \operatorname{tg}(90^\circ + \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi;$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ + \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi. \tag{VIa}$$

На основании формул II и III:

$$\sin(180^\circ + \varphi) = \sin[180^\circ - (-\varphi)] = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi.$$

Подобным же образом:

$$\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos\varphi;\quad \operatorname{tg}(180^\circ + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi;$$
$$\operatorname{ctg}(180^\circ + \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi. \tag{VIb}$$

На основании формул V и II:

$$\sin(270^\circ - \varphi) = \sin[90^\circ + (180^\circ = \varphi)] =$$
$$= \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi.$$

Подобным же образом:

$$\cos(270^\circ - \varphi) = -\sin\varphi;\quad \operatorname{tg}(270^\circ - \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi;$$
$$\operatorname{ctg}(270^\circ - \varphi) = \operatorname{tg}\varphi. \tag{VII}$$

На основании формул V и VI:

$$\sin(270^\circ + \varphi) = \sin[90^\circ + (180^\circ + \varphi)] =$$
$$= \cos(180^\circ + \varphi) = -\cos\varphi.$$

Подобным же образом:

$$\cos(270^\circ + \varphi) = \sin\varphi;\quad \operatorname{tg}(270^\circ + \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi;$$
$$\operatorname{ctg}(270^\circ + \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi. \tag{VIII}$$

§ 57. Формулы, выведенные в последних параграфах (они носят название формул приведения), легко запомнить, заметив следующее. Во-первых, наименование функции меняется, если в выражение угла входит 90° или 270° (формулы: I, V, VII и VIII), если же выражение угла содержит 180°, взятое целое число раз (один раз в формулах II и VI, нуль раз в формулах III и два раза в формулах IV), то наименование остается без изменения. Во-вторых, чтобы решить вопрос о знаке, стоит только мысленно допустить, что φ угол острый, тогда нетрудно сообразить, в какой четверти находится данный угол и соответственно этому поставить знак. Например, $\operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$, наименование сохранено, так как в выражение угла входит 180° целое число раз, а знак изменен на обратный, так как при $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ угол $180^\circ - \varphi$ лежит во второй четверти, а во второй четверти тангенс отрицателен.

При помощи формул приведения легко заменить значение тригонометрической функции любого угла тригонометрической функцией острого угла, не превосходящего 45°. Действительно, во-первых, если имеем функцию отрицательного угла, то заменяем ее при помощи формул (III) функцией положительного угла. Затем, если положительный угол более 360°, то отбрасываем (на основании формул стр. 69) 360° такое целое число раз, чтобы остаток был менее 360°. Далее, от угла четвертой четверти переходим к углу первой четверти при помощи формул для $360° - \varphi$, от угла третьей четверти при помощи формул $180° + \varphi$, от угла второй четверти посредством формул $180° - \varphi$ (или $90° + \varphi$). Наконец, если полученный угол первой четверти превосходит 45°, то остается воспользоваться формулами для дополнительных углов.

Например, $\sin(-650°) = -\sin 650° = -\sin 290° = \sin 70° = \cos 20°$; $\cos 965° = \cos 245° = -\cos 65° = -\sin 25°$.

§ 58. Формулы

$$\operatorname{tg}(180° + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi;\ \operatorname{ctg}(180° + \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi$$

очень важны: они показывают, что значения тангенса и котангенса углов, отличающихся на 180°, равны между собою. Иными словами, значения этих функций повторяются через каждые 180° в той же последовательности. Легко видеть, что нет угла меньшего 180°, обладающего тем же свойством. Действительно, если бы существовал угол $\theta < 180°$, обладающий этим свойством, то можно было бы взять такой острый угол a, чтобы угол $(a + \theta)$ лежал во второй четверти, но тогда тангенсы углов a и $(a + \theta)$ были бы различных знаков, т. е. не равны; следовательно, значения тангенса не повторялись бы через θ градусов. Итак, значения тангенса и котангенса повторяются через каждые 180° в той же последовательности, при чем угол в 180° — наименьший из углов, обладающих этим свойством. Вообще, если θ есть наименьший из углов, имеющих то свойство, что значения тригонометрической функции не изменяются от увеличения угла на θ, то θ называется *периодом этой функции*. Согласно этому определению, угол в 180°, как доказано, есть период тангенса и котангенса.

Легко видеть, что период других тригонометрических функций равен 360°. Действительно, с одной стороны, $\sin(360° + \varphi) = \sin\varphi$; $\cos(360° + \varphi) = \cos\varphi$; $\sec(360° + \varphi) = \sec\varphi$; $\csc(360° + \varphi) = \csc\varphi$; а с другой стороны — нет угла, меньшего 360°, обладающего этим свойством. Если бы такой угол существовал, то и знаки функций (синус, косинус, секанс, косеканс) должны были бы повторяться в той же последовательности через угол меньший 360°, а это не имеет места, как видно из таблицы знаков, приведенной на стр. 65.

О РАДИАНЕ, КАК ЕДИНИЦЕ МЕРЫ УГЛОВ.

§ 59. При изучении тригонометрических функций углы обычно измеряют не в градусах, а в другой мере. Известно, что длина s дуги радиуса R, соответствующей центральному углу в φ градусов, выражается так:

$$s = \frac{2\pi R\varphi}{360}, \text{ откуда } \varphi = \frac{360}{2\pi} \cdot \frac{s}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Так как $\frac{360}{2\pi}$ величина постоянная, то из выражения (1) для φ видно, что величина угла пропорциональна длине дуги и обратно-пропорциональна радиусу. Значит, вообще величину угла можно выразить таким образом:

$$\varphi = k \cdot \frac{s}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Чтобы выразить величину угла в градусах, надо, как показывает формула (1), выразив дугу s и радиус R в одинаковых единицах длины, положить

$$k = \frac{360}{2\pi}.$$

Если бы радиус был выражен в сантиметрах, а длина дуги в дециметрах, то, желая выразить угол в градусах (и имея в виду, что дробь $\frac{s}{R}$ число, в 10 раз меньшее, чем если бы числитель s и R были выражены в дециметрах), следовало бы положить

$$k = \frac{3600}{2\pi}.$$

Чтобы выразить величину угла в прямых углах, если радиус и дуга выражены в одинаковых единицах, (так как прямых углов в 90 раз менее, чем градусов) следует положить:

$$k = \frac{360}{2\pi \cdot 90} = \frac{2}{\pi}.$$

Если принять за единицу угла — угол в 30^0, то (так как число углов в 30°, заключающихся в данном угле, в 30 раз менее числа градусов) следует положить:

$$k = \frac{360}{2\pi \cdot 30} = \frac{6}{\pi}.$$

Как видно из этих примеров, значение числа k, называемого *коэффициентом пропорциональности,* зависит только от выбора единицы угла, единицы длины дуги и единицы длины радиуса, но не зависит от значения угла. Выбрав определенные единицы длины радиуса, длины дуги и угла, найдем некоторое определенное значение для коэффициента пропорциональности. Но и обратно, задавая определенное значение для k и взяв определенную единицу для радиуса и дуги, можно выбрать такую единицу угла, чтобы равенство (2) было удовлетворено. Соотношение (2) между углом, радиусом и дугой приобретает наиболее простой вид, если положить $k=1$. Мы и выбираем новую единицу угла так, чтобы $k=1$, тогда

$$\varphi = \frac{s}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Из этой формулы видно, что $\varphi = 1$, если $s = R$, т. е. за *единицу угла принимают угол, длина дуги которого равна радиусу*. Эту единицу угла называют радианом.

Давая s различные значения, получим из формулы (3) углы, выраженные в радианах, а из формулы (1) те же углы, выраженные в градусах. На основании этого можем составить следующую таблицу:

Длина дуги.	Угол в радианах.	Угол в градусах
R	1	$\frac{360}{2\pi} = 57°17'45''$ (прибл.).
$2\pi R$	2π	$360°$
πR	π	$180°$
$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$90°$
$\frac{\pi R}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	45
$\frac{\pi R}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	30

Так как при выражении угла в радианах длина соответствующей дуги радиуса, равного единице, численно равна числу радианов, то часто говорят о тригонометрической функции дуги. Например, если говорят: синус дуги, равной $\frac{\pi}{4}$, то это все равно, что синус $\frac{\pi}{4}$ радианов или синус 45 градусов.

Следует заметить себе то простое выражение длины дуги, которое получается, если угол выражен в радианах. Формула (3) дает

$$s = R\varphi,$$

т. е. длина дуги равна радиусу, умноженному на угол (число радианов соответствующего угла).

§ 60. Если углы выражены в радианах, то формулы приведения принимают несколько иной вид; так, формула углов или дуг, имеющих одинаковый геометрический вид с углом или дугой x, есть $2k\pi + x$, поэтому

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x; \ \cos(2k\pi + x) = \cos x \text{ и т. д.}$$

Таким же образом

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi; \ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\varphi; \ \sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi;$$

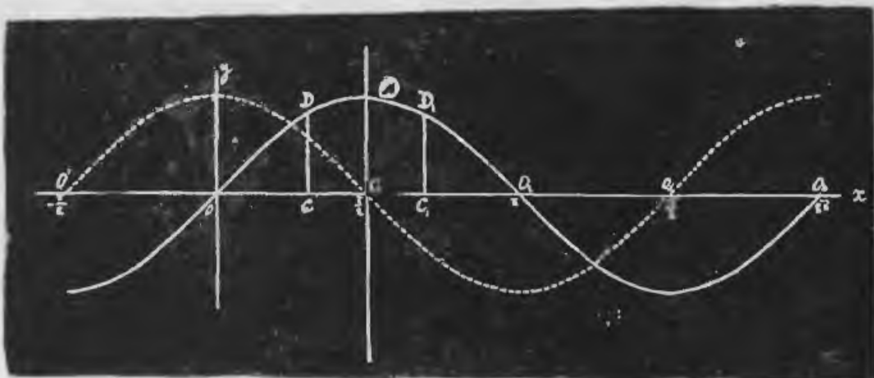
$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi; \ \sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi.$$

Периодом для тангенса и котангенса служит число π, а для остальных тригонометрических функций 2π.

ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

§ 61. Построим графики изменений функций синус, косинус, тангенс и котангенс.

Начнем с синуса Примем некоторую длину за единицу длины и, взяв две взаимно-перпендикулярные оси Ox и Oy (черт. 67), будем



Черт. 67.

откладывать значения углов, выраженных в радианах, по оси Ox, а значения синуса — по вертикальному направлению (по оси Oy), приняв тот же самый отрезок за единицу длины. Принимая во внимание формулу приведения

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi,$$

или (что то же самое)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$\left(\frac{\pi}{2} + \varphi \text{ и } \frac{\pi}{2} - \varphi\right.$ пополнительные$\left.\right)$, заключаем, что значения синусов двух углов, одинаково отличающихся от $\frac{\pi}{2}$, равны между собою (например, CD — синус 50° и C_1D_1 — синус 130°). Значит, график симметричен относительно прямой O_1A, проходящей через точку O_1, отстоящую от O на расстояние $\frac{\pi}{2}$ единицы длины.

Построив график синуса для острых углов, т. е. дугу OA_1, поворотом вокруг оси симметрии O_1A_1 получим дугу A_1O_2. Вспоминая затем формулу

$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi,$$

заключаем, что для получения дальнейшей части графика надо повернуть дугу OA_1O_2 вокруг оси Ox и сдвинуть эту часть направо на π: поворотом вокруг оси Ox меняем знак функции, сдвигом направо на π переходим от угла φ к углу $\pi + \varphi$. Таким образом получаем ветвь O_2O_4. Дуга OO_4 есть график синуса от 0 до 2π. Далее, в силу периодичности, повторяются такие же дуги направо от точки O_4 и налево от точки O; поэтому остается только дугу OO_4 сдвигать направо или налево на 2π.

§ 62. Чтобы построить график косинуса, обратим внимание на равенство

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi.$$

Это равенство показывает, что график косинуса можно получить из графика синуса смещением последнего на $\frac{\pi}{2}$ налево, так как значение косинуса угла φ равно значению синуса угла, превосходящего первый на $\frac{\pi}{2}$. График косинуса приведен на чертеже 67 пунктиром.

§ 63. Построим теперь график изменений тангенса (черт. 68). Сначала построим график тангенса для острых углов $\left(\text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$.

