Российская академия наук
Институт системного анализа

А.Б.Петровский

ПРОСТРАНСТВА МНОЖЕСТВ И МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

УРСС
Москва 2003

ББК 22.14

Петровский Алексей Борисович
Пространства множеств и мультимножеств. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 248 с.
ISBN 5-***-

Рассматриваются пространства множеств и мультимножеств с мерой. Установлены основные свойства мер множеств и мультимножеств. Определены понятия последовательностей множеств и мультимножеств, новые виды их сходимости. Изучены свойства сходящихся последовательностей. Описываются новые типы пространств измеримых множеств и измеримых мультимножеств и новые виды метрик. Исследованы особенности разных видов расстояний между множествами и между мультимножествами. Рассмотрены метрические и топологические свойства пространств. Предложены методы решения задач классификации и упорядочения объектов, которые могут существовать в нескольких «копиях» с отличающимися значениями количественных и качественных признаков, характеризующих их свойства.

Для специалистов в областях дискретной математики, принятия решений, искусственного интеллекта, распознавания образов, языков программирования, аспирантов, студентов, всех тех, кто сталкивается в своей деятельности с необходимостью анализа и обработки разнообразной (числовой и символьной, разнородной и противоречивой) информации.

The spaces of sets and multisets with a measure are considered. General properties of the set and multiset measures are found. Concepts of the set and multiset sequences, new sorts of their convergence are defined. Properties of the convergent sequences are investigated. New types of spaces of the measurable sets and multisets, and new kinds of metrics are described. Features of different distances between sets and between multisets are investigated. Metric and topological properties of the spaces are considered. Methods for classifying and ordering objects that may exist in several copies with different values of quantitative and qualitative attributes characterizing their properties are suggested.

For specialists in the fields of discrete mathematics, decision making, artificial intelligence, pattern recognition, programming languages, post-graduate students, students, for everybody, who needs to analyze and process multifarious (numeric and symbolic, diverse and contradictory) information.

Рецензенты –докт.физ.-мат.наук В.И. Богачев, канд.физ.-мат.наук С.И.Травкин

Издание осуществлено с готового оригинал-макета

ISBN 5-*

Содержание

Светлой памяти моей мамы
Нины Викторовны Петровской,
архитектора и художника-графика,
мечтавшей, чтобы ее сын написал
«серьезные» научные книги.

Предисловие

Метрические и другие пространства расстояний играют важную роль в математике и ее приложениях, формируя основу многих прикладных методов изучения и анализа окружающего нас мира. Нередко существует необходимость в исследовании структуры совокупности объектов, абстрагируясь от их конкретной природы, но учитывая их взаимное расположение и основываясь на их свойствах, которые можно охарактеризовать теми или иными признаками объектов. В этих случаях объекты обычно представляют точками некоторого многомерного признакового пространства и оперируют с ними, используя мощный и хорошо развитый математический аппарат теории метрических пространств множеств.

Если приглядеться более внимательно, то можно заметить, что наше окружение состоит из разных, но многократно повторяющихся элементов, которые в определенных ситуациях могут считаться неразличимыми. Живая природа и неживая материя построены из многообразных, но повторяющихся молекул, которые образованы из повторяющихся атомов, а те, в свою очередь, – из повторяющихся элементарных частиц. Зрительные образы и звуки также составлены из отдельных типовых фрагментов. Так, например, вся музыка есть, по существу, разнообразные сочетания долей семи нот, а изображения – комбинации стандартных цветовых и графических элементов. Слова складываются из отдельных повторяющихся букв, а любой текст, в том числе и тот, что вы сейчас читаете, представляет собой совокупность отдельных слов. И, кстати, содержащаяся в кошельке каждого человека наличность есть лишь тот или иной набор каких-то денежных банкнот и монет разного номинала.

Имеется широкий круг задач, отличительной особенностью которых является множественность и повторяемость данных, описывающих как сами рассматриваемые объекты, так и их свойства. С точки зрения математики такие многопризнаковые объекты можно представить как мультимножества или множества с повторяющимися элементами. Мультимножество можно рассматривать или как одну из частных форм множества (так обычно принято считать, например, в комбинаторной математике), или как самостоятельное понятие, более общее, чем множество.

В теории множеств неявно предполагается, хотя это специально и не оговаривается, что все элементы множества различны. Однако принципиального запрета на присутствие во множестве нескольких одинаковых элементов нет.

Вместе с тем оказалось, что возможность многократного вхождения элементов в мультимножество создает новое качество, которое отличает мультимножество от обычного «ординарного» множества и порождает существенно большее, чем у множеств, разнообразие видов и особенностей мультимножеств. При этом почти всегда имеется возможность проверить правильность сделанных предположений и заключений, осуществив «предельный переход» от мультимножеств к множествам.

Теоретическим аспектам мультимножеств посвящено сравнительно мало работ. Множества с повторениями традиционно изучались в комбинаторной математике [Сач77], [Aig79], [БС89]. Д.Кнут был, по-видимому, первым, кто обратил внимание на необходимость рассмотрения мультимножеств как самостоятельного математического объекта. Во 2 томе его многотомной монографии по программированию [Knu69] даны определения мультимножества, объединения, пересечения и сложения двух мультимножеств, указаны некоторые свойства этих операций и примеры применения мультимножеств.

Небольшая сводка основных понятий, относящихся к мультимножествам, приведена в приложении к книге [Pet81] (в русском переводе этой книги мультимножества названы комплектами), где к упомянутым выше операциям добавлено вычитание мультимножеств. Ряд свойств этих операций был рассмотрен в работе [Yag86]. Позднее были введены операции прямого произведения [БС89] и арифметического умножения двух мультимножеств [Knu92], операции симметрической разности мультимножеств, дополнения и умножения мультимножества на число, прямой степени мультимножества [Петр94]. Операции над произвольным числом мультимножеств и их свойства представлены в [Петр03].

Понятие нечеткого мультимножества было предложено Ягером [Yag86], операции над нечеткими мультимножествами исследовались в работах [Li90], [Reb93], [Reb94]. Проблемы упорядочения мультимножеств изучались в работах [DM79], [HO80], [JL82], [Лом01], [SeS03]. Метрические пространства мультимножеств и некоторые их свойства рассмотрены в работах [Петр94], [Petr92], [Petr94], [Петр95], в первой из них введено понятие отношения на мультимножестве. Комбинаторные аспекты теории мультимножеств освещены в работах [Lip82], [БС89], [Петр00]. В последней работе определены понятия разложения, разбиения, покрытия и перекрытия мультимножеств.

Первое систематическое и последовательное изложение начал теории мультимножеств в духе «наивной» теории множеств было предпринято автором в книге «Основные понятия теории мультимножеств», опубликованной в 2002 году. В ней введены основные характеристики мультимножеств. Рассмотрены возможные виды мультимножеств и способы их сопоставления. Определены операции над мультимножествами и исследованы их свойства. Установлены правила для вычисления мощности и размерности произвольного числа мультимножеств. Указаны различные способы представления мультимножеств.

Настоящая книга, посвященная исследованию пространств множеств и мультимножеств, служит в определенной мере продолжением книги [Петр02а], однако вполне от нее независима. Для удобства читателя в главе 0 собраны наиболее важные понятия и определения теории мультимножеств, нужные для понимания представленного далее материала. Для краткости изложения опущены доказательства теорем, которые можно найти в первой книге.

Три следующие главы книги носят, в основном, ознакомительный характер и предназначены, главным образом, для тех, кто пожелает восстановить свои знания из областей математического анализа и функционального анализа. В главе 1 даются определения метрического пространства, метрики, других видов расстояний и пространств. Рассмотрены различные способы образования метрических пространств. Установлены некоторые свойства метрик и метрических пространств. Определены понятия последовательности элементов множества, сходимости и предела последовательности, приведены важнейшие свойства сходящихся последовательностей. Даны понятия гомеоморфизма и изометрии пространств.

В главе 2 излагаются основные свойства метрических пространств: открытость и замкнутость, замыкание, связность, плотность, сепарабельность, полнота и пополнение, компактность. Отмечена связь метрических и топологических пространств.

Понятия сходимости последовательности точек к пределу распространены в главе 3 на функции одной и многих переменных, последовательности функций, множеств и мультимножеств. Кратко рассмотрены свойства непрерывных, полунепрерывных и односторонне непрерывных функций. Установлены некоторые важные свойства сходящихся последовательностей множеств и мультимножеств. Результаты, относящиеся к последовательностям мультимножеств, являются новыми.

Глава 4 содержит изложение основных понятий пространств с мерой. Указаны свойства аддитивной меры множества, предложены новые правила для ее вычисления. Сформулированы необходимые и достаточные условия измеримости множества. Введены новые понятия сходимости последовательности измеримых множеств почти всюду и по мере на пространстве с полной мерой, исследованы их свойства. Приведены основные свойства измеримых функций.

Основные положения теории пространств с мерой мультимножества рассматриваются в главе 5. Мера мультимножества определяется как неотрицательная действительная функция мультимножества, обладающая свойством сильной аддитивности, которое является более общим, чем аддитивность меры множества. Установлены основные свойства меры мультимножества, предложены правила для ее вычисления. Сформулированы необходимые и достаточные условия измеримости мультимножества. Введены новые понятия сходимости последовательности измеримых мультимножеств почти всюду и по мере на пространстве с полной мерой, исследованы их свойства.

В главе 6 рассмотрены наиболее известные примеры функциональных метрических пространств: векторные пространства, пространства ограниченных и сходящихся числовых последовательностей, пространства непрерывных, ограниченных и измеримых функций, отмечены основные свойства этих пространств.

В главах 7 и 8 вводятся новые типы пространств и новые виды метрик. Главы имеют сходную структуру и описывают пространства измеримых множеств и измеримых мультимножеств. Рассмотрены различные способы введения метрик (псевдометрик) на σ-алгебрах измеримых множеств и мультимножеств, порожденных мерой множества или мультимножества. Исследованы особенности, геометрические свойства и свойства непрерывности разных видов расстояний между множествами и между мультимножествами. Введены понятия сходимости последовательностей измеримых множеств и мультимножеств по метрике, изучена их связь со сходимостью почти всюду и по мере. Рассмотрены метрические и топологические свойства пространств измеримых множеств и измеримых мультимножеств. Показана связь таких пространств с пространствами ограниченных числовых последовательностей и векторными пространствами. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования на этих пространствах разных видов метрик – основной, полностью усредненной и локально усредненной. При переходе от мультимножеств к множествам метрические пространства измеримых мультимножеств становятся соответствующими пространствами измеримых множеств.

Примеры практического применения вновь разработанного теоретического инструментария приводятся в главе 9. Здесь описаны разные способы представления объектов, которые могут существовать в нескольких «экземплярах» с отличающимися значениями количественных и качественных признаков, характеризующих их свойства, в том числе представление объектов с помощью мультимножеств, и разные способы группирования таких объектов. Образцами многопризнаковых объектов подобного рода служат объекты, параметры которых одновременно измеряются несколькими различными методами, проекты, оцененные несколькими независимыми экспертами по многим качественным критериям, текстовые документы, содержание которых отражается с помощью ключевых слов или лексических единиц, распознаваемые графические символы – печатные или рукописные, диагнозы заболеваний, поставленные пациентам консилиумом врачей, результаты голосований и социологических опросов разных групп населения, и многое другое. Вкратце обсуждаются основные идеи различных разновидностей иерархического и неиерархического кластерного анализа в метрических пространствах мультимножеств. Предложены методы решения двух конкретных задач классификации и упорядочения многопризнаковых объектов. В свое время именно потребность решения таких практических задач побудила автора заняться изучением мультимножеств.

Книга будет интересна и полезна и «чистым» математикам, специализирующимся в областях дискретной математики, алгебры, функционального анализа, и исследователям, занятым разработкой теории и применением методов принятия решений, искусственным интеллектом и экспертными системами, анализом и распознаванием образов, языками программирования, математической лингвистикой, сетями Петри, и многими другим специалистам, сталкивающимся в своей профессиональной деятельности с необходимостью анализа и обработки разнообразной (числовой и символьной, разнородной и противоречивой) информации. Особую надежду автор возлагает на молодых и пытливых людей, кого может увлечь новая, почти совсем не изведанная область науки, в которой «есть разгуляться где на воле» и теоретикам, и прикладникам.

Автор выражает чувство глубокого уважения и искренней признательности академику Олегу Ивановичу Ларичеву, скоропостижно скончавшемуся в январе 2003 года, с которым автора связывали многолетняя личная дружба, творческие и служебные отношения.

Автор искренне признателен своим коллегам и друзьям, в первую очередь М.Ю.Стернину, Г.И.Шепелеву, В.Д.Ногину, Е.А.Соловьевой, С.И.Маторину, И.А.Квасникову, Л.М.Остроумовой, С.В.Шаманину, О.И. и Г.И.Германенко, Е.М.Бабиной, В.О.Лисицыной за их доброжелательную поддержку, а также В.М.Афанасьеву, В.И.Вишневской, Л.С.Гнеденко, В.В.Кузнецовой, В.Ю.Ладыниной, А.В.Литвиновой, Н.В.Морозовой, Г.В.Ройзензону, А.В.Рябовой, З.Ф.Филипенковой, Е.М.Фуремс и многим другим, способствовавшим по мере своих возможностей написанию книги и подготовке ее к изданию.

Автор глубоко благодарен рецензентам В.И.Богачеву и С.И.Травкину, а также А.Н.Богачевой, чьи конструктивные советы и замечания позволили улучшить содержание книги и исправить замеченные неточности.

Особая признательность моим детям, Илье, Танюше, внуку Даниле, крестнику Ване, с пониманием относящимся к тому, что автор уделяет больше времени написанию книг, чем общению с ними.

Автор с благодарностью отмечает вклад в подготовку книги Российского фонда фундаментальных исследований, который на протяжении многих лет оказывает поддержку многим российским ученым, и в частности, автору (проекты РФФИ 95-01-00083, 96-01-01621, 99-01-00476, 01-01-00514, 02-01-01077), Российской академии наук, финансирующей данную тематику в рамках программ фундаментальных исследований РАН «Математическое моделирование и интеллектуальные системы» и Отделения информационных технологий и вычислительных систем РАН «Фундаментальные основы информационных технологий и систем», а также Министерства промышленности, науки и технологий России, частично поддержавшего исследования в рамках проектов по федеральной целевой научно-технической программе «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники» на 2002-2006 годы.

Автор будет искренне рад, если его работа вызовет интерес и привлечет внимание исследователей к более глубокому и всестороннему изучению мультимножеств – этого достаточно давно известного, но практически мало «освоенного» объекта классической математики, который уже нашел и, как мне думается, найдет еще много новых и неожиданных приложений.

<u>Глава 0</u>
Основные понятия теории мультимножеств

0.1. Понятие мультимножества. Мультимножество или множество с повторяющимися элементами, как и обычное множество, есть совокупность элементов произвольной природы. Однако в отличие от множеств, один и тот же элемент может присутствовать в мультимножестве многократно, и кратность вхождения элемента является существенной особенностью, делающей мультимножество качественно новым математическим понятием. Элементы множеств и мультимножеств будем обозначать строчными буквами $a,b,\ldots$, множества – прописными буквами $A,B,\ldots$, мультимножества – прописными полужирными буквами $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\ldots$, семейства множеств и мультимножеств – рукописными буквами $\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots$, системы множеств и мультимножеств – прямыми буквами $\mathsf{A},\mathsf{B},\ldots$

Мультимножествами являются, например, следующие совокупности элементов a, b, c, d, e, f, g:

$$\boldsymbol{A}=\{a,b,c,d,e,c,d,b,d,c\},\ \boldsymbol{B}=\{b,d,e,f,b,d,e,f,b\},\ \boldsymbol{C}=\{a,e,d,a,c,a,a,e,c,c,e,e,a\}.$$

Обычно порядок следования элементов в мультимножестве несущественен. Поэтому мультимножества $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ можно записать более компактно как

$$\boldsymbol{A}=\{1\bullet a,\ 2\bullet b,\ 3\bullet c,\ 3\bullet d,\ 1\bullet e,\ 0\bullet f,\ 0\bullet g\},$$
$$\boldsymbol{B}=\{0\bullet a,\ 3\bullet b,\ 0\bullet c,\ 2\bullet d,\ 2\bullet e,\ 2\bullet f,\ 0\bullet g\},$$
$$\boldsymbol{C}=\{5\bullet a,\ 0\bullet b,\ 3\bullet c,\ 1\bullet d,\ 4\bullet e,\ 0\bullet f,\ 0\bullet g\},$$

где символ • обозначает кратность вхождения элемента в мультимножество. Как правило, мы не будем указывать в записи мультимножества отсутствующие в нем элементы. Для краткости, если это не вызовет разночтений, мы можем также опускать знак • кратности элемента и писать просто:

$$\boldsymbol{A}=\{1a,2b,3c,3d,1e\},\quad \boldsymbol{B}=\{3b,2d,2e,2f\},\quad \boldsymbol{C}=\{5a,3c,1d,4e\}.$$

Дадим формальное определение мультимножества. *Мультимножеством* $\boldsymbol{A}$, порожденным основным (обычным) множеством $U=\{x_1,x_2,\ldots\}$, все элементы x_i которого различны, называется совокупность групп одинаковых элементов

$$\boldsymbol{A}=\{k_{A1}\bullet x_1,\ k_{A2}\bullet x_2,\ldots\},\quad x_i\in U. \tag{0.01}$$

Группу одинаковых элементов $k_{Ai}\bullet x_i$ будем называть *компонентой мультимножества*, одинаковые элементы x_i, входящие в компоненту $k_{Ai}\bullet x_i$, – *экземплярами элементов мультимножества*, а функцию k_A, значение которой $k_A(x_i)=k_{Ai}$ определяет число вхождений элемента $x_i\in U$ в мультимножество $\boldsymbol{A}$ или «вес» элемента x_i в мультимножестве $\boldsymbol{A}$ – *функцией кратности* или *функцией числа экземпляров мультимножества* $\boldsymbol{A}$. Таким образом, мультимножество – это множество, состоящее из различных групп одинаковых экземпляров элементов.

Будем говорить, что *элемент x принадлежит мультимножеству $\boldsymbol{A}$* (обозначается $x\in\boldsymbol{A}$) и *в мультимножестве $\boldsymbol{A}$ имеется ровно k экземпляров элемента x* тогда и только тогда, когда кратность элемента x равна $k_A(x)=k>0$. Когда кратность элемента x равна нулю $k_A(x)=0$, тогда будем говорить, что *элемент x не содержится в мультимножестве $\boldsymbol{A}$* (обозначается $x\notin\boldsymbol{A}$). Тем самым принадлежность элемента x мультимножеству $\boldsymbol{A}$ определяется функцией кратности как

$$k_A(x)=\begin{cases} k>0 - \text{целое, если } x\in \boldsymbol{A}, \\ 0, \text{ если } x\notin \boldsymbol{A}. \end{cases} \tag{0.02}$$

Наряду с функцией кратности k_A введем *характеристическую функцию* χ_A мультимножества $\boldsymbol{A}$, которая принимает значения

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x\in \boldsymbol{A}, \\ 0, \text{ если } x\notin \boldsymbol{A}. \end{cases} \tag{0.03}$$

Функция кратности k_A, задающая однозначное отображение k_A: $U\to\mathbb{Z}_+$ основного множества U в множество $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\ldots\}$ неотрицательных целых чисел, является одним из краеугольных понятий теории мультимножеств. Характеристическая функция мультимножества χ_A задает отображение χ_A: $U\to\mathbb{Z}_{01}$ множества U в бинарное множество $\mathbb{Z}_{01}=\{0,1\}$. Множество U служит областью определения функций k_A и χ_A, а множества $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{Z}_{01}$ – соответственно областями значений этих функций.

Если все мультимножества семейства $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\ldots\}$ образуются из элементов одного и того же множества $G=\{x_1,x_2,\ldots\}$, то множество G называется *порождающим множеством* или *доменом* для семейства $\mathcal{A}$. В дальнейшем, если это специально не оговорено, будем считать, что мы имеем дело с мультимножествами, которые порождены одним и тем же доменом, и записывать компоненты мультимножеств в том же порядке, в каком записаны элементы домена G. В качестве порождающего множества G может выступать любое непустое (конечное или бесконечное) множество, в том числе и основное множество U. Независимо от конечности домена G порождаемые им мультимножества могут быть и конечными, и счетными в силу счетности множества $\mathbb{Z}_+$.

Определению мультимножества в виде (0.01) можно придать более компактную форму записи, представив его как множество компонент

$$\boldsymbol{A}=\{k_A(x)\bullet x \mid x\in G,\ k_A(x)\in\mathbb{Z}_+\}, \tag{0.04}$$

в котором выражение $k_A(x)\bullet x$ можно условно понимать как «алгебраическое умножение элемента x домена G на число $k_A(x)$, равное кратности элемента x».

Некоторые авторы [Сач77], [Aig79] записывают мультимножество иначе:

$$\boldsymbol{A}=\{x^{k_x} \mid x\in G,\ k_x\in\mathbb{Z}_+\},$$

где $k_x=k_A(x)$, а выражение x^{k_x} можно трактовать как «возведение элемента x домена G в степень с показателем k_x , равным кратности элемента x». Первую форму записи можно назвать «коэффициентной», а вторую «степенной».

В отличие от множества мультимножество обладает несколькими основными характеристиками, важнейшими из которых являются мощность и размерность мультимножества. *Мощность* мультимножества $\boldsymbol{A}$ определяется как общее число экземпляров всех его элементов

$$|\boldsymbol{A}| = \mathrm{card}\boldsymbol{A} = \sum_{x\in G} k_A(x), \tag{0.05}$$

а *размерность* мультимножества $\boldsymbol{A}$ – как общее число различных элементов

$$/\boldsymbol{A}/ = \dim\boldsymbol{A} = \sum_{x\in G} \chi_A(x). \tag{0.06}$$

Размерность мультимножества не превосходит его мощности и мощности домена $/\boldsymbol{A}/\le|\boldsymbol{A}|$, $/\boldsymbol{A}/\le|G|$. Мощность мультимножества $|\boldsymbol{A}|$ в общем случае не связана с мощностью домена $|G|$. Конечные мультимножества, имеющие мощность m и состоящие из m элементов (считая повторения), будем называть *m-кардинальными мультимножествами* или *m-мультимножествами*, а имеющие размерность n и состоящие из n компонент – *n-мерными мультимножествами*.

Высотой или *пиковым значением* мультимножества $\boldsymbol{A}$ называется максимальное значение его функции кратности k_A

$$\mathrm{hgt}\boldsymbol{A} = \max_{x\in G} k_A(x), \qquad (0.07)$$

а элемент x_{A^*}, для которого функция кратности k_A максимальна, – *пиком* или *пиковым элементом* мультимножества $\boldsymbol{A}$. Очевидно, что в мультимножестве может иметься несколько пиковых элементов x_{Ai^*}, x_{Aj^*}, для которых $k_A(x_{Ai^*})=k_A(x_{Aj^*})$.

Опорным множеством или *носителем* мультимножества $\boldsymbol{A}$ (обозначается Supp$\boldsymbol{A}$) называется обычное множество, состоящее из единичных экземпляров всех элементов, входящих в мультимножество $\boldsymbol{A}$

$$\mathrm{Supp}\boldsymbol{A} = \{x \mid x\in G,\ \chi_{\mathrm{Supp}A}(x)=\chi_A(x)\}, \qquad (0.08)$$

Носитель мультимножества является подмножеством порождающего множества G ($\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}\subseteq G$). Мощность носителя равна размерности мультимножества $|\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}|=/\boldsymbol{A}/$ и не превосходит мощности домена $|\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}|\le|G|$. Очевидно, что разные мультимножества могут иметь один и тот же носитель.

Мультимножество удобно изображать графически в виде ступенчатой гистограммы, по оси абсцисс которой расположены элементы основного множества U или домена G, а по оси ординат отложены значения $k_A(x)$ функции кратности, показывающие количество экземпляров элемента x в мультимножестве $\boldsymbol{A}$. Таким образом, каждый столбец гистограммы соответствует определенной компоненте мультимножества $\boldsymbol{A}$. Основание гистограммы составляет носитель мультимножества Supp$\boldsymbol{A}$. Ширина гистограммы равна размерности $/\boldsymbol{A}/$ мультимножества (мощности носителя $|\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}|$), а высота гистограммы есть высота мультимножества hgt$\boldsymbol{A}$. Мощность мультимножества $|\boldsymbol{A}|$ будет численно равна площади фигуры, ограниченной гистограммой.

П р и м е р 0.1. Пусть над доменом $G=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ образованы мультимножества $\boldsymbol{A}=\{1\bullet a,2\bullet b,3\bullet c,3\bullet d,1\bullet e,0\bullet f,0\bullet g\}$ и $\boldsymbol{C}=\{5\bullet a,0\bullet b,3\bullet c,1\bullet d,4\bullet e,0\bullet f,0\bullet g\}$.

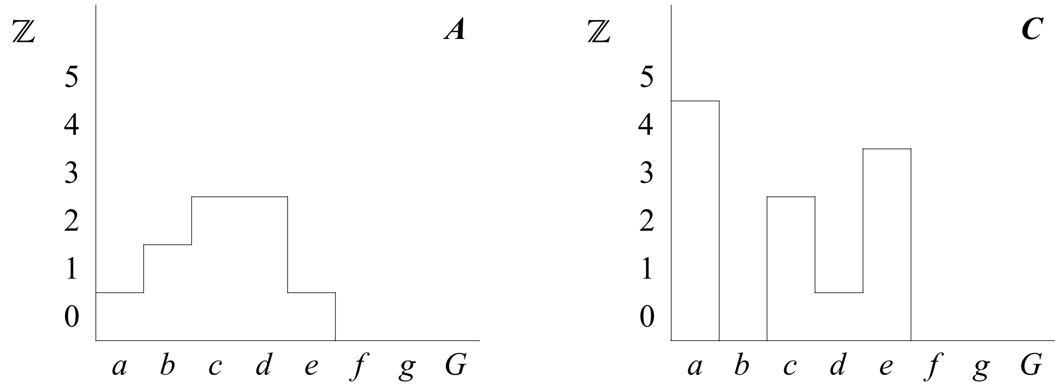

Рис.0.1. Представление мультимножеств с помощью гистограмм.

Значения функций кратности мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$ равны:

$k_A(a)=1$, $k_A(b)=2$, $k_A(c)=3$, $k_A(d)=3$, $k_A(e)=1$, $k_A(f)=0$, $k_A(g)=0$;

$k_C(a)=5$, $k_C(b)=0$, $k_C(c)=3$, $k_C(d)=1$, $k_C(e)=4$, $k_C(f)=0$, $k_C(g)=0$.

Мощности, размерности, высоты, пиковые элементы и носители мультимножеств равны соответственно:

$|\boldsymbol{A}|=10$; $/\boldsymbol{A}/=5$; $\mathrm{hgt}\boldsymbol{A}=3$; $x_{A*}=c,d$; $\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}=\{a,b,c,d,e\}$;

$|\boldsymbol{C}|=13$; $/\boldsymbol{C}/=4$; $\mathrm{hgt}\boldsymbol{C}=5$; $x_{C*}=a$; $\mathrm{Supp}\boldsymbol{C}=\{a,c,d,e\}$.

Гистограммы, изображающие мультимножества, приведены на рис.0.1. ◘

Наличие у мультимножеств нескольких основных характеристик влечет существование гораздо большего, чем у множеств, разнообразия их видов и свойств. Во-первых, для мультимножеств остаются справедливыми традиционные теоретико-множественные понятия, введенные для множеств. Во-вторых, наряду с этим можно ввести новые понятия, представления и операции, присущие только мультимножествам.

Рассмотрим возможные способы сопоставления мультимножеств, обусловленные особенностями их различных характеристик. Мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются *равными* ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$), если $k_A(x)=k_B(x)$ для всех элементов $x\in G$, и *неравными* ($\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$), если $k_A(x)\neq k_B(x)$ хотя бы для одного $x\in G$. Для равных мультимножеств имеем $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, $/\boldsymbol{A}/=/\boldsymbol{B}/$, $\mathrm{hgt}\boldsymbol{A}=\mathrm{hgt}\boldsymbol{B}$, $x_{A*}=x_{B*}$, $\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}=\mathrm{Supp}\boldsymbol{B}$. Мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ будем называть *равномощными*, если $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$; *равноразмерными*, если $/\boldsymbol{A}/=/\boldsymbol{B}/$; *равновеликими*, если они равномощны и равноразмерны. Равные мультимножества равновелики, обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Будем говорить, что мультимножество $\boldsymbol{B}$ *содержится* или *включено* в мультимножество $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$), если $k_B(x)\leq k_A(x)$, для каждого элемента $x\in G$. Мультимножество $\boldsymbol{B}$ называется тогда *подмультимножеством* мультимножества $\boldsymbol{A}$, а мультимножество $\boldsymbol{A}$ – *надмультимножеством* мультимножества $\boldsymbol{B}$. В этом случае $|\boldsymbol{B}|\leq|\boldsymbol{A}|$, $/\boldsymbol{B}/\leq/\boldsymbol{A}/$, $\mathrm{hgt}\boldsymbol{B}\leq\mathrm{hgt}\boldsymbol{A}$, $\mathrm{Supp}\boldsymbol{B}\subseteq\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}$, а $x_{A*}=x_{B*}$, либо $x_{A*}\neq x_{B*}$. Как и в случае обычных множеств, одновременное выполнение условий $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$ влечет равенство мультимножеств $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

З а м е ч а н и е. Включение мультимножества обладает свойствами рефлексивности ($\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}$) и транзитивности ($\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{C}$), а значит, является отношением предпорядка. □

Мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ будем называть *одноименно* (*гомогенно*) или *S-эквивалентными* ($\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$), если их носители совпадают ($\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}=\mathrm{Supp}\boldsymbol{B}$) и существует взаимно однозначное соответствие f между одноименными компонентами: $k_B(x)=f(k_A(x))$ для каждого элемента $x\in G$; *разноименно* (*гетерогенно*) или *D-эквивалентными* ($\boldsymbol{A}\approxeq\boldsymbol{B}$), если их носители эквивалентны ($\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}\sim\mathrm{Supp}\boldsymbol{B}$) и существует взаимно однозначное соответствие f между разноименными компонентами: $k_B(x_i)=f(k_A(x_j))$, $x_i,x_j\in G$, где f – целочисленная функция с областью значений $\mathbb{Z}_+$. S- и D-эквивалентные мультимножества равноразмерны $/\boldsymbol{B}/=/\boldsymbol{A}/$, их высоты связаны равенством $\mathrm{hgt}\boldsymbol{B}=f(\mathrm{hgt}\boldsymbol{A})$. Одно из S-эквивалентных мультимножеств всегда является подмультимножеством другого, а для D-эквивалентных мультимножеств это утверждение не выполняется. D-эквивалентные мультимножества становятся S-эквивалентными, если в одном из мультимножеств выполнить переобозначение элементов $x_i \to x_j$. Частными случаями S-эквивалентности будут *равные* мультимножества; *сдвинутые* мультимножества, для которых $k_B(x)=k_A(x)+p$, $p\geq 0$ – целое; *растянутые* или *пропорциональные* мультимножества, для которых $k_B(x)=qk_A(x)$, $q\geq 1$ – целое. Важным частным случаем D-эквивалентности являются *равносоставленные* мультимножества, чьи разноименные компоненты равны $k_A(x_i)=k_B(x_j)$, $x_i, x_j \in G$. Равные мультимножества равносоставлены, обратное утверждение неверно.

Определим некоторые особые виды мультимножеств и семейств мультимножеств. Мультимножество $\varnothing$, не имеющее элементов, называется *пустым*. Функция числа экземпляров пустого мультимножества $k_\varnothing(x)=0$ для всех $x\in U$. Мощность, размерность и высота пустого мультимножества равны нулю: $|\varnothing|=/\varnothing/=\mathrm{hgt}\varnothing=0$, а носитель пустого мультимножества – тоже пустое множество $\mathrm{Supp}\varnothing=\varnothing$. Пустое мультимножество эквивалентно пустому множеству $\varnothing$ и является, очевидно, подмультимножеством любого мультимножества: $\varnothing\subseteq \boldsymbol{A}$. Если семейство мультимножеств $\mathcal{A}$ состоит из единственного пустого мультимножества, то есть $\mathcal{A}=\{\varnothing\}$, то, как и в случае множеств, его мощность равна $|\mathcal{A}|=1$. Гистограмма пустого мультимножества $\varnothing$ совпадает с осью U.

Мультимножество $\boldsymbol{C}_{[h]}$, кратность всех элементов которого одинакова и равна $k_{C[h]}(x)=h=\mathrm{const}$, $h\in\mathbb{Z}_+$, будем называть *мультимножеством высоты h* или *постоянным* (*константным*) *мультимножеством* Мощность и размерность постоянного мультимножества связаны соотношением: $|\boldsymbol{C}_{[h]}|=h\cdot/\boldsymbol{C}_{[h]}/$, а высота равна $\mathrm{hgt}\boldsymbol{C}_{[h]}=h$. Пиковым элементом $x_{C[h]^*}$ является любой элемент постоянного мультимножества. Всякое постоянное мультимножество $\boldsymbol{C}_{[h]}$ есть мультимножество, сдвинутое на $h-1$ единиц или растянутое в h раз по отношению к своему носителю $\mathrm{Supp}\boldsymbol{C}_{[h]}$. Гистограмма, изображающая постоянное мультимножество $\boldsymbol{C}_{[h]}$, представляет собой прямоугольник, основание которого есть носитель мультимножества $\mathrm{Supp}\boldsymbol{C}_{[h]}$, а высота равна h. Как следует из определения, пустое мультимножество $\varnothing$ является постоянным мультимножеством $\boldsymbol{C}_{[0]}$ высоты $\mathrm{hgt}\varnothing=0$, любое обычное множество B, включая основное множество U, домен G и носитель $\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}$ произвольного мультимножества $\boldsymbol{A}$ являются постоянными мультимножествами $\boldsymbol{B}_{[1]}$ высоты $\mathrm{hgt}\boldsymbol{B}_{[1]}=1$.

Введем еще одно весьма важное понятие, играющее для мультимножеств роль, аналогичную роли основного множества U в теории множеств. Если все мультимножества какого-либо семейства мультимножеств $\mathcal{A}$ над доменом G являются подмультимножествами некоторого мультимножества $\boldsymbol{Z}$ ($\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{Z}$), то есть $k_A(x)\leq k_Z(x)$ для всех элементов любого мультимножества $\boldsymbol{A}$, то такое мультимножество $\boldsymbol{Z}$ будем называть *максимальным мультимножеством* или *универсумом*. Максимальное мультимножество, как и пустое мультимножество, может считаться определенным как над доменом G, так и над основным множеством U, то есть $\mathrm{Supp}\boldsymbol{Z}=U$. Формально в роли универсума $\boldsymbol{Z}$ может выступать мультимножество с функцией кратности $k_Z(x)=\max\limits_{A\in\mathcal{A}} k_A(x)$, $\forall x\in U$. Вместе с тем проблема определения максимального мультимножества $\boldsymbol{Z}$ или вычисления значений $k_Z(x)$ его функции кратности может оказаться совсем нетривиальной.

Обозначим через $\wp(\boldsymbol{X})$ семейство всех различных подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}$ над доменом G. Слово «различных» подмультимножеств употреблено здесь неслучайно, поскольку теория мультимножеств допускает возможность неограниченного повторения одинаковых элементов в одном и том же мультимножестве и соответственно неограниченного повторения одинаковых мультимножеств в одном и том же семействе мультимножеств. В случае семейства мультимножеств $\wp(\boldsymbol{X})$ будем всегда считать, что различные мультимножества имеются в нем в единственном экземпляре. Очевидно, что среди элементов семейства $\wp(\boldsymbol{X})$ присутствуют пустое мультимножество $\varnothing$, носитель мультимножества Supp$\boldsymbol{X}$ и само мультимножество $\boldsymbol{X}$, которое является универсумом для семейства $\wp(\boldsymbol{X})$.

Т е о р е м а 0.1. *Мощность семейства $\wp(\boldsymbol{X})$ всех подмультимножеств n-мерного мультимножества $\boldsymbol{X}=\{k_{X1}\bullet x_1, k_{X2}\bullet x_2,..., k_{Xn}\bullet x_n\}$ равна*

$$|\wp(\boldsymbol{X})| = (1+k_{X1})\cdot(1+k_{X2})\cdot\ldots\cdot(1+k_{Xn}) = \prod_{i=1}^{n}(1+k_{Xi}). \qquad (0.09)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции кратности элементов $x_i \in G$ любого подмультимножества $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{X}$ удовлетворяют условиям $0\le k_{Bi}\le k_{Xi}$ для всех $i=1,\ldots,n$. Значит, кратность каждого элемента x_i в различных подмультимножествах $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{X}$ может принимать одно из $1+k_{Xi}$ значений. Всего имеется n элементов $x_i \in G$. Поэтому число различных комбинаций разных элементов x_i со всеми возможными кратностями, а следовательно, и общее число всех подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}$, включая пустое мультимножество $\varnothing$, будет равно произведению n различных сомножителей вида $(1+k_{Xi})$, $i=1,\ldots,n$. ■

В более общем случае, когда $\boldsymbol{X}$ является бесконечномерным счетным мультимножеством, мощность семейства $\wp(\boldsymbol{X})$ определяется значением бесконечного произведения $\Pi_n=(1+k_{X1})\cdot(1+k_{X2})\cdot\ldots\cdot(1+k_{Xn})\cdot\ldots$, аналогичного формуле (0.09). Из теории пределов известно [WW27], что для абсолютной сходимости бесконечного произведения Π_n при $n\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы ряд чисел $\Sigma_n k_{Xn}$ абсолютно сходился. Для положительных целых чисел k_{Xi} этот ряд, очевидно, расходится.

Пусть на количество экземпляров каждого элемента x любого мультимножества $\boldsymbol{A}$ из семейства мультимножеств, порожденных доменом G, наложено ограничение $k_A(x)\le k$, то есть ни один элемент x не может входить в мультимножество $\boldsymbol{A}$ более k раз. Семейство таких мультимножеств будем называть *k-ограниченной серией* или *k-ограниченным повторением* мультимножеств над доменом G и обозначать $\wp_{[k]}$. Универсумом для k-ограниченной серии $\wp_{[k]}$ будет постоянное мультимножество $\boldsymbol{Z}_{[k]}$ с функцией кратности $k_{Z[k]}(x)=k$ для всех $x\in G$, пропорциональное домену G с коэффициентом пропорциональности k. Если домен G конечен, то мощность универсума $\boldsymbol{Z}_{[k]}$ равна $|\boldsymbol{Z}_{[k]}|=k\cdot|G|$. Если домен G – счетное множество, то универсум $\boldsymbol{Z}_{[k]}$ тоже счетное мультимножество, и его мощность будет равна мощности множества натуральных чисел $|\boldsymbol{Z}_{[k]}|=k\cdot|G|=\aleph_0$.

Очевидно, что k-ограниченная серия $\wp_{[k]}$ над доменом G есть ничто иное, как семейство $\wp(\boldsymbol{Z}_{[k]})$ всех подмультимножеств универсума $\boldsymbol{Z}_{[k]}$ над доменом G.

В частности, 0-ограниченная серия $\wp_{[0]}$ состоит только из одного пустого мультимножества $\{\varnothing\}$, 1-ограниченная серия $\wp_{[1]}$ совпадает с семейством $\wp(G)$ всех подмножеств домена G. В случае конечного n-элементного домена $G=\{x_1,...,x_n\}$ для мощности k-ограниченной серии $\wp_{[k]}$ получаем из соотношения (0.09)

$$|\wp_{[k]}| = |\wp(\boldsymbol{Z}_{[k]})| = (1+k)^n. \tag{0.10}$$

Если на число экземпляров элементов мультимножеств, порожденных доменом G, ограничений не накладывается, то семейство таких мультимножеств будем называть *неограниченной серией* $\wp_{[\infty]}$ над доменом G. Очевидно, что любая ограниченная серия является подсемейством серии более высокого уровня: $\wp_{[0]}\subseteq\wp_{[1]}\subseteq\ldots\subseteq\wp_{[k]}\subseteq\ldots\subseteq\wp_{[\infty]}$. Для неограниченной серии $\wp_{[\infty]}$ над конечным или счетным доменом G универсум $\boldsymbol{Z}_{[\infty]}$ будет счетным мультимножеством, мощность которого равна $|\boldsymbol{Z}_{[\infty]}|=|\mathbb{Z}_+|\cdot|G|=\aleph_0$, так как прямое произведение конечного и счетного множества или двух счетных множеств счетно [FKD64].

Отметим одну крайне важную особенность мультимножеств, имеющую принципиальное значение. Если функцию числа экземпляров мультимножества k_A положить равной характеристической функции χ_A, которая может принимать только два значения 0 или 1, то мультимножество $\boldsymbol{A}$ превратится в обычное множество A. При этом компонента мультимножества, состоящая из нескольких одинаковых элементов, сократится до одного единственного элемента, мощность мультимножества $|\boldsymbol{A}|$ окажется равной его размерности $/\boldsymbol{A}/$, а носитель мультимножества Supp$\boldsymbol{A}$ совпадет с множеством A.

При предельном переходе от мультимножеств к множествам условия равенства, неравенства и включения мультимножеств совпадут с такими же условиями для множеств, а S- и D-эквивалентности мультимножеств станут эквивалентностью множеств. Одинаковыми будут понятия пустого множества и пустого мультимножества, а максимальное мультимножество $\boldsymbol{Z}$ превратится в основное множество U. Аналогов сдвинутым, растянутым и постоянным мультимножествам во множествах нет.

Условие, при котором функция числа экземпляров мультимножества k_A заменяется его характеристической функцией χ_A, назовем *правилом унитаризации функции кратности* и обозначим его как $k_A(x)\mapsto\chi_A(x)$. В дальнейшем будем применять правило $k_A(x)\mapsto\chi_A(x)$ для проверки справедливости переноса на мультимножества утверждений, установленных для множеств. Правило унитаризации функции кратности мультимножеств, очевидно, не распространяется на случаи, которые не имеют смысла или аналогов для множеств. Постараемся обращать внимание читателя на такого рода особенности.

0.2. Операции над мультимножествами. Аналогично теории множеств будем полагать, если это специально не оговорено, что все рассматриваемые мультимножества порождены одним и тем же доменом G и являются подмультимножествами некоторого универсума $\boldsymbol{Z}$. Определим следующие основные операции над мультимножествами: объединение, пересечение, арифметическое сложение, арифметическое вычитание, дополнение, симметрическую разность, умножение на число, арифметическое умножение и возведение в арифметическую степень, прямое произведение и возведение в прямую степень.

Объединением мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов, которые присутствуют хотя бы в одном из мультимножеств, и кратность каждого элемента равна максимальной кратности соответствующих элементов в объединяемых мультимножествах

$$\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B} = \{k_{A\cup B}(x)\bullet x \mid k_{A\cup B}(x) = \max(k_A(x), k_B(x))\}. \tag{0.11}$$

Объединением произвольного числа мультимножеств, составляющих семейство $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_i\}$, $i\in I$, называется мультимножество

$$\bigcup_{i\in I}\boldsymbol{A}_i = \{ k_{\bigcup_i A_i}(x)\bullet x \mid k_{\bigcup_i A_i}(x) = \max_{i\in I} k_{A_i}(x),\ \forall x\in G\}. \tag{0.12}$$

Носитель объединения мультимножеств определяется правилом:

$$\mathrm{Supp}(\bigcup_{i\in I}\boldsymbol{A}_i) = \bigcup_{i\in I}(\mathrm{Supp}\,\boldsymbol{A}_i). \tag{0.13}$$

Пересечением мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов, которые одновременно присутствуют в каждом из мультимножеств, и кратность каждого элемента равна минимальной кратности соответствующих элементов в пересекаемых мультимножествах

$$\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B} = \{k_{A\cap B}(x)\bullet x \mid k_{A\cap B}(x) = \min(k_A(x), k_B(x))\}. \tag{0.14}$$

Пересечением произвольного числа мультимножеств, составляющих семейство $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_i\}$, $i\in I$, называется мультимножество

$$\bigcap_{i\in I}\boldsymbol{A}_i = \{ k_{\bigcap_i A_i}(x)\bullet x \mid k_{\bigcap_i A_i}(x) = \min_{i\in I} k_{A_i}(x),\ \forall x\in G\}. \tag{0.15}$$

Носитель пересечения мультимножеств определяется правилом:

$$\mathrm{Supp}(\bigcap_{i\in I}\boldsymbol{A}_i) = \bigcap_{i\in I}(\mathrm{Supp}\,\boldsymbol{A}_i). \tag{0.16}$$

Арифметической суммой мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов, которые присутствуют хотя бы в одном из мультимножеств, и кратность каждого элемента равна сумме кратностей соответствующих элементов в складываемых мультимножествах

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \{k_{A+B}(x)\bullet x \mid k_{A+B}(x) = k_A(x)+k_B(x)\}. \tag{0.17}$$

Суммой произвольного числа мультимножеств, составляющих семейство $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_i\}$, $i\in I$, называется мультимножество

$$\sum_{i\in I}\boldsymbol{A}_i = \{ k_{\sum_i A_i}(x)\bullet x \mid k_{\sum_i A_i}(x) = \sum_{i\in I} k_{A_i}(x),\ \forall x\in G\}. \tag{0.18}$$

Носитель суммы мультимножеств в общем случае не равен сумме носителей складываемых мультимножеств, поскольку операция арифметического сложения множеств принципиально не определима. Этим сложение мультимножеств отличается от их объединения и пересечения. Носитель суммы мультимножеств определяется по следующему правилу:

$$\mathrm{Supp}(\sum_{i\in I}\boldsymbol{A}_i) = \bigcup_{i\in I}(\mathrm{Supp}\,\boldsymbol{A}_i). \tag{0.19}$$

Арифметической разностью мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов мультимножества $\boldsymbol{A}$, кратность которых превышает кратность соответствующих элементов в мультимножестве $\boldsymbol{B}$, и кратность каждого элемента равна разности кратностей соответствующих элементов в вычитаемых мультимножествах

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \{k_{A-B}(x)\bullet x \mid k_{A-B}(x) = \max(k_A(x)-k_B(x), 0)\}. \qquad (0.20)$$

Выражение для числа экземпляров каждого элемента разности мультимножеств $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ можно записать также в следующем эквивалентном виде:

$$k_{A-B}(x) = k_A(x) - k_{A\cap B}(x). \qquad (0.21)$$

Как и в случае множеств, разность мультимножеств определена только для двух мультимножеств. При этом если $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\varnothing$. Справедливо и обратное утверждение: если $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\varnothing$, то $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$. Действительно, в этом случае из формулы (0.21) имеем $k_A(x)=k_{A\cap B}(x)$. Тогда по определению (0.14) пересечения мультимножеств $k_A=\min(k_A,k_B)\leq k_B$, и, следовательно, по условию (0.13) мультимножество $\boldsymbol{A}$ содержится в мультимножестве $\boldsymbol{B}$.

Носитель арифметической разности мультимножеств в общем случае не совпадает с разностью носителей вычитаемых мультимножеств:

$$(\mathrm{Supp}\boldsymbol{A})\backslash(\mathrm{Supp}\boldsymbol{B}) \subseteq \mathrm{Supp}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}). \qquad (0.22)$$

Симметрической разностью мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов обоих мультимножеств, кратности которых различны, и кратность каждого элемента равна модулю разности кратностей соответствующих элементов в вычитаемых мультимножествах

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B} = \{k_{A\Delta B}(x)\bullet x \mid k_{A\Delta B}(x) = |k_A(x)-k_B(x)|\}. \qquad (0.23)$$

Выражение для числа экземпляров каждого элемента симметрической разности мультимножеств $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}$ можно записать также в следующем эквивалентном виде:

$$k_{A\Delta B}(x) = \max(k_A(x), k_B(x)) - \min(k_A(x), k_B(x)). \qquad (0.24)$$

Как и в случае множеств, симметрическая разность мультимножеств определена только для двух мультимножеств.

Носитель симметрической разности мультимножеств в общем случае не совпадает с симметрической разностью носителей вычитаемых мультимножеств:

$$(\mathrm{Supp}\boldsymbol{A})\Delta(\mathrm{Supp}\boldsymbol{B}) \subseteq \mathrm{Supp}(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}). \qquad (0.25)$$

Вместе с тем, несмотря на отсутствие непосредственной зависимости между носителями вычитаемых мультимножеств, имеются следующие изящные связи между арифметической и симметрической разностями мультимножеств:

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}), \qquad (0.26)$$

$$\mathrm{Supp}(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}))\bigcup(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})), \qquad (0.27)$$

$$(\mathrm{Supp}\boldsymbol{A})\Delta(\mathrm{Supp}\boldsymbol{B})=(\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}\backslash\mathrm{Supp}\boldsymbol{B})\bigcup(\mathrm{Supp}\boldsymbol{B}\backslash\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}). \qquad (0.28)$$

Дополнением мультимножества $\boldsymbol{A}$ до универсума $\boldsymbol{Z}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов домена G, и кратность каждого элемента равна разности кратностей соответствующих элементов в универсуме $\boldsymbol{Z}$ и дополняемом мультимножестве $\boldsymbol{A}$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A}=\{ k_{\overline{A}}(x) \bullet x \mid k_{\overline{A}}(x) = k_Z(x)-k_A(x), \forall x\in G\}. \qquad (0.29)$$

Носители всякого мультимножества и дополнения к нему могут быть как одинаковыми, так и разными множествами. Кроме того, носитель дополнения мультимножества обычно не совпадает с дополнением носителя мультимножества. Справедливы следующие соотношения:

$$\overline{\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}} \subseteq \mathrm{Supp}\,\overline{\boldsymbol{A}}. \qquad (0.30)$$

Строго говоря, домен G, порождающий любое мультимножество $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{Z}$, сам может быть подмножеством основного множества U и иметь свое собственное дополнение $\overline{G}=U\backslash G$. Поэтому более точным определением дополнения мультимножества будет выражение

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A}=\{k_{\overline{A}}(x)\bullet x \mid k_{\overline{A}}(x)=k_Z(x)-k_A(x),\ \forall x\in U\}. \qquad (0.31)$$

Носителем дополнения $\overline{\boldsymbol{A}}$ в первом случае будет домен G, а во втором – основное множество U. Однако принципиального отличия между этими двумя определениями нет.

Из определений пустого мультимножества и дополнения мультимножества следует, что пустое мультимножество $\varnothing$ и универсум $\boldsymbol{Z}$ взаимно дополняют друг друга: $\overline{\varnothing}=\boldsymbol{Z}$, $\overline{\boldsymbol{Z}}=\varnothing$.

З а м е ч а н и е Как известно, пересечение множества A и его дополнения $\overline{A}$ всегда пусто: $A\cap\overline{A}=\varnothing$. В отличие от множеств мультимножество $\boldsymbol{A}$ и его дополнение $\overline{\boldsymbol{A}}$ могут как пересекаться (при этом возможны разные случаи: и $\boldsymbol{A}\subseteq\overline{\boldsymbol{A}}$, и $\overline{\boldsymbol{A}}\subseteq\boldsymbol{A}$), так и не пересекаться ($\boldsymbol{A}\not\subset\overline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{A}}\not\subset\boldsymbol{A}$). Непересекающиеся мультимножества, для которых $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\varnothing$, называют *дизъюнктными*. □

Арифметическим произведением мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов, которые одновременно присутствуют в каждом из мультимножеств, и кратность каждого элемента равна произведению кратностей соответствующих элементов в перемножаемых мультимножествах

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B} = \{k_{A\bullet B}(x)\bullet x \mid k_{A\bullet B}(x) = k_A(x)\cdot k_B(x)\}. \qquad (0.32)$$

Арифметическим произведением произвольного числа мультимножеств, составляющих семейство $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_i\}$, $i\in I$, называется мультимножество

$$\prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i=\{k_{\prod_i A_i}(x)\bullet x \mid k_{\prod_i A_i}(x)=\prod_{i\in I}k_{A_i}(x),\ \forall x\in G\}. \qquad (0.33)$$

Арифметической n-ой степенью мультимножества $\boldsymbol{A}$ называется арифметическое произведение n одинаковых мультимножеств $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^n = \{k_{A^n}(x)\bullet x \mid k_{A^n}(x)= (k_A(x))^n,\ \forall x\in G\}. \qquad (0.34)$$

Как и в случае арифметической суммы мультимножеств, носитель арифметического произведения мультимножеств в общем случае не равен произведению носителей перемножаемых мультимножеств, хотя формально операцию арифметического умножения множеств можно определить через умножение их характеристических функций. Тогда умножение множеств будет совпадать с операцией пересечения множеств. Носители арифметического произведения мультимножеств и арифметической n-ой степени мультимножества определяются по следующим правилам:

$$\mathrm{Supp}(\prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i)=\bigcap_{i\in I}(\mathrm{Supp}\ \boldsymbol{A}_i), \qquad (0.35)$$

$$\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}^n = \mathrm{Supp}\boldsymbol{A}. \qquad (0.36)$$

Таким образом, мультимножество и его арифметическая степень являются S-эквивалентными мультимножествами: $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}^n$.

З а м е ч а н и е. Операция *селекции* мультимножеств, предложенная в [Yag86], является частным случаем арифметического произведения мультимножеств, когда один из сомножителей – обычное множество. □

Произведением мультимножества $\boldsymbol{A}$ *на целое число* h или *репродукцией* мультимножества $\boldsymbol{A}$ называется мультимножество, состоящее из всех элементов мультимножества $\boldsymbol{A}$, в котором кратность каждого элемента увеличена в h раз

$$h\bullet\boldsymbol{A} = \{k_{h\bullet A}(x)\bullet x \mid k_{h\bullet A}(x) = h\cdot k_A(x),\quad h\in\mathbb{Z}_+,\ \forall x\in G\}. \tag{0.37}$$

Отсюда вытекает, что мультимножество $\boldsymbol{A}$ и его репродукция $h\bullet\boldsymbol{A}$ суть пропорциональные мультимножеств, и значит, они S-эквивалентны $\boldsymbol{A}\cong h\bullet\boldsymbol{A}$, а их носители совпадают

$$\mathrm{Supp}(h\bullet\boldsymbol{A}) = \mathrm{Supp}\boldsymbol{A}\ . \tag{0.38}$$

Репродукцию мультимножества можно также представить как сумму h одинаковых мультимножеств $\boldsymbol{A}$: $h\bullet\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\ldots+\boldsymbol{A}$ (h раз), или как произведение постоянного мультимножества $\boldsymbol{C}_{[h]}$ высоты h и мультимножества $\boldsymbol{A}$: $h\bullet\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}_{[h]}\bullet\boldsymbol{A}$. Таким образом, репродукция мультимножества одновременно сочетает в себе и арифметическое сложение, и арифметическое умножение мультимножеств.

Прямым произведением мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется мультимножество, состоящее из всех упорядоченных пар элементов $\langle x_i, x_j\rangle$ таких, что первый элемент каждой пары является элементом первого сомножителя $x_i\in\boldsymbol{A}$, второй элемент пары – элементом второго сомножителя $x_j\in\boldsymbol{B}$, и кратность каждой пары $\langle x_i, x_j\rangle$ равна произведению кратностей элементов x_i и x_j в перемножаемых мультимножествах

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \{k_{A\times B}\bullet\langle x_i, x_j\rangle \mid k_{A\times B}=k_A(x_i)\cdot k_B(x_j),\ x_i\in\boldsymbol{A},\ x_j\in\boldsymbol{B}\}. \tag{0.39}$$

Прямым произведением конечного числа мультимножеств, составляющих семейство $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_i\}$, $i\in I$, называется мультимножество, состоящее из всех n-элементных кортежей $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ таких, что i-ый элемент кортежа является элементом i-го сомножителя $x_i\in\boldsymbol{A}_i$, и кратность каждого кортежа равна произведению кратностей элементов в перемножаемых мультимножествах

$$\boldsymbol{A}_1\times\ldots\times\boldsymbol{A}_n=\{\,k_{A_1\times\ldots\times A_n}\bullet\langle x_{p_1},\ldots,x_{p_n}\rangle \mid k_{A_1\times\ldots\times A_n}=\prod_{i=1}^{n}k_{A_i}(x_{p_i}),\ x_{p_i}\in\boldsymbol{A}_i,\ p_i\in I_i, i=1,\ldots,n\}. \tag{0.40}$$

Функция кратности прямого произведения n мультимножеств будет n-местной функцией аргументов $x_1,\ldots,x_n$, задающей отображение $k_{A_1\times\ldots\times A_n}: G_1\times\ldots\times G_n\to\mathbb{Z}_+$.

Прямой n-ой степенью мультимножества $\boldsymbol{A}$ называется прямое произведение n одинаковых мультимножеств $\boldsymbol{A}$

$$(\times\boldsymbol{A})^n = \{\,k_{(\times A)^n}\bullet\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mid k_{(\times A)^n}=\prod_{i=1}^{n}k_A(x_i),\ x_i\in\boldsymbol{A}\}. \tag{0.41}$$

Носители прямого произведения мультимножеств и прямой *n-ой* степени мультимножества определяются по следующим правилам:

$$\mathrm{Supp}(\boldsymbol{A}_1\times\ldots\times\boldsymbol{A}_n)=(\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}_1)\times\ldots\times(\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}_n), \tag{0.42}$$

$$\mathrm{Supp}(\times\boldsymbol{A})^n=(\times\mathrm{Supp}\boldsymbol{A})^n. \tag{0.43}$$

П р и м е р 0.2. Пусть над доменом $G=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ образованы мультимножества $\boldsymbol{A}=\{1\bullet a,2\bullet b,3\bullet c,3\bullet d,1\bullet e,0\bullet f,0\bullet g\}$ и $\boldsymbol{B}=\{0\bullet a,3\bullet b,0\bullet c,2\bullet d,2\bullet e,2\bullet f,0\bullet g\}$ с носителями Supp$\boldsymbol{A}$=$\{a,b,c,d,e\}$ и Supp$\boldsymbol{B}$=$\{b,d,e,f\}$. Результаты операций над мультимножествами имеют следующий вид:

$\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B} = \{1{\bullet}a,\ 3{\bullet}b,\ 3{\bullet}c,\ 3{\bullet}d,\ 2{\bullet}e,\ 2{\bullet}f,\ 0{\bullet}g\}$, Supp$(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}) = \{a,b,c,d,e,f\}$;

$\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B} = \{0{\bullet}a,\ 2{\bullet}b,\ 0{\bullet}c,\ 2{\bullet}d,\ 1{\bullet}e,\ 0{\bullet}f,\ 0{\bullet}g\}$, Supp$(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}) = \{b,d,e\}$;

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \{1{\bullet}a,\ 5{\bullet}b,\ 3{\bullet}c,\ 5{\bullet}d,\ 3{\bullet}e,\ 2{\bullet}f,\ 0{\bullet}g\}$, Supp$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \{a,b,c,d,e,f\}$;

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \{1{\bullet}a,\ 0{\bullet}b,\ 3{\bullet}c,\ 1{\bullet}d,\ 0{\bullet}e,\ 0{\bullet}f,\ 0{\bullet}g\}$, Supp$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \{a,c,d\}$;

$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A} = \{0{\bullet}a,\ 1{\bullet}b,\ 0{\bullet}c,\ 0{\bullet}d,\ 1{\bullet}e,\ 2{\bullet}f,\ 0{\bullet}g\}$, Supp$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = \{b,e,f\}$;

$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B} = \{1{\bullet}a,\ 1{\bullet}b,\ 3{\bullet}c,\ 1{\bullet}d,\ 1{\bullet}e,\ 2{\bullet}f,\ 0{\bullet}g\}$, Supp$(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = \{a,b,c,d,e,f\}$;

$\overline{\boldsymbol{A}} = \{(n_Z-1){\bullet}a,\ (n_Z-2){\bullet}b,\ (n_Z-3){\bullet}c,\ (n_Z-3){\bullet}d,\ (n_Z-1){\bullet}e,\ n_Z{\bullet}f,\ n_Z{\bullet}g\}$,

Supp$\,\overline{\boldsymbol{A}} = \{a,b,c,d,e,f,g\}$;

$4{\bullet}\boldsymbol{A} = \{4{\bullet}a, 8{\bullet}b, 12{\bullet}c, 12{\bullet}d, 4{\bullet}e, 0{\bullet}f,\ 0{\bullet}g\}$, Supp$(4{\bullet}\boldsymbol{A}) = \{a,b,c,d,e\}$;

$\boldsymbol{A}{\bullet}\boldsymbol{B} = \{0{\bullet}a,\ 6{\bullet}b,\ 0{\bullet}c,\ 6{\bullet}d,\ 2{\bullet}e,\ 0{\bullet}f,\ 0{\bullet}g\}$, Supp$(\boldsymbol{A}{\bullet}\boldsymbol{B}) = \{b,d,e\}$;

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \{3{\bullet}\langle a,b\rangle, 2{\bullet}\langle a,d\rangle, 2{\bullet}\langle a,e\rangle, 2{\bullet}\langle a,f\rangle,\ 6{\bullet}\langle b,b\rangle, 4{\bullet}\langle b,d\rangle, 4{\bullet}\langle b,e\rangle, 4{\bullet}\langle b,f\rangle,\ 9{\bullet}\langle c,b\rangle, 6{\bullet}\langle c,d\rangle,$
$6{\bullet}\langle c,e\rangle, 6{\bullet}\langle c,f\rangle,\ 9{\bullet}\langle d,b\rangle, 6{\bullet}\langle d,d\rangle, 6{\bullet}\langle d,e\rangle, 6{\bullet}\langle d,f\rangle,\ 3{\bullet}\langle e,b\rangle, 2{\bullet}\langle e,d\rangle, 2{\bullet}\langle e,e\rangle, 2{\bullet}\langle e,f\rangle\}$,

Supp$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\ \langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\ \langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,f\rangle,$
$\langle d,b\rangle,\langle d,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle d,f\rangle,\ \langle e,b\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle e,f\rangle\}$. ◘

Еще одной весьма необычной особенностью операций над мультимножествами является возможность образования линейных комбинаций (суперпозиций) основных операций с операцией репродукции. При этом мультимножества $\boldsymbol{A}_i$ заменяются пропорциональными им мультимножествами $h_i{\bullet}\boldsymbol{A}_i$. Определим следующие линейные комбинации операций над семейством мультимножеств:

взвешенное объединение

$$\bigcup_{i\in I}(h_i{\bullet}\boldsymbol{A}_i) = \{k_{\bigcup_i(h_i\bullet A_i)}(x){\bullet}x \mid k_{\bigcup_i(h_i\bullet A_i)}(x) = \max_{i\in I}(h_i\cdot k_{A_i}(x)),\ h_i\geq 1, \forall x\in G\},$$

взвешенное пересечение

$$\bigcap_{i\in I}(h_i{\bullet}\boldsymbol{A}_i) = \{k_{\bigcap_i(h_i\bullet A_i)}(x){\bullet}x \mid k_{\bigcap_i(h_i\bullet A_i)}(x) = \min_{i\in I}(h_i\cdot k_{A_i}(x)),\ h_i\geq 1, \forall x\in G\},$$

взвешенное арифметическое сложение

$$\sum_{i\in I}(h_i{\bullet}\boldsymbol{A}_i) = \{k_{\sum_i(h_i\bullet A_i)}(x){\bullet}x \mid k_{\sum_i(h_i\bullet A_i)}(x) = \sum_{i\in I}(h_i\cdot k_{A_i}(x)),\ h_i\geq 1, \forall x\in G\},$$

взвешенное арифметическое умножение

$$\prod_{i\in I}(h_i{\bullet}\boldsymbol{A}_i) = \{k_{\prod_i(h_i\bullet A_i)}(x){\bullet}x \mid k_{\prod_i(h_i\bullet A_i)}(x) = \prod_{i\in I}(h_i\cdot k_{A_i}(x)),\ h_i\geq 1, \forall x\in G\},$$

взвешенное прямое произведение

$$(h_1{\bullet}\boldsymbol{A}_1)\times\ldots\times(h_n{\bullet}\boldsymbol{A}_n) = \{k_{(h_1\bullet A_1)\times\ldots\times(h_n\bullet A_n)}{\bullet}\langle x_{p_1},\ldots,x_{p_n}\rangle\},$$

где функция числа экземпляров задается выражением

$$k_{(h_1\bullet A_1)\times\ldots\times(h_n\bullet A_n)} = \prod_{i=1}^{n} k_{(h_i\bullet A_i)}(x_{p_i}),\ h_i\geq 1,\ x_{p_i}\in\boldsymbol{A}_i,\ p_i\in I_i,\ i=1,\ldots,n.$$

Возможность введения и использования линейных комбинаций операций существенно увеличивает арсенал средств оперирования с мультимножествами. При h_i=1 взвешенные операции переходят в соответствующие «невзвешенные» операции над мультимножествами.

Репродукция и дополнение мультимножества являются унарными операциями, арифметическое вычитание и симметрическая разность мультимножеств – бинарными операциями, объединение, пересечение, арифметическое сложение, арифметическое и прямое умножение мультимножеств – бинарными и в общем случае n-арными операциями над мультимножествами.

Объединение (0.11), (0.12), пересечение (0.14), (0.15), арифметическое вычитание (0.20), симметрическая разность (0.23), дополнение (0.29), прямое произведение и возведение в прямую степень (0.39)-(0.41) мультимножеств обобщают аналогичные операции над множествами. При переходе от мультимножеств к обычным множествам указанные операции над мультимножествами превращаются в соответствующие операции над множествами. В теории множеств операции арифметического сложения, умножения на число, арифметического умножения и возведения в степень в общем случае не определяются. Аналогами этих операций могут служить покомпонентное сложение и умножение на скаляр векторов $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$, $h\cdot\mathbf{a}=(ha_1,\ldots,ha_n)$, поэлементное сложение, умножение на число и поэлементное умножение матриц $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\|a_{ij}+b_{ij}\|_{m\times n}$, $h\cdot\mathrm{A}=\|h\cdot a_{ij}\|_{m\times n}$, $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\|a_{ij}\cdot b_{ij}\|_{m\times n}$. Последняя операция, приведенная в [Жур77], отличается от традиционной операции умножения матриц. При унитаризации функции кратности $k_A(x)\mapsto\chi_A(x)$ операции (0.32)-(0.34) арифметического умножения и возведения в степень мультимножеств вырождаются в операцию пересечения множеств, а операции арифметического сложения множеств и умножения множества на число будут неосуществимы.

Правило унитаризации функции кратности $k_A(x)\mapsto\chi_A(x)$, задающее переход от мультимножеств к обычным множествам, формально можно рассматривать как унарную операцию Supp: $\boldsymbol{A}\to\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}$, ставящую каждому мультимножеству $\boldsymbol{A}$ в соответствие его носитель $\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}$. Из соотношений (0.13), (0.16), (0.42) и (0.43) вытекает, что операция Supp обладает свойством перестановочности (пермутативности) по отношению к операциям объединения, пересечения, прямого произведения и возведения в прямую степень мультимножеств. В таких случаях конечные результаты, получающиеся при выполнении этих операций над мультимножествами и последующей унитаризации функций кратности, не будут зависеть от того, в каком порядке производились операции.

Обратим, однако, внимание читателя, что в общем случае, как следует из соотношений (0.19), (0.22), (0.25), (0.30), (0.35), (0.36), (0.38), носители арифметических суммы, разности, произведения, симметрической разности, дополнения, умножения на число и арифметической степени мультимножеств не равны результатам соответствующих операций над носителями оперируемых мультимножеств. Поэтому при выполнении указанных операций над мультимножествами с последующей унитаризацией функций кратности всегда нужно учитывать, что получающиеся конечные результаты могут не совпасть с результатами, которые получатся, если сначала перейти от мультимножеств к их носителям, а затем выполнить соответствующие операции над носителями мультимножеств как над множествами.

0.3. Свойства операций над мультимножествами. Как было отмечено выше, в теории мультимножеств существует гораздо больше операций над мультимножествами, чем операций над множествами в теории множеств. Соответственно, разнообразнее будут и свойства таких операций. Многие из них совпадают со свойствами операций над множествами и могут быть распространены на аналогичные и новые типы операций, присущих мультимножествам. В их числе: *идемпотентность* объединения и пересечения; *инволюция* (двойное отрицание) дополнения; *идентичность* ряда операций; *коммутативность* объединения, пересечения, симметрической разности, репродукции, арифметического сложения и умножения; *ассоциативность* объединения, пересечения, сложения, арифметического и прямого умножения; *дистрибутивность* объединения и пересечения относительно друг друга, сложения, вычитания, репродукции, арифметического умножения и прямого произведения; *дистрибутивность* сложения, вычитания и симметрической разности относительно репродукции, арифметического умножения и прямого произведения.

Как и в случае множеств, не все операции над мультимножествами взаимно коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны. Так, разность и прямое произведение мультимножеств не обладают свойством коммутативности. Для симметрической разности трех и более мультимножеств не выполняется свойство ассоциативности. Объединение, пересечение, сложение, вычитание, симметрическая разность, арифметическое умножение и прямое произведение мультимножеств не всегда дистрибутивны относительно друг друга.

Как известно, для множеств имеется двойственность операций объединения и пересечения по отношению к операции дополнения, выражаемая законами де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Для мультимножеств существует аналогичная двойственность операций объединения и пересечения, а кроме того, двойственность операций арифметического сложения и вычитания мультимножеств, образующих еще одну пару дополняющих друг друга операций.

Т е о р е м а 0.2. *Объединение и пересечение, арифметическое сложение и арифметическое вычитание мультимножеств двойственны по отношению к операции дополнения*

$$\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}, \quad \overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}; \tag{0.44}$$

$$\overline{\bigcup_{i \in I} \boldsymbol{A}_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{\boldsymbol{A}_i}, \quad \overline{\bigcap_{i \in I} \boldsymbol{A}_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{\boldsymbol{A}_i}. \tag{0.45}$$

$$\overline{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{A}, \quad \overline{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{B}, \quad \overline{\boldsymbol{A}} - \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}. \tag{0.46}$$

Доказательство этой и других теорем нулевой главы приведены в [Петр02а].

Наряду с этим имеется и двойственность операций иного рода. В теории множеств существует определенная эквивалентность операций объединения множеств и логического сложения, пересечения множеств и логического умножения. Чрезвычайно интересно, что подобная аналогия присутствует и в теории мультимножеств, где операции объединения и арифметического сложения, пересечения и арифметического умножения, умножения на число и возведения мультимножества в арифметическую степень образуют пары сходных операций по отношению к правилу унитаризации функции кратности $k_A(x) \mapsto \chi_A(x)$, хотя эта аналогия и имеет совершенно иную природу. Из соотношений (0.13) и (0.19), (0.16) и (0.35), (0.36) и (0.38) непосредственно вытекает

$$\mathrm{Supp}(\bigcup_{i\in I}\boldsymbol{A}_i) = \bigcup_{i\in I}(\mathrm{Supp}\ \boldsymbol{A}_i) = \mathrm{Supp}(\sum_{i\in I}\boldsymbol{A}_i),$$
$$\mathrm{Supp}(\bigcap_{i\in I}\boldsymbol{A}_i) = \bigcap_{i\in I}(\mathrm{Supp}\ \boldsymbol{A}_i) = \mathrm{Supp}(\prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i),$$
$$\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}^n = \mathrm{Supp}\boldsymbol{A} = \mathrm{Supp}(h\bullet\boldsymbol{A}).$$

Таким образом, мультимножествам присущ своеобразный дуализм операций, когда имеется два вида двойственных операций, которые объединяются в различные пары по отношению к операции дополнения и к операции Supp, задающей предельный переход от мультимножеств к множествам [Петр03].

Наличие или отсутствие тех или иных свойств у операций над множествами и мультимножествами связано, по-видимому, с тем, что действия над характеристическими функциями подчиняются правилам булевой алгебры, а действия над функциями кратности производятся по правилам обычной алгебры. Поэтому не все свойства операций над мультимножествами будут такими же, как и в случае множеств. К примеру, разность и симметрическая разность множеств дистрибутивны относительно пересечения и недистрибутивны относительно объединения, тогда как разность и симметрическая разность мультимножеств недистрибутивны относительно и их объединения, и их пересечения.

Некоторые свойства, которыми обладают операции над множествами, у мультимножеств отсутствуют. В то же время появляются и новые свойства, не имеющие аналогов для множеств. Например, для множеств справедливы следующие равенства: $A\bigcup \overline{A}=U$; $A\bigcap \overline{A}=\varnothing$. А у операций над мультимножествами имеются иные свойства:

$$\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{Z},\quad \boldsymbol{Z}-\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}; \tag{0.47}$$
$$\boldsymbol{A}\bigcup\overline{\boldsymbol{A}}\neq\boldsymbol{Z};\quad \boldsymbol{A}\bigcap\overline{\boldsymbol{A}}\neq\varnothing;\quad \boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}\neq\overline{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{A}\neq\varnothing. \tag{0.48}$$

Существуют следующие важные соотношения между операциями над мультимножествами, которые вытекают из определений этих операций:

$$\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B};$$
$$\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A};\quad \boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}; \tag{0.49}$$
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A};\quad \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}; \tag{0.50}$$
$$\boldsymbol{A}\subseteq h\bullet\boldsymbol{A};\quad \boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}^n;\quad \boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}. \tag{0.51}$$

Отсюда явствует, что пересечение мультимножеств $\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}$ является наибольшим подмультимножеством, одновременно содержащимся в мультимножествах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, а объединение мультимножеств $\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}$ – наименьшим надмультимножеством, в котором одновременно содержатся мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Приведем еще ряд весьма полезных соотношений между операциями над мультимножествами.

Теорема 0.3. *Сумма двух мультимножеств равна сумме объединения и пересечения складываемых мультимножеств*

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}). \tag{0.52}$$

Симметрическая разность двух мультимножеств равна разности объединения и пересечения вычитаемых мультимножеств и симметрической разности дополнений этих мультимножеств

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}) = \overline{\boldsymbol{A}}\,\Delta\,\overline{\boldsymbol{B}}. \tag{0.53}$$

Для мультимножеств выполняется также равенство, аналогичное выражению, определяющему пересечение разностей двух множеств.

Т е о р е м а 0.4. *Пересечение разностей двух мультимножеств пусто*

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = \varnothing. \qquad (0.54)$$

Воспользовавшись равенствами (0.26), (0.52)-(0.54) и свойствами мультимножеств, получим следующие соотношения, определяющие связи между различными операциями над мультимножествами

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}); \qquad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}); \qquad (0.55)$$

$$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}); \qquad (0.56)$$

$$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}); \qquad (0.57)$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\Delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\Delta(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}); \qquad (0.58)$$

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-2\cdot(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}); \qquad (0.59)$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})+2\cdot(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}). \qquad (0.60)$$

Ряд приведенных выше выражений внешне напоминает аналогичные равенства, связывающие мощности множеств, но они относятся к самим мультимножествам, а не их к мощностям. Кроме того, есть еще одно принципиальное отличие между множествами и мультимножествами: различные комбинации операций над мультимножествами получаются, главным образом, путем их сложения и вычитания, в то время как похожие комбинации операций над множествами – путем их объединения и пересечения. Поэтому при переходе от множеств к мультимножествам не все из соотношений (0.55)-(0.60) перейдут в соответствующие выражения для множеств. В частности, для множеств отсутствуют аналоги последних равенств в формулах (0.59) и (0.60).

Установим правила подсчета, которые связывают объединение, пересечение и сумму произвольного, но конечного числа мультимножеств [Петр00].

Т е о р е м а 0.5. *Объединение и пересечение конечного числа мультимножеств, составляющих семейство* $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_n\}$, *удовлетворяют следующим соотношениям*:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i - \sum_{1\le i<j\le n}(\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n}(\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j\cap\boldsymbol{A}_k) - \ldots - (-1)^n\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i; \qquad (0.61)$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i - \sum_{1\le i<j\le n}(\boldsymbol{A}_i\cup\boldsymbol{A}_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n}(\boldsymbol{A}_i\cup\boldsymbol{A}_j\cup\boldsymbol{A}_k) - \ldots - (-1)^n\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i. \qquad (0.62)$$

Правилам подсчета мультимножеств (0.61) и (0.62) можно придать более «симметричную» форму, обобщающую соотношение (0.52) и имеющую вид известной формулы Сильвестра, определяющей правила включения-исключения для вычисления мощностей объединения и пересечения множеств [Сач77], [Aig79], [Lip82]:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}(\boldsymbol{A}_{i_1}\cap\ldots\cap\boldsymbol{A}_{i_k}), \qquad (0.63)$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}(\boldsymbol{A}_{i_1}\cup\ldots\cup\boldsymbol{A}_{i_k}). \qquad (0.64)$$

Подчеркнем еще раз, что правила подсчета (0.63), (0.64) справедливы только для мультимножеств, так как операция арифметического сложения к множествам не применима.

0.4. Вычисление мощностей и размерностей мультимножеств. Сформулируем теперь правила для вычисления мощностей и размерностей различных операций над мультимножествами. Рассмотрим вначале наиболее простые случаи операций над двумя мультимножествами.

Мощность и размерность суммы двух мультимножеств определяются следующим образом:

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| = \sum_{x\in G}(k_A(x)+k_B(x)), \tag{0.65}$$

$$/\boldsymbol{A}/+/\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}/+/\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}/ = \sum_{x\in G}(\chi_A(x)+\chi_B(x)), \tag{0.66}$$

$$/\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}/ = \sum_{x\in G}(\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)). \tag{0.67}$$

Правила вычисления мощности и размерности арифметической разности двух мультимножеств имеют следующий вид, отличающийся от соотношений для арифметической суммы мультимножеств:

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{B}|, \tag{0.68}$$

$$|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|, \tag{0.69}$$

$$/\boldsymbol{A}/-/\boldsymbol{B}/ \neq /\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}/-/\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}/.$$

Сходная картина наблюдается и для симметрической разности мультимножеств, которая согласно соотношению (0.26) равна сумме разностей вычитаемых мультимножеств, а согласно соотношению (0.53) – разности объединения и пересечения вычитаемых мультимножеств:

$$|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|, \tag{0.70}$$

$$/\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}/+/\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}/, \tag{0.71}$$

$$/\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}/ \geq /\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}/-/\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}/. \tag{0.72}$$

Ситуация меняется, когда вычитаемое мультимножество $\boldsymbol{B}$ содержится в уменьшаемом мультимножестве $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$). В этом случае справедливы следующие утверждения, вытекающие непосредственно из выражений (0.69)-(0.72) и соотношений (0.26), (0.27) при учете условия $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\varnothing$:

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|, \tag{0.73}$$

$$/\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}/-/\boldsymbol{B}/. \tag{0.74}$$

Вычисление мощностей и размерностей арифметического и прямого произведений двух мультимножеств проводится по следующим правилам:

$$|\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}| = \sum_{x\in G}(k_A(x)\cdot k_B(x)), \tag{0.75}$$

$$/\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}/ = \sum_{x\in G}(\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)). \tag{0.76}$$

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}| = \left(\sum_{x\in G}k_A(x)\right)\cdot\left(\sum_{x\in G}k_A(x)\right), \tag{0.77}$$

$$/\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}/\cdot/\boldsymbol{B}/ = \left(\sum_{x\in G}\chi_A(x)\right)\cdot\left(\sum_{x\in G}\chi_A(x)\right). \tag{0.78}$$

З а м е ч а н и е. Аналогом мощности арифметического произведения двух мультимножеств может служить скалярное произведение двух векторов $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ в векторной алгебре. □

Приведем сводку правил, связывающих мощности и размерности различных операций над двумя мультимножествами, которые можно получить также из соответствующих соотношений (0.52)-(0.60) и равенства (0.65):

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|; \qquad |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|;$$

$$|\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|;$$

$$|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|;$$

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{B}|;$$

$$|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|-2\cdot|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|;$$

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|+2\cdot|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|;$$

$$|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|; \qquad |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|;$$

$$/\boldsymbol{A}/ = /(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})/; \qquad /\boldsymbol{B}/ = /(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\cup(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})/;$$

$$/\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}/; \quad /\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}/; \quad /\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}/+/\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}/;$$

$$/\boldsymbol{A}/+/\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}/+/\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}/+/\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}/; \quad /\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}/ = /\boldsymbol{A}/\cdot/\boldsymbol{B}/.$$

При переходе от мультимножеств к множествам практически все из приведенных выше выражений для мощностей мультимножеств перейдут в аналогичные соотношения для мощностей множеств

Рассмотрим теперь правила, по которым вычисляются мощности и размерности мультимножеств, являющихся результатами операций над произвольным числом мультимножеств [Петр03].

Т е о р е м а 0.6. *Мощности и размерности арифметической суммы, объединения и пересечения конечного числа мультимножеств, составляющих семейство* $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_n\}$, *определяются следующими выражениями*:

$$|\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i| = \sum_{x\in G}\left(\sum_{i=1}^{n}k_{A_i}(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{A}_i|, \qquad /\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/ = /\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/; \tag{0.79}$$

$$|\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i|=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{A}_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j\cap\boldsymbol{A}_k|-\ldots-(-1)^n|\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i|, \tag{0.80}$$

$$/\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/=\sum_{i=1}^{n}/\boldsymbol{A}_i/-\sum_{1\le i<j\le n}/\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j/+\sum_{1\le i<j<k\le n}/\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j\cap\boldsymbol{A}_k/-\ldots-(-1)^n/\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/; \tag{0.81}$$

$$|\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i|=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{A}_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|\boldsymbol{A}_i\cup\boldsymbol{A}_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|\boldsymbol{A}_i\cup\boldsymbol{A}_j\cup\boldsymbol{A}_k|-\ldots-(-1)^n|\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i|, \tag{0.82}$$

$$/\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/=\sum_{i=1}^{n}/\boldsymbol{A}_i/-\sum_{1\le i<j\le n}/\boldsymbol{A}_i\cup\boldsymbol{A}_j/+\sum_{1\le i<j<k\le n}/\boldsymbol{A}_i\cup\boldsymbol{A}_j\cup\boldsymbol{A}_k/-\ldots-(-1)^n/\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/. \tag{0.83}$$

Правила (0.80)-(0.83), связывающие мощности и размерности арифметической суммы, объединения и пересечения конечного числа мультимножеств, получаются из правил (0.61), (0.62) подсчета мультимножеств, если воспользоваться свойствами соответствующих операций над мультимножествами и определениями их носителей, свойством (0.79) аддитивности мощности суммы мультимножеств и правилами вычисления мощностей конечного числа множеств [Lip82]. Выражения (0.80)-(0.83) можно записать более компактно в виде, аналогичном правилам включения-исключения (0.63), (0.64).

$$|\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}|\boldsymbol{A}_{i_1}\cap\ldots\cap\boldsymbol{A}_{i_k}|, \tag{0.84}$$

$$/\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}/\boldsymbol{A}_{i_1}\cap\ldots\cap\boldsymbol{A}_{i_k}/, \tag{0.85}$$

$$|\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}|\boldsymbol{A}_{i_1}\cup\ldots\cup\boldsymbol{A}_{i_k}|. \tag{0.86}$$

$$/\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}/\boldsymbol{A}_{i_1}\cup\ldots\cup\boldsymbol{A}_{i_k}/. \tag{0.87}$$

Из формул (0.61), (0.62), (0.84)-(0.87) вытекают следующие важные соотношения, связывающие пересечение, объединение и сумму произвольного числа мультимножеств:

$$\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\subseteq\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\ , \tag{0.88}$$

$$|\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i|\le|\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i|\le|\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\ |=\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{A}_i|, \tag{0.89}$$

$$/\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/\le/\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/=/\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\ /\le\sum_{i=1}^{n}/\boldsymbol{A}_i/. \tag{0.90}$$

Примечательно, что неравенства (0.89) и (0.90) для мощностей и размерностей отличаются друг от друга.

Т е о р е м а 0.7. *Мощности и размерности арифметического произведения и прямого произведения конечного числа мультимножеств, составляющих семейство* $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_n\}$, *определяются следующими выражениями*:

$$\left|\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\right|=\sum_{x\in G}\left(\prod_{i=1}^{n}k_{A_i}(x)\right),\qquad /\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/=\sum_{x\in G}\left(\prod_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(x)\right)=/\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i/; \tag{0.91}$$

$$|\boldsymbol{A}_1\times\ldots\times\boldsymbol{A}_n|=\prod_{i=1}^{n}|\boldsymbol{A}_i|=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{x\in G}k_{A_i}(x)\right),\quad /\boldsymbol{A}_1\times\ldots\times\boldsymbol{A}_n/=\prod_{i=1}^{n}/\boldsymbol{A}_i/=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{x\in G}\chi_{A_i}(x)\right). \tag{0.92}$$

Для вычисления мощностей и размерностей репродукции, арифметической и прямой степени мультимножества используются следующие правила:

$$|h\bullet\boldsymbol{A}|=h\cdot|\boldsymbol{A}|,\quad |\boldsymbol{A}^n|=\sum_{x\in G}(k_A(x))^n,\quad /h\bullet\boldsymbol{A}/=/\boldsymbol{A}^n/=/\boldsymbol{A}/; \tag{0.93}$$

$$|(\times\boldsymbol{A})^n|=|\boldsymbol{A}|^n=\left(\sum_{x\in G}k_A(x)\right)^n,\quad /(\times\boldsymbol{A})^n/=/\boldsymbol{A}/^n=\left(\sum_{x\in G}\chi_A(x)\right)^n. \tag{0.94}$$

Выражения (0.88)-(0.91) для мощности и размерности арифметической суммы, объединения и пересечения, арифметического произведения мультимножеств, очевидно, не зависят от конечности семейства $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_n\}$ и могут быть распространены на произвольную совокупность мультимножеств. Выражения (0.92) для мощности и размерности прямого произведения нескольких мультимножеств справедливы для конечного семейства $\mathcal{A}$, но, очевидно, не зависят от конечности домена G.

Переходя от мультимножеств к множествам и применяя к равенствам (0.80), (0.82), (0.92), (0.94) правило $k_A(x)\mapsto\chi_A(x)$ унитаризации функции кратности, получим известные формулы для вычисления мощностей объединения, пересечения, прямого произведения и прямой n-ой степени множеств.

0.5. Способы представления мультимножеств. Укажем в заключение несколько различных способов представления мультимножеств.

Одно из наиболее естественных графических изображений мультимножества $\boldsymbol{A}$ – график его функции кратности k_A. Фигура, образуемая этим графиком, представляет собой ступенчатую гистограмму, в основании которой по оси абсцисс лежит носитель мультимножества Supp$\boldsymbol{A}$, а высоты столбцов, отложенные по оси ординат, соответствуют значениям функции $k_A(x)$. Пример такой гистограммы приведен на рис.0.1. Ступенчатые гистограммы являются, по существу, двумерными диаграммами Эйлера-Венна, несколько отличающимися по своему виду от диаграмм, традиционно используемых в теории множеств.

Каждому конечному мультимножеству $\boldsymbol{A}_i$ можно поставить в соответствие целочисленный вектор $\mathbf{c}_i=(c_{i1},\ldots,c_{in})$, компоненты которого задаются соотношением $c_{ij}=k_{Ai}(x_j)$, $x_j\in G$. Вектор $\mathbf{c}_i$ называют *отображением Париха* [Pet81]. Семейство $\mathcal{C}_n$ различных целочисленных векторов размерности n эквивалентно семейству $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ подмультимножеств n-мерного мультимножества $\boldsymbol{X}=\{k_{X1}\bullet x_1,\ldots, k_{Xn}\bullet x_n\}$ над доменом $G=\{x_1,\ldots,x_n\}$ и может быть представлено прямоугольной матрицей инцидентности $\mathrm{C}=\|c_{ij}\|_{m\times n}$, i-ая строка которой совпадает с вектором $\mathbf{c}_i$, а m равно мощности $|\mathcal{P}(\boldsymbol{X})|=\Pi_i(1+k_{Xi})$, определяемой формулой (0.09). Очевидно, что пустому мультимножеству $\varnothing$ соответствует вектор, состоящий из нулей $\mathbf{c}_\varnothing=(0,\ldots,0)$, а мультимножеству $\boldsymbol{X}$ – вектор $\mathbf{c}_X=(k_{X1},\ldots,k_{Xn})$.

Для графического представления конечных мультимножеств и семейства $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ можно также использовать двудольные мультиграфы, имеющие кратные ребра, и гиперграфы. Одному из подмножеств вершин V_1 двудольного мультиграфа $\Gamma(V_1,V_2,E)$ ставятся в соответствие элементы домена $x_j\in G$, а другому подмножеству V_2 – мультимножества, порожденные доменом G, или подмультимножества $\boldsymbol{A}_i\in\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$, $i=1,\ldots,m$. Число ребер $e_k\in E$ мультиграфа Γ, соединяющих смежные вершины, будет равно кратности $k_{Ai}(x_j)$ вхождения элемента x_j в соответствующее мультимножество. Множество вершин V гиперграфа $\Theta(V,\mathcal{W})$ задает n-мерное мультимножество $\boldsymbol{X}$, представленное как множество с повторяющимися элементами $X=\{x_1,x_1,\ldots,x_2,x_2,\ldots,x_n,x_n,\ldots\}$, а семейство ребер $\mathcal{W}=\{W_i\}$ гиперграфа соответствует подмультимножествам $\boldsymbol{A}_i\in\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$.

Семейство $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ подмультимножеств $\boldsymbol{A}_i$ n-мерного мультимножества $\boldsymbol{X}=\{k_{X1}\bullet x_1,\ldots,k_{Xn}\bullet x_n\}$ или семейство $\mathcal{C}_n$ n-мерных целочисленных векторов $\mathbf{c}_i$ можно также изобразить графически в виде n-мерного параллелепипеда. По аналогии с единичным n-мерным кубом K_n определим *n-мерный параллелепипед* как простой связный граф, который представляет собой произведение графов

$$\Lambda_n=\Lambda_{n-1}\times\mathrm{P}_{h_n}=\mathrm{P}_{h_1}\times\ldots\times\mathrm{P}_{h_{n-1}}\times\mathrm{P}_{h_n}, \tag{0.95}$$

где P_{h_j} (j=1,…,n) – простая цепь, состоящая из h_j смежных вершин и $l_j=h_j-1$ ребер. Число вершин n-мерного параллелепипеда определяется выражением

$$p_n=\prod_{j=1}^{n} h_j\,, \tag{0.96}$$

а число ребер, соединяющих смежные вершины, равно $q_n=\sum_{j=1}^{n}(l_j\cdot\prod_{s\in S_j} h_s)$, где множество индексов $S_j=\mathbb{N}_n\backslash\{j\}$. Напомним, что по общему правилу умножения графов вершины $\langle v_1,v_2\rangle$ и $\langle u_1,u_2\rangle$ графа-произведения $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$ смежны тогда и только тогда, когда либо вершины v_1 и u_1 совпадают, а вершины v_2 и u_2 смежны, либо вершины v_2 и u_2 совпадают, а вершины v_1 и u_1 смежны [Har69].

В отличие от единичного n-мерного куба K_n, n-мерный параллелепипед Λ_n в общем случае уже не будет однородным графом. Связный граф, в котором множество вершин то же, что и у n-мерного параллелепипеда Λ_n, но все вершины попарно смежны, назовем *полным n-мерным параллелепипедом* Λ_n*. Полный n-мерный параллелепипед Λ_n* является однородным графом степени $r_n^*=p_n-1$, имеющим p_n вершин, подсчитываемых по формуле (0.96), и $q_n^*=p_n(p_n-1)/2$ ребер. Параллелепипед Λ_n будет остовным подграфом полного параллелепипеда Λ_n*. При предельном переходе от мультимножеств к множествам n-мерные параллелепипеды Λ_n и Λ_n* превратятся соответственно в единичный и полный n-мерные кубы K_n и K_n*, которые являются подграфами графов Λ_n и Λ_n*.

Имеется тесная связь между выражениями (0.96) и (0.09), определяющими число вершин n-мерного параллелепипеда Λ_n и мощность семейства подмультимножеств $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$. Каждой вершине параллелепипеда Λ_n поставим в соответствие одно из подмультимножеств $\boldsymbol{A}_i\in\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$, i=1, …,m, или один из n-мерных $\mathbf{c}_i$ векторов семейства $\mathcal{C}_n$. Целочисленные векторы $\mathbf{c}_i$ и $\mathbf{c}_s$, соответствующие смежным вершинам параллелепипеда Λ_n, отличаются на единицу только по одной компоненте. (Для полного параллелепипеда Λ_n* это уже не так). Простая цепь P_{h_j}, представляющая j-ую сторону n-мерного параллелепипеда Λ_n, состоит из $h_j=1+k_{Xj}$ смежных вершин, одна из которых соответствует пустому мультимножеству $\varnothing$, а остальные вершины – компонентам $1\bullet x_j,\dots,k_{Xj}\bullet x_j$ мультимножества $\boldsymbol{X}$. Тогда объем n-мерного параллелепипеда будет равен общему числу вершин графа Λ_n и, следовательно, $p_n=|\mathcal{P}(\boldsymbol{X})|=|\mathcal{C}_n|=m$. Таким образом, выражение (0.96) при $h_j=1+k_{Xj}$ можно считать еще одним доказательством теоремы 0.1.

П р и м е р 0.3. Семейство $\mathcal{C}_3$ целочисленных векторов, эквивалентное семейству $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}=\{1\bullet a,2\bullet b,3\bullet c\}$, состоит из следующих векторов $\mathbf{c}_i$: (0,0,0)~$\varnothing$; (1,0,0)~$\{1\bullet a\}$; (0,1,0)~$\{1\bullet b\}$; (0,2,0)~$\{2\bullet b\}$; (0,0,1)~$\{1\bullet c\}$; (0,0,2)~$\{2\bullet c\}$; (0,0,3)~$\{3\bullet c\}$; (1,1,0)~$\{1\bullet a,1\bullet b\}$; (1,2,0)~$\{1\bullet a,2\bullet b\}$; (1,0,1)~$\{1\bullet a,1\bullet c\}$; (1,0,2)~$\{1\bullet a,2\bullet c\}$; (1,0,3)~$\{1\bullet a,3\bullet c\}$; (0,1,1)~$\{1\bullet b,1\bullet c\}$; (0,1,2)~~$\{1\bullet b,2\bullet c\}$; (0,1,3)~$\{1\bullet b,3\bullet c\}$;(0,2,1)~$\{2\bullet b,1\bullet c\}$;(0,2,2)~$\{2\bullet b,2\bullet c\}$;(0,2,3)~$\{2\bullet b,3\bullet c\}$; (1,1,1)~$\{1\bullet a,1\bullet b,1\bullet c\}$;(1,1,2)~$\{1\bullet a,1\bullet b,2\bullet c\}$; (1,1,3)~$\{1\bullet a,1\bullet b,3\bullet c\}$; (1,2,1)~$\{1\bullet a,2\bullet b,1\bullet c\}$; (1,2,2)~$\{1\bullet a,2\bullet b,2\bullet c\}$; (1,2,3)~$\{1\bullet a,2\bullet b,3\bullet c\}$. Матрица $\mathrm{C}=\|c_{ij}\|_{m\times n}$ семейств $\mathcal{C}_3$

и $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$, составленная из векторов $\mathbf{c}_i$, имеет размерность 24×3. Трехмерный параллелепипед Λ_3, представляющий семейство $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}=\{1\bullet a,2\bullet b,3\bullet c\}$ и семейство $\mathcal{C}_3$ векторов, изображен на рис.0.2.

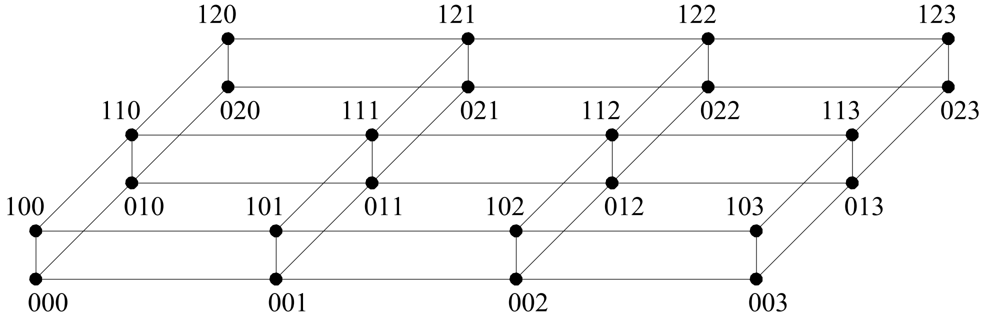

Рис.0.2. Трехмерный параллелепипед Λ_3, представляющий семейства $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ и $\mathcal{C}_3$.

Параллелепипед имеет $p_3=(1+k_{X1})\cdot(1+k_{X2})\cdot(1+k_{X3})=2\cdot3\cdot4=24$ вершины и $q_3=k_{X1}\cdot(1+k_{X2})\cdot(1+k_{X3})+(1+k_{X1})\cdot k_{X2}\cdot(1+k_{X3})+(1+k_{X1})\cdot(1+k_{X2})\cdot k_{X3}=1\cdot3\cdot4+2\cdot2\cdot4+2\cdot3\cdot3=46$ ребер. Мощность семейства подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}$ и семейства $\mathcal{C}_3$ равна $p_n=|\mathcal{P}(\boldsymbol{X})|=|\mathcal{C}_3|=24$. Для краткости записи на рисунке оставлены только значения функции кратности подмультимножества $\boldsymbol{A}_i$ (компоненты вектора $\mathbf{c}_i$) и опущены скобки и запятые между элементами подмультимножеств (компонентами векторов). ◘

В общем случае семейство $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ всех подмультимножеств n-мерного мультимножества $\boldsymbol{X}=\{k_{X1}\bullet x_1,...,k_{Xn}\bullet x_n\}$, упорядоченное отношением включения $\subseteq$, изоморфно булевой (полной дистрибутивной с дополнениями) решетке, в которой дополнение определяется как $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}$, нижняя и верхняя грани – как $\inf(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$, $\sup(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$, нулем является пустое мультимножество $\varnothing$, а единицей – мультимножество $\boldsymbol{X}$. По существу, любая булева решетка может быть представлена ориентированным n-мерным параллелепипедом Λ_n, заданным формулой (0.95), стороной которого будет простое дерево.

Итак, мультимножество – это действительно более многогранное понятие, чем понятие множества. О мультимножестве уже нельзя говорить просто как множестве с повторениями. Нужно указать, сколько в мультимножестве имеется различных компонент, то есть групп одинаковых элементов, и сколько имеется экземпляров каждого вида элементов внутри каждой из групп. Возможность присутствия в мультимножестве произвольного, в том числе и неограниченного, числа компонент и произвольного количества экземпляров любого из элементов принципиально отличает мультимножество от множества. Именно эта особенность и порождает целый ряд свойств мультимножества как качественно нового математического объекта. Сравнивая мультимножества и множества, можно образно сказать, что мультимножество «многоцветно», а множество «одноцветно».

Глава 1
Метрические пространства и последовательности

1.1. Метрика и метрическое пространство. Многие фундаментальные закономерности и свойства множеств и других математических объектов обусловливаются взаимным расположением составляющих их элементов. Такие свойства отражают «геометрические» особенности связей между элементами или, как еще говорят, пространственную структуру множеств. Одной из важнейших функциональных характеристик структурных отношений между элементами множества является понятие близости элементов, тесно связанное с понятиями расстояния между элементами, сходимости последовательности и непрерывности функции. Любое множество, в котором тем или иным образом введено понятие близости элементов, принято называть *пространством,* а его элементы – *точками пространства.*

Неотрицательная действительная функция d_X, определенная на прямом произведении $X\times X$ множества X, называется *метрикой* на множестве X, если для любых элементов множества X она удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

симметрии

$$d_X(x,y) = d_X(y,x); \tag{1.01}$$

тождества

$$d_X(x,y) = 0 \iff x = y; \tag{1.02}$$

треугольника

$$d_X(x,y) \le d_X(x,z) + d_X(z,y). \tag{1.03}$$

Числовое значение функции $d_X(x,y)$ будем называть *расстоянием* между элементами x и y множества X.

Говорят, что множество X *метризуемо*, если на нем может быть введена некоторая метрика. Метризуемое множество X с заданной на нем метрикой d_X называется *метрическим пространством* и обозначается (X,d_X). В случаях, исключающих неоднозначность толкования, мы будем обозначать метрическое пространство одной буквой, как правило, совпадающей с обозначением множества элементов X, а для метрики использовать выражение d.

Требования (1.01)-(1.03), налагаемые на метрику, называются *аксиоматикой метрического пространства.* Из них, в частности, вытекает и свойство неотрицательности метрики $d_X(x,y)\ge 0$, которое тем самым оказывается избыточным условием в определении метрики. Неравенство треугольника (1.03) служит аналогом известного в геометрии соотношения: длина любой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других сторон.

П р и м е р 1.1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ образует метрическое *n-мерное числовое* (*координатное*) *пространство*:

$E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ с метрикой

$$d_{E1}(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |\,x-y\,|, \tag{1.04}$$

$E^2=(\mathbb{R}^2,d_{E2})$ с метрикой

$$d_{E2}(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,, \tag{1.05}$$

$E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$ с метрикой *Евклида*

$$d_{En}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\,. \tag{1.06}$$

Пространство $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ называется *числовой прямой*, $E^2=(\mathbb{R}^2,d_{E2})$ – *числовой плоскостью*. Пространство $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$ называется также *евклидовым пространством*, имеющим декартову прямоугольную систему координат.

Выполнение аксиом симметрии (1.01) и тождества (1.02) для метрик d_{E1}, d_{E2} и d_{En} очевидно. Выполнение аксиомы треугольника (1.03) легко проверяется. Действительно, на числовой прямой E^1 имеем

$$d_{E1}(x,y)=|x-y|=|(x-z)+(z-y)|\le|x-z|+|z-y|=d_{E1}(x,z)+d_{E1}(z,y).$$

Справедливость аксиомы треугольника (1.03) в n-мерном числовом пространстве E^n для $n\ge2$ следует из известного неравенства Коши-Буняковского [КФ68]

$$d_{En}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2}\le$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}=d_{En}(x,z)+d_{En}(z,y).\ \blacksquare$$

Отметим некоторые свойства метрических пространств.

Метрическое пространство X или множество $B\subseteq X$ называется *метрически выпуклым* [DGK63] или *d-выпуклым* [DL97], если для любых несовпадающих элементов $x,y\in B$, $x\ne y$ существует такой отличный от них элемент $z\in B$, $z\ne x$, $z\ne y$, что неравенство треугольника (1.03) превращается в равенство

$$d_X(x,y)=d_X(x,z)+d_X(z,y). \tag{1.07}$$

Метрику d_X, удовлетворяющую условию (1.07), будем называть *d-выпуклой*. Свойство метрической выпуклости множества B и пространства (X,d_X) представляет собой пространственный аналог тернарного отношения $[x, z, y]$ «элемент z находится между элементами x и y», которое в произвольном частично упорядоченном множестве задается условием $\inf(x,y)\le z\le\sup(x,y)$.

Т е о р е м а 1.1. *Евклидово пространство $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$ метрически выпукло*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть x,y – произвольные точки числовой прямой E^1 и $x\ne y$. Тогда либо $x<y$, либо $y<x$, и всегда найдется число z, $z\ne x$, $z\ne y$, лежащее между числами x и y, такое, что или $x<z<y$, или $y<z<x$. Предположим, что $y<z<x$. В этом случае получаем равенство (1.07)

$$d_{E1}(x,y)=x-y=(x-z)+(z-y)=d_{E1}(x,z)+d_{E1}(z,y).$$

2°. Пусть теперь x,y – произвольные точки числового пространства E^n и, например, $y_i<x_i$. Возьмем любую точку $z\in E^n$, лежащую между точками x и y и на одной прямой с ними. В таком случае, очевидно, по каждой i-ой координате выполняются следующие соотношения:

$$y_i<z_i<x_i,\quad d_{E1}(z_i,y_i)=hd_{E1}(x_i,z_i),\quad d_{E1}(x_i,y_i)=d_{E1}(x_i,z_i)+d_{E1}(z_i,y_i)=(1+h)d_{E1}(x_i,z_i),$$

где h>0 – коэффициент пропорциональности. Отсюда имеем $d_{E1}(z,y)=hd_{E1}(x,z)$ и

$$d_{En}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{E1}^{2}(x_i,y_i)}=(1+h)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_{E1}^{2}(x_i,z_i)}=(1+h)d_{E1}(x,z)=d_{E1}(x,z)+d_{E1}(z,y). \ \blacksquare$$

Метрическое пространство X или множество $A\subseteq X$ называется *ограниченным,* если для всех пар элементов $x,y\in A$ существует такое число $c>0$, что выполняется неравенство

$$d(x,y)<c. \tag{1.08}$$

Очевидно, что расстояния $d(x,a)$ от любой точки $x\in X$ пространства до всех точек $a\in A$ ограниченного множества A ограничены. Всякое конечное множество $X=\{x_1,...,x_n\}$ ограничено.

Точная верхняя грань всех расстояний $d_X(x,y)$ между любыми элементами множества A метрического пространства (X,d_X)

$$D_X(A)=\mathrm{diam}A=\sup_{x,y\in A} d_X(x,y) \tag{1.09}$$

называется *диаметром* множества A. Диаметр пустого множества $\varnothing$ принимается равным $D_X(\varnothing)=0$. Очевидно, что диаметр ограниченного множества ограничен $D_X(A)\le c$.

П р и м е р 1.2. Множество $A=\{x \mid x=1/n,\ n\in\mathbb{N}\}$ является ограниченным множеством числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$, так как для любых пар точек $x,y\in A$ выполняется неравенство $d_{E1}(x,y)<1$. Диаметр множества A равен $D_{E^1}(A)=1$. ◘

П р и м е р 1.3. Произвольное множество элементов X образует метрическое *пространство изолированных точек* (X,d_t) с метрикой

$$d_t(x,y)=\begin{cases}0, \text{ если } x=y,\\ t>0 - \text{целое, если } x\neq y.\end{cases} \tag{1.10}$$

Метрика d_t обозначается также как $t\mathbb{1}$ и называется *эквидистантной*, а при $t=1$ – *тривиальной*. Выполнение аксиоматики метрического пространства (1.01)-(1.03) для метрики $d_t=t\mathbb{1}$ очевидно. Пространство изолированных точек (X,d_t) ограничено, а его диаметр $D(X)=t$. ◘

Конечное метрическое пространство (X,d_X), $X=\{x_1,...,x_n\}$ называют *пространством отрицательного типа* (соответственно *гиперметрическим пространством*, *k-гональным пространством*), если для всех элементов множества X выполняется неравенство

$$\sum_{x,y\in X} b_x b_y d_X(x,y)\le 0, \tag{1.11}$$

где b_x – целые числа, удовлетворяющие условию $\Sigma_{x\in X}\, b_x=0$ (соответственно условию $\Sigma_{x\in X}\, b_x=1$ или $\Sigma_{x\in X}\, |b_x|=k$). Если b_x принимает значения –1,0,+1, то неравенство того или иного типа называется *чистым*. Метрика d_X, удовлетворяющая условию (1.11), называется соответственно метрикой *отрицательного типа*, *гиперметрической* метрикой или *k-гональной* метрикой.

Можно показать [DL97], что в общем случае неравенство отрицательного типа следует из гиперметрического неравенства, а для целого числа $k\ge 1$ $(2k+2)$-

гональные неравенства следуют из $(2k+1)$-гональных. В частности, чистое 2-гональное неравенство является неравенством отрицательного типа, которое есть ничто иное, как условие неотрицательности метрики $d_X(x,y)\geq 0$, а чистое 3-гональное неравенство является гиперметрическим неравенством, которое совпадает с неравенством треугольника (1.03).

1.2. Расстояния между точками и множествами. Покажем, как задаются расстояния между точками и множествами в метрическом пространстве.

Расстояния $d(x,y)$ между точками конечного метрического пространства (X,d) можно представить в матричном или векторном виде. Пусть $X=\{x_1,...,x_n\}$ – n-элементное множество и $U=\{(x_i,x_j)|x_i,x_j\in X,\ x_i\neq x_j\}$ – множество неупорядоченных пар его элементов. Тогда расстояниям $d(x_i,x_j)$ можно сопоставить квадратную *матрицу расстояний* $\mathrm{D}=\|d_{ij}\|$ порядка n, где $n=|X|$ – мощность множества X, а элементы матрицы $d_{ij}=d(x_i,x_j)$. Матрица расстояний D является симметрической матрицей с равными нулю диагональными элементами.

Располагая элементы матрицы d_{ij}, лежащие над ее диагональю, в порядке возрастания их номеров и принимая во внимание аксиомы симметрии (1.01) и тождества (1.02), расстояния $d(x_i,x_j)$ между всеми парами точек $x_i,x_j\in X$ можно записать в виде h-мерного *вектора расстояний* $\mathbf{d}=(d_1,...,d_h)$, где $h=|U|=n(n-1)/2$, а компоненты вектора $d_{1\leq k\leq h}=(d_{ij})_{1\leq i<j\leq n}$.

Расстояние от точки x до непустого множества $A\subseteq X$ в произвольном метрическом пространстве (X,d) можно определить как точную нижнюю грань множества расстояний между точкой x и всеми точками множества A

$$d(x,A)=\inf_{a\in A} d(x,a). \qquad (1.12)$$

Расстояние от точки x до пустого множества $\varnothing$ принимается равным $d(x,\varnothing)=1$. Из соотношения (1.12) следует, что если точка $x\in A$, то расстояние $d(x,A)=0$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, так как из условия $d(x,A)=0$ не вытекает, что точка $x\in A$. Если точка x находится от множества A на расстоянии $d(x,A)=0$ и $x\notin A$, то такая точка называется *абсолютно близкой* к множеству A.

Расстояние между непустыми множествами A и B метрического пространства (X,d) вводится аналогичным образом как точная нижняя грань множества расстояний между любыми парами точек, принадлежащих соответственно множествам A и B:

$$d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B} d(a,b).$$

Расстояние от непустого множества A до пустого множества $\varnothing$ принимается равным $d(A,\varnothing)=1$, а расстояние между пустыми множествами равным $d(\varnothing,\varnothing)=0$. Если множества A и B имеют хотя бы одну общую точку, то есть $A\cap B\neq\varnothing$, то расстояние между ними $d(A,B)=0$. Обратное утверждение неверно.

Расстояние между непустыми множествами A и B ограниченного метрического пространства можно ввести и иным образом. Например, *метрика Хаусдорфа* определяется как

$$d_H(A,B)=\max\,[\sup_{a\in A} d(a,B),\sup_{b\in B} d(b,A)] \qquad (1.13)$$

и, очевидно, удовлетворяет аксиоматике метрического пространства.

Выполняются следующие соотношения между расстояниями.

Т е о р е м а 1.2. *Расстояния между произвольными точками и непустыми множествами метрического пространства* (X,d) *удовлетворяют неравенствам*:

$$|d(x,z) - d(y,w)| \le d(x,y) + d(z,w); \qquad (1.14)$$

$$|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y); \qquad (1.15)$$

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y); \qquad (1.16)$$

$$|d(x,A) - d(x,B)| \le d(A,B); \qquad (1.17)$$

$$|d(A,C) - d(B,C)| \le d(A,B); \qquad (1.18)$$

$$|d(A,C) - d(B,G)| \le d(A,B) + d(C,G). \qquad (1.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства неравенств (1.14)-(1.19) воспользуемся неравенством треугольника (1.03) и аксиомой симметрии (1.02).

1°. Для произвольных точек метрического пространства $x,y,z,w \in X$ имеем:

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,w) + d(w,z)$$

или

$$d(x,z) - d(y,w) \le d(x,y) + d(z,w).$$

Меняя местами элементы x,y и z,w, получим

$$d(y,w) - d(x,z) \le d(x,y) + d(z,w).$$

Отсюда следует соотношение (1.14), называемое также *неравенством четырехугольника.*

2°. Полагая в соотношении (1.14) $w=z$ и учитывая аксиому тождества (1.02), получаем неравенство (1.15). Это неравенство является аналогом известного в геометрии соотношения, по которому разность длин двух сторон треугольника не превосходит длины третьей стороны.

3°. Для произвольных точек $x,y \in X$ и $a \in A \subseteq X$ выполняется соотношение:

$$d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a).$$

В силу произвольности точки a, очевидно, имеем:

$$\inf_{a\in A} d(x,a) \le d(x,y) + \inf_{a\in A} d(y,a)$$

или

$$d(x,A) - d(y,A) \le d(x,y).$$

Меняя местами элементы x,y, получим

$$d(y,A) - d(x,A) \le d(x,y).$$

Отсюда следует неравенство (1.16).

4°. Для произвольных точек $x \in X$, $a \in A \subseteq X$ и $b \in B \subseteq X$ выполняется:

$$d(x,a) \le d(x,b) + d(b,a).$$

В силу произвольности точек a и b и условия $d(x,y) \ge 0$ имеем:

$$\inf_{a\in A, b\in B} d(x,a) \le \inf_{a\in A, b\in B} d(x,b) + \inf_{a\in A, b\in B} d(b,a)$$

или

$$d(x,A) - d(x,B) \le d(A,B).$$

Меняя местами множества A,B, получим

$$d(x,B) - d(x,A) \le d(A,B).$$

Отсюда следует неравенство (1.17).

5°. Для произвольных точек $a\in A\subseteq X$, $b\in B\subseteq X$, $c\in C\subseteq X$ и $g\in G\subseteq X$ имеем:

$$d(a,c) \le d(a,b) + d(b,g) + d(g,c).$$

В силу произвольности точек a, b, c и g и условия $d(x,y)\ge 0$ выполняется:

$$\inf_{\substack{a\in A,b\in B,\\ c\in C,g\in G}} d(a,c) \le \inf_{\substack{a\in A,b\in B,\\ c\in C,g\in G}} d(a,b) + \inf_{\substack{a\in A,b\in B,\\ c\in C,g\in G}} d(b,g) + \inf_{\substack{a\in A,b\in B,\\ c\in C,g\in G}} d(g,c)$$

или

$$d(A,C) - d(B,G) \le d(A,B) + d(C,G).$$

Меняя местами множества A,B, и C,G, получим

$$d(B,G) - d(A,C) \le d(A,B) + d(C,G).$$

Отсюда следует неравенство (1.19).

6°. Полагая в соотношении (1.19) $C=G$ и учитывая аксиому тождества (1.02), получаем неравенство (1.18), аналогичное неравенству (1.15).

Если оба множества A и B пусты, то неравенство (1.16) вырождается в тривиальное неравенство $d(x,y)\ge 0$, а неравенства (1.17), (1.18) – в тождество 0=0. Если одно из множеств A или B пусто, а другое нет, то неравенство в виде (1.17) вывести нельзя. Если множества C и G пусты, то неравенства (1.18), (1.19) вырождаются в тривиальное неравенство $d(A,B)\ge 0$. ■

1.3. Способы образования метрических пространств. Рассмотрим возможные способы образования метрических пространств. Задавая различные метрики d_{Xk} на одном и том же множестве элементов X, получаем разные метрические пространства. Разные метрические пространства также получаются, если ввести одну и ту же метрику на различных множествах элементов. Так, любое подмножество B множества X с тем же расстоянием $d_X(x,y)$ между элементами, что и на пространстве (X,d_X), тоже является метрическим пространством (B,d_X) и называется *подпространством* пространства (X,d_X).

П р и м е р 1.4. Множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, целых чисел $\mathbb{Z}$, натуральных чисел $\mathbb{N}$, интервал $\mathbb{R}_{01}$ с любой из метрик d_{E1}, d_{E2} или d_{En} образуют метрические пространства $Q^n=(\mathbb{Q}^n,d_{En})$, $Z^n=(\mathbb{Z}^n,d_{En})$, $N^n=(\mathbb{N}^n,d_{En})$, $I^n=(\mathbb{R}_{01}{}^n,d_{En})$, которые являются подпространствами метрического пространства $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$. I^n называется *n-мерным кубическим пространством* или *единичным n-мерным кубом*. Подпространство B^n пространства E^n, точки которого удовлетворяют условию $x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots+x_n{}^2\le 1$, называется *единичным n-мерным шаром* с центром в точке $(0,0,\ldots,0)$, а подпространство S^n пространства E^{n+1}, состоящее из точек, удовлетворяющих условию $x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots+x_{n+1}{}^2=1$, – *единичной n-мерной сферой* с центром в точке $(0,0,\ldots,0)$. В частности, одномерная сфера S^1 – это *единичная окружность*, а прямое произведение одномерных сфер $S^1\times S^1$ – *тор*. ◘

Новые метрические пространства можно образовать с помощью различных операций над метризуемыми множествами. Например, пространства $(X_1\bigcup X_2,d_X)$ и $(X_1\bigcap X_2,d_X)$, получающиеся в результате объединения и пересечения метрических пространств (X_1,d_X) и (X_2,d_X), имеющих одну и ту же метрику, очевидно, также будут метрическими пространствами и будут обладать такими же свойствами, что и образующие их пространства.

Пусть теперь метрические пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2) имеют разные метрики, а пересечение множеств X_1 и X_2 равно $X_1 \bigcap X_2=\{x_0\}$. Объединение множеств $X_1 \bigcup X_2$ образует метрическое пространство с метрикой

$$d_{1+2}(x,y) = \begin{cases} d_1(x,y), & \text{если } x,y \in X_1, \\ d_2(x,y), & \text{если } x,y \in X_2, \\ d_1(x,x_0)+d_2(x_0,y), & \text{если } x \in X_1, y \in X_2, \end{cases} \tag{1.20}$$

которая называется 1-*суммой* метрик d_1 и d_2. Рассмотрим свойства метрического пространства $(X_1 \bigcup X_2,d_{1+2})$.

Т е о р е м а 1.3. *Метрическое пространство* $(X_1 \bigcup X_2,d_{1+2})$, *где метрика* d_{1+2} *есть* 1-*сумма метрик* d_1 *и* d_2, *является метрически выпуклым* (*соответственно отрицательного типа*, *гиперметрическим*) *пространством тогда и только тогда*, *когда метрические пространства* (X_1,d_1) *и* (X_2,d_2) *метрически выпуклы* (*соответственно отрицательного типа*, *гиперметрические*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Необходимые и достаточные условия метрической выпуклости пространства $(X_1 \bigcup X_2,d_{1+2})$ непосредственно вытекают из определения (1.20) метрики d_{1+2} и равенства (1.07).

2°. Пусть метрическое пространство $(X_1 \bigcup X_2,d_{1+2})$ является пространством отрицательного типа (или гиперметрическим пространством). Метрические пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2) являются подпространствами пространства $(X_1 \bigcup X_2,d_{1+2})$ и, значит, они также пространства отрицательного типа (гиперметрические пространства).

Пусть теперь пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2) будут пространствами отрицательного типа (или гиперметрическими пространствами). Зададим целые числа b_x, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{x \in X_1 \bigcup X_2} b_x=0$ (соответственно $\sum\limits_{x \in X_1 \bigcup X_2} b_x=1$), и положим $a_x=b_x$ для $x \in X_1 \setminus \{x_0\}$, $a_{x0}=\sum\limits_{x \in X_2} b_x$, $c_x=b_x$ для $x \in X_2 \setminus \{x_0\}$, $c_{x0}=\sum\limits_{x \in X_1} b_x$. Тогда в силу определения (1.20) и неравенства (1.11) имеем:

$$\sum_{x,y \in X_1 \bigcup X_2} b_x b_y d_{1+2}(x,y) = \sum_{x,y \in X_1} a_x a_y d_1(x,y) + \sum_{x,y \in X_2} c_x c_y d_2(x,y) \le 0.$$

Следовательно, пространство $(X_1 \bigcup X_2,d_{1+2})$ есть пространство отрицательного типа (или гиперметрическое пространство). ■

Прямое произведение $U=X_1 \times X_2$ метрических пространств (X_1,d_1) и (X_2,d_2) в общем случае не является метрическим пространством. Однако множество $U=X_1 \times X_2$ метризуется, если определить расстояние $d_U(x,y)$ между его точками $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$, где $x_1,y_1 \in X_1$, $x_2,y_2 \in X_2$, одним из следующих способов:

$$d_{U\infty}(x,y) = \max\, [d_1(x_1,y_1),\, d_2(x_2,y_2)]. \tag{1.21}$$

$$d_{U1}(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2); \tag{1.22}$$

$$d_{U2}(x,y) = \sqrt{d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2,y_2)}\,, \tag{1.23}$$

Каждая из метрик $d_{U\infty}$, d_{U1}, d_{U2} задает отображение прямого произведения множеств $U \times U=(X_1 \times X_2)\times(X_1 \times X_2)$ на множество неотрицательных действительных чисел d_U: $U \times U \to \mathbb{R}_+$.

Проверим выполнение аксиоматики метрического пространства для функции $d_{U\infty}$. Аксиома симметрии (1.01) очевидна. Если $x=y$, то $x_1=y_1$ и $x_2=y_2$, а значит, $d_{U\infty}(x,y)=\max(0,0)=0$. Так как справедливо и обратное утверждение, то аксиома тождества (1.02) выполняется. Если $x\neq y$, то либо $x_1\neq y_1$ и $d_1(x_1,y_1)>0$, либо $x_2\neq y_2$ и $d_2(x_2,y_2)>0$, а значит, и $d_{U\infty}(x,y)>0$. Таким образом, функция $d_{U\infty}$ неотрицательна. Для проверки справедливости неравенства треугольника допустим, что $d_1(x_1,y_1)\leq d_2(x_2,y_2)$. Тогда

$$d_{U\infty}(x,y) = d_2(x_2,y_2) \leq d_2(x_2,z_2) + d_2(z_2,y_2) \leq$$
$$\leq \max\,[d_1(x_1,z_1),\, d_2(x_2,z_2)] + \max\,[d_1(z_1,y_1),\, d_2(z_2,y_2)] = d_{U\infty}(x,z) + d_{U\infty}(z,y).$$

Такой же результат получится, если предположить, что $d_1(x_1,y_1)\geq d_1(x_2,y_2)$. Итак, выполнятся и аксиома (1.03). Аналогичным образом нетрудно убедиться в справедливости аксиоматики (1.01)-(1.03) и для метрик d_{U1}, d_{U2}.

Метрические пространства $(X_1\times X_2,d_U)$ обладают следующими свойствами.

Т е о р е м а 1.4. *Метрическое пространство* $(X_1\times X_2,d_U)$ *с метрикой* $d_{U\infty}$, d_{U1} *или* d_{U2} *метрически выпукло, если метрически выпуклы пространства* (X_1,d_1) *и* (X_2,d_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Метрическая выпуклость пространства $(X_1\times X_2,d_U)$ непосредственно вытекает из определений (1.21)-(1.23) метрик $d_{U\infty}$, d_{U1}, d_{U2} и равенства (1.07), если в качестве точки z взять точку $z\in X_1\times X_2$, лежащую между точками x и y и на одной прямой с ними. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1.1, для i=1,2 справедливы соотношения:

$$d_i(z_i,y_i) = hd_i(x_i,z_i), \quad d_i(x_i,y_i) = d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i) = (1+h)d_i(x_i,z_i),$$

где $h>0$ – коэффициент пропорциональности, и, следовательно,

$$d_{U\infty}(x,y) = \max\,[d_1(x_1,y_1),\, d_2(x_2,y_2)] = \max\,[(1+h)d_1(x_1,z_1),\, (1+h)d_2(x_2,z_2)] =$$
$$= (1+h)\max\,[d_1(x_1,z_1),\, d_2(x_2,z_2)] = (1+h)d_{U\infty}(x,z) = d_{U\infty}(x,z) + d_{U\infty}(z,y).$$

Подобным же образом устанавливается выполнение равенства (1.07) для метрик d_{U1} и d_{U2}. ■

Т е о р е м а 1.5. *Метрическое пространство* $(X_1\times X_2,d_{U1})$ *с метрикой* $d_{U1}(x,y)=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$ *является пространством отрицательного типа (гиперметрическим пространством) тогда и только тогда, когда метрические пространства* (X_1,d_1) *и* (X_2,d_2) *отрицательного типа (гиперметрические).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимые и достаточные условия того, что пространство $(X_1\times X_2,d_{U1})$ отрицательного типа (гиперметрическое), следуют из соотношения:

$$\sum_{x,y\in X_1\times X_2} b_x b_y d_{U1}(x,y) = \sum_{x_1,y_1\in X_1} a_{x_1}a_{y_1}d_1(x_1,y_1) + \sum_{x_2,y_2\in X_2} c_{x_2}c_{y_2}d_2(x_2,y_2) \leq 0,$$

которое вытекает из определения (1.22) метрики d_{U1} и неравенства (1.11). Здесь целые числа b_x, a_{x_1}, c_{x_2} удовлетворяют условиям:

$$\sum_{x\in X_1\times X_2} b_x = \sum_{x_1\in X_1} a_{x_1} = \sum_{x_2\in X_2} c_{x_2} = 0 \quad \text{(соответственно } \sum_{x\in X_1\times X_2} b_x = 1\text{)},$$

а числа a_{x_1} и c_{x_2} определяются как $a_{x_1} = \sum_{x\in X_2} b_x$, $c_{x_2} = \sum_{x\in X_1} b_x$ для $x=(x_1,x_2)$. ■

Аналогичным образом можно ввести метрики на прямом произведении $U=X_1\times X_2\ldots\times X_n$ нескольких метрических пространств (X_i,d_i), полагая

$$d_{U\infty}(x,y)=\max_{1\le i\le n}[d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n)],$$

$$d_{U1}(x,y)=\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i),$$

$$d_{U2}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i,y_i)},$$

где точки $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, $x_i,y_i\in X_i$. Если положить $X_i=\mathbb{R}$, а расстояния $d_i(x_i,y_i)$ определить с помощью формулы (1.04), то расстояние $d_{U2}(x,y)$ совпадет с расстоянием $d_{En}(x,y)$, заданным формулой (1.06), а пространство (U,d_{U2}) – с числовом евклидовым пространством $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$.

1.4. Сходимость и предел последовательности элементов множества. Дадим теперь определения нескольких важных понятий, широко используемых в различных разделах математики. *Последовательностью элементов* (*точек*) произвольного множества X называется функция вида g: $\mathbb{N}\to X$, задающая отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на множество X. Последовательность обычно обозначается как $\{x_n\}$, $n=1,2,\dots$

Если элемент x_i встречается в последовательности $\{x_n\}$ раньше элемента x_j, то есть $i<j$, то элемент x_i называется *предшествующим* элементу x_j, а элемент x_j – *следующим за* элементом x_i. Если $j=i+1$, то говорят, что элемент x_i *непосредственно предшествует* элементу x_j, а элемент x_j *непосредственно следует за* элементом x_i. В таком случае говорят также, что два члена последовательности, отличающиеся своими номерами, находятся в отношении *следования* [КМ67].

Всякую последовательность $\{x_n\}$ можно рассматривать как множество, линейно упорядоченное отношением следования, в котором место каждого элемента x_i определяется его номером (индексом). Элементы конечной последовательности всегда можно перенумеровать так, чтобы они располагались в порядке возрастания их номеров [Шре71]. Порядок следования элементов множества, совпадающий с порядком следования натуральных чисел во множестве $\mathbb{N}$, будем называть *естественным*.

П р и м е р 1.5. Любой алфавит, состоящий из символов (букв или цифр), в котором зафиксирован порядок следования символов, является последовательностью, в которой элементы непосредственно следуют друг за другом. Например, русский алфавит {*а*,*б*,*в*,…,*э*,*ю*,*я*} или алфавит цифр {0,1,2,…,9}. ◘

Возможность измерить близость между элементами множеств позволяет дать формально строгое определение сходимости и пределу последовательности. В метрических пространствах роль измерителя близости между его точками играет метрика d. Поэтому понятие сходимости последовательности в метрическом пространстве (X,d) формулируется следующим образом.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$, $n=1,2,\dots$ точек метрического пространства (X,d) *сходится к точке* x_0 *по метрике* d, если для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n>N$ расстояние между точками x_n и x_0 удовлетворяет неравенству

$$d(x_n,x_0) < \varepsilon. \tag{1.24}$$

Точка x_0 пространства X, удовлетворяющая этому требованию, называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$. В этом случае говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к пределу* x_0 *при* $n\to\infty$, и записывают это символически как $x_n\to x_0$ или

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{1.25}$$

Равенство (1.25) можно рассматривать как определение на множестве X некоторой бесконечноарной операции *предельного перехода* lim, которая бесконечному множеству точек x_n сопоставляет предельную точку x_0.

Условие (1.25) сходимости последовательности $\{x_n\}$ точек метрического пространства X к пределу x_0 можно отождествить со сходимостью последовательности действительных чисел $\{d(x_n,x_0)\}$ к нулю, то есть $d(x_n,x_0)\to 0$ при $n\to\infty$ или

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0) = 0. \tag{1.26}$$

В метрических пространствах определения предела (1.25) и (1.26) равносильны. Расстояние между элементами числовых последовательностей обычно измеряется по формуле $d_{E1}(x,y) = |x - y|$.

Множество точек x метрического пространства (X,d), удовлетворяющих условию $d(x,x_0)<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – заданное число, называется *ε-окрестностью точки* x_0 и обозначается как $O_\varepsilon(x_0)$. Согласно условию (1.08) любая окрестность каждой точки $x\in X$ является ограниченным множеством. Воспользовавшись понятием окрестности точки, сходимость последовательности можно определить по-другому.

Последовательность $\{x_n\}$, n=1,2,… точек пространства X называется *сходящейся к точке* x_0, если для любой ε-окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n>N$ элементы x_n содержатся в ε-окрестности $O_\varepsilon(x_0)$. Иначе говоря, начиная с некоторого номера N справедливо включение $x_n\in O_\varepsilon(x_0)$. Если для последовательности $\{x_n\}$ не существует точки x_0, удовлетворяющей условию $x_n\in O_\varepsilon(x_0)$ при $n>N$ или, что то же, условию (1.25) либо (1.26), то последовательность $\{x_n\}$ называется *расходящейся*. Укажем достаточное условие, при котором последовательность будет расходящейся.

Т е о р е м а 1.6. *Если расстояния $d(x_n,x_m)$ между различными произвольными точками x_n и x_m ($n\neq m$) последовательности ограничены снизу числом* $b>0$, *то предел последовательности $\{x_n\}$ не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится в метрическом пространстве (X,d) к пределу x_0. Согласно определению (1.24) для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие точки x_n и x_m и такое число N, что при номерах $n,m>N$ выполняются неравенства $d(x_n,x_0)<\varepsilon$ и $d(x_m,x_0)<\varepsilon$. Тогда по аксиоме треугольника (1.03) получим:

$$d(x_n,x_m) \le d(x_n,x_0) + d(x_0,x_m) < 2\varepsilon,$$

что противоречит условию ограниченности снизу расстояния $d(x_n,x_m)\ge b$. ■

П р и м е р 1.6. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=n/(n+1)$, n=1,2…, сходится в метрическом пространстве действительных чисел $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ к пределу

$x_0=1$. Действительно, выбирая для $0<\varepsilon<1$ номер N из условия $N>(1/\varepsilon)-1$, имеем для всех номеров $n>N$

$$d_{E1}(x_n,x_0) = \left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \frac{n}{n+1} < \frac{n}{N+1} < \varepsilon.$$

Полагая для всех $\varepsilon\geq 1$ номер $N=1$, получим $d_{E1}(x_n,x_0) = 1/2 < \varepsilon$. ◘

Предел подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ сходящейся последовательности $\{x_n\}$ называется *частичным пределом этой последовательности.* Наименьший и наибольший элемент множества частичных пределов называется соответственно *нижним пределом и верхним пределом последовательности* $\{x_n\}$ и обозначается

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_s x_{n+s}, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_s x_{n+s}. \tag{1.27}$$

Последовательность $\{x_n\}$ имеет предел x_0 в том и только том случае, если ее нижний и верхний пределы совпадают и $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Последовательность $\{x_n\}$, все члены которой имеют одно и то же значение $x_n=a$, называется *стационарной*. Из определения предела (1.26) непосредственно следует, что для стационарной последовательности $\lim_{n\to\infty} x_n=a$.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства (X,d) называется *сходящейся в себе* или *фундаментальной последовательностью,* если для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ расстояние между точками x_n и x_l удовлетворяет неравенству

$$d(x_n,x_l) < \varepsilon. \tag{1.28}$$

Равносильное определение фундаментальной последовательности можно записать символически также в виде $d(x_n,x_l)\to 0$ при $n,l\to\infty$ или

$$\lim_{n,l\to\infty} d(x_n,x_l) = 0. \tag{1.29}$$

Фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ будем называть *эквивалентными* или *конфинальными* и обозначать $\{x_n\}\sim\{y_n\}$, если $d(x_n, y_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Нетрудно убедиться, что отношение $\{x_n\}\sim\{y_n\}$ симметрично, рефлексивно и транзитивно, то есть действительно является отношением эквивалентности, в соответствии с которым множество всех фундаментальных последовательностей точек метрического пространства может быть разбито на классы эквивалентных между собой последовательностей. Любые последовательности, точек сходящиеся к одному и тому же пределу, будут эквивалентными. Две последовательности, эквивалентные третьей, эквивалентны друг другу.

Метрики d_1 и d_2 на множестве X будем называть *эквивалентными*, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке $x\in X$, равносильны условия $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,x)=0$ и $\lim_{n\to\infty} d_2(x_n,x)=0$ [Eng77]. Всякое метрическое пространство (X,d) можно сделать ограниченным, задав метрику, эквивалентную исходной.