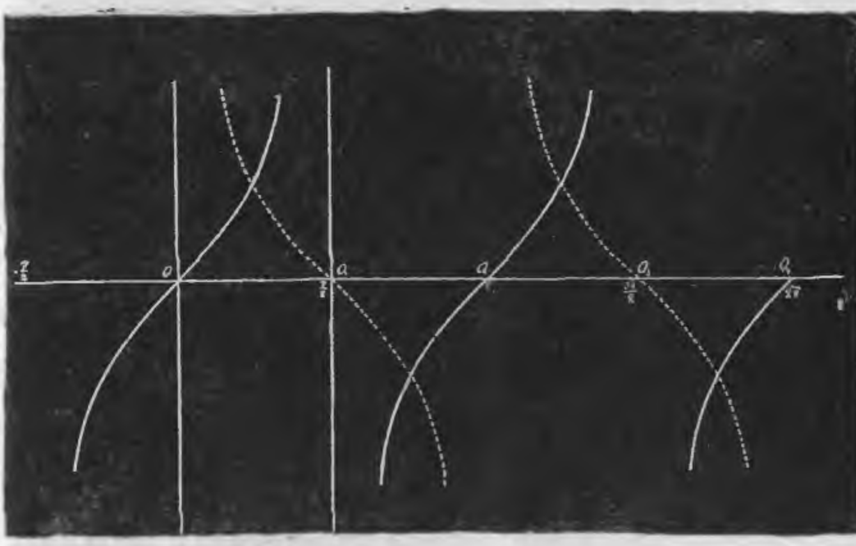
Затем, принимая во внимание равенство

$$\operatorname{tg}(-\varphi)=-\operatorname{tg}\varphi,$$

можем получить график тангенса от $-\frac{\pi}{2}$ до 0; для этого повернем чертеж вокруг оси $x'x$ (этим поворотом меняем знак функции) и потом еще раз вокруг оси $y'y$, чтобы перейти от углов φ к углам $-\varphi$; таким образом из ветви OA_1 получаем ветвь OA_2. Итак, график получен от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Теперь, пользуясь периодичностью тангенса выраженной формулой

$$\operatorname{tg}(\pi+\varphi)=\operatorname{tg}\varphi,$$

легко получить остальные части графика, сдвигая полученную часть на π единиц вправо или влево.



Черт. 68.

§ 64. Остается построить график котангенса. Выполним сначала построение для острых углов $\left(\text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. Затем воспользуемся формулой

$$\operatorname{ctg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi$$

или

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

которая выражает, что котангенсы углов, равноотстоящих от $\frac{\pi}{2}$, равны между собою по абсолютной величине, но имеют различные знаки, поэтому повернем чертеж вокруг оси $x'x$ (этим поворотом изменяем знак функции) и затем еще раз вокруг вертикальной оси $z'z$, проходящей через точку O_1, соответствующую углу $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{последним поворотом переходим от углов } \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ к углам } \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$. Таким образом, при помощи дуги OB_1 получим дугу O_1B_2. Наконец, остается, пользуясь периодичностью котангенса, выраженной формулой

$$\operatorname{ctg}(\pi + \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi,$$

сдвигать полученный график на π единиц вправо или влево. График котангенса представлен на черт. 68 пунктиром.

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ.

§ 65. Для дальнейшего изучения тригонометрических функций докажем предварительно теорему:

Проекция вектора на ось равна алгебраическому значению вектора, умноженному на косинус угла, образованного положительными смыслами оси, на которой отложен вектор, и той оси, на которую проектируют.

Обозначим начало вектора буквой P, конец буквой Q. Проекцию вектора обозначим pq (p — проекция точки P, q — проекция точки Q). Пусть α будет угол, составленный положительными смыслами осей (одной, на которой отложен вектор другой (Ox), на которую проектируют.

Черт 69 a.

При доказательстве различаем два случая.

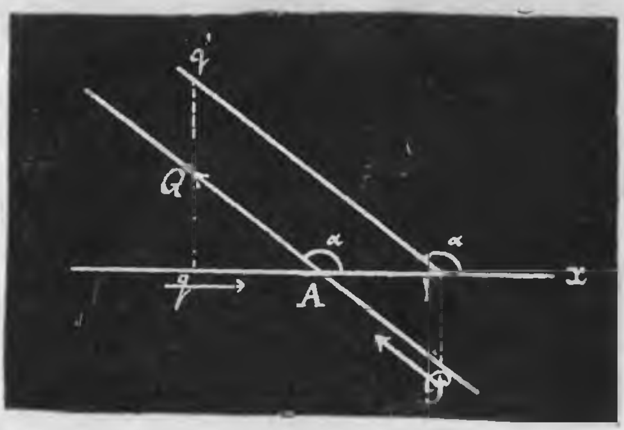
1 случай. Смысл вектора совпадает с смыслом оси, на которой он отложен, т. е. вектор $\overline{PQ}$ положителен (черт. 69 a, b, c, d). Проведем из точки p вектор pq', геометрически равный вектору $\overline{PQ}$. Вектор $\overline{pq'}$ составляет с осью Ox такой же угол α, как и $\overline{PQ}$. По определению, косинус этого угла выразится так

$$\cos\alpha = \frac{\overline{pq}}{\overline{pq'}},$$

откуда

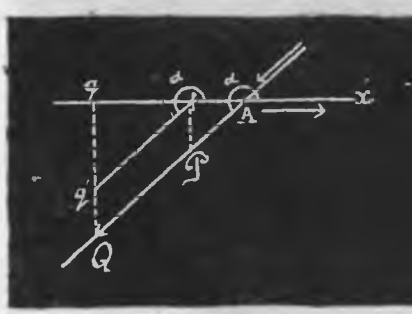
$$\overline{pq} = \overline{pq'}\cos\alpha, \quad \text{или} \quad \overline{pq} = \overline{PQ}\cos\alpha,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что 1) для случая, соответствующего чертежу 69a: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\overline{pq}$ и $\cos\alpha$ положительны; 2) для случая чертежа 69b: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\overline{pq}$ и $\cos\alpha$ отрицательны; 3) для

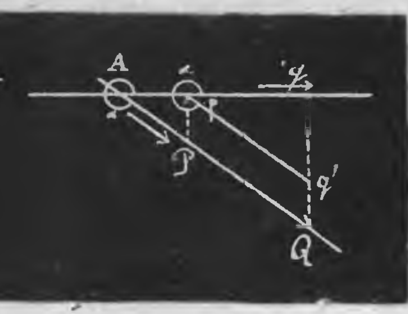


Черт. 69b.

случая 69c: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\overline{pq}$ и $\cos\alpha$ отрицательны и 4) для случая 69d: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\overline{pq}$ и $\cos\alpha$ положительны ($\overline{PQ}$ во всех этих случаях положителен).

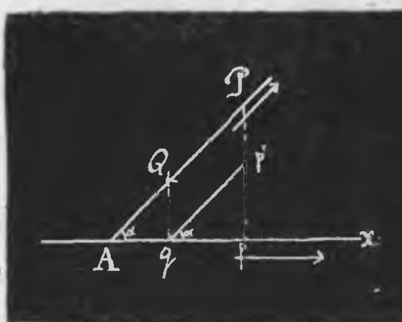


Черт. 69c.

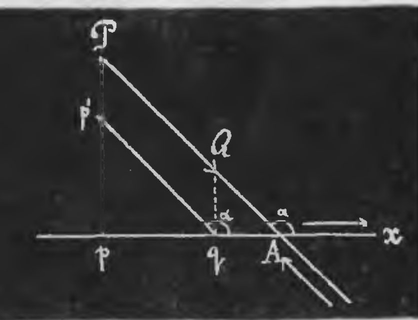


Черт. 69d.

2 случай. Смысл вектора PQ противоположен смыслу оси, на которой он отложен, т. е. вектор PQ отрицателен (черт. 70, a, b, c, d). Проведем из точки q вектор $\overline{qp'}$, равный по длине, но про



Черт. 70a.



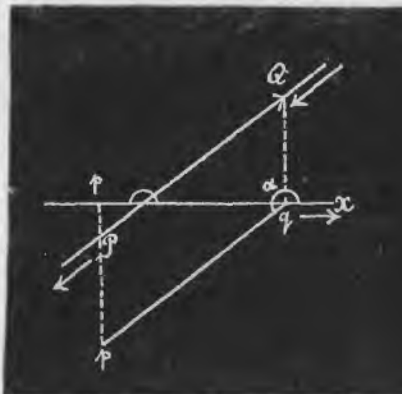
Черт. 70b.

тивоположного знака с вектором $\overline{PQ}$. Вектор $\overline{q'p}$ составляет с Ox тот же угол, как и положительный смысл оси, на которой отложен вектор $\overline{PQ}$. Снова, на основании определения косинуса имеем

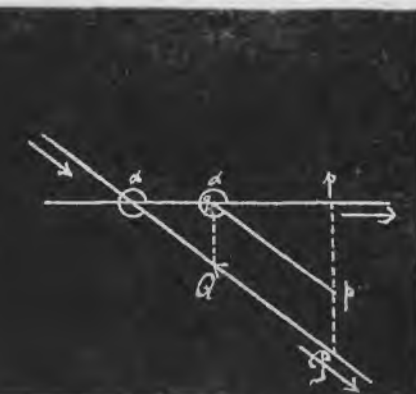
$$\cos\alpha = \frac{\overline{qp}}{\overline{qp'}},$$

откуда

$\overline{qp} = \overline{qp}\cos\alpha = \overline{QP}\cos\alpha$, или $-\overline{qp} = -\overline{QP}\cos\alpha$, т. е. $\overline{pq} = \overline{PQ}\cos\alpha$, что и требовалось доказать. Заметим, что 1) для случая чертежа 70a:



Черт. 70c.



Черт 70d.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pq — отрицателен, $\cos\alpha$ положителен; 2) для случая 70b: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, pq — положителен, $\cos\alpha$ — отрицателен; 3) для случая

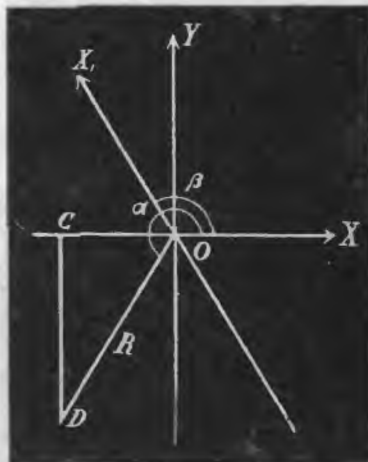
70c: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\overline{pq}$ положителен, $\cos\alpha$ — отрицателен; 4) для случая 70d: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\overline{pq}$ — отрицателен, $\cos\alpha$ — положителен. $\overline{PQ}$ во всех этих случаях отрицателен.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ ДУГ, ДВОЙНОЙ И ПОЛОВИННОЙ ДУГИ.

§ 66. Последняя теорема позволяет вывести (сразу в общем виде) формулы, связывающие тригонометрические функции алгебраической суммы углов с функциями слагаемых углов.

Пусть радиус-вектор $\overline{OD} = R$ (см. черт. 71) составляет с осью $\overline{OX}$ угол α. $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ координаты точки D. Поэтому

$$\overline{OC} = R\cos\alpha,\ \overline{CD} = R\sin\alpha \quad \ldots (1)$$



Черт. 71.

Проектируем вектор $\overline{OD}$ и его составляющие $\overline{OC}$ и $\overline{CD}$ на оси OX_1. На основании теоремы § 42

$$\text{пр. } \overline{OD} = \text{пр. } \overline{OC} + \text{пр. } \overline{CD} \quad \ldots (2)$$

Положительные смыслы осей $\overline{OX_1}$ и $\overline{OD}$ составляют угол $(\alpha - \beta)$, оэтому пр. $\overline{OD} = R\cos(\alpha - \beta)$.

Положительные смыслы осей $\overline{OX_1}$ и $\overline{OX}$ (на оси OX отложен вектор $\overline{OC}$) составляют угол β, поэтому пр. $\overline{OC} = OC\cos\beta$.

Положительные смыслы осей $\overline{OX_1}$ и $\overline{OY}$ (на оси параллельной $\overline{OY}$ отложен вектор $\overline{CD}$) составляют угол $\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому пр. $\overline{CD} = \overline{CD}\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \overline{CD}\cos = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = CD\sin\beta$.

Подставив эти выражения в равенство (2), получаем

$$R\cos(\alpha - \beta) = \overline{OC}\cos\beta + \overline{CD}\sin\beta.$$

Заменяя $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ их выражениями из (1), имеем

$$R\cos(\alpha - \beta) = R\cos\alpha\cos\beta + R\sin\alpha\sin\beta, \text{ или}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots (3)$$

Принимая во внимание, что эта формула выведена для всяких углов, заменим здесь β на $-\beta$. Получим $\cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$, а так как $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, то

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots (4)$$

Заменим в формуле (3) α на $\frac{\pi}{2}+\alpha$, тогда

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right]=\cos\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha-\beta)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta+$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta.$$

На основании формул приведения, получаем

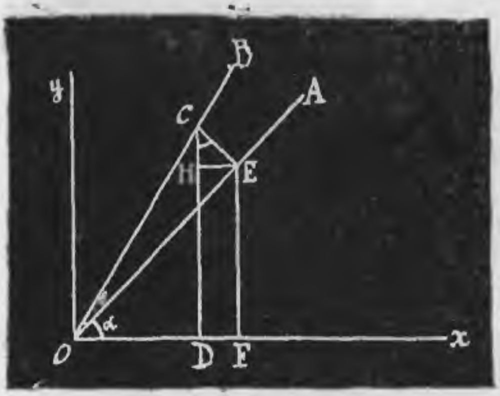
$$-\sin(\alpha-\beta)=-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \text{ или}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Заменяя еще раз β на $-\beta$, получим

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

§ 67. Другой вывод формул для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$. Возьмем в первой четверти два направления OA и OB (черт. 72). Пусть OA составляет с Ox острый угол α, а OB составляет с OA острый угол β. Выберем на OB какую-нибудь точку C: пусть D — ее проекция на ось Ox и E — ее проекция на OA, а проекция точки E на ось Ox есть точка F. Наконец, опустим еще перпендикуляр EH из точки E на CD. Заметим, что $\angle ECH=\angle AOx$ (как острые углы, составленные взаимно параллельными сторонами). На основании определения синуса:



Черт. 72.