Т е о р е м а 1.7. *Для каждого метрического пространства* (X,d) *существует ограниченная сверху метрика* d_0, *эквивалентная метрике* d.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $x,y \in X$ положим $d_0(x,y)=\min[c, d(x,y)]$, где $c>0$. Выполнение аксиом (1.01) и (1.02) для d_0 очевидно. Справедливость неравенства треугольника (1.03) проверяется непосредственно:

$$d_0(x,z) + d_0(z,y) = \min[c, d(x,z)] + \min[c, d(z,y)] =$$
$$= \min[2c, c+d(x,z), c+d(z,y), d(x,z)+d(z,y)] \geq \min[c, d(x,y)] = d_0(x,y).$$

Таким образом, d_0 является метрикой и удовлетворяет условию (1.08) $d_0(x,y)\leq c$. В частности, можно положить $c=1$. Очевидно также, что метрики d_0 и d эквивалентны по построению. ■

1.5. Свойства сходящихся последовательностей. Сходящиеся последовательности точек обладают следующими свойствами.

Т е о р е м а 1.8. *Всякая сходящаяся в метрическом пространстве последовательность точек $\{x_n\}$ является фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность точек $\{x_n\}$ сходится в метрическом пространстве (X,d) к пределу x_0, то есть согласно определению (1.24) для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число N, что при номерах $n>N$ расстояние $d(x_n,x_0)<\varepsilon$. Тогда по аксиоме треугольника (1.03) для любых $n,l>N$ выполняется неравенство (1.28):

$$d(x_n,x_l) \leq d(x_n,x_0) + d(x_0,x_l) < 2\varepsilon. \ ■$$

Обратное утверждение в общем случае неверно, так как в произвольном метрическом пространстве (X,d) могут существовать фундаментальные последовательности точек, не сходящиеся в нем ни к какому пределу. В то же время для числовой последовательности сходимость в себе является необходимым и достаточным условием ее сходимости (так называемый *критерий Коши*).

П р и м е р 1.7. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=1/n$, $n=1,2,\ldots$, сходится в метрическом пространстве рациональных чисел $Q^1=(\mathbb{Q},d_{E1})$ и в себе, и к пределу $x_0=0$, являющемуся точкой пространства Q^1, а последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=[1+(1/n)]^n$, $n=1,2,\ldots$, сходится в себе, но ее предел $\lim\limits_{n\to\infty}[1+(1/n)]^n=e$ не принадлежит пространству Q^1, так как число e иррационально. ◘

Т е о р е м а 1.9. *Всякая фундаментальная последовательность точек $\{x_n\}$ ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность точек $\{x_n\}$ фундаментальна, то есть согласно определению (1.28) для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число N, что при номерах $n,l>N$ расстояние $d(x_n,x_l)<\varepsilon$. Положим $d_0=\max[d(x_1,x_2),\ldots,d(x_1,x_N), d(x_2,x_3),\ldots,d(x_2,x_N),\ldots, d(x_{N-1},x_N)]$ и $\varepsilon=1$. Тогда для всех пар точек x_n, x_l, $n,l=1,2,\ldots$ выполняется условие (1.08) ограниченности множества $X=\{x_n\}$:

$$d(x_n, x_l) \leq \max[d_0, 1] = c. \ ■$$

Т е о р е м а 1.10. *Если последовательность точек $\{x_n\}$ сходится в метрическом пространстве к пределу x_0, то:*

предел x_0 единственен;

любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к тому же пределу x_0;

последовательность $\{x_n\}$ ограничена;

расстояние $d(x_n,a)$ до любой фиксированной точки $a\in X$ ограничено.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть последовательность точек $\{x_n\}$ сходится в метрическом пространстве (X,d) к двум различным пределам $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0$ при $n \to \infty$ и $x_0 \neq y_0$. Тогда по определению сходящейся последовательности (1.24) для любого $\varepsilon>0$ и достаточно больших номеров $n>N$ имеем $d(x_n,x_0)<\varepsilon$ и $d(x_n,y_0)<\varepsilon$. По аксиомам симметрии (1.02) и треугольника (1.03) получаем:

$$d(x_0,y_0) \le d(x_0,x_n) + d(x_n,y_0) < 2\varepsilon$$

или $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_0,y_0)=0$. Так как расстояние $d(x_0,y_0)$ не зависит от номера n, то $d(x_0,y_0)=0$, и значит, по аксиоме тождества (1.02) пределы совпадают $x_0=y_0$.

2°. По определению сходящейся последовательности точек $\{x_n\}$ для любого $\varepsilon>0$ существует такое число N, что для всех номеров $n>N$ выполняется условие $d(x_n,x_0)<\varepsilon$. Пусть $\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Если номер $n_k>N$, то расстояние $d(x_{n_k},x_0)<\varepsilon$, то есть подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ также сходится и имеет предел x_0.

3°. Согласно теореме 1.8 всякая сходящаяся последовательность точек фундаментальна и, значит, согласно теореме 1.9 ограничена.

4°. По аксиоме треугольника (1.03) для любого номера n имеем:

$$d(x_n,a) \le d(x_n,x_0) + d(x_0,a).$$

Так как последовательность точек $\{x_n\}$ сходится, а значит, и ограничена, то для любого номера n расстояние $d(x_n,x_0)\le c_1$. Так как точка a фиксирована, то $d(x_0,a)=c_2$. Тогда

$$d(x_n,a) \le c_1 + c_2 = c_3. \blacksquare$$

Обратные утверждения не всегда справедливы. В частности, ограниченная последовательность точек не обязательно сходится, хотя и имеет нижний и верхний пределы (1.27). В то же время по теореме Больцано-Вейерштрасса для всякой ограниченной числовой последовательности существует хотя бы одна предельная точка.

П р и м е р 1.8. Знакопеременная последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=(-1)^n$, $n=1,2,\ldots$, ограничена, но не является сходящейся. Ее нижний и верхний пределы не равны друг другу: $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-1$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=1$. ◘

Множество X, в котором сходящиеся последовательности точек обладают свойствами: (1°) если $x_n \to x_0$ и $x_n \to y_0$, то $x_0=y_0$, (2°) если $x_n \to x_0$, то $x_{n_k} \to x_0$, (3°) если $x_n=a$, то $x_n \to a$, называется *L-пространством Фреше* [Bir67]. Имеют место следующие утверждения.

С л е д с т в и е 1.10.А. *Если все подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности точек $\{x_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу x_0, то и последовательность $\{x_n\}$ сходится к тому же пределу x_0.*

С л е д с т в и е 1.10.Б. *Если подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ фундаментальной последовательности точек $\{x_n\}$ сходится к пределу x_0, то и последовательность $\{x_n\}$ сходится к тому же пределу x_0.*

С л е д с т в и е 1.10.В. *Если последовательности точек* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся к пределам* $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x_0,y_0) = d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n). \qquad (1.30)$$

Абсолютная величина (модуль) числа $|x|$ или вектора $|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$ равна расстоянию между этим числом (вектором) и фиксированной точкой a=0 пространства: $|x|=d_{E1}(x,0)$ и $|\mathbf{x}|=d_{En}(x,0)$, что также можно интерпретировать как длину отрезка $[0,x]$ в соответствующем числовом пространстве $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$. Таким образом, получаем еще одно

С л е д с т в и е 1.10.Г. *Абсолютные величины членов сходящейся числовой последовательности ограничены.*

Сходящиеся числовые последовательности дополнительно обладают следующими важными свойствами. Если существуют пределы $\lim_{n\to\infty} x_n$ и $\lim_{n\to\infty} y_n$, то существуют и пределы

$$\lim_{n\to\infty} \min(x_n, y_n) = \min(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n); \quad \lim_{n\to\infty} \max(x_n, y_n) = \max(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n);$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n; \quad \lim_{n\to\infty} (x_n+s) = \lim_{n\to\infty} x_n + s; \quad \lim_{n\to\infty} (rx_n) = r\lim_{n\to\infty} x_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} y_n); \quad \lim_{n\to\infty} (x_n/y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)/(\lim_{n\to\infty} y_n), \qquad (1.31)$$

где s и r – постоянные, а в последнем равенстве предполагается, что $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Сформулируем один весьма общий принцип (Александров-Урысон). Пусть на каком-либо произвольном множестве $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ введено некоторое понятие сходимости, названное *l-сходимостью*, то есть, указано какие последовательности точек $\{x_n\}$ считаются сходящимися и к какому пределу x_0. Символически обозначим l-сходимость как $x_n \to_l x_0$. Будем говорить, что на множестве X определена *∗-сходимость по отношению к l-сходимости*, если из любой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ можно выделить частичную подпоследовательность $\{x_{n_{k_i}}\}$ такую, что $x_{n_{k_i}} \to_l x_0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется тогда *∗-сходящейся пределу* x_0 и обозначается $x_n \to_* x_0$ [Вул73].

Приведем пример применения принципа l-сходимости. Пусть (X, d_X) – произвольное метрическое пространство. Тогда ∗-сходимость по отношению к сходимости по метрике d_X совпадает с самой сходимостью по метрике d_X или d-сходимостью. В самом деле, если $x_n \to_d x_0$, то согласно теореме 1.10 любая подпоследовательность $x_{n_k} \to_d x_0$, а значит, $x_n \to_* x_0$. Если же $x_n \not\to_d x_0$, то при некотором b>0 расстояния $d(x_{n_k}, x_0)$ ограниченны снизу, то есть $d(x_{n_k}, x_0) \geq b$ для бесконечного множества индексов $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ Но тогда по теореме 1.6 не существует предела последовательности $\{x_{n_k}\}$ и, стало быть, из нее нельзя выделить никакой частичной подпоследовательности $\{x_{n_{k_i}}\}$, которая сходилась бы по метрике d_X. Таким образом, для того чтобы множество X можно было метризовать так, чтобы сходимость на пространстве (X, d_X) по метрике d_X совпадала с

l-сходимостью, необходимо (но не достаточно), чтобы l-сходимость совпадала со своей $*$-сходимостью.

1.6. Монотонные и кратные последовательности. Последовательность элементов упорядоченного множества $\{x_n\}$, n=1,2,… называется *возрастающей* (*неубывающей*) последовательностью, если ее члены удовлетворяют условию $x_i<x_{i+1}$ ($x_i \leq x_{i+1}$) для i=1,2,…, и *убывающей* (*невозрастающей*) последовательностью, если ее члены удовлетворяют условию $x_i>x_{i+1}$ ($x_i \geq x_{i+1}$) для i=1,2,… Возрастание (неубывание) последовательности $\{x_n\}$ будем символически обозначать как $x_n\uparrow$, а убывание (невозрастание) – как $x_n\downarrow$. Возрастающая и убывающая последовательности элементов называются *строго монотонными,* а невозрастающая и неубывающая – *монотонными* последовательностями.

Начальный элемент x_1 возрастающей (неубывающей) последовательности будет одновременно ее наименьшим элементом, а убывающей (невозрастающей) последовательности – наибольшим элементом. Поэтому любая монотонная и строго монотонная последовательность элементов ограничена либо снизу, либо сверху. Всякая возрастающая (неубывающая) последовательность элементов является, кроме того, вполне упорядоченным множеством.

П р и м е р 1.9. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ является возрастающей последовательностью $\{x_n\}$, где $x_n=n$, n=1,2,…, в которой член x_1=1 будет начальным и наименьшим элементом. Множество рациональных дробей вида $\mathbb{Q}_{1/n}=\{1,1/2,1/3,\ldots\}$ является убывающей последовательностью $\{x_n\}$, где $x_n=1/n$, n=1,2,…, в которой член x_1=1 будет начальным и наибольшим элементом. ◘

Рассмотрим свойства сходящихся монотонных последовательностей. Сходимость возрастающей и неубывающей последовательности $\{x_n\}$ к пределу x_0 при $n\to\infty$ будем обозначать символически как $x_n\uparrow x_0$, а сходимость убывающей и невозрастающей последовательности – как $x_n\downarrow x_0$. Условие сходимости монотонной последовательности определяется следующей теоремой.

Т е о р е м а 1.11. *Всякая ограниченная монотонная последовательность точек сходится в метрическом пространстве к некоторому пределу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n\}$ – неубывающая последовательность, ограниченная сверху элементом s, то есть любой элемент $x_n<s$. Очевидно, что s является единственным максимальным элементом множества $X=\{x_n\}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что расстояние между элементами x_N и s будет удовлетворять неравенству $0\leq d(x_N,s)<\varepsilon$. Так как последовательность точек $\{x_n\}$ неубывающая, то для любого номера $n\geq N$ выполняется условие $x_n\leq x_N\leq s$. Тогда $d(x_n,s)\leq d(x_N,s)<\varepsilon$, то есть элемент s является пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n\to\infty$. Аналогично доказывается утверждение для невозрастающей последовательности точек $\{x_n\}$. ■

Из теорем 1.10 и 1.11 вытекают следующие утверждения.

С л е д с т в и е 1.11.А. *Из всякой сходящейся последовательности точек можно выделить монотонную сходящуюся подпоследовательность.*

С л е д с т в и е 1.11.Б. *Монотонная последовательность точек сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

С л е д с т в и е 1.11.В. *Если последовательности точек $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся в метрическом пространстве к пределам $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n\to\infty$ и, начиная с некоторого номера N, элементы последовательностей удовлетворяют условию нестрогого порядка $x_n \le y_n$, то и их пределы удовлетворяют тому же условию*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \le y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{1.32}$$

П р и м е р 1.10. Убывающая последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=1/n$, $n\in\mathbb{N}$, ограничена снизу и сверху $0<x_n<1$ и поэтому сходится на числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ к пределу $x_0=0$ при $n\to\infty$. Отметим, что предел x_0 не является элементом этой последовательности, так как $x_0=0$, а любой элемент $x_n>0$. ◘

Т е о р е м а 1.12. *Если последовательности точек $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся в метрическом пространстве к одному и тому же пределу x_0 и, начиная с некоторого номера N, элементы последовательности $\{z_n\}$ удовлетворяют условию нестрогого порядка $x_n \le z_n \le y_n$, то и последовательность точек $\{z_n\}$ сходится к тому же пределу x_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для любого номера $n>N$ выполняется условие $x_n \le z_n \le y_n$, то отсюда следует, что $d(x_n,z_n)\le d(x_n,y_n)$ и $d(z_n,y_n)\le d(x_n,y_n)$. Тогда по неравенству треугольника (1.03) с учетом первого неравенства получаем

$$d(x_0,z_n) \le d(x_0,x_n) + d(x_n,z_n) \le d(x_0,x_n) + d(x_n,y_n).$$

Так как последовательности точек $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к пределу x_0, то из определения предела (1.26) и соотношения (1.30) имеем:

$$d(x_0,x_n)\to 0, \quad d(x_n,y_n)\to d(x_0,x_0) = 0.$$

Значит, и $d(x_0,z_n)\to 0$, то есть последовательность точек $\{z_n\}$ сходится к пределу x_0. Такой же вывод получается, если воспользоваться вторым из вышеприведенных неравенств. ■

Двойной последовательностью $\{x_{nm}\}$, $n,m=1,2,\ldots$ называют последовательность элементов (точек) произвольного множества X, занумерованную двумя индексами. По существу, двойная последовательность элементов $\{x_{nm}\}$ представляет собой функцию двух переменных g: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to X$, определенную на прямом произведении множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и имеющую в качестве области значений множество X. Аналогичным образом вводятся последовательности произвольной кратности.

Говорят, что двойная последовательность $\{x_{nm}\}$ *сходится к пределу x_0 при $n\to\infty$, $m\to\infty$* или *имеет предел* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} x_{nm} = x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существуют натуральные числа N и M такие, что для всех номеров $n>N$ и $m>M$ расстояние между точками x_{nm} и x_0 удовлетворяет неравенству $d(x_{nm}, x_0)<\varepsilon$. Это определение без труда обобщается и на любую последовательность большей кратности.

З а м е ч а н и е. Для кратных числовых последовательностей можно дать несколько различных определений предела, не эквивалентных между собой. □

1.7. Гомеоморфизм и изометрия пространств. Нередко важен не сам явный вид метрик на тех или иных пространствах, а сопоставление сходящихся на этих пространствах последовательностей. Если между двумя метрическими пространствами (X,d_X) и (Y,d_Y) существует взаимно однозначное соответствие, при котором из сходимости последовательности точек $x_n \to x_0$ в пространстве X следует сходимость соответствующей последовательности точек $y_n \to y_0$ в пространстве Y и, наоборот, из сходимости $y_n \to y_0$ в пространстве Y следует сходимость $x_n \to x_0$ в пространстве X, то такие пространства называются *гомеоморфными*, а взаимно однозначное соответствие между этими пространствами называется *гомеоморфным* отображением или *гомеоморфизмом*. Очевидно, что если отображение f: $X \to Y$ пространства (X,d_X) на пространство (Y,d_Y) гомеоморфно, то обратное ему отображение f^{-1} также гомеоморфно. Композиция $h=g \circ f$ двух гомеоморфных отображений f и g есть гомеоморфизм.

Пример 1.11. Метрические пространства неотрицательных действительных чисел $(\mathbb{R}_+,d_{E1})$ и $(\mathbb{R}_{01},d_{E1})=[0,1)$ с метрикой $d_{E1}(x_n,x_m)=|x_n-x_m|$, гомеоморфны. Гомеоморфизм между пространствами задается взаимно однозначным отображением $f(x)=x/(1+x)$, для которого обратно отображение $f^{-1}(y)=y/(1-y)$. ◘

Пример 1.12. Гомеоморфное отображение замкнутого интервала действительных чисел $[a,b]$ на интервал $[0,1]$ устанавливается функцией $f(x)=(x-a)/(b-a)$, обратной к которой является функция $f^{-1}(y)=a+(b-a)y$. ◘

Пример 1.13. Гомеоморфное отображение открытого интервала действительных чисел $(-1,1)$ на числовую прямую $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ можно задать функцией $f(x) = x/(1-|x|)$ или функцией $f(x) = \mathrm{tg}(\pi x/2)$. ◘

Как уже отмечалось выше, одно и тоже множество можно превратить в разные метрические пространства, определяя на нем различные метрики. Метрики d_{X1} и d_{X2}, заданные на одном и том же множестве X, будем называть *гомеоморфными*, если тождественное преобразование f:$X \to X$ пространства (X,d_{X1}) в пространство (X,d_{X2}) есть гомеоморфизм.

Теорема 1.13. *Метрики* $d_{U\infty}(x,y)=\max[d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)]$, $d_{U1}(x,y)= =d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$, $d_{U2}(x,y)=\sqrt{d_1^2(x_1,y_1)+d_2^2(x_2,y_2)}$ *гомеоморфны на прямом произведении* $U=X_1 \times X_2$ *метрических пространств* (X_1,d_1) *и* (X_2,d_2).

Доказательство. Пусть $0 \le a \le b$. Тогда всегда выполняется соотношение:

$$\max(a,b) = b = \sqrt{b^2} \le \sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{a^2+2ab+b^2} = a+b \le 2b = 2\max(a,b),$$

приобретающее в нашем случае вид

$$\max(d_1,d_2) \le \sqrt{d_1^2+d_2^2} \le d_1+d_2 \le 2\max(d_1,d_2).$$

Отсюда вытекает выполнение неравенства $d_{U\infty} \le d_{U2} \le d_{U1} \le 2d_{U\infty}$, которое обеспечивает взаимную сходимость последовательности $x_n \to x_0$ по каждой из метрик $d_{U\infty}$, d_{U2}, d_{U1} на множестве $U=X_1 \times X_2$, а значит, и гомеоморфность этих метрик. ■

Пример 1.14. Функция $d_{F1}(x_n,x_m)=|f(x_n)-f(x_m)|$, где $f(x)=x/(1+x)$, является метрикой на множестве неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_+$ (выполнение аксиоматики метрического пространства (1.01)-(1.03) очевидно), гомеоморфной на этом множестве метрике $d_{E1}(x_n,x_m)=|x_n-x_m|$. Гомеоморфность метрик следует из легко проверяемого неравенства $d_{F1} \le d_{E1} \le c d_{F1}$, где c=const, которое обеспечивает взаимную сходимость последовательности $x_n \to x_0$ по каждой из метрик. ◘

Свойства пространств, не меняющиеся при гомеоморфном отображении, называются *топологическими* или *топологически инвариантными*. Многие из них будут рассмотрены в следующих разделах. Гомеоморфные пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами, и с этой точки зрения они называются также *топологически эквивалентными*.

Инъективное отображение f: $X \to Y$ метрического пространства (X,d_X) в метрическое пространство (Y,d_Y), сохраняющее расстояние между любыми парами соответствующих точек пространств $x_n, x_m \in X$, $y_n, y_m \in Y$

$$d_X(x_n,x_m) = d_Y(f(x_n), f(x_m)) = d_Y(y_n,y_m), \tag{1.33}$$

называется *изометрическим* отображением. В этом случае говорят также, что пространство (X,d_X) *изометрически вложимо* в пространство (Y,d_Y) или является *изометрическим подпространством* пространства (Y,d_Y). Очевидно, что любое подпространство пространства (X,d_X) изометрически вложимо в пространство (Y,d_Y). Существование изометрического отображения метрических пространств означает сохранение линейных соотношений между их элементами.

Если отображение f: $X \to Y$, удовлетворяющее условию (1.33), взаимно однозначно и $f(X)=Y$, то такое отображение пространств называется *изометрией*, а про метрические пространства (X,d_X) и (Y,d_Y) говорят, что они *изометричны* друг другу или находятся в *изометрическом соответствии*. Тем самым изометрия является частным случаем гомеоморфизма. Изометрическое отображение f: $X \to X$ пространства (X,d_X) на себя называется *изометрическим преобразованием* или *движением* пространства X.

П р и м е р 1.15. Метрическое пространство неотрицательных действительных чисел $(\mathbb{R}_+,d_{F1})$ с метрикой $d_{F1}(x_n,x_m)=|f(x_n)-f(x_m)|$, где $f(x)=x/(1+x)$, и интервал [0,1] – пространство $(\mathbb{R}_{01},d_{E1})$ с метрикой $d_{E1}(y_n,y_m)=|y_n-y_m|$ – изометричны. Изометрия пространств задается взаимно однозначным отображением $y=f(x)=x/(1+x)$. Действительно, в этом случае имеем равенство расстояний $d_{F1}(x_n,x_m) = |f(x_n)-f(x_m)| = d_{E1}(y_n,y_m)$. ◘

П р и м е р 1.16. Изометрическое отображение произвольного ограниченного пространства (X,d_X) на пространство $(\mathbb{R}_+,d_{E1})$ устанавливается функцией $y_n=f_n(x_k)=d_X(x_n, x_k)$, совпадающей с метрикой d_X на множестве X. ◘

Свойства, общие для всех изометричных метрических пространств, не зависящие от природы этих пространств, называются *метрически инвариантными*. К числу таких свойств пространства относятся ограниченность, сходимость, тип пространства, а также рассмотренные ниже полнота, вложимость. Изометричные пространства тождественны с точки зрения их метрических свойств. Заметим, однако, что метрические свойства гомеоморфных между собой метрических пространств могут и различаться.

1.8. Другие виды расстояний и пространств. При оценке взаимного расположения элементов множества X, наряду с метрикой, используются и иные показатели близости элементов, основанные на неполной аксиоматике метрического пространства.

Неотрицательную действительную функцию d_X, определенную на прямом произведении $X \times X$ и удовлетворяющую аксиоме симметрии (1.01) и условию *совпадения*

$$d_X(x,x) = 0 \tag{1.34}$$

для всех $x \in X$, будем называть *квазиметрикой*, а удовлетворяющую, кроме того, аксиоме треугольника (1.03), – *псевдометрикой* на множестве X. Соответствующие пространства (X,d_X) называют *квазиметрическим и псевдометрическим.* В квази- и псевдометрическом пространствах аксиома тождества (1.02) для функции d_X не выполняется, то есть из условия $d_X(x,y)=0$, вообще говоря, не вытекает равенства элементов x и y.

Пример 1.17. Конечное n-множество $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ при $n \geq 3$ образует псевдометрическое пространство с функцией

$$\delta_X^{(A)}(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } |A \cap \{x,y\}| = 1,\ A \subset X, \\ 0 \text{ на остальных парах } x,y, \end{cases} \tag{1.35}$$

которая называется *бинарной псевдометрикой* или *разрезной полуметрикой* для данного подмножества $A \subset X$. Если имеется разбиение множества $X=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ на попарно непересекающиеся подмножества $A_i \subset X$, то функция

$$\delta_X^{(A_1,\ldots,A_k)}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ для } x,y \in A_i \subseteq X,\ 1 \leq i \leq k < n, \\ 1 \text{ на остальных парах } x,y, \end{cases} \tag{1.36}$$

называется *мультиразрезной полуметрикой*. Для любого разбиения $(A_1,\ldots,A_k)$ множества X мультиразрезная и разрезные полуметрики связаны равенством $\delta_X^{(A_1,\ldots,A_k)}(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\delta_X^{(A_i)}(x,y)$ [DL97]. ◘

Теорема 1.14. *Псевдометрическое пространство* (X, $\delta_X^{(A)}$) *с разрезной полуметрикой* (1.35) *является пространством отрицательного типа и гиперметрическим пространством*.

Доказательство. Для всех элементов $x \in X$ и целых чисел b_x имеем

$$\sum_{x,y\in X} b_x b_y \delta_X^{(A)}(x,y) = \sum_{x\in A, y\notin A} b_x b_y = (\sum_{x\in A} b_x)(\sum_{x\notin A} b_x).$$

Если выполняется условие $0=\sum_{x\in X} b_x = \sum_{x\in A} b_x + \sum_{x\in X\setminus A} b_x$, то, так как $\sum_{x\in A} b_x$, $\sum_{x\notin A} b_x$ – целые числа, получим неравенство (1.11) отрицательного типа $(\sum_{x\in A} b_x)(\sum_{x\notin A} b_x) \leq 0$. Если выполняется условие $1=\sum_{x\in X} b_x = \sum_{x\in A} b_x + \sum_{x\in X\setminus A} b_x$, то получим соотношение $(\sum_{x\in A} b_x)(\sum_{x\notin A} b_x) = (\sum_{x\in A} b_x)(1-\sum_{x\in A} b_x) \leq 0$ или гиперметрическое неравенство (1.11). ■

Пример 1.18. Множество вершин $V=\{v_i\}$ связного графа $\Gamma(V,E)$ образует с функцией

$$d_\Gamma = d(v_i,v_j) = \sum_i d(v_{i-1},v_i) \tag{1.37}$$

так называемое *графическое пространство* (V,d_Γ), ассоциированное с графом $\Gamma(V,E)$. Расстояние d_Γ называется *метрикой кратчайшего пути* и равно минимальному числу ребер графа в простом пути, соединяющем вершины v_i и v_j. Расстояние $d(v_{i-1},v_i)$ между смежными вершинами v_{i-1} и v_i в простом графе обычно считается равным 1, а во взвешенном графе равным w_i, где $w_i \geq 0$ – веса, приписанные ребрам $e_i=\{v_{i-1},v_i\}$. В первом случае d_Γ является метрикой, а во втором – псевдометрикой, так как некоторые веса w_i могут равняться нулю. Если граф $\Gamma(V,U)$ – дерево, где каждое ребро $u_i \in U$ разбивает множество вершин V на два непересекающихся множества T_i и $V \backslash T_i$, то метрику кратчайшего пути можно представить как сумму разрезных полуметрик вида $d_\Gamma=\sum_i w_i \delta_X^{(T_i)}$ [DL97]. Графическое пространство (V,d_Γ) метрически выпукло. ◘

П р и м е р 1.19. Решетка L образует *пространство решетки* (L,d_v) с функцией

$$d_v(x,y) = v(\sup(x,y)) - v(\inf(x,y)), \tag{1.38}$$

Функция v: $L \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая для всех $x,y \in L$ условиям $v(0)=0$ и

$$v(\sup(x,y))+v(\inf(x,y))=v(x)+v(y) =v(x+y), \tag{1.39}$$

называется *оценкой на решетке* L. Оценка называют *изотонной*, если $v(x) \leq v(y)$ при $x \leq y$, и *положительной*, если $v(x)<v(y)$ при $x<y$. В первом случае d_v является псевдометрикой, а во втором – метрикой. Решетка L называется в последнем случае *метрической* [Bir67]. Пространство решетки (L,d_v) является пространством отрицательного типа. ◘

Условие (1.34), очевидно, является более слабым, чем аксиома тождества (1.02). Поэтому всякая метрика будет также и квазиметрикой, и псевдометрикой. Обратное утверждение в общем случае неверно. Вместе с тем существует стандартный способ построения по заданному псевдометрическому пространству (X,d_X) метрического пространства, сохраняющего свойства исходного псевдометрического пространства. Для этого «отождествляются» все пары точек $x,y \in X$, для которых расстояние $d_X(x,y)=0$. Говоря более строго, зададим на множестве X отношение $x \sim y$, определяемое условием $d_X(x,y)=0$. Это отношение симметрично в силу аксиомы симметрии (1.01), рефлексивно в силу условия (1.34), транзитивно в силу аксиомы треугольника (1.03) и условия $d_X(x,y) \geq 0$, то есть является отношением эквивалентности.

Обозначим через x^* класс эквивалентности, содержащий элемент x, и возьмем классы x^* в качестве элементов нового множества X^* классов эквивалентности множества X. Поставим каждому элементу x множества X в соответствие класс x^*. Иными словами, каждый элемент x^* нового множества X^* будем рассматривать не только как некоторый определенный «индивидуальный» элемент x исходного множества X, но и как любой элемент, ему эквивалентный. Положим $d_X(x,y)=d_{X^*}(x^*,y^*)$. Соответствие $x \to x^*$ задает изометрическое отображение $X \to X^*$, сохраняющее расстояние между элементами пространств (X,d_X) и (X^*,d_{X^*}). Очевидно, что в пространстве (X^*,d_{X^*}) будет выполняться и аксиома тождества (1.02), то есть (X^*,d_{X^*}) на самом деле является метрическим пространством.

Неотрицательная действительная функция d_X, определенная на прямом произведении $X \times X$ и удовлетворяющая только двум аксиомам: симметрии (1.01) и тождества (1.02), называется *симметрикой* на множестве X. Множество X с симметрикой d_X принято называть *пространством близости*. Симметрика d_X, удовлетворяющая также неравенству

$$d_X(x,y) \leq \max_{z \in X} [d_X(x,z), d_X(z,y)] \tag{1.40}$$

для любых элементов множества X, называется *ультраметрикой* на множестве X или *ультраметрическим расстоянием* между элементами x и y.

Нетрудно убедиться, что для ультраметрики выполняется и аксиома треугольника (1.03). Действительно, из неравенства (1.40) вытекают два соотношения: $d_X(x,y) \leq d_X(x,z)$ и $d_X(x,y) \leq d_X(z,y)$. Добавив справа в первом случае неотрицательное слагаемое $d_X(z,y)$, а во втором – неотрицательное слагаемое $d_X(x,z)$, мы только усилим соответствующее неравенство и в итоге получим неравенство треугольника (1.03). Таким образом, ультраметрика d_X удовлетворяет аксиоматике метрического пространства, множество X с ультраметрикой d_X метризуемо, а пространство (X,d_X) является метрическим. Любые три элемента пространства (X,d_X) с ультраметрикой d_X образуют равнобедренный треугольник с основанием, длина которого не превышает длины бедра.

Неравенство (1.40) является более сильным, чем аксиома треугольника (1.03). Поэтому всякая ультраметрика будет также и метрикой. Обратное утверждение в общем случае неверно. Метрика, обладающая помимо прочего свойством (1.40), носит название *неархимедовой*, а не обладающая этим свойством – *архимедовой*.

П р и м е р 1.20. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ образует ультраметрическое пространство с ультраметрикой, определяемой для $x \neq y$ выражением $\rho_X(x,y) = \dfrac{m}{n(x-y)} = \dfrac{1}{p^k}$, где m,n,k – целые числа, p – простое число, m и n не делятся на p, и равной 0 для $x=y$. Ультраметрика $\rho_X(x,y)$ называется *p-адической метрикой*. ◘

В литературе встречаются и другие названия метрик. Нередко расстояние считается синонимом метрики [КФ68]. Квазиметрика также называется *расстоянием* [DL97], псевдометрика – *отклонением* [Bur61] или *полуметрикой* [DL97], симметрика – *индексом* (*коэффициентом*) *близости* [Jam78]. В дальнейшем термин «расстояние» будет применяться либо собственно к метрике, либо ко всем видам метрик, которые будут обозначаться, как и метрика, одним и тем же символом d.

1.9. Метрические преобразования пространств. Как уже отмечалось выше, различные пространства расстояний (X,d_X) можно образовать, задавая на одном и том же множестве X разные метрики d_X. Определим новое расстояние $d_F(x,y)$ как некоторый функционал $F(d_X)$ от исходного расстояния $d_X(x,y)$

$$d_F(x,y) = F(d_X(x,y))$$

для всех $x,y \in X$. Пространство расстояний $(X, F(d_X))$ будем называть *метрически преобразованным пространством* или *метрическим преобразованием* пространства (X,d_X) [Blu53], [DL97]. Наибольший интерес, очевидно, представляют такие действительные функции действительной переменной F: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $F(0)=0$, которые сохраняют у метрически преобразованного пространства $(X, F(d_X))$ те или иные метрические и топологические свойства, присущие исходному пространству (X,d_X).

Простейшим функционалом, метрически преобразующим произвольное пространство (X,d_X), является прямая пропорциональная функция

$$F(d_X(x,y)) = hd_X(x,y), \quad h>0. \tag{1.41}$$

Выполнение аксиоматики метрического или псевдометрического пространства (1.01)-(1.03), (1.34) для функции $F(d_X)=hd_X$ очевидно. Все свойства пространств (X, d_X) и (X, hd_X) также будут совпадать.

Еще одно метрическое преобразование пространства (X,d_X) получается, если определить новое расстояние $F(d_X(x,y))$ между двумя произвольными точками x и y пространства X как отношение исходного расстояния $d_X(x,y)$ к периметру треугольника, образованного этими точками и какой-то третьей точкой r,

$$F(d_X(x,y)) = d_X^{(r)}(x,y) = \frac{d_X(x,y)}{d_X(x,y)+d_X(x,r)+d_X(r,y)} \tag{1.42}$$

для всех $x,y,r\in X$. Назовем такой функционал $F(d_X)=d_X^{(r)}(x,y)$ *расстоянием, усредненным по трем точкам относительно точки r*.

Т е о р е м а 1.15. *Метрически преобразованное пространство расстояний $(X, F(d_X))$, где функционал F: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ есть расстояние $F(d_X)=d_X^{(r)}$, усредненное по трем точкам, остается метрическим (псевдометрическим), как и исходное пространство (X,d_X).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость аксиом симметрии (1.01), тождества (1.02) или условия совпадения (1.34) для функции $d_X^{(r)}$ очевидна. Выполнение неравенства треугольника (1.03) для функции $d_X^{(r)}$ проверим для нетривиального случая $x\neq y$, $x\neq r$, $r\neq y$. Покажем вначале, что для произвольных неотрицательных чисел u, v, w, s всегда выполняется условие:

$$u \le v+w \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u}{u+s} \le \frac{v+w}{v+w+s}. \tag{1.43}$$

Действительно,

$$\frac{u}{u+s} = 1-\frac{s}{u+s} \le 1-\frac{s}{v+w+s} = \frac{v+w}{v+w+s}.$$

Принимая во внимание неравенство треугольника (1.03) для расстояния $d_X(x,y)$ и неравенство (1.43), получаем искомое неравенство для $d_X^{(r)}(x,y)$

$$d_X^{(r)}(x,y) = \frac{d_X(x,y)}{d_X(x,y)+d_X(x,r)+d_X(r,y)} \le \frac{d_X(x,z)+d_X(z,y)}{d_X(x,z)+d_X(z,y)+d_X(x,r)+d_X(r,y)} \le$$

$$\le \frac{d_X(x,z)}{d_X(x,z)+d_X(z,y)+d_X(x,r)+d_X(r,y)} + \frac{d_X(z,y)}{d_X(x,z)+d_X(z,y)+d_X(x,r)+d_X(r,y)} \le$$

$$\le \frac{d_X(x,z)}{d_X(x,z)+d_X(x,r)+d_X(r,z)} + \frac{d_X(z,y)}{d_X(z,y)+d_X(z,r)+d_X(r,y)} = d_X^{(r)}(x,z) + d_X^{(r)}(z,y). \blacksquare$$

Преобразование (1.42) сохраняет метричность (псевдометричность) пространств (X,d_X) и $(X,d_X^{(r)})$ [DL97]. Если в исходном пространстве (X,d_X) имеется метрически выпуклое пространство B, то согласно формуле (1.42) и в силу условия (1.07) все пары точек $x,y\in B$, лежащие на одной «прямой» с точкой r, будут находиться в метрически преобразованном пространстве $(X,d_X^{(r)})$ на одинаковом расстоянии $d_X^{(r)}(x,y)=1/2$.

Ряд различных преобразований расстояния можно осуществить с помощью вогнутых функционалов. Действительная функция f, определенная на числовом интервале (a,b), называется *вогнутой*, если для любых пар $x,y\in(a,b)$ выполняется условие $f(\alpha x+\beta y)\geq\alpha f(x)+\beta f(y)$, $0\leq\alpha,\beta\leq 1$, $\alpha+\beta=1$, и *выпуклой* при обратном знаке неравенства. Укажем одно из достаточных условий, сохраняющее псевдометричность метрически преобразованного пространства [DL97].

Т е о р е м а 1.16. *Метрически преобразованное пространство расстояний* $(X, F(d_X))$, *где функционал* $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *есть неубывающая вогнутая функция и* $F(0)=0$, *остается метрическим* (*псевдометрическим*), *как и исходное пространство* (X,d_X).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение аксиом симметрии (1.01), тождества (1.02) или условия совпадения (1.34) для функционала $F(d_X(x,y))$ очевидно. Установим справедливость неравенства треугольника (1.03) для функционала $F(d_X(x,y))$. Пусть для произвольных неотрицательных чисел u, v, w выполняется условие $u\leq v+w$. Так так $F(d_X)$ вогнутая функция и $F(0)=0$, то, учитывая определение вогнутости функции, имеем $F(v+w)/(v+w)\leq F(v)/v$ и $F(v+w)/(v+w)\leq F(w)/w$ или $[v/(v+w)]F(v+w)\leq F(v)$ и $[w/(v+w)]F(v+w)\leq F(w)$. Складывая почленно два последних неравенства, получаем $F(v+w)\leq F(v)+F(w)$. Так как $F(d_X)$ неубывающая функция, то $F(u)\leq F(v+w)$. Отсюда немедленно вытекает $F(u)\leq F(v)+F(w)$, что и является искомым неравенством треугольника $F(d_X(x,y))\leq F(d_X(x,z))+F(d_X(z,y))$ для функционала $F(d_X(x,y))$. ■

П р и м е р 1.21. Следующие вогнутые функционалы оставляют метрически преобразованное пространство расстояний $(X,F(d_X))$ псевдометрическим: дробно-линейная функция $F(d_X)=d_X/(1+d_X)$, степенная функция $F(d_X)=(d_X)^{q}$ при $0<q\leq 1$, логарифмическая функция $F(d_X)=\log(1+d_X)$. Эти функции, а также функция $F(d_X)=1-\exp(-kd_X)$ при $k>0$, являющаяся обратной к логарифмической и называемая *преобразованием Шенберга*, сохраняют у метрически преобразованного пространства расстояний $(X, F(d_X))$ также свойство быть пространством отрицательного типа [Ass79]. ◘

З а м е ч а н и е. Отметим следующий любопытный факт. Функции $d_{E1}(x,y)=|x-y|$ и $d_{F1}(x,y)=|f(x)-f(y)|$, где $f(x)=x/(1+x)$ – вогнутая функция, являются гомеоморфными метриками на множестве неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_+$ (пример 1.14). Одновременно (пример 1.15) вогнутая функция $f(x)=x/(1+x)$ задает изометрию метрического пространства $(\mathbb{R}_+,d_{F1})$ и интервала $[0,1]$ – пространства $(\mathbb{R}_{01},d_{E1})$. □

Глава 2
Свойства метрических пространств

2.1. Открытость и замкнутость. Метрические пространства обладают многими свойствами, обобщающими свойства числовых множеств. Рассмотрим некоторые из них.

Точка x_0 метрического пространства (X,d) называется *внутренней точкой* множества $A\subseteq X$, если имеется ε-окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, которая целиком содержится в множестве A, то есть если

$$O_\varepsilon(x_0)\subset A \tag{2.01}$$

для любого $\varepsilon>0$. Множество, состоящее только из внутренних точек, называется *открытым.* Совокупность всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* или *открытым ядром* множества A и обозначается $\mathrm{Int}A$. Внутренность множества равна объединению всех открытых подмножеств множества и представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в данном множестве. Множество A открыто в том и только том случае, если оно совпадает со своей внутренностью, то есть, если $A=\mathrm{Int}A$ [Eng77].

Произвольная окрестность $O_r(x_0)$ точки x_0, то есть ограниченное множество точек x метрического пространства (X,d), удовлетворяющих условию (1.08) $d(x,x_0)<r$, называется также *открытым шаром радиуса r с центром в точке* x_0, который будем обозначать $O(x_0,r)$. Из определения открытого множества следует, что всякий открытый шар $O_r(x)$ есть открытое множество в любом метрическом пространстве (X,d). Действительно, если точка $x_0\in O(x,r)$, то по условию (1.08) расстояние от этой точки до центра шара $d(x,x_0)<r$. Полагая $\varepsilon=r-d(x,x_0)$, получаем требуемое включение (2.01): $O_\varepsilon(x_0)\subset O_r(x)$.

П р и м е р 2.1. Произвольный открытый интервал $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$ содержит окрестность каждой своей точки и, следовательно, представляет собой открытое множество на числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$. Множество вида $A=\{x\in\mathbb{R}|a_1<x_1<b_1,\ldots,a_n<x_n<b_n\}$ называется *открытым брусом* и является открытым множеством в n-мерном евклидовом пространстве $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$. ◘

Очевидно, что любое множество, содержащее окрестность каждой своей точки, открыто. Таким образом, множество открыто, если оно является окрестностью каждой своей точки. Справедливо и обратное утверждение: открытое множество содержит ε-окрестности всех своих точек, а значит, содержит объединение любого числа этих окрестностей. Для открытых множеств имеет место

Т е о р е м а 2.1. *Объединение конечного или счетного числа открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств суть открытые множества.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A=\bigcup_i A_i$ – объединение произвольного числа открытых множеств. Так как любое из множеств A_i состоит только из внутренних точек, а каждая точка $x\in A$ принадлежит хотя бы одному из этих множеств A_i, то точка x будет внутренней точкой и множества A, а значит, по определению множество A открыто. Пусть теперь $A_0=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ – пересечение конечного числа открытых множеств, а точка x_0 является внутренней точкой каждого из множеств A_i. Допустим, что в множестве A_1 содержится шар $O(x_0,\varepsilon_1)$, в множестве A_2 – шар $O(x_0,\varepsilon_2)$, и так далее. Выберем $\varepsilon_0=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$. Тогда шар $O(x_0,\varepsilon_0)$ содержится в каждом из множеств A_1, $A_2,\ldots$, A_n, а значит, содержится и в множестве A_0, то есть множество A_0 открыто. ■

З а м е ч а н и е. Пересечение $A_0=\bigcap_i A_i$ счетного числа открытых множеств не обязательно является открытым множеством. □

П р и м е р 2.2. Множество $A_n=\{x|d(x,x_0)<1/n\}$, $n=1,2,\ldots$ является открытым. Однако пересечение $A_0=\bigcap_i A_i$ бесконечного числа этих множеств содержит только такие точки, для которых $d(x,x_0)=0$. Согласно аксиоме тождества (1.02) это означает, что множество A_0 состоит только из одной единственной точки x_0 и, следовательно, не является открытым множеством. ◘

Шаром, окружающим множество A, будем называть множество вида

$$O(A,r)=\bigcup_{x\in A} O(x,r). \tag{2.02}$$

Так как каждая точка $x\in A$ одновременно лежит и в своей окрестности $O(x,r)$, то любое множество A целиком содержится внутри окружающего его шара $A\subseteq O(A,r)$. Из определения также вытекает, что всякий шар, окружающий множество, является ограниченным и открытым множеством.

Точка x_0 метрического пространства (X,d) называется *изолированной точкой* множества $A\subseteq X$, если имеется ε-окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, в которой нет ни одной другой точки множества A, кроме самой точки x_0, то есть если

$$O_\varepsilon(x_0)\bigcap(A\setminus\{x_0\}) = \varnothing \tag{2.03}$$

для любого $\varepsilon>0$, в том числе необязательно малого. Очевидно, что точка $x_0\in A$ изолирована в том и только том случае, если одноэлементное множество $\{x_0\}$ открыто. Действительно, по определению (2.03) для изолированной точки $O_\varepsilon(x_0)\bigcap A=\{x_0\}$, и значит, имеем $O_\varepsilon(x_0)\subseteq\{x_0\}$. Множество, состоящее только из изолированных точек, называется *дискретным* или *изолированным*. Любое конечное множество дискретно.

П р и м е р 2.3. Пространство изолированных точек (X,d_t) с эквидистантной метрикой $d_t=t\mathbb{1}$ (пример 1.3) является дискретным множеством. ◘

Точка x_0 метрического пространства (X,d) называется *предельной точкой* (*точкой накопления, точкой конденсации*) множества $A\subseteq X$, если любая ε-окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 содержит хотя бы одну точку множества A, отличную от точки x_0, то есть если

$$O_\varepsilon(x_0)\bigcap(A\setminus\{x_0\}) \neq \varnothing \tag{2.04}$$

для любого $\varepsilon>0$. Предельная точка множества A может и принадлежать, и не принадлежать самому множеству A. Совокупность всех предельных точек множества A называется *производным множеством* множества A и обозначается A'. Очевидно, что точки множества $A\setminus A'$ суть изолированные точки множества A.

Понятия предельной точки множества и предела последовательности несколько отличаются друг от друга, поскольку члены последовательности могут быть одинаковыми, а элементы множества неявно предполагаются различными. Вместе с тем между этими понятиями существует тесная связь.

Т е о р е м а 2.2. *Точка x_0 является предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда в множестве A существует последовательность попарно различных точек $\{x_n\}$, сходящаяся к точке x_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_0 – предельная точка множества A и $\varepsilon=1/n$. Тогда по определению в шаре $O(x_0,1/n)$ содержится хотя бы одна отличная от x_0 точка x_n множества A, удовлетворяющая условию $d(x_n,x_0)<1/n$. Точки x_n из шара $O(x_0,1/n)$, имеющие разные номера n, различны, а все вместе они образуют последовательность $\{x_n\}$, которая согласно условию (1.26) при $n\to\infty$ сходится к пределу x_0. Необходимость требований теоремы доказана, а их достаточность очевидна. ■

С л е д с т в и е 2.2.А. *Предельные точки множества A сохраняются при гомеоморфном отображении метрического пространства X.*

Предельная точка множества A, не являющаяся его внутренней точкой, называется *граничной точкой* множества A. Совокупность граничных точек множества A называется *границей* множества A, которую будем обозначать $\mathrm{Fr}A$. Справедливо следующее соотношение: $\mathrm{Int}A=A\backslash\mathrm{Fr}A$.

Множество A, содержащее все свои предельные точки ($A'\subset A$), называется *замкнутым*. Замкнутое множество без изолированных точек называется *совершенным*. Очевидно, что замкнутое множество содержит и свою границу, так как $\mathrm{Fr}A\subset A'\subset A$, а граница $\mathrm{Fr}A$ любого множества A сама является замкнутым множеством. В частности, граница $\mathrm{Fr}A$ открытого множества A также есть замкнутое множество, которое состоит из всех предельных точек множества A, не принадлежащих A. Любое конечное множество замкнуто.

Ограниченное множество точек x метрического пространства (X,d), удовлетворяющих условию

$$d(x,x_0) \le r, \tag{2.05}$$

называется *замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x_0*, который будем обозначать $B[x_0,r]$, а удовлетворяющих условию

$$d(x,x_0) = r, \tag{2.07}$$

– *сферой радиуса r с центром в точке x_0*, которую будем обозначать $S[x_0,r]$. Из определения замкнутого множества вытекает, что всякий замкнутый шар $B[x_0,r]$ является замкнутым множеством в любом метрическом пространстве (X,d) и может быть представлен как объединение открытого шара $O(x_0,r)$ и сферы $S[x_0,r]$, имеющих одинаковый радиус и общий центр: $B[x_0,r]=O(x_0,r)\bigcup S[x_0,r]$.

П р и м е р 2.4. Произвольный замкнутый интервал $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\le x\le b\}$ есть объединение всех внутренних точек $x\in(a,b)$ и граничных точек a, b и является замкнутым множеством на числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$. Множество вида $B=\{x\in\mathbb{R}|a_1\le x_1\le b_1,\ldots,a_n\le x_n\le b_n\}$, называемое *замкнутым брусом*, представляет собой замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$.◘

Сформулируем необходимые и достаточные условия открытости и замкнутости множества в метрическом пространстве.

Т е о р е м а 2.3. *Множество A метрического пространства X открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $\overline{A}=X\backslash A$ замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть множество A открыто. Тогда каждая точка $x\in A$ имеет ε-окрестность $O_\varepsilon(x)$, целиком лежащую в множестве A, в которой не будет ни одной точки множества $\overline{A}=X\backslash A$. Следовательно, в любой ε-окрестности $O_\varepsilon(y)$ каждой точки $y\in\overline{A}$ могут быть только точки из этого же множества $\overline{A}$. Значит, и все предельные точки множества $\overline{A}$ могут быть только точками этого множества, поэтому множество $\overline{A}$ замкнуто.

2°. Пусть теперь множество $\overline{A}=X\backslash A$ замкнуто. Тогда любая точка x множества A имеет ε-окрестность $O_\varepsilon(x)$, которая целиком содержится в A, то есть множество A открыто. ■

Из теоремы 2.3 следует, что любое замкнутое (открытое) множество можно также определить как дополнение открытого (замкнутого) множества. Воспользовавшись свойством $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$ двойственности множеств, получаем без доказательств утверждение, двойственное теореме 2.1.

Т е о р е м а 2.4. *Пересечение конечного или счетного числа замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств суть замкнутые множества.*

З а м е ч а н и е. Объединение $A=\bigcup_i A_i$ счетного числа замкнутых множеств не обязательно является замкнутым множеством. □

Счетное объединение замкнутых множеств называется F_σ*-множеством*, а счетное пересечение открытых множеств – G_δ*-множеством*. В силу теоремы 2.3 F_σ- и G_δ-множества взаимно дополняют друг друга.

П р и м е р 2.5. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является F_σ-множеством и не является G_δ-множеством на числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$. ◘

Напомним, что семейство множеств называется *полукольцом* $\mathcal{E}$, если оно содержит пустое множество $\varnothing$, пересечение множеств $A_i\in\mathcal{E}$, а всякое множество $A\in\mathcal{E}$ представимо как объединение $\bigcup_i A_i$ конечного числа попарно непересекающихся множеств, *кольцом* $\mathcal{K}$, если оно содержит пустое множество $\varnothing$, разность и объединение множеств $A_i\in\mathcal{K}$, *σ-кольцом* $\mathcal{K}_\sigma$, если оно есть кольцо и содержит счетное объединение множеств $\bigcup_i A_i$, и *σ-алгеброй* $\mathcal{S}$, если оно есть σ-кольцо и содержит наибольшее множество этого семейства, называемое *единицей алгебры*. В частности, семейство $\mathcal{P}(X)$ подмножеств какого-либо множества X есть минимальная алгебра над множеством X.

Любое семейство $\mathcal{A}$ подмножеств A_i множества A называется *покрытием множества A*, если $A=\bigcup_i A_i$,. Если все подмножества A_i открыты (замкнуты), то покрытие $\mathcal{A}$ называется *открытым* (*замкнутым*).

Множество A называют *борелевским*, если оно принадлежит σ-алгебре, порожденной семейством всех замкнутых или открытых множеств. Так, любое счетное множество можно представить как объединение счетного числа одноэлементных (замкнутых) множеств, и потому оно будет борелевским. F_σ- и G_δ-множества образуют σ-алгебру и также являются борелевскими множествами.

2.2. Замыкание, связность. Точка x_0 метрического пространства (X,d) называется *точкой прикосновения* множества $A\subseteq X$, если любая ε-окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 содержит хотя бы одну точку множества A, то есть если

$$O_\varepsilon(x_0)\bigcap A \neq \varnothing \tag{2.07}$$

для любого $\varepsilon>0$. Таким образом, всякая точка прикосновения x_0 множества A есть либо изолированная, либо предельная точка этого множества, которая может принадлежать или не принадлежать множеству A. Предельная точка x_0 множества A есть в то же время и точка прикосновения множества $A\backslash\{x_0\}$. Граничная точка множества A является точкой прикосновения одновременно и для множества A, и для его дополнения $\overline{A}$.

Из теоремы 2.2 вытекают следующие очевидные условия.

С л е д с т в и е 2.2.Б. *Точка x_0 является точкой прикосновения множества A тогда и только тогда, когда в множестве A существует последовательность точек $\{x_n\}$, сходящаяся к точке x_0.*

Совокупность всех точек прикосновения множества A называется *замыканием* множества A, которое обозначим $[A]$. Из определения следует, что замыкание множества A есть его объединение с производным множеством A'

$$[A] = A\bigcup A'. \tag{2.08}$$

Очевидно, что в общем случае $A\subseteq[A]$. Для замкнутого множества $A'\subseteq A$. Поэтому множество A замкнуто в том и только том случае, если оно совпадает со своим замыканием, то есть, если $A=[A]$. Замыкание $[A]$ любого множества A является наименьшим замкнутым множеством, которое содержит в себе множество A. Замыкание $[A]$ любого ограниченного множества A также есть ограниченное множество, и их диаметры равны друг другу $D_X(A)=D_X([A])$.

З а м е ч а н и е. Условие $A=[A]$ часто используется в качестве альтернативного определения замкнутого множества [КФ68], [Eng77]. □

П р и м е р 2.6. Пространство изолированных точек (X,d_t) с метрикой d_t, заданной выражением (1.10), является замкнутым множеством, так как замыкание $[A]$ любого множества $A\subseteq X$ в этом пространстве совпадает с самим множеством, в том числе и $X=[X]$. ◘

Расстояние $d(x_0,A)$ от любой из точек прикосновения x_0, входящей в замыкание $[A]$, до множества A равно нулю, независимо от того принадлежит ли точка x_0 множеству A или нет. Поэтому каждая точка прикосновения множества A является точкой, абсолютно близкой к этому множеству. Соотношение (2.08) можно рассматривать в таком случае как определение заданной на семействе всех подмножеств множества X унарной операции *замыкания* $[\ldots]$, которая состоит в присоединении к множеству всех абсолютно близких к нему точек.

Т е о р е м а 2.5. *Операция замыкания множества A в метрическом пространстве X обладает следующими свойствами*:

экстенсивность

$$A\subseteq[A]; \tag{2.09}$$

монотонность

$$A_1 \subseteq A_2 \;\Rightarrow\; [A_1] \subseteq [A_2]; \tag{2.10}$$

идемпотентность (*поглощаемость*)

$$[[A]] = [A]; \tag{2.11}$$

перестановочность (*пермутативность*) *с операцией объединения*

$$[A_1 \cup A_2] = [A_1] \cup [A_2]; \tag{2.12}$$

Доказательство. 1°, 2°. Свойства экстенсивности и монотонности следуют непосредственно из определения замыкания (2.08).

3°. Так как замыкание $[A]$ – замкнутое множество, то $[A]$ совпадает со своим замыканием $[[A]]$.

4°. Пусть точка $x \in [A_1 \cup A_2]$. Тогда либо $x \in [A_1]$, либо $x \in [A_2]$ и, значит, $[A_1 \cup A_2] \subseteq [A_1] \cup [A_2]$. С другой стороны, так как $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ и $A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$, то по свойству 2° имеем $[A_1] \subseteq [A_1 \cup A_2]$, $[A_2] \subseteq [A_1 \cup A_2]$ и, следовательно, $[A_1] \cup [A_2] \subseteq [A_1] \cup [A_2]$. Поэтому имеется равенство $[A_1 \cup A_2] = [A_1] \cup [A_2]$. ■

Воспользовавшись определением замыкания, нетрудно получить следующие соотношения между замыканием, границей и внутренностью множества: $[A] = A \cup \mathrm{Fr}A$, $\mathrm{Int}A = A \backslash [X \backslash A] = A \backslash \mathrm{Fr}A$. Тогда необходимые и достаточные условия открытости и замкнутости множества можно сформулировать в следующем равносильном виде: множество A открыто в том и только том случае, если $\mathrm{Fr}A = [A] \backslash A$, и замкнуто, если $\mathrm{Fr}A = A \backslash \mathrm{Int}A$ [Eng77].

Из теорем 2.3, 2.5 вытекает, что пустое множество $\varnothing$ и множество X замкнуты в любом метрическом пространстве. А так как эти множества взаимно дополняют друг друга, то пустое множество $\varnothing$ и множество X одновременно и открыты. Множества, которые являются одновременно и открытыми, и замкнутыми, называются *открыто-замкнутыми*. Очевидно, что множество A открыто-замкнуто в том и только том случае, если оно не имеет граничных точек, то есть если его граница $\mathrm{Fr}A = \varnothing$.

Пространство X или множество $A \subseteq X$ называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения по крайней мере двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств. Любое связное пространство не содержит ни одного открыто-замкнутого множества, за исключением пустого множества $\varnothing$ и самого пространства X. Подпространство связного пространства может и не быть связным. Замыкание связного множества связно. Объединение связных множеств, имеющих общую точку, связно.

Пример 2.7. Пустое множество $\varnothing$, пространство X, одноэлементное множество $\{x\}$, состоящее из единственной точки, связны. ◘

Пример 2.8. Любой замкнутый интервал $[a,b]$ числовой прямой, в частности, и множество действительных чисел $\mathbb{R}_{01} = [0,1]$, связен. ◘

Пространство X или множество $A \subseteq X$ называется *несвязным*, если является объединением, по крайней мере, двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств. Множество A несвязно в том и только том случае, если существует покрытие множества A двумя открытыми (замкнутыми) множествами B_1 и B_2 такими, что каждая точка $x \in A$ попадает лишь в одно из множеств

B_1 или B_2. Пространство X называется *экстремально несвязным*, если замыкание любого открытого множества является открытым множеством.

Пространство X называется *отделимым* или *пространством Хаусдорфа*, если для каждой пары точек $x_1,x_2\in X$ существуют окрестности $O_1=O(x_1,r_1)$ точки x_1 и $O_2=O(x_2,r_2)$ точки x_2 такие, что $O_1\bigcap O_2=\varnothing$, и *пространством Урысона*, если $[O_1]\bigcap[O_2]=\varnothing$. Пространство будет хаусдорфовым в том и только том случае, если каждая его точка есть пересечение замыканий всех своих окрестностей. Всякое пространство Урысона является пространством Хаусдорфа. Обратное утверждение в общем случае неверно.

П р и м е р 2.9. Пространство изолированных точек (X,d_t), состоящее из двух и более точек, несвязно, экстремально несвязно и отделимо. ◘

Пространство X или множество $A\subseteq X$ называется *локально связным в точке x*, если существует связная ε-окрестность $O_\varepsilon(x)$ этой точки. Пространство X называется *локально связным*, если оно локально связно в каждой своей точке. *Компонентой точки x* называется объединение всех связных множеств пространства X, содержащих эту точку, которое является наибольшим связным замкнутым множеством, содержащим эту точку. Связное пространство есть связная компонента каждой своей точки. *Квазикомпонентой точки x* называется пересечение всех открыто-замкнутых множеств пространства X, содержащих эту точку. Компонента точки принадлежит ее квазикомпоненте. Пространство X или множество $A\subseteq X$ называется *наследственно* (соответственно *вполне*) *несвязным*, если компонента (соответственно квазикомпонента) каждой его точки состоит только из этой точки. Всякое вполне несвязное пространство наследственно несвязно.

П р и м е р 2.10. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ связно, локально связно и отделимо. Множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и иррациональных чисел $\mathbb{I}$ вполне несвязны. ◘

П р и м е р 2.11. Метрическое n-мерное числовое пространство $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$ связно, локально связно и отделимо. Подпространство рациональных чисел $Q^n=(\mathbb{Q}^n,d_{En})$ вполне несвязно. ◘

2.3. Плотность, сепарабельность. Множество A метрического пространства X, называется *плотным в себе*, если оно содержится в производном множестве A', то есть если $A\subseteq A'$. Множество A называется *плотным в множестве $B\subseteq X$*, если множество B содержится в замыкании множества A, то есть если $B\subseteq[A]$. В этом случае каждая точка множества B будет точкой прикосновения множества A. Множество A называется *ε-плотным в множестве B* или *ε-сетью для множества B,* если для данного $\varepsilon>0$ и любой точки $x_0\in B$ найдется точка x множества A, лежащая в ε-окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, то есть удовлетворяющая условию $d(x,x_0)<\varepsilon$, или, что то же самое, существует последовательность точек $\{x_n\}$, $x_n\in A$, сходящаяся к точке $x_0\in B$, то есть для всех номеров $n>N$ выполняется условие $d(x_0,x_n)<\varepsilon$. Когда множество B совпадает со всем пространством X, то множество A называется *всюду плотным в пространстве X* или просто *всюду плотным множеством*. Множество A всюду плотно в пространстве X в том и только том случае, если в любом непустом открытом множестве пространства X имеется, по крайней мере, одна точка множества A. Замыкание всюду плотного множества A совпадает с пространством X, то есть $X=[A]$.

Пространство X или множество $B\subseteq X$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого фиксированного $\varepsilon>0$ в пространстве X существует конечная ε-сеть. Метрика d вполне ограниченного пространства называется *вполне ограниченной.* Замыкание вполне ограниченного пространства также вполне ограничено. Всякое вполне ограниченное пространство ограничено, так как при любом $\varepsilon>0$ представимо в виде конечного объединения открытых шаров $O(x,\varepsilon)$, которое в силу теоремы 2.1 может быть заключено в открытый шар конечного радиуса. Обратное утверждение в общем случае неверно.

П р и м е р 2.12. Пространство изолированных точек (X,d_t), состоящее из счетного числа точек, всюду плотно, так как совпадает со своим замыканием $X=[X]$ (пример 2.6), но не вполне ограничено, так как никакое конечное множество не будет ε-плотно в пространстве X, например, при $\varepsilon=t$. Производное множество и граница пространства (X,d_t) – пустые множества. ◘

П р и м е р 2.13. Множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и $\mathbb{I}$ иррациональных чисел всюду плотны в пространстве действительных чисел $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$, так как в любом непустом открытом интервале (a,b) числовой прямой имеются и рациональные, и иррациональные числа. ◘

Пространство X называется *сепарабельным*, если существует счетное или конечное множество A, всюду плотное в пространстве X. Подпространство сепарабельного пространства сепарабельно. Всякое вполне ограниченное пространство сепарабельно. Обратное утверждение в общем случае неверно.

П р и м е р 2.14. Пространство действительных чисел $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ сепарабельно, так как содержит счетное всюду плотное множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, но не вполне ограничено. Всякий открытый (a,b) или замкнутый $[a,b]$ интервалы числовой прямой будут вполне ограниченными множествами, так как для любого $\varepsilon>0$ содержат, например, конечное ε-плотное множество вида $(a,b)\bigcap\{k/n\}$, где $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет неравенству $1/n<\varepsilon$. ◘

Множество A называется *нигде не плотным в пространстве* X, если оно не плотно ни в каком непустом открытом подмножестве $B\subseteq X$. Множество A нигде не плотно в пространстве X в том и только том случае, если его дополнение $\overline{A}=X\backslash A$ содержит непустое всюду плотное открытое подмножество. Любое подмножество нигде не плотного множества есть нигде не плотное множество. Замыкание $[A]$ нигде не плотного множества A нигде не плотно в пространстве X, внутренность замыкания нигде не плотного множества пусто $\mathrm{Int}[A]=\varnothing$, а дополнение замыкания всюду плотно, то есть $X=[X\backslash[A]]$.

П р и м е р 2.15. Числовая прямая E^1 и любой ее открытый (a,b) или замкнутый $[a,b]$ интервалы будут нигде не плотными множествами на числовой плоскости – двумерном евклидовом пространстве $E^2=(\mathbb{R}^2,d_{E2})$. ◘

Для нигде не плотных и всюду плотных множеств существует аналог теорем для открытых и замкнутых множеств.

Т е о р е м а 2.6. *Объединение конечного числа нигде не плотных множеств есть нигде не плотное множество. Пересечение конечного или счетного числа всюду плотных множеств есть всюду плотное множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть множества $A_1, A_2,\ldots,A_n$ нигде не плотны в пространстве X. Тогда в X имеются непустые всюду плотные открытые множества $B_1, B_2,\ldots,B_n$ такие, что $B_1\subset X\backslash A_1$, $B_2\subset B_1\backslash A_2,\ldots$, $B_n\subset B_{n-1}\backslash A_n$, или $B_2\subset X\backslash(A_1\bigcup A_2),\ldots$, $B_n\subset X\backslash(A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_n)$. Последнее и означает, что конечное объединение множеств $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ нигде не плотно в пространстве X.

2°. Пусть теперь $A=\bigcup_i A_i$ – конечное или счетное объединение нигде не плотных в пространстве X множеств A_i. Множество A, вообще говоря, не обязательно является нигде не плотным, но может быть даже и плотным. Построим, как и выше, семейство непустых всюду плотных открытые множеств вида $B_i\subset X\backslash(\bigcup_i A_i)$. Тогда, очевидно, $\bigcap_i B_i\subset B_i\subset X\backslash(\bigcup_i A_i)$, а значит, пересечение множеств $\bigcap_i B_i$ всюду плотно в X. ■

Множество A называется *множеством первой категории,* если оно может быть представлено как объединение конечного или счетного числа нигде не плотных множеств. Любое подмножество множества первой категории есть множество первой категории. Из теоремы 2.6. вытекают следующие утверждения.