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{CD}{OC}=\frac{DH+HC}{OC}=\frac{FE}{OC}+\frac{HC}{OC}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

а так как

$FE=OE\sin\alpha$ (из $\triangle OEF$), а $OE=OC\cos\beta$ (из $\triangle OEC$),

то
$$FE=OC\sin\alpha\cos\beta; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

таким же образом $HC=CE\cos\alpha$ (из $\triangle HCE$) и $CE=OC\sin\beta$ (из $\triangle OCE$), значит

$$HC=OC\cos\alpha\sin\beta. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1), получаем:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

Таким же способом

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OD}{OC}=\frac{OF-DF}{OC}=\frac{OF}{OC}-\frac{HE}{OC}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

но $OF=OE\cos\alpha$, $OE=OC\cos\beta$,

значит
$$OF=OC\cos\alpha\cos\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$HE=CE\sin\alpha, \; CE=OC\sin\beta,$$

значит

$$HE = OC \sin\alpha \sin\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Подставляя (5) и (6) в уравнеиие (3), получаем:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (II)$$

Формулы (I) и (II) выведены в предположении, что углы α, β и $(\alpha+\beta)$ острые, т. е.

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2};\; 0<\beta<\frac{\pi}{2};\; 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}.$$

Обобщим теперь эти формулы на тот случай, когда

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2};\; 0<\beta<\frac{\pi}{2};\; \text{но}\;\; \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi.$$

Обозначим буквами α' и β' углы дополнительные к α и β:

$$\alpha'=\frac{\pi}{2}-\alpha;\; \beta'=\frac{\pi}{2}-\beta;\; \text{тогда}\; \alpha'+\beta'=\pi-(\alpha+\beta).$$

Очевидно, что

$$0<\alpha'<\frac{\pi}{2};\; 0<\beta'<\frac{\pi}{2};\; 0<\alpha'+\beta'<\frac{\pi}{2}$$

$\left(\text{так как } (\alpha+\beta)>\frac{\pi}{2} \text{ и } (\alpha+\beta)<\pi\right)$; поэтому к углам α' и β' можно применять формулы (I) и (II):

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[\pi-(\alpha'+\beta')]=\sin(\alpha'+\beta')=\sin\alpha'\cos\beta'+\cos\alpha'\sin\beta=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=$$

$$=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\pi-(\alpha'+\beta)]=-\cos(\alpha'+\beta')=-\cos\alpha'\cos\beta'+\sin\alpha\sin\beta=$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=$$

$$=-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (II)$$

Формулы (I) и (II) доказаны для любых острых углов α и β.

Покажем теперь, что, если формулы (I) и (II) справедливы для каких-нибудь углов α' и β', то они останутся справедливыми и для углов: $\alpha=\frac{\pi}{2}+\alpha'$ и $\beta=\beta'$. Действительно,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\alpha'+\beta'\right)\right]=\cos(\alpha'+\beta')=\cos\alpha'\cos\beta'-\sin\alpha'\sin\beta'=$$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad . \; . \; . \; (I)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha'+\beta')\right]=-\sin(\alpha'+\beta')=-\sin\alpha'\cos\beta'-\cos\alpha'\sin\beta'=$$

$$= -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\beta - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin\beta =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

Теперь формулы (I) и (II) доказаны для любых положительных углов. Действительно, любые положительные углы α и β могут быть получены из острых углов последовательным прибавлением к некоторым острым углам $\frac{\pi}{2}$ достаточное целое число раз; после каждого прибавления получаются углы, для которых формулы справедливы, если они были справедливы для предшествующей пары углов. (Пусть, например, требуется доказать справедливость формул для углов $300°$ и $245°$; замечая, что $300° = 30° + 90°.3$ и $245° = 65° + 90°.2$, рассуждаем так. Формулы справедливы для углов $30°$ и $65°$, значит, они справедливы для углов $120°$ и $65°$; отсюда следует справедливость их для углов $210°$ и $65°$ и далее для углов $300°$ и $65°$; прибавляя затем к другому углу по $90°$, заключаем о справедливости формул для углов $300°$ и $155°$ и для углов $300°$ и $245°$.)

Чтобы распространить эти формулы на отрицательные углы, положим, что α и β таковы, что от прибавления к первому углу k (целое число) раз, а ко второму l раз 2π получаются положительные углы α' и β'. Тогда $\alpha' = \alpha + k\pi$, $\beta' = \beta + 2l\pi$ и углы α и α', β и β', $\alpha + \beta$ и $\alpha' + \beta'$ имеют одинаковый геометрический вид. Поэтому

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha'+\beta') = \sin\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha'\sin\beta' = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad . . \text{(I)}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha'+\beta') = \cos\alpha'\cos\beta' - \sin\alpha'\sin\beta' = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad . . \text{(II)}$$

§ 68. При помощи формул § 66 легко получить тангенс алгебраической суммы двух углов через функции слагаемых углов:

$$\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

$$\text{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}.$$

Выражение тангенса алгебраической суммы найдено; но обычно выражают тангенс суммы через тангенсы слагаемых углов; для этого разделим числители и знаменатели последних дробей на $\cos\alpha\cos\beta$, тогда

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

и

$$\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}},$$

или

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Формулы 1, 2, 3, 4, 5, 6 носят название формул сложения.

§ 69. Полагая в формулах (1), (2) и (5) $\beta=\alpha$, получаем:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad \ldots \quad (7)$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \quad \ldots \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \ldots \quad (9)$$

Заменяя в формуле (7) $\cos^2\alpha$ через $1-\sin^2\alpha$ или $\sin^2\alpha$ через $1-\cos^2\alpha$, получим:

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \quad \ldots \quad (10)$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \quad \ldots \quad (11)$$

Формулы этого параграфа носят название формул умножения (собственно удвоения).

§ 70. Из последних двух формул имеем:

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha,\ 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha,$$

или

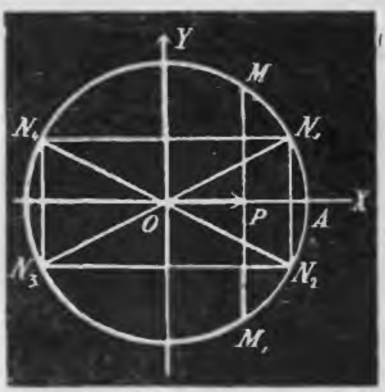
$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},\ \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.$$

Заменяя в этих формулах α на $\frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \ldots \quad (12)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \ldots \quad (13)$$

Рассмотрим геометрически, почему каждому значению $\cos\alpha$ соответствует два значения $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$. Так как $\cos\alpha\leqslant 1$, то $1+\cos\alpha\geqslant 0$ и $1-\cos\alpha\geqslant 0$. Поэтому выведенные формулы дают для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ вещественные значения. Пусть $\overline{OP}=\cos\alpha=m>0$[1]). Заданному значению косинуса соответствуют (см. черт. 73) в пределах 0 и 2π две дуги AM и AM' (обозначим их α_1 и α_2) или дуги, отличные от этих двух на $2k\pi$. Если $2k\pi+\alpha$, разделить на 2, взяв для k четное значение (напр. $k=0$), то получится $\smile AN_1$ или дуга, имеющая тот же геометрический вид; напротив того, если k имеет нечетное значение (напр. $k=1$), то получится дуга AN_3 или дуга того же вида. Подобным образом деля дуги $2k\pi+\alpha_2$ пополам, получим дуги, имеющие геометрический вид AN_2 и AN_4. Соответственно четырем точкам концов дуг $\frac{\alpha}{2}$, численные значения $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ не меняются, а знаки их могут быть различными. Возможные случаи указаны в таблице.



Черт. 73.

[1]) Чертеж и таблица заимствованы из учебника Пиотровского.

$\frac{\alpha}{2}$ соответствует конец дуги	$\sin\frac{\alpha}{2}$	$\cos\frac{\alpha}{2}$
N_1	$+$	$+$
N_2	$-$	$+$
N_3	$-$	$-$
N_4	$+$	$-$

Итак, могут встретиться все четыре комбинации знаков. Значит, если задан только $\cos\alpha$, то необходимо принять во внимание все четыре системы значений для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$. Конечно, если задан самый угол, то получается только по одному значению для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Приведем примеры.

Пусть $\Big(\cos\alpha=\frac{1}{2}$, тогда $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Действительно, в следующих примерах, при $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, значения $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ то положительны, то отрицательны: 1) $\alpha=60°$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\sin 30°=+\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) $\alpha=300°$, $\cos 300°=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\sin 150°=+\frac{1}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3) $\alpha=420°$, $\cos 420°=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\sin 210°=-\frac{1}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\cos 210°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4) $\alpha=660°$, $\cos 660°=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\sin 330°=-\frac{1}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\cos 330°=+\frac{\sqrt{3}}{2}.\Big)$

Чтобы получить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, можно было бы разделить последние два выражения одно на другое, но удобнее сделать одно из следующих преобразований:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\quad\text{или}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

(В этих преобразованиях применены формулы 8, 10, 11.)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММ И РАЗНОСТЕЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

§ 71. Складывая и вычитая формулы (2) и (4) для синуса суммы и разности и складывая и вычитая формулы (1) и (3) для косинуса суммы и разности, получаем:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

Пусть $\alpha+\beta=a$, $\alpha-\beta=b$; тогда (складывая и вычитая) получаем:

$$2\alpha=a+b;\ 2\beta=a-b,\ \text{или}\ \alpha=\frac{a+b}{2};\ \beta=\frac{a-b}{2}.$$

Подставляя эти выражения в предыдущие равенства, получаем следующие формулы:

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$
$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$
$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$
$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}.$$

Выражения во второй части последних формул логарифмические: в них не входят суммы или разности тригонометрических функций, а только их произведения. Этими формулами часто пользуются для приведения некоторых выражений к логарифмическому виду. Если бы потребовалось привести к логарифмическому виду сумму или разность синуса и косинуса, то стоит только косинус заменить синусом дополнительного угла и применить только-что выведенные формулы для суммы или разности синусов.

Приведем еще к логарифмическому виду сумму и разность тангенсов:

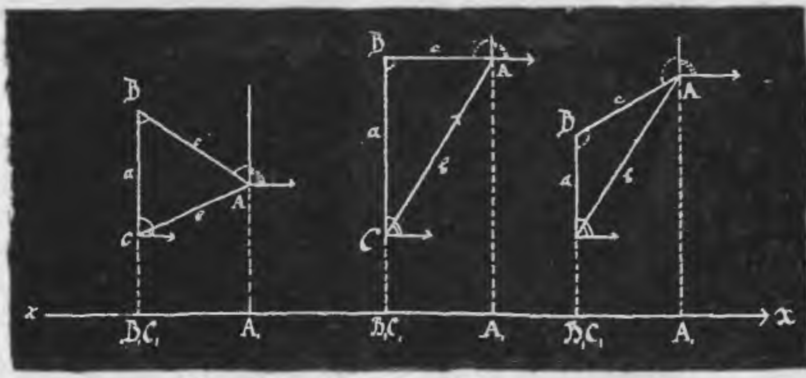
$$\operatorname{tg}\pm\operatorname{tg}b=\frac{\sin a}{\cos a}\pm\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b\pm\cos a\sin b}{\cos a\cos b}=\frac{\sin(a\pm b)}{\cos a\cos b}.$$

(Если в первой части верхний знак, то и дальше верхний знак; нижний знак сочетается с нижним.) Подобным же образом выводятся формулы для суммы и разности котангенсов.

ФОРМУЛЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТРЕУГОЛЬНИКАМ И ЧЕТЫРЕУГОЛЬНИКАМ.

§ 72. Приложим выведенные формулы, относящиеся к тригонометрическим функциям вообще, к выводу некоторых соотношений между элементами треугольника.

Пусть в треугольнике ABC (черт. 74) одна сторона (например, BC) перпендикулярна к некоторой оси $x'x$. Обозначим проекции вершин A, B, C буквами A_1, B_1, C_1. Точки B_1 и C_1 сливаются, так как сторона BC перпендикулярна к оси $x'x$. (На чертеже угол треугольника C обозначен одной сплошной линией, а угол B — пунктирной. Двумя сплошными линиями обозначен угол,



Черт. 74.

дополнительный к углу C. Двумя пунктирными линиями обозначены прямые углы).

Рассматривая CA, AB, BC как векторы, замечаем, что CA составляет с $x'x$ угол $90^\circ - C$; AB составляет с $x'x$ угол $90^\circ + B$. На основании теоремы о проекции вектора имеем:

$$\overline{C_1A_1} = \text{пр. } \overline{CA} = b\cos(90^\circ - C)$$
$$\overline{A_1B_1} = \text{пр. } \overline{AB} = c\cos(90^\circ + B),$$

но на основании теоремы Шаля: $\overline{C_1A_1} + \overline{A_1B_1} = \overline{C_1B_1}$, т. е. $b\cos(90^\circ - C) + c\cos(90^\circ + B) = 0$, или

$$b\sin C - c\sin B = 0, \text{ или } b\sin C = c\sin B$$

и, наконец,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Если бы ось была выбрана перпендикулярной к стороне b или c, то получили бы:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ или } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Итак, имеем:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ — теорема синусов.}$$

§ 73. Расположим теперь ось $x'x$ так, чтобы она была параллельна одной стороне (например, BC) треугольника ABC (черт. 75). Обозначим одной сплошной линией угол C треугольника ABC, а пунктирной линией угол B. (Двумя пунктирными линиями обозначен угол, составленный вектором $\overline{AB}$ с положительным направлением оси $x'x$.) Пусть проекции точек A, B, C на ось $x'x$ будут точки A_1, B_1, C_1.

На основании теоремы о проекции замыкающей имеем: пр. $\overline{CB}$ = пр. $\overline{CA}$ + пр. $\overline{AB}$,

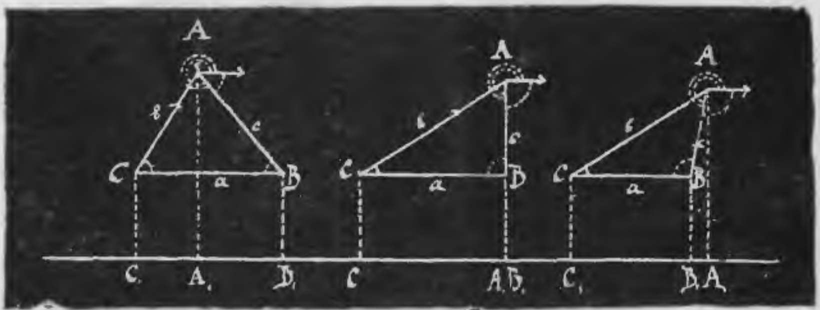
пр. $CB = a$.
пр. $CA = b\cos C$
пр. $AB = c\cos(360^\circ - B) = c\cos(-B) = c\cos B$.

Значит

$$a = b\cos C + c\cos B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha$$

Если бы ось была взята параллельно стороне b или c, то получили бы

$$b = c\cos A + a\cos C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$
$$c = a\cos B + b\cos A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$



Черт. 75.

§ 74. Наконец, выведем еще формулу для квадрата стороны треугольника Умножив равенства (α), (β) и (γ) соответственно на $a, -b, -c$ и сложив, получаем $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$, т. е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Аналогичным образом получим:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

(В первой части дан другой вывод этих формул, см. § 25).

§ 75. Покажем теперь, что из каждой из следующих трех систем

(1)	(2)	(3)
$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$	$a = b\cos C + c\cos B$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2ba\cos A$
$A + B + C = 180^\circ$	$b = c\cos A + a\cos C$	$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
	$c = a\cos D + b\cos A$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

могут быть выведены две другие, т. е. что, в числе написанных девяти равенств не более трех независимых. (Вообще углы и стороны треугольника связаны тремя независимыми соотношениями.)

Чтобы вывести вторую систему из первой, заметим, что $A = 180^\circ - (B + C)$, значит

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C.$$

Обозначив отношеиие стороны к синусу противолежащего угла через $\dfrac{1}{k}$, получаем:

$$a = \frac{1}{k}\sin A, \quad b = \frac{1}{k}\sin B, \quad c = \frac{1}{k}\sin C, \text{ или}$$
$$\sin A = ak, \quad \sin B = bk, \quad \sin C = ck.$$

Подставив эти выражения в формулу для $\sin A$, имеем:

$$ak = bk\cos C + ck\cos B, \text{ или } a = b\cos C + c\cos B$$

(так как k не равно нулю), т. е. первую формулу второй системы.

Чтобы из второй системы вывести первую, умножим обе части первого равенства (второй системы) на a, второго на b и вычтем их почленно; тогда получим:

$$a^2-b^2=ac\cos B-bc\cos A,\quad \text{или}\quad a^2-b^2=c(a\cos B-b\cos A).$$

Подставляя здесь вместо c его выражение ($a\cos B+b\cos A$), получаем

$$a^2-b^2=a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A,\ \text{или}\ a^2(1-\cos^2 B)=b^2(1-\cos^2 A),\ \text{или}$$

$$a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A.$$

Извлечем квадратный корень и примем во внимание, что углы треугольника не превосходят (можно считать не превосходящими) 180°, т. е. синусы их положительны. Тогда

$$a\sin B=b\sin A$$

или (деля на $\sin A\ \sin B$, не равное нулю)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Таким же образом выведем:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

Полагая

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=m,$$

получаем:

$$a=m\sin A,\ b=m\sin B,\ c=m\sin C.$$

Чтобы получить теперь равенство $A+B+C=180°$, подставляем только-что полученные выражения в уравнения второй системы, что дает:

$$m\sin A=m\sin B\cos C+m\cos B\sin C,$$

или

$$\sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C,$$

значит

$$\sin A=\sin(B+C),$$

откуда

$$A=B+C\ .\ .\ .\ (\alpha')\ \text{или}\ A=180°-(B+C)\ .\ .\ .\ (\beta').$$

Из второго уравнения второй системы получили бы

$$B=A+C\ .\ .\ .\ (\alpha'')\ \text{или}\ B=180°-(A+C)\ .\ .\ .\ (\beta'')$$

Принимая во внимание, что C не равно нулю, замечаем, что (α') и (α'') не могут быть удовлетворены одновременно; поэтому, наверное, будет удовлетворено одно из (β), т. е. $A+B+C=180°$. Итак, первая и вторая системы равносильны: первая есть следствие второй, вторая есть следствие первой.

Покажем теперь, что две последние системы равносильны. Третья система была уже выведена из второй, поэтому остается только получить вторую систему из третьей. Для этого сложим первые два равенства третьей системы и разделим обе части полученного равенства на $2c$; получим третье уравнение второй системы.

Итак доказано, что из девяти вышенаписанных равенств не более трех независимых; но их и не менее трех, так как, например, из трех последних можно по данным a, b, c найти $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

Вообще можно заметить, что шесть элементов треугольника связаны тремя независимыми соотношениями; остальные соотношения являются их следствиями.

§ 76. Например, формулы, которыми мы пользовались в первой части для решения треугольников, могут быть выведены как следствия вышеприведенных.

Действительно, из равенства

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$$

заключаем, что

$$\frac{a-b}{b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B} \text{ и } \frac{a+b}{b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin B}.$$

Деля последние две формулы почленно друг на друга, получаем:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}},$$

т. е. теорема тангенсов (см. § 26).

Точно так же из первого равенства третьей системы получаем:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

откуда

$$1-\cos A=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} \text{ и } 1+\cos A=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

деля последние равенства друг на друга и замечая, что в числители входят разности квадратов, получаем:

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{(b^2+2bc+c^2)-a^2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)}=$$
$$=\frac{2(p-b)\,2(p-c)}{2p\,2(p-a)}=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)},$$

но

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$
$$=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

(см. § 27).

§ 77. Покажем теперь, как выведенные формулы прилагаются к решению треугольников в некоторых особых случаях [1]).

Сначала обратимся к прямоугольному треугольнику.

Пусть в прямоугольном треугольнике заданы острый угол A и сумма катета и гипотенузы $b+c=s$. Имеем $b=c\cos A$; $b+c=c(1+\cos A)=s$,

---

[1]) Придавая решению особых случаев треугольников второстепенное значение и думая, что указать действительно общие методы решения этих случаев или очень трудно или невозможно, мы не делаем таких попыток (см., например, учебник Ди-Сеньи), а приводим только в качестве примера решение треугольника в немногих особых случаях.

отсюда

$$c=\frac{s}{1+\cos A}=\frac{s}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

Зная c и острый угол A, легко найдем другие элементы.

Пусть заданы катет a и сумма гипотенузы и другого катета $b+c=s$. Выражая все элементы через гипотенузу и угол A, имеем

$$a=c\sin A;\ b=c\cos A;\quad c(1+\cos A)=s.$$

Разделяя выражение a на s, получим:

$$\frac{a}{s}=\frac{\sin A}{1+\cos A},\ \text{или}\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{a}{s}.$$

Отсюда найдем угол A, после чего уже легко найти и другие элементы.

§ 78. Особые случаи решения косоугольных треугольников.

Пусть в треугольнике заданы периметр $2p$ и углы A и B. Напишем производную пропорцию теоремы синусов:

$$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A},\ \text{откуда}\ a=\frac{2p\ \sin A}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

но

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

а так как

$$\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ,\ \text{то}\ \sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2},\ \sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$$

и поэтому

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\text{значит}\ a=\frac{4p\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},\quad\text{или}\quad a=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Пусть в треугольнике заданы угол A, сторона c, и сумма сторон $a+b=s$. Выразим a и b через c:

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C},\ b=\frac{c\sin B}{\sin C},$$

поэтому

$$\frac{c(\sin A+\sin B)}{\sin C}=s,$$

или

$$\frac{2c\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{c\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=s,\ \text{или}$$

$$\frac{c\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=s.$$

Разделив числитель и знаменитель на $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$, получаем:

$$\frac{c\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=s, \text{ отсюда } \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{s-c}{s+c}$$

и, наконец,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{s-c}{s+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Пусть в треугольнике заданы сторона a, радиус вписанного круга r и радиус описанного круга R. Имеем $\sin A=\frac{a}{2R}$, отсюда определяем A. Затем из $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $p-a=r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ найдем $2p$ и $b+c=2(p-a)$.

Наконец,

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

значит,

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{2(p-a)}{a}\sin\frac{A}{2}.$$

Отсюда найдем

$$\frac{B-C}{2} \text{ и, зная } \frac{B+C}{2}, \text{ углы } B \text{ и } C.$$

§ 79. Выведем еще некоторые замечательные по простоте выражения, относящиеся к четыреугольникам.

Площадь четыреугольника просто выражается через его диагонали и угол между ними. Обозначим (черт. 76) диагонали d_1 и d_2, а угол между ними α.

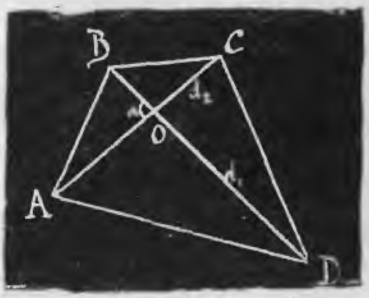
Пл. $ABCD=$ пл. $AOB+$ пл. $BOC+$ пл. $COD+$ пл. $DOA=$

$$=\frac{AO\cdot OB}{2}\sin\alpha+\frac{BO\cdot OC}{2}\sin(180^\circ-\alpha)+$$

$$+\frac{OC\cdot OD}{2}\sin\alpha+$$

$$+\frac{OD\cdot OA}{2}\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha\cdot$$

$$\left[AO\cdot\frac{OB+OD}{2}+OC\cdot\frac{OB+OD}{2}\right]=$$



Черт. 76.

$$=\frac{BD}{2}\sin\alpha(AO+OC)=\frac{AC\cdot BD}{2}\sin\alpha=\frac{d_1d_2\sin\alpha}{2}.$$

Выразим углы и площадь четыреугольника, вписанного в круг в зависимости от его сторон. Пусть четыреугольник $ABCD$ (черт. 77) вписан в круг. Проведем диагональ BD. Из треугольника ABD имеем:

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A,$$

а из треугольника BCD:

$$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C.$$

Приравнивая вторые части и принимая во внимание, что $A+C=180°$ ($\cos C=-\cos A$), получаем:

$$a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A,$$

отсюда

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)};\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\text{ [1]},\ \text{но}$$

$$1-\cos A=\frac{2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2}{2(ab+ac)}=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(ad+bc)}=$$

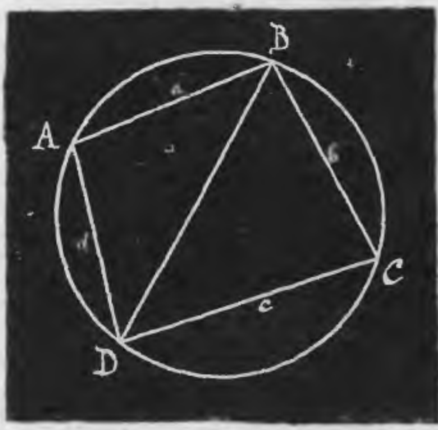
$$=\frac{(b+c+a-d)(b+c-a-d)}{2(ad+bc)},$$

$$1+\cos A=$$

$$=\frac{2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}=$$

$$=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(ad+bc)}=$$

$$=\frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)}.$$



Черт. 77.

Поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{(a+b-c+d)(a-b+c+d)}}$$

Обозначив периметр через $2p$, получим

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Площадь $ABCD=$ пл. $ABD+BCD=\dfrac{ab\sin A}{2}+\dfrac{bc\sin A}{2}=$

$$=\frac{(ad+bc)\sin A}{2},$$

---

[1]) Сохраняем перед знаком корня только знак плюс, так как угол $\frac{A}{2}$ наверное, острый.

но

$$\sin A = +\sqrt{1-\cos^2 A}\ ^{1)} = \sqrt{(1-\cos A)(1+\cos A)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{2(ad+bc)}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{ad+bc}}$$

Умножив это выражение на $\frac{ab+bc}{2}$, получим:

$$\text{пл. } ABCD = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

§ 80. Уравнения, в которых неизвестное входит под знаком тригонометрической функции, называются *тригонометрическими*. Эти уравнения обладают некоторыми особенностями по сравнению с уравнениями алгебраическими.

Начнем с рассмотрения простейших уравнений

$$\sin x = a,\quad \cos x = a,\quad \operatorname{tang} x = a,\quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Отличительные особенности этих уравнений проще всего усмотреть, если воспользоваться для решения их вычерченными графиками синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

§ 81. Чтобы решить уравнение $\sin x = a$, отложим на чертеже 67 (на котором вычерчен график синуса) от точки O по оси $y'y$ (вверх, если a положительно; вниз если a отрицательно) отрезок a и проведем через полученную точку прямую, параллельную оси $x'x$. Если $|a| > 1$ (знаком $\|$ обозначена абсолютная величина), то проведенная прямая не будет пересекать графика синуса — и уравнение не имеет решения; напротив того, если $|a| < 1$, то проведенная прямая имеет с графиком синуса бесчисленное множество общих точеч. Значения дуг, соответствующих точками пересечения, дают решения заданного уравнения, при чем в пределах каждых 2π найдется два значения дуги, удовлетворяющие уравнению. (Если $|a| = 1$, то две точки пересечения сливаются в одну, проведенная прямая касается графика синуса и в пределах каждых 2π находится только по одному значению дуги, удовлетворяющему уравнению.)

Решим теперь уравнение $\sin x = a$ при помощи таблиц.

I случай. Если $0 < a < 1$, то по таблицам найдем дугу x, удовлетворяющую данному уравнению. (Найдя дугу x в градусах, минутах и секундах, можно выразить ее в радианах посредством таблицы длин дуг радиуса, равного единице, так как дуга, выраженная в радианах, численно равна длине дуги радиуса, равного единице). Дуга $\pi - x_1$ также удовлетворяет данному уравнению. Все дуги,

---

[1]) *Перед радикалом сохранен только знак плюс, так как угол A меньше 180°, и поэтому синус его положителен.*

удовлетворяющие этому уравнению, даются формулами $2k\pi+x_1$ и $2k\pi+\pi-x_1$.

II случай. Если a число отрицательное, то раньше всего перепишем заданное уравнение в виде $\sin(2\pi-x)=-a$ и найдем сначала, как указано в первом случае, два значения дуги $2\pi-x$. Затем, найдя соответствующие два значения x и пользуясь периодичностью функций, получим общее выражение дуги x.

Пример: $\sin x=\frac{3}{5}=0{,}600$. По (трехзначным натуральным) таблицам находим $x_1=36°51'$, $180°-x_1=143°9'$. Значит, $x_1°=360°\cdot k+36°51'$ и $x_2°=360°\cdot k+143°9''$. Если выразить дугу в радианах, то $x_1=0{,}6432$; $\pi-x_1=2{,}4984$, поэтому $x_1=2k\pi+0{,}6432$; $x_2=2k\pi+2{,}4984$. (Пятизначные логарифмические таблицы дают $x_1°=360°\cdot k+36°52'11''$, $x_2°=360°\cdot k+143°7°46''$ или $x_1=2k\pi+0{,}643498$; $x_2=2k\pi+2{,}498095$.)

Пример: $\sin x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sin(360°-x)=\sqrt{\frac{3}{2}}$; $360°-x=60°$; $360°-x_2=120°$, т. е. $x_1=300°$; $x_2=240$, значит, $x_1=360°\cdot k+300°$; $x_2°=360°\cdot k+240°$. Выражая в радианах, получаем $2\pi-x_1=1{,}047198$; $2\pi-x_2=2{,}094395$, т. е. $x_1=5{,}235988$; $x_2=4{,}188791$; значит, $x_1=2k\pi+5{,}235988$ и $x_2=2k\pi+4{,}188791$.

Совершенно подобным же образом решаются при помощи графиков функций уравнения $\cos=a$, $\operatorname{tang}=a$, $\operatorname{ctg} x=a$ с тою, однако, разницей для двух последних, что они имеют решения, каково бы ни было значение a. Итак, мы замечаем, что тригонометрические уравнения или совсем не имеют решения или имеют бесчисленное множество решений.

Положим, уравнение $\sin x=a$ имеет корень x_1. Вспоминая, что $\sin(\pi-x)=\sin x$, заключаем, что оно имеет еще корень $\pi-x_1$. Но в силу периодичности $2k\pi+x_1$ и $2k\pi+\pi-x_1$ также корни этого уравнения. Замечая, что $(2k\pi+x)-(x)=2k\pi$ и что $(2k\pi+\pi-x)+(x)=(2k+1)\pi$, заключаем, что все дуги, синусы которых равны между собою, имеют разность, равную четному ($2k$) числу полуокружностей (целому числу окружностей), или сумму, равную нечетному ($2k+1$) числу полуокружностей.

§ 82. Пусть уравнение $\cos x=a$ имеет корень x_1. На основании формулы $\cos(2\pi-x)=\cos x$ заключаем, что $2\pi-x_1$ также корень. Затем, пользуясь периодичностью, находим, что общее выражение корней этого уравнения $2k\pi+x_1$ и $2k\pi+2\pi-x_1=2k_1\pi-x_1$. Значит, общий вид дуг, имеющих тот же косинус, есть $2k\pi\pm x_1$, т. е. все дуги, косинусы которых равны между собою, имеют сумму или разность, равную целому числу окружностей.

Если в уравнении $\cos x=a$, $0<a<1$, то найдем один корень по таблицам. Пусть его значение x_1, тогда $2\pi-x_1$ также корень. Общее выражение дуг, удовлетворяющих этому уравнению, $2k\pi\pm x_1$.

Если бы a было числом отрицательным, то перепишем заданное уравнение в виде $\cos(\pi-x)=-a$ и решим его относительно $\pi-x$

Пример. Пусть $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_1^\circ = 45^\circ$. Второй корень, лежащий в границах от 0° до 360°, есть $x_2^\circ = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$. Значит, $x_1^\circ = 360^\circ \cdot k + 45^\circ$; $x_2^\circ = 360^\circ \cdot k + 315^\circ$. Выразив углы в радианах, получаем $x_1 = 0{,}785398$ и $x_2 = 5{,}497788$.

Пример. Пусть $\cos x = -0{,}815$, или $\cos(180^\circ - x) = 0{,}815$. По (натуральным трехзначным) таблицам $180^\circ - x_1^\circ = 35^\circ 24'$; второе значение для $180^\circ - x$ есть $180^\circ - x_2^\circ = 360^\circ - 35^\circ 24' = 324^\circ 36'$, т. е. $x_1^\circ = 144^\circ 36'$ и $x_2^\circ = -144^\circ 36'$. Значит, $x_1^\circ = 360^\circ \cdot k + 144^\circ 36'$; $x_2^\circ = 360^\circ \cdot k - 144^\circ 36'$. Выразив в радианах, получаем $x_1 = 2k\pi + 2{,}5237$, $x_2 = 2k\pi - 2{,}5237$. (Пятизначные таблицы дают $x^\circ = 360^\circ \cdot k \pm 144^\circ 35' 13''$, или $x = 2k\pi \pm 2{,}523518$)

§ 83. Если уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корень x_1, то $\pi + x_1$ также корень и в силу периодичности общее выражение корней $2k\pi + x$ и $2k\pi + \pi + x$; оба эти выражения обобщаются под видом $k_1\pi + x$. Замечая, что $(k_1\pi + x) - (x) = k_1\pi$, заключаем, что *разность дуг, имеющих тот же тангенс, равна целому числу полуокружностей.*

Для решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$, в случае a положительного, находим одно значение x непосредственно по таблицам, а остальные решения пишем по формуле $x = k\pi + x_1$. При a отрицательном перепишем сначала заданное уравнение в виде $\operatorname{tg}(\pi - x) = -a$ и находим значения для $\pi - x$.

Пример. Пусть $\operatorname{tg} x = 3{,}7321$. Таблицы дают $x_1 = 75^\circ$; значит $x^\circ = 180^\circ \cdot k + 75^\circ$, или в радианах $x = k\pi + 1{,}308997$.

Пример. Пусть еще $\operatorname{tg} x = -1{,}200$, тогда $\operatorname{tg}(180^\circ - x^\circ) = 1{,}200$. По натуральным таблицам находим $180^\circ - x_1^\circ = 50^\circ 11'$, откуда $x_1^\circ = 129^\circ 49'$, значит $x^\circ = 180^\circ \cdot k + 129^\circ 49'$. Выразив в радианах, получим $\pi - x_1 = 0{,}8759$; $x_1 = 2{,}2657$ и $x = k\pi + 2{,}2657$. Пятизначные таблицы дают: $x^\circ = 180^\circ \cdot k + 129^\circ 48' 21''$, или $x = k\pi + 2{,}265540$.

§ 84. Уравнения, выражающие, что некоторая тригонометрическая функция равна одноименной функции или кофункции, взятой со знаком плюс или минус от аргументов, зависящих от x, нет надобности приводить к виду уравнений § 80. При помощи формул приведения можно достигнуть того, чтобы в обеих частях были одноименные функции с одинаковыми знаками; затем можно установить связь между аргументами обеих частей посредством зависимостей между собою дуг, имеющих одинаковое значение тригонометрической функции. Поясним это на примерах.

Пример, пусть

$$\sin(3x + 45^\circ) = \sin 2x.$$

Вспоминая, что для равенства синусов надо, чтобы разность их аргументов равнялась целому числу окружностей или сумма их аргументов равнялась нечетному числу полуокружностей, находим:

$$3x + 45^\circ - 2x = 360^\circ k$$

или

$$3x + 45^\circ + 2x = 180^\circ (2k_1 + 1),$$

значит

$$x = 360^\circ k - 45^\circ$$

или

$$x = 72^\circ k_1 + 27^\circ.$$

Желая, например, узнать, какие углы в пределах одной окружности удовлетворяют этому уравнению, напишем:

$$0^\circ \leqslant 360^\circ \cdot k - 45^\circ < 360^\circ$$

и

$$0^\circ \leqslant 72^\circ k_1 + 27^\circ < 360^\circ,$$

получим

$$x_1 = 315^\circ;\ x_2 = 27^\circ;\ x_3 = 99^\circ;\ x_4 = 171^\circ;\ x_5 = 243^\circ;\ x_6 = 315^\circ.$$

Пример.

$$\cos (4x - 60^\circ) = -\cos x_1$$

или

$$\cos (4x - 60^\circ) = \cos (180^\circ - x),$$

значит,

$$4x - 60^\circ + 180^\circ - x = 360^\circ k$$

или

$$4x - 60^\circ - 180^\circ + x = 360^\circ \cdot k_1,$$

т. е.

$$x = 120 \cdot k - 40^\circ$$

или

$$x = 72^\circ \cdot k_1 + 48^\circ.$$

В пределах первой окружности x имеет значения

$$80^\circ,\ 200^\circ,\ 320^\circ,\ 48^\circ,\ 120^\circ,\ 192^\circ,\ 264^\circ,\ 336^\circ.$$

Наконец,

$$\operatorname{tg} (7x + 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 3x$$

или

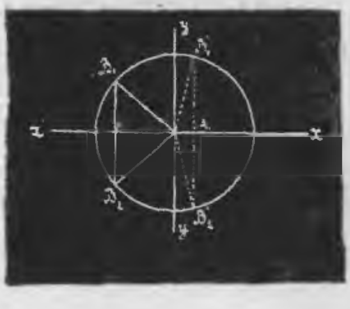
$$\operatorname{tg} (7x + 30^\circ) = \operatorname{tg} (90^\circ + 3x)$$

поэтому

$$7x + 30^\circ - 90^\circ - 3x = 180^\circ k;\ x = 45^\circ \cdot k + 15^\circ.$$

§ 85. Вопрос о решении рассмотренных в § 83 простейших уравнений связан с вопросом о построении угла по данному значению его синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

Примеры. Пусть задано $\sin x = \frac{3}{5}$. Вспоминая, что синус есть отношение проекции радиуса вектора на ось $y'y$ к радиусу-вектору, отложим (черт. 78) на Oy отрезок, равный 3 единицам, и затем через полученную точку A проведем прямую, параллельную оси $x'x$ до пересечения с окружностью, описанной радиусом, равным 5 единицам длины. Точки пересечения B_1 и B_2 соединим с центром O. Углы $B_1Ox = x_1$ и $B_2Ox = 180^\circ - x_1$, и все углы, имеющие с ними одинаковый геометрический вид, удовлетворяют уравнению. На чертеже выполнено еще построение для уравнения



Черт. 78.

$$\sin x = -\frac{4}{5}.$$

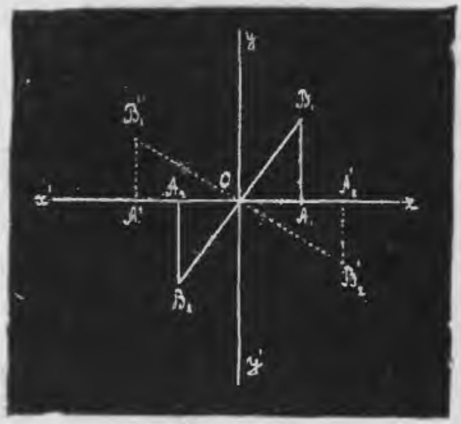
Пусть задано $\cos x = -\frac{3}{4}$. Так как косинус есть отношение проекции радиуса-вектора на ось $x'x$ к радиусу-вектору, то отложим (черт. 78) на оси $x'x$ от точки O налево отрезок, равный 3 единицам длины. Через полученную точку A проведем прямую, параллельную оси $y'y$ до пересечения с окружностью, описанной радиусом, равным 4 единицам длины. Точки пересечения B_1 и B_2 соединим с центром O. Углы $B_1Ox = x_1$ и $B_2Ox = 360° - x_1$ и все углы, имеющие тот же геометрический вид, удовлетворяют уравнению.