С л е д с т в и е 2.6.А. *Объединение конечного или счетного числа множеств первой категории есть множество первой категории.*

С л е д с т в и е 2.6.Б. *Дополнение множества первой категории является всюду плотным множеством.*

С л е д с т в и е 2.6.В. *Замыкание множества A есть множество первой категории тогда и только тогда, когда множество A нигде не плотно.*

З а м е ч а н и е. Замыкание множества первой категории в общем случае не будет множеством первой категории. □

Говорят, что множество A пространства X обладает *свойством Бэра*, если существует открытое или замкнутое множество B такое, что разности $A\backslash B$ и $B\backslash A$ являются множествами первой категории. Дополнение множества A, обладающего свойством Бэра, также обладает этим свойством. Множество A обладает свойством Бэра в том и только том случае, когда оно есть объединение G_δ-множества и множества первой категории, либо разность F_σ-множества и множества первой категории. Семейство множеств, обладающих свойством Бэра, является минимальной σ-алгеброй, включающей все открытые множества и все множества первой категории.

Множество, не являющееся множеством первой категории, называется *множеством второй категории*. Пространство X называется *пространством Бэра*, если каждое непустое открытое множество из X есть множество второй категории или, что равносильно, дополнение каждого множества первой категории из X является всюду плотным множеством. Всякое множество второй категории содержит подмножество, не обладающее свойством Бэра.

П р и м е р 2.16. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ есть множество первой категории, а множество действительных чисел $\mathbb{R}$ – второй категории. ◘

2.4. Полнота и пополнение. Метрическое пространство (X,d) называется *полным,* если каждая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ сходится в нем к пределу x_0, являющемуся точкой этого же пространства. Метрика d полного пространства также называется *полной.* Так как на любом метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, то на полном пространстве имеет место *обобщенный критерий сходимости Коши*, гласящий, что для сходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе.

П р и м е р 2.17. Пространство изолированных точек (X,d_t) полно, так как любая стационарная последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=a$, сходится к пределу a, который есть точка этого же пространства, а в силу теоремы 1.8 всякая сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. ◘

П р и м е р 2.18. Пространство действительных чисел $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ полно по критерию Коши, выполняющемуся для числовых последовательностей. В то же время пространство рациональных чисел $Q^1=(\mathbb{Q},d_{E1})$, не является полным, так как существуют фундаментальные последовательности, сходящиеся к иррациональным числам (пример 1.5). ◘

П р и м е р 2.19. Любой замкнутый интервал действительных чисел $[a,b]$ представляет собой замкнутое подмножество полного метрического пространства $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ и, значит, является полным пространством. Любой открытый интервал действительных чисел (a,b) есть метрическое пространство, не являющееся полным, поскольку, например, последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=a+(b-a)/n$, $n=1,2,\ldots$, фундаментальна в пространстве (a,b), но при $n\to\infty$ сходится к пределу a, не принадлежащему интервалу (a,b). ◘

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия полноты пространства и представляет собой аналог известной в анализе аксиомы Кантора, гласящей, что любая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет общую точку.

Т е о р е м а 2.7. *Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая убывающая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение (общую точку).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть пространство X полно, и в X задана убывающая последовательность $B_1\supset B_2\supset\ldots\supset B_n\supset\ldots$ вложенных друг в друга замкнутых шаров $B_n=B[x_n,r_n]$, радиусы которых $r_n\to 0$ при $n\to\infty$. Последовательность $\{x_n\}$ центров этих шаров фундаментальна, поскольку для любого целого числа p расстояние $d(x_{n+p}, x_n)<r_n$ и $r_n\to 0$ при $n\to\infty$. Так как пространство X полно, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу $x_n\to x_0$ и точка $x_0\in X.$ В силу замкнутости шаров точка x_0 является предельной точкой для каждого шара B_n и $x_0\in B$, а значит, $x_0\in\bigcap_n B_n$. Таким образом, пересечение шаров B_n имеет общую точку x_0, то есть не пусто.

2°. Пусть теперь $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в пространстве X, то есть для любого $\varepsilon>0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n,m>N$ выполняется неравенство $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. Выберем номер $n_k \geq N$ таким образом, чтобы для любого целого числа $s\geq 1$ выполнялось неравенство $d(x_{n_{k+s}}, x_{n_k})<1/2^k$, и примем точку x_{n_k} за центр замкнутого шара $B_k=B[x_{n_k}, r_k]$ радиуса $r_k=1/2^{k-1}$. Очевидно, что $B_k\supset B_{k+1}$, то есть шары B_k последовательно вложены друг в друга. Действительно, если точка $x\in B_{k+1}$, то по аксиоме треугольника (1.03)

$$d(x, x_{n_k}) \leq d(x, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq (1/2^k) + (1/2^k) = 1/2^{k-1},$$

и значит, точка $x\in B_k$. Таким образом, имеется последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых $r_k\to 0$ при $k\to\infty$, и по предположению существует точка x_0, принадлежащая пересечению $\bigcap_k B_k$ всех шаров B_k, а значит, и каждому шару B_k. Так как точки $x_0, x_{n_k} \in B_k$, то в силу замкнутости шара B_k имеем $d(x_0, x_{n_k})\leq r_k=1/2^{k-1}$. Поэтому $d(x_0, x_{n_k}) \to 0$ при $k\to\infty$, то есть точка x_0 есть предел сходящейся последовательности $\{x_{n_k}\}$. Но тогда и последовательность $\{x_n\}$ сходится к тому же самому пределу x_0, поскольку

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \leq (1/2^k) + (1/2^{k-1}) = 3/2^k,$$

и этот предел x_0 является точкой пространства X. ■

З а м е ч а н и е. Условия полноты метрического пространства можно переформулировать в терминах непустого пересечения последовательности вложенных друг в друга непустых замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю. Аналогичным образом можно определить полноту псевдометрического пространства и пространства с симметрикой. □

Т е о р е м а 2.8 (Бэр). *Всякое полное метрическое пространство есть пространство Бэра* (*множество второй категории*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противоположное и допустим, что полное пространство X есть множество первой категории, то есть $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где каждое из множеств A_n нигде не плотно в пространстве X. Возьмем замкнутый шар $B_0=B[x,r_0]$ с центром в произвольной точке $x\in X$ и радиусом r_0. Так как множество A_1 нигде не плотно, то внутри шара B_0 существует замкнутый шар $B_1=B[x_1, r_1]$ радиуса $r_1<r_0/2$, в котором нет точек множества A_1, то есть $B_0\supset B_1$ и $B_1\bigcap A_1=\varnothing$. Так как множество A_2 нигде не плотно, то внутри шара B_1 найдется шар $B_2=B[x_2,r_2]$ радиуса $r_2<r_1/2<r_0/2^2$ такой, что $B_1\supset B_2$ и $B_2\bigcap A_2=\varnothing$, и так далее. Таким образом, получаем последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $B_0\supset B_1\supset\ldots\supset B_n\supset\ldots$, радиусы которых $r_n<r_0/2^n$ и значит, $r_n\to 0$ при $n\to\infty$. При этом шар $B_n=B[x_n,r_n]$ не содержит точек множеств $A_1,A_2,\ldots,A_n$. По теореме 2.7 последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0, которая одновременно принадлежит всем шарам B_n, а значит, по построению не принадлежит ни одному из множеств A_n, и поэтому $x_0\notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. С другой стороны, вследствие

полноты пространства X последовательность $\{x_n\}$ должна сходиться к пределу x_0, являющемуся точкой этого же пространства X. Следовательно, пространство X не полное, что противоречит сделанному предположению. ■

Следствие 2.8.А. *Дополнение множества первой категории в полном пространстве является множеством второй категории.*

Следствие 2.8.Б. *Всякое полное метрическое пространство, не содержащее изолированных точек, несчетно.*

Следствие 2.8.В. *Всякое полное метрическое пространство, состоящее из счетных множеств, содержит изолированную точку.*

Таким образом, если в полном метрическом пространстве имеются изолированные точки, то такое пространство не обладает свойством Бэра.

Метрическое пространство (X,d_X), гомеоморфное некоторому полному пространству (Y,d_Y), называется *топологически полным*. Если гомеоморфизм пространства (X,d_X) на полное пространство (Y,d_Y) задается функцией f: $X\to Y$, то $d_Y(f(x_n), f(x_m))$ определяет на пространстве X метрику d_X, *топологически эквивалентную* метрике d_Y. Метрическое пространство становится топологически полным путем введения новой метрики, топологически эквивалентной исходной. Всякое топологически полное пространство есть одновременно и пространство Бэра [Oxt71].

Итак, пространство полно в том и только том случае, если является замкнутым подпространством некоторого метрического пространства. Свойство полноты пространства сохраняется при его замыкании, и замкнутое множество полного пространства само является полным пространством. Таким образом, полнота метрического пространства может рассматриваться как свойство его абсолютной замкнутости по отношению к любым представлениям пространства. Полнота является метрически инвариантным свойством метрического пространства, не сохраняющемся в общем случае при гомеоморфных отображениях, поскольку пространство, гомеоморфное полному пространству, само может и не быть полным.

Пример 2.20. Пространство действительных чисел $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ и его открытый интервал $(-1,1)$ гомеоморфны (пример 1.10), однако числовая прямая E^1 – полное пространство, а интервал $(-1,1)$ – нет (см. примеры 2.18 и 2.19). ◘

Любое неполное метрическое пространство всегда можно представить как часть некоторого полного пространства, причем сделать это единственным образом путем так называемого пополнения исходного пространства. Полное метрическое пространство X^* называется *пополнением* неполного метрического пространства X, если X является подпространством, всюду плотным в пространстве X^*.

Пример 2.21. Пространство рациональных чисел $Q^1=(\mathbb{Q},d_{E1})$ всюду плотно в пространстве действительных чисел $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ (пример 2.13), но не полно, так как содержит фундаментальные последовательности рациональных чисел, сходящиеся к иррациональным числам (пример 1.5). Пространство действительных чисел E^1 полно (пример 2.18), и, следовательно, является пополнением пространства рациональных чисел Q^1. ◘

Т е о р е м а 2.9 (Хаусдорф). *Всякое неполное метрическое пространство имеет пополнение, единственное с точностью до изометрии.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть X – неполное метрическое пространство, то есть в нем существуют фундаментальные последовательности, пределы которых не являются точками этого пространства. Разобьем все множество фундаментальных последовательностей на классы эквивалентных последовательностей, и будем считать каждый из классов эквивалентностей x^* элементом нового множества X^*. Введем между элементами $x^*,y^*\in X^*$ расстояние с помощью соотношения

$$d^*(x^*,y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n), \tag{2.13}$$

где x_n и y_n – элементы фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из классов эквивалентностей x^* и y^* соответственно.

2°. Докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$. Согласно неравенству (1.14) для любых точек x_n,x_m,y_n,y_m метрического пространства X имеем:

$$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m).$$

Так как $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – фундаментальные последовательности в пространстве X, то для достаточно больших номеров $n,m>N$ выполняются неравенства (1.28) $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ и $d(y_n,y_m)<\varepsilon$, и значит,

$$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Таким образом, числовая последовательность $\{d(x_n,y_n)\}$ удовлетворяет критерию сходимости Коши и имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$. Величина этого предела не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в соответствующих классах эквивалентностей x^* и y^*. Действительно, возьмем другие последовательности $\{x_n'\}$ и $\{y_n'\}$. Тогда для расстояния $d(x_n',y_n')$ аналогичным образом получим

$$|d(x_n,y_n) - d(x_n',y_n')| \le d(x_n,x_n') + d(y_n,y_n').$$

Поскольку последовательности эквивалентны $\{x_n\}\sim\{x_n'\}$ и $\{y_n\}\sim\{y_n'\}$, то по определению $d(x_n,x_n')\to 0$ и $d(y_n,y_n')\to 0$ при $n\to\infty$, и следовательно, пределы $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n',y_n')$ одинаковы.

3°. Убедимся, что введенное соотношением (2.13) выражение $d^*(x^*,y^*)$ удовлетворяет аксиоматике метрического пространства. Аксиома симметрии (1.01) очевидна: $d^*(x^*,y^*)=d^*(y^*,x^*)$. Аксиома тождества (1.02) $d^*(x^*,y^*)= =\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$ означает, что фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, то есть принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности x^*. Кроме того, так как $d(x_n,y_n)\ge 0$, то и $d^*(x^*,y^*)\ge 0$. Аксиома треугольника (1.03) для расстояния $d^*(x^*,y^*)$ следует из ее выполнения для расстояния $d(x_n,y_n)$ в исходном метрическом пространстве X. Действительно, переходя в неравенстве $d(x_n,y_n)\le d(x_n,z_n) + d(z_n,y_n)$ к пределу при $n\to\infty$, получаем с учетом (1.31):

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \le \lim_{n\to\infty} [d(x_n,z_n) + d(z_n,y_n)] = \lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n,y_n)$$

или $d^*(x^*,y^*) \le d^*(x^*,z^*) + d(z^*,y^*)$. Таким образом, X^* есть метрическое пространство с метрикой $d^*(x^*,y^*)$, определяемой условием (2.13).

4°. Докажем теперь, что пространство X^* является пополнением пространства X, то есть $X^*=[X]$. Поставим каждой точке $x\in X$ в соответствие точку $x^*\in X^*$ или, иными словами, класс всех эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$, сходящихся к точке $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Если таким же образом точке $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ соответствует точка $y^*\in X^*$, то вследствие равенства (1.30) имеем $d^*(x^*,y^*)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=d(x,y)$. Тем самым введенное соответствие $x\to x^*$ есть изометрическое отображение пространства X в пространство X^*. Поэтому можно не делать различия между пространством X и его образом в пространстве X^* и считать X подпространством пространства X^*.

5°. Покажем, что множество X всюду плотно в пространстве X^*, то есть для произвольного $\varepsilon>0$ и любой точки $x^*\in X^*$ найдется точка $x\in X$, лежащая в ε-окрестности $O_\varepsilon(x^*)$ точки x^*. Выберем из класса x^* некоторую фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Возьмем номер N такой, чтобы для всех $n,m>N$ выполнялось неравенство $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. Тогда $d^*(x^*,x_m)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_m)\le\varepsilon$ при $m>N$, то есть точка $x_m\in O_\varepsilon(x^*)$. Таким образом, замыкание $[X]$ множества X совпадает с пространством X^*, а значит, множество X всюду плотно в пространстве X^*.

6°. Покажем, что пространство X^* полное. Выберем некоторую фундаментальную последовательность $\{x_n^*\}$, составленную из точек $x_n^*\in X^*$, и построим эквивалентную ей последовательность $\{x_n\}$, составленную из точек $x_n\in X$. Это можно сделать, поскольку пространство X всюду плотно в пространстве X^*, например, взяв в качестве x_n любую точку пространства X такую, что $d^*(x_n,x_n^*)<1/n$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ также будет фундаментальной и по правилу построения пространства X^* будет сходиться к некоторому элементу $x^*\in X^*$. Но тогда к этому же пределу сходится и фундаментальная последовательность $\{x_n^*\}$, то есть пространство X^* полное и является пополнением пространства X.

7°. Остается доказать единственность изометрического отображения $X\to X^*$. Пусть X^* и Y^* – два различных пополнения пространства X. По определению пополнения существует фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ точек пространства X, сходящаяся к точкам $x^*\in X^*$ и $y^*\in Y^*$. Поставим элемент x^* в соответствие элементу y^* с помощью взаимно однозначного отображения $y^*=\varphi(x^*)$ пространства X^* на пространство Y^*. По построению пополнений это отображение φ есть тождественное преобразование пространства X, то есть $\varphi(x)=x$ для всех $x\in X$. Так как пространства X^* и Y^* полны, то фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$ сходятся соответственно к точкам $x^*,x'^*\in X^*$ и $y^*,y'^*\in Y^*$. Иными словами, в пространстве X^* имеем $x_n\to x^*$, $x_n'\to x'^*$, а значит, $d_{X^*}(x^*,x'^*)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_n')$, а в пространстве Y^* соответственно $y_n\to y^*$, $y_n'\to y'^*$ и $d_{Y^*}(y^*,y'^*)=\lim\limits_{n\to\infty}d(y_n,y_n')$. Отсюда получаем, что $d_{X^*}(x^*,x'^*)=d_{Y^*}(y^*,y'^*)$, то есть отображение φ изометрическое. Тем самым теорема полностью доказана. ■

С л е д с т в и е 2.9.А. *Замыкание* $[X]$ *неполного метрического пространства* X *является пополнением* X^* *пространства* X.

2.5. Компактность. Множество A метрического пространства X называется *компактным,* если любая последовательность $\{x_n\}$ точек этого множества содержит сходящуюся подпоследовательность. Множество A называется *компактным в себе,* если подпоследовательности сходятся к пределам, которые являются точками множества A, и *компактным в пространстве* X или *относительно пространства* X, если пределы подпоследовательностей принадлежат пространству X, не обязательно являясь точками множества A. Объединение компактных множеств компактно. Компактное связное множество называется *континуумом*.

Метрическое пространство X называется *компактным* или просто *компактом,* если любое счетное подмножество пространства имеет предельную точку, то есть содержит последовательность, сходящуюся к точке этого же пространства. Метрическое пространство называется *локально компактным,* если каждая точка пространства имеет окрестность, замыкание которой компактно, и *относительно компактным,* если замыкание всего пространства компактно. Компактное хаусдорфово пространство называется *бикомпактом.*

П р и м е р 2.22. Пространство изолированных точек (X,d_t), состоящее из счетного числа точек, локально компактно, но не компактно. В то же время всякое конечное пространство изолированных точек (X,d_t) компактно. ◘

П р и м е р 2.23. Пространство действительных чисел $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ полно (пример 2.18), локально компактно, но не компактно, так как, например, его счетное подмножество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не имеет предельной точки. ◘

Сформулируем необходимые и достаточные условия компактности пространства.

Т е о р е м а 2.10 (Хаусдорф). *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть пространство X компактно и x_1 – любая точка из X. Если $d(x,x_1)<\varepsilon$ для всех $x\in X$, то тем самым конечная ε-сеть для X уже имеется, то есть пространство X вполне ограниченно. Если это не так, то существует точка $x_2\in X$ такая, что $d(x_1,x_2)\geq\varepsilon$. Если в этом случае $d(x,x_1)<\varepsilon$ или $d(x,x_2)<\varepsilon$ для всех $x\in X$, то конечная ε-сеть для X будет построена. Если это не так, то найдется точка $x_3\in X$ такая, что $d(x_1,x_3)\geq\varepsilon$ и $d(x_2,x_3)\geq\varepsilon$. Продолжая эту процедуру, получим последовательность точек $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ таких, что $d(x_i,x_j)\geq\varepsilon$ при $i\neq j$. Возможны два варианта. Либо процесс оборвется на некотором k-ом шаге, то есть для всех $x\in X$ будет выполняться одно из неравенств $d(x,x_i)<\varepsilon$, $i=1,...,k$. В этом случае последовательность $x_1,x_2,\ldots,x_k$ образует конечную ε-сеть, все точки которой $x_i\in X$, то есть пространство X вполне ограничено. Сама же последовательность $\{x_i\}$ будет фундаментальной, а значит, пространство X и полно. Либо указанный процесс построения точек x_i неограниченно продолжается, и получается бесконечная последовательность точек $\{x_n\}$, которая и сама не имеет предела, поскольку $d(x_i,x_j)\geq\varepsilon$ при $i\neq j$, и не содержит никакой сходящейся подпоследовательности, что противоречит условию компактности пространства X. Необходимость условий теоремы доказана.

2°. Пусть теперь пространство X вполне ограничено, то есть при любом $\varepsilon>0$ существует конечная ε-сеть для X. Возьмем некоторую последовательность $\{x_n\}$ различных точек пространства X и вокруг каждой из точек x_n построим замкнутый шар $B[x_n, r_1]$ радиуса $r_1=\varepsilon_1=\varepsilon/2$. В силу существования для пространства X конечной ε_1-сети все точки пространства X, а значит, и каждая из точек последовательности $\{x_n\}$ содержатся в этих шарах. Так как число шаров конечно, то по крайней мере один из них содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_{n_1}\}$. Обозначим этот шар $B_1=B[x_{n_1}, r_1]$. Рассуждая аналогичным образом, найдем замкнутый шар $B_2=B[x_{n_2}, r_2]$ радиуса $r_2=\varepsilon/2^2$, содержащий бесконечную подпоследовательность $\{x_{n_2}\}$ и вложенный в шар B_1. Продолжая этот процесс, получим не более чем счетное множество вложенных друг в друга замкнутых шаров $B_1\supset B_2\supset\ldots\supset B_k\supset\ldots$, в каждом из которых содержится бесконечная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, а радиус $r_k=\varepsilon/2^k\to 0$ при $k\to\infty$.

Возьмем из каждого шара B_k по одной произвольной точке x'_{n_k} и построим из них бесконечную подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$ исходной последовательность $\{x_n\}$, все точки которой различны. Подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$ сходится в себе в пространстве X. Действительно, для любого целого числа $p\geq 1$ из условия замкнутости шаров B_{k+p} и $B_k\supset B_{k+p}$ и неравенства треугольника (1.03) вытекает неравенство $d(x'_{n_{k+p}}, x'_{n_k})<2r_k=\varepsilon/2^{k-1}$. Так как пространство X полно, то по определению фундаментальная подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$ сходится к точке этого же пространства, которая по теореме 2.2 будет ее предельной точкой. Согласно теореме 2.7 пересечение $\bigcap_k B_k$ последовательности вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых $r_k\to 0$ при $k\to\infty$, не пусто и имеет одну общую точку $x_0\in X$. Следовательно, точка x_0 является предельной точкой подпоследовательности $\{x'_{n_k}\}$, а значит, и предельной точкой исходной последовательности $\{x_n\}$, то есть пространство X компактно. ■

Итак, всякое компактное пространство полно, а значит, и замкнуто. Обратное утверждение в общем случае неверно. Компактность метрического пространства является более сильным, чем полнота, топологически инвариантным свойством, которое сохраняется при замене исходной метрики на гомеоморфную ей. Требование компактности выделяет более узкий класс пространств, чем полные и сепарабельные пространства. Из теоремы 2.10 вытекают следующие свойства компактных пространств.

Следствие 2.10.А. *Компактное пространство ограничено.*

Следствие 2.10.Б. *Компактное пространство сепарабельно.*

Следствие 2.10.В. *Замыкание множества, компактного в полном пространстве, компактно.*

Следствие 2.10.Г. *Пополнение компактного множества есть компактное пространство.*

Приведем без доказательств, которые можно найти, например, в [ЛС65], необходимые и достаточные условия компактности множеств. Замкнутое множество A метрического пространства X компактно в себе тогда и тогда, когда из любого покрытия этого множества можно выделить конечное покрытие. Множество A метрического пространства X компактно в себе тогда и тогда, когда оно компактно в X и замкнуто. Множество A полного метрического пространства X компактно в X тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

Пример 2.24. Всякое ограниченное подмножество полного пространства действительных чисел $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ компактно, так как имеет хотя бы одну предельную точку (в силу теоремы Больцано). Любой замкнутый интервал $[a,b]$, в том числе множество действительных чисел между нулем и единицей $\mathbb{R}_{01}=[0,1]$, является компактным в себе множеством и континуумом. ◘

Для компактных множеств существует теорема, аналогичная теореме 2.7 о вложенных шарах в полном метрическом пространстве.

Теорема 2.11. *Любая убывающая последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств, компактных в метрическом пространстве, имеет непустое пересечение* (*общую точку*).

Доказательство. Пусть в метрическом пространстве X задана убывающая последовательность $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ замкнутых компактных множеств. Выберем в каждом множестве A_i по точке x_i, совокупность которых образует последовательность $\{x_i\} \subset A_1$. Так как множество A_1 компактно, то из последовательности $\{x_i\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$, сходящуюся при $k \to \infty$ к пределу x_0. Очевидно, что для любого фиксированного числа n все точки подпоследовательности x_{i_k} с номерами $i_k > n$ принадлежат множеству A_n. Так как множество A_n замкнуто, то и предел x_0 подпоследовательности $\{x_{i_k}\}$ содержится в A_n. А значит, точка x_0 принадлежит пересечению множеств A_n и является его общей точкой, то есть $\bigcap_n A_n$ не пусто. ■

Замечание. При доказательстве теоремы 2.11 не использовалось свойство полноты пространства X. □

2.6. Топологические пространства. Как было показано выше, в метрическом пространстве понятия сходящейся последовательности точек, открытого и замкнутого множеств в определенном смысле взаимозаменяемы. Действительно, последовательность $\{x_n\}$, $n=1,2,\ldots$ точек пространства X сходится к пределу x_0 при $n \to \infty$ в том и только том случае, если каждое замкнутое множество $B \subseteq X$, содержащее некоторую подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, содержит и предельную точку x_0, или если каждое открытое множество $A \subseteq X$, содержащее точку x_0, содержит и все точки x_n последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n > N(A)$. Тем самым каждое из перечисленных понятий можно определить в терминах любого другого, не используя понятия расстояния между точками пространства. Такой подход, не связанный с введением метрики, применяется при определении топологического пространства.

Семейство $\mathcal{J}$ подмножеств A_i некоторого множества X называется *топологией* на множестве X, если оно удовлетворяет следующим условиям (аксиомам топологического пространства): семейство $\mathcal{J}$ содержит само множество X, пустое множество $\varnothing$, объединение $\bigcup_i A_i$ любого числа и пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ конечного числа множеств из $\mathcal{J}$. Множество X с заданной на нем топологией называется *топологическим пространством* и обозначается $(X, \mathcal{J})$, а подмножества $A_i \in \mathcal{J}$ называются *открытыми множествами.* Подсемейство $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ называется *базой топологии*, если каждое множество $A_i \in \mathcal{J}$ представимо как объединение некоторых множеств из $\mathcal{J}_0$. Множество $B_i = X \backslash A_i$, являющееся дополнением к открытому, называется *замкнутым множеством.* В силу свойства двойственности множеств отсюда сразу же следует, что пространство X и пустое множество $\varnothing$ замкнуты, пересечение $\bigcap_i B_i$ любого числа и объединение $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ конечного числа замкнутых множеств суть замкнутые множества. Очевидно, что на одном и том же множестве X можно вводить разные топологии $\mathcal{J}$, получая тем самым разные топологические пространства $(X, \mathcal{J})$.

Используя эти определения, вводятся понятия окрестности точки топологического пространства, как некоторого открытого множества, содержащего эту точку, внутренней, изолированной, предельной, граничной точек, точки соприкосновения, производного и граничного множеств, замыкания множества, непрерывного отображения топологических пространств и другие понятия. Для всех них остаются справедливыми доказанные выше утверждения.

Сходимость в топологическом пространстве X понимается как существование предела $\lim\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha$ обобщенной последовательности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ точек множества X (так называемая *сходимость по Муру-Смиту*). *Обобщенной последовательностью элементов* (*точек*) множества X или *направленностью* в множество X называется отображение $g{:}\mathrm{A} \to X$, ставящее в соответствие каждому элементу α направленного по возрастанию множества индексов А некоторый элемент $x_\alpha \in X$. Направленность обычно обозначается как $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ или просто $\{x_\alpha\}$. Направленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ называется *поднаправленностью* направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, если для любого индекса $\alpha \in \mathrm{A}$ существует такой индекс $\beta(\alpha) \in \mathrm{B}$, что для любого индекса $\beta' \in \mathrm{B}$ такого, что $\beta' \geq \beta(\alpha)$, найдется индекс $\alpha' \in \mathrm{A}$, $\alpha' \geq \alpha$ такой, что выполняется равенство элементов $x_{\alpha'} = y_{\beta'}$. Если $\mathrm{A} = \mathbb{N}$, то обобщенная последовательность точек $\{x_\alpha\}$ становится обычной последовательностью $\{x_n\}$.

Говорят, что обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *сходится к точке* $x_0 = \lim\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha$, если для любой окрестности $O(x_0)$ точки $x_0 \in X$ существует индекс $\alpha_0 \in \mathrm{A}$ такой, что все точки x_α с индексами $\alpha \geq \alpha_0$ содержатся в окрестности $O(x_0)$. Сходимость обобщенной последовательности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ к пределу x_0 будем обозначать как $x_\alpha \to_{\mathrm{A}} x_0$. Обобщенная последовательность может сходиться, вообще говоря, ко многим точкам или не сходится ни к одной точке. Множество предельных точек сходящихся обобщенных последовательностей $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ точек произвольного множества B образует в топологическом пространстве X производное множество B'.

Предел сходящейся обобщенной последовательности единственен в том и только том случае, если пространство хаусдорфово. Поэтому пространство Хаусдорфа есть топологический аналог L-пространства Фреше. Топологическое пространство будет компактно в том и только том случае, если предельная точка каждой обобщенной последовательности есть точка этого же пространства.

Понятие близости в топологическом пространстве трактуется как близость точки к множеству, считая при этом, что точка абсолютно близка к множеству, если она принадлежит его замыканию. Метрические пространства рассматриваются в этом контексте как особый вид топологических пространств, на которых задана некоторая непрерывная действительная функция $d(x,y)$ – метрика, удовлетворяющая аксиомам (1.02)-(1.03) и характеризующая близость двух точек пространства. Открытыми подмножествами такого пространства (X,d) будут объединения открытых шаров $O(x,r)$. Семейство $\mathcal{T}$ открытых подмножеств пространства X называется *топологией* на множестве X, *индуцированной метрикой d.* Всякое пространство с топологией, индуцированной метрикой, является хаусдорфовым пространством. Следовательно, в метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность имеет только один предел. Подобным же образом вводятся топологические пространства с использованием понятия псевдометрики.

П р и м е р 2.25. Всякое метрическое пространство (X,d_X) изоморфно подпространству метрического пространства $(\mathcal{B}(X), d_H)$, образованного семейством $\mathcal{B}(X)$ всех непустых замкнутых подмножеств множества X с метрикой Хаусдорфа d_H (1.13). Метрика d_H полна, если полна метрика d_X. ◘

Связность, сепарабельность, компактность, свойство Бэра относятся к свойствам пространства, которые определяются, исходя из понятия сходящейся последовательности точек. Такие свойства были названы ранее топологическими или топологически инвариантными свойствами, сохраняющимися при гомеоморфных отображениях метрического пространства. Напомним, что ограниченность и полнота пространства к топологическим свойствам не относятся.

Глава 3
Непрерывные функции, последовательности функций, множеств и мультимножеств

3.1. Предел и непрерывность функции. Распространим понятия сходимости последовательности точек к пределу на функции и отображения, и рассмотрим функции $y=f(x)$, которые определены на метрическом пространстве (X,d_X) и принимают значения на метрическом пространстве (Y,d_Y).

Будем говорить, что функция $y=f(x)$ *имеет предел* y_0 *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек $x\in X$, удовлетворяющих условию $d_X(x, x_0)<\delta$, выполняется неравенство

$$d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon. \tag{3.01}$$

В этом случае говорят также, что функция $y=f(x)$ *стремится к пределу* y_0 *при* $x\to x_0$, и пишут $f(x)\to y_0$ или

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0. \tag{3.02}$$

Аналогично теореме 1.10 нетрудно доказать, что если предел y_0 функции $y=f(x)$ в точке x_0 существует, то он необходимо единственен.

Из соотношения (1.32) вытекает, что если существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=g_0(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=z_0$, а значения функций $f_n(x)$, $g_n(x)$ и $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют соответственно неравенствам $f_n(x)\le g_n(x)$ и $f(x)\le g(x)$, то и пределы удовлетворяют таким же неравенствам: $f_0(x)\le g_0(x)$ и $y_0\le z_0$. В соответствии с формулами (1.31) для пределов действительных функций f и g выполняются также следующие равенства:

$$\lim_{x\to x_0} \min[f(x),g(x)]=\min[\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x)];$$

$$\lim_{x\to x_0} \max[f(x),g(x)]=\max[\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} y_n];$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\pm g(x)]= \lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x);\ \lim_{x\to x_0} [f(x)+s]= \lim_{x\to x_0} f(x)+s;\ \lim_{x\to x_0} [rf(x)]=r \lim_{x\to x_0} f(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)]=[\lim_{x\to x_0} f(x)]\cdot[\lim_{x\to x_0} g(x)];\ \lim_{x\to x_0} [f(x)/g(x)]=[\lim_{x\to x_0} f(x)]/[\lim_{x\to x_0} g(x)], \tag{3.03}$$

где s и r – постоянные, а в последнем равенстве считается, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

В общем случае предел y_0 функции $y=f(x)$ в точке x_0 может не совпадать со значением функции $f(x_0)$ в этой точке или вовсе не существовать. Если предел функции $y=f(x)$ в точке x_0 существует и выполняется равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{3.04}$$

то функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 или *непрерывной при* $x=x_0$. Иными словами, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек $x\in X$, удовлетворяющих условию $d_X(x, x_0)<\delta$, выполняется неравенство

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{3.05}$$

Понятие непрерывности функции можно ввести также в терминах сходимости последовательностей. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для всякой последовательности точек $\{x_n\}$, сходящейся в пространстве (X,d_X) к точке $x_0=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{3.06}$$

Верно и обратное: если при $n\to\infty$ последовательность $\{x_n\}$ аргументов непрерывной функции $y=f(x)$ сходится $x_n\to x_0$, $x_n,x_0\in X$, то сходится и последовательность значений функции $f(x_n)\to f(x_0)$, $f(x_n)$, $f(x_0)\in Y$. Тем самым определения непрерывности функции, выраженные на «языке δ-ε» и на «языке сходимости последовательностей», равносильны.

Определение непрерывности функции $y=f(x)$ или отображения $f{:}X\to Y$ метрического (топологического) пространства X в метрическое (топологическое) пространство Y можно перефразировать аналогично случаю сходимости последовательности элементов, используя понятия окрестностей соответствующих точек в пространствах X и Y. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0\in X$, если для любой ε-окрестности $V_\varepsilon(f(x_0))$ точки $f(x_0)\in Y$ существует δ-окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех точек $x\in O_\delta(x_0)$ функция $y=f(x)$ определена в этой окрестности и удовлетворяет условию $f(O_\delta(x_0)\bigcap X)\subset V_\varepsilon(f(x_0))$, то есть образ $f(x)$ любой точки x из δ-окрестности точки x_0 принадлежит ε-окрестности $f(x_0)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке пространства X, то говорят, что функция *непрерывна на пространстве* X. Укажем необходимые и достаточные условия непрерывности функции (отображения) на пространстве, не использующие понятия расстояния в явном виде.

Т е о р е м а 3.1. *Функция* $y=f(x)$ *непрерывна на пространстве* X *тогда и только тогда, когда полный прообраз* $f^{-1}(B)$ *любого открытого множества* B *в пространстве* Y *есть открытое множество в пространстве* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на пространстве X. Рассмотрим произвольную точку $x_0\in X$ и произвольную ε-окрестность $V_\varepsilon(y_0)$ точки $y_0=f(x_0)$, являющуюся, очевидно, открытым множеством. По определению непрерывности функции $y=f(x)$ найдется δ-окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(O_\delta(x_0))\subset V_\varepsilon(y_0)=B$, или, что то же, $O_\varepsilon(x_0)\subset f^{-1}(B)=A$. По определению (2.01) это и означает, что точка $x_0\in A$ есть внутренняя точка множества A, а множество A – открытое.

2°. Пусть теперь множество $A=f^{-1}(B)$ открыто, если открыто множество B. Рассмотрим произвольную точку $x_0\in X$ и произвольную ε-окрестность $V_\varepsilon(y_0)$ точки $y_0=f(x_0)$. Поскольку $y_0\in V_\varepsilon(y_0)$, то $x_0\in f^{-1}(V_\varepsilon(y_0))$. Множество $f^{-1}(V_\varepsilon(y_0))$ и является искомой δ-окрестностью $O_\delta(x_0)$ точки x_0, образ которой $f(x_0)$ принадлежит ε-окрестности $V_\varepsilon(y_0)$ точки y_0. ■

Так как прообраз дополнения множества равен дополнению прообраза множества [КФ68], то необходимые и достаточные условия непрерывности функции (отображения) на пространстве не изменятся, если в формулировке теоремы 3.2 слово «открытое» заменить на «замкнутое». Итак, функция $y=f(x)$ непрерывна на пространстве X в том и только том случае, если любое подмножество точек $x\in X$, образы которых $f(x)$ образуют открытое (замкнутое) множество, само является открытым (замкнутым) множеством.

3.2. Свойства непрерывных функций. Рассмотрим некоторые свойства непрерывных функций. Отметим в первую очередь, что свойство непрерывности сохраняется для сложных функций.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть* (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) *– метрические пространства. Если функция* $y=f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0\in X$, *а функция* $z=g(y)$ *непрерывна в точке* $y_0\in Y$ *и такова, что существует композиция отображений* $h=g\circ f$, *то сложная функция* $z=h(x)=g(f(x))$ *также непрерывна в точке* $x_0\in X$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)). \tag{3.07}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению (3.21) непрерывности функции $z=g(y)$ в точке $y_0\in Y$ для любого $\varepsilon>0$ существует число $\tau>0$ такое, что из условия $d_Y(y,y_0)<\tau$ вытекает неравенство $d_Z(g(y), g(y_0))<\varepsilon$. Из условия непрерывности функции $y=f(x)$ в точке $x_0\in X$ по имеющемуся $\tau>0$ найдем число $\delta>0$ такое, что из условия $d_X(x, x_0)<\delta$ следует неравенство $d_Y(f(x), f(x_0))<\tau$. Тогда для всех точек $x\in X$, удовлетворяющих условию $d_X(x, x_0)<\delta$, имеем

$$d_Z(h(x), h(x_0)) = d_Z(g(f(x)), g(f(x_0)) = d_Z(g(y), g(y_0)) < \varepsilon. \blacksquare$$

Соотношения (3.06) и (3.07) выражают очень важное свойство непрерывных функций, а именно: операции функциональной зависимости «f» и предельного перехода «lim» можно менять местами. Перестановочность этих операций нередко используется для установления непрерывности функции. Из теоремы 3.2 вытекают следующие следствия.

С л е д с т в и е 3.2.А. *Пусть* (X,d_X), (Y,d_Y) *– метрические пространства. Если функция* $y=f(x)$ *непрерывна на пространстве* X, *а* y_0 *– фиксированная точка пространства* Y, *то функция* $h(x)=d_Y(f(x), y_0)$ *также непрерывна на пространстве* X.

Абсолютное значение $|f(x)|$ произвольной действительной функции $y=f(x)$ равно расстоянию между значением функции и фиксированной точкой $y_0=0$ пространства $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$: $|f(x)|=d_{E1}(f(x),0)$, что можно интерпретировать также как длину отрезка $[0,f(x)]$ в пространстве E^1. Таким образом, имеем еще одно

С л е д с т в и е 3.2.Б. *Абсолютное значение непрерывной действительной функции есть непрерывная функция.*

Согласно равенствам (3.03), если действительные функции $y=f$ и $z=g$ непрерывны в точке $x_0\in X$, то в этой точке непрерывны и следующие функции:

$$\min(f,g),\ \max(f,g),\ f\pm g,\ f+s,\ rf,\ f\cdot g,\ f/g, \tag{3.08}$$

где s и r – постоянные, а в последнем равенстве предполагается, что $g(x_0)\neq 0$.

П р и м е р 3.1. Любой многочлен $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ и любая функция вида $\dfrac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$ непрерывны всюду на числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ за исключением точек, где знаменатель функции обращается в нуль. ◘

П р и м е р 3.2. Выпуклая (вогнутая) функция, ограниченная сверху (снизу) на некотором внутреннем подинтервале интервала (a,b), является непрерывной. Непрерывны следующие выпуклые функции: степенная $f(x)=x^q$ при $q\geq 1$ и $x\geq 0$, модуль $f(x)=|x|$ и вогнутые функции: степенная $f(x)=x^q$ при $0<q\leq 1$ и $x\geq 0$, логарифмическая $f(x)=\log x$ для $x>0$, дробно-линейная $f(x)=x/(1+x)$ для $x>-1$. ◘

Во многих разделах математики используется понятие равномерности. Если некое свойство выполняется в каждой точке x множества X, не зависит от рассматриваемой конкретной точки и одинаково для всех точек множества X, то будем говорить, что это свойство *равномерно на множестве X*.

Функция $y=f(x)$ называется *равномерно непрерывной на метрическом пространстве X*, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех пар точек $x_n,x_m\in X$, удовлетворяющих условию $d_X(x_n, x_m)<\delta$, выполняется неравенство

$$d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon, \tag{3.09}$$

и *равностепенно непрерывной на метрическом пространстве X*, если неравенство (3.09) одновременно выполняется для всех функций $y=f(x)$ из некоторого семейства функций. Всякая равномерно непрерывная функция непрерывна. Обратное утверждение в общем случае неверно. Справедлива следующая

Т е о р е м а 3.3. *Функция $y=f(x)$, непрерывная на замкнутом ограниченном пространстве X, равномерно непрерывна, ограничена на этом пространстве и достигает на нем своих точных нижней и верхней граней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Частично опирается на лемму Гейне-Бореля о возможности покрытия замкнутого ограниченного множества конечным семейством открытых множеств. Вместо прямого доказательства теоремы получим его как следствие из теорем 3.5 и 3.6, доказанных ниже. ■

П р и м е р 3.3. Постоянная функция $f(x)=y_0$, где y_0 – фиксированная точка пространства Y, является функцией, непрерывной и равномерно непрерывной на пространстве X. ◘

Понятие равномерной непрерывности не абсолютно: функция может быть равномерно непрерывной для одних метрик и не быть таковой для других. Вместе с тем, нетрудно убедиться [Eng77], что любую функцию $y=f(x)$, непрерывную на некотором пространстве X с метрикой d_X, можно сделать равномерно непрерывной на пространстве X, если ввести эквивалентную метрику

$$d'_X(x_n, x_m) = d_X(x_n, x_m) + d_Y(f(x_n), f(x_m)). \tag{3.10}$$

При этом если метрики d_X и d_Y ограничены, то и метрика d'_X ограничена.

Из определения гомеоморфного отображения следует, что гомеоморфизм есть взаимно однозначное непрерывное отображение $f{:}X\to Y$ метрического пространства (X,d_X) на метрическое пространство (Y,d_Y), обратное отображение которого также непрерывно, а изометрия – инъективное равномерно непрерывное отображение. Тем самым топологические свойства пространства сохраняются при непрерывных отображениях, а метрические свойства – при равномерно непрерывных отображениях. Если существует непрерывное отображение $f{:}X\to Y$ такое, что $f(X)=Y$, то говорят, что пространство Y есть *непрерывный образ пространства X*. Непрерывное отображение $f{:}X\to Y$ называется *монотонным*, если прообраз $x=f^{-1}(y)$ каждой точки y есть связное подмножество. Монотонные отображения сохраняют связность пространств.

Непрерывные функции, определенные на компактных пространствах, обладают рядом дополнительных свойств.

Теорема 3.4. *Множество значений функции $y=f(x)$, непрерывной на компактном пространстве X, компактно.*

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$, $y_n=f(x_n)$, $n=1,2,...$ – произвольная последовательность значений непрерывной функции $y=f(x)$, определенной на компакте X. Так как пространство X компактно, то из последовательности точек $\{x_n\}$ всегда можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся при $k\to\infty$ к некоторой точке $x_0\in X$. Поскольку функция $y=f(x)$ непрерывна, в том числе и в точке x_0, то в силу (3.06) при $k\to\infty$ сходится и последовательность значений функции $f(x_{n_k})\to f(x_0)=y_0$. Таким образом, произвольная последовательность $\{y_n\}$ содержит подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, сходящуюся к пределу y_0, то есть множество значений функции компактно. ■

Теорема 3.5. *Функция $y=f(x)$, непрерывная на компактном пространстве X, ограничена на этом пространстве и достигает на нем своих точных нижней и верхней граней.*

Доказательство. Множество B значений непрерывной функции $y=f(x)$, определенной на компактном пространстве X, согласно теореме 3.4 компактно, а значит, согласно теореме 2.10 и ее следствиям ограничено и замкнуто. Поэтому множество B не только имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани, но и содержит эти грани. ■

Замечание. Если непрерывная функция $y=f(x)$ задана на множестве A, не компактном в себе, то точная нижняя и точная верхняя грани функции могут и не достигаться на множестве A. □

Теорема 3.6. *Функция $y=f(x)$, непрерывная на компактном пространстве X, равномерно непрерывна на этом пространстве.*

Доказательство. Допустим, что функция $y=f(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на пространстве X. Тогда для некоторого $\varepsilon>0$ и любого числа $\delta>0$ в пространстве X найдутся точки x' и x'' такие, что $d_X(x',x'')<\delta$, но $d_Y(f(x'), f(x''))\geq\varepsilon$. Положим $\delta=1/n$, и для каждого n найдем соответствующую пару точек x'_n и x''_n, для которых $d_X(x'_n, x''_n)<1/n$, но $d_Y(f(x'_n), f(x''_n))\geq\varepsilon$. В силу компактности пространства X из последовательностей точек $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ всегда можно выделить подпоследовательности $\{x'_{n_k}\}$ и $\{x''_{n_k}\}$, сходящиеся при $n_k\to\infty$ к некоторым пределам $x'_0\in X$ и $x''_0\in X$ соответственно. Так как $d_X(x'_{n_k}, x''_{n_k})<1/n_k$, то согласно условию (1.30) эти пределы совпадают $x'_0=x''_0=x_0$.

Поскольку функция $y=f(x)$ непрерывна, в том числе и в точке x_0, то для имеющегося $\varepsilon>0$ существует число $\delta_0>0$ такое, что для всех точек $x\in X$, удовлетворяющих условию $d_X(x,x_0)<\delta_0$, выполняется неравенство $d_Y(f(x), f(x_0))<\varepsilon/2$. Так как $x'_{n_k}\to x_0$ и $x''_{n_k}\to x_0$, то все точки x'_{n_k}, x''_{n_k}, начиная с некоторого номера, также удовлетворяют условию $d_X(x,x_0)<\delta$, и поэтому для этих точек $d_Y(f(x'_{n_k}), f(x_0))<\varepsilon/2$ и $d_Y(f(x''_{n_k}), f(x_0))<\varepsilon/2$. Но тогда по неравенству треугольника (1.03) имеем $d_Y(f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k}))<\varepsilon$, что противоречит ранее сделанному допущению. ■

По теореме 2.10 и следствиям из нее компактное пространство ограничено и замкнуто. Тогда из теорем 3.4-3.6 немедленно получаем теорему 3.3. Кроме того, получаем, что непрерывный образ компактного (соответственно сепарабельного, связного) пространства компактен (сепарабелен, связен).

3.3. Полунепрерывные и односторонне непрерывные функции. Рассмотрим действительную функцию $y=f(x)$, заданную в δ-окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0. Конечный или бесконечный предел нижних (соответственно верхних) граней множества значений функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 называется *нижним* (*верхним*) *пределом функции* f *в точке* x_0 и обозначается

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(\inf_{x\in O_\delta(x_0)} f(x)\right) = \underline{f}(x_0), \qquad \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \lim_{\delta\to 0}\left(\sup_{x\in O_\delta(x_0)} f(x)\right) = \overline{f}(x_0). \quad (3.11)$$

Очевидно, что в общем случае нижний и верхний пределы функции f удовлетворяют неравенству $\underline{f}(x_0)\le y_0\le \overline{f}(x_0)$, где y_0 – предел функции $y=f(x)$ в точке x_0. Разность верхнего и нижнего пределов функции $\underline{f}(x_0)-\overline{f}(x_0)$ называется *колебанием функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0.

Функция $y=f(x)$ называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*) *в точке* x_0, если нижний (верхний) предел функции f в точке x_0 существует и выполняется равенство $\underline{f}(x_0)=f(x_0)$ (соответственно $\overline{f}(x_0)=f(x_0)$). Иными словами, функция $y=f(x)$ полунепрерывна снизу (сверху) в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек $x\in X$, удовлетворяющих условию $d_X(x,x_0)<\delta$, выполняется соответственно неравенство

$$f(x_0)-f(x) < \varepsilon, \quad (f(x)-f(x_0) < \varepsilon). \quad (3.12)$$

Функция $y=f(x)$ одновременно полунепрерывна снизу и сверху в точке x_0 в том и только том случае, если она непрерывна, а ее нижний и верхний пределы совпадают $\underline{f}(x_0)=\overline{f}(x_0)=f(x_0)$. Если функция $y=f(x)$ полунепрерывна снизу (сверху) в каждой точке пространства (X,d_X), то говорят, что функция f *полунепрерывна снизу* (*сверху*) *на пространстве* X.

Из определений следует, что нижний предел $\underline{f}(x)$ любой функции $y=f(x)$ есть полунепрерывная снизу функция, а верхний предел $\overline{f}(x)$ – полунепрерывная сверху функция. Если $z=g(x)$ и $w=h(x)$ суть соответственно полунепрерывные снизу и сверху функции на пространстве X и для всех точек $x\in X$ выполняется неравенство $g(x)\le h(x)$, то существует непрерывная на пространстве X функция $y=f(x)$ такая, что $g(x)\le f(x)\le h(x)$. Предел монотонно возрастающей (убывающей) последовательности функций, полунепрерывных снизу (сверху) в точке x_0, есть функция, полунепрерывная снизу (сверху) в точке x_0.

Для полунепрерывной функции, определенной на компактном пространстве, имеет место следующий аналог теоремы 3.5.

Т е о р е м а 3.7. *Конечная функция* $y=f(x)$, *полунепрерывная снизу* (*сверху*) *на компактном пространстве* X, *ограничена снизу* (*сверху*) *на этом пространстве и достигает на нем своей точной нижней* (*верхней*) *грани.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно найти, например, в книге [КФ68]. ■

Пусть теперь функция $y=f(x)$ определена в δ-окрестности $O_\delta(x_0)$ точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0 (так называемая *выколотая окрестность* точки), а множество X упорядочено. Введем два множества точек $X_0^-=\{x\in X|x\le x_0\}$ и $X_0^+=\{x\in X|x\ge x_0\}$. Будем говорить, что функция f *имеет левый предел* y_0^- (*правый предел* y_0^+) *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $x\in O_\delta(x_0)\bigcap X_0^-$ ($x\in O_\delta(x_0)\bigcap X_0^+$), выполняется соответственно неравенство

$$d_Y(f(x), y_0^-) < \varepsilon, \quad (d_Y(f(x), y_0^+) < \varepsilon). \tag{3.13}$$

В этом случае говорят также, что функция $y=f(x)$ *стремится к пределу слева при* $x\to x_0-0$ и соответственно *справа при* $x\to x_0+0$. Пределы функции $y=f(x)$ слева и справа в точке x_0 символически обозначается как

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = y_0^-, \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = y_0^+, \tag{3.14}$$

Если существует предел функции $y=f(x)$ в точке x_0, то существуют ее левый и правый пределы в этой точке, при этом $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Справедливо и обратное утверждение. Если левый и правый пределы функции $y=f(x)$ в точке x_0 равны, то существует и равный им предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной слева* (*справа*) *в точке* x_0, если левый (правый) предел функции $y=f(x)$ в точке x_0 существует и выполняется равенство $f(x_0-0)=f(x_0)$ (соответственно $f(x_0+0)=f(x_0)$). Очевидно, что функция $y=f(x)$, непрерывная в точке x_0, непрерывна в этой точке и справа, и слева. Обратное не всегда верно.

Точка x_0, в которой функция $y=f(x)$ не является непрерывной, называется *точкой разрыва функции*. Если правый и левый пределы функции $y=f(x)$ существуют в точке x_0, равны друг другу и не равны $f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*. Если правый и левый пределы функции $y=f(x)$ существуют в точке x_0, но не равны друг другу, то точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*. Если в точке x_0 не существует хотя бы одного из односторонних пределов функции $y=f(x)$, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*. Максимальная разность двух из значений $f(x_0)$, $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ действительной функции $y=f(x)$ называется *скачком функции в точке* x_0.

Функция $y=f(x)$ называется *кусочно непрерывной на пространстве* X, если она непрерывна всюду на этом пространстве, за исключением конечного числа точек, в которых функция имеет разрыв первого рода. Монотонная функция может иметь разрывы только первого рода, и множество точек разрыва первого рода монотонной функции не более чем счетно.

П р и м е р 3.4. Знаковая функция $\mathrm{sign}(x)$, равная 1, если $x>0$, 0, если $x=0$, и -1, если $x<0$, и симметричная единичная функция $I(x)$, равная 1, если $x>0$, 1/2, если $x=0$, и 0, если $x<0$, кусочно непрерывны на числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ и имеют разрывы первого рода в точке $x_0=0$. Величина скачка функции $\text{sign}(x)$ в точке $x_0=0$ равна $\text{sign}(x_0+0) - \text{sign}(x_0-0) = 1-(-1) = 2$, а величина скачка функции $I(x)$ равна $I(x_0+0) - I(x_0-0) = 1-0 = 1$. ◘

3.4. Предел и непрерывность функции многих переменных. Понятия предела, непрерывности функций и их свойства обобщаются на функции двух и более переменных. Рассмотрим вначале функцию $v=f(x_1,x_2)$ двух переменных, которая принимает значения на метрическом пространстве (V,d_V) и определена на множестве $U=X_1\times X_2$, где множества X_1 и X_2 суть метрические пространства с расстояниями d_1 и d_2 соответственно. Напомним, что прямое произведение $U=X_1\times X_2$ метрических пространств само, вообще говоря, не является метрическим пространством. Поэтому в нем отсутствует расстояние $d_U(x,y)$, с помощью которого можно было бы измерить близость между точками $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$. Для этой цели воспользуемся понятием δ-окрестности $O_\delta(a)$ точки $a=(a_1,a_2)$, под которой будем понимать множество точек $x=(x_1,x_2)$, одновременно удовлетворяющих условиям $d_1(x_1,a_1)<\delta$ и $d_2(x_2,a_2)<\delta$, где $\delta>0$.

Будем говорить, что функция $v=f(x_1,x_2)$ *имеет предел* v_0 *в точке* $a\in U$, если для любого $\varepsilon>0$ существует δ-окрестность $O_\delta(a)$ точки $a=(a_1,a_2)$ такая, что для всех точек $x\in O_\delta(a)$, исключая, быть может, саму точку a, функция $v=f(x_1,x_2)$ определена в этой окрестности и удовлетворяет неравенству

$$d_V(f(x_1,x_2),\, v_0) < \varepsilon. \tag{3.15}$$

В этом случае говорят также, что функция $v=f(x)$ *стремится к пределу* v_0 *при* $x\to a$, и пишут $f(x)\to v_0$ или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2}} f(x_1,x_2) = v_0. \tag{3.16}$$

Как и для функции одной переменной, если предел v_0 функции $v=f(x_1,x_2)$ существует, то он необходимо единственен. В общем случае предел v_0 функции $v=f(x_1,x_2)$ в точке a может отличаться от значения функции $f(a_1,a_2)$ в этой точке или не существовать по одной, либо по всем переменным. Следующая теорема определяет достаточные условия существования предела v_0 функции $v=f(x_1,x_2)$ в точке a.

Т е о р е м а 3.8. *Если функция* $v=f(x_1,x_2)$ *определена в* δ*-окрестности* $O_\delta(a)$ *точки* $a=(a_1,a_2)$, *по каждой из переменных существуют пределы функций* $\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2)=f(a_1,x_2)=w(x_2)$ *при* $d_2(x_2,a_2)<\delta$, $\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)=f(x_1,a_2)=u(x_1)$ *при* $d_1(x_1,a_1)<\delta$ *и хотя бы одна из функций* $f(a_1,x_2)$ *или* $f(x_1,a_2)$ *равномерно стремится к соответствующему пределу при* $x\to a$, *то существуют и равны друг другу все три предела* $\lim\limits_{x_1\to a_1,\, x_2\to a_2} f(x_1,x_2)$, $\lim\limits_{x_2\to a_2} f(a_1,x_2)$, $\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,a_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для любого $\varepsilon>0$ существует δ-окрестность $O_\delta(a)$ точки $a=(a_1,a_2)$, где, например, функция $u(x_1)=f(x_1,a_2)$ равномерно стремится к пределу v_0 при $x_1\to a_1$, то есть для всех x_1, удовлетворяющих условию $d_1(x_1,a_1)<\delta$, имеем

$$v_0 = \lim_{x_1\to a_1} u(x_1) = \lim_{x_1\to a_1} f(x_1,a_2) = \lim_{x_1\to a_1}\lim_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2) = \lim_{x_1\to a_1,\, x_2\to a_2} f(x_1,x_2).$$

Согласно определению (3.16) это означает, что v_0 является и пределом функции $v=f(x_1,x_2)$ при $x\to a$. Отсюда также следует, что неравенство (3.15) справедливо для всех точек $x\in O_\delta(a)$, а значит, и таких, для которых $x_1=a_1$. Иными словами, для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек x_2, удовлетворяющих условию $d_2(x_2,a_2)<\delta$, выполняется неравенство $d_V(f(a_1,x_2),v_0)<\varepsilon$. Таким образом, v_0 есть предел функции $w(x_2)=f(a_1,x_2)$ при $x_2\to a_2$ и

$$v_0=\lim_{x_2\to a_2} w(x_2)=\lim_{x_2\to a_2} f(a_1,x_2)=\lim_{x_2\to a_2}\,(\lim_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2))=\lim_{x_1\to a_1,\, x_2\to a_2} f(x_1,x_2).$$

В силу существования пределов $\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2)=f(a_1,x_2)$ и $\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)=f(x_1,a_2)$ они единственны, а следовательно, единственен и предел v_0. ■

Отметим следующее обстоятельство. Как известно, последовательность $\{x_n\}$ есть функция $x_n=f(n)$ одного аргумента $n\in\mathbb{N}$ с областью определения X. Двойная последовательность $\{x_{nm}\}$ представляет собой функцию $x_{nm}=f(n,m)$ двух аргументов $n,m\in\mathbb{N}$, которая принимает значения на множестве X. С этой точки зрения определения (1.24), (1.25) пределов одинарной и двойной последовательностей, данные в разделе 1.4, совпадают с определениями (3.01), (3.02), (3.15), (3.16) пределов функций одной и двух переменных.

Функция $v=f(x_1,x_2)$, определенная в δ-окрестности $O_\delta(a)$ точки $a=(a_1,a_2)$, называется *непрерывной в точке* a, если ее предел в точке a существует и равен ее значению в этой точке

$$\lim_{x_1\to a_1,\, x_2\to a_2} f(x_1,x_2)=f(a_1,a_2)=f(\lim_{x_1\to a_1} x_1,\ \lim_{x_2\to a_2} x_2). \tag{3.17}$$

Здесь введено обозначение $\lim\limits_{x_i\to a_i} x_i=a_i$ $(i=1,2)$ для условия $x\to a$.

Функция $v=f(x_1,x_2)$ называется *непрерывной в точке* $a=(a_1,a_2)$ *по переменной* x_1, если функция $u(x_1)=f(x_1,a_2)$ непрерывна в точке $x_1=a_1$. Функция $v=f(x_1,x_2)$, непрерывная в точке $a=(a_1,a_2)$ по каждой из переменных, сама может не быть непрерывной по совокупности всех переменных. Достаточные условия непрерывности функции $v=f(x_1,x_2)$ в точке $a=(a_1,a_2)$ формулируются так.

Т е о р е м а 3.9. *Если функция $v=f(x_1,x_2)$, определенная в δ-окрестности $O_\delta(a)$ точки $a=(a_1,a_2)$, непрерывна по каждой из переменных в точках $x_1=a_1$, $x_2=a_2$ и равномерно непрерывна по крайней мере по одной из переменных, то она непрерывна и в точке a.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Практически полностью совпадает с приведенным в теореме 3.8 и сводится к доказательству существования и равенства каждого из пределов $\lim\limits_{x_1\to a_1,\, x_2\to a_2} f(x_1,x_2)$, $\lim\limits_{x_2\to a_2} f(a_1,x_2)$, $\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,a_2)$ функции $v=f(x_1,x_2)$ ее значению $f(a_1,a_2)$ в точке $a=(a_1,a_2)$. ■

Равносильное (3.17) определение непрерывности функции $v=f(x_1,x_2)$ в точке $a=(a_1,a_2)$ можно дать с помощью понятия сходимости последовательности. Полагая, что последовательности аргументов $\{x_{n1}\}$ и $\{x_{n2}\}$ функции $v=f(x_1,x_2)$ сходятся при $n\to\infty$ соответственно к пределу a_1 по метрике d_1 и к пределу a_2 по метрике d_2, условие (3.17) непрерывности функции двух переменных можно записать в виде, совпадающем с соотношением (1.30) для функции одной переменной:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n1},x_{n2}) = f(a_1,a_2) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n1}, \lim_{n\to\infty} x_{n2}). \tag{3.18}$$

Как и в случае функции одной переменной, из соотношений (3.17), (3.18) вытекает возможность перестановки символов функции и предела для непрерывных функций двух переменных.

Напомним, что прямое произведение $U=X_1\times X_2$ двух метрических пространств (X_1,d_1) и (X_2,d_2), на котором определена функция $v=f(x_1,x_2)$, в общем случае не является метрическим пространством. Однако, как показано в разделе 1.3, множество $U=X_1\times X_2$ можно метризовать, если ввести на множестве U расстояние $d_U(x,a)$ между точками $x=(x_1,x_2)$ и $a=(a_1,a_2)$ по одной из формул (1.21)-(1.23). Тогда функцию двух переменных $v=f(x_1,x_2)$ можно считать функцией $v=f(x)$ от точки x и определять для нее понятия предела и непрерывности так же, как для функции одной переменной. Так, на языке «δ-ε» непрерывность функции $v=f(x)$ в точке a означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек $x\in U$, удовлетворяющих условию $d_U(x,a)<\delta$, выполняется неравенство

$$d_V(f(x), f(a))=d_V(f(x_1,x_2), f(a_1,a_2))<\varepsilon. \tag{3.19}$$

Это определение непрерывности функции $v=f(x_1,x_2)$ равносильно предыдущим.

Очевидно, что δ-окрестность $O_\delta(a)$ точки $a=(a_1,a_2)$, которая на множестве $U=X_1\times X_2$ определяется двумя условиями $d_1(x_1,a_1)<\delta$ и $d_2(x_2,a_2)<\delta$, в метрическом пространстве $U=X_1\times X_2$ может быть определена одним равносильным условием. Это условие с учетом гомеоморфизма метрик $d_{U\infty}$, d_{U1} и d_{U2}, заданных выражениями (1.21)-(1.23), имеет вид $d_{Uk}(x,a)<c_k\delta$, где $c_\infty=1$, $c_1=2$ и $c_2=\sqrt{2}$.

Аналогично случаю одной переменной будем говорить, что функция $v=f(x_1,x_2)$ *непрерывна на пространстве* $U=X_1\times X_2$, если она непрерывна в каждой точке $x=(x_1,x_2)$ множества U, и *равномерно непрерывна на метрическом пространстве* $U=X_1\times X_2$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех пар точек $x,y\in U$, удовлетворяющих условию $d_U(x,y)<\delta$, выполняется неравенство

$$d_V(f(x), f(y)) = d_V(f(x_1,x_2), f(y_1,y_2)) < \varepsilon. \tag{3.20}$$

Подобным же образом определяются понятия предела и непрерывности в случае функции многих переменных. Сформулируем эти условия применительно к сложной функции вида $z=h(x_1,...,x_n)=g(f_1(x_1,...,x_n),...,f_k(x_1,...,x_n))$. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f_j(x)=b_j$, где $x=(x_1,...,x_n)$, $a=(a_1,...,a_n)$, $j=1,...,k$, и функция $g(y_1,...,y_k)$, где $y_j=f_j(x)$, непрерывна в точке $b=(b_1,...,b_k)$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} g(f_1(x),...,f_k(x))=g(b)$. Если, кроме того, каждая из функций $y_j=f_j(x)$ непрерывна в точке $a=(a_1,...,a_n)$, то и сложная функция $z=h(x)=g(f_1(x),...,f_k(x))$ непрерывна в точке a и $\lim\limits_{x\to a} h(x)=h(a)=g(f_1(a),...,f_k(a))$. Непрерывность функций многих переменных вида (3.08) устанавливается аналогично.

З а м е ч а н и е. Всякая непрерывная функция n переменных может быть представлена как суперпозиция непрерывных функций двух переменных (теорема Колмогорова-Арнольда, доказавшая решение 13 проблемы Гильберта). □

Когда области определения и значений функции являются множествами действительных чисел $\mathbb{R}$, введенные выше определения пределов и непрерывности функций совпадают с принятыми в математическом анализе.

Исследуем теперь более детально свойства самой метрики $d_X(x_1,x_2)$, рассматривая ее как функцию двух переменных, которая определена на метрическом пространстве $U=(X\times X,\ d_U)$, где X также метрическое пространство, и принимает значения на множестве неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_+$. Сравнение выражений (1.30) и (3.18) показывает, что метрика $d_X(x_1,x_2)$, заданная на множестве $U=X\times X$, является непрерывной функцией $w_i=f_i(x)$ по каждой из переменных x_1 и x_2 в точках $x_1=a_1$ и $x_2=a_2$ метрического пространства (X,d_X) и непрерывной функцией $v=f(x_1,x_2)$ двух переменных в соответствующей точке $a=(a_1,a_2)$ метрического пространства (U,d_U). Более того, справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а 3.10. *Метрика $v=d_X(x_1,x_2)$, непрерывная по каждой из переменных на метрическом пространстве X, непрерывна и на метрическом пространстве $U=(X\times X,\ d_U)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть метрика $v=d_X(x_1,x_2)$ непрерывна в некоторой точке $a=(a_1,a_2)\in U=X\times X$ по каждой из переменных x_1 и x_2, но не непрерывна по обеим переменным. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется δ-окрестность $O_\delta(a)$ точки a такая, что в ней существуют пределы $\lim\limits_{x_1\to a_1} d_X(x_1,a_2)$ при $d_X(x_2,a_2)<\delta$ и $\lim\limits_{x_2\to a_2} d_X(a_1,x_2)$ при $d_X(x_1,a_1)<\delta$, но условие (3.19) не выполняется, то есть

$$d_{\mathbb{R}}(d_X(x_1,x_2),\ d_X(a_1,a_2)) = |d_X(x_1,x_2)-d_X(a_1,a_2)| \geq \varepsilon.$$

В то же время, принимая во внимание неравенство четырехугольника (1.14), имеем

$$|d_X(x_1,x_2)-d_X(a_1,a_2)| \leq d_X(x_1,a_1)+d_X(x_2,a_2) < 2\delta\,.$$

Полагая $2\delta=\varepsilon$, получаем противоречие со сделанным допущением. ■

З а м е ч а н и е. В отличие от теоремы 3.9 для непрерывности метрики $d_X(x_1,x_2)$, заданной на прямом произведении $U=X\times X$ метрического пространства, не требуется ее равномерной непрерывности хотя бы по одной переменной. □

Т е о р е м а 3.11. *Метрика $v=d_X(x_1,x_2)$, равномерно непрерывная по каждой из переменных на метрическом пространстве X, равномерно непрерывна и на метрическом пространстве $U=(X\times X,\ d_U)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяет доказательство предыдущей теоремы применительно ко всем произвольным парам точек $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$ метрического пространства $U=(X\times X,\ d_U)$ и неравенству (3.20). ■

В частности, из теоремы 3.11, выражения (1.05) для метрики Евклида $d_{E2}(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ и непрерывности функций двух переменных $v_i=(x_i-y_i)^2$ вытекает

С л е д с т в и е 3.11.А. *Метрика Евклида d_{E2} является равномерно непрерывной функцией на числовой плоскости $E^2=(\mathbb{R}^2,d_{E2})$.*

Справедливо и более общее утверждение.

Т е о р е м а 3.12. *Метрика $v=d_X(x_1,x_2)$ равномерно непрерывна на метрическом пространстве $U=(X\times X,\ d_U)$ тогда и только тогда, когда она непрерывна на этом пространстве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть метрика $v=d_X(x_1,x_2)$ непрерывна на метрическом пространстве $U=(X\times X,\ d_U)$, но не равномерно непрерывна на нем. Тогда для любого числа $\delta>0$ в пространстве U найдутся точки $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$ такие, что $d_X(x,y)<\delta$, но условие (3.20) при некотором $\varepsilon>0$ не выполняется

$$d_{\mathbb{R}}(d_X(x_1,x_2),\ d_X(y_1,y_2)) = |d_X(x_1,x_2)-d_X(y_1,y_2)| \geq \varepsilon.$$

С другой стороны, принимая во внимание неравенство четырехугольника (1.14), имеем

$$|d_X(x_1,x_2)-d_X(y_1,y_2)| \leq d_X(x_1,y_1)+d_X(x_2,y_2) = d_X(x_1,y_1)+d_X(x_2,y_2) < 2\delta\,.$$

Полагая $2\delta=\varepsilon$, получаем противоречие со сделанным допущением.

Необходимость условий теоремы доказана. А их достаточность следует из непрерывности любой равномерно непрерывной функции. ■

З а м е ч а н и е. Теорема 3.12 напоминает теорему 3.3 для замкнутого ограниченного пространства и теорему 3.6 для компактного пространства, однако не требует наличия этих свойств у метрического пространства $U=X\times X$. □

3.5. Сходимость и предел последовательности функций. Рассмотрим последовательность функций $\{y_n\}$, $y_n=f_n(x)$, $n=1,2,...$, заданных на произвольном множестве X и принимающих значения на метрическом пространстве (Y,d_Y). Сходимость последовательности функций $\{y_n\}$ в пространстве (Y,d_Y) определяется аналогично сходимости последовательности $\{x_n\}$ элементов множества в пространстве (X,d_X).

Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,...$ *имеет предел $f_0(x)$ в точке x множества X*, если для любого $\varepsilon>0$ существует зависящее от x натуральное число $N=N(x)$ такое, что для всех номеров $n>N$ расстояние между значениями функций $f_n(x)$ и $f_0(x)$ в точке x удовлетворяет неравенству

$$d_Y(f_n(x), f_0(x)) < \varepsilon. \tag{3.21}$$

В этом случае говорят также, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ *сходится к пределу $f_0(x)$ в точке x при $n\to\infty$*, и пишут $f_n(x)\to f_0(x)$ или

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x). \tag{3.22}$$

Условие (3.22) сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к пределу $f_0(x)$ при $n\to\infty$, очевидно, равносильно условию сходимости последовательности расстояний $\{d_Y(f_n(x), f_0(x))\}$ к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} d_Y(f_n(x), f_0(x)) = 0. \tag{3.23}$$

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется *сходящейся в себе* или *фундаментальной последовательностью,* если для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ расстояние между точками x_n и x_l удовлетворяет неравенству

$$d_Y(f_n(x), f_l(x)) < \varepsilon, \tag{3.24}$$

которое равносильно условию $d_Y(f_n(x), f_l(x)) \to 0$ при $n,l \to \infty$ или

$$\lim_{n,l\to\infty} d_Y(f_n(x), f_l(x)) = 0. \tag{3.25}$$

Последовательности функций $\{f_n(x)\}$ обладают такими же свойствами, как и последовательности элементов множества $\{x_n\}$. В частности, последовательность функций $\{f_n(x)\}$ будем называть *возрастающей* или *неубывающей* и обозначать как $f_n(x)\uparrow$, если для любого $x\in X$ выполняется неравенство $f_n(x)<f_m(x)$ или $f_n(x)\le f_m(x)$ при $n<m$, и соответственно *убывающей* или *невозрастающей* и обозначать как $f_n(x)\downarrow$, если $f_n(x)>f_m(x)$ или $f_n(x)\ge f_m(x)$ при $n<m$. Сходимость таких последовательностей функций $\{f_n(x)\}$ к пределу $f_0(x)$ при $n\to\infty$ будем записывать символически как $f_n(x)\uparrow f_0(x)$ или $f_n(x)\downarrow f_0(x)$.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся на множестве X к пределу $f_0(x)$*, если неравенство (3.21) выполняется в каждой точке x множества X и число $N(x)$ не зависит от x. Условие равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к пределу $f_0(x)$ равносильно требованию

$$\sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f_0(x)) < \varepsilon \tag{3.26}$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f_0(x)) = 0. \tag{3.27}$$

П р и м е р 3.5. Любая стационарная последовательность постоянных функций $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=y_0$, $n=1,2,\ldots$, y_0 – фиксированная точка пространства Y, является последовательностью, равномерно сходящейся на множестве X к пределу y_0. ◘

Для равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ необходимы и достаточны следующие условия.

Т е о р е м а 3.13. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,...$, определенных на множестве X и принимающих значения на полном метрическом пространстве (Y,d_Y), равномерно сходится на множестве X тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ выполняется неравенство*

$$\sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f_l(x)) < \varepsilon \tag{3.28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции $f_0(x)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ и всех точек $x\in X$ справедливы неравенства $d_Y(f_n(x), f_0(x))<\varepsilon$ и $d_Y(f_l(x), f_0(x))<\varepsilon$. Отсюда по неравенству треугольника (1.03) имеем

$$d_Y(f_n(x), f_l(x)) \le d_Y(f_n(x), f_0(x)) + d_Y(f_n(x), f_0(x)) < 2\varepsilon$$

для любых точек $x\in X$, и следовательно, выполняется неравенство (3.28). Необходимость условия доказана.

2°. Пусть теперь неравенство (3.28) выполняется в некоторой точке x_0 множестве X. Согласно определению (1.28) это означает, что последовательность элементов $\{f_n(x_0)\}$ фундаментальна. В силу полноты пространства Y любая фундаментальная последовательность сходится на нем к пределу $\lim\limits_{l\to\infty} f_l(x_0)=f_0(x_0)$, являющемуся элементом этого же пространства. Так как точка $x_0\in X$ выбрана произвольно, то предел $\lim\limits_{l\to\infty} f_l(x)=f_0(x)$ существует для всех точек $x\in X$. Переходя в неравенстве (3.28) к пределу при $l\to\infty$ и фиксированном номере n, получаем с учетом свойства (1.30) условие (3.26)

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{x\in X} d_Y(f_n(x),f_l(x)) = \sup_{x\in X} d_Y(f_n(x),f_0(x)) < \varepsilon.$$

Достаточность условия (3.28) и теорема в целом доказаны. ■

Условия равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ можно сформулировать и иначе. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к пределу $f_0(x)$ в том и только том случае, если имеется такая числовая последовательность $\{b_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ и существует такой номер N, начиная с которого для всех номеров $n>N$ и всех точек $x\in X$ выполняется неравенство $d_Y(f_n(x),f_0(x))\le b_n$.

П р и м е р 3.6. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=x^n$, $n=1,2,\ldots$, равномерно сходится к пределу $f_0(x)=0$ на открытом интервале (0,1) числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ по метрике $d_{E1}=|x-y|$ и не сходится равномерно на замкнутом интервале $[0,1]=\mathbb{R}_{01}$, поскольку $f_0(1)=1$. ◘

Предел сходящейся (но не равномерно) последовательности непрерывных функций не обязательно является непрерывной функцией. Однако при равномерном предельном переходе непрерывные функции остаются непрерывными.

Т е о р е м а 3.14. *Предел $f_0(x)$ равномерно сходящейся на пространстве X последовательности $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,\ldots$ непрерывных функций есть функция, непрерывная на этом пространстве, причем*

$$\lim_{x\to x_0} f_0(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f_0(x_0). \qquad (3.29)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условию (3.26) равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ на множестве X к пределу $f_0(x)$ для любого $\varepsilon>0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n\ge N$ и всех точек $x\in X$ выполняется неравенство $d_Y(f_n(x),f_0(x))<\varepsilon$, в том числе справедливы неравенства $d_Y(f_N(x), f_0(x))<\varepsilon$ и $d_Y(f_N(x_0), f_0(x_0))<\varepsilon$. Так как функция $f_N(x)$ непрерывна в точке x_0, то для $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек $x\in X$, удовлетворяющих условию $d_X(x, x_0)<\delta$, выполняется неравенство $d_Y(f_N(x), f_N(x_0))<\varepsilon$. Тогда по неравенству треугольника (1.03) имеем

$$d_Y(f_0(x),f_0(x_0)) \le d_Y(f_0(x),f_N(x)) + d_Y(f_N(x),f_N(x_0)) + d_Y(f_N(x_0),f_0(x_0)) < 3\varepsilon,$$

что и означает непрерывность функции $f_0(x)$ в точке x_0, а в силу ее произвольности и на всем пространстве X. ■

Из теоремы 3.14 вытекает

С л е д с т в и е 3.14.А. *Предел $f_0(x)$ равномерно сходящейся на множестве X последовательности $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,\ldots$ функций, равномерно непрерывных* *на пространстве X, есть функция, равномерно непрерывная на этом пространстве.*

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной*, если существуют число $c_f>0$, зависящее, вообще говоря, от функции f, и некоторая фиксированная точка y_0 пространства Y такие, что для любой точки $x\in X$ выполняется неравенство

$$d_Y(f(x), y_0) \le c_f, \qquad (3.30)$$

и *равномерно ограниченной*, если существует такое не зависящее от f число $c>0$, что неравенство (3.30) одновременно выполняется для всех $x\in X$ и всех функций $y=f(x)$ из некоторого семейства. Семейство M ограниченных функций можно превратить в метрическое пространство, определив метрику как

$$d_M(f(x), g(x)) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Из определений (3.26) и (3.30) следует, что последовательность $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,...$ ограниченных функций, равномерно сходящихся на множестве X, сходится и на пространстве (M,d_M).

Нетрудно проверить, что если пространство (Y,d_Y) полное, то и (M,d_M) также полное пространство [ЛС65]. Из теоремы 3.14 следует, что семейства непрерывных и равномерно непрерывных на пространстве X функций содержат свои предельные точки. Поэтому они являются замкнутыми множествами в метрическом пространстве (M,d_M) ограниченных функций.

3.6. Сходимость и предел последовательности множеств. Рассмотрим теперь особенности сходимости функций, областью значений которых являются семейства множеств. Ограничим наше рассмотрение только одним, но крайне важным видом отображений, а именно, последовательностью множеств.

По аналогии с последовательностью $\{x_n\}$ элементов множества X будем называть *последовательностью множеств* $\{A_n\}$, $n=1,2,\ldots$ функцию g, задающую отображение $g\colon \mathbb{N}\to\mathcal{A}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на некоторое семейство множеств $\mathcal{A}$. В качестве такого семейства $\mathcal{A}$ обычно берется σ-кольцо $\mathcal{K}_\sigma$ или σ-алгебра $\mathcal{S}$ множеств.

В традиционном определении (1.25) предела x_0 сходящейся последовательности точек $\{x_n\}$ предполагается, что $\{x_n\}$ является функцией, заданной на метрическом пространстве натуральных чисел $N^1=(\mathbb{N},d_{E1})$ и принимающей значения на метрическом пространстве (X,d). Поэтому условие сходимости последовательности $x_n\to x_0$ равносильно условию сходимости расстояния $d(x_n,x_0)\to 0$ при $n\to\infty$. В отличие от этого последовательность множеств $\{A_n\}$ есть функция, которая задана на метрическом пространстве натуральных чисел $N^1=(\mathbb{N},d_{E1})$ и принимает значения на семействе множеств $\mathcal{A}$, не являющемся в общем случае метрическим пространством. Введем определение сходимости последовательности множеств к пределу, не прибегая к понятию метрики, подобно тому, как определяется непрерывность отображения пространств.

Будем говорить, что последовательность множеств $\{A_n\}$ *сходится к пределу A при $n\to\infty$*, если множество A существует и найдется натуральное число N такое, что для всех номеров $n>N$ каждый элемент x множества A принадлежит всем множествам A_n, а каждый элемент x объединения множеств $\bigcup_{n>N} A_n$, не принадлежащий множеству A, содержится лишь в конечном числе множеств A_n. Сходимость последовательности множеств $\{A_n\}$ к пределу A будем записывать символически как $A_n \to A$ или

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A. \tag{3.31}$$

Нижним пределом последовательности множеств $\{A_n\}$ называется множество

$$\underline{A} = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{s=0}^{\infty} A_{n+s}\,, \tag{3.32}$$

состоящее из элементов $x \in A$, которые принадлежат почти всем множествам A_n, за исключением конечного числа множеств A_n. *Верхним пределом последовательности множеств* $\{A_n\}$ называется множество

$$\overline{A} = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{s=0}^{\infty} A_{n+s}\,, \tag{3.33}$$

состоящее из элементов $x \in A$, которые принадлежат бесконечному числу множеств A_n. Очевидно, что всегда выполняется условие $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$. Множество A является пределом последовательности $\{A_n\}$, когда нижний $\underline{A}$ и верхний $\overline{A}$ пределы последовательности совпадают, и $A = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$ [КМ67].

З а м е ч а н и е. Мы используем одно и то же обозначение $\overline{A}$ и для верхнего предела последовательности $\{A_n\}$, и для дополнения множества A, что обычно понятно из контекста и не должно приводить к недоразумениям. □

В общем случае из сходимости последовательности множеств $\{A_n\}$ к пределу A не следует, что числовая последовательность $\{|A_n|\}$, состоящая из мощностей множеств A_n, также должна сходится к какому-нибудь пределу, в частности, к мощности $|A|$ множества A. Будем говорить, что последовательность множеств $\{A_n\}$ *абсолютно сходится к пределу A при* $n \to \infty$, если предел A существует и, кроме того, выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} |A_n| = |A| = |\lim_{n\to\infty} A_n|. \tag{3.34}$$

Всякая абсолютно сходящаяся последовательность множеств $\{A_n\}$ сходится. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Определение (3.31) сходимости последовательности множеств $\{A_n\}$ к пределу A не связано впрямую со сходимостью расстояния между множествами. Вместе с тем и для множеств можно дать определение сходимости, похожее на определение сходимости для последовательности точек $\{x_n\}$, если симметрическую разность множеств взять в качестве своеобразного аналога расстояния. Последовательность множеств $\{A_n\}$ назовем *сходящейся к пределу A при* $n \to \infty$, если множество A существует и выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} (A_n \Delta A) = \varnothing, \tag{3.35}$$

и *абсолютно сходящейся к пределу A при* $n \to \infty$, если дополнительно

$$\lim_{n\to\infty} |A_n \Delta A| = 0. \tag{3.36}$$

Ввести такие определения позволяет следующее утверждение [KM67].

Т е о р е м а 3.15. *Определения* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n \Delta A) = \varnothing$ *сходимости последовательности множеств* $\{A_n\}$ *к пределу* A *равносильны*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть предел (3.35) существует. Тогда, в силу свойства идентичности симметрической разности множеств $A\Delta B=\varnothing$ при $A=B$, для каждого элемента x при $n>N$ условия $x\in A_n$ и $x\in A$ будут равносильны. А значит, согласно определению (3.32) $x\in \underline{\lim} A_n$. Если элемент $x\in \overline{\lim} A_n$, то $x\in A_n$ для всех значений n. Поэтому при $n>N$ будет выполняться включение $\overline{\lim} A_n \subseteq A \subseteq \underline{\lim} A_n$. Поскольку условие $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$ выполняется всегда, то следовательно, имеем $\underline{\lim} A_n = A = \overline{\lim} A_n$, и определение (3.31) справедливо.

2°. Пусть теперь существует предел (3.31), а следовательно, имеет место соотношение $\overline{\lim} A_n \subseteq A \subseteq \underline{\lim} A_n$. Если элемент $x\in A$, то $x\in \underline{\lim} A_n$, и тогда $x\in A_n$ при $n>N$. Если элемент $x\notin A$, то $x\notin \overline{\lim} A_n$, и тогда $x\notin A_n$ при $n>N$. Таким образом, при $n>N$ условия $x\in A_n$ и $x\in A$ равносильны, и справедливо определение (3.35). ■

Из теоремы 3.15 следует, что определение (3.35) сходимости последовательности множеств $\{A_n\}$ к пределу A при $n\to\infty$ можно записать также в таком эквивалентном виде

$$(\lim_{n\to\infty} A_n)\Delta A = \lim_{n\to\infty}(A_n \Delta(\lim_{n\to\infty} A_n)) = \varnothing. \qquad (3.37)$$

Из определений (3.31)-(3.37) пределов последовательности множеств вытекает следующее соотношение: $(\underline{\lim} A_n)\Delta A \subseteq (\overline{\lim} A_n)\Delta A \subseteq \overline{\lim}(A_n \Delta A)$ [KM67]. Обратные включения в общем случае неверны.

Таким образом, симметрическая разность $A\Delta B$ двух множеств может быть условно принята за некую эрзац-псевдометрику, а ее мощность $|A\Delta B|$ можно считать псевдометрикой на семействе множеств $\mathcal{A}$. Действительно, симметрическая разность множеств имеет свойства, напоминающие свойства псевдометрики d_X. А именно: симметрическая разность множеств коммутативна $A\Delta B = B\Delta A$ и идентична $A\Delta A=\varnothing$, что похоже на такие свойства псевдометрики как симметрия (1.01) $d_X(x,y)=d_X(y,x)$ и совпадение (1.34) $d_X(x,x)=0$. Для произвольных множеств выполняется включение

$$A\Delta B \subseteq (A\Delta C)\bigcup(B\Delta C), \qquad (3.38)$$

играющее роль неравенства треугольника (1.03). Убедимся в этом. Пусть точка $x\in A\Delta B$. По определению симметрической разности множеств либо $x\in A$ и $x\notin B$, либо $x\notin A$ и $x\in B$. Допустим, что $x\in A$ и $x\notin B$. Если, кроме того, $x\in C$, то $x\in B\Delta C$; если $x\notin C$, то $x\in A\Delta C$. Пусть теперь $x\notin A$ и $x\in B$. Если $x\in C$, то $x\in A\Delta C$; если $x\notin C$, то $x\in B\Delta C$. Итак, точка x принадлежит хотя бы одному из множеств $A\Delta C$ или $B\Delta C$, то есть по определению объединения множеств $x\in(A\Delta C)\bigcup(B\Delta C)$.

В свою очередь, мощность симметрической разности множеств обладает всеми присущими псевдометрике свойствами: она является неотрицательной действительной функцией $|A\Delta B|\geq 0$, причем из $A=B$ следует $|A\Delta A|=0$, она симметрична $|A\Delta B|=|B\Delta A|$, она удовлетворяет неравенству треугольника (1.03) в силу условия (3.38) и известного правила подсчета мощностей множеств

$|A\bigcup B|+|A\bigcap B|=|A|+|B|$. В дальнейшем будет показано, что понятие сходимости последовательности множеств может быть задано и на метрических пространствах множеств, где метрики выражаются разными функциями симметрической разности множеств, удовлетворяющими аксиоматике (1.01)-(1.03).

Всякое множество $A\subseteq X$ может быть представлено своей характеристической функцией $\chi_A(x)$, $x\in X$, которая принимает значения 0 и 1 на метрическом подпространстве числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$ с метрикой $d_{E1}(x,y)=|x-y|$. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.16. *Последовательность множеств $\{A_n\}$, являющихся подмножествами множества X, сходится при $n\to\infty$ к пределу A тогда и только тогда, когда последовательность $\{\chi_{A_n}(x)\}$ характеристических функций множеств A_n сходится к характеристической функции $\chi_A(x)$ множества A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть последовательность множеств $\{A_n\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу A. Согласно определению (3.31) предела последовательности множеств существует число N такое, что для всех номеров $n>N$ каждый элемент $x\in A$ принадлежит всем множествам A_n. Из соотношения (3.35) для таких номеров n и элементов x имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n\Delta A}(x)=0$. Учитывая определение характеристической функции симметрической разности множеств и определение предела последовательности функций, получаем искомое условие (3.23) сходимости последовательности функций $\{\chi_{A_n}(x)\}$ к пределу $\chi_A(x)$ при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n\Delta A}(x)=\lim_{n\to\infty}|\chi_{A_n}(x)-\chi_A(x)|=\lim_{n\to\infty}d_{E1}(\chi_{A_n}(x),\chi_A(x))=0.$$

2°. Пусть теперь последовательность $\{\chi_{A_n}(x)\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу $\chi_A(x)$ в точке $x\in X$. Согласно определению (3.23) предела последовательности функций существует число $N(x)$ такое, что для всех номеров $n>N(x)$ в каждой точке $x\in X$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}d_{E1}(\chi_{A_n}(x),\chi_A(x))=\lim_{n\to\infty}|\chi_{A_n}(x)-\chi_A(x)|=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n\Delta A}(x)=0.$$

Возьмем такие элементы x и числа $N(x)$, чтобы при $n>N(x)$ элемент $x\in A$ принадлежал всем множествам A_n, а элемент $x\notin A$ содержался лишь в конечном числе множеств A_n. Полагая для таких элементов x число $N=\max\limits_{x\in A}N(x)$ и $\chi_{A_n}(x)=\chi_A(x)$ для всех номеров $n>N$, получаем искомое условие (3.35) сходимости последовательности множеств A_n к пределу A при $n\to\infty$. ■

Как известно, мощность любого множества выражается суммой его характеристических функций $|A|=\Sigma_{x\in X}\chi_A(x)$. В таком случае имеем

С л е д с т в и е 3.16.А. *Последовательность множеств $\{A_n\}$, являющихся подмножествами множества X, абсолютно сходится при $n\to\infty$ к пределу A тогда и только тогда, когда ряд $\Sigma_{x\in X}\chi_{A_n}(x)$ сходится к пределу $\Sigma_{x\in X}\chi_A(x)$.*

Последовательности множеств $\{A_n\}$ обладают многими свойствами, аналогичными свойствам последовательностей элементов множеств $\{x_n\}$. Так, назовем *стационарной* такую последовательность множеств $\{A_n\}$, члены которой удовлетворяют условию $A_n=A$ для всех $n=1,2,\ldots$ Очевидно, что все члены стационарной последовательности множеств имеют одну и ту же мощность $|A_n|=|A|$. Из определений пределов (3.35), (3.36) и теоремы 3.15 вытекает, что всякая стационарная последовательность множеств $\{A_n\}$ сходится и абсолютно сходится к пределу $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$.

Последовательность множеств $\{A_n\}$ будем называть *возрастающей* (*неубывающей*), если ее члены удовлетворяют условию

$$A_i\subset A_{i+1}\ (A_i\subseteq A_{i+1}), \tag{3.39}$$

и *убывающей* (*невозрастающей*), если выполняется условие

$$A_i\supset A_{i+1}\ (A_i\supseteq A_{i+1}), \tag{3.40}$$

что символически обозначим как $A_n\uparrow$ и $A_n\downarrow$. Возрастающая и убывающая последовательности называются *строго монотонными,* а невозрастающая и неубывающая – *монотонными* последовательностями. Очевидно, что всякая монотонная последовательность множеств $\{A_n\}$ может также рассматриваться как семейство множеств $\mathcal{A}$, линейно упорядоченное отношением включения $\subseteq$ или строгого включения $\subset$. Для строго монотонных последовательностей множеств выполняются следующие утверждения.

Т е о р е м а 3.17. *Предел возрастающей последовательности множеств $A_1\subset\ldots\subset A_n\subset\ldots$ равен объединению членов последовательности A_n*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,. \tag{3.41}$$

Предел убывающей последовательности множеств $A_1\supset\ldots\supset A_n\supset\ldots$ равен пересечению членов последовательности A_n

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\,. \tag{3.42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (3.41) вытекает непосредственно из определения (3.31) предела последовательности множеств. Пусть теперь имеется убывающая последовательность множеств $A_1\supset\ldots\supset A_n\supset\ldots$ Перейдем к дополнениям множеств A_n до множества A_1 и положим $B^0=A_1\backslash A_0$, $B_n=A_1\backslash A_n$. Тогда последовательность множеств $B_1\subset\ldots\subset B_n\subset\ldots$ возрастает и согласно формуле (3.41) ее предел $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=B^0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ или $A_1\backslash A_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_1\setminus A_n)$ Отсюда, учитывая условия двойственности (законы де Моргана) для объединения и пересечения множеств, получаем формулу (3.42). ■

Воспользовавшись соотношением $A_1\cup A_2=A_1\cup(A_2\backslash A_1)=A_2\cup(A_1\backslash A_2)$, формулы (3.41) и (3.42) можно представить в виде следующих объединений попарно не пересекающихся (дизъюнктных) множеств:

$$A^0 = A_1\cup(A_2\backslash A_1)\cup\ldots\cup(A_n\backslash A_{n-1})\cup\ldots= A_1\cup[\,\bigcup_{k=2}^{\infty}(A_k\setminus A_{k-1})\,], \tag{3.43}$$

$$A_1 = A_0\cup(A_1\backslash A_2)\cup\ldots\cup(A_{n-1}\backslash A_n)\cup\ldots= A_0\cup[\,\bigcup_{k=2}^{\infty}(A_{k-1}\setminus A_k)\,]. \tag{3.44}$$

Сходимость монотонно возрастающей и убывающей последовательностей множеств $\{A_n\}$ к пределам A^0 и A_0 будем символически записывать соответственно как $A_n \uparrow A^0$ и $A_n \downarrow A_0$ при $n \to \infty$. Напомним, что каждый элемент $x \in A^0$ принадлежит по крайней мере одному из множеств A_n.

Мощности членов A_n монотонных последовательностей множеств образуют числовые последовательности $\{|A_n|\}$, которые сами могут не быть монотонными и даже сходящимися последовательностями. Для абсолютно сходящихся монотонных последовательностей множеств $\{A_n\}$ при $i<j$ справедливы соответственно следующие строгие и нестрогие неравенства:

$$|A_i|<|A_j| \; (|A_i|\leq|A_j|) \quad \text{и} \quad |A_i|>|A_j| \; (|A_i|\geq|A_j|)|).$$

П р и м е р 3.7. Последовательность множеств $\{A_n\}$, где $A_n=\{x \mid x\geq n, x,n\in\mathbb{N}\}=\{n, n+1, n+2,...\}$, $n=1,2,\ldots$, является убывающей последовательностью, сходящейся согласно формуле (3.42) к пределу $A_0=\varnothing$. Каждый член A_n этой последовательности есть множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, и значит, $|A_n|=\aleph_0$ для любого $n=1,2,\ldots$Поэтому числовая последовательность $\{|A_n|\}$ мощностей множеств A_n стационарна. Сама же последовательность множеств $\{A_n\}$ не сходится абсолютно к пределу $A_0=\varnothing$, поскольку условие (3.34) не выполняется. ◘

3.7. Сходимость и предел последовательности мультимножеств. Обобщим понятия сходимости и предела последовательности множеств на мультимножества. Функция g, задающая отображение g: $\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на семейство мультимножеств $\mathcal{A}$, называется *последовательностью мультимножеств* $\{\boldsymbol{A}_n\}$, где $\boldsymbol{A}_n=\{k_{A_n}(x)\bullet x\}$, $x\in G$, $n=1,2,\ldots$ В качестве семейства $\mathcal{A}$ возьмем σ-кольцо $\mathcal{K}_\sigma$ или σ-алгебру $\mathcal{S}$ мультимножеств.

Семейство мультимножеств, порожденных доменом $G=\{x_1,x_2,\ldots\}$, назовем *кольцом* $\mathcal{K}$, если оно содержит сумму, разность и объединение своих мультимножеств $\boldsymbol{A}_n\in\mathcal{K}$, *$\sigma$-кольцом* $\mathcal{K}_\sigma$, если, кроме того, оно содержит счетное объединение $\bigcup_n \boldsymbol{A}_n$ и счетную сумму $\Sigma_n \boldsymbol{A}_n$ мультимножеств, и *σ-алгеброй* $\mathcal{S}$, если оно есть σ-кольцо и содержит наибольшее мультимножество этого семейства $\boldsymbol{Z}=\{k_Z(x_1)\bullet x_1, k_Z(x_2)\bullet x_2,\ldots\}$, называемое *единицей алгебры*. В частности, семейство $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z})$ подмультимножеств какого-либо мультимножества $\boldsymbol{Z}$ есть минимальная алгебра над мультимножеством $\boldsymbol{Z}$. В роли максимального мультимножества (универсума) $\boldsymbol{Z}$ может выступать, например, постоянное мультимножество $\boldsymbol{Z}_{[k]}=\{k\bullet x_1, k\bullet x_2,\ldots\}$ или n-мерное мультимножество $\boldsymbol{X}=\{k_X(x_1)\bullet x_1,\ldots,k_X(x_n)\bullet x_n\}$.

Будем говорить, что последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *сходится к пределу $\boldsymbol{A}$ при $n\to\infty$*, если мультимножество $\boldsymbol{A}=\{k_A(x)\bullet x\}$, $x\in G$ существует и найдется натуральное число N такое, что для всех номеров $n>N$ каждый элемент x мультимножества $\boldsymbol{A}$ принадлежит всем мультимножествам $\boldsymbol{A}_n$ и содержится в них в количестве не менее $k_A(x)$ экземпляров, а каждый элемент x объединения мультимножеств $\bigcup_{n>N} \boldsymbol{A}_n$, не принадлежащий мультимножеству $\boldsymbol{A}$, содержится лишь в конечном числе мультимножеств $\boldsymbol{A}_n$ и в каждом из них лишь в конечном числе экземпляров. Сходимость последовательности мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ к пределу $\boldsymbol{A}$ будем записывать символически как $\boldsymbol{A}_n \to \boldsymbol{A}$ или

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}. \tag{3.45}$$

Нижним пределом последовательности мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ будем называть мультимножество

$$\underline{\boldsymbol{A}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_{n+s}, \tag{3.46}$$

состоящее из элементов $x \in \boldsymbol{A}$, которые с кратностью не меньше, чем $k_A(x)$, принадлежат почти всем мультимножествам $\boldsymbol{A}_n$, за исключением конечного числа мультимножеств $\boldsymbol{A}_n$. *Верхним пределом последовательности мультимножеств* $\{\boldsymbol{A}_n\}$ будем называть мультимножество

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \boldsymbol{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_{n+s}, \tag{3.47}$$

состоящее из элементов $x \in \boldsymbol{A}$, которые с кратностью не меньше, чем $k_A(x)$, принадлежат бесконечному числу мультимножеств $\boldsymbol{A}_n$. Очевидно, что всегда выполняется условие $\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n \subseteq \overline{\lim}\boldsymbol{A}_n$. Мультимножество $\boldsymbol{A}$ является пределом последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$, когда нижний $\underline{\boldsymbol{A}}$ и верхний $\overline{\boldsymbol{A}}$ пределы последовательности совпадают и $\boldsymbol{A} = \underline{\lim}\boldsymbol{A}_n = \overline{\lim}\boldsymbol{A}_n$.

З а м е ч а н и е. Использование одного и того же обозначения $\overline{\boldsymbol{A}}$ для верхнего предела последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ и дополнения мультимножества $\boldsymbol{A}$ обычно понятно из контекста и не должно приводить к недоразумениям. □

В общем случае из сходимости последовательности мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ к пределу $\boldsymbol{A}$ не следует, что числовая последовательность $\{|\boldsymbol{A}_n|\}$, состоящая из мощностей мультимножеств $\boldsymbol{A}_n$, также должна сходится к какому-нибудь пределу, в частности, к мощности $|\boldsymbol{A}|$ мультимножества $\boldsymbol{A}$. Будем говорить, что последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *абсолютно сходится к пределу* $\boldsymbol{A}$ *при* $n\to\infty$, если предел $\boldsymbol{A}$ существует и, кроме того, выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{A}_n| = |\boldsymbol{A}| = |\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n|. \tag{3.48}$$

Всякая абсолютно сходящаяся последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ сходится. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Аналогично множествам введем вторые определения сходимости последовательности мультимножеств и назовем последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *сходящейся к пределу* $\boldsymbol{A}$ *при* $n\to\infty$, если мультимножество $\boldsymbol{A}$ существует и выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}) = \varnothing, \tag{3.49}$$

и *абсолютно сходящейся к пределу* $\boldsymbol{A}$ *при* $n\to\infty$, если дополнительно

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}| = 0. \tag{3.50}$$

Имеется следующий аналог теоремы 3.15.

Т е о р е м а 3.18. *Определения* $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}$ *и* $\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}) = \varnothing$ *сходимости последовательности мультимножеств* $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *к пределу* $\boldsymbol{A}$ *равносильны*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть предел (3.49) существует. Тогда, в силу свойства идентичности симметрической разности мультимножеств $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}=\varnothing$ при $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, для каждого элемента x при $n>N$ условия $x\in\boldsymbol{A}_n$ и $x\in\boldsymbol{A}$ с кратностью $k_{A_n}(x)=k_A(x)$ будут равносильны. А значит, согласно определению (3.46) $x\in\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n$ с кратностью $k_A(x)$. Если элемент $x\in\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n$ с кратностью $k_A(x)$, то с той же кратностью $x\in\boldsymbol{A}_n$ для всех значений n. Поэтому при $n>N$ будет выполняться включение $\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n\subseteq\boldsymbol{A}\subseteq\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n$. Поскольку условие $\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n\subseteq\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n$ выполняется всегда, то следовательно, имеем $\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{A}=\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n$, и определение (3.45) справедливо.

2°. Пусть теперь существует предел (3.45), а следовательно, имеет место соотношение $\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n\subseteq\boldsymbol{A}\subseteq\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n$. Если элемент $x\in\boldsymbol{A}$ с кратностью $k_A(x)$, то с той же кратностью $x\in\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n$, и тогда $x\in\boldsymbol{A}_n$ с кратностью $k_A(x)$ при $n>N$. Если элемент $x\notin\boldsymbol{A}$, то $x\notin\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n$, и тогда $x\notin\boldsymbol{A}_n$ при $n>N$. Таким образом, при $n>N$ условия $x\in\boldsymbol{A}_n$ и $x\in\boldsymbol{A}$ с одинаковой кратностью $k_{A_n}(x)=k_A(x)$ равносильны, и справедливо определение (3.49). ■

Из теоремы 3.18 следует, что определение (3.49) сходимости последовательности мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ к пределу $\boldsymbol{A}$ при $n\to\infty$ можно записать в таком эквивалентном виде

$$(\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n)\Delta\boldsymbol{A}=\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{A}_n\Delta(\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n))=\varnothing. \tag{3.51}$$

Из определений (3.45)-(3.51) пределов последовательности мультимножеств вытекает также следующее соотношение: $(\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n)\Delta\boldsymbol{A}\subseteq(\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n)\Delta\boldsymbol{A}\subseteq\overline{\lim}(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})$. Обратные включения в общем случае не верны.

Как и в случае множеств, симметрическую разность $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}$ двух мультимножеств можно рассматривать как некую эрзац-псевдометрику, а ее мощность $|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|$ – как псевдометрику на семействе мультимножеств $\mathcal{A}$. В самом деле, симметрическая разность мультимножеств коммутативна $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{A}$ и идентична $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{A}=\varnothing$, что напоминает такие свойства псевдометрики как симметрия (1.01) $d_X(x,y)=d_X(y,x)$ и совпадение (1.34) $d_X(x,x)=0$. Для произвольных мультимножеств справедливо включение

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\subseteq(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C}), \tag{3.52}$$

которое в большей степени похоже на неравенство треугольника (1.03), чем аналогичное включение (3.38) для множеств. Действительно, из определения (0.23) симметрической разности мультимножеств имеем для $\forall x\in G$

$$k_{A\Delta B}(x)=|k_A(x)-k_B(x)|\leq|k_A(x)-k_C(x)|+|k_B(x)-k_C(x)|=k_{A\Delta C}(x)+k_{B\Delta C}(x)=k_{(A\Delta C)+(B\Delta C)}(x).$$

Мощность симметрической разности мультимножеств имеет все свойства, присущие псевдометрике: она является неотрицательной действительной функцией $|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|\geq 0$, причем если $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, то $|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{A}|=0$, она симметрична $|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{A}|$ и удовлетворяет неравенству треугольника (1.03) согласно условию (3.52) и правилу (0.65) подсчета мощностей мультимножеств $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$. Ниже мы убедимся, что понятие сходимости последовательности мультимножеств может быть задано и на метрических пространствах мультимножеств, где метрики выражаются разными функциями симметрической разности мультимножеств, удовлетворяющими всем аксиомам (1.01)-(1.03).

Напомним, что всякое мультимножество $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{Z}$ можно трактовать как отображение k_A: $G\to\mathbb{Z}^+$ домена G в множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}^+$, которое образует метрическое пространство, являющееся подпространством числовой прямой $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$. В таком случае справедливо следующее утверждение, аналогичное теореме 3.16 для множеств.

Теорема 3.19. *Последовательность мультимножеств* $\{\boldsymbol{A}_n\}$, *являющихся подмультимножествами мультимножества* $\boldsymbol{Z}$ *над доменом* G, *сходится при* $n\to\infty$ *к пределу* $\boldsymbol{A}$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{k_{A_n}(x)\}$ *функций кратности мультимножеств* $\boldsymbol{A}_n$ *сходится к функции кратности* $k_A(x)$ *мультимножества* $\boldsymbol{A}$.

Доказательство. 1°. Пусть последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу $\boldsymbol{A}$. Согласно определению (3.45) предела последовательности мультимножеств существует число N такое, что для всех номеров $n>N$ каждый элемент $x\in\boldsymbol{A}$ принадлежит всем мультимножествам $\boldsymbol{A}_n$ и содержится в них в количестве не менее $k_A(x)$ экземпляров. Из соотношения (3.49) для таких номеров n и элементов x имеем $\lim\limits_{n\to\infty} k_{A_n\Delta A}(x)=0$. Учитывая определение функции кратности симметрической разности мультимножеств и определение предела последовательности функций, получаем искомое условие (3.23) сходимости последовательности функций $\{k_{A_n}(x)\}$ к пределу $k_A(x)$ при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} k_{A_n\Delta A}(x)=\lim_{n\to\infty}|k_{A_n}(x)-k_A(x)| =\lim_{n\to\infty} d_{E1}(k_{A_n}(x),k_A(x)) = 0.$$

2°. Пусть теперь последовательность $\{k_{A_n}(x)\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу $k_A(x)$ в точке $x\in G$. Согласно определению (3.23) предела последовательности функций существует число $N(x)$ такое, что для всех номеров $n>N(x)$ в каждой точке $x\in G$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} d_{E1}(k_{A_n}(x),k_A(x)) =\lim_{n\to\infty}|k_{A_n}(x)-k_A(x)| =\lim_{n\to\infty} k_{A_n\Delta A}(x)= 0.$$

Возьмем такие элементы x и числа $N(x)$, чтобы при $n>N(x)$ элемент $x\in\boldsymbol{A}$ принадлежал всем мультимножествам $\boldsymbol{A}_n$, а элемент $x\notin\boldsymbol{A}$ содержался лишь в конечном числе мультимножеств $\boldsymbol{A}_n$. Полагая для таких элементов x число $N=\max\limits_{x\in\boldsymbol{A}} N(x)$ и $k_{A_n}(x)=k_A(x)$ для всех номеров $n>N$, получаем искомое условие (3.49) сходимости последовательности мультимножеств A_n к пределу A при $n\to\infty$. ■

Мощность любого мультимножества определяется как сумма его функций кратности $|\boldsymbol{A}|=\Sigma_{x\in X}k_A(x)$. В таком случае имеем

Следствие 3.19.А. *Последовательность мультимножеств* $\{\boldsymbol{A}_n\}$, *являющихся подмультимножествами мультимножества* $\boldsymbol{Z}$, *абсолютно сходится при* $n\to\infty$ *к пределу* $\boldsymbol{A}$ *тогда и только тогда, когда ряд* $\Sigma_{x\in X}k_{A_n}(x)$ *сходится к пределу* $\Sigma_{x\in X}k_A(x)$.

Последовательности мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ имеют те же свойства, что и последовательности множеств $\{A_n\}$. Назовем *стационарной* такую последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$, члены которой удовлетворяют условию $\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{A}$ для всех n=1,2,… Очевидно, что все члены стационарной последовательности мультимножеств равномощны $|\boldsymbol{A}_n|=|\boldsymbol{A}|$ и равноразмерны $/\boldsymbol{A}_n/=/\boldsymbol{A}/$. Из определений пределов (3.49), (3.50) и теоремы 3.18 вытекает, что всякая стационарная последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ сходится и абсолютно сходится к пределу $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{A}$.

Последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ будем называть *возрастающей* (*неубывающей*), если ее члены удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{A}_i\subset\boldsymbol{A}_{i+1}\ (\boldsymbol{A}_i\subseteq\boldsymbol{A}_{i+1}), \tag{3.53}$$

и *убывающей* (*невозрастающей*), если выполняется условие

$$\boldsymbol{A}_i\supset\boldsymbol{A}_{i+1}\ (\boldsymbol{A}_i\supseteq\boldsymbol{A}_{i+1}), \tag{3.54}$$

что символически обозначим как $\boldsymbol{A}_n\uparrow$ и $\boldsymbol{A}_n\downarrow$. Возрастающая и убывающая последовательности называются *строго монотонными,* а невозрастающая и неубывающая – *монотонными* последовательностями. Очевидно, что всякая монотонная последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ представляет собой семейство мультимножеств $\mathcal{A}$, линейно упорядоченное отношением включения $\subseteq$ или строгого включения $\subset$.

Для строго монотонных последовательностей мультимножеств выполняются следующие утверждения.

Т е о р е м а 3.20. *Предел возрастающей последовательности мультимножеств* $\boldsymbol{A}_1\subset\ldots\subset\boldsymbol{A}_n\subset\ldots$ *равен объединению членов последовательности* $\boldsymbol{A}_n$

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{A}^0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_n\,. \tag{3.55}$$

Предел убывающей последовательности мультимножеств $\boldsymbol{A}_1\supset\ldots\supset\boldsymbol{A}_n\supset\ldots$ *равен пересечению членов последовательности* $\boldsymbol{A}_n$

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{A}_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_n\,. \tag{3.56}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (3.55) вытекает непосредственно из определения (3.45) предела последовательности мультимножеств. Пусть теперь имеется убывающая последовательность мультимножеств $\boldsymbol{A}_1\supset\ldots\supset\boldsymbol{A}_n\supset\ldots$ Перейдем к дополнениям мультимножеств $\boldsymbol{A}_n$ до мультимножества $\boldsymbol{A}_1$ и положим $\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_n$. Тогда последовательность $\boldsymbol{B}_1\subset\ldots\subset\boldsymbol{B}_n\subset\ldots$ возрастает и согласно формуле (3.55) ее предел $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{B}^0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{B}_n$ или $\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_n)$ Отсюда, учитывая условия (0.45) двойственности для объединения и пересечения мультимножеств, получаем формулу (3.56). ■

Сходимость монотонно возрастающей и убывающей последовательностей мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ к пределам $\boldsymbol{A}^0$ и $\boldsymbol{A}_0$ будем символически записывать соответственно как $\boldsymbol{A}_n\uparrow\boldsymbol{A}^0$ и $\boldsymbol{A}_n\downarrow\boldsymbol{A}_0$ при $n\to\infty$. Напомним, что каждый элемент $x\in\boldsymbol{A}^0$ в выражении (3.41) принадлежит с кратностью $k_{A^0}(x)$ по крайней мере одному из мультимножеств $\boldsymbol{A}_n$.

Мощности членов $\boldsymbol{A}_n$ монотонных последовательностей мультимножеств образуют числовые последовательности $\{|\boldsymbol{A}_n|\}$, которые, как и для множеств, сами могут не быть монотонными и даже сходящимися последовательностями. Для абсолютно сходящихся монотонных последовательностей мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ при $i<j$ справедливы соответственно следующие строгие и нестрогие неравенства:

$$|\boldsymbol{A}_i|<|\boldsymbol{A}_j|\ (|\boldsymbol{A}_i|\leq|\boldsymbol{A}_j|) \quad \text{и} \quad |\boldsymbol{A}_i|>|\boldsymbol{A}_j|\ (|\boldsymbol{A}_i|\geq|\boldsymbol{A}_j|)).$$

П р и м е р 3.8. Последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$, где $\boldsymbol{A}_n=\{k_{A_n}(x)\bullet x \mid x\geq n,\ k_{A_n}(x)=k=\text{const},\ x,n,k\in\mathbb{N}\}=\{kn,\ k(n+1),\ k(n+2),...\}$, $n=1,2,\ldots$, является убывающей последовательностью, сходящейся согласно формуле (3.56) к пределу $\boldsymbol{A}_0=\varnothing$. Каждый член $\boldsymbol{A}_n$ этой последовательности является постоянным мультимножеством высоты k, которое можно представить как репродукцию вида $k\bullet A_n$ множества $A_n=\{x \mid x\geq n,\ x,n\in\mathbb{N}\}=\{n,\ n+1,\ n+2,...\}$ (пример 3.7). Таким образом, мультимножество $\boldsymbol{A}_n$ S-эквивалентно множеству A_n, которое в свою очередь эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, а значит, $\boldsymbol{A}_n$ есть счетное мультимножество, и $|\boldsymbol{A}_n|=\aleph_0$ для любого $n=1,2,\ldots$. Поэтому числовая последовательность $\{|\boldsymbol{A}_n|\}$ мощностей мультимножеств $\boldsymbol{A}_n$ стационарна. Сама же последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ не сходится абсолютно к пределу $\boldsymbol{A}_0=\varnothing$, поскольку условие (3.48) не выполняется. ◘

При переходе от мультимножеств к множествам выражения (3.45)-(3.56) превращаются в соответствующие им выражения (3.31)-(3.42). Формулы (3.55) и (3.56) не удается представить в виде, аналогичном формулам (3.43), (3.44), как объединения разностей мультимножеств.

Глава 4
Пространства с мерой множества

4.1. Мера множества. Во многих разделах математики важную роль играет особая функция множества – мера, представляющая собой некую величину, которая интуитивно ассоциируется с «массивностью» множества и зависит от общего числа его элементов. Понятие меры множества возникло из теории функций действительной переменной как обобщение понятий длины отрезка, площади плоской фигуры, объема пространственного тела. Существует несколько различных подходов к определению меры множества. В ряде случаев мера множества совпадает с его мощностью. В теории вероятностей мера множества интерпретируется как вероятность наступления события.

Действительная функция $f\colon\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, определенная на семействе $\mathcal{A}$ подмножеств некоторого множества X, называется *конечно-аддитивной* или просто *аддитивной*, если для любой конечной совокупности попарно не пересекающихся (дизъюнктных) множеств $A_i\bigcap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $A_i,A_j\in\mathcal{A}$ выполняется равенство

$$f\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}f(A_i)\,, \tag{4.01}$$

и *счетно-аддитивной* или *σ-аддитивной*, если равенство

$$f\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}f(A_i)\,. \tag{4.02}$$

выполняется для любой счетной совокупности попарно не пересекающихся множеств $A_i\in\mathcal{A}$. Из свойства идентичности пустого множества $\varnothing=\varnothing\bigcup\varnothing$ и равенства (4.01) следует, что $f(\varnothing)=f(\varnothing\bigcup\varnothing)=2f(\varnothing)$, и значит, для всякой аддитивной функции множества справедливо условие $f(\varnothing)=0$.

Неотрицательная действительная функция m, определенная на семействе $\mathcal{A}$, которое есть полукольцо $\mathcal{E}$, кольцо $\mathcal{K}$ или σ-кольцо $\mathcal{K}_\sigma$ подмножеств некоторого множества X, и обладающая свойством конечной или счетной аддитивности, называется соответственно *конечно-аддитивной* или *счетно-аддитивной мерой* множества. Очевидно, что мера пустого множества $m(\varnothing)=0$.

Меру m с областью определения $\mathcal{A}$ называют *конечной*, если для любого множества $A\in\mathcal{A}$ ее значения конечны $m(A)<\infty$, *локально конечной* или *полуконечной*, если для любого множества $A\in\mathcal{A}$ с мерой $m(A)>0$, существует его подмножество $B\subset A$ такое, что $0<m(B)<\infty$, и *σ-конечной*, если множество X можно представить как счетное объединение $X=\bigcup_i A_i$ множеств $A_i\in\mathcal{A}$ конечной меры $m(A_i)<\infty$. Конечная (σ-конечная) мера m называется *вполне конечной* (*вполне σ-конечной*), если само множество $X\in\mathcal{A}$.

Произвольное конечное или счетное множество $A=\{x_1,x_2,\ldots\}$, состоящее из элементов $x_i\in X$, $i=1,2,\ldots$, всегда можно представить как объединение $A=\bigcup_i A_i$ попарно не пересекающихся одноэлементных множеств $A_i=\{x_i\}$. Положим меру одноэлементного множества $\{x_i\}$ равной $m(\{x_i\})=w_i$, где $0\leq w_i<\infty$. Тогда согласно условию (4.02) определенная на семействе множеств $\mathcal{A}$ функция

$$m(A) = m(\bigcup_{x_i \in A}\{x_i\}) = \sum_{x_i \in A} m(\{x_i\}) = \sum_{x_i \in A} w_i = \sum_{x_i \in X} w_i \chi_A(x_i). \qquad (4.03)$$

является конечно-аддитивной (или соответственно σ-аддитивной) мерой. Очевидно, что мера множества X будет равна $m(X)=\Sigma_i w_i$.

Если числа w_i удовлетворяют условию $\Sigma_i w_i=1$, то мера m называется *вероятностной*. В этом случае, как легко видеть, $m(X)=1$. Если все числа $w_i=1$, то из соотношения (4.03) получим с учетом определения мощности множества

$$m(A) = \sum_{x_i \in X} \chi_A(x_i) = |A|. \qquad (4.04)$$

Иными словами, мера множества есть, в частности, его мощность.

П р и м е р 4.1. Пусть $\mathbb{Q}_{01}$ – множество всех рациональных чисел x_i из интервала $[0,1]=\mathbb{R}_{01}$, $\mathcal{E}$ – полукольцо, состоящее из пересечений $A_{ab}=\mathbb{Q}_{01}\cap[a,b]$ множества $\mathbb{Q}_{01}$ со всевозможными подинтервалами $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), где $0\le a\le b<1$. Положим $m(A_{ab})=b-a$, а $m(\{x_i\})=w_i=0$. Мера m конечно-аддитивна и конечна на семействе множеств $\mathcal{E}$, но не счетно-аддитивна, так как мера $m(\mathbb{Q}_{01})=1$, хотя само множество $\mathbb{Q}_{01}$ счетно и состоит из элементов меры 0. ◘

Мера m_2 называется *продолжением* на семейство множеств $\mathcal{A}_2$ меры m_1, определенной на семействе множеств $\mathcal{A}_1$, если $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}_2$, и для каждого множества $A\in\mathcal{A}_1$ имеет место равенство $m_2(A)=m_1(A)$. Справедливы следующие утверждения о продолжении меры.

Т е о р е м а 4.1. *Всякая конечно-аддитивная мера* m_1, *определенная на полукольце множеств* $\mathcal{E}$, *может быть однозначно продолжена до конечно-аддитивной меры* m_2, *определенной на кольце* $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, *порожденным полукольцом* $\mathcal{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что для любого полукольца множеств $\mathcal{E}$ существует единственное минимальное кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, которое содержит в себе полукольцо $\mathcal{E}$ и совпадает с семейством множеств, образующим конечное разбиение множества $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ на попарно не пересекающиеся подмножества $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $A,A_i\in\mathcal{E}$ [КФ68]. Определим заданную на кольце $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ меру m_2 соотношением:

$$m_2(A) = \sum_{i=1}^{n} m_1(A_i), \qquad (4.05)$$

где m_1 – конечно-аддитивная мера, заданная на полукольце $\mathcal{E}$. Величина $m_2(A)$, определенная формулой (4.05), как нетрудно убедиться, не зависит от выбора разбиения множества A. Действительно, пусть имеется другое разбиение множества $A=\bigcup_{p=1}^{r} B_p$, $B_p\cap B_q=\varnothing$, $p\neq q$, $B_p,B_q\in\mathcal{E}$. Так как все пересечения множеств $A_i\cap B_p\in\mathcal{E}$, то в силу свойства (4.01) конечной аддитивности меры m_1 имеем:

$$m_2(A) = \sum_{i=1}^{n} m_1(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{r} m_1(A_i\cap B_p) = \sum_{p=1}^{r} m_1(B_p) = m_2(A).$$

Неотрицательность и аддитивность функции m_2, определенной формулой (4.05), очевидны. Поэтому m_2 есть конечно-аддитивная мера. В силу единственности минимального кольца $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ конечно-аддитивная мера m_2 является однозначным продолжением меры m_1 на кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. ■

Т е о р е м а 4.2. *Продолжение m_2 счетно-аддитивной меры m_1, определенной на полукольце множеств $\mathcal{E}$, на кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, порожденное полукольцом $\mathcal{E}$, есть счетно-аддитивная мера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть имеется бесконечное разбиение множества $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ на попарно не пересекающиеся подмножества $A_i \cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, а кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ представляет собой семейство всех подмножеств множества $A, A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$. В соответствии с доказанной выше теоремой существуют конечные разбиения множеств $A=\bigcup_{p=1}^{r} B_p$ и $A_i=\bigcup_{k=1}^{s} A_{ik}$ на попарно не пересекающиеся множества $B_p \cap B_q=\varnothing$, $p\neq q$ и $A_{ik} \cap A_{il}=\varnothing$, $k\neq l$ соответственно. Положим $C_{ikp}=A_{ik} \cap B_p$. Очевидно, что множества C_{ikp} также попарно не пересекаются. Тогда множества A_{ik} и B_p можно записать в виде следующих разбиений: $A_{ik}=\bigcup_{p=1}^{r} C_{ikp}$, $B_p=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{s} C_{ikp}$.

Так как заданная на полукольце $\mathcal{E}$ мера m_1 счетной аддитивна, то

$$m_1(A_{ik})=\sum_{p=1}^{r} m_1(C_{ikp}), \quad m_1(B_p)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s} m_1(C_{ikp}),$$

где суммы по p и k конечны, а ряд по i сходится. Воспользовавшись определением (4.05) продолжения меры m_1 на минимальное кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, получаем:

$$m_2(A)=\sum_{p=1}^{r} m_1(B_p)=\sum_{p=1}^{r}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s} m_1(C_{ikp}), \quad m_2(A_i)=\sum_{k=1}^{s} m_1(A_{ik})=\sum_{k=1}^{s}\sum_{p=1}^{r} m_1(C_{ikp}).$$

Отсюда следует счетная аддитивность меры

$$m_2(A)=\sum_{i=1}^{\infty} m_2(A_i), \tag{4.06}$$

определенной на кольце $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, порожденным полукольцом $\mathcal{E}$. Поскольку кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ единственно, продолжение m_2 меры на кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ однозначно. ■

Возможности продолжения счетно-аддитивной меры m_1, определенной на полукольце множеств $\mathcal{E}$, не исчерпываются минимальным кольцом $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Всякая мера m_2, определенная на кольце множеств $\mathcal{K}$, может быть продолжена до меры m_3, определенной на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$, порожденном кольцом $\mathcal{K}$, таким же способом, что и продолжение меры m_1 на кольцо $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Если мера m_2 σ-конечна, то ее продолжение m_3 на σ-кольцо $\mathcal{K}_\sigma$ единственно, также σ-конечно и задается выражением

$$m_3(A)=\inf_{A_i \in \mathcal{K}} \{\sum_{i=1}^{\infty} m_2(A_i)\}, \tag{4.07}$$

где множество A удовлетворяет условию $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{K}$.

4.2. Свойства меры множества. Понятие меры множества, как было отмечено выше, в определенном смысле является обобщением понятия мощности множества. Установим некоторые важные свойства меры множества, вытекающие из ее аддитивности и напоминающие свойства мощности множества.

Т е о р е м а 4.3. *Пусть конечно-аддитивная мера m определена на полукольце множеств* $\mathcal{E}$. *Если все множества* $A_i \in \mathcal{E}$ *попарно не пересекаются* $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ *и их объединение* $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subseteq A \in \mathcal{E}$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{k} m(A_i) \le m(A). \tag{4.08}$$

Если множество $A \in \mathcal{E}$ *содержится в объединении* $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ *некоторых множеств* $A_1,...,A_k \in \mathcal{E}$, *не обязательно попарно дизъюнктных, то справедливо неравенство*

$$m(A) \le \sum_{i=1}^{k} m(A_i). \tag{4.09}$$

Счетно-аддитивная мера множества m удовлетворяет аналогичным неравенствам, где k бесконечно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Представим множество $A \in \mathcal{E}$ как разбиение

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = (\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \bigcup (\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i),$$

в котором первые k членов совпадают с множествами $A_1,...,A_k$, а множества, стоящие в круглых скобках, попарно не пересекаются. Тогда в силу соотношения (4.01) имеем:

$$m(A) = m(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) + m(\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{k} m(A_i) + \sum_{i=k+1}^{n} m(A_i).$$

Так как мера любого множества неотрицательна, то получаем искомое утверждение (4.08), которое выполняется для конечно-аддитивной меры. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим неравенство (4.08), справедливое для счетно-аддитивной меры.

2°. Докажем вначале справедливость утверждения (4.09) для меры m_2, являющейся продолжением меры m_1 на кольцо множеств $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ над полукольцом $\mathcal{E}$. Представим множество $A \in \mathcal{K}$ в виде разбиения $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ на попарно не пересекающиеся множества $C_i = (A \bigcap A_i) \setminus (\bigcup_{l=1}^{i-1} A_l)$, $C_i \bigcap C_j = \varnothing$, $i \neq j$. Так как по построению каждое множество C_i содержится в множестве A_i ($C_i \subseteq A_i$), то в силу условия (4.08) $m_1(C_i) \le m_1(A_i)$. Тогда для меры $m_2(A)$ с учетом равенства (4.06) имеем

$$m_2(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m_2(C_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m_2(A_i).$$

Таким образом, утверждение (4.09) выполняется для счетно-аддитивной меры, определенной на кольце множеств $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ над полукольцом $\mathcal{E}$. В силу теоремы

4.3 это означает, что утверждение (4.09) справедливо и для счетно-аддитивной меры m_1, определенной на полукольце $\mathcal{E}$, а следовательно, и для конечно-аддитивной меры. ■

Свойство меры множества, задаваемое соотношением

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \quad (4.10)$$

для конечного или бесконечного n, называется *конечной* (соответственно *счетной*) *субаддитивностью* или *полуаддитивностью*. Одновременное выполнение требований (4.08) и (4.09) равносильно наличию у меры свойства конечной, либо счетной аддитивности.

В силу неотрицательности меры из соотношений (4.08) и (4.09) вытекает свойство *монотонности*

$$B\subseteq A \;\Rightarrow\; m(B)\le m(A). \quad (4.11)$$

Т е о р е м а 4.4. *Конечная мера, определенная на кольце множеств* $\mathcal{K}$, *удовлетворяет следующим равенствам:*

$$m(A\bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A\bigcap B), \quad (4.12)$$

$$m(A\Delta B) = m(A) + m(B) - 2m(A\bigcap B), \quad (4.13)$$

$$m(A\backslash B) = m(A) - m(A\bigcap B). \quad (4.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений $A=(A\backslash B)\bigcup(A\bigcap B)$ и $B=(B\backslash A)+(A\bigcap B)$ при учете свойства (4.01) аддитивности меры множества следует, что $m(A)=m(A\backslash B)+m(A\bigcap B)$ и $m(B)=m(B\backslash A)+m(A\bigcap B)$. Отсюда сразу получаем равенство (4.14). Выражения (4.13) и (4.12) получаются с помощью формул $A\Delta B=(A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)$ и $A\bigcup B=(A\Delta B)\bigcup(A\bigcap B)$. Действительно,

$$m(A\Delta B) = m(A\backslash B) + m(B\backslash A) = m(A) + m(B) - 2m(A\bigcap B),$$

$$m(A\bigcup B) = m(A\Delta B) + m(A\bigcap B) = m(A) + m(B) - m(A\bigcap B). \;■$$

Из свойства монотонности (4.11) меры множества и всегда справедливых включений $A\backslash B\subseteq A\Delta B\subseteq A\bigcup B$, $A\bigcap B\subseteq A\subseteq A\bigcup B$ немедленно следует

С л е д с т в и е 4.4.А. *Конечная мера, определенная на кольце множеств* $\mathcal{K}$, *удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$|m(A) - m(B)| \le m(A\Delta B), \quad (4.15)$$

$$m(A\backslash B) \le m(A\Delta B) \le m(A\bigcup B), \quad (4.16)$$

$$m(A\bigcap B) \le m(A) \le m(A\bigcup B) \le m(A) + m(B). \quad (4.17)$$

З а м е ч а н и е. Напомним, что семейство $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств множества X представляет собой полную дистрибутивную решетку, в которой нижняя и верхняя грани элементов $A,B\in\mathcal{P}(X)$ определяются как пересечение и объединение множеств: $\inf(A,B)=A\bigcap B$, $\sup(A,B)=A\bigcup B$. В этом случае равенство (4.12) совпадает с равенством (1.39), а мера множества m является оценкой v на решетке $\mathcal{P}(X)$. □

Т е о р е м а. 4.5. *Мера* $m(A)$ *предела* A *строго монотонной последовательности множеств* $\{A_n\}$ *удовлетворяет соотношению:*

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A) = m(\lim_{n\to\infty} A_n), \quad (4.18)$$

где $m(A_n)$ *– счетно-аддитивная мера, определенная на* σ*-кольце множеств* $\mathcal{K}_\sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть $\{A_n\}$ – возрастающая последовательность множеств $A_1\subset...\subset A_n\subset...$, которая согласно формуле (3.41) стремится к пределу $A^0=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Принимая во внимание равенства (3.43), (4.13) и свойство (4.02) счетной аддитивности меры множества, имеем для меры предела A^0

$$m(A^0)=m(A_1)+m[\bigcup_{k=2}^{\infty}(A_k \setminus A_{k-1})]=m(A_1)+\sum_{k=2}^{\infty}m(A_k \setminus A_{k-1})=m(A_1)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}m(A_k \setminus A_{k-1})=$$

$$=m(A_1)+\lim_{n\to\infty}[m(A_2)-m(A_1)+m(A_3)-m(A_2)+\ldots+m(A_n)-m(A_{n-1})]=\lim_{n\to\infty}m(A_n).$$

Учитывая представление предела последовательности множеств $\{A_n\}$ в виде (3.31), сразу получаем соотношение (4.18).

2°. Выражение (4.18) для меры предела A_0 убывающей последовательности множеств $A_1\supset...\supset A_n\supset...$, равного согласно формуле (3.42) $A_0=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, получается путем перехода к дополнениям множеств A_n до множества A_1 с учетом равенства (3.44). Положим $B=A_1\backslash A_0$, $B_n=A_1\backslash A_n$. Тогда последовательность множеств $B_1\subset...\subset B_n\subset...$ возрастает и ее предел $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Принимая во внимание равенство (4.14), имеем:

$$m(A_1)-m(A_0) = m(B) = \lim_{n\to\infty}m(B_n) = \lim_{n\to\infty}[m(A_1)-m(A_n)] = m(A_1)-\lim_{n\to\infty}m(A_n).$$

Отсюда в силу (3.31) сразу получаем равенство (4.18). Для его выполнения дополнительно требуется, чтобы хотя бы одно из множеств A_k имело конечную меру $m(A_k)<\infty$. Обычно предполагается конечной мера $m(A_1)$. ■

Выполнение равенства (4.18) означает, что всякая счетно-аддитивная мера множества m является *непрерывной* функцией своего аргумента, аналогично непрерывности функции в точке (3.06), и символы меры m и предела lim можно менять местами.

Если предел убывающей последовательности множеств $A_0=\varnothing$, то из условия (4.18) имеем

$$\lim_{n\to\infty}m(A_n) = m(A_0) = m(\varnothing) = 0, \qquad (4.19)$$

что соответствует установленному ранее свойству меры $m(\varnothing)=0$. Мера $m(A^0)$ предела возрастающей последовательности множеств может оказаться и бесконечной. Равенство (4.19) представляет собой необходимое и достаточное условие счетной аддитивности для конечной меры множества [Вул73].

Меры нижнего предела $\underline{\lim} A_n$ (3.32) и верхнего предела $\overline{\lim} A_n$ (3.33) последовательности множеств $\{A_n\}$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$m(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \le \lim_{n\to\infty}\inf m(A_n), \quad m(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \ge \lim_{n\to\infty}\sup m(A_n), \qquad (4.20)$$

которые можно записать также как

$$m(\underline{\lim} A_n)\le \underline{m}(A), \quad m(\overline{\lim} A_n)\ge \overline{m}(A),$$

где $\underline{m}$ и $\overline{m}$ суть соответственно нижний и верхний пределы меры m как функции множества. В случае второго неравенства дополнительно требуется, чтобы мера $m(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n)<\infty$ была конечной для некоторого номера k.

Сформулируем правила вычисления меры, аналогичные правилам включения-исключения для вычисления мощностей конечного семейства множеств.

Т е о р е м а 4.6. *Конечно-аддитивная мера, определенная на кольце множеств* $\mathcal{K}$, *удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} m(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} m(A_i\cap A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} m(A_i\cap A_j\cap A_k)-\ldots-(-1)^n\, m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i); \tag{4.21}$$

$$m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} m(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} m(A_i\cup A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} m(A_i\cup A_j\cup A_k)-\ldots-(-1)^n\, m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i). \tag{4.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится методом математической индукции. Для n=1 выражения (4.21) и (4.22) тривиальны $m(A_1)=m(A_1)$. Для n=2 формулы (4.21) и (4.22) совпадают с равенством (4.12)

$$m(A_1) + m(A_2) =m(A_1\cup A_2) + m(A_1\cap A_2). \tag{4.23}$$

Докажем выполнение правила (4.22) вычисления мер для произвольного n. Предположим, что формула (4.22) верна для n–1 множеств $A_1,\ldots A_{n-1}$, то есть

$$m(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)=\sum_{i=1}^{n-1} m(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n-1} m(A_i\cap A_j)+$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n-1} m(A_i\cap A_j\cap A_k)-\ldots-(-1)^{n-1}\, m(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i), \tag{4.24}$$

и докажем ее справедливость для n множеств.