Черт. 79.

На чертеже выполнено еще построение для уравнения

$$\cos x = \frac{1}{4}.$$

Пусть задано $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$. Тангенс есть отношение проекции радиуса-вектора на ось Oy к проекции его на ось Ox. Поэтому (черт. 80) отложим от начала O по оси Ox_1 направо 3 единицы длины, а от полученной точки A_1 вверх по вертикальному направлению 4 единицы длины до точки B_1. Соединим B_1 с O: угол B_1Ox удовлетворяет уравнению. Или, так как $\operatorname{tg} x = \frac{-4}{-3}$, то отложим от точки O влево 3 единицы длины и от полученной точки A_2 вниз 4 единицы длины до точки B_2. Углы B_1Ox и B_2Ox удовлетворяют уравнению.



Черт. 80.

На чертеже выполнено еще (пунктиром) построение для уравнения $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{3}\left(\text{или } \operatorname{tg} x = -\frac{3}{5}\right)$.

§ 86. Вообще для решения тригонометрического уравнения с одним неизвестным следует сначала привести его к одному из приведенных простейших уравнений, а затем уже найти неизвестное указанными способами. Для этого надо выразить все входящие в уравнение функции при помощи одной из них и решить уравнение относительно этой функции, что и приведет к уравнению уже разобранного вида.

Например: $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$ проводится посредством подстановки $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ к уравнению

$$\frac{a \operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg} x + b}{\operatorname{tg} x} = 0,$$

которое вообще (если a и c не равны нулю одновременно) равносильно уравнению

$$a \operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg} x + b = 0.$$

Если в уравнение, кроме функций дуги x, входят еще функции дуги $\frac{x}{2}$, то следует выразить все функции только через функции дуги x или только дуги $\frac{x}{2}$.

Например, уравнение $\sin x = a \cos \frac{x}{2}$ можно переписать в виде

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - a \cos \frac{x}{2} = 0,$$

или

$$\cos \frac{x}{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} - a\right) = 0,$$

т. е.

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \text{ и } \sin \frac{x}{2} = \frac{a}{2}.$$

(При решении уравнения относительно функции $\frac{x}{2}$ надо иметь в виду, что 2π служит периодом для $\frac{x}{2}$, а не для x, и потому периодом для x служит 4π.)

§ 87. В некоторых случаях очень удобно воспользоваться выражением функций угла x через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$: эти выражения замечательны тем, что они рациональны. Действительно,

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 1 =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} =$$

$$= 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Применим эти выражения к решению уравнения $a \sin x + b \cos x = c$.

Подставляя, получаем уравнение

$$\frac{2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)-c\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=0;$$

это уравнение вообще равносильно уравнению

$$2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)-c\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=0$$

или

$$(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+(c-b)=0.$$

Для вещественности корней необходимо и достаточно, чтобы $a^2 \geqslant c^2-b^2$, или $a^2+b^2 \geqslant c^2$. Если это условие не выполнено, то уравнение не имеет решения.

Пример. Дано уравнение $3\sin x+5\cos x=4$. Преобразуя, получаем $9\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-9\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{3},\ \operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=0{,}805 \text{ и } \operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=-0{,}138.$$

Натуральные таблицы дают $\frac{x^\circ}{2}=180^\circ k+38^\circ 50'$ и $\frac{x^\circ}{2}=180^\circ k+172^\circ 10'$, или $x^\circ=360^\circ k+77^\circ 40'$ и $x^\circ=360^\circ k+344^\circ 20'$, или $x=2k\pi+1{,}3555$ и $x=2k\pi+6{,}0086$. (Пятизначные таблицы дают $x^\circ=360^\circ k+77^\circ 38' 58''$ и $x=360^\circ k+344^\circ 16' 40''$, или $x=2k\pi+1{,}355239$ и $x=2k\pi+6{,}008781$.)

Черт. 81.

Угол x можно найти также при помощи построения. Если формулу $c=a\cos B+b\cos A$ (формула γ § 73) применить к прямоугольному треугольнику ($C=90^\circ$), то получается $c=a\sin A+b\cos A$. Поэтому решить уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ значит — найти по отношению к треугольнику с катетами a и b такое направление, чтобы сумма проекции катетов равнялась c. В применении к уравнению $3\sin x+5\cos x=4$ построим треугольник (ABC) с катетами 3 и 5 (черт. 81) и опишем около него окружность. Затем из A, как центра, опишем дугу радиусом, равным 4 единицам длины. Соединим точки пересечения окружностей D и E с вершиной A и проектируем AC и BC на прямые AD и AE. Проекции на первую прямую $\overline{AF}+\overline{FD}=\overline{AD}=4$. Проекции на вторую прямую $\overline{AO}+$ $+\overline{OE}=\overline{AE}=4$. Искомые углы $CAF=77°40'$ и $CAD=344°20'$ отмечены дужками.

КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ.

§ 88. Вопрос о решении уравнений $\sin x=a$, $\cos x=a$ и т. д. связан с вопросом о круговых функциях — обратных тригонометрическим.

Если переменная y есть функция независимой переменной x, и притом такая, что каждому значению x соответствует одно значение y, то y называют *однозначной* функцией x. Функция y называется *многозначной*, если каждому значению независимой переменной x соответствует несколько или даже бесчисленное множество определенных значений y. Примерами однозначных функций могут служить

$$y=5x-2;\ y=ax^3;\ y=\log x;\ y=\sin x,$$

но если, например, x и y связаны зависимостью

$$y^2+x^2=1, \text{ то } y=\pm\sqrt{1-x^2};$$

здесь каждому значению x (которое по абсолютному значению меньше единицы) соответствуют два значения y; в данном случае y многозначная (именно двузначная) функция x.

Если y есть функция x, то вообще можно и x рассматривать как функцию переменной y. В таком случае одну из этих функций называют *прямой*, а другую — *обратной*. Взяв за прямые функции

$$y=5x-2;\ y=ax^3;\ y=\log_a x,$$

получим следующие обратные им функции

$$x=\frac{y+2}{5};\ x=\sqrt[3]{\frac{y}{a}};\ x=a^y.$$

§ 89. Пусть прямая функция

$$y=\sin x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Функцию x, обратную функции y $(=\sin x)$, обозначают через $\operatorname{Arc}\sin y$ (Arc сокращение слова «arcus» — дуга) и пишут

$$x=\operatorname{Arc}\sin y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) равнозначащи: они указывают одну и ту же зависимость между переменными y и x. Следовательно, под $x=$ $=\operatorname{Arc}\sin y$ разумеют дугу (или угол), синус которой равен y. Так как x есть дуга круга, то функцию x называют круговой.

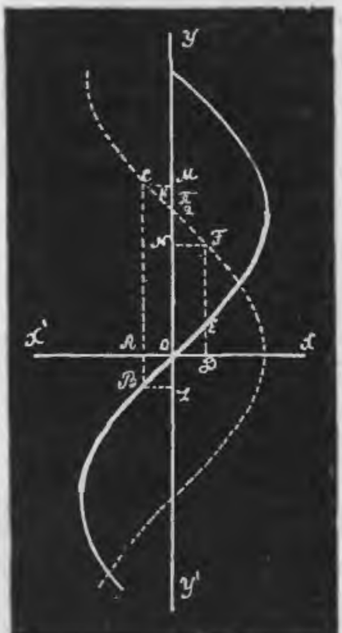
Как мы видели при решении уравнения $\sin x=y$, значениям y, лежащим в границах $-1\leqslant y\leqslant 1$, соответствуют определенные значения x. Каждому значению x соответствует одно значение y, но каждому значению y (лежащему в указанных границах) соответствует бесчисленное множество определенных значений x. Поэтому y

($=\sin x$) есть однозначная функция x, но x ($=\operatorname{Arc}\sin y$) многозначная функция y. Обратные друг другу функции

$$y = \operatorname{Arc}\sin x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y = \sin x^{1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

отличаются друг от друга тем, что значения y одной из них равны соответствующим значениям x другой, — и обратно. Поэтому, если одна из функций построена, то другая может быть получена заменой x на y, — и обратно. Но этой замены мы достигнем, преобразуя чертеж так, чтобы OX заменилось осью OY и обратно, т. е. повернем чертеж вокруг оси OC, биссектрисы угла XOY. Таким образом кривые чертежа 67 преобразуются в кривые чертежа 82. (Сплошной линией представлен $\operatorname{Arc}\sin x$.)



Черт. 82.

Из всех значений $y = \operatorname{Arc}\sin x$, соответствующих данному значению x (заключенному в границах $-1 \leqslant x \leqslant +1$), есть, наверное, одно — и только одно — значение y, лежащее в границах —

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Одно значение y наверное имеет, потому что синус проходит между этими пределами совокупность всех возможных значений; только одно, потому что синус, возрастая все время между этими границами, принимает каждое значение только один раз. Это значение называют иногда главным и обозначают

$$y = \arcsin x$$

(arc малой буквой в отличие от прежнего обозначения Arc). На чертеже главное значение выделено толстой линией.

Аналогичным образом определяют многозначные функции $y = \operatorname{Arc}\cos x$, $y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$, ($y = \operatorname{Arc}\sec x$, $y = \operatorname{Arc}\operatorname{css} x$). $\operatorname{Arc}\cos x$ — есть функция (дуга), косинус которой равен x и т. д. Эти обозначения выражают те же зависимости, что и равенства

$$x = \cos y,\ x = \operatorname{tg} y,\ x = \operatorname{ctg} y\ (x = \sec y,\ x = \csc y).$$

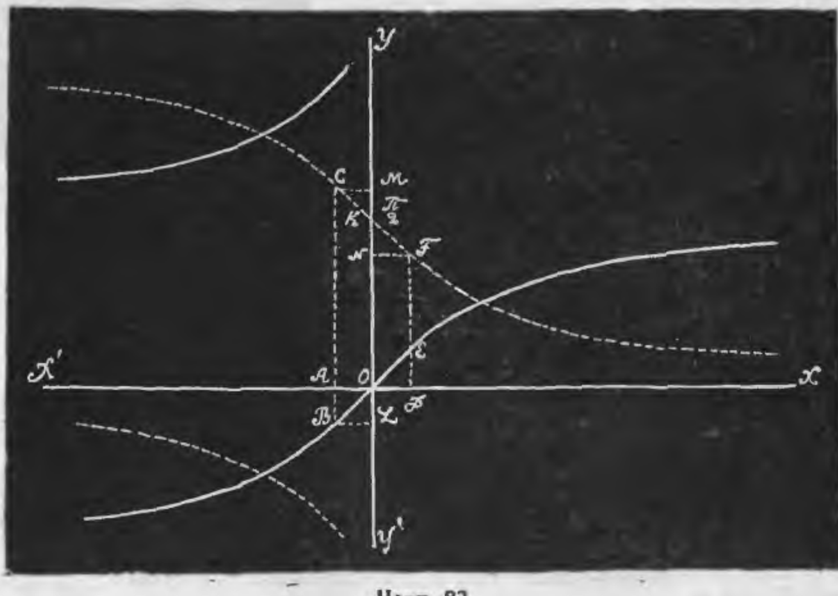
Главным значением функции $y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ (обозначаемым нами $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$) называют то значение, которое лежит между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Такие границы можно выбрать, так как между ними всегда

[1]) В обеих строчках независимое переменное обозначено буквой x, а функция — буквой y.

найдется значение y, и притом только одно. Между этими границами для y функция $x = \operatorname{tg} y$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, все время возрастая, и поэтому каждому значению x соответствует одно значение y в указанных границах, выделенное на чертеже (черт. 83) толстой линией. (Между теми же значениями заключаются главные значения функции $y = \operatorname{Arc} \csc x$.)

Но главное значение $y = \operatorname{Arc} \cos x$ считают лежащим между 0 и π. Здесь границ $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ принять нельзя, так как между этими границами $x = \cos y$, с одной стороны, принимает не все возможные для косинуса значения, а только положительные (см. черт. 82), а, с другой стороны, те значения, которые x может принимать в этих границах, оно принимает два раза: один раз для некоторой положительной дуги, а другой раз для численно равной ей отрицательной дуги. Поэтому каждому из возможных для $x = \cos y$ положительных значений соответствуют два значения y в пределах $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Напротив того, для $0 \leqslant y \leqslant \pi$ функция $\cos y$ принимает все возможные для косинуса значения, и притом все время убывая, т. е. по одному разу. Следовательно, удобно ограничить главные значения $y = \operatorname{Arc} \cos x$ пределами $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Главные значения функции $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$ заключены между теми же границами. (Главные значения функций $\operatorname{Arc} \cos x$ и $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$ выделены на чертежах 82 и 83 толстыми пунктирными линиями. Нетрудно видеть на графиках, что такой выбор наиболее удобен.)

§ 90. Функции $y = \operatorname{arc} \sin x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ — функции возрастающие. Для пояснения этого обратимся к чертежам 78 и 79, где сплошными толстыми



Черт. 83.

линиями изображены графически функции $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$. Напротив того, функции $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ — функции убывающие, как в этом нетрудно убедиться, рассматривая на чертежах 82 и 83 графики, проведенные толстым пунктиром.

Функции $\arcsin x$ и $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны между собою зависимостью

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$\left(\text{на черт. 82 и 83: } \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{OL} + \overline{OM} = \overline{OK} = \frac{\pi}{2}\right)$.

Действительно, пусть $\arcsin x = y$, $\arccos x = z$, тогда $x = \sin y$, $x = \cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, при чем $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant z \leqslant \pi$, т. е. $0 \geqslant -z \geqslant -\pi$, или $\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} - z \geqslant -\frac{\pi}{2}$. Значит, y и $\frac{\pi}{2}$ — две дуги, имеющие равные синусы и заключенные между $-\frac{\pi}{2}+$ и $\frac{\pi}{2}$; но для дуг, лежащих в этих границах, синус приобретает каждое значение только один раз, поэтому $y = \frac{\pi}{2} - z$, или $y + z = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

Соотношение (2) доказывается совершенно таким же способом.

Найдем еще зависимость между $\arcsin x$ и $\arcsin(-x)$. Если на чертеже 82 $\overline{OD} = x$ и $\overline{OA} = -x$, то $\arcsin x = \overline{DE}$, $\arcsin(-x) = \overline{AB}$. Почти очевидно, что $\overline{DE} + \overline{AC} = 0$, так как $\overline{DE}$ на столько же больше нуля, на сколько $\overline{AB}$ меньше нуля. Чтобы это доказать, введем обозначения $\arcsin x = y$, $\arcsin(-x) = z$, или $x = \sin y$, $-x = \sin z = -\sin y = \sin(-y)$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant +\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{2} \geqslant -y \geqslant -\frac{\pi}{2}$. Значит, $-y$ и z две дуги, имеющие равные синусы и заключенные между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, поэтому $-y = z$, или $y + z = 0$ и

$$\arcsin x + \arcsin(-x) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Определяя зависимость между $\arccos x$ и $\arccos(-x)$ заметим, что $\arccos x = \overline{DF}$, $\arccos(-x) = \overline{AC}$, но так как $\overline{DF} = \overline{ON}$ на столько же меньше $\overline{OK}$, на сколько $\overline{AC} = \overline{OM}$ больше $\overline{OK}$, то $\overline{DF} + \overline{AC} = 2.\ \overline{OK} = \pi$, или

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Доказывается это подобно тому, как было доказано равенство (3)

Можно получить также соотношения

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

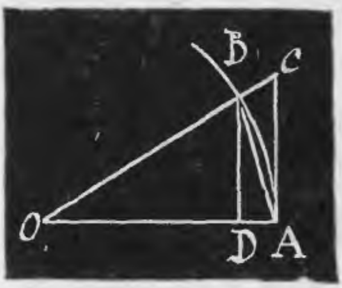
$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

На чертеже 83: $\overline{DE} + \overline{AB} = 0$ и $\overline{DF} + \overline{AC} = \pi$.

Справедливость соотношения (2) доказывается совершенно таким же способом.

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ И ДУГОЙ.

§ 91. При изучении функций (в высшей математике) как значения самой функции, так и значения независимой переменной всегда выражают отвлеченными числами. Поэтому при изучении тригонометрических функций, например $x = \sin y$, или $y = \sin x$, под y разумеют не некоторое число градусов или радианов, а отвлеченное число, равное отношению длины соответствующей дуги к радиусу. (Конечно, это число равно числу радианов.) Принимая это во внимание, выведем несколько важных в теории тригонометрических функций соотношений.



Черт. 84.

Пусть BOA (черт. 84) некоторый острый угол. Построим между сторонами его каким-нибудь радиусом R дугу BA и через конец начального радиуса проведем касательную до пересечения с другой стороной в точке C. Тогда площадь треугольника $OAC >$ площади сектора $OAB >$ площади треугольника OAB, т. е.

$$\frac{R \cdot AC}{2} > \frac{R \cdot \smile AB}{2} > \frac{R \cdot BD}{2}.$$

Разделив на R^2 и умножив на 2, получаем

$$\frac{AC}{R} > \frac{\smile AB}{R} > \frac{BD}{R}.$$

Отношение $\frac{\smile AB}{R}$ (численно равное числу радианов дуги AB) обозначим буквой x. Тогда из треугольников OAC и ODB имеем $AC = R \operatorname{tg} x$, $BD = R \sin x$. Подставляя эти выражения в последние неравенства, получаем

$$\operatorname{tg} x > x > \sin x.$$

Эти неравенства справедливы, если $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

§ 92. Последние неравенства перепишем в виде

$$\frac{\sin}{\cos x} > x > \sin x$$

или (деля на положительное число $\sin x$)

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1; \text{ значит, } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

При неограниченном убывании x, предел $\cos x = 1$; следовательно, отношение $\frac{\sin x}{x}$ остается заключенным между единицей и переменной, предел которой равен единице; поэтому предел $\frac{\sin x}{x}$ также не может отличаться от единицы. Итак

$$\text{предел}\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=1}=1.$$

§ 93. Применяя выведенные неравенства к дуге $\frac{x}{2}$, имеем

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}>\frac{x}{2}.$$

Умножая обе части этого неравенства на положительное число $2\cos^2\frac{x}{2}$, получаем:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}>x\cos^2\frac{x}{2}, \text{ или } \sin x>x\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Но так как $\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$, то, заменяя во второй части $\sin\frac{x}{2}$ через $\frac{x}{2}$, усилим неравенство; поэтому

$$\sin x>x\left(1-\frac{x^2}{4}\right) \text{ или}$$

$$x-\sin x<\frac{x^3}{4}.$$

Это неравенство дает возможность вычислить синус для достаточно малого угла с какой угодно точностью. Действительно, полагая

$$\sin x=x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

сделаем ошибку, меньшую $\frac{x^3}{4}$. Возьмем, например, угол, равный $10'$. Переведя в радианы, имеем

$$x=\frac{\pi}{360\cdot 6}=\frac{\pi}{1080}=0{,}00290888.$$

Полагая $\sin 10'=0{,}00290888$, сделаем ошибку, меньшую чем

$$\frac{x^3}{4}<\frac{0{,}003^3}{4}<\frac{0{,}00000003}{4}<0{,}00000001.$$

Когда вычислен $\sin 10'$, то можно найти значения остальных тригонометрических функций того же угла, а затем функции двойного угла, т. е. $20'$, а затем $30'$ (как суммы $10'$ и $20'$ и т. д.). Таким образом мы имеем (теоретическую) возможность вычислить значения тригонометрических функций любого угла. В действительности вычисления ведут по иным формулам, которые легче всего получить методами дифференциального исчисления.

В равенстве (1) приближенно справедливом для малых [1]) углов,

---

[1]) «Малым» будем считать в данном вопросе (или задаче, или вычислении) угол, для которого $\frac{x^3}{4}$ не превышает погрешиости, допускаемой нами при вычислении.

буквой x обозначен угол, выраженный в радианах. Обозначив буквой y его измерение в градусах, будем иметь:

$$\sin y^\circ = \frac{\pi}{180}\,y.$$

Подобным же образом получим:

$$\sin y' = \frac{\pi}{180\cdot 60}\,y$$

$$\sin y'' = \frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60}\,y.$$

Обращая внимание на то, что множители $\frac{\pi}{180}$, $\frac{\pi}{180\cdot 60}$, $\frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60}$ не зависят от значения угла, заключаем из этих равенств, что для малых углов синус пропорционален углу.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

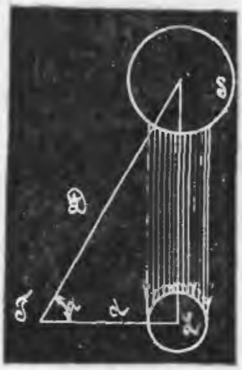
ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК.

Тригонометрия, подобно геометрии, имеет очень древнее происхождение. Есть указания, что уже за 18 веков до нашей эры вавилоняне предсказывали солнечное и лунное затмения, что, конечно, невозможно без знания тригонометрии. Но до нас не дошло никаких источников, по которым можно было бы судить о том, каковы были эти сведения.

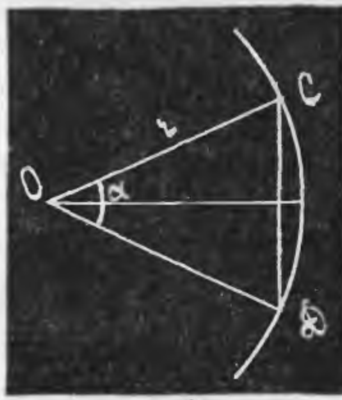
Вавилонянам принадлежит деление круга на 360 частей. Вероятно, они подметили, что хорда равна радиусу или дуги, составляющей $\frac{1}{6}$ часть окружности (60°). Естественно было разделить эту дугу на 60 частей, так как таким образом получается дуга, на которую солнце перемещается в сутки по небесной сфере, описывая за год целую окружность. (У китайцев было даже деление окружности на $365^1/_4$ частей, так что каждая часть равнялась пути солнца за одни сутки.) С этим связано было употребление шестидесятичных долей, которое перешло от вавилонян к грекам и к другим культурным народам. Шестидесятичные дроби сохранялись очень долго; еще в XVII столетии в некоторых учебниках даются таблицы для перехода от шестидесятичных долей к десятичным и обратно, а самые дроби встречаются даже еще в XVIII столетии.

В Египте тригонометрические сведения применялись уже в глубокой древности в архитектуре. Египетские архитекторы вычисляли, как надо стесать камни, чтобы они образовали на ступенчатом остове пирамиды гладкую поверхность; для этого надо было знать отношение основания к гипотенузе, т. е. косинус угла. У архитекторов понятие косинуса стало даже ходовым; это видно из того, что для него существовал особый термин. Очень вероятно, что у них были и многие другие тригонометрические сведения, но они дошли до нас только из греческих источников, и нет возможности указать, что именно греки получили из Египта.

Истинными создателями тригонометрии были греки. Уже *Фалес* (600 л. до нашей эры) обладал значительными сведениями; он знал, например, что угол, вписанный в полукруг, прямой. Он прославился предсказанием солнечного затмения, во время которого происходило сражение мидян с лидийцами; по преданию, они не пожелали сражаться в темноте и заключили мир. *Аристарх*, работавший в Александрии (288 — 277 гг. до нашей эры), умел определять относительные расстояния до солнца и луны. Для этого он измерял угол между направлениями на солнце и луну в то время, когда освещена как-раз половина обращенной к нам стороны луны. Пусть S — положение солнца, L — положение луны, T — положение наблюдателя. Чтобы половина повернутой к нам стороны луны была освещенной, необходимо, чтобы лучи солнца падали на луну (L) перпендикулярно прямой TL (черт. 85). Из треугольника TLS имеем $\frac{d}{D} = \cos\alpha$. Надо заметить что этот способ, теоретически правильный, совершенно непригоден практически, так как, во-первых, он требует очень точного измерения угла и, во-вторых, чрезвычайно трудно определить момент, когда как раз половина луны представляется освещенной.



Черт. 85.



Черт. 86.

Гиппарх из Никеи, работавший за $1^1/_2$ века до нашей эры, прославился как астроном и математик. Он считается основателем научной астрономии. Ему принадлежит замечательный звездный каталог, содержащий положения 1080 звезд с значительной точностью. Для астрономических вычислений ему понадобились тригонометрические таблицы, и он вычислил таблицу хорд; его таблицы дают для каждого α значения $CD = 2r\sin\frac{a}{2}$ (черт. 85). Но тригонометрию он изучал только, поскольку она нужна была ему для астрономии; поэтому его сведения относятся главным образом к сферической тригонометрии, которая рассматривает треугольники, образованные на поверхности шара дугами больших кругов. К сожалению, сочинения Гиппарха не дошли до нас.