Воспользуемся равенством (4.23), свойствами ассоциативности и дистрибутивности операций объединения и пересечения множеств и представим левую часть формулы (4.22) в виде:

$$m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=m(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cap A_n)=m(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)+m(A_n)-m(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cup A_n)=$$
$$=m(A_n)+m(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)-m(\bigcap_{i=1}^{n-1}(A_i\cup A_n)). \tag{4.25}$$

Заменяя два последних слагаемых в формуле (4.25) при помощи соотношения (4.24), получаем:

$$m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=m(A_n)+\sum_{i=1}^{n-1} m(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n-1} m(A_i\cup A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n-1} m(A_i\cup A_j\cup A_k)-$$
$$-\ldots-\sum_{i=1}^{n-1} m(A_i\cup A_n)+\sum_{1\le i<j\le n-1} m(A_i\cup A_n\cup A_j)-\ldots+(-1)^{n-1} m(\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cup A_n))=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} m(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} m(A_i\cup A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} m(A_i\cup A_j\cup A_k)-\ldots-(-1)^n m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

Справедливость правила (4.22) для произвольного числа множеств доказана. Аналогичным образом доказывается выполнение правила (4.21). ■

Правилам (4.21) и (4.22) вычисления аддитивной меры можно придать более «симметричную» форму, обобщающую соотношение (4.23) и имеющую вид известной формулы Сильвестра (правила включения-исключения) для вычисления мощностей объединения и пересечения множеств:

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} m(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \tag{4.26}$$

$$m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} m(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}). \tag{4.27}$$

Отсюда, из свойства (4.11) монотонности меры множества и возможности продолжения меры на σ-кольцо множеств $\mathcal{K}_\sigma$ вытекают следующие важные соотношения для меры, обобщающие неравенства (4.17) и (4.10).

С л е д с т в и е 4.6.А. *Конечно-аддитивная* (*счетно-аддитивная*) *и конечная мера*, *определенная на* σ-*кольце множеств* $\mathcal{K}_\sigma$, *удовлетворяет неравенствам*

$$m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \le m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} m(A_i), \tag{4.28}$$

где n соответственно конечно или бесконечно.

Свойство (4.28) назовем *расширенной конечной* (*счетной*) *субаддитивностью* меры. Если согласно формуле (4.04) приравнять меру множества его мощности, то выражения (4.21), (4.22), (4.26)-(4.28) переходят в соответствующие соотношения для мощностей множеств [Aig79], [Lip82].

4.3. Измеримые множества. Рассмотрим ряд важных понятий из теории меры. *Внешней* (*верхней*) *мерой* множества $A \subset X$, *индуцированной мерой m*, называется число

$$m^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_i A_i} \{\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)\}, \tag{4.29}$$

где счетно-аддитивная мера m определена на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$ множеств $A_i \subset X$, а точная нижняя грань берется по всем возможным покрытиям множества A счетными семействами множеств $A_i \in \mathcal{K}_\sigma$. Таким образом, внешняя мера множества m^* представляет собой функцию, заданную на семействе множеств, включающем все подмножества множества X.

С учетом доказанных выше теорем 4.2-4.6 внешняя мера множества m^* обладает следующими свойствами:

неотрицательность

$$0 \le m^*(A) \le \infty, \quad m^*(\varnothing) = 0; \tag{4.30}$$

монотонность

$$A_i \subseteq A_j \Rightarrow m^*(A_i) \le m^*(A_j); \tag{4.31}$$

расширенная счетная субаддитивность

$$m^*(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \le m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i); \tag{4.32}$$

непрерывность

$$m^*(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m^*(A_n). \tag{4.33}$$

Отметим, что внешняя мера множества m^* может и не обладать свойством конечной, либо счетной аддитивности.

Внутренней (*нижней*) *мерой* множества $A\subset X$, *индуцированной мерой* m, называется число

$$m_*(A) = m(X) - m^*(X\backslash A). \tag{4.34}$$

Из субаддитивности меры множества следует, что $m_*(A)\le m^*(A)$.

Множество A, принадлежащее σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$ множеств $A_i\subset X$, будем называть *измеримым по Лебегу* или m^*-*измеримым*, если для любого множества $C\in\mathcal{K}_\sigma$ выполняется условие:

$$m^*(C) = m^*(A\cap C) + m^*[(X\backslash A)\cap C]. \tag{4.35}$$

Беря в качестве множества C само множество X, определение (4.35) m^*-измеримости множества $A\subset X$ можно записать более компактно:

$$m^*(X) = m^*(A) + m^*(X\backslash A). \tag{4.36}$$

Из соотношений (4.34) и (4.36) вытекает, что для вполне конечных мер, заданных на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$, определение m^*-измеримости множества A эквивалентно условию $m_*(A)= m^*(A)$. Это общее значение меры m^*-измеримого множества A называется его *лебеговской мерой*, которая представляет собой счетно-аддитивное продолжение меры m на семейство m^*-измеримых множеств. В дальнейшем под измеримостью множества будем подразумевать его измеримость по Лебегу и для простоты записи опускать символ * в обозначении меры.

Можно построить много различных лебеговских продолжений меры. Поэтому класс измеримых по Лебегу множеств весьма широк. Вместе с тем, вообще говоря, существуют и множества, не измеримые по Лебегу. Более того, всякое измеримое множество положительной внешней меры содержит некоторое неизмеримое множество. Необходимые и достаточные условия измеримости множества по Лебегу формулируются следующим образом.

Теорема 4.7. *Множество A, принадлежащее σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$, измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует m-измеримое множество $B\in\mathcal{K}_\sigma$ такое, что выполняется неравенство*

$$m(A\Delta B) < \varepsilon. \tag{4.37}$$

Доказательство. 1°. Пусть множество $A\in\mathcal{K}_\sigma$ m-измеримо, то есть выполняется равенство (4.36). По определению (4.29) внешней меры множества A существует такое счетное покрытие множества $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$ семейством $\{B_i\}$ подмножеств множества X, что для произвольного $\varepsilon>0$ будет выполняться неравенство $\sum_{i=1}^{\infty}m(B_i)-m(A)<\varepsilon$. Так как внешняя мера $m(A)$ вполне конечна и, значит, $\sum_{i=1}^{\infty}m(B_i)<\infty$, то найдется такое натуральное число n, что для всех номеров $i>n$ выполняется неравенство $\sum_{i>n}^{\infty}m(B_i)<\varepsilon$.

Представим множество A как объединение двух множеств $A=B\bigcup D$, где $B=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ и $D=\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i$. По построению множество B является подмножеством множества A, и значит, множество B также m-измеримо. В силу свойства (4.32) субаддитивности внешней меры множества имеем:

$$m(A) = m(B\bigcup D) \le m(B) + m(D) < m(B) + \varepsilon,$$

откуда с учетом равенства (4.13) и условия $B\subset A$ получаем:

$$m(A\Delta B) = m(A) - m(B) < \varepsilon.$$

Таким образом, множество B удовлетворяет неравенству (4.37), чем и доказывается его необходимость.

2°. Пусть теперь для любого $\varepsilon>0$ существует m-измеримое множество B такое, что выполняется неравенство (4.37). Тогда с учетом соотношения (4.15) для любого множества A имеем:

$$|m(A) - m(B)| \le m(A\Delta B) < \varepsilon.$$

Так как $(X\backslash A)\Delta(X\backslash B)=A\Delta B$, то точно так же имеем:

$$|m(X\backslash A) - m(X\backslash B)| < \varepsilon.$$

Учитывая, что множество B удовлетворяет равенству (4.36), и принимая во внимание приведенные выше неравенства, получаем:

$$|m(A) + m(X\backslash A) - m(X)| = |m(A) + m(X\backslash A) - m(B) - m(X\backslash B)| \le$$
$$\le |m(A) - m(B)| + |m(X\backslash A) - m(X\backslash B)| < 2\varepsilon.$$

Так число $\varepsilon>0$ произвольно, то и множество A удовлетворяет равенству (4.36)

$$m(A) + m(X\backslash A) - m(X) = 0,$$

то есть и множество A m-измеримо. Достаточность условия (4.37) и теорема в целом доказаны. ■

Пара $(X,\mathcal{K}_\sigma)$, состоящая из произвольного множества X и σ-кольца $\mathcal{K}_\sigma$ его подмножеств $A_i\subset X$, которые образуют покрытие множества $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, называется *измеримым пространством*, а подмножества A_i, принадлежащие σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$, – *измеримыми множествами.* Согласно теоремам 4.3, 4.4 и соотношениям (4.06)-(4.14) объединение и пересечение конечного числа измеримых множеств, разность и симметрическая разность двух измеримых множеств являются измеримыми множествами. Неизмеримому множеству не приписывается никакой меры – ни конечной, ни бесконечной.

Измеримое множество нулевой меры называется *нулевым множеством*. Пустое множество $\varnothing$ является нулевым множеством, так как по определению $m(\varnothing)=0$. Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* на измеримом пространстве или *для почти всех* точек множества X, если подмножество $B\subset X$, где это свойство отсутствует, имеет нулевую меру. Выполнение свойства «почти всюду» будем обозначать, когда потребуется, символом $_{aew}$.

Множества меры нуль играют роль, аналогичную роли множеств первой категории. Семейства и тех, и других множеств образуют σ-идеалы, включающие в себя все счетные множества. Любое множество первой категории содержится в F_σ-множестве первой категории, а любое множество меры нуль – в G_δ-

множестве меры нуль. И те, и другие множества обладают свойством «малости». Множество первой категории образуется из нигде неплотных множеств, сплошь состоящих из одних «дыр». Множество нулевой меры мало в том смысле, что может быть покрыто семейством множеств, имеющих бесконечно малые диаметры, сумма которых также бесконечно мала.

В то же время множества первой категории и нулевой меры в некотором смысле дополняют друг друга. В частности, всякий интервал числовой прямой можно представить как объединение множества первой категории и множества меры нуль. В предположении выполнимости гипотезы континуума существует взаимно однозначное отображение f числовой прямой на себя такое, что $f(A)$ является множеством первой категории (или множеством меры нуль), когда A является множеством меры нуль (или множеством первой категории) [Oxt71].

Тройку $(X,\mathcal{K}_\sigma,m)$, где $(X,\mathcal{K}_\sigma)$ – измеримое пространство, а m – σ-конечная мера, определенная на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$ подмножеств множества X, будем называть *пространством с мерой множества*. Мера m и пространство с мерой $(X,\mathcal{K}_\sigma,m)$ называются *полными*, если каждое подмножество B_i любого множества A меры нуль также содержится в σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$, то есть из условий $A\in\mathcal{K}_\sigma$, $m(A)=0$ и $B_i\subset A$ следует, что $B_i\in\mathcal{K}_\sigma$ и $m(B_i)=0$. Всякую меру можно сделать полной, присоединив к σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$ множества вида $A\bigcup B_i$, где $A,B_i\in\mathcal{K}_\sigma$, $m(B_i)=0$, и положив для них $m(A\bigcup B_i)=m(A)$.

З а м е ч а н и е. Пространство с вполне конечной вероятностной мерой, удовлетворяющей условию $m(X)=1$, называется *вероятностным пространством*. В вероятностном пространстве множества $A_i\subset X$ рассматриваются как некоторые события, меры $m(A_i)$ интерпретируются как вероятности наступления событий A_i, а меры $m(A_i\bigcap\ldots\bigcap A_k)$ – как вероятности совместного наступления событий. В этом случае соотношение (4.26) представляет собой так называемую булеву проблему вычисления наилучшей оценки для меры $m(A_1\bigcup\ldots\bigcup A_n)$ при заданных величинах соответствующих вероятностей [DL97]. □

Всякая счетно-аддитивная мера m, определенная на σ-кольце множеств $\mathcal{K}_\sigma$, может быть продолжена на σ-алгебру $\mathcal{S}(X)$ над множеством X, в которой содержатся и все открытые и замкнутые множества, и все F_σ- и G_δ-множества, а измеримое множество представимо как объединение F_σ-множества и множества меры нуль или как разность G_δ-множества и множества меры нуль [Oxt71]. Полученное таким образом продолжение меры m называется *стандартным*, причем стандартное продолжение будет полной мерой [Вул73]. Условие (4.36) измеримости по Лебегу множества $A\in\mathcal{S}(X)$ приобретает тогда следующий вид:

$$m(X) = m(A) + m(\overline{A}). \tag{4.38}$$

где $\overline{A}=X\backslash A$ – дополнение множества A до множества X. Свойство (4.38) назовем *симметричностью* меры множества. В дальнейшем, как правило, будем рассматривать именно такие пространства $(X,\mathcal{S}, m)$ с полной мерой множества.

Возможность пренебрегать множествами меры нуль позволяет расширить правила сопоставления измеримых множеств. Два множества A и B, принадлежащие пространству с полной мерой, будем называть *m-равными* и обозначать

$A=_mB$ или $A=B(\mathrm{mod}\,m)$, если $m(A\Delta B)=0$, и *т-дизъюнктными*, если $m(A\bigcap B)=0$. Множество A будем называть *т-подмножеством* множества B и записывать $A\subseteq_m B$ или $A\subseteq B(\mathrm{mod}\,m)$, если $m(A\backslash B)=0$. Очевидно, как и в случае равенства множеств, что условие $A=_mB$ выполняется, если одновременно $A\subseteq_m B$ и $B\subseteq_m A$. Если $A_1=_mB_1$ и $A_2=_mB_2$, то справедливы равенства

$$A_1\bigcup A_2=_m B_1\bigcup B_2,\quad A_1\bigcap A_2=_m B_1\bigcap B_2. \tag{4.39}$$

Согласно условиям (4.12)-(4.14) меры m-равных множеств удовлетворяют соотношениям:

$$m(A) = m(B) = m(A\bigcup B) = m(A\bigcap B),\quad m(A\backslash B) = m(B\backslash A)=0.$$

Поэтому в соответствии с условием (4.37) всякое множество, m-равное измеримому множеству, измеримо. Имеет место также следующее утверждение.

Л е м м а 4.А. *m-равенство измеримых множеств $A=_mB$, определяемое условием $m(A\Delta B)=0$, есть отношение эквивалентности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отношение m-равенства множеств симметрично, рефлексивно и транзитивно. Симметричность и рефлексивность отношения $A=_mB$ очевидны. Его транзитивность вытекает из неравенства

$$m(A\Delta B) \le m[(A\Delta C)\bigcup m(B\Delta C)] \le m(A\Delta C) + m(C\Delta B), \tag{4.40}$$

получаемого из справедливого для произвольных множеств соотношения (3.38) $A\Delta B\subseteq(A\Delta C)\bigcup(B\Delta C)$ при учете свойств монотонности (4.11) и субаддитивности (4.10) меры. Действительно, если $A=_mC$ и $C=_mB$, то есть $m(A\Delta C)=0$ и $m(C\Delta B)=0$, то из соотношения (4.40) следует, что и $m(A\Delta B)=0$, то есть $A=_mB$. Таким образом, m-равенство множеств является отношением эквивалентности измеримых множеств, справедливым почти всюду на пространстве с мерой $(X,\mathcal{S}, m)$. ■

4.4. Последовательности измеримых множеств. Рассмотрим особенности сходимости последовательностей измеримых множеств на пространстве с мерой $(X,\mathcal{S}, m)$. Из определения (3.35) предела сходящейся последовательности множеств, свойства (4.18) непрерывности меры и условия (4.37) измеримости множества вытекает следующее

С л е д с т в и е 4.7.А. *Предел A сходящейся последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств, принадлежащих пространству с мерой $(X,\mathcal{S}, m)$, является измеримым множеством и принадлежит этому же пространству.*

В случае полной меры можно ввести несколько новых понятий сходимости последовательностей измеримых множеств. Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств *сходится почти всюду* на пространстве с полной мерой к пределу A при $n\to\infty$, если

$$m[\lim_{n\to\infty}(A_n\Delta A)] = 0. \tag{4.41}$$

Условие (4.41) с учетом формулы (3.37) можно также записать в виде:

$$m[(\lim_{n\to\infty}A_n)\Delta A] = 0. \tag{4.42}$$

Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств *сходится по мере* на пространстве с полной мерой к пределу A при $n\to\infty$, если

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n\Delta A) = 0. \tag{4.43}$$

Покажем, что понятия сходимости последовательности измеримых множеств почти всюду и по мере равносильны.

Теорема 4.8. *Последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств сходится при $n\to\infty$ к пределу A почти всюду на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$ тогда и только тогда, когда она сходится к пределу A по мере.*

Доказательство. 1°. Пусть последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств сходится при $n\to\infty$ к пределу A почти всюду на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$. Согласно следствию 4.7.А предел A также есть измеримое множество, принадлежащее пространству $(X,\mathcal{S}, m)$. Из условия (4.41) и свойства (4.18) непрерывности меры сразу получаем условие (4.43) сходимости последовательности $\{A_n\}$ по мере:

$$m[\lim_{n\to\infty}(A_n\Delta A)] = \lim_{n\to\infty} m(A_n\Delta A) = 0.$$

2°. Пусть теперь последовательность $\{A_n\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу A по мере на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$. Аналогичным образом убеждаемся, что из условия (4.43) и свойства (4.18) непрерывности меры вытекает условие (4.41) сходимости последовательности $\{A_n\}$ почти всюду:

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n\Delta A) = m[\lim_{n\to\infty}(A_n\Delta A)] = 0. \blacksquare$$

Из следствия 4.7.А и теоремы 4.8 имеем

Следствие 4.8.А. *Предел A последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств, сходящейся при $n\to\infty$ почти всюду или по мере на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$, есть измеримое множество.*

Отсюда и из определения (3.34) вытекает, что абсолютная сходимость последовательности измеримых множеств есть частный случай сходимости по мере. Таким образом, говоря о сходимости последовательности измеримых множеств на пространстве с полной мерой, можно не делать различия между сходимостью почти всюду и сходимостью по мере и использовать для обозначения условий (4.41)-(4.43) один и тот же символ $A_n\to_{mes} A$.

Пределы сходящихся последовательностей измеримых множеств обладают также следующими свойствами.

Теорема 4.9. *Если последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств сходится по мере к пределу A:*

то последовательность $\{A_n\}$ сходится по мере и к измеримому множеству B, m-равному множеству A;

то к тому же пределу A сходится по мере и последовательность $\{B_n\}$, состоящая из множеств B_n, m-равных множествам A_n.

Если последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств сходится по мере к пределу A, а последовательность $\{B_n\}$, состоящая из множеств B_n, m-равных множествам A_n, сходится по мере к пределу B, то множества A и B m-равны.

Доказательство. 1°. Пусть $A_n\to_{mes} A$ при $n\to\infty$, то есть выполняется условие (4.43) $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n\Delta A)=0$, и $A=_m B$, то есть $m(A\Delta B)=0$. Тогда согласно неравенству (4.40) имеем

$$m(A_n\Delta B) \le m(A_n\Delta A)+m(A\Delta B) = m(A_n\Delta A).$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} m(A_n\Delta B)=0$, то есть $A_n\to_{mes} B$ при $n\to\infty$.

2°. Пусть $A_n\to_{mes} A$ при $n\to\infty$, то есть $\lim_{n\to\infty} m(A_n\Delta A)=0$, и $A_n=_m B_n$, то есть $m(A_n\Delta B_n)=0$. Учитывая, что

$$m(B_n\Delta A) \le m(B_n\Delta A_n)+m(A_n\Delta A) = m(A_n\Delta A),$$

аналогичным образом получаем $B_n\to_{mes} A$ при $n\to\infty$.

3°. Пусть теперь $A_n\to_{mes} A$ и $B_n\to_{mes} B$ при $n\to\infty$, то есть $\lim_{n\to\infty} m(A_n\Delta A)=0$ и $\lim_{n\to\infty} m(B_n\Delta B)=0$, и $A_n=_m B_n$, то есть $m(A_n\Delta B_n)=0$. Учитывая, что

$$m(A\Delta B) \le m(A\Delta A_n)+m(A_n\Delta B_n)+m(B_n\Delta B) = m(A_n\Delta A)+m(B_n\Delta B),$$

получаем $\lim_{n\to\infty} m(A\Delta B)=0$. Так как мера $m(A\Delta B)$ является постоянной величиной, не зависящей от n, то $m(A\Delta B)=0$, и значит, $A=_m B$. ■

Последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств будем называть *сходящейся в себе по мере* на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$ или *m-фундаментальной,* если для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ выполняется неравенство

$$m(A_n\Delta A_l) < \varepsilon, \tag{4.44}$$

которое равносильно условию

$$\lim_{n,l\to\infty} m(A_n\Delta A_l) = 0. \tag{4.45}$$

Для последовательностей измеримых множеств, сходящихся по мере или почти всюду, выполняется следующий обобщенный критерий сходимости.

Т е о р е м а 4.10. *Последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств сходится по мере на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$ тогда и только тогда, когда является m-фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть последовательность измеримых множеств $\{A_n\}$ сходится по мере на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$ к пределу A. Тогда согласно определению (4.43) для любого $\varepsilon>0$ найдется число N такое, что при номерах $n>N$ будет справедливо неравенство $m(A_n\Delta A)<\varepsilon$. В силу соотношения (4.40) для любых $n,l>N$ выполняется условие (4.44):

$$m(A_n\Delta A_l) \le m(A_n\Delta A) + m(A\Delta A_l) < 2\varepsilon,$$

то есть последовательность множеств $\{A_n\}$ является m-фундаментальной.

2°. Пусть теперь последовательность измеримых множеств $\{A_n\}$ m-фундаментальна на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$, то есть для любого $\varepsilon>0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ выполняется неравенство $m(A_n\Delta A_l)<\varepsilon$. Выберем номер $n_k\ge N$ так, чтобы неравенство $m(A_{n_{k+s}} \Delta A_{n_k})<1/2^k$ выполнялось для любого целого числа $s\ge1$, и рассмотрим множества

$$C_k=\bigcap_{i=k}^{\infty} A_{n_k}, \quad D_k=(A_{n_k} \Delta A_{n_{k+1}})\bigcup(A_{n_{k+1}} \Delta A_{n_{k+2}})\bigcup\ldots=\bigcup_{i=k}^{\infty}(A_{n_i}\Delta A_{n_{i+1}}), \quad A=\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k .$$

Очевидно, что множества C_k, D_k и A принадлежат пространству $(X,\mathcal{S}, m)$. Нетрудно убедиться, что $\{C_k\}$ – возрастающая последовательность множеств

$C_1\subset...\subset C_k\subset...$, и выполняются включения $C_k\subset A_{n_k}$, $A_{n_k}\Delta C_k\subseteq D_k$, $A\Delta C_k\subseteq D_k$. А значит, в силу соотношения $A\Delta B\subseteq(A\Delta C)\bigcup(B\Delta C)$, справедливого для произвольных множеств, выполняется и включение $A\Delta A_{n_k}\subseteq D_k$. Согласно свойствам монотонности (4.11) и счетной субаддитивности (4.10) меры множества имеем

$$m(A\Delta A_{n_k})\le m(D_k)=m(\bigcup_{i=k}^{\infty}(A_{n_i}\Delta A_{n_{i+1}}))\le\sum_{i=k}^{\infty}m(A_{n_i}\Delta A_{n_{i+1}})<\sum_{i=k}^{\infty}(1/2^i)=1/2^{k-1}.$$

Тогда для любого номера $n>n_k$ получаем с учетом соотношения (4.40)

$$m(A\Delta A_n)\le m(A\Delta A_{n_k})+m(A_{n_k}\Delta A_n)<(1/2^{k-1})+(1/2^k)=3/2^k.$$

Множество A по построению состоит из элементов x, принадлежащим при $n>n_k$ всем множествам A_n, за исключением, быть может, конечного числа из них, то есть по определению A является пределом последовательности $\{A_n\}$ и, кроме того, принадлежит пространству $(X,\mathcal{S}, m)$. При $k\to\infty$, очевидно, $n_k\to\infty$ и $n\to\infty$. Следовательно, выполняется условие (4.43) $\lim\limits_{n\to\infty}m(A_n\Delta A)=0$, то есть последовательность множеств $\{A_n\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу A по мере. ■

Наряду с неотрицательной мерой m можно определить и другие аддитивные и счетно-аддитивные функции $f:\mathcal{S}(X)\to\mathbb{R}$, заданные на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$ и принимающие произвольные действительные значения, в частности, знаконеопределенную меру, называемую также *зарядом*, которые обладают многими свойствами меры m, например, монотонностью, непрерывностью, субаддитивностью, и целым рядом других свойств.

4.5. Измеримые функции. Понятия меры и измеримого множества дают возможность ввести новый вид функций, играющих важную роль в теории интегрирования. Действительная функция f, заданная на множестве X, называется *измеримой* относительно σ-кольца $\mathcal{K}_\sigma$ над множеством X или *измеримой по Лебегу*, если для всякого действительного числа a измеримы множества

$$\{x\,|\,f(x)<a\},\quad \{x\,|\,f(x)\le a\},\quad \{x\,|\,f(x)>a\},\quad \{x\,|\,f(x)\ge a\},\qquad(4.46)$$

которые носят название *множеств Лебега функции f*. Часто переменная считается действительной величиной t, а в качестве области определения функции f берется измеримое множество $T\subset\mathbb{R}$, которое есть единица некоторой борелевской σ-алгебры $\mathcal{S}(T)$ подмножеств множества T. Мера m пространства $(T,\mathcal{S}, m)$ предполагается σ-конечной, а в ряде случаев и полной. Приведем краткую сводку некоторых свойств измеримых функций, опуская соответствующие доказательства, которые можно найти в [Вул73], [КА84], [КФ68] и других книгах.

Измеримую функцию h, принимающую не более чем счетное число значений, будем называть *простой*, если ее можно представить в виде

$$h(t)=\sum_{i=1}^{k}l_i\chi_{A_i}(t),\qquad(4.47)$$

где $t\in T$, χ_{A_i} – характеристическая функция множества $A_i\in\mathcal{S}(T)$, все множества A_i попарно не пересекаются, константы l_i – действительные числа, а k конечно или бесконечно. Необходимые и достаточные условия измеримости функции по Лебегу формулируются следующим образом.

Т е о р е м а 4.11. *Функция f измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\{h_n\}$, $n=1,2,...$ *простых измеримых функций, равномерно сходящаяся к функции f на множестве T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть функция f измерима, то есть выполнятся условия (4.46). Возьмем целое число r и положительное целое число n такие, что $r/n \le f(t) < (r+1)/n$. Функции $h_n(t)=r/n$, очевидно, будут простыми измеримыми функциями. Поскольку при любом $t \in T$ выполняется неравенство

$$|f(t) - h_n(t)| = |f(t) - (r/n)| < r/n,$$

то согласно определению (3.26) последовательность функций $\{h_n\}$ при $n \to \infty$ равномерно сходится на множестве T к пределу f.

2°. Пусть последовательность $\{h_n\}$ простых измеримых функций при $n \to \infty$ равномерно сходится на множестве T к пределу f. Тогда при любом $t \in T$ имеем

$$\{t \mid f(t)<a\} = \bigcup_k \bigcup_l \bigcap_{n>l} \{t \mid h_n(t) < a - (1/k)\}.$$

Действительно, если t принадлежит левой части приведенного выше равенства и $f(t)<a$, то существует число k такое, что $f(t)<a-(2/k)$. Для этого k найдется число l такое, что при $n \ge l$ будет выполняться неравенство $h_n(t)<a-(1/k)$, то есть t войдет и в правую часть равенства. Обратно, если t принадлежит правой части равенства, то существует число k такое, что при всех достаточно больших числах $n \ge l$ имеем $h_n(t)<a-(1/k)$. Но тогда выполняется и неравенство $f(t)<a$, то есть t входит в левую часть равенства. Так как функции h_n измеримы, то множества $\{t \mid h_n(t)<a-(1/k)\}$ измеримы и принадлежат σ-алгебре $\mathcal{S}(T)$. В силу указанного равенства множество $\{t \mid f(t)<a\}$ также принадлежит σ-алгебре $\mathcal{S}(T)$, а значит, измеримы как оно само, так и функция f. ■

Функция f, измеримая на множестве T, измерима и на любом измеримом подмножестве $T_i \subset T$. Функция f, принимающая постоянное значение c на множестве T или значение c_i на каждом измеримом подмножестве $T_i \subset T$, измерима на T. Если действительные функции f и g измеримы, то аналогично свойствам (3.08) непрерывных функций измеримы функции:

$$\min[f,g],\ \max[f,g],\ f \pm g,\ f+s,\ rf,\ f \cdot g,\ f/g,$$

где s и r – действительные постоянные, а в последнем равенстве предполагается, что $g(t) \ne 0$, $t \in T$. Вместе с функцией f измеримы и функции

$$f^+ = \max[f,0],\quad f^- = \max[-f,0],\quad |f| = f^+ + f^-.$$

Между понятиями измеримости и непрерывности функции существует взаимная связь. Функция, непрерывная на измеримом множестве, измерима. Обратное утверждение в общем случае неверно. Измеримая функция может не быть непрерывной. Так, например, функции, имеющие конечное или счетное число точек разрыва, в том числе кусочно непрерывные и кусочно постоянные функции, измеримы, но непрерывны лишь только почти всюду. В то же время любая измеримая функция становится непрерывной на замкнутом множестве, если в области ее определения пренебречь некоторым множеством сколь угодно малой меры (так называемое C-свойство измеримой функции, устанавливаемое теоремой Лузина).

П р и м е р 4.2. Функция Дирихле $f(t)=\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(\cos m!\pi t)^{2n}$, равная 1 при рациональных t и 0 при иррациональных t, измерима на любом отрезке действительной прямой и разрывна, то есть не является непрерывной. ◘

Как и в случае измеримых множеств, предел f_0 последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций, сходящейся на множестве T при $n\to\infty$, есть измеримая функция. Это следует из теоремы 4.11. Однако свойства последовательностей измеримых множеств и измеримых функций, сходящихся на пространстве с полной мерой, несколько различаются.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций *сходится почти всюду* на пространстве с полной мерой к пределу f_0 при $n\to\infty$, если существует измеримое множество такое, что

$$m(\{t\in T\mid \lim_{n\to\infty}f_n(t)\neq f_0(t)\})=0.$$

Это условие для любого $\varepsilon>0$ может быть также записано в виде

$$m(\{t\in T\mid |\lim_{n\to\infty}f_n(t)-f_0(t)|\geq\varepsilon\})=0. \tag{4.48}$$

Сходимость почти всюду последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций к пределу f_0 при $n\to\infty$ будем обозначать $f_n(t)\to_{aew}f_0(t)$, $t\in T$.

П р и м е р 4.3. Последовательность измеримых функций $\{f_n(t)\}$, где $f_n(t)=(-t)^n$, $n=1,2,\ldots$, сходится при $n\to\infty$ к функции $f_0(t)\equiv0$ почти всюду на замкнутом интервале $[0,1]=\mathbb{R}_{01}$, за исключением точки $t=1$. ◘

Функция f называется *почти всюду конечной*, если $m(\{t\in T\mid f(t)=\pm\infty\})=0$. Аналогично C-свойству, характеризующему связь между измеримостью и непрерывностью функции, сходящаяся почти всюду последовательность измеримых почти всюду конечных функций становится равномерно сходящейся, если область ее определения изменить на множество, сколь угодно мало отличающееся по мере от исходного (теорема Егорова).

Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций *сходится по мере* на пространстве с полной мерой к пределу f_0 при $n\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество такое, что

$$\lim_{n\to\infty}m(\{t\in T\mid |f_n(t)-f_0(t)|\geq\varepsilon\})=0. \tag{4.49}$$

Сходимость по мере последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций к пределу f_0 при $n\to\infty$ будем обозначать $f_n(t)\to_{mes}f_0(t)$, $t\in T$.

Понятия сходимости последовательности измеримых функций к пределу почти всюду и по мере связаны между собой следующим образом.

Т е о р е м а 4.12 (Лебег). *Всякая последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций, сходящаяся при $n\to\infty$ к пределу f_0 почти всюду на множестве T конечной меры $m(T)<\infty$, сходится к пределу f_0 по мере на множестве T, то есть*

$$f_n(t)\to_{aew}f_0(t)\ \Rightarrow\ f_n(t)\to_{mes}f_0(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_n(t)\to_{aew}f_0(t)$, $t\in T$. Тогда предел f_0 последовательности $\{f_n\}$ есть измеримая функция, и имеется измеримое множество $A\subset T$ нулевой меры, удовлетворяющее равенству (4.48). Зафиксируем в (4.48) некоторое число $\varepsilon>0$ и рассмотрим множества

$$B_k=\{t \mid |f_k(t)-f_0(t)|\geq\varepsilon\},\ C_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}B_k,\ A_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n.$$

Все множества B_k, C_n, A_0, очевидно, измеримы, а последовательность множеств $\{C_n\}$, n=1,2,… убывает при $n\to\infty$, и значит, по формуле (3.42) $C_n\downarrow A_0$. В силу свойства (4.18) непрерывности меры $\lim\limits_{n\to\infty} m(C_n)=m(A_0)$.

Пусть теперь существует точка $t_0\notin A$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t_0)=f_0(t_0)$. Тогда для данного $\varepsilon>0$ найдется число n такое, что $|\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t_0)-f_0(t_0)|<\varepsilon$, то есть $t_0\notin B_k$, а значит, и $t_0\notin A_0$. Следовательно, $A_0\subset A$. Так как мера $m(A)=0$ и $B_n\subset C_n\subset A_0\subset A$, то в силу полноты меры выполняется условие (4.49) $\lim\limits_{n\to\infty} m(\{t \mid |f_n(t)-f_0(t)|\geq\varepsilon\})=0$, то есть последовательность $\{f_n\}$ сходится к пределу f_0 по мере на множестве T. ■

З а м е ч а н и е. Требование конечности меры в теореме Лебега существенно, поскольку на множестве бесконечной меры из сходимости последовательности измеримых функций почти всюду не обязательно вытекает ее сходимость по мере. □

П р и м е р 4.4. Последовательность измеримых функций $\{f_n(t)\}$, где $f_n(t)=0$, если $0<t\leq n$, и $f_n(t)=1$, если $t>n$, n=1,2,…, сходится при $n\to\infty$ к функции $f_0(t)\equiv0$ почти всюду на открытом интервале $(0,\infty)$, однако не сходится к этой функции $f_0(t)\equiv0$ по мере, поскольку мера $m(\{t \mid f_n(t)=1\})=\infty$. ◘

В отличие от измеримых множеств из сходимости последовательности измеримых функций по мере, вообще говоря, не следует ее сходимость почти всюду. Более того, на пространствах с непрерывной мерой всегда существуют последовательности измеримых функций, которые могут сходиться по мере, но при этом не иметь предела в некоторых точках или даже нигде. В то же время выполняются следующие утверждения.

Т е о р е м а 4.13. *Из всякой последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций, удовлетворяющей для любого $\varepsilon>0$ условию*

$$\lim_{n,l\to\infty} m(\{t\in T \mid |f_n(t)-f_l(t)|\geq\varepsilon\})=0, \tag{4.50}$$

можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся почти всюду на множестве T к некоторой ограниченной измеримой функции f_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем числа $\varepsilon_k>0$ такие, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k$ был ограничен, и положим $\delta_i=\sum\limits_{k=i}^{\infty}\varepsilon_k$, i=1,2,… Для каждого k подберем натуральное число n_k такое, чтобы для $n,l\geq n_k$ выполнялось неравенство (4.50)

$$m(\{t\in T \mid |f_n(t)-f_l(t)|\geq\varepsilon_k\})<\varepsilon_k.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$, и значит, $n_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Рассмотрим множества $B_k=\{t \mid |f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)|\geq\varepsilon_k\}$, $C_i=\bigcup\limits_{k=i}^{\infty}B_k$, $A_0=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_i$, меры которых, очевидно, удовлетворяют условиям: $m(B_k)<\varepsilon_k$, $m(C_i)\le\sum_{k=i}^{\infty}\varepsilon_k=\delta_i$, $m(C_i)\to m(A_0)=0$, поскольку $\delta_i\to 0$ при $i\to\infty$.

Выделим теперь из последовательности $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и убедимся, что последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к некоторому конечному пределу f_0 во всех точках множества $T\backslash A_0$. Пусть точка $t\in T\backslash A_0$. Тогда найдется номер i_0 такой, что $t\notin C_{i0}$. Это означает, что для всех номеров $k\ge i_0$ точка $t\notin B_k$, то есть $|f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)|<\varepsilon_k$. В таком случае для любых номеров k и q таких, что $q>k\ge i_0$, выполняется неравенство

$$|f_{n_q}(t)-f_{n_k}(t)|\le\sum_{j=k}^{q-1}|f_{n_{j+1}}(t)-f_{n_j}(t)|<\sum_{j=k}^{q-1}\varepsilon_j<\sum_{j=k}^{\infty}\varepsilon_j=\delta_k .$$

Так как $\delta_k\to 0$ при $k\to\infty$, то $\lim\limits_{k,q\to\infty}|f_{n_q}(t)-f_{n_k}(t)|=0$, и значит, на множестве $T\backslash A_0$ последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к конечному пределу $\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}$. Положим теперь $f_0(t)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(t)$, если $t\in T\backslash A_0$, и $f_0(t)=0$, если $t\in A_0$. Функция f_0 и будет искомой ограниченной измеримой функцией, к которой последовательность $\{f_{n_k}\}$ измеримых функций сходится почти всюду на множестве T. ■

Т е о р е м а 4.14 (Ф.Рисс). *Из всякой последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций, сходящейся при $n\to\infty$ к пределу f_0 по мере на множестве T, можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся к пределу f_0 почти всюду на множестве T, то есть*

$$f_n(t)\to_{mes}f_0(t)\ \Rightarrow\ f_{n_k}(t)\to_{aew}f_0(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_n(t)\to_{mes}f_0(t)$, $t\in T$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество меры нуль, удовлетворяющее равенству (4.49). Построим такое множество. Возьмем две последовательности положительных чисел: $\{\varepsilon_n\}$, сходящуюся при $n\to\infty$ к нулю $\varepsilon_n\to 0$, и $\{\eta_k\}$, для которой при $k\to\infty$ сходится к нулю ряд $\Sigma_k\eta_k\to 0$, и построим возрастающую последовательность номеров $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ по следующему правилу:

номер n_1 есть такое натуральное число, что мера

$$m(B_1)<\eta_1,\quad \text{где } B_1=\{t\mid |f_{n_1}(t)-f_0(t)|\ge\varepsilon_1\},\ldots,$$

номер n_k есть такое натуральное число, что мера

$$m(B_k)<\eta_k,\quad \text{где } B_k=\{t\mid |f_{n_k}(t)-f_0(t)|\ge\varepsilon_k\}.$$

Рассмотрим множества $C_i=\bigcup_{k=i}^{\infty}B_k$, $A_0=\bigcap_{i=1}^{\infty}C_i$. Так как $\{C_i\}$, i=1,2,… – убывающая последовательность множеств и $C_i\downarrow A_0$, то в силу свойства (4.18) непрерывности меры $m(C_i)\to m(A_0)$ при $i\to\infty$. С другой стороны, силу свойства (4.10) субаддитивности меры $m(C_i)\le\sum_{k=i}^{\infty}\eta_k$, а так как ряд $\sum_{k=i}^{\infty}\eta_k$ сходится к нулю, то $m(C_i)\to 0$ при $i\to\infty$, а значит, и мера $m(A_0)=0$.

Выделим теперь из последовательности $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и убедимся, что последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к пределу f_0 во всех точках множества $T\backslash A_0$. Пусть точка $t_0 \in T\backslash A_0$. Тогда найдется номер i_0 такой, что $t_0 \notin C_{i0}$. Это означает, что для всех номеров $k \geq i_0$ точка $t_0 \notin B_k$, то есть $|f_{n_k}(t_0) - f_0(t_0)| < \varepsilon_k$. Так как по условию $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t_0) = f_0(t_0)$ на множестве $T\backslash A_0$, и следовательно, выполняется условие (4.48) $m(\{t| \mid \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t) - f_0(t)| \geq \varepsilon_k\}) = 0$, то есть последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к пределу f_0 почти всюду на T. ■

Функции f и g, заданные на одном и том же измеримом множестве T, называются *эквивалентными*, если они равны почти всюду на T, то есть мера $m(\{t \in T \mid f(t) \neq g(t)\}) = 0$. На пространстве с полной мерой функция g, эквивалентная измеримой функции f, очевидно, измерима. Нетрудно убедиться, что равенство эквивалентных функций есть отношение эквивалентности на множестве T. Из теорем 4.12 и 4.14 вытекает

С л е д с т в и е 4.14.А. *Последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций, сходящаяся почти всюду* (*или по мере*) *к пределу f_0, сходится почти всюду* (*или по мере*) *и к измеримой функции g, эквивалентной функции f_0.*

Таким образом, свойства последовательностей измеримых множеств и измеримых функций во многом схожи, хотя между ними имеются и заметные различия. Свойство измеримости множеств и функций в теории меры аналогично свойству Бэра множеств в теории метрических и топологических пространств. Так, характеристическая функция множества χ_A измерима (обладает свойством Бэра) в том и только том случае, если измеримо (обладает свойством Бэра) множество A. Если каждое подмножество множества A измеримо (соответственно обладает свойством Бэра), то множество A является множеством меры нуль (соответственно множеством первой категории) [Окт71]. Измеримость и неизмеримость множеств и функций имеют глубокую и, по-видимому, до конца не изученную теоретико-множественную природу, из-за которой не всегда оказывается возможным определить меру множества.

Глава 5
Пространства с мерой мультимножества

5.1. Мера мультимножества. Естественным представляется желание распространить на мультимножества фундаментальные концепции метрических и топологических пространств множеств, рассмотренные в предыдущих разделах. Теория таких пространств мультимножеств пока практически не создана, за исключением нескольких работ [Petr92], [Reb93], [Петр94], [Petr94], [Петр95], где предложены некоторые виды расстояний в пространствах мультимножеств. Вместе с тем, по-видимому, нет никаких принципиальных трудностей для полного или частичного переноса на мультимножества введенных выше понятий, тем более что многие из них, по существу, не зависят от фактора повторяемости элементов множества.

В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что функции мультимножеств заданы на кольце $\mathcal{K}$, σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$ или σ-алгебре $\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ подмультимножеств некоторого мультимножества $\boldsymbol{X}=\{k_X(x_1)\bullet x_1, k_X(x_2)\bullet x_2,\ldots\}$ над доменом $G=\{x_1,x_2,\ldots\}$. В качестве мультимножества $\boldsymbol{X}$ могут выступать, например, максимальное мультимножество (универсум) $\boldsymbol{Z}=\{k_Z(x_1)\bullet x_1, k_Z(x_2)\bullet x_2,\ldots\}$, постоянное мультимножество $\boldsymbol{Z}_{[k]}=\{k\bullet x_1, k\bullet x_2,\ldots\}$ или n-мерное мультимножество $\boldsymbol{X}=\{k_X(x_1)\bullet x_1,\ldots,k_X(x_n)\bullet x_n\}$.

Допустимость для мультимножеств операции сложения (0.18) позволяет по-новому взглянуть на такую важную характеристику как аддитивность функции мультимножества. Действительную функцию $f:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, определенную на семействе $\mathcal{A}$ подмультимножеств некоторого мультимножества $\boldsymbol{X}$, будем называть *сильно конечно-аддитивной* или просто *сильно аддитивной*, если для любой конечной совокупности мультимножеств из $\mathcal{A}$ выполняется равенство

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f(\boldsymbol{A}_i), \tag{5.01}$$

и *сильно счетно-аддитивной* или *сильно σ-аддитивной*, если равенство

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}f(\boldsymbol{A}_i) \tag{5.02}$$

выполняется для любой счетной совокупности мультимножеств. Как и в случае множеств, из свойства идентичности пустого мультимножества $\emptyset=\emptyset+\emptyset$ и равенства (5.01) следует, что $f(\emptyset)=f(\emptyset+\emptyset)=2f(\emptyset)$, и значит, для всякой сильно аддитивной функции мультимножества справедливо условие $f(\emptyset)=0$.

Если все мультимножества семейства $\mathcal{A}$ попарно не пересекаются (попарно дизъюнктны), то есть $\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j=\emptyset$, $i\neq j$, $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j\in\mathcal{A}$, то согласно соотношению (0.61) сумма конечного числа мультимножеств совпадает с их объединением $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i=\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i$. Очевидно, что это равенство сохраняется и при переходе к пределу $n\to\infty$. Тогда соотношения (5.01) и (5.02) для попарно дизъюнктных мультимножеств можно записать как

$$f(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{A}_i), \tag{5.03}$$

$$f(\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\boldsymbol{A}_i). \tag{5.04}$$

Аналогично функции множества будем называть функцию мультимножества, удовлетворяющую условию (5.03) или (5.04), *конечно-аддитивной* или соответственно *счетно-аддитивной* (*σ-аддитивной*). Всякая сильно аддитивная функция мультимножества является, очевидно, и аддитивной. Обратное, вообще говоря, неверно.

Таким образом, свойство аддитивности функции мультимножества более разнообразно, чем свойство аддитивности функции множеств. При переходе от мультимножеств к множествам операция арифметического сложения становится неосуществимой, и свойство сильной аддитивности пропадает. В случае попарно не пересекающихся мультимножеств будут выполняться равенства (5.03), (5.04), которые совпадают с определениями (4.01), (4.02) «обычной» конечной и счетной аддитивности функции множества.

Неотрицательная действительная функция m, определенная на семействе $\mathcal{A}$, являющемся кольцом $\mathcal{K}$, σ-кольцом $\mathcal{K}_\sigma$ или σ-алгеброй $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ подмультимножеств некоторого мультимножества $\boldsymbol{Z}$, и обладающая свойством сильной конечной или счетной аддитивности называется соответственно *сильно конечно-аддитивной* или *сильно счетно-аддитивной* (*сильно σ-аддитивной*) *мерой* мультимножества. Очевидно, как и для множеств, что мера пустого мультимножества $m(\varnothing)=0$.

Меру m с областью определения $\mathcal{A}$ назовем *конечной*, если для любого мультимножества $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}$ ее значения конечны $m(\boldsymbol{A})<\infty$, *локально конечной*, если для любого мультимножества $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}$ с мерой $m(\boldsymbol{A})>0$, существует его подмультимножество $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{A}$ такое, что $0<m(\boldsymbol{B})<\infty$, и *$\sigma$-конечной*, если мультимножество $\boldsymbol{X}$ можно представить как счетную сумму $\boldsymbol{X}=\Sigma_i\boldsymbol{A}_i$ мультимножеств $\boldsymbol{A}_i\in\mathcal{A}$ конечной меры $m(\boldsymbol{A}_i)<\infty$. Конечную ($\sigma$-конечную) меру m будем называть *вполне конечной* (*вполне σ-конечной*), если само мультимножество $\boldsymbol{X}\in\mathcal{A}$.

Мультимножества обладают «алгебраическими» свойствами, которые отсутствуют у множеств. В частности, всякое конечное $\boldsymbol{A}=\{k_A(x_1)\bullet x_1,\ldots,k_A(x_n)\bullet x_n\}$ или счетное $\boldsymbol{A}=\{k_A(x_1)\bullet x_1,k_A(x_2)\bullet x_2,\ldots\}$ мультимножество всегда можно записать в виде следующей арифметической суммы «моноэлементных» мультимножеств $\boldsymbol{A}_i=\{0,\ldots,0,k_A(x_i)\bullet x_i,0,\ldots\}=\{k_A(x_i)\bullet x_i\}$, $i=1,2,\ldots$:

$$\boldsymbol{A} = \sum_i \boldsymbol{A}_i = \sum_{x_i\in G}\{k_A(x_i)\bullet x_i\}. \tag{5.05}$$

Мультимножества $\boldsymbol{A}_i=\{k_A(x_i)\bullet x_i\}$ попарно не пересекаются, то есть $\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j=\varnothing$, $i\neq j$, поэтому их сумма равна также их объединению. В свою очередь, воспользовавшись определением (0.37) репродукции мультимножества и ее свойством аддитивности $h\bullet\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\ldots+\boldsymbol{A}$ (h раз), каждое из мультимножеств $\boldsymbol{A}_i$ можно представить как сумму $k_{Ai}=k_A(x_i)$ одинаковых одноэлементных мультимножеств (а говоря более строго – множеств) $\{x_i\}$:

$$A_i = \{k_A(x_i)\bullet x_i\} = k_{Ai}\bullet\{x_i\} = \{x_i\}+\ldots+\{x_i\}.$$

Сами же попарно дизъюнктные множества $\{x_i\}$ составляют в совокупности домен G, то есть $\bigcup_i\{x_i\}=\{x_1,x_2,\ldots\}=G$. Итак, всякое мультимножество есть, по сути, некоторая взвешенная арифметическая сумма одноэлементных попарно не пересекающихся множеств $\{x_i\}$. Заметим, что для множеств такое представление, как (5.05), неосуществимо.

Положим, как и ранее, меру одноэлементного множества $\{x_i\}$ равной $m(\{x_i\})=w_i$, где $0\leq w_i<\infty$. Тогда согласно равенствам (5.02) и (5.05) определенная на семействе мультимножеств $\mathcal{A}$ функция

$$m(\boldsymbol{A}) = m(\sum_i \boldsymbol{A}_i) = \sum_i m(\boldsymbol{A}_i) = \sum_{x_i\in G}[k_A(x_i)m(\{x_i\})] = \sum_{x_i\in G} w_i k_A(x_i). \quad (5.06)$$

является сильно конечно-аддитивной и вполне конечной (или соответственно сильно σ-аддитивной и вполне σ-конечной) мерой.

Если все числа $w_k=1$, то, учитывая определение (0.05) мощности мультимножества, получим из соотношения (5.06):

$$m(\boldsymbol{A}) = \sum_{x_i\in X} k_A(x_i) = |\boldsymbol{A}|. \quad (5.07)$$

Таким образом, мощность мультимножества есть частный случай его меры.

Как и в случае множеств, меру m_2 будем называть *продолжением* на семейство мультимножеств $\mathcal{A}_2$ меры m_1, определенной на семействе мультимножеств $\mathcal{A}_1$, если $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}_2$, и для каждого мультимножества $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}_1$ имеет место равенство $m_2(\boldsymbol{A})=m_1(\boldsymbol{A})$. При унитаризации функции кратности формулы (5.03), (5.04), (5.06), (5.07) переходят в соответствующие им выражения (4.01)-(4.04) для множеств.

5.2. Свойства меры мультимножества. Установим некоторые важные свойства меры мультимножества, связанные с ее сильной аддитивностью и во многом напоминающие свойства мощности мультимножества.

Т е о р е м а 5.1. *Конечная сильно аддитивная мера, определенная на кольце мультимножеств* $\mathcal{K}$, *удовлетворяет следующим равенствам:*

$$m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) + m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}), \quad (5.08)$$

$$m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{B}) - m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}), \quad (5.09)$$

$$m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{B}) - 2m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}), \quad (5.10)$$

$$m(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}), \quad (5.11)$$

$$m(h\bullet\boldsymbol{A}) = hm(\boldsymbol{A}), \quad (5.12)$$

где h – положительное целое число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства (5.08)-(5.11) сразу следуют из выражений (0.55)-(0.60), связывающих различные операции над мультимножествами, и определения (5.01) сильной аддитивности меры мультимножества. Наиболее просто эти соотношения получаются, если учесть, что в силу формул $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})$ и $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})$ имеем равенства $m(\boldsymbol{A})=m(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})$ и $m(\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})+m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})$. Соотношение (5.12) вытекает из определения (5.01) и равенства $h\bullet\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\ldots+\boldsymbol{A}$ (h раз). ■

Свойство, выражаемое равенством (5.12), назовем *эластичностью* меры мультимножества.

При $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$ из соотношений (5.11) и $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$ имеем $m(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A})-m(\boldsymbol{B})$. Отсюда в силу неотрицательности меры получаем свойство ее *монотонности*

$$\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A} \;\Rightarrow\; m(\boldsymbol{B})\leq m(\boldsymbol{A}). \tag{5.13}$$

Из свойства (5.13) монотонности меры мультимножества и всегда справедливых включений $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ вытекает

С л е д с т в и е 5.1.А. *Конечная сильно аддитивная мера, определенная на кольце мультимножеств* $\mathcal{K}$, *удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$|m(\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{B})| \leq m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}), \tag{5.14}$$

$$m(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \leq m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) \leq m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}), \tag{5.15}$$

$$m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) \leq m(\boldsymbol{A}) \leq m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) \leq m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}). \tag{5.16}$$

З а м е ч а н и е. Напомним, что семейство $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ всех подмультимножеств n-мерного мультимножества $\boldsymbol{X}$ представляет собой полную дистрибутивную решетку, в которой нижняя и верхняя грани элементов $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$ определяются как пересечение $\inf(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ и объединение $\sup(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ мультимножеств. В этом случае равенство (5.08) совпадает с равенством (1.39), а мера мультимножества будет оценкой на решетке $\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$. □

Всякая сильно счетно-аддитивная мера мультимножества обладает также свойством *непрерывности*, аналогичным свойству (4.18) меры множества.

Т е о р е м а 5.2. *Мера* $m(\boldsymbol{A})$ *предела* $\boldsymbol{A}$ *сходящейся последовательности мультимножеств* $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *удовлетворяет соотношению:*

$$\lim_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n) = m(\boldsymbol{A}) = m(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n), \tag{5.17}$$

где $m(\boldsymbol{A}_n)$ *– сильно счетно-аддитивная мера мультимножества* $\boldsymbol{A}_n$, *определенная на* σ*-кольце мультимножеств* $\mathcal{K}_\sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим мультимножества $\boldsymbol{A}=\{k_A(x_1)\bullet x_1, k_A(x_2)\bullet x_2,\ldots\}$ и $\boldsymbol{A}_n=\{k_{An}(x_1)\bullet x_1, k_{An}(x_2)\bullet x_2,\ldots\}$, $x_j\in G$ в виде разбиений (5.05) на попарно не пересекающиеся «моноэлементные» мультимножества $\boldsymbol{A}_i$ и $\boldsymbol{A}_{ni}$, которые являются компонентами соответствующих мультимножеств, и воспользуемся свойствами сильной счетной аддитивности (5.02) и эластичности (5.12) меры, результатами теоремы 3.19. Тогда получаем следующие соотношения:

$$m(\boldsymbol{A}) = m(\sum_i \boldsymbol{A}_i) = \sum_{x_i\in G} m(\{k_A(x_i)\bullet x_i\}) = \sum_{x_i\in G}[k_A(x_i)m(\{x_i\})] =$$

$$= \sum_{x_i\in G}\lim_{n\to\infty}[k_{A_n}(x_i)m(\{x_i\})] = \lim_{n\to\infty}\sum_{x_i\in G}[k_{A_n}(x_i)m(\{x_i\})] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{x_i\in G} m(\{k_{A_n}(x_i)\bullet x_i\}) = \lim_{n\to\infty} m(\sum_i \boldsymbol{A}_{ni}) = \lim_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n). \;\blacksquare$$

Если убывающая последовательность мультимножеств с конечной мерой стремится к пределу $\boldsymbol{A}_0=\varnothing$, то из равенства (5.17) имеем

$$\lim_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n) = m(\boldsymbol{A}_0) = m(\varnothing) = 0, \tag{5.18}$$

что соответствует установленному ранее свойству меры мультимножества $m(\varnothing)=0$. Мера $m(\boldsymbol{A}^0)$ предела возрастающей последовательности мультимножеств, как и у множеств, может оказаться бесконечной.

З а м е ч а н и е. Обратим внимание читателя, что благодаря свойствам мультимножеств, отсутствующим у множеств, теорема 5.2 и ее доказательство существенно отличаются от аналогичной теоремы 4.5 для множеств. □

Меры нижнего предела $\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n$ (3.46) и верхнего предела $\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n$ (3.47) последовательности мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ удовлетворяют неравенствам:

$$m(\underline{\lim}_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n) \le \liminf_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n), \quad m(\overline{\lim}_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n) \ge \limsup_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n),$$

которые можно записать также как

$$m(\underline{\lim}\boldsymbol{A}_n) \le \underline{m}(\boldsymbol{A}), \quad m(\overline{\lim}\boldsymbol{A}_n) \ge \overline{m}(\boldsymbol{A}),$$

где $\underline{m}$ и $\overline{m}$ суть соответственно нижний и верхний пределы меры m как функции мультимножества. В случае второго из неравенств дополнительно требуется, чтобы мера $m(\bigcup_{n=k}^{\infty}\boldsymbol{A}_n)<\infty$ была конечной для некоторого номера k.

Т е о р е м а 5.3. *Пусть сильно конечно-аддитивная мера m определена на кольце мультимножеств $\mathcal{K}$. Если все мультимножества $\boldsymbol{A}_i\in\mathcal{K}$ попарно не пересекаются $\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j=\varnothing$, $i\neq j$ и их объединение или сумма $\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\subseteq\boldsymbol{A}\in\mathcal{K}$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{A}_i) \le m(\boldsymbol{A}).$$

Если мультимножество $\boldsymbol{A}\in\mathcal{K}$ содержится в объединении $\boldsymbol{A}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i$ или сумме $\boldsymbol{A}\subseteq\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i$ произвольных мультимножеств $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_k\in\mathcal{K}$, то справедливо неравенство

$$m(\boldsymbol{A}) \le \sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{A}_i)\ .$$

Сильно счетно-аддитивная мера мультимножества m удовлетворяет аналогичным неравенствам, где n бесконечно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Мера объединения $\bigcup_i \boldsymbol{A}_i$ попарно не пересекающихся мультимножеств удовлетворяет условию (5.03) или (5.04). Тогда в силу свойства (5.13) монотонности меры мультимножества имеем для конечного или бесконечного n

$$\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{A}_i) = m(\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i) \le m(\boldsymbol{A}).$$

2°. Для конечного числа произвольных мультимножеств согласно соотношению (0.88) имеем $\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i\subseteq\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i$. Отсюда, учитывая монотонность (5.13) и сильную конечную аддитивность (5.01) меры мультимножества, получаем искомое неравенство:

$$m(\boldsymbol{A}) \le m(\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i) \le m(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{A}_i)\ .$$

которое в силу непрерывности (5.17) меры сохраняется и при $n\to\infty$. ■

Таким образом, сильно аддитивная и аддитивная меры мультимножества обладают свойством *конечной* (*счетной*) *субаддитивности*

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) \le \sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{A}_i) \ , \tag{5.19}$$

соответственно для конечного или бесконечного n. Из соотношения (0.88) $\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i$, справедливого и при $n \to \infty$, свойств монотонности и непрерывности меры мультимножества вытекает и более общее свойство *расширенной конечной* (*счетной*) *субаддитивности* меры, выражаемое неравенством

$$m(\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) \le m(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) \le m(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{A}_i) \ , \tag{5.20}$$

где n соответственно конечно или бесконечно. Расширенная субаддитивность меры мультимножества включает в себя, очевидно, и «обычную» субаддитивность меры (5.19). Формулы (5.19), (5.20) аналогичны формулам (4.10), (4.28), выражающим субаддитивность меры множества.

Укажем правила вычисления меры мультимножества, аналогичные правилам вычисления мощностей конечного семейства мультимножеств (0.80), (0.82) и совпадающие с правилами (4.21), (4.22) вычисления меры множества.

Т е о р е м а 5.4. *Сильно конечно-аддитивная мера, определенная на кольце мультимножеств* $\mathcal{K}$, *удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{A}_i) - \sum_{1\le i<j\le n} m(\boldsymbol{A}_i \cap \boldsymbol{A}_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} m(\boldsymbol{A}_i \cap \boldsymbol{A}_j \cap \boldsymbol{A}_k) - \ldots - (-1)^n \, m(\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i); \tag{5.21}$$

$$m(\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{A}_i) - \sum_{1\le i<j\le n} m(\boldsymbol{A}_i \cup \boldsymbol{A}_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} m(\boldsymbol{A}_i \cup \boldsymbol{A}_j \cup \boldsymbol{A}_k) - \ldots - (-1)^n \, m(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i). \tag{5.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выражения (5.21), (5.22) непосредственно следуют из правил (0.61), (0.62) подсчета мультимножеств и соотношений (5.08), (5.09) между сильно аддитивными мерами мультимножеств. Доказательство может быть также получено методом математической индукции, практически полностью повторяющим доказательство теоремы 4.6. ■

Правила (5.21) и (5.22) вычисления сильно аддитивной меры можно записать в более симметричном виде, обобщающем равенства (5.08) и (5.09) и аналогичном формуле Сильвестра (правилу включения-исключения):

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} m(\boldsymbol{A}_{i_1} \cap \ldots \cap \boldsymbol{A}_{i_k}) \ , \tag{5.23}$$

$$m(\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} m(\boldsymbol{A}_{i_1} \cup \ldots \cup \boldsymbol{A}_{i_k}) \ . \tag{5.24}$$

Отсюда и из свойства (5.13) монотонности меры мультимножества снова можно получить свойство (5.20) расширенной субаддитивности меры мультимножества, которое в силу непрерывности меры выполняется и при $n \to \infty$.

Итак, мера мультимножества m, как и мера множества, обладает свойствами неотрицательности, аддитивности, монотонности, непрерывности и расширенной субаддитивности, а также свойствами сильной аддитивности и эластичности, отсутствующими у меры множества. Соотношения (5.09)-(5.24), за исключением равенства (5.12), совпадают с аналогичными соотношениями для множеств, хотя справедливость некоторых из них доказывается по-другому.

З а м е ч а н и е. Обратим внимание читателя, что благодаря свойствам мультимножеств доказательства теорем 5.3, 5.4 гораздо проще, чем аналогичных теорем 4.3, 4.6 для множеств. □

5.3. Измеримые мультимножества. Распространим на мультимножества введенные для множеств понятия измеримости. *Внешней* (*верхней*) *мерой* мультимножества $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{X}$, *индуцированной мерой* m, назовем число

$$m^*(\boldsymbol{A}) = \inf_{\boldsymbol{A}\subset\bigcup_i \boldsymbol{A}_i} \{\sum_{i=1}^{\infty} m(\boldsymbol{A}_i)\}, \tag{5.25}$$

где сильно счетно-аддитивная мера m определена на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$ мультимножеств $\boldsymbol{A}_i\subset\boldsymbol{X}$, а точная нижняя грань берется по всем возможным покрытиям мультимножества $\boldsymbol{A}$ счетными семействами мультимножеств $\boldsymbol{A}_i\in\mathcal{K}_\sigma$. Таким образом, внешняя мера мультимножества m^* представляет собой функцию, заданную на семействе мультимножеств, включающем все подмультимножества мультимножества $\boldsymbol{X}$. С учетом доказанных выше теорем 5.1-5.3 внешняя мера мультимножества m^* обладает свойствами неотрицательности, монотонности (5.13), непрерывности (5.17), расширенной субаддитивности (5.20) и эластичности (5.12), но не обязательно является сильно аддитивной.

Внутренней (*нижней*) *мерой* мультимножества $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{X}$, *индуцированной мерой* m назовем число

$$m_*(\boldsymbol{A}) = m(\boldsymbol{X}) - m^*(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}). \tag{5.26}$$

Из субаддитивности меры мультимножества следует, что $m_*(\boldsymbol{A})\leq m^*(\boldsymbol{A})$.

Мультимножество $\boldsymbol{A}$, принадлежащее σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$ мультимножеств $\boldsymbol{A}_i\subset\boldsymbol{X}$, будем называть *измеримым по Лебегу* или *m^*-измеримым*, если для любого мультимножества $\boldsymbol{C}\in\mathcal{K}_\sigma$ выполняется условие:

$$m^*(\boldsymbol{C}) = m^*(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}) + m^*[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A})\cap\boldsymbol{C}].$$

Если в качестве мультимножества $\boldsymbol{C}$ взять максимальное мультимножество $\boldsymbol{Z}$, то определение m^*-измеримости мультимножества $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{Z}$ можно записать в более компактной форме:

$$m^*(\boldsymbol{Z}) = m^*(\boldsymbol{A}) + m^*(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A}). \tag{5.27}$$

Учитывая, что в силу свойства (0.47) операций над мультимножествами справедливо равенство $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A})$, выражение (5.27) представляет собой ничто иное, как условие (5.01) сильной аддитивности внешней меры m^*-измеримого мультимножества.

Из соотношений (5.26) и (5.27) вытекает, что для вполне конечных мер, заданных на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$, определение m^*-измеримости мультимножества $\boldsymbol{A}$ эквивалентно условию $m_*(\boldsymbol{A})=m^*(\boldsymbol{A})$. Это общее значение меры m^*-измеримого мультимножества $\boldsymbol{A}$ назовем его *лебеговской мерой*, которая представляет собой сильно счетно-аддитивное продолжение меры m на семейство m^*-измеримых мультимножеств. В дальнейшем, говоря об измеримости мультимножества, будем подразумевать его m^*-измеримость и для простоты записи опускать символ * в обозначении меры.

Необходимые и достаточные условия m-измеримости мультимножества формулируются следующим образом.

Т е о р е м а 5.5. *Мультимножество **A**, принадлежащее σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$, m-измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует m-измеримое мультимножество $\boldsymbol{B}\in\mathcal{K}_\sigma$ такое, что выполняется неравенство*

$$m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) < \varepsilon. \tag{5.28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть мультимножество $\boldsymbol{A}\in\mathcal{K}_\sigma$ m-измеримо, то есть выполняется равенство (5.27). По определению (5.25) внешней меры мультимножества $\boldsymbol{A}$ существует такое покрытие мультимножества $\boldsymbol{A}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{B}_i$ семейством $\{\boldsymbol{B}_i\}$ подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}$, что для произвольного $\varepsilon>0$ будет выполняться неравенство $\sum_{i=1}^{\infty}m(\boldsymbol{B}_i)-m(\boldsymbol{A})<\varepsilon$. Так как внешняя мера $m(\boldsymbol{A})$ вполне конечна и, значит, $\sum_{i=1}^{\infty}m(\boldsymbol{B}_i)<\infty$, то найдется такое натуральное число n, что для всех номеров $i>n$ выполняется неравенство $\sum_{i>n}^{\infty}m(\boldsymbol{B}_i)<\varepsilon$.

Представим мультимножество $\boldsymbol{A}$ как объединение двух мультимножеств $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{D}$, где $\boldsymbol{B}=\bigcup_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}_i$ и $\boldsymbol{D}=\bigcup_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{B}_i$. По построению мультимножество $\boldsymbol{B}$ является подмультимножеством мультимножества $\boldsymbol{A}$, и значит, мультимножество $\boldsymbol{B}$ также m-измеримо. В силу свойства (5.19) субаддитивности внешней меры имеем:

$$m(\boldsymbol{A}) = m(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{D}) \le m(\boldsymbol{B}) + m(\boldsymbol{D}) < m(\boldsymbol{B}) + \varepsilon,$$

откуда с учетом равенства (5.10) и условия $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{A}$ получаем:

$$m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{B}) < \varepsilon.$$

Таким образом, мультимножество $\boldsymbol{B}$ удовлетворяет неравенству (5.28), чем и доказывается его необходимость.

2°. Пусть теперь для любого $\varepsilon>0$ существует m-измеримое мультимножество $\boldsymbol{B}$ такое, что выполняется неравенство (5.28). Тогда с учетом соотношения (5.14) для любого мультимножества $\boldsymbol{A}$ имеем:

$$|m(\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{B})| \le m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) < \varepsilon.$$

Так как согласно формуле (0.53) $(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A})\Delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}$, то точно так же имеем:

$$|m(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})| < \varepsilon.$$

Учитывая, что мультимножество $\boldsymbol{B}$ удовлетворяет равенству (5.27), и принимая во внимание приведенные выше неравенства, получаем:

$$|m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{X})| = |m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{B}) - m(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})| \le$$
$$\le |m(\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{B})| + |m(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})| < 2\varepsilon.$$

Так число $\varepsilon>0$ произвольно, то и мультимножество $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет (5.27)

$$m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{X}) = 0,$$

то есть и мультимножество $\boldsymbol{A}$ m-измеримо. Достаточность условия (5.28) и теорема в целом доказаны. ■

Пару $(\boldsymbol{X},\mathcal{K}_\sigma)$, состоящую из произвольного мультимножества $\boldsymbol{X}$ и σ-кольца $\mathcal{K}_\sigma$ его подмультимножеств $\boldsymbol{A}_i\subset\boldsymbol{X}$, которые образуют покрытие мультимножества $\boldsymbol{X}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_i$, будем называть, как и в случае множеств, *измеримым пространством*, а подмультимножества $\boldsymbol{A}_i$, принадлежащие σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$, – *измеримыми мультимножествами*.

Согласно теореме 5.1 и соотношениям (5.08)-(5.12) сумма, объединение и пересечение конечного числа измеримых мультимножеств, разность и симметрическая разность двух измеримых мультимножеств, репродукция измеримого мультимножества являются измеримыми мультимножествами. Неизмеримому мультимножеству не приписывается никакой меры – ни конечной, ни бесконечной.

Измеримое мультимножество нулевой меры называется *нулевым мультимножеством*. Пустое мультимножество $\varnothing$ является нулевым мультимножеством, так как по определению его мера $m(\varnothing)=0$. Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* на измеримом пространстве $(\boldsymbol{X},\mathcal{K}_\sigma)$, если подмультимножество $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{X}$, где это свойство отсутствует, имеет нулевую меру.

Тройку $(\boldsymbol{X},\mathcal{K}_\sigma,m)$, где $(\boldsymbol{X},\mathcal{K}_\sigma)$ – измеримое пространство, а m – σ-конечная мера, определенная на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$ подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}$, будем называть *пространством с мерой мультимножества*. Мера m и пространство с мерой $(\boldsymbol{X},\mathcal{K}_\sigma,m)$, как и в случае множеств, называются *полными*, если каждое подмультимножество $\boldsymbol{B}_i$ любого мультимножества $\boldsymbol{A}$ меры нуль также содержится в σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma$, то есть из условий $\boldsymbol{A}\in\mathcal{K}_\sigma$, $m(\boldsymbol{A})=0$ и $\boldsymbol{B}_i\subseteq\boldsymbol{A}$ следует, что $\boldsymbol{B}_i\in\mathcal{K}_\sigma$ и $m(\boldsymbol{B}_i)=0$. Всякую меру можно сделать полной, присоединив к σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$ мультимножества вида $\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}_i$, где $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_i\in\mathcal{K}_\sigma$, $m(\boldsymbol{B}_i)=0$, и положив для них $m(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}_i)=m(\boldsymbol{A})$.

Всякую сильно счетно-аддитивную меру m, определенную на σ-кольце мультимножеств $\mathcal{K}_\sigma$, в свою очередь можно продолжить на σ-алгебру $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ над максимальным мультимножеством $\boldsymbol{Z}$. Полученное таким образом продолжение меры мультимножества m назовем *стандартным*. Как и для множества, стандартное продолжение меры мультимножества будет, по-видимому, полной мерой. Условие (5.27) m-измеримости мультимножества $\boldsymbol{A}$, принадлежащего σ-алгебре $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, приобретает следующий вид:

$$m(\boldsymbol{Z}) = m(\boldsymbol{A}) + m(\overline{\boldsymbol{A}}). \tag{5.29}$$

где $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A}$ – дополнение мультимножества $\boldsymbol{A}$ до мультимножества $\boldsymbol{Z}$. Свойство (5.29) назовем *симметричностью* меры мультимножества. В дальнейшем, как правило, будем рассматривать пространства $(\boldsymbol{X},\mathcal{S}, m)$ с полной мерой мультимножества.

Оперируя с измеримыми мультимножествами, часто можно не делать различия между мультимножествами меры нуль. Два мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, принадлежащие пространству с полной мерой, будем называть *m-равными* и обозначать $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\mathrm{mod}\,m)$, если $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=0$, и *m-дизъюнктными*, если $m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})=0$. Мультимножество $\boldsymbol{A}$ будем называть *m-подмультимножеством* мультимножества $\boldsymbol{B}$ и записывать $\boldsymbol{A}\subseteq_m\boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}(\mathrm{mod}\,m)$, если $m(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$. Очевидно, как и в случае равенства мультимножеств, что условие $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{B}$ выполняется, если одновременно $\boldsymbol{A}\subseteq_m\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}\subseteq_m\boldsymbol{A}$. Если $\boldsymbol{A}_1=_m\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{A}_2=_m\boldsymbol{B}_2$, то справедливы равенства

$$\boldsymbol{A}_1\cup\boldsymbol{A}_2=_m\boldsymbol{B}_1\cup\boldsymbol{B}_2,\quad \boldsymbol{A}_1\cap\boldsymbol{A}_2=_m\boldsymbol{B}_1\cap\boldsymbol{B}_2,\quad \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2=_m\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2.$$

Согласно условиям (5.09)-(5.11) меры m-равных мультимножеств удовлетворяют соотношениям:

$$m(\boldsymbol{A})=m(\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}),\quad m(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=0.$$

Поэтому в соответствии с условием (5.28) всякое мультимножество, m-равное измеримому мультимножеству, измеримо. Имеет место также следующее утверждение.

Л е м м а 5.А. *m-равенство измеримых мультимножеств* $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{B}$, *определяемое условием* $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=0$, *есть отношение эквивалентности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отношение m-равенства мультимножеств симметрично, рефлексивно и транзитивно. Симметричность и рефлексивность отношения $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{B}$ очевидны. Его транзитивность вытекает из соотношения (3.52) $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\subseteq(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})$, справедливого для произвольных мультимножеств. Учитывая свойства (5.13) монотонности и (5.01) сильной аддитивности меры мультимножества, получаем неравенство

$$m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})\le m[(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})]=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{B}).\tag{5.30}$$

Отсюда следует, что если $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C}=_m\boldsymbol{B}$, то есть $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})=0$ и $m(\boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{B})=0$, то и $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=0$, то есть $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{B}$. Таким образом, m-равенство мультимножеств представляет собой отношение эквивалентности измеримых мультимножеств, равных с точностью до мультимножеств меры нуль, а значит, выполняется почти всюду на пространстве с мерой $(\boldsymbol{X},\mathcal{S},m)$. ■

5.4. Последовательности измеримых мультимножеств. Рассмотрим особенности сходимости последовательности измеримых мультимножеств на пространстве с мерой $(\boldsymbol{X},\mathcal{S},m)$. Из определения (3.49) предела сходящейся последовательности мультимножеств, свойства (5.17) непрерывности меры и условия (5.28) измеримости мультимножества вытекает

С л е д с т в и е 5.5.А. *Предел* $\boldsymbol{A}$ *сходящейся последовательности* $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *измеримых мультимножеств, принадлежащих пространству с мерой* $(\boldsymbol{X},\mathcal{S},m)$, *является измеримым мультимножеством и принадлежит этому же пространству.*

В случае полной меры введем несколько новых понятий сходимости последовательности измеримых мультимножеств. Будем говорить, что последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств *сходится почти всюду* на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{X},\mathcal{S},m)$ к пределу $\boldsymbol{A}$ при $n\to\infty$, если

$$m[\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})]=0.\tag{5.31}$$

Условие (5.31) с учетом формулы (3.51) можно также записать в виде:

$$m[(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_n)\Delta \boldsymbol{A}] = 0. \tag{5.32}$$

Будем говорить, что последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств *сходится по мере* на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{X}, \mathcal{S}, m)$ к пределу $\boldsymbol{A}$ при $n\to\infty$, если

$$\lim_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}) = 0. \tag{5.33}$$

Покажем, что понятия сходимости последовательности измеримых мультимножеств к пределу почти всюду и по мере равносильны.

Т е о р е м а 5.6. *Последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств сходится при $n\to\infty$ к пределу $\boldsymbol{A}$ почти всюду на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{X}, \mathcal{S}, m)$ тогда и только тогда, когда она сходится к пределу $\boldsymbol{A}$ по мере.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств сходится при $n\to\infty$ к пределу $\boldsymbol{A}$ почти всюду на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{X}, \mathcal{S}, m)$. Согласно следствию 5.5.А предел $\boldsymbol{A}$ также есть измеримое мультимножество, принадлежащее пространству $(\boldsymbol{X}, \mathcal{S}, m)$. Из условия (5.31) и свойства (5.17) непрерывности меры сразу получаем условие (5.33) сходимости последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ по мере:

$$m[\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A})] = \lim_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}) = 0.$$

2°. Пусть теперь последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу $\boldsymbol{A}$ по мере на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{X}, \mathcal{S}, m)$. Аналогичным образом убеждаемся, что из условия (5.33) и свойства (5.17) непрерывности меры вытекает условие (5.31) сходимости последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ почти всюду:

$$\lim_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}) = m[\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A})] = 0. \quad \blacksquare$$

Из следствия 5.5.А и теоремы 5.6 имеем

С л е д с т в и е 5.6.А. *Предел $\boldsymbol{A}$ последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств, сходящейся при $n\to\infty$ почти всюду или по мере на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{X}, \mathcal{S}, m)$, есть измеримое мультимножество.*

Отсюда и из определения (3.48) вытекает, что абсолютная сходимость последовательности измеримых мультимножеств есть частный случай сходимости по мере. Таким образом, говоря о сходимости последовательности измеримых мультимножеств на пространстве с полной мерой, можно не делать различия между сходимостью почти всюду и сходимостью по мере и использовать для обозначения условий (5.31)-(5.33) один и тот же символ $\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}$.

Пределы сходящихся последовательностей измеримых мультимножеств обладают также следующими свойствами.

Т е о р е м а 5.7. *Если последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств сходится по мере к пределу $\boldsymbol{A}$:*

то последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ сходится по мере и к измеримому мультимножеству $\boldsymbol{B}$, m-равному мультимножеству $\boldsymbol{A}$;

то к тому же пределу $\boldsymbol{A}$ сходится по мере и последовательность $\{\boldsymbol{B}_n\}$, состоящая из мультимножеств $\boldsymbol{B}_n$, m-равных мультимножествам $\boldsymbol{A}_n$.

Если последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств сходится по мере к пределу $\boldsymbol{A}$, а последовательность $\{\boldsymbol{B}_n\}$, состоящая из мультимно-

жеств $\boldsymbol{B}_n$, *m-равных мультимножествам* $\boldsymbol{A}_n$, *сходится по мере к пределу* $\boldsymbol{B}$, *то мультимножества* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *m-равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть $\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}$ при $n\to\infty$, то есть выполняется условие (5.33) $\lim\limits_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})=0$, и $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{B}$, то есть $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=0$. Тогда согласно неравенству (5.30) имеем

$$m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{B}) \le m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})+m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A}).$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{B})=0$, то есть $\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{B}$ при $n\to\infty$.

2°. Пусть $\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}$ при $n\to\infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})=0$, и $\boldsymbol{A}_n=_m\boldsymbol{B}_n$, то есть $m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{B}_n)=0$. Учитывая, что

$$m(\boldsymbol{B}_n\Delta\boldsymbol{A}) \le m(\boldsymbol{B}_n\Delta\boldsymbol{A}_n)+m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A}) = m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A}),$$

аналогичным образом получаем $\boldsymbol{B}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}$ при $n\to\infty$.

3°. Пусть теперь $\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}_n \to_{mes} \boldsymbol{B}$ при $n\to\infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m(\boldsymbol{B}_n\Delta\boldsymbol{B})=0$, и $\boldsymbol{A}_n=_m\boldsymbol{B}_n$, то есть $m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{B}_n)=0$. Учитывая, что

$$m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) \le m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{A}_n)+m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{B}_n)+m(\boldsymbol{B}_n\Delta\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})+m(\boldsymbol{B}_n\Delta\boldsymbol{B}),$$

получаем $\lim\limits_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=0$. Так как мера $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$ является постоянной величиной, не зависящей от n, то $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=0$, то есть $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{B}$. ■

Последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств будем называть *сходящейся в себе по мере* на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{X},\mathcal{S}, m)$ или *m-фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ выполняется неравенство

$$m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A}_l) < \varepsilon, \tag{5.34}$$

которое равносильно условию

$$\lim_{n,l\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A}_l) = 0. \tag{5.35}$$

Для последовательностей измеримых мультимножеств, сходящихся по мере или почти всюду на пространстве с полной мерой, выполняется следующий обобщенный критерий сходимости.

Т е о р е м а 5.8. *Последовательность* $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *измеримых мультимножеств сходится по мере на пространстве с полной мерой* $(\boldsymbol{X},\mathcal{S}, m)$ *тогда и только тогда, когда является m-фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть последовательность измеримых мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ сходится по мере на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{X},\mathcal{S}, m)$ к пределу $\boldsymbol{A}$. Тогда согласно определению (5.33) для любого $\varepsilon>0$ найдется число N такое, что при номерах $n>N$ будет справедливо неравенство $m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})<\varepsilon$. В силу соотношения (5.30) для любых $n,l>N$ выполняется условие (5.34):

$$m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A}_l) \le m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{A}_l) < 2\varepsilon,$$

то есть последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ является m-фундаментальной.

2°. Пусть теперь последовательность измеримых мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ m-фундаментальна на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$, то есть для любого $\varepsilon>0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ выполняется неравенство $m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A}_l)<\varepsilon$. Выберем номер $n_k\geq N$ таким образом, чтобы неравенство $m(\boldsymbol{A}_{n_{k+s}}\Delta\boldsymbol{A}_{n_k})<1/2^k$ выполнялось для любого целого числа $s\geq1$, и рассмотрим мультимножества

$$\boldsymbol{C}_k=\bigcap_{i=k}^{\infty}\boldsymbol{A}_{n_k},\quad \boldsymbol{D}_k=(\boldsymbol{A}_{n_k}\Delta\boldsymbol{A}_{n_{k+1}})+(\boldsymbol{A}_{n_{k+1}}\Delta\boldsymbol{A}_{n_{k+2}})+\ldots=\sum_{i=k}^{\infty}(\boldsymbol{A}_{n_i}\Delta\boldsymbol{A}_{n_{i+1}}),\quad \boldsymbol{A}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{C}_k.$$

Очевидно, что мультимножества $\boldsymbol{C}_k$, $\boldsymbol{D}_k$ и $\boldsymbol{A}$ принадлежат пространству $(\boldsymbol{X},\mathcal{S}, m)$. Нетрудно убедиться, что $\{\boldsymbol{C}_k\}$ – возрастающая последовательность мультимножеств $\boldsymbol{C}_1\subset\ldots\subset\boldsymbol{C}_k\subset\ldots$, и выполняются включения $\boldsymbol{C}_k\subset\boldsymbol{A}_{n_k}$, $\boldsymbol{A}_{n_k}\Delta\boldsymbol{C}_k\subseteq\boldsymbol{D}_k$, $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C}_k\subseteq\boldsymbol{D}_k$. А значит, в силу соотношения $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\subseteq(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})$, справедливого для произвольных мультимножеств, выполняется и включение $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{A}_{n_k}\subseteq\boldsymbol{D}_k$. Согласно свойствам монотонности (5.13) и сильной счетной аддитивности (5.02) меры мультимножества имеем

$$m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{A}_{n_k})\leq m(\boldsymbol{D}_k)=\sum_{i=k}^{\infty}(\boldsymbol{A}_{n_i}\Delta\boldsymbol{A}_{n_{i+1}})<\sum_{i=k}^{\infty}(1/2^i)=1/2^{k-1}.$$

Тогда для любого $n>n_k$ получаем с учетом соотношения (5.30)

$$m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{A}_n)\leq m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{A}_{n_k})+m(\boldsymbol{A}_{n_k}\Delta\boldsymbol{A}_n)<(1/2^{k-1})+(1/2^k)=3/2^k.$$

Мультимножество $\boldsymbol{A}$ по построению состоит из элементов x, принадлежащим при $n>n_k$ всем мультимножествам $\boldsymbol{A}_n$, за исключением, быть может, конечного числа из них, то есть по определению $\boldsymbol{A}$ является пределом последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ и, кроме того, принадлежит пространству $(\boldsymbol{X},\mathcal{S}, m)$. При $k\to\infty$, очевидно, $n_k\to\infty$ и $n\to\infty$. Следовательно, выполняется условие (5.33) $\lim\limits_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n\Delta\boldsymbol{A})=0$, то есть последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ сходится при $n\to\infty$ к пределу $\boldsymbol{A}$ по мере. ■

Теоремы 5.5-5.8 обобщают на мультимножества аналогичные теоремы 4.7-4.10 для множеств.

Наряду с неотрицательной мерой m можно определить и другие сильно и просто аддитивные и счетно-аддитивные функции $f:\mathcal{S}(\boldsymbol{X})\to\mathbb{R}$, заданные на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ и принимающие произвольные действительные значения, которые будут обладать многими свойствами меры m.

Глава 6
Функциональные пространства

6.1. Векторные пространства. Метрические пространства, элементами которых являются векторы, числовые последовательности, непрерывные, ограниченные и измеримые функции, принято называть *функциональными пространствами.* Рассмотрим наиболее известные примеры функциональных метрических пространств.

Семейство $\mathbb{R}^n$ n-мерных векторов $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ с действительными компонентами $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$ образует *n-мерное векторное пространство*:

$R^n{}_\infty = (\mathbb{R}^n, d_{R\infty})$ с метрикой *Чебышева*

$$d_{R\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{1\le i\le n} | x_i - y_i |; \tag{6.01}$$

$R^n{}_1 = (\mathbb{R}^n, d_{R1})$ с метрикой *Хемминга*

$$d_{R1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |; \tag{6.02}$$

$R^n{}_2 = (\mathbb{R}^n, d_{R2})$ с метрикой *Евклида*

$$d_{R2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}; \tag{6.03}$$

$R^n{}_p = (\mathbb{R}^n, d_{Rp})$ с метрикой *Минковского* ($p\ge 1$ – фиксированное целое число)

$$d_{Rp}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |^p \right)^{1/p}. \tag{6.04}$$

Векторные пространства обозначают также символами $l^n{}_p$. Метрика $d_{R\infty}$ называется также *однородной* метрикой, метрикой *решетки*, а метрика d_{R1} – *прямолинейной* метрикой, метрикой *кубической сетки*. При $p=1$ метрика Минковского d_{Rp} превращается в метрику Хемминга d_{R1}, при $p=2$ – в метрику Евклида d_{R2}. В пределе при $p\to\infty$ $d_{Rp}\to d_{R\infty}$, и метрика Минковского становится метрикой Чебышева. При $n=1$ все метрики d_{Rp} для любого p превращаются в метрику $d_{E1}(x,y)=|x-y|$, заданную формулой (1.04), а одномерные векторные пространства $R^n{}_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$ вырождаются в числовую прямую $E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$. Метрики Чебышева $d_{R\infty}$, Хемминга d_{R1}, Евклида d_{R2} для любого n совпадают с метриками

$$d_{U\infty}(x,y)=\max_{1\le i\le n}[d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)],\quad d_{U1}(x,y)=\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i),\quad d_{U2}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i,y_i)},$$

определенными в разделе 1.3 на прямом произведении $U=X_1\times X_2\ldots\times X_n$ нескольких метрических пространств (X_i,d_i) соответствующей размерности, если положить $d_i(x_i,y_i)=|x_i-y_i|$. При $p=2$ векторное пространство $R^n{}_2=(\mathbb{R}^n,d_{R2})$ с метрикой Евклида (6.03) тождественно n-мерному числовому (евклидовову) пространству $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$ с метрикой Евклида (1.06).

Выполнение аксиом симметрии (1.01) и тождества (1.02) для функции d_{Rp} очевидно при любом p. Покажем справедливость аксиомы треугольника (1.03) для функции $d_{R\infty}$. Для любого $1\le i\le n$, очевидно, выполняется неравенство:

$$|x_i - y_i| \le |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \le \max_{1\le i\le n}|x_i - z_i| + \max_{1\le i\le n}|z_i - y_i| = d_{R\infty}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d_{R\infty}(\mathbf{z},\mathbf{y}). \quad (6.05)$$

Отсюда сразу получаем:

$$\max_{1\le i\le n}|x_i - y_i| = d_{R\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d_{R\infty}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d_{R\infty}(\mathbf{z},\mathbf{y}).$$

Справедливость аксиомы треугольника для функции d_{Rp} при $p\ge 1$ следует из неравенства Минковского для конечных сумм

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}. \quad (6.06)$$

Полагая в формуле (6.06) $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$, получим условие

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i - y_i|^p\right)^{1/p}, \quad (6.07)$$

которое и есть неравенство треугольника

$$d_{Rp}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d_{Rp}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d_{Rp}(\mathbf{z},\mathbf{y}).$$

Из тождественности метрик $d_{R\infty}$, d_{R1}, d_{R2} и $d_{U\infty}$, d_{U1}, d_{U2}, определения непрерывности действительной функции двух переменных и теоремы 3.11 имеем

Следствие 3.11.Б. *Метрики Чебышева $d_{R\infty}$, Хемминга d_{R1}, Евклида d_{R2} гомеоморфны и равномерно непрерывны на множестве $\mathbb{R}^n$.*

Условие сходимости последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$, состоящей из n-мерных векторов $\mathbf{x}_k=(x_{k1},\ldots,x_{kn})$, к пределу $\mathbf{x}_0=(x_{01},\ldots,x_{0n})$ в пространстве $R^n_\infty=(\mathbb{R}^n,d_{R\infty})$ форулируется как

$$d_{R\infty}(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_0) = \max_{1\le i\le n}|x_{ki} - x_{0i}| \to 0 \quad \text{при } k\to\infty. \quad (6.08)$$

Это условие равносильно условию *равномерной относительно компонент вектора сходимости* всех n числовых последовательностей $x_{ki}\to x_{0i}$.

Условие сходимости последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ векторов $\mathbf{x}_k$ к пределу $\mathbf{x}_0$ в n-мерном векторном пространстве $R^n_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$ при $p\ge 1$ имеет вид:

$$d_{Rp}(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_0) = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_{ki} - x_{0i}|^p\right)^{1/p} \to 0 \quad \text{при } k\to\infty \quad (6.09)$$

и совпадает с условием равномерной сходимости $|x_{ki} - x_{0i}|\to 0$ в пространстве $R^n_\infty=(\mathbb{R}^n,d_{R\infty})$. Такое же условие равномерной покомпонентной сходимости выполняется в n-мерном числовом (евклидовом) пространстве $E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$.

Рассмотрим свойства векторных пространств.

Теорема 6.1. *Пространство $R^n_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$ n-мерных действительных векторов при любом p сепарабельно, полно и метрически выпукло.*

Доказательство. 1°. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в пространстве E^1 (пример 2.13), то есть для любого действительного числа x_0 всегда найдется некоторая последовательность $\{q_k\}$ рациональных чисел, сходящаяся к x_0 при $k\to\infty$. В таком случае и для любого n-мерного вектора $\mathbf{x}_0$ с действительными компонентами x_{0i}, $i=1,\ldots,n$ существует сходящаяся к нему последовательность $\{\mathbf{q}_k\}$ n-мерных векторов $\mathbf{q}_k$ с рациональными компонентами $q_{ki}\in\mathbb{Q}$. Это означает, что счетное множество $\mathbb{Q}^n$ n-мерных рациональных векторов всюду плотно в пространстве R^n_p, а само пространство R^n_p при любом p сепарабельно. Счетное всюду плотное в пространстве R^n_p множество $\mathbb{Q}^n$ совпадает со своим замыканием $\mathbb{Q}^n=[\mathbb{Q}^n]$.

2°. Пусть последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ n-мерных действительных векторов $\mathbf{x}_k$ фундаментальна, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $k,m>N$ выполняется неравенство $d_{Rp}(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_m)<\varepsilon$ или $\sum_{i=1}^{n}|x_{ki}-x_{mi}|^p<\varepsilon^p$. Тогда для каждой компоненты вектора x_{ki}, $i=1,\ldots,n$ получаем соответствующее неравенство $|x_{ki}-x_{mi}|<\varepsilon$ для всех номеров $k,m>N$, то есть все последовательности $\{x_{ki}\}$ также фундаментальны. В полном пространстве действительных чисел E^1 любая фундаментальная последовательность является сходящейся (пример 2.18), и следовательно, $x_{ki}\to x_{0i}$ при $k\to\infty$. Это означает, что в пространстве R^n_p фундаментальная последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ векторов $\mathbf{x}_k$ сходится равномерно относительно компонент вектора к n-мерному действительному вектору $\mathbf{x}_0$, который есть точка этого же пространства R^n_p. Тем самым выполняются условия (6.08) и (6.09). Таким образом, пространство R^n_p при любом p полно.

3°. Метрическая выпуклость пространства R^n_p немедленно вытекает из тождественности метрик d_{Rp} и d_{Up}, метрической выпуклости евклидова пространства E^n, теоремы 1.4, а также может быть установлена непосредственно с помощью подхода, использованного при доказательстве теоремы 1.1. В самом деле, если $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$, то аналогично случаю числовой прямой E^1 всегда найдется такой вектор $\mathbf{z}$, находящийся между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то есть $[\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{y}]$, что неравенство треугольника (6.07) превращается в равенство (1.07). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы соответствующие одноименные компоненты векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ были точками, лежащими на одной прямой. ■

Пространство $Q^n_p=(\mathbb{Q}^n,d_{Rp})$ n-мерных векторов $\mathbf{q}_k=(q_{k1},\ldots,q_{kn})$ с рациональными компонентами $q_{ki}\in\mathbb{Q}$, $i=1,\ldots,n$ *неполно*, поскольку имеются фундаментальные последовательности $\{\mathbf{q}_k\}$, состоящие из n-мерных рациональных векторов $\mathbf{q}_k$, которые не сходятся к точке этого же пространства Q^n_p. По этой же причине, в частности, неполно пространство рациональных чисел $Q^1=(\mathbb{Q},d_{E1})$, в котором существуют фундаментальные последовательности рациональных чисел, сходящиеся к иррациональным числам (пример 1.7). Пополнением пространства Q^n_p n-мерных рациональных векторов служит полное пространство R^n_p n-мерных действительных векторов.

Векторное пространство $R^n_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$ при любом p *локально компактно*, но *некомпактно*, поскольку существуют счетные последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$, состоящие из n-мерных действительных векторов $\mathbf{x}_k$, которые не сходятся в пространстве R^n_p. По этой же причине, в частности, локально компактно, но некомпактно и пространство действительных чисел E^1 (пример 2.23). В то же время всякое ограниченное замкнутое множество векторного пространства R^n_p *относительно компактно*, так как имеется хотя бы одна предельная точка, принадлежащая этому же пространству. Полная ограниченность множества в n-мерном векторном пространстве $R^n{}_p$ совпадает с обычной ограниченностью.

Гомеоморфность разных метрик на множестве $\mathbb{R}^n$, установленная следствием 3.11.Б, означает, что векторные пространства $R^n{}_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$ при разных p *гомеоморфны*. Кроме того, всякое векторное пространство $R^m{}_p=(\mathbb{R}^m,d_{Rp})$ при $m<n$ *гомеоморфно* подпространству векторного пространства $R^n{}_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$, состоящему из n-мерных векторов вида $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$, у которых последние $n-m$ компонент равны нулю (теорема Пеано). Однако сами пространства $R^n{}_p$ и $R^m{}_p$ при $n\neq m$ будут *негомеоморфны* (теорема Брауэра).

Пространство расстояний (X,d_X) будем называть $l^n{}_p$-*вложимым*, если оно изометрически вложимо в векторное пространство $l^n{}_p=R^n{}_p$, то есть для некоторых целых $n,p\geq 1$ выполняется условие $d_X(x,y)=d_{Rp}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Очевидно, что векторное пространство $R^m{}_p$ при $m<n$ будет $l^n{}_p$-вложимо в пространство $R^n{}_p$. Пространство расстояний (X,d_X) $l^n{}_p$-вложимо в том и только том случае, если каждое конечное подпространство пространства (X,d_X) является $l^n{}_p$-вложимым [DL97].

П р и м е р 6.1. Метрические пространства n-мерных векторов: $Q^n{}_p=$ $=(\mathbb{Q}^n,d_{Rp})$ с рациональными компонентами, $Z^n{}_p=(\mathbb{Z}^n,d_{Rp})$ с целочисленными компонентами, $N^n{}_p=(\mathbb{N}^n,d_{Rp})$ с натуральными компонентами, $I^n{}_p=(\mathbb{R}_{01}{}^n,d_{Rp})$ с действительными компонентами в интервале $\mathbb{R}_{01}=[0,1]$ являются изометрически вложимыми подпространствами векторного пространства $R^n{}_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$. ◘

Покажем, что метрическая выпуклость и гиперметричность конечного пространства расстояний естественным образом связаны с его $l^n{}_1$-вложимостью.

Т е о р е м а 6.2. *Конечное n-мерное пространство расстояний* (X,d_X) *является* $l^m{}_1$-*вложимым для некоторого m тогда и только тогда, когда расстояние d_X можно представить положительной линейной комбинацией m разрезных полуметрик вида* $d_X(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m} w_k\delta_X^{(A_k)}(x_i,x_j)$, *где* $w_k>0$, $A_k\subset X=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть (X,d_X) – n-мерное метрическое пространство с метрикой $d_X(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m} w_k\delta_X^{(A_k)}(x_i,x_j)$, где $w_k>0$, $\delta_X^{(A_k)}(x_i,x_j)$ – разрезная полуметрика (1.35) для множества $A_k\subset X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $1\leq k\leq m$. Определим n векторов $\mathbf{y}_i=(y_{i1},\ldots,y_{im})\in\mathbb{R}^m$ с компонентами $y_{ik}=w_k\,\chi_{A_k}(x_i)$, где χ_{A_k} – характеристическая функция множества A_k. Тогда, учитывая формулу (6.2), выполняется следующее равенство:

$$d_X(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m} w_k\delta_X^{(A_k)}(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m} w_k\,|\,\chi_{A_k}(x_i)-\chi_{A_k}(x_j)\,|=\sum_{k=1}^{m}|\,y_{ik}-y_{jk}\,|=d_{R1}(\mathbf{y}_i,\mathbf{y}_j), \quad (6.10)$$

то есть по условию (1.33) пространство (X,d_X) $l^m{}_1$-вложимо.

2°. Пусть n-мерное метрическое пространство (X,d_X) $l^m{}_1$-вложимо, то есть $d_X(x_i,x_j)=d_{R1}(\mathbf{y}_i,\mathbf{y}_j)$. Рассмотрим матрицу $\mathrm{Y}=\|y_{ik}\|_{n\times m}$, строками которой являются n векторов $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_i=(y_{i1},\ldots,y_{im})\in\mathbb{R}^m$, а элементы y_{ik} определяются следующим образом: $y_{ik}=w_k>0$, если $x_i\in A_k\subset X$, и $y_{ik}=0$ в противоположном случае. Тогда метрику d_X можно представить как линейную комбинацию разрезных полуметрик $d_X(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m} w_k \delta_X^{(A_k)}(x_i,x_j)$. ■

Из теорем 6.2 и 1.13 вытекает

С л е д с т в и е 6.2.А. *Всякое $l^n{}_1$-вложимое пространство расстояний (X,d_X) является пространством отрицательного типа и гиперметрическим.*

Из теорем 6.2 и 6.1 имеем

С л е д с т в и е 6.2.Б. *Любое множество A и его дополнение $X\backslash A$ являются метрически выпуклыми в $l^n{}_1$-вложимом пространстве расстояний (X,d_X).*

П р и м е р 6.2. n-ая степень множества целых чисел $\mathbb{Z}_{0k}=\{0,1,\ldots,k\}$ образует с метрикой Хемминга d_{R1} (6.02) n-мерное векторное пространство $Z^n{}_{(k)1}=(\mathbb{Z}_{0k}{}^n,d_{R1})$, изометричное метрическому графическому пространству (V,d_Γ) с метрикой кратчайшего пути d_Γ (1.37). Пространство $Z^n{}_{(1)1}=(\{0,1\}^n,d_{R1})$ называется *n-мерным гиперкубическим пространством* или *n-мерным гиперкубом*, $Z^n{}_{(2)1}=(\{0,1,2\}^n,d_{R1})$ – *единичной n-мерной сферой* с центром в точке $(1,1,\ldots,1)$, $Z^n{}_{(3)1}=(\{0,1,2,3\}^n,d_{R1})$ – *n-мерным кубиком Рубика*, а также *доской тик-так-ту*. n-мерные пространства $Z^n{}_{(k)1}=(\mathbb{Z}_{0k}{}^n,d_{R1})$ при любом k, очевидно, являются изометрически вложимыми подпространствами n-мерного векторного пространства $Q^n{}_1=(\mathbb{Q}^n,d_{R1})$ и обладают такими же свойствами, что и пространство $Q^n{}_1$. Пространства $Z^n{}_{(k)1}$ всюду плотны, сепарабельны, неполны, некомпактны, $l^n{}_1$-вложимы, метрически выпуклы, гиперметричны. ◘

П р и м е р 6.3. n-мерная целочисленная решетка $\mathbb{L}^n=\mathbb{Z}_+{}^n$, где $\mathbb{Z}_+=$ $=\{0,1,2,\ldots\}$, образует с метрикой Хемминга d_{R1} n-мерное векторное пространство $Z^n{}_{(+)1}=(\mathbb{Z}_+{}^n,d_{R1})$, в котором n-мерный целочисленный вектор $\mathbf{z}_k=(z_{k1},\ldots,z_{kn})$ соответствует узлу решетки $\langle k_1,\ldots,k_n\rangle$. Пространство $Z^n{}_{(+)1}$ представляет собой изометрически вложимое подпространство n-мерного векторного пространства $Q^n{}_1=(\mathbb{Q}^n,d_{R1})$. Пространство $Z^n{}_{(+)1}$ всюду плотно, сепарабельно, неполно, некомпактно, $l^n{}_1$-вложимо, метрически выпукло, гиперметрично. ◘

Полагая в теореме 6.2 все числа $w_k=1/2$, получаем еще одно

С л е д с т в и е 6.2.В. *Конечное пространство расстояний (X,d_X) с мультиразрезной полуметрикой $d_X(x_i,x_j)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\delta_X^{(A_k)}(x_i,x_j)$, где $A_k\subset X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, вложимо в m-мерный гиперкуб $Z^m{}_{(1)1}$ и m-мерную целочисленную решетку $Z^m{}_{(+)1}$.*

6.2. Пространства ограниченных числовых последовательностей. Семейство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\{X_k\}$ бесконечных последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}=\{x_{k1},x_{k2},\ldots\}$, элементами которых являются действительные числа $x_{ki}\in\mathbb{R}$, удовлетворяющие условию ограниченности $|x_{ki}|\le c_k$ или $\sum_{i=1}^{\infty}|x_{ki}|^p\le c^p<\infty$ для всех целых чисел $p\ge1$, образует *пространство ограниченных числовых последовательностей*:

$m=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_m)$ с метрикой *Чебышева*

$$d_m(X,Y)=\sup_i|x_i-y_i|; \tag{6.11}$$

$l_1 = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_{l1})$ с метрикой *Хемминга*

$$d_{l1}(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |; \tag{6.12}$$

$l_2 = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_{l2})$ с метрикой *Евклида*

$$d_{l2}(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}; \tag{6.13}$$

$l_p = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_{lp})$ с метрикой *Минковского* ($p \geq 1$ – фиксированное целое число)

$$d_{lp}(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}. \tag{6.14}$$

Эти пространства обозначают также символами l^{∞}_p. В пределе при $p \to \infty$ $d_{lp} \to d_m$, и метрика Минковского становится метрикой Чебышева, поэтому пространству m соответствует символ l^{∞}_{∞}. Пространство $l_2 = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_{l2})$ называется также *координатным гильбертовым пространством*.

Покажем, что выражение (6.14) имеет смысл для произвольных ограниченных числовых последовательностей. Действительно, переходя в неравенстве Минковского (6.06) при фиксированном числе $p \geq 1$ к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство для бесконечных сумм

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | a_i + b_i |^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} | b_i |^p \right)^{1/p}. \tag{6.15}$$

Полагая в формуле (6.15) $a_i = x_i$, $b_i = -y_i$, получаем условие

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} | y_i |^p \right)^{1/p}.$$

Так как ряды, стоящие в правой части приведенной выше формулы, по предположению сходятся, то стоящая слева сумма также конечна.

Выполнение аксиом симметрии (1.01) и тождества (1.02) для функций d_m и d_{lp} очевидно. Справедливость аксиомы треугольника (1.03) для функции d_m без труда устанавливается таким же, как и для метрики $d_{R\infty}$, способом. Аналогично соотношению (6.05) имеем

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq \sup_i |x_i - z_i| + \sup_i |z_i - y_i| = d_m(X,Z) + d_m(Z,Y).$$

Следовательно, и

$$\sup_i |x_i - y_i| = d_m(X,Y) \leq d_m(X,Z) + d_m(Z,Y). \tag{6.16}$$

Выполнение аксиомы треугольника (1.03) для функции d_{lp} при $p \geq 1$ следует из неравенства (6.15), которое при $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$ приобретает вид:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - z_i |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} | z_i - y_i |^p \right)^{1/p} \tag{6.17}$$

или

$$d_{lp}(X,Y) \leq d_{lp}(X,Z) + d_{lp}(Z,Y).$$

Условие сходимости последовательности $\{X_k\}$, элементами которой являются ограниченные числовые последовательности $X_k=\{x_{ki}\}=\{x_{k1}, x_{k2},\ldots\}$, к пределу $X_0=\{x_{0i}\}=\{x_{01}, x_{02},\ldots\}$ в пространстве $m=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_m)$ имеет вид:

$$d_m(X_k,X_0)=\sup_i |x_{ki}-x_{0i}|\to 0 \quad \text{при } k\to\infty. \tag{6.18}$$

Иными словами, для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $k>N$ справедливо неравенство $\sup\limits_i |x_{ki}-x_{0i}|<\varepsilon$, а значит, и для каждого i-го элемента k-ой последовательности X_k выполняется условие $x_{ki}\to x_{0i}$ при $k\to\infty$.

Сходимость последовательности $\{X_k\}$, $X_k=\{x_{ki}\}$ к пределу $X_0=\{x_{0i}\}$ в пространстве $l_p=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{lp})$ при фиксированном числе $p\geq 1$ имеет вид:

$$d_{lp}(X_k,X_0)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_{ki}-x_{0i}\right|^p\right)^{1/p}\to 0 \quad \text{при } k\to\infty. \tag{6.19}$$

Это означает, что для всех i=1,2,... при $k\to\infty$ сходятся последовательности $x_{ki}\to x_{0i}$ и что для любого $\varepsilon>0$ найдется натуральное число N такое, что для всех номеров $n>N$ и всех k последовательностей $\{x_{ki}\}$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|x_{ki}|^p<\varepsilon^p$. Первое из этих условий (6.18) равносильно условию *сходимости* всех числовых последовательностей, *равномерной относительно i-ых членов последовательностей*, а второе условие (6.19) – *сходимости, неравномерной относительно i-ых членов последовательностей*.

Т е о р е м а 6.3. *Пространство $l^{\infty}{}_p=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{lp})$ ограниченных числовых последовательностей при любом числе p полно и метрически выпукло*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть последовательность $\{X_k\}$, состоящая из ограниченных числовых последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}$, фундаментальна, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $k,n>N$ выполняется неравенство $d_{lp}(X_k,X_n)<\varepsilon$ или $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_{ki}-x_{ni}|^p<\varepsilon^p$. Тогда для любых i-ых элементов последовательностей x_{ki}, x_{ni}, $i=1,2,\ldots$ выполняется соответствующее неравенство $|x_{ki}-x_{ni}|<\varepsilon$ для всех номеров $k,n>N$, то есть все последовательности $\{x_{ki}\}$ фундаментальны, и следовательно, в силу полноты пространства действительных чисел E^1 (пример 2.18) $x_{ki}\to x_{0i}$ при $k\to\infty$. Согласно следствию 1.10.Г величина $|x_{0i}|\leq\max c_k$, то есть последовательность $X_0=\{x_{0i}\}$ ограничена и принадлежит пространству m. Это означает, что в пространстве m последовательность $\{X_k\}$, состоящая из числовых последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}$, при $k\to\infty$ сходится равномерно относительно членов x_{ki} последовательностей к пределу – последовательности X_0, то есть выполняется условие (6.18).

Покажем, что для фиксированного $p\geq 1$ выполняется условие сходимости (6.19). Действительно, из неравенства $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_{ki}-x_{ni}|^p<\varepsilon^p$, справедливого для всех номеров $k,n>N$, следует, что для любого K выполняется $\sum_{i=1}^{K}|x_{ki}-x_{ni}|^p<\varepsilon^p$. Зафиксируем номер k и перейдем к пределу при $n\to\infty$. В силу фундаментальности последовательности $\{x_{ni}\}$, получим неравенство $\sum_{i=1}^{K}|x_{ki}-x_{0i}|^p<\varepsilon^p$, справедливое при любом K. Переходя к пределу при $K\to\infty$, получаем неравенство $\sum_{i=1}^{\infty}|x_{ki}-x_{0i}|^p<\varepsilon^p$. Отсюда в силу произвольности ε при $k\to\infty$ сразу вытекает условие (6.19) $d_{lp}(X_k,X_0)\to 0$. Полагая в неравенстве (6.15) $a_i=x_{ki}$, $b_i=x_{0i}-x_{ki}$ и учитывая ограниченность рядов $\sum_{i=1}^{\infty}|x_{ki}|^p$ и $\sum_{i=1}^{\infty}|x_{ki}-x_{0i}|^p$, убеждаемся, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|x_{0i}|^p$ сходится для всех фиксированных чисел $p\geq 1$, то есть последовательность $X_0=\{x_{0i}\}$ принадлежит пространству l_p. Итак, фундаментальная последовательность $\{X_k\}$, состоящая из ограниченных числовых последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}$, сходится в пространстве l^{∞}_p к ограниченной числовой последовательности $X_0=\{x_{0i}\}$, которая есть точка этого же пространства l^{∞}_p, и значит, пространство l^{∞}_p при любом p полно.

2°. Метрическая выпуклость пространства l_p для любого числа p устанавливается непосредственно с помощью подхода, использованного при доказательстве теоремы 1.1. В самом деле, если $X\neq Y$, то аналогично случаям числовой прямой E^1 и n-мерного векторного пространства R^n_1 (теоремы 1.1, 6.1) всегда найдется такая ограниченная числовая последовательность Z, находящаяся между последовательностями X и Y, то есть $[X, Z, Y]$, что неравенство треугольника (6.17) превращается в равенство (1.07). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы соответствующие одноименные элементы последовательностей X, Z, Y были точками, лежащими на одной прямой. ■

Пространство $Q^{\infty}_p=(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}},d_{lp})$ ограниченных последовательностей $Q_k=\{q_{ki}\}=$ $=\{q_{k1}, q_{k2},\ldots\}$, членами которых являются рациональные числа $q_{ki}\in\mathbb{Q}$, $i=1,\ldots,n$, *неполно*, поскольку имеются фундаментальные последовательности $\{Q_k\}$, состоящие из ограниченных рациональных последовательностей Q_k, которые не сходятся к точке этого же пространства Q^{∞}_p. По этой же причине, в частности, неполны пространство рациональных чисел $Q^1=(\mathbb{Q},d_{E1})$ и пространство $Q^n_p=(\mathbb{Q}^n,d_{Rp})$ n-мерных рациональных векторов $\mathbf{q}_k=(q_{k1},\ldots,q_{kn})$, в которых существуют фундаментальные последовательности рациональных чисел, сходящиеся к иррациональным числам (пример 1.7). Пополнением пространства Q^{∞}_p ограниченных рациональных последовательностей служит полное пространство l^{∞}_p ограниченных действительных последовательностей.

Т е о р е м а 6.4. *Пространство $l^{\infty}_p=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{lp})$ ограниченных числовых последовательностей при любом фиксированном числе $p\geq 1$ сепарабельно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как элементы произвольной последовательности $\{x_{ki}\}=\{x_{k1}, x_{k2},\ldots\}$ ограничены, то для любого $\varepsilon>0$ найдется число n такое, что $\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_{ki}|^p < \varepsilon^p/2$. Для найденного числа n возьмем ограниченную числовую последовательность вида $Q_k=\{q_{k1},\ldots,q_{kn},0,0,\ldots\}$ с рациональными элементами q_{ki}, удовлетворяющими условию $\sum_{i=1}^{n}|x_{ki}-q_{ki}|^p < \varepsilon^p/2$. Тогда для расстояния $d_{lp}(X_k,Q_k)$ между точками X_k и Q_k пространства l_p имеем

$$[d_{lp}(X_k,Q_k)]^p=\sum_{i=1}^{\infty}|x_{ki}-q_{ki}|^p=\sum_{i=1}^{n}|x_{ki}-q_{ki}|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_{ki}|^p<\varepsilon^p/2+\varepsilon^p/2=<\varepsilon^p$$

или $d_{lp}(X_k,Q_k)<\varepsilon$. Множество $\{Q_k\}$ различных последовательностей Q_k счетно. Так как каждая последовательность $Q_k=\{q_{k1},\ldots,q_{kn},0,0,\ldots\}$ эквивалентна вектору $\mathbf{q}_k=(q_{k1},\ldots,q_{kn})$, то условие $d_{lp}(X_k,Q_k)<\varepsilon$ означает, что счетное множество $\mathbb{Q}^n$ n-мерных рациональных векторов всюду плотно в пространстве l_p, а пространство l_p при любом фиксированном числе $p\geq 1$ сепарабельно. Всюду плотное в пространстве l_p множество $\mathbb{Q}^n$ совпадает со своим замыканием $\mathbb{Q}^n=[\mathbb{Q}^n]$. ■

Пространство ограниченных числовых последовательностей $m=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_m)$ с метрикой Чебышева d_m *несепарабельно*, так как может содержать множество, не являющееся счетным и всюду плотным в пространстве m.

П р и м е р 6.4. Семейство $\mathscr{B}=\{B_k\}$ бинарных последовательностей вида $B_k=\{b_{ki}\}=\{b_{k1}, b_{k2},\ldots\}$, состоящих только из нулей и единиц ($b_{ki}=0$ или $b_{ki}=1$), имеет мощность континуума, и значит, не является счетным. Семейство $\mathscr{B}$ не будет и всюду плотным множеством в пространстве $m=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_m)$. Действительно, пусть в пространстве m имеется счетное и всюду плотное множество A. Опишем около каждой точки a множества A открытый шар $O(a,\varepsilon)$ радиуса $\varepsilon=1/3$. Так как множество A всюду плотно в пространстве m, то все точки пространства m будут содержаться внутри этих шаров. Так как множество A счетно, то хотя бы в одном из шаров, например, с центром в точке a_0 должны находиться две разные последовательности $B_k=\{b_{ki}\}$ и $B_j=\{b_{ji}\}$. Тогда по неравенству треугольника (1.03) для расстояния между последовательностями B_k и B_j имеем

$$d_m(B_k,B_j)\leq d_m(B_k,a_0)+d_m(a_0,B_j)\leq 1/3+1/3=2/3.$$

С другой стороны, согласно формуле (6.11) расстояние между любыми последовательностями B_k и B_j постоянно и равно $d_m(B_k,B_j)=\sup_i|b_{ki}-b_{ji}|=1$, что противоречит сделанному предположению. ◘

Пространство ограниченных числовых последовательностей l_p при любом фиксированном числе $p\geq 1$ *некомпактно*, поскольку в l_p существуют замкнутые множества, содержащие ограниченные числовые последовательности $X_k=\{x_{ki}\}$, которые не сходятся в пространстве l_p. В то же время в пространстве l_p имеются и компактные ограниченные множества. Критерий компактности множества в пространстве l_p формулируются следующим образом. Множество A относительно компактно в пространстве l_p в том и только том случае, если оно ограничено и для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n>N$ и произвольной последовательности $\{x_{ki}\}=\{x_{k1}, x_{k2},\ldots\}$ из множества A выполняется неравенство $\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_{ki}|^p<\varepsilon^p$. Критерий компактности множества A совпадает с условием (6.19) неравномерной сходимости числовых последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}$ в пространстве l_p.

Пример 6.5. Замкнутый шар $B[x_0,1]$ радиуса 1 с центром в точке $x_0=\{0,0,0,\ldots\}$ является ограниченным, но не вполне ограниченным множеством, а значит, и некомпактным множеством в пространствах m и l_p. В самом деле, пусть $\mathcal{B}=\{B_k\}$ – семейство бинарных последовательностей вида $B_1=\{1,0,0,\ldots\}$, $B_2=\{0,1,0,\ldots\},\ldots$, которые все содержатся в шаре $B[x_0,1]$. Согласно формулам (6.11)-(6.14) расстояние между любыми последовательностями B_k и B_j постоянно в каждом из пространств и равно соответственно $d_m(B_k,B_j)=\sup\limits_i|b_{ki}-b_{ji}|=1$ и $d_{lp}(B_k,B_j)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_{ki}-b_{ji}|^p\right)^{1/p}=2^{1/p}$ при $p\geq 1$, то есть последовательность $\{B_k\}$ и любые ее подпоследовательности не сходятся в пространствах m и l_p. ◘

Пример 6.6. Ограниченное множество точек $V_0=\{x_n\}=\{x_1, x_2,\ldots\}$, где $0\leq x_n\leq 1/n$, $n\in\mathbb{N}$, называется *основным брусом* (*параллелепипедом*) пространства ограниченных числовых последовательностей $l^{\infty}{}_p$. Основной брус V_0 является бесконечномерным вполне ограниченным множеством в пространстве $l^{\infty}{}_p$, а в силу приведенного выше критерия компактности и компактным множеством. ◘

Замечание. Всякое сепарабельное метрическое пространство *гомеоморфно* некоторому подмножеству основного бруса координатного гильбертова пространства l_2 (теорема Урысона). □

Пространство расстояний (X,d_X) будем называть $l^{\infty}{}_p$*-вложимым*, если оно изометрически вложимо в пространство $l^{\infty}{}_p$. Любой вектор $\mathbf{x}_k=(x_{k1},\ldots,x_{kn})$, очевидно, можно представить как ограниченную числовую последовательность вида $X_k=\{x_{k1},\ldots,x_{kn},0,0,\ldots\}$. Поэтому n-мерные векторные пространства $R^n{}_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$ являются изометрически вложимыми подпространствами соответствующих пространств $l^{\infty}{}_p=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{lp})$ ограниченных числовых последовательностей. Это в свою очередь означает, что каждое n-мерное векторное пространство $R^n{}_p=l^n{}_p$ является $l^{\infty}{}_p$-вложимым, а следовательно, всякое $l^n{}_p$-вложимое пространство будет и $l^{\infty}{}_p$-вложимым.

Пример 6.7. Метрические пространства n-мерных векторов из примера 6.1 $Q^n{}_p=(\mathbb{Q}^n,d_{Rp})$ с рациональными компонентами, $Z^n{}_p=(\mathbb{Z}^n,d_{Rp})$ с целочисленными компонентами, $N^n{}_p=(\mathbb{N}^n,d_{Rp})$ с натуральными компонентами, $I^n{}_p=(\mathbb{R}_{01}{}^n,d_{Rp})$ с действительными компонентами в интервале $\mathbb{R}_{01}=[0,1]$ являются $l^n{}_p$- и $l^{\infty}{}_p$-вложимыми пространствами. n-мерное гиперкубическое пространство $Z^n{}_{(1)1}=(\{0,1\}^n,d_{R1})$ из примера 6.2 $l^n{}_1$-вложимо и $l^{\infty}{}_1$-вложимо. ◘

6.3. Пространства сходящихся числовых последовательностей. Семейство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c$ бесконечных числовых последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}=\{x_{k1},x_{k2},\ldots\}$, элементами которых являются действительные числа $x_{ki}\in\mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $x_{ki}\to x_{k0}$ при $i\to\infty$ для всех k последовательностей, образуют с метрикой

Чебышева d_m (6.11) *пространство равномерно сходящихся числовых последовательностей* $c=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c,d_m)$. Так как согласно теоремам 1.8 и 1.9 всякая сходящаяся последовательность ограничена, и значит $|x_{ki}|\le c_k$, то пространство $c=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c,d_m)$ равномерно сходящихся числовых последовательностей является замкнутым подпространством пространства $m=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_m)$ ограниченных числовых последовательностей. Отсюда следует выполнение в пространстве $c=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c,d_m)$ аксиоматики метрического пространства и условия (6.18) *равномерной относительно членов последовательностей сходимости* $|x_{ki} - x_{0i}|\to 0$ при $k\to\infty$.

Т е о р е м а 6.5. *Пространство* $c=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c,d_m)$ *равномерно сходящихся числовых последовательностей сепарабельно, полно и метрически выпукло.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в пространстве E^1 (пример 2.13), то есть для любого действительного числа x_0 всегда найдется некоторая последовательность $\{q_k\}$ рациональных чисел, сходящаяся к x_0 при $k\to\infty$. В таком случае и для любой последовательности $\{X_k\}$, состоящей из сходящихся числовых последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}=$ $=\{x_{k1},x_{k2},\ldots\}$ таких, что $x_{ki}\to x_{k0}$ при $i\to\infty$ для всех k, существует последовательность $\{Q_k\}$, состоящая из сходящихся числовых последовательностей $Q_k=\{q_{ki}\}=$ $=\{q_{k1},q_{k2},\ldots\}$ с рациональными элементами $q_{ki}\in\mathbb{Q}$ такими, что $q_{ki}\to x_{k0}$ при $i\to\infty$ для всех k. Множество $\{Q_k\}$ сходящихся последовательностей Q_k, очевидно, счетно. В силу неравенства треугольника (1.03) выполняется соотношение $|x_{ki}-q_{ki}|\le|x_{ki}-x_{k0}|+|x_{k0}-q_{ki}|$. Поэтому расстояние $d_m(X_k,Q_k)=\sup\limits_i|x_i-q_{ki}|\to 0$ при $k\to\infty$. Это означает, что счетное множество $\{Q_k\}$ сходящихся последовательностей Q_k с рациональными элементами всюду плотно в пространстве $c=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c,d_m)$, а пространство c сепарабельно.

2°. Пусть последовательность $\{X_k\}$ состоит из сходящихся числовых последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}=\{x_{k1},x_{k2},\ldots\}$ таких, что $x_{ki}\to x_{k0}$ при $i\to\infty$ для всех k, и сходится к последовательности $X_0=\{x_{0i}\}=\{x_{01},x_{02},\ldots\}$. По неравенству треугольника (1.03) и формуле (6.11) имеем

$$|x_{0i} - x_{0j}| \le |x_{0i} - x_{ki}| + |x_{ki} - x_{kj}| + |x_{kj} - x_{0j}| \le 2d_m(X_k,X_0) + |x_{ki} - x_{kj}|.$$

Так как последовательность $\{X_k\}$ сходится к пределу X_0, то для произвольного $\varepsilon>0$ найдем достаточно большой номер k такой, чтобы выполнялось неравенство $d_m(X_k,X_0)<\varepsilon$, и зафиксируем этот номер k. Для этого фиксированного номера k рассмотрим сходящуюся числовую последовательность $X_k=\{x_{ki}\}$. Из ее сходимости следует, что для выбранного $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $i,j>N$ будет выполняться неравенство $|x_{ki}-x_{kj}|<\varepsilon$. В этом случае получаем, что $|x_{0i}-x_{0j}|<3\varepsilon$, то есть числовая последовательность $X_0=\{x_{0i}\}$ фундаментальна, и следовательно, в силу полноты пространства действительных чисел E^1 (пример 2.18) сходится к пределу при $i\to\infty$ и тем самым принадлежит пространству c. Таким образом, пространство c полно.

3°. Метрическая выпуклость пространства $c=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c,d_m)$ равномерно сходящихся числовых последовательностей немедленно вытекает из метрической выпуклости пространства $m=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_m)$ ограниченных числовых последовательностей, подпространством которого является пространство c. ■

Рассмотрим семейство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_s$ бесконечных последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}=$ $=\{x_{k1},x_{k2},\ldots\}$, элементами которых являются произвольные действительные числа $x_{ki}\in\mathbb{R}$. Будем считать, что последовательность $\{X_k\}$, состоящая из числовых последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}$, сходится при $k\to\infty$ к последовательности $X_0=\{x_{0i}\}=\{x_{01},x_{02},\ldots\}$, если для каждого i-го элемента k-ой последовательности выполняется условие $x_{ki}\to x_{0i}$ при $k\to\infty$. Семейство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_s$ не образует метрическое пространство ни с одной из метрик (6.11)-(6.14), но его можно сделать метрическим пространством, введя метрику

$$d_s(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i(1+|x_i-y_i|)}. \tag{6.20}$$

Это пространство будем называть *пространством неравномерно сходящихся числовых последовательностей* $s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_s,d_s)$.

Выполнение аксиом симметрии (1.01) и тождества (1.02) для функции d_s очевидно. Аксиома треугольника (1.03) вытекает из неравенства

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}, \tag{6.21}$$

которое выполняется для любых действительных чисел a и b. Полагая в формуле (6.21) $a=x_i-z_i$, $b=z_i-y_i$ и суммируя почленно с коэффициентом $1/2^i$, получим неравенство треугольника

$$d_s(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i(1+|x_i-y_i|)}\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-z_i|}{2^i(1+|x_i-z_i|)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|z_i-y_i|}{2^i(1+|z_i-y_i|)}=d_s(X,Z)+d_s(Z,Y).$$

Доказательство выполнимости условия неравномерной относительно членов последовательностей сходимости $|x_{ki}-x_{0i}|\to 0$ при $k\to\infty$ для всех $i=1,2,\ldots$ элементов последовательностей можно найти, например, в [ЛС65].

Т е о р е м а 6.6. *Пространство* $s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_s,d_s)$ *неравномерно сходящихся числовых последовательностей сепарабельно и полно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Выберем произвольную последовательность $X_0=\{x_{0i}\}=\{x_{01},\ldots,x_{0n},\ldots\}$ и для каждого i-го элемента последовательности x_{0i} построим последовательность $Q^*_k=\{q_{ki}\}=\{q_{k1},\ldots,q_{kn},\ldots\}$ с рациональными элементами $q_{ki}\in\mathbb{Q}$, удовлетворяющими условию $q_{ki}\to x_{0i}$ при $k\to\infty$. Рассмотрим последовательность $\{Q_k\}$, составленную из различных числовых последовательностей вида $Q_k=\{q_{k1},\ldots,q_{kk},0,0,\ldots\}$, члены которых $q_{ki}\in Q^*_k$. Множество $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_s$ различных последовательностей Q_k, очевидно, счетно, а каждый n-ый элемент q_{kn} последовательности Q_k при $n\le k$ сходится к n-ому элементу x_{0n} последовательности X_0 при $k\to\infty$, то есть $|q_{kn}-x_{0n}|\to 0$. Но тогда и расстояние $d_s(Q_k,X_0)\to 0$ при $k\to\infty$. Это означает, что счетное множество $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_s$ последовательностей Q_k с рациональными элементами всюду плотно в пространстве $s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_s,d_s)$, а пространство s сепарабельно.

2^o. Пусть последовательность $\{X_k\}$, $X_k=\{x_{ki}\}$ фундаментальна, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $k,l>N$ выполняется неравенство $d_s(X_k,X_l)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_{ki}-x_{li}|}{2^i(1+|x_{ki}-x_{li}|)}<\varepsilon$. В силу ограниченности ряда для любого i-ого члена ряда имеем $|x_{ki}-x_{li}|/2^i(1+|x_{ki}-x_{li}|)<\varepsilon_i$. Тогда для любых i-ых членов последовательностей x_{ki}, x_{li}, $i=1,2,\ldots$ и всех номеров $k,l>N$ выполняется неравенство $|x_{ki}-x_{li}|<\varepsilon_i$, то есть все последовательности $X_k=\{x_{ki}\}$ фундаментальны, и следовательно, $x_{ki}\to x_{0i}$ при $k\to\infty$. Последовательность $X_0=\{x_{0i}\}$, очевидно, принадлежит пространству s. Таким образом, пространство s полно. ■

Пространство $s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_s,d_s)$ неравномерно сходящихся числовых последовательностей *некомпактно*, однако содержит компактные множества. Критерий компактности множества в пространстве $s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_s,d_s)$ формулируются следующим образом. Множество A относительно компактно в пространстве s в том и только том случае, если все i-ые элементы последовательностей $X_k=\{x_{ki}\}=\{x_{k1}, x_{k2},\ldots\}$ из множества A ограничены $|x_{ki}|\le c_i$. В частности, в семействе ограниченных числовых последовательностей, все элементы которых ограничены одним и тем же числом, всегда существует последовательность, сходящаяся почленно.

6.4. Пространства непрерывных и ограниченных функций. Множество C непрерывных действительных функций $x=x(t)$, определенных на интервале [0,l], образует *пространство непрерывных функций* $C[0,1]=(C,d_C)$ с *равномерной* метрикой (метрикой *Чебышева*)

$$d_C(x,y)=\max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|. \qquad (6.22)$$

Если функция $x=x(t)$ задана на интервале $[a,b]$, то путем замены переменной $t'=(t-a)/(b-a)$ область определения функции преобразуется в интервал [0,1], а пространство $C[a,b]$ – в пространство $C[0,1]$.

Выполнение аксиом симметрии (1.01) и тождества (1.02) для функции d_C очевидно. Установим справедливость аксиомы треугольника (1.03). Для любых $t\in[0,1]$ имеем:

$$|x(t)-y(t)|\le|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\le d_C(x,z)+d_C(z,y).$$

Отсюда сразу получаем:

$$\max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|=d_C(x,y)\le d_C(x,z)+d_C(z,y). \qquad (6.23)$$

Условие сходимости последовательности $\{x_k(t)\}$ непрерывных действительных функций к пределу $x_0(t)$ в пространстве $C[0,1]$ имеет вид:

$$d_C(x_k,x_0)=\max_{0\le t\le 1}|x_k(t)-x_0(t)|\to 0 \quad \text{при } k\to\infty \qquad (6.24)$$

и равносильно условию *равномерной сходимости последовательности функций* $x_k(t)\to x_0(t)$ на интервале [0,1].

Т е о р е м а 6.7. *Пространство $C[0,1]=(C,d_C)$ непрерывных функций сепарабельно, полно и метрически выпукло.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1^o. По теореме Вейерштрасса для любой непрерывной функции $x(t)\in C$ и заданного $\varepsilon>0$ существует многочлен $r(t)$ такой, что $d_C(x,r)=\max_{0\le t\le 1}|x(t)-r(t)|<\varepsilon$. С другой стороны, найдется такой многочлен $q_k(t)$ с рациональными коэффициентами, определенный на интервале [0,l], что выполняется неравенство $\max\limits_{0\le t\le 1}|r(t)-q_k(t)|<\varepsilon$. Отсюда $d_C(x,q_k)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-q_k(t)|<2\varepsilon$. Это означает, что счетное множество $C_q=\{q_k(t)\}$ многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в пространстве $C[0,1]$ непрерывных действительных функций, а пространство $C[0,1]$ сепарабельно.

2°. Интервал [0,1] есть замкнутое (пример 2.4), связное (пример 2.8), вполне ограниченное (пример 2.14), полное (пример 2.19) и компактное (пример 2.24) множество. Согласно теореме 3.4 из всякой последовательности $\{x_k(t)\}$ функций, определенных на компактном множестве [0,1], можно выделить сходящуюся, а значит, и фундаментальную подпоследовательность, которая по теореме 3.13 будет равномерно сходиться на интервале [0,1] к пределу $x_0(t)$. Предел же любой равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций по теореме 3.14 является непрерывной функцией, то есть элементом пространства $C[0,l]$. Таким образом, пространство $C[0,l]$ полно.

3°. Метрическая выпуклость пространства $C[0,1]=(C,d_C)$ непрерывных функций устанавливается непосредственно с помощью подхода, использованного при доказательстве теоремы 1.1. В самом деле, если $x(t)\neq y(t)$, то аналогично случаям векторного пространства $R^n{}_\infty=l^n{}_\infty=(\mathbb{R}^n,d_{R\infty})$ и пространства ограниченных числовых последовательностей $m=l^\infty{}_\infty=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_m)$ с метриками Чебышева (теоремы 6.1, 6.3) всегда найдется такая непрерывная функция z, находящаяся между функциями x и y, то есть $[x, z, y]$, что неравенство треугольника (6.23) превращается в равенство (1.07). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы соответствующие значения функций $x(t)$, $z(t)$, $y(t)$ были точками, лежащими на одной прямой. ■

Пространство $C_q[0,1]=(C_q,d_C)$ многочленов $q(t)$ с рациональными коэффициентами, определенных на интервале [0,l], *неполно* в пространстве $C[0,l]$ непрерывных действительных функций, поскольку имеются фундаментальные последовательности $\{q_k(t)\}$, состоящие из многочленов $q_k(t)$ с рациональными коэффициентами, которые сходятся к многочлену $i(t)$ с иррациональными коэффициентами, не являющемуся точкой этого же пространства $C_q[0,1]$. По этой же причине, в частности, неполны пространствы $Q^1=(\mathbb{Q},d_{E1})$ рациональных чисел и $Q^n{}_p=(\mathbb{Q}^n,d_{Rp})$ n-мерных рациональных векторов $\mathbf{q}_k=(q_{k1},\dots,q_{kn})$, в которых существуют фундаментальные последовательности рациональных чисел, сходящиеся к иррациональным числам (пример 1.7). Пополнением пространства $C_q[0,1]$ многочленов $q(t)$ с рациональными коэффициентами служит полное пространство $C[0,1]$ непрерывных функций $x(t)$.