Менелай из Александрии (за 100 лет до нашей эры) доказал еще некоторые теоремы сферической тригонометрии, одна из которых носит название теоремы Менелая.

Птолемей, живший во II веке нашей эры и работавший в Александрии, собрал их работы и присоединил к ним свои работы в сочинении, тоже не дошедшем до нас в подлиннике, но сохраненном в арабском переводе; это сочинение известно под названием «Альмагест». Он умел при помощи теоремы, [1]) носящей его имя, находить хорду суммы и разности двух дуг по хордам каждой дуги. Возможно, что эта теорема была уже известна Гиппарху и незаслуженно носит имя Птолемея. У Птолемея впервые встречаются знаки ′ и ″ для минут и секунд, откуда затем появился знак ° для градусов. Названия минуты и секунды происходят от латинских partes minutae primae и partes minutae secundae — первые меньшие (конечно, шестидесятые) части и вторые меньшие части.

Греки считали, что всякая практическая деятельность есть удел рабов. Свободным же гражданам подобает заниматься только отвлеченным мышлением, не заботясь о практических приложениях. Поэтому естественно, что вообще тригонометрия была у греков в некотором пренебрежении, и заслуги их в этой области несравненно меньше, чем в геометрии. Такие математики, как Евклид, считали ниже своего достоинства заниматься измерениями и вопросами, связанными с ними, а ценили только умственные построения, безошибочность и строгость своих рассуждений и доказательств. Евклид во всей своей геометрии не вводит явно понятия числа, а, например, при изучении площадей, говорит только об отношении площадей прямоугольников, не давая выражения для самой площади. Поэтому вопросы тригонометрии, вопросы метрики вообще были им чужды. Те же, которые, как землемеры, должны были заниматься этими вопросами, не обладали большею частью достаточным образованием, чтобы создать что-либо новое, и пользовались старыми правилами, часто неточными или совсем неверными. Исключением из них был *Герон*, живший в первом веке до нашей эры. Он вывел формулы для площади треугольника $s = rp$ и $s = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$. Его (очень остроумный) вывод чисто геометрический, и существенно отличается этим от вывода, приведенного в § 27. Впрочем, в сочинениях Герона трудно указать, что принадлежит ему самому и что он взял от египтян. В отличие от других греков того времени он не пользуется шестидесятичными долями; а это доказывает, что он многое взял прямо от египтян. В противном случае он, наверное, прибег бы к шестидесятичным дробям.

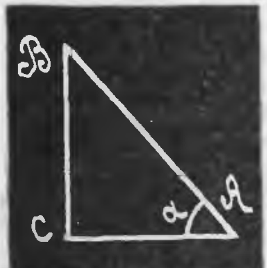
В противоположность дедуктивному мышлению греков, индусские ученые обладали практическими наклонностями и удивительной вычислительной способностью. Наиболее замечательными представителями индусской науки были *Архиабатта* (род в 476 г. нашей эры), *Брамгупта* (род. в 598 г. нашей эры) и *Бхаскра* (род. в 1114 г.). Они заметили, что вместо хорды удобнее пользоваться синусом, т. е. полухордой двойной дуги (хорда дуги 2α равна $2r \sin \alpha$, т. е. полухорда равна $r \sin \alpha$). Кроме синуса, они ввели еще две функции, а именно косинус и синус верзус ($= 1 - \cos \alpha$). Архиабатта построил таблицу синусов через $3\frac{3}{4}°$; он разделил единицу на 3438 частей, соответственно тому, что дуга, заключающая 3438 минут, равна

[1]) Эта теорема излагается в учебниках геометрии.

радиусу (см. § 59). Углы же в $3\frac{3}{4}^\circ$ были получены так: $\sin 30^\circ = 1719'$, затем делением угла пополам получим значения синуса для углов в 15°, $7\frac{1}{2}^\circ$, $3\frac{3}{4}^\circ$. Вычисления велись по формуле $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$. Таким образом было получено $\sin 3^\circ 45' = 225'$, $\sin 7^\circ 15' = 449'$, $\sin 15^\circ = 1719'$ Бхаскра вычислил даже значения через 1°, получив $\sin 1^\circ = \frac{10}{573}$ и $\cos 1^\circ = \frac{6568}{6569}$. Но индусы не умели еще решать косоугольных треугольников и разбивали их для этого на прямоугольные.

С VI по X век был период, когда Европа, отойдя от высокой умственной жизни Греции и Рима, погрузилась в глубокий мрак. Всякая научная деятельность прекратилась, всякие знания преследовались в силу религиозных предрассудков и учений. Математика и астрология стали синонимами, а математиков приравнивали к злоумышленникам. В это самое время на исторической сцене появляются арабы — народ, сыгравший в истории науки исключительную роль. Появившись в VII веке и образовав громадное государство, этот, кочевой до того времени, народ захватил господство над более культурными народами и весьма быстро заимствовал их цивилизацию и знания. Этот народ достигает быстро расцвета на фоне упадка Западной Европы, чтобы через 7—8 веков снова отцвесть и погрузиться в историческое небытие. Необычайная жажда знаний проявилась у арабов в ряде переводов как с греческого, так и с индусского. Многие памятники греческой науки дошли до нас только в арабских переводах. Можно сказать, что вообще арабы мало прибавили к тому, что получили; но в знаниях, имеющих практические приложения, в арифметике, алгебре, тригонометрии, мы имеем много проявлений их самостоятельного творчества.

Аль-Баттани († 929, Дамаск) сознательно отдал предпочтение синусам перед хордами; он ввел в рассмотрение котангенс и секанс, неизвестные грекам, но он не пользуется еще этими функциями для решения треугольников. Котангенс служит у него только для определения высоты солнца по длине тени.



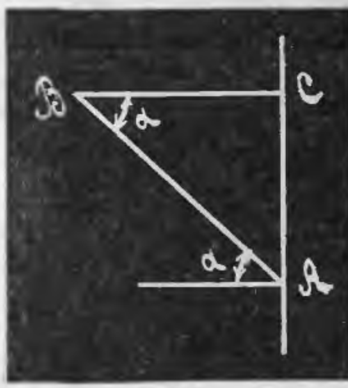
Черт. 87

Пусть α (черт. 87) есть угол между направлением на солнце и горизонтальным направлением; CB — высота шеста (гномона). Тогда $\frac{AC}{CB} = \operatorname{ctg}\alpha$; если длина гномона $CB = 1$, то $AC = \operatorname{ctg}\alpha$, т. е. длина тени гномона в единицу длины равна котангенсу угла α. Длину AC, а поэтому и котангенс, называли umbra recta (прямая тень).

Абуль Вафа (940—998, Багдад) ввел еще тангенс, называвшийся umbra versa (обратная тень).

Положим теперь (черт. 88), AC — вертикальная стена, $BC = 1$ есть шест, расположенный горизонтально, тогда при высоте солнца, равной α, AC будет длиной тени (umbra versa — обратная тень). Но $\frac{AC}{BC} = \mathrm{tg}\alpha$, или при $BC = 1$ получим $AC = \mathrm{tg}\,\alpha$. Поэтому тангенс называли также umbra versa.

Абуль Вафа не только ввел тангенс, но составил таблицу тангенсов через один градус и показал их применение при решении треугольников.



Черт. 88.

Очень значительные успехи сделал астроном *Назир-Эддин-Тузи* (1201—1274). Он занимался и развивал плоскую тригонометрию ради нее самой. Он указал, как решать косоугольные треугольники, пользуясь теоремой синусов. Но он не знает еще теоремы косинусов и иногда для решения треугольника разбивает его на два прямоугольных. Из других арабов более замечателен *Джибар-Ибн-Афлах* (1140, Севилья); он сделал большие упехи в сферической тригонометрии, но в противоположность восточным арабам не подвинул вперед плоской тригонометрии и пользовался даже методом хорд Птолемея, не вводя синусов. Итак, в плоской тригонометрии творчество проявили исключительно восточные арабы. Они определенным образом ввели в употребление и пользовались функциями синус, косинус, тангенс и котангенс.

Не только применение синуса, но самое слово синус мы получили от арабов. У индусов были слова jîva или jyâ (хорда) и ardhajyâ (полухорда). Арабы восприняли это, как dschiba. Но у арабов записываются только согласные и потому они спутали это слово с арабским словом dschaib, которое было правильно переведено на латинский язык словом sinus: dschaib — sinus — лука, изгиб. Слово косинус — значит синус дополнения — complementi sinus (XV столетие), что стало сокращенно записываться cosinus, и наконец (XVI столетие) слилось в слово косинус. Слово тангенс значит касательная; котангенс — тангенс дополнения. Секанс — секущая; косеканс — секанс дополнения.

Недавно еще заслуги, принадлежащие по праву *Назир-Эддину*, сочинения которого найдены очень недавно, приписывались *Региомонтанусу* (Иоганну Мюллеру 1436—1476). Однако не подлежит никакому сомнению, что Региомонтанус был в своих работах совершенно самостоятелен: сочинения восточных арабов ему были неизвестны. В своей книге de triangulis omnimodis libri quinque (пять книг о всевозможных треугольниках), представляющей замечательное во всех отношениях сочинение, он развил тригонометрию, как самостоятельную отрасль знания, и построил ее в общих чертах так, как она стоит и теперь. Он вычислил таблицы синусов и тангенсов, разделив радиус на 600 000 равных частей (вместо 3438 у древних), а позднее и на 10 000 000 частей. В своей книге он дал решения плоских и сферических треугольников. Хотя заслуги его во многом совпадают с заслугами Назир-Эддина, но они еще более значительны и, кроме того, Региомонтанус вместе со своим учителем *Пурбахом* (Puerbach, 1423 — 1461) начинают период развития науки, а Назир-Эддин, напротив того, заканчивает собой период расцвета ее.

После Региомонтануса тригонометрией занимался *Коперник* (1473 — 1543). Он вычислил таблицу секансов. Наконец, *Ретикус* (Rhaeticus Георг Иоахим, 1514 — 1576) вычислил наиболее подробные таблицы, которые, однако, вследствие материальных затруднений могли быть изданы только после его смерти. Он первый отвлек тригонометрические функции от круга и поставил их в зависимость от стороны прямоугольного треугольника. *Питискус* (Pitiscus 1561—1613) выпустил в свет труд, посвященный решению треугольников. В заглавии этого труда впервые встречается слово тригонометрия (измерение треугольников): Trigonometria sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus (тригонометрия, или краткий и ясный трактат о решении треугольников). Выдающийся парижский математик *Виета* (1540 — 1603) создал гониометрию, т. е. алгебраические методы и преобразования в применении к тригонометрическим функциям, но у него не было еще современных удобных и наглядных обозначений.

Очень большое значение при вычислениях вообще и вычислении таблиц в частности имели в средние века формулы, в которых произведения тригонометрических величин преобразовываются в суммы и разности. Средневековый математик пользовался ими, как мы пользуемся логарифмами, чтобы неудобное умножение и деление заменить сложением и вычитанием. Уже арабы знали эти формулы, но не оценивали их значения. Так, Ибн-Юнус (1000) знал формулу $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$; этот способ замены произведения суммой или разностью называется простаферезис (πρόσθησις — сложение, ἀφαίρεσις — вычитание).

Но в начале XVII века шотландец *Непер* (род. 1550), создавший метод логарифмов, опубликовал в Эдинбурге (1614 г.) таблицы логарифмов. Швейцарец *Бюрги* (род. 1552), открывший логарифмы независимо от Непера, обнародовал свои таблицы логарифмов в Праге (1620 г.). *Бриггс* переработал Неперовы таблицы, приняв за основание логарифмов число десять; благодаря такому выбору обращение с таблицами стало очень простым; таблицы Бриггса вытеснили таблицы Бюрги. Формулы, служащие для простаферезиса, стали после изобретения логарифмов ненужными, пока не было обращено внимание на то, что они очень полезны для обратного процесса — преобразования сумм и разностей в произведения (см. § 71).

Ту законченную и изящную форму, которую тригонометрия имеет в настоящее время, придал ей великий *Эйлер* (Euler, 1707 — 1783, Берлин и С.-Петербург). Он в огромной мере способствовал развитию высшего анализа, а тригонометрию изложил как отрасль анализа.

Принятые теперь сокращенные обозначения sin, cos и т. д., а также обозначение сторон треугольника буквами *a*, *b*, *c* и углов *A*, *B*, *C* принадлежат ему. Эйлер принял радиус круга равным единице, и таким образом его значения тригонометрических функций выражают отношения. Но современники не оценили этого, и у них продолжали фигурировать линии при любом радиусе *R*, что встречается еще в конце XVIII и даже в XIX столетии в целом ряде учебников.

Хотя тригонометрия получила вполне законченную форму, но тригонометрические функции находят себе в современном математическом анализе всё новые и новые приложения.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

38111

60 коп.—у. Переплет 18 коп.

8 ш

27