Пространство $C[0,1]$ непрерывных действительных функций *некомпактно*, поскольку в пространстве $C[0,1]$ существуют замкнутые множества, содержащие ограниченные последовательности $\{x_k(t)\}$ непрерывных функций, которые не сходятся в пространстве $C[0,1]$. В то же время в пространстве $C[0,1]$ имеются и компактные ограниченные множества. Критерий компактности множества в пространстве $C[0,1]$ формулируется следующим образом (теорема Арцела). Множество A непрерывных функций x, определенных на интервале

[0,l], компактно в пространстве $C[0,1]$ в том и только том случае, если функции $x \in A$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на интервале [0,l].

П р и м е р 6.8. Множество C_w непрерывных функций $x(t)$, определенных на интервале [0,l] и удовлетворяющих условиям $\max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le 1$, $x(0)=0$, $x(1)=1$, ограничено, замкнуто, но некомпактно. Действительно, например, последовательность непрерывных функций $x_n(t)=t^n$, $n=1,2,\ldots$не достигает интервале [0,l] своей нижней границы $\inf x_n(t)=0$, так как предел t^n при $n \to \infty$ не равен нулю, и значит, не является точкой множества C_w. ◘

З а м е ч а н и е. Всякое сепарабельное метрическое пространство *изометрично* и *изоморфно* некоторому подпространству пространства $C[0,1]$ непрерывных действительных функций (теорема Банаха-Мазура). □

Множество M действительных функций $x=x(t)$, определенных на интервале [0,l] и удовлетворяющих условию ограниченности $|x(t)| \le c$, образует *пространство ограниченных функций* $M[0,1]=(M,d_M)$ с *равномерной* метрикой

$$d_M(x,y) = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|. \tag{6.25}$$

Выполнение аксиом метрического пространства для функции d_M проверяется так же, как и выше для метрики d_C. Сходимость последовательности $\{x_k(t)\}$ ограниченных функций к пределу $x_0(t)$ в пространстве $M[0,1]$ есть *равномерная сходимость* на интервале [0,1]. Пространство $M[0,1]$ ограниченных действительных функций *полно*, *несепарабельно* и *некомпактно* [KA84]. В то же время пространство $M[0,1]$ ограниченных функций содержит в качестве подпространства пространство $C[0,1]$ непрерывных функций, которое сеперабельно и, как было отмечено в разделе 3.5, является замкнутым множеством в метрическом пространстве (M,d_M).

6.5. Пространства ограниченных измеримых функций. Множество $L_\infty(T,\mathcal{S}, m)$ измеримых функций $x=x(t)$, определенных и почти всюду конечных на множестве $T \subset \mathbb{R}$, где T – единица σ-алгебры $\mathcal{S}(T)$ подмножеств множества T, $(T,\mathcal{S}, m)$ – пространство с σ-конечной полной мерой m, и удовлетворяющих почти всюду условию существенной ограниченности $|x(t)| \le c_x$, образует *пространство ограниченных измеримых функций* $L_\infty=(L_\infty(T,\mathcal{S}, m), d_{L\infty})$ или более кратко $L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$ с метрикой (псевдометрикой)

$$d_{L\infty}(x,y) = \min_E \sup_{t \in T \setminus E} |x(t) - y(t)|, \tag{6.26}$$

где E – некоторое множество меры нуль. Стоящее в формуле (6.26) выражение

$$\min_E \sup_{t \in T \setminus E} |x(t)| = \operatorname{vrai} \sup_T x(t) \tag{6.27}$$

называется *существенным максимумом* модуля функции x на множестве T и представляет собой число c_0 наименьшее из всех чисел c_x, ограничивающих функцию x почти всюду на множестве T и таких, что $m(\{t \in T \mid |x(t)| \ge c_0\})=0$. Ясно, что существенный максимум функции $x(t)$ также конечен.

Выполнение аксиомы симметрии (1.01) и условия совпадения (1.34) для функции $d_{L\infty}$ очевидно. Аксиома тождества (1.02) будет выполняться, если эквивалентные измеримые функции, равные почти всюду на множестве T, отождествить с одной и той же точкой пространства $L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$. Нетрудно убедиться и в справедливости аксиомы треугольника (1.03), воспользовавшись тем же приемом, что и для метрик $d_{R\infty}$ и d_m. Условие сходимости последовательности $\{x_k(t)\}$ ограниченных измеримых функций к пределу $x_0(t)$ в пространстве $L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$ имеет вид:

$$d_{L\infty}(x_k,x_0) = \min_E \sup_{t\in T\setminus E} |x_k(t) - x_0(t)| \to 0 \quad \text{при } k\to\infty \tag{6.28}$$

и равносильно условию *равномерной сходимости последовательности функций* $x_k(t)\to_m x_0(t)$ *почти всюду* на множестве T.

Рассмотрим свойства пространств ограниченных измеримых функций.

Т е о р е м а 6.8. *Пространство* $L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$ *ограниченных измеримых функций полно и метрически выпукло.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть последовательность измеримых функций $\{x_k(t)\}$ сходится в себе на множестве T. Тогда для любого $\varepsilon>0$ при $k,l>N$ имеем

$$d_{L\infty}(x_k,x_l) = \min_E \sup_{t\in T\setminus E} |x_k(t) - x_l(t)| < \varepsilon.$$

Следовательно, найдется нулевое множество E_0 такое, что $\sup\limits_{t\in T\setminus E_0} |x_k(t) - x_l(t)|<\varepsilon$, а значит, почти всюду на множестве T выполняется неравенство $|x_k(t)-x_l(t)|<\varepsilon$ при $k,l>N$. В таком случае согласно теоремам 4.12 и 4.13 существует ограниченная измеримая функция $x_0(t)$, к которой последовательность функций $\{x_k(t)\}$ сходится почти всюду на множестве T и которая является точкой пространства $L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$. Таким образом, пространство $L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$ полно.

2°. Метрическая выпуклость пространства $L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$ ограниченных измеримых функций устанавливается непосредственно с помощью подхода, использованного при доказательстве теоремы 1.1. В самом деле, если $x(t)\neq y(t)$, то аналогично случаям векторного пространства $R^n{}_\infty=l^n{}_\infty=(\mathbb{R}^n,d_{R\infty})$, пространства ограниченных числовых последовательностей $m=l^\infty{}_\infty=(\mathbb{R}^\mathbb{N},d_m)$ с метриками Чебышева, пространства $C[0,1]=(C,d_C)$ непрерывных функций (теоремы 6.1, 6.3, 6.7) всегда найдется такая измеримая функция z, находящаяся между функциями x и y, то есть $[x, z, y]$, что неравенство треугольника превращается в равенство (1.07). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы соответствующие значения функций $x(t)$, $z(t)$, $y(t)$ были точками, лежащими на одной прямой. ■

Пространство $L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$ ограниченных измеримых функций *несепарабельно* и *некомпактно*.

Множество $L_p(T,\mathcal{S}, m)$ измеримых функций $x=x(t)$, определенных и почти всюду конечных на множестве $T\subset\mathbb{R}$, где T – единица σ-алгебры $\mathcal{S}(T)$ подмножеств множества T, $(T,\mathcal{S}, m)$ – пространство с σ-конечной полной мерой m, и удовлетворяющих условию ограниченности $\int_T |x(t)|^p\, dm(t)\le c^p<\infty$ для всех фиксированных целых чисел $p\ge1$, образует *пространство интегрируемых* (*суммируемых*) *измеримых функций* $L_p=(L_p(T,\mathcal{S}, m), d_{Lp})$ или более кратко $L_p=(\mathcal{S}, d_{Lp})$ с метрикой (псевдометрикой)

$$d_{Lp}(x,y) = \left(\int_T | x(t) - y(t) |^p \ dm(t) \right)^{1/p} . \quad (6.29)$$

Пространство $L_2=(\mathcal{S}, d_{L2})$ называется *функциональным гильбертовым пространством*.

Неотрицательность функции $d_{Lp}(x,y)\geq 0$ следует из неотрицательности подынтегрального выражения в формуле (6.29). Выполнение аксиомы симметрии (1.01) и условия совпадения (1.34) для функции d_{Lp} при любом фиксированном числе $p\geq 1$ очевидно. Аксиома тождества (1.02) будет выполняться, если эквивалентные измеримые функции, равные почти всюду на множестве T, отождествить с одной и той же точкой пространства $L_p=(\mathcal{S}, d_{Lp})$. Справедливость аксиомы треугольника (1.03) следует из неравенства Минковского для интегралов, аналогичного неравенству (6.06) для сумм. Условие сходимости последовательности $\{x_k(t)\}$ интегрируемых функций к пределу $x_0(t)$ в пространстве $L_p=(\mathcal{S},d_{Lp})$ имеет вид:

$$d_{Lp}(x_k,x_0) = \left(\int_T | x_k(t) - x_0(t) |^p \ dm(t) \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{при } k\to\infty \quad (6.30)$$

и называется *сходимостью в среднем с показателем p.* При $p=1$ говорят просто о *сходимости в среднем.*

Пространство $L_p=(\mathcal{S}, d_{Lp})$ интегрируемых функций при любом фиксированном числе $p\geq 1$ *полно*, *сепарабельно*, *метрически выпукло*, *некомпактно* [ЛС65], [Нат74], [КА84], [DL97].

Пространства $L_p=(\mathcal{S},d_{Lp})$ при произвольном $1\leq p\leq\infty$ называются также *пространствами Лебега* или *нормированными пространствами*. Если последовательность измеримых функций $\{x_k(t)\}$ сходится в пространстве $L_p=(\mathcal{S}, d_{Lp})$ к пределу $x_0(t)$, то она сходится к этой функции и по мере, и из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $x_0(t)$ почти всюду на множестве T. Если последовательность измеримых функций $\{x_k(t)\}$ сходится в пространстве $L_p=(\mathcal{S}, d_{Lp})$, то она сходится и в пространстве $L_q=(\mathcal{S}, d_{Lq})$, $1\leq q\leq p\leq\infty$.

Укажем некоторые частные случаи пространств Лебега $L_p=(\mathcal{S}, d_{Lp})$.

Пусть область определения функций T есть множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, σ-алгебра $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ – семейство $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ подмножеств множества $\mathbb{N}$, мера $m(A)=|A|$, если A – конечное подмножество $\mathbb{N}$, и $m(A)=\infty$, если A бесконечно. В этом случае функция $x=x(t)$ является последовательностью $\{x_n\}$, а пространство Лебега L_p совпадает с пространством ограниченных числовых последовательностей $l^{\infty}{}_p$, где метрика d_{lp} задана формулой (6.14). Если $T=\mathbb{N}_n=\{1,\ldots,n\}$ и $m(A)=|A|$, то пространство Лебега L_p совпадает с n-мерным векторным пространством $R^n{}_p=l^n{}_p$.

Пусть область определения функций T есть интервал $\mathbb{R}_{01}=[0,1]$, σ-алгебра $\mathcal{S}(\mathbb{R}_{01})$ – семейство борелевых подмножеств интервала $[0,1]$, а мера $m(A)$ – мера Лебега. В этом случае пространство Лебега L_p при $p=\infty$ называется *пространством ограниченных измеримых функций* $L_\infty[0,1]=(\mathbb{R}_{01},d_{L\infty})$, а при фиксированном числе $p \geq 1$ – *пространством интегрируемых* (*суммируемых*) *функций* $L_p[0,1]=(\mathbb{R}_{01},d_{Lp})$ с метрикой (псевдометрикой)

$$d_{Lp}(x,y)=\left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \qquad (6.31)$$

Если функция $x=x(t)$ задана на интервале $[a,b]$, то путем замены переменной $t'=(t-a)/(b-a)$ область определения функции преобразуется в интервал [0,1], а пространства $L_\infty[a,b]$, $L_p[a,b]$ – в пространства $L_\infty[0,1]$, $L_p[0,1]$.

Пространства ограниченных числовых последовательностей $m=l^\infty{}_\infty$ и ограниченных измеримых функций $L_\infty[0,1]$, как подпространства пространства Лебега $L_\infty=(\mathcal{S},d_{L\infty})$, *полны*, *метрически выпуклы*, *несепарабельны*, *некомпактны*.

Пространства ограниченных числовых последовательностей $l^\infty{}_p$ и интегрируемых функций $L_p[0,1]$ при любом фиксированном числе $p \geq 1$, как подпространства пространства Лебега $L_p=(\mathcal{S},d_{Lp})$, *полны*, *сепарабельны*, *метрически выпуклы*, *некомпактны*. Множество C непрерывных действительных функций $x(t)$, определенных на интервале [0,l], *всюду плотно* в пространстве $L_p[0,1]$ интегрируемых функций, так как в силу C-свойства измеримых функций всякая последовательность $\{x_k(t)\}$ непрерывных функций сходится в среднем с показателем p к ограниченной измеримой функции. Отсюда, в частности, вытекает также и сепарабельность пространств $L_p[0,1]$ и $L_p=(\mathcal{S},d_{Lp})$. Действительно, счетное множество $C_q=\{q_k(t)\}$ многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в пространстве $C[0,1]$, а значит, всюду плотно и в пространствах $L_p[0,1]$ и $L_p=(\mathcal{S},d_{Lp})$.

Множество C непрерывных действительных функций $x(t)$, определенных на интервале [0,l], компактно в пространстве $L_p[0,1]$ в том и только том случае, если функции $x(t) \in C$ интегрируемы и сходятся в среднем с показателем p или, говоря другими словами, равномерно ограничены по норме и равностепенно непрерывны в среднем на интервале [0,l] (теорема М.Рисса).

Пространство $C_{Lp}[0,1]=(C,d_{Lp})$ непрерывных функций $x=x(t)$ *неполно* в пространстве $L_p[0,1]$ интегрируемых функций, поскольку имеются фундаментальные последовательности $\{x_k(t)\}$ функций, сходящиеся в среднем с показателем p к разрывной функции, не являющейся точкой этого же пространства $C_{Lp}[0,1]$. Пополнением пространства $C_{Lp}[0,1]$ непрерывных функций служит полное пространство $L_p[0,1]$ интегрируемых функций, определенных на интервале [0,l].

Пространство расстояний (X,d_X) будем называть L_p-*вложимым*, если оно является изометрическим подпространством пространства $L_p=(\mathcal{S}, d_{Lp})$ для некоторого пространства с мерой $(T,\mathcal{S}, m)$. Очевидно, что пространства $L_p[0,1]$, $l^\infty{}_p$, $R^n{}_p=l^n{}_p$ будут L_p-вложимыми. В таком случае L_p-вложимым будет и любое $l^\infty{}_p$-вложимое и $l^n{}_p$-вложимое пространство.

Можно показать, что пространство расстояний (X,d_X) будет L_p-вложимым при фиксированном целом числе $p \geq 1$ в том и только том случае, если любое конечное подпространство пространства (X,d_X) является L_p-вложимым [BDK66]. Пространство расстояний (X,d_X) будет L_1-вложимым в том и только том случае, если d_X является d-выпуклой гиперметрикой или если пространство (X,d_X) является пространством отрицательного типа. Метрически преобразованные пространства $(X, F(d_X))$, где функционал $F(d_X)$ есть расстояние $d_X^{(r)}$, усредненное по трем точкам (1.42), или неубывающая вогнутая функция, сохраняют свойство L_1-вложимости исходного пространства расстояний (X,d_X) [DL97]. Для конечного пространства расстояний (X,d_X) свойства $l^n{}_p$-, $l^\infty{}_p$- и L_p-вложимости эквивалентны [Fi94]. Свойства $l^n{}_p$-, $l^\infty{}_p$- и L_p-вложимости относятся к числу метрически инвариантных свойств пространств расстояний.

П р и м е р 6.9. Метрические пространства n-мерных векторов из примеров 6.1 и 6.7 $Q^n{}_p=(\mathbb{Q}^n,d_{Rp})$ с рациональными компонентами, $Z^n{}_p=(\mathbb{Z}^n,d_{Rp})$ с целочисленными компонентами, $N^n{}_p=(\mathbb{N}^n,d_{Rp})$ с натуральными компонентами, $I^n{}_p=(\mathbb{R}_{01}{}^n,d_{Rp})$ с действительными компонентами в интервале $\mathbb{R}_{01}=[0,1]$ являются $l^n{}_p$-, $l^\infty{}_p$- и L_p-вложимыми пространствами. n-мерное гиперкубическое пространство $Z^n{}_{(1)1}=(\{0,1\}^n,d_{R1})$ из примера 6.2 будет $l^n{}_1$-, $l^\infty{}_1$- и L_1-вложимым. ◘

П р и м е р 6.10. Пространство (L,d_v) метрической решетки L из пример 1.19, которая помимо прочего обладает свойством дистрибутивности $\inf(z,\sup(x,y))=\sup(\inf(x,z), \inf(y,z))$, является L_1-вложимым. ◘

6.6. Пространства измеримых функций. Множество $S(T,\mathcal{S}, m)$ измеримых функций $x=x(t)$, определенных и почти всюду конечных на множестве $T\subset\mathbb{R}$, где T – единица σ-алгебры $\mathcal{S}(T)$ подмножеств множества T, $(T,\mathcal{S}, m)$ – пространство с σ-конечной полной мерой m, образует *пространство измеримых функций* $S=(S(T,\mathcal{S}, m), d_S)$ или более кратко $S=(\mathcal{S}, d_S)$ с метрикой (псевдометрикой)

$$d_S(x,y)=\int_T \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|} f(t)dm(t). \tag{6.32}$$

В формуле (6.32) функция f измерима, интегрируема по Лебегу и удовлетворяет условиям

$$f(t)>0, \quad \int_T f(t)dm(t)=1. \tag{6.33}$$

Так как мера m σ-конечна, то функция f может быть задана, например, как

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\chi_{T_i}(t)}{2^i m(T_i)}, \tag{6.34}$$

где T_i – попарно не пересекающиеся множества, образующие покрытие множества T, то есть $T=\bigcup_{i=1}^{\infty}T_i$, χ_{T_i} – их характеристические функции, а меры $m(T_i)<\infty$. Если мера m вполне σ-конечна и $m(T)<\infty$, то можно положить $f(t)=1/m(T)$. В этих случаях функция f будет суммируемой по мере m. Так как, кроме того, первый из сомножителей подынтегральной функции в формуле (6.32) ограничен 1, то интеграл по множеству T конечен [Вул73], [КА84].

Неотрицательность функции $d_S(x,y)\geq 0$ следует из неотрицательности подынтегрального выражения в формуле (6.32). Выполнение аксиомы симметрии (1.01) и условия совпадения (1.34) для функции d_S очевидно. Аксиома тождества (1.02) будет выполняться, если эквивалентные функции, равные почти всюду на пространстве множеств с мерой $(T,\mathcal{S}, m)$, отождествить с одной и той же точкой пространства $S=(\mathcal{S}, d_S)$. В самом деле, если функции $x(t)$ и $y(t)$ равны почти всюду на пространстве множеств с мерой $(T,\mathcal{S},m)$, то есть $x(t)=_{aew} y(t)$, то $d_S(x,y)=0$. Если $d_S(x,y)=0$, то подынтегральная функция почти всюду равна 0, а, следовательно, и $x(t)=_{aew} y(t)$. Справедливость аксиомы треугольника (1.03) следует из неравенства (6.21). Полагая в последнем $a=x(t)-z(t)$, $b=z(t)-y(t)$, умножая на функцию $f(t)$ и интегрируя почленно, получим неравенство треугольника

$$d_S(x,y) = \int_T \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|} f(t)dm(t) \le$$

$$\le \int_T \frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|} f(t)dm(t) + \int_T \frac{|z(t)-y(t)|}{1+|z(t)-y(t)|} f(t)dm(t) = d_S(x,z) + d_S(z,y).$$

Условие сходимости последовательности $\{x_k(t)\}$ измеримых функций к пределу $x_0(t)$ в пространстве $S=(\mathcal{S}, d_S)$ по метрике d_S имеет вид:

$$d_S(x_k,x_0) = \int_T \frac{|x_k(t)-x_0(t)|}{1+|x_k(t)-x_0(t)|} f(t)dm(t) \to 0 \quad \text{при } k\to\infty \tag{6.35}$$

и равносильно условию (4.49) *сходимости по мере* последовательности измеримых функций $x_k(t)\to_{mes} x_0(t)$ при $k\to\infty$ на множестве T, то есть условию

$$\lim_{k\to\infty} m(\{t\in T \mid |x_k(t)-x_0(t)|\ge\varepsilon\}) = 0. \tag{6.36}$$

Действительно, пусть выполняется условие (6.35) и $d_S(x_k,x_0)\to 0$ при $k\to\infty$. Для произвольного $\varepsilon>0$ определим измеримое множество $A_k(\varepsilon)\subset X$ вида

$$A_k(\varepsilon)=\{t\in T \mid |x_k(t)-x_0(t)|\, f(t)\ge\varepsilon\}.$$

Тогда, учитывая возрастающий характер функции $g(u)=u/(1+u)$, имеем

$$d_S(x_k,x_0) = \int_T \frac{|x_k(t)-x_0(t)|}{1+|x_k(t)-x_0(t)|} f(t)dm(t) \ge \int_{A_k(\varepsilon)} \frac{|x_k(t)-x_0(t)|}{1+|x_k(t)-x_0(t)|} f(t)dm(t) \ge \frac{\varepsilon m[A_k(\varepsilon)]}{1+\varepsilon}.$$

Так как при $k\to\infty$ метрика $d_S(x_k,x_0)\to 0$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} m[A_k(\varepsilon)]=0$, а значит, последовательность функций $x_k(t)\, f(t)\to_{mes} x_0(t)\, f(t)$. Поскольку $f(t)>0$, то из последнего условия получаем $x_k(t)\to_{mes} x_0(t)$, то есть выполняется условие (6.36) сходимости по мере m. С другой стороны, если выполняется условие (6.36) и $x_k(t)\to_{mes} x_0(t)$, то для любого $\varepsilon>0$ и $f(t)>0$ справедливо неравенство

$$m(\{t\in T \mid \frac{|x_k(t)-x_0(t)|}{1+|x_k(t)-x_0(t)|} f(t) \ge\varepsilon\}) \le m(\{t\in T \mid |x_k(t)-x_0(t)|\ge\varepsilon\}),$$

и, следовательно, существует сходимость по мере к нулю последовательности

$$\frac{|x_k(t)-x_0(t)|}{1+|x_k(t)-x_0(t)|} f(t) \to_{mes} 0.$$

Поскольку функция $f(t)$ суммируема по мере m, то по теореме Лебега на множестве T допустим предельный переход под знаком интеграла, и значит, выполняется условие (6.35) сходимости по метрике d_S [Вул73], [КА84].

З а м е ч а н и е. В соответствии с принципом Александрова-Урысона (раздел 1.5) и согласно теореме 4.14 сходимость измеримых функций по мере m

является *-сходимостью по отношению к сходимости почти всюду, если последнюю считать l-сходимостью. В таком случае на множестве T нельзя ввести метрику d_S такую, чтобы сходимость по метрике совпадала со сходимостью почти всюду. □

Т е о р е м а 6.9. *Пространство $S=(\mathcal{S}, d_S)$ измеримых функций сепарабельно и полно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Рассмотрим множество $\{x_k(t)\}$ простых измеримых функций вида $x_k(t)=\sum_{i=1}^{k} q_i \chi_{T_i}(t)$, где константы q_i – рациональные числа, множества $T_i \in \mathcal{S}_{(q)}$, $\mathcal{S}_{(q)}$ – счетное множество, всюду плотное в пространстве $S=(\mathcal{S}, d_S)$. Очевидно, что множество $\{x_k(t)\}$ счетно. Согласно теореме 4.11 для любой измеримой функции $\{x(t)\}$, являющейся точкой метрического пространства $S=(\mathcal{S}, d_S)$, существует сходящаяся к ней последовательность простых измеримых функций $\{h_k(t)\}$ вида (4.47). Иными словами, множество простых измеримых функций всюду плотно в пространстве $S=(\mathcal{S}, d_S)$, а значит, всюду плотно в пространстве $S=(\mathcal{S}, d_S)$ и счетное множество $\{x_k(t)\}$ простых измеримых функций с рациональными коэффициентами. Следовательно, пространство $S=(\mathcal{S}, d_S)$ сепарабельно.

2°. Пусть последовательность измеримых функций $\{x_k(t)\}$ сходится в себе на пространстве $S=(\mathcal{S},d_S)$, то есть $d_S(x_k,x_l)\to 0$ при $k,l\to\infty$. С помощью рассуждений, аналогичных выше приведенным, нетрудно убедиться, что для любого $\varepsilon>0$ последовательность $\{x_k(t)\}$ удовлетворяет условию (4.50):

$$\lim_{n,l\to\infty} m(\{t\in T \mid |x_k(t)-x_l(t)|\geq\varepsilon\}) = 0.$$

В таком случае, согласно теореме 4.13, из последовательности измеримых функций $\{x_k(t)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_i}(t)\}$, которая сходится почти всюду на множестве T к некоторой ограниченной измеримой функции $x_0(t)$. По теореме 4.12 подпоследовательность $\{x_{k_i}(t)\}$ сходится к функции $x_0(t)$ и по мере m, а значит, и по метрике d_S на пространстве $S=(\mathcal{S}, d_S)$. Тогда в силу следствия 1.10.Б и сама фундаментальная последовательность $\{x_k(t)\}$ сходится к тому же самому пределу $x_0(t)$, являющемуся точкой этого же пространства. Таким образом, пространство $S=(\mathcal{S}, d_S)$ измеримых функций полно. ■

Пространство измеримых функций $S=(\mathcal{S}, d_S)$ *некомпактно*.

Укажем некоторые частные случаи пространства $S=(\mathcal{S}, d_S)$.

Пусть область определения функций T есть множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, σ-алгебра $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ – семейство $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ подмножеств множества $\mathbb{N}$, мера $m(A)=|A|$, если A – конечное подмножество $\mathbb{N}$, и $m(A)=\infty$, если A бесконечно. В этом случае функция $x=x(t)$ является последовательностью $\{x_n\}$, а пространство $S=(\mathcal{S}, d_S)$ совпадает с пространством неравномерно сходящихся числовых последовательностей $s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_s, d_s)$, где метрика d_s задается формулой (6.20).

Пусть область определения функций T есть интервал $\mathbb{R}_{01}=[0,1]$, σ-алгебра $\mathcal{S}(\mathbb{R}_{01})$ – семейство борелевых подмножеств интервала [0,1], а мера $m(A)$ – мера

Лебега. В этом случае пространство $S=(\mathcal{S}, d_S)$ называется *пространством измеримых функций* $S[0,1]=(\mathbb{R}_{01},d_S)$. Если функция $x=x(t)$ задана на интервале $[a,b]$, то путем замены переменной $t'=(t-a)/(b-a)$ область определения функции преобразуется в интервал $[0,1]$, а пространство $S[a,b]$ – в пространство $S[0,1]$.

Пространства неравномерно сходящихся числовых последовательностей s и измеримых функций $S[0,1]$, как подпространства пространства $S=(\mathcal{S}, d_S)$,также *полны*, *сепарабельны* и *некомпактны*.

Пространство расстояний (X,d_X) будем называть *S-вложимым*, если оно является изометрическим подпространством пространства $S=(\mathcal{S}, d_S)$ для некоторого пространства с мерой $(T,\mathcal{S}, m)$. Очевидно, что пространства $S[0,1]$ и s будут S-вложимыми.

Существуют и другие виды функциональных пространств, в том числе и более общего вида, например, *банахово пространство*, которое относится к классу нормированных линейных (векторных) пространств. Рассмотренные выше функциональные пространства: $m=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_m)$, $l_p=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{lp})$ ограниченных и $c=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c,d_m)$ равномерно сходящихся числовых последовательностей, $M[0,1]= =(M,d_M)$ ограниченных и $C[0,1]=(C,d_C)$ непрерывных действительных функций, $L_\infty[0,1]=(\mathbb{R}_{01},d_{L\infty})$ ограниченных и $L_p[0,1]=(\mathbb{R}_{01},d_{Lp})$ интегрируемых (суммируемых) измеримых функций с вполне σ-конечной мерой, а также ряд других метрических пространств представляют собой частные случаи банахова пространства. Пространство измеримых функций $S=(\mathcal{S}, d_S)$ с метрикой (6.32) не является нормированным линейным пространством.

6.7. Метрические пространства и алгебры множеств. Обсудим возможные способы метризации σ-алгебры множеств $\mathcal{S}(X)$. Напомним, что счетное объединение открытых множеств и счетное пересечение замкнутых множеств некоторого метрического или топологического пространства X фактически представляют собой σ-кольцо $\mathcal{K}_\sigma$ и δ-кольцо $\mathcal{K}_\delta$ множеств. Элементами этих семейств множеств будут также множество X и пустое множество $\varnothing$, которые одновременно являются и открытыми, и замкнутыми множествами. Поэтому семейство открытых (замкнутых) множеств любого метрического пространства или топология топологического пространства образует σ-алгебру множеств $\mathcal{S}(X)$. Алгебра $\mathcal{S}(X)$ над множеством X как топологическое пространство может быть наделена различными топологиями. Особое значение для нас имеет так называемая (o)-*топология*, которая позволяет непосредственным образом метризовать σ-алгебру $\mathcal{S}(X)$, вводя на ней некоторую метрику d.

Замыкание множества, заданное условием (2.08), можно считать унарной операцией [.] на множестве X, порождающей замкнутое множество. Всякое же семейство замкнутых множеств является σ-алгеброй $\mathcal{S}(X)$, которая образует с метрикой Хаусдорфа d_H (1.13) метрическое пространство [Шил69].

Булеву алгебру множеств $\mathsf{B}(X)$ над семейством $\mathcal{P}(X)$ подмножеств множества X, дополненную унарной операцией замыкания [.], можно и иным образом отождествить с метрическим пространством. Булева алгебра $\mathsf{B}(X)$ «с замыканием», очевидно, также является σ-алгеброй, подалгебрами которой будут замкнутые множества метрического пространства. Семейство подалгебр любой булевой алгебры образует полную дистрибутивную решетку L, на которой можно определить метрику d_v вида (1.38). Тем самым булева алгебра $\mathsf{B}(X)$ «с замыканием» становится метрическим пространством решетки (L,d_v), полным в смысле введенного в главе 2 определения полноты пространства, L_1-вложимым (пример 6.9) и обладающим следующим свойством.

Т е о р е м а 6.10. *Полная дистрибутивная решетка L изоморфна σ-кольцу $\mathcal{K}_\sigma$ открытых множеств, антиизоморфна δ-кольцу $\mathcal{K}_\delta$ замкнутых множеств.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что решетка L, как и всякое частично упорядоченное множество, изоморфно вкладывается в семейство $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств множества X [Кур68], [KM67], которое в свою очередь есть ни что иное, как минимальная алгебра $\mathcal{S}(X)$, содержащая все подмножества семейства $\mathcal{P}(X)$, в том числе σ- и δ-кольца множеств [КФ68]. В качестве алгебры $\mathcal{S}(X)$ обычно подразумевается булева алгебра множеств $\mathsf{B}(X)$, неприводимая по отношению к семейству $\mathcal{P}(X)$. Изоморфизм решетки L и алгебры $\mathcal{S}(X)$ устанавливается характеристической функцией множества χ_A [Bir67]. Множество $A\subseteq X$ будет открытым в том и только том случае, если для элементов $x_i\leq x_j$ выполняется неравенство $\chi_A(x_i)\leq\chi_A(x_j)$, что соответствует изотонности характеристической функции, и замкнутым, если выполняется неравенство $\chi_A(x_i)\geq\chi_A(x_j)$, что соответствует антитонности характеристической функции. А это и означает изоморфизм решетки L с σ-кольцом $\mathcal{K}_\sigma$ открытых множеств и антиизоморфизм с δ-кольцом $\mathcal{K}_\delta$ замкнутых множеств. ■

Возможны и иные трактовки взаимосвязи метрических пространств с алгебрами множеств. Взаимозаменяемость сходящихся последовательностей, открытых и замкнутых множеств, отмеченная в главе 2, позволяет говорить о существовании глубокой внутренней связи между метрическими и топологическими пространствами и алгебрами множеств.

Сопоставление сходящейся последовательности множеств $\{A_n\}$ с ее пределом A, выражаемое равенством (3.31), можно рассматривать как выполнение бесконечноарной операции предельного перехода lim, определенной на некоторой σ-алгебре множеств. Такая σ-алгебра множеств $\mathcal{S}(X)=\{X;\ \bigcup,\ \bigcap,\ \bar{}\ ,\ \lim\}$ с заданными на ней операциями объединения, пересечения, дополнения и предельного перехода обладает свойствами псевдометрического пространства, если симметрическую разность множеств $A\Delta B$ принять за своеобразное эрзац-расстояние между множествами в духе обсуждений, приведенных в разделе 3.6.

Глава 7
Пространства измеримых множеств

7.1. Метрики, порожденные мерой множества. Рассмотрим теперь возможные подходы к метризации σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ измеримых множеств. Воспользуемся аналогией с метрическими пространствами измеримых функций S=($S(T,\mathcal{S}, m)$, d_S) и введем понятие *метрического пространства измеримых множеств* X=($\mathcal{S}(X)$, m, d_X). Будем считать для определенности, если иное специально не оговорено, что множества $A\subset X$, входящие в σ-алгебру $\mathcal{S}(X)$, измеримы по Лебегу; мера множества m счетно-аддитивна, вполне σ-конечна и полна, метрика d_X задана на пространстве с мерой $(X,\mathcal{S}, m)$.

Однозначность представления любого множества $A\subset X$ его характеристической функцией χ_A позволяет следующим образом строить пространства измеримых множеств. Определим расстояние между измеримыми множествами как расстояние между их характеристическими функциями вида (6.32):

$$d_{X0}(A,B) = d_S(\chi_A(x),\chi_B(x)) = \int_X \frac{|\chi_A(x)-\chi_B(x)|}{1+|\chi_A(x)-\chi_B(x)|}\frac{dm(x)}{m(X)}. \tag{7.01}$$

Расстояние $d_{X0}(A,B)$ задано на семействе всех эквивалентных между собой измеримых и почти всюду конечных на множестве X функций. Свойства определенного таким образом метрического пространства измеримых множеств X_0=($\mathcal{S}(X)$, m, d_{X0}) совпадают со свойствами рассмотренного в разделе 6.6 метрического пространства измеримых функций S=($S(T,\mathcal{S}, m)$, d_S), поэтому пространство X_0=($\mathcal{S}(X)$, m, d_{X0}), как и пространство S=($S(T,\mathcal{S}, m)$, d_S), будет *полно*, *сепарабельно* и *некомпактно* [KA84], а сходимость по метрике d_{X0} не совпадает со сходимостью почти всюду.

Другая возможность метризации σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ измеримых множеств состоит в прямом задании расстояния между множествами как некоторого функционала от меры множества. Назовем такую метрику *порожденной мерой*, или *метрикой меры* [DL97]. Как явствует из теорем 4.7 и 4.8, близость двух измеримых множеств $A,B\in\mathcal{S}(X)$ определяется выражением

$$d_{X1}(A,B) = m(A\Delta B). \tag{7.02}$$

Убедимся, что функция d_{X1}, задающая отображение $d_{X1}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathbb{R}_+$, действительно является метрикой (псевдометрикой), которая удовлетворяет аксиоматике метрического пространства (1.01)-(1.03), (1.34). Пространство измеримых множеств с расстоянием d_{X1} будем обозначать через X_1=($\mathcal{S}(X)$, m, d_{X1}) или более кратко X_1=($\mathcal{S}$, d_{X1}).

Т е о р е м а 7.1. *Функция $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$, где m – вполне σ-конечная мера множества, определенная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$, является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на пространстве множеств с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Действительность и неотрицательность функции $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$ вытекает непосредственно из определения меры как действительной и неотрицательной функции множества, определенной на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$, а бинарность операции симметрической разности множеств Δ означает по определению арности операции, что функция d_{X1} задана на прямом произведении семейств множеств $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$. Аксиома симметрии (1.01) для функции d_{X1} следует из свойства коммутативности операции симметрической разности $A\Delta B=B\Delta A$, вытекающего из ее определения. Неравенство треугольника (1.03) следует из неравенства (4.40)

$$d_{X1}(A,B) = m(A\Delta B) \leq m(A\Delta C) + m(C\Delta B) = d_{X1}(A,C) + d_{X1}(C,B).$$

2°. Проверим теперь выполнение аксиомы тождества (1.02) или условия совпадения (1.34). Так как согласно свойству идентичности симметрической разности множеств $A\Delta B=\varnothing$ при $A=B$, то из равенства множеств A и B следует, что $d_{X1}(A,A)=m(\varnothing)=0$. В то же время из равенства $d_{X1}(A,B)=0$ следует только, что $m(A\Delta B)=0$, что в общем случае не означает равенства множеств A и B. Тем самым, строго говоря, выполняется условие совпадения (1.34). Таким образом, функция d_{X1}, определяемая формулой (7.02), является псевдометрикой на σ-алгебре $\mathcal{S}(X)$ измеримых множеств, а $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ – псевдометрическим пространством.

3°. Как было показано в разделе 1.8, любое псевдометрическое пространство изометрически преобразуется в метрическое пространство путем «склеивания» в классы эквивалентностей всех пар точек исходного пространства, для которых псевдометрика равна нулю. В нашем случае в силу леммы 4.A в общий класс попадут m-равные множества, совпадающие с точностью до множеств меры нуль. Для m-равных множеств из условия $d_{X1}(A,B)=0$ следует, что $A=_mB$. Если классы m-равных множеств взять в качестве элементов некоторого семейства множеств $\mathcal{S}_m$, то пространство $X_1=(\mathcal{S}_m,d_{X1})$, на котором выполняется и аксиома тождества (1.02), становится метрическим. Очевидно, что пространство с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$ почти всюду совпадает с пространством $(X,\mathcal{S}_m, m)$. Поэтому, пренебрегая различием между m-равными множествами, пространство $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ также можно считать метрическим пространством, где функция d_{X1} является метрикой почти всюду. ■

Новые виды пространств измеримых множеств можно получить с помощью рассмотренных в разделе 1.9 метрических преобразований пространства $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$, вводя на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$ новую метрику $d_{Xq}=F_q(d_{X1})$. Одно из таких преобразованных расстояний определим как прямо пропорциональный функционал вида (1.41)

$$d_{X2}(A,B) = F_2(d_{X1}(A,B)) = h_0 d_{X1}(A,B) = \frac{d_{X1}(A,B)}{\sup\limits_{A,B\in\mathcal{S}(X)} d_{X1}(A,B)}. \qquad (7.03)$$

Другое преобразованное расстояние зададим как удвоенное расстояние вида (1.42), усредненное по трем точкам относительно пустого множества $\varnothing$

$$d_{X3}(A,B) = F_3(d_{X1}(A,B)) = 2d_{X1}{}^{(\varnothing)}(A,B) = \frac{2d_{X1}(A,B)}{d_{X1}(A,B)+d_{X1}(A,\varnothing)+d_{X1}(\varnothing,B)}. \qquad (7.04)$$

Так как $d_{X1}(\varnothing,\varnothing)=0$, то функция d_{X3}, заданная формулой (7.04), не доопределена в «нуле» при $A=B=\varnothing$. Поэтому по определению будем считать, что

$$d_{X3}(\varnothing,\varnothing) = 0. \tag{7.05}$$

Метрически преобразованные пространства множеств с метриками d_{Xq}, $q=2,3$ обозначим как $X_q=(\mathcal{S}(X), m, d_{Xq})$ или более кратко $X_q=(\mathcal{S}, d_{Xq})$. Согласно определению (7.03) и теореме 1.15 преобразованные пространства $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$ и $X_3=(\mathcal{S}, d_{X3})$ измеримых множеств останутся метрическими (псевдометрическими), как и исходное пространство $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$. Из формул (7.03), (7.04) вытекает также, что расстояния d_{X2} и d_{X3} удовлетворяют следующему условию нормировки

$$0 \le d(A,B) \le 1. \tag{7.06}$$

Поэтому функции d_{Xq}, $q=2,3$ задают отображения $d_{Xq}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathbb{R}_{01}$ прямого произведения σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ измеримых множеств на интервал [0,1] действительных чисел.

З а м е ч а н и е. Ограничения на расстояния в метрических пространствах типа (7.06) накладываются довольно часто в различных приложениях, например, в кластерном анализе. □

Примем теперь во внимание определение (7.02) расстояния d_{X1}, формулы (4.12), (4.13), связывающие меры множеств, и представим преобразованные (нормированные) расстояния d_{X2} и d_{X3} следующим образом:

$$d_{X2}(A,B) = F_2(d_{X1}(A,B)) = d_{X1}(A,B)/d_{X1}(\varnothing,X) = m(A\Delta B)/m(X), \tag{7.07}$$

$$d_{X3}(A,B) = F_3(d_{X1}(A,B)) = d_{X1}(A,B)/d_{X1}(\varnothing,A\cup B) = m(A\Delta B)/m(A\cup B). \tag{7.08}$$

Полагая согласно соотношению (4.04) меру множества равной его мощности, выражения (7.02),(7.07) и (7.08) для расстояний между измеримыми множествами можно записать в виде

$$d_{X1}(A,B) = |A\Delta B|, \quad d_{X2}(A,B) = |A\Delta B|/|X|, \quad d_{X3}(A,B) = |A\Delta B|/|A\cup B|. \tag{7.09}$$

Назовем расстояние между измеримыми множествами $d_{X1}(A,B)$ *основным*, $d_{X2}(A,B)$ – *полностью усредненным* и $d_{X3}(A,B)$ – *локально усредненным*. Полностью усредненное расстояние $d_{X2}(A,B)$ представляет собой удельное расстояние между двумя множествами A и B, которое соотносит основное расстояние с расстоянием, максимально возможным в исходном пространстве. Локально усредненное расстояние $d_{X3}(A,B)$ задает удельное расстояние между множествами A и B, относя основное расстояние к максимально возможной «общей части» только этих двух множеств в исходном пространстве.

Основное расстояние вида $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$ или $d_{X1}(A,B)=|A\Delta B|$ приведено во многих монографиях по теории множеств, например, в [KM67], [КФ68], [Oxt71] и называется также *расстоянием Фреше-Никодима-Ароншаяна*, а пространство $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ – *полуметрическим пространством меры* [DL97]. Локально усредненное расстояние $d_{X3}(A,B)=m(A\Delta B)/m(A\cup B)$ введено в работе [MS58] и названо *расстоянием Штейнхауса*, а $d_{X3}(A,B)=|A\Delta B|/|A\cup B|$ – *биотопическим расстоянием* [DL97]. Полностью и локально усредненные расстояния $d_{X2}(A,B)=m(A\Delta B)/m(X)$ и $d_{X3}(A,B)=m(A\Delta B)/m(A\cup B)$ были предложены также независимо в работах автора [Петр81], [Петр82], [Петр94].

7.2. Степенное преобразование расстояний между множествами. Пространства измеримых множеств более общего вида можно образовать, если одну из метрик d_{Xq}, q=1,2,3 взять в качестве исходной и осуществить степенное преобразование

$$d_{Xqp}(A,B) = F_p(d_{Xq}(A,B)) = [d_{Xq}(A,B)]^{1/p}, \tag{7.10}$$

где $p\geq 1$ – фиксированное целое число. Очевидно, что функции d_{X1p} задают отображение $d_{X1p}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathbb{R}_+$, а функции d_{X2p} и d_{X3p} – отображение $d_{Xqp}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathbb{R}_{01}=$ $=[0,1]$. Обозначим такие пространства через $X_{qp}=(\mathcal{S}(X), m, d_{Xqp})$ или, короче, $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$. Ясно, что пространства множеств X_{q1} совпадают с X_q.

Подставляя в формулу (7.10) равенства (7.02), (7.07), (7.08), получим следующие выражения для расстояний между измеримыми множествами:

$$d_{X1p}(A,B) = [d_{X1}(A,B)]^{1/p} = [m(A\Delta B)]^{1/p}, \tag{7.11}$$

$$d_{X2p}(A,B) = [d_{X2}(A,B)]^{1/p} = d_{X1p}(A,B)/d_{X1p}(\varnothing,X) = [m(A\Delta B)/m(X)]^{1/p}, \tag{7.12}$$

$$d_{X3p}(A,B) = [d_{X3}(A,B)]^{1/p} = d_{X1p}(A,B)/d_{X1p}(\varnothing,A\cup B) = [m(A\Delta B)/m(A\cup B)]^{1/p}. \tag{7.13}$$

Заменяя согласно формуле (4.04) меру множества его мощностью, имеем из соотношений (7.11)-(7.13)

$$d_{X1p}(A,B) = |A\Delta B|^{1/p}, \tag{7.14}$$

$$d_{X2p}(A,B) = (|A\Delta B|/|X|)^{1/p}, \tag{7.15}$$

$$d_{X3p}(A,B) = (|A\Delta B|/|A\cup B|)^{1/p}, \tag{7.16}$$

что представляет собой степенное преобразование соответствующих расстояний $d_{Xq}(A,B)$, заданных формулами (7.09). Расстояние между множествами вида $d_{X12}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/2}$ было упомянуто в книге [Ор79].

Для вероятностных множеств, где $m(X)=1$, расстояния d_{X1p} и d_{X2p} равны при любых $p\geq 1$. Отметим, что при фиксированном числе $p\geq 1$ каждое локально усредненное расстояние d_{X3p} подчиняется требованию (7.05) $d_{X3p}(\varnothing,\varnothing)=0$, а все усредненные расстояния между множествами d_{X2p} и d_{X3p} удовлетворяют условию нормировки $0\leq d_{Xqp}(A,B)\leq 1$, заданному формулой (7.06).

Таким образом, на σ-алгебре $\mathcal{S}(X)$ измеримых множеств можно определить целое семейство расстояний, в котором каждое преобразованное расстояние $d_{Xqp}(A,B)$ при $p\geq 1$ и q=2,3 представляет собой некоторую сложную функцию $d_{Xqp}(A,B)=F_p(d_{Xq}(A,B))=F_p[F_q(d_{X1}(A,B))]$ от основного расстояния $d_{X1}(A,B)$. Согласно теоремам 1.15, 1.16 соответствующие преобразованные пространства $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ измеримых множеств сохраняют метричность (псевдометричность) исходного пространства $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$. Убедимся в этом непосредственно.

Т е о р е м а 7.2. *Функция $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$, где m – вполне σ-конечная мера множества, определенная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$, и $p\geq 1$ – фиксированное целое число, является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение аксиом симметрии (1.01), тождества (1.02) и условия совпадения (1.34) для функции d_{X1p} устанавливается так же, как и для функции d_{X1}. Доказательство дословно повторяет соответствующие рассуждения из теоремы 7.1. Неравенство треугольника (1.03) для функции d_{X1p} следует из соотношения (4.40). Действительно, принимая во внимание определение (7.11), условие (4.40) и неотрицательность расстояния, имеем при фиксированном числе $p\geq 1$:

$$[d_{X1p}(A,B)]^p = m(A\Delta B) \leq m(A\Delta C) + m(C\Delta B) =$$
$$= [d_{X1p}(A,C)]^p + [d_{X1p}(C,B)]^p \leq [d_{X1p}(A,C) + d_{X1p}(C,B)]^p.$$

Отсюда сразу получаем аксиому (1.03). Аналогично функции d_{X1} функция d_{X1p} является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на пространстве множеств с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$. ■

Т е о р е м а 7.3. *Функции* $d_{X2p}(A,B)=[m(A\Delta B)/m(X)]^{1/p}$ *и* $d_{X3p}(A,B)=[m(A\Delta B)/m(A\bigcup B)]^{1/p}$, *где* m *– вполне* σ*-конечная мера множества, определенная на* σ*-алгебре множеств* $\mathcal{S}(X)$, *и* $p\geq 1$ *– фиксированное целое число, являются метриками почти всюду (псевдометриками) на пространстве с полной мерой* $(X,\mathcal{S}, m)$, *удовлетворяющими условию нормировки* $0\leq d(A,B)\leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Действительность и неотрицательность функций d_{Xqp} для $p\geq 1$ и q=2,3 вытекает непосредственно из определения меры как действительной и неотрицательной функции множества. Выполнение аксиомы симметрии (1.01) и неравенства треугольника (1.03) для функции d_{X2p} устанавливается так же, как и для метрики d_{X1p}. Выполнение условия нормировки (7.06) для функции d_{X2p} очевидно из определения (7.12), поскольку всегда $A\Delta B\subseteq X$, а значит, в силу (4.11) $m(A\Delta B)\leq m(X)$.

2°. Справедливость аксиомы симметрии (1.01) для функции d_{X3p} следует из свойства коммутативности операций объединения и симметрической разности множеств $A\bigcup B=B\bigcup A$, $A\Delta B=B\Delta A$, которое вытекает из их определений. Выполнение неравенства треугольника (1.03) для функции d_{X3p} проверим для нетривиального случая $A\Delta B\neq\varnothing$. В силу свойств монотонности (4.11) и расширенной субаддитивности (4.28) меры множества с учетом включения $A\bigcap C\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(B\Delta C)$ имеем:

$$m(A\bigcap C) \leq m(A\bigcap B) + m(B\Delta C), \quad m(B\bigcap C) \leq m(A\bigcap B) + m(A\Delta C). \tag{7.17}$$

Принимая во внимание равенства (4.12), (4.13) и неравенства (1.43), (4.40), (7.17), получаем следующее соотношение для мер множеств:

$$\frac{m(A\Delta B)}{m(A\bigcup B)} = \frac{m(A\Delta B)}{m(A\Delta B)+m(A\bigcap B)} \leq \frac{m(A\Delta C)+m(B\Delta C)}{m(A\Delta C)+m(B\Delta C)+m(A\bigcap B)} =$$
$$= \frac{m(A\Delta C)}{m(A\Delta C)+m(B\Delta C)+m(A\bigcap B)} + \frac{m(B\Delta C)}{m(A\Delta C)+m(B\Delta C)+m(A\bigcap B)} \leq$$
$$\leq \frac{m(A\Delta C)}{m(A\Delta C)+m(A\bigcap C)} + \frac{m(B\Delta C)}{m(B\Delta C)+m(B\bigcap C)} = \frac{m(A\Delta C)}{m(A\bigcup C)} + \frac{m(B\Delta C)}{m(B\bigcup C)}.$$

Тогда при фиксированном числе $p\geq 1$ имеем:

$$[d_{X3p}(A,B)]^p = \frac{m(A\Delta B)}{m(A\bigcup B)} \leq \frac{m(A\Delta C)}{m(A\bigcup C)} + \frac{m(B\Delta C)}{m(B\bigcup C)} =$$
$$= [d_{X3p}(A,C)]^p + [d_{X3p}(C,B)]^p \leq [d_{X3p}(A,C) + d_{X3p}(C,B)]^p,$$

откуда сразу следует неравенство треугольника (1.03) для функции d_{X3p}. И, наконец, в силу определения (7.13) и условия (4.16) $m(A\Delta B)\leq m(A\bigcup B)$ для функции d_{X3p} выполняется требование нормировки (7.06).

3°. Все рассуждения, приведенные в теореме 7.1 о выполнимости аксиомы тождества (1.02) или условия совпадения (1.34) для метрики d_{X1}, остаются справедливыми для функции d_{X2p}, а при учете равенств (4.39) $A_1 \bigcup A_2 =_m B_1 \bigcup B_2$, $A_1 \bigcap A_2 =_m B_1 \bigcap B_2$ – и для функции d_{X3p}. Таким образом, d_{X2p} и d_{X3p} являются метриками почти всюду (псевдометриками) на полном пространстве $(X, \mathcal{S}, m)$. ■

В дальнейшем, если дело будет касаться одновременно всех пространств измеримых множеств $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ при любых значениях $p \geq 1$ и $q=1,2,3$, то для краткости будем обозначать эти пространства все вместе как X_{qp}.

7.3. Особенности расстояний, порожденных мерой множества. Рассмотрим некоторые особенности метрик d_{X1p}, d_{X2p} и d_{X3p} в зависимости от значений их переменных.

Отметим в первую очередь, что расстояние $d(\varnothing, X)$ между «минимальным» пустым множеством $\varnothing$ и «максимальным» множеством X, которое является единицей σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ множеств, есть в соответствии с определением (1.09) ничто иное как диаметр семейства множеств $\mathcal{S}(X)$:

$$D(\mathcal{S}) = \sup_{A_i, A_j \in \mathcal{S}(X)} d(A_i, A_j) = d(\varnothing, X). \tag{7.18}$$

Тем самым диаметры σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ на пространствах X_1 и X_{1p} с учетом формул (7.02), (7.11) и (4.03) определяются выражениями:

$$D_{X1}(\mathcal{S}) = m(X) = \textstyle\sum_i w_i, \tag{7.19}$$

$$D_{X1p}(\mathcal{S}) = [m(X)]^{1/p} = [D_{X1}(\mathcal{S})]^{1/p}. \tag{7.20}$$

Можно сказать, что на пространствах измеримых множеств $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$ метрика d_{X1p} задает отображение $d_{X1p}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to [0, D_{X1p}(\mathcal{S})]$ прямого произведения $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ на интервал $[0, D_{X1p}(\mathcal{S})]$ множества неотрицательных действительных чисел при любом фиксированном числе $p \geq 1$.

На вероятностных метрических пространствах, где выполняется условие $m(X)=1$, диаметр $D_{X1p}(\mathcal{S})$ σ-алгебры множеств $\mathcal{S}(X)$ равен 1 при любых числах p, а метрика d_{X1p} задает отображение $d_{X1p}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to [0,1]$. Точно так же на любом из метрических пространств измеримых множеств X_{qp} ($p \geq 1$, $q=2,3$) с нормированной метрикой диаметр $D_{Xqp}(\mathcal{S})$ σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ также равен 1, а метрики d_{Xqp} задают отображение $d_{Xqp}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to [0,1]$ прямого произведения σ-алгебры множеств $\mathcal{S}(X)$ на интервал $[0,1]$.

На каждом метрическом пространстве X_{1p} при фиксированном числе $p \geq 1$ расстояния между пустым множеством $\varnothing$, множеством X и произвольным множеством A и его дополнением $\overline{A}$ до множества X согласно определению (7.11) и свойству идентичности $\varnothing \Delta A = A$ симметрической разности множеств равны

$$d_{X1p}(\varnothing, A) = d_{X1p}(X, \overline{A}) = [m(A)]^{1/p}. \tag{7.21}$$

$$d_{X1p}(X, A) = d_{X1p}(\varnothing, \overline{A}) = [m(\overline{A})]^{1/p}. \tag{7.22}$$

При выводе соотношений (7.21), (7.22) учитывалась связь (4.38) между мерами измеримого множества A и его дополнения $\overline{A}$.

Итак, мера множества $m(A)$ может трактоваться в геометрическом смысле и как «абсолютная величина» множества A, и как длина отрезка $[\varnothing, A]$ между «нулевой точкой» $\varnothing$ и «точкой» A или отрезка $[X,\overline{A}]$ между «точкой» $\overline{A}$ и «максимальной точкой» X в пространстве измеримых множеств X_1. Равенства (7.24) и (7.21) указывают также на равенство самих отрезков $[\varnothing,A]$ и $[X,\overline{A}]$, $[X,A]$ и $[\varnothing,\overline{A}]$. Мера одноэлементного множества $\{x_i\}$ в соответствии с формулой (4.03) равна $m(\{x_i\})=w_i$, и значит, величине w_i можно сопоставить длину отрезка $[\varnothing,\{x_i\}]$ или $[X\backslash\{x_i\},X]$ в пространстве X_1.

З а м е ч а н и е. Сходная ситуация существует и на других метрических пространствах Так, в n-мерном числовом пространстве E^n длина отрезка $[0,x]$ между нулевой и произвольной точкой x есть модуль или абсолютная величина числа $d_{E1}(0,x)=|x|$ либо вектора $d_{En}(0,x)=|\mathbf{x}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$, а в пространстве $C[0,1]$ действительных непрерывных функций длина отрезка $[0, f(x)]$ представляет собой абсолютное значение функции f в точке x: $d_{E1}(0, f(x))=|f(x)|$. □

Полностью усредненная метрика d_{X2p} согласно ее определению (7.12) обладает такими же свойствами, что и основная метрика d_{X1p}, с тем только отличием, что длины отрезков $[\varnothing,A]$ и $[X,\overline{A}]$ в пространствах X_{2p} будут равны «относительной величине» множества A

$$d_{X2p}(\varnothing,A) = d_{X2p}(X,\overline{A}) = [m(A)/m(X)]^{1/p}, \tag{7.23}$$

а длины отрезков $[X,A]$ и $[\varnothing,\overline{A}]$ – «относительной величине» дополнения $\overline{A}$ множества A

$$d_{X2p}(X,A) = d_{X2p}(\varnothing,\overline{A}) = \{1-[m(A)/m(X)]\}^{1/p} = [m(\overline{A})/m(X)]^{1/p}. \tag{7.24}$$

Иная картина наблюдается на метрических пространствах $X_{3p}=(\mathcal{S}, d_{X3p})$. Локально усредненная метрика d_{X3p} в соответствии с ее определением (7.13) в значительной степени зависит от взаимного положения и величины «общей части» множеств A и B. Так, если непустые множества A и B не пересекаются ($A\cap B=\varnothing$), то в силу равенств (4.12), (4.13) $m(A\Delta B)=m(A\cup B)$. Поэтому расстояние $d_{X3p}(A,B)$ между такими множествами на пространствах $X_{3p}=(\mathcal{S}, d_{X3p})$ равно по определению (7.13) диаметру σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ множеств, то есть $d_{X3p}(A,B)=$ $=D_{X3p}(\mathcal{S})=1$, а значит, всегда максимально и не зависит от «абсолютной величины» множеств A и B. В частности, таковы расстояния между пустым множеством $\varnothing$ и произвольным непустым множеством A или его дополнением $\overline{A}$:

$$d_{X3p}(\varnothing,A) = d_{X3p}(\varnothing,\overline{A}) = D_{X3p}(\mathcal{S}) = 1, \tag{7.25}$$

Данное обстоятельство всегда необходимо учитывать, чтобы иметь правильное геометрическое представление о взаимном расположении множеств в метрических пространствах X_{3p}.

На пространствах множеств X_{3p}, так же как и на пространствах X_{2p}, длина отрезка $[X,A]$ равна «относительной величине» дополнения множества $\overline{A}$

$$d_{X3p}(X,A) = \{1-[m(A)/m(X)]\}^{1/p} = [m(\overline{A})/m(X)]^{1/p}. \tag{7.26}$$

Однако, в отличие от пространств X_{2p}, на пространствах X_{3p} «относительная величина» множества A равна длине только одного отрезка $[X,\overline{A}]$

$$d_{X3p}(X,\overline{A}) = [m(A)/m(X)]^{1/p}. \tag{7.27}$$

Из равенств (4.38) и (7.25)-(7.27) вытекает, что расстояния между множеством A, «минимальным» $\varnothing$ и «максимальным» X множествами связаны на пространствах X_{3p} соотношением:

$$[d_{X3p}(\varnothing,A)]^p = [d_{X3p}(X,A)]^p + [d_{X3p}(X,\overline{A})]^p.$$

Таким образом, как следует из формул (7.23)-(7.27), длины отрезков $[X,A]$ и $[X,\overline{A}]$ в пространствах X_{2p} и X_{3p} одинаковы, а длины отрезков $[\varnothing,A]$ и $[\varnothing,\overline{A}]$ различны. Тем самым на метрических пространствах $X_{3p}=(\mathcal{S}, d_{X3p})$ роли «максимального» множества X и «минимального» множества $\varnothing$ заметно отличаются.

Интересно также отметить, что на всех метрических пространствах множеств X_{1p}, X_{2p} и X_{3p} при фиксированном числе $p\geq 1$ расстояние между произвольным множеством и его дополнением всегда постоянно и равно диаметру соответствующего пространства. Действительно, поскольку для множеств выполняются равенства $A\cup\overline{A}=X$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$, то из соотношений (4.13), (4.38) и формул (7.11)-(7.13) имеем

$$d_{X1p}(A,\overline{A}) = [m(A\Delta\overline{A})]^{1/p} = [m(A)+m(\overline{A})]^{1/p} = [m(X)]^{1/p} = D_{X1p}(\mathcal{S}),$$
$$d_{X2p}(A,\overline{A}) = [m(A\Delta\overline{A})/m(X)]^{1/p} = [m(X)/m(X)]^{1/p} = 1 = D_{X2p}(\mathcal{S}),$$
$$d_{X3p}(A,\overline{A}) = [m(A\Delta\overline{A})/m(A\cup\overline{A})]^{1/p} = [m(X)/m(X)]^{1/p} = 1 = D_{X3p}(\mathcal{S}).$$

Общее представление о расстояниях между множествами на различных метрических пространствах в зависимости от значений переменных дает следующий пример.

П р и м е р 7.1. Пусть $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$, $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$ и $X_3=(\mathcal{S}, d_{X3})$ – пространства измеримых множеств, образованные σ-алгеброй $\mathcal{S}(X)$ над множеством $X=\{a,b,c\}$. Минимальная σ-алгебра множеств $\mathcal{S}(X)$ совпадает с семейством $\mathcal{P}(X)$ подмножеств множества X, и включает в себя подмножества $A_i\subseteq X$, которые представляются бинарными векторами $\mathbf{b}_i$ следующим образом: $\varnothing$~(0,0,0); $\{a\}$~(1,0,0); $\{b\}$~(0,1,0); $\{c\}$~(0,0,1); $\{a,b\}$~(1,1,0); $\{a,c\}$~(1,0,1); $\{b,c\}$~(0,1,1); $\{a,b,c\}$~(1,1,1). Расстояния между подмножествами A_i и A_j заданы формулами $d_{X1}(A_i,A_j)=|A_i\Delta A_j|$, $d_{X2}(A_i,A_j)=|A_i\Delta A_j|/|X|$, $d_{X3}(A_i,A_j)=|A_i\Delta A_j|/|A_i\cup A_j|$. Элементы d_{ij} квадратных матриц D_{Xq} расстояний между подмножествами A_i и A_j определяются правилом $d_{ij}=d_{Xq}(A_i,A_j)=d_{Xq}(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j)$. Матрицы расстояний, где для краткости записи опущены запятые между компонентами векторов $\mathbf{b}_i$, имеют следующий вид:

$$\mathrm{D}_{X1} = \begin{array}{c|cccccccc|} & (000) & (100) & (010) & (001) & (110) & (101) & (011) & (111) \\ (000) & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ (100) & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ (010) & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ (001) & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ (110) & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ (101) & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ (011) & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ (111) & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array},$$

$$\mathrm{D}_{X2} = \begin{array}{|cccccccc|} (000) & (100) & (010) & (001) & (110) & (101) & (011) & (111) \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array},$$

$$\mathrm{D}_{X3} = \begin{array}{|cccccccc|} (000) & (100) & (010) & (001) & (110) & (101) & (011) & (111) \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 2/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 2/3 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 2/3 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array}.$$

Матрицы расстояний D_{X1} и D_{X2} симметричны относительно поворота на 180° и относительно обеих своих диагоналей, а матрица D_{X3} симметрична только относительно одной диагонали, состоящей из нулей. Заметим, что элементы матрицы D_{X1} показывают также суммарную длину кратчайшего маршрута, соединяющего соответствующие вершины простых графов Γ_1 и Γ_2, представляющих семейство множеств $\mathcal{P}(X)$, если расстояние между смежными вершинами графов принять равным 1. ◘

7.4. Геометрические свойства расстояний между измеримыми множествами. Расстояния между множествами обладают также рядом геометрических свойств, которые можно соотнести с различными видами преобразований пространств $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ измеримых множеств.

Т е о р е м а 7.4. *Основное расстояние* $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$ *между измеримыми множествами при любом фиксированном целом числе* p:

инвариантно относительно «симметрического» сдвига на произвольное множество

$$d_{X1p}(A,B) = d_{X1p}(A\Delta C, B\Delta C); \tag{7.28}$$

инвариантно относительно «жесткого» сдвига на произвольное дизъюнктивное множество

$$d_{X1p}(A,B) = d_{X1p}(A\cup C, B\cup C), \tag{7.29}$$

где $A\cap C=B\cap C=\varnothing$;

инвариантно относительно исключения общей части

$$d_{X1p}(A, B) = d_{X1p}(A\backslash C, B\backslash C), \tag{7.30}$$

если выполняется условие $C\subseteq A\cap B$,

$$d_{X1p}(A, B) = d_{X1p}(C\backslash A, C\backslash B), \tag{7.31}$$

если выполняется условие $A\cup B\subseteq C$,

$$d_{X1p}(A, B) = d_{X1p}((A\cup B)\backslash C, C\backslash(A\cap B)), \tag{7.32}$$

если выполняется условие $A\cap B\subseteq C\subseteq A\cup B$, *то есть множество* C *находится между множествами* A *и* B;

инвариантно относительно отображений

$$d_{X1p}(A,B) = d_{X1p}(A\cup B, A\cap B) = d_{X1p}(A\backslash B, B\backslash A) = d_{X1p}(\overline{A}, \overline{B}), \tag{7.33}$$

где $\overline{A}$ – *дополнение множества* A *до множества* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость выражений (7.29)-(7.33) легко выводится из определения (7.11) метрики $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$ с помощью свойств (4.12)-(4.14) меры множества и соответствующих свойств операций над множествами.

1°. Для произвольных множеств A, B, C из свойств ассоциативности и идентичности симметрической разности множеств имеем

$$(A\Delta C)\Delta(B\Delta C) = (A\Delta C)\Delta(C\Delta B) = (A\Delta C\Delta C)\Delta B) =(A\Delta(C\Delta C))\Delta B) = A\Delta B.$$

Тогда

$$[d_{X1p}(A\Delta C, B\Delta C)]^p = m(A\Delta C, B\Delta C) = m(A\Delta B) = [d_{X1p}(A,B)]^p,$$

откуда сразу получается равенство (7.28).

2°. $[d_{X1p}(A\cup C, B\cup C)]^p = m[(A\cup C)\Delta(B\cup C)] =$

$= m(A\cup C) + m(B\cup C) - 2m[(A\cup C)\cap(B\cup C)] =$

$= m(A) + m(B) + 2m(C) - 2[m(A\cap B)+m(C)] =$

$= m(A) + m(B) - 2m(A\cap B) = m(A\Delta B) = [d_{X1p}(A,B)]^p$,

откуда сразу получается равенство (7.29).

3°. Если $C \subseteq A \cap B$, то $C \subseteq A$, $C \subseteq B$, и аналогично первому пункту имеем $(A \backslash C)\Delta(B \backslash C)=(A\Delta C)\Delta(B\Delta C)=A\Delta B$. Тогда

$$[d_{X1p}(A \backslash C, B \backslash C)]^p = m(A \backslash C, B \backslash C) = m(A\Delta B) = [d_{X1p}(A,B)]^p,$$

откуда сразу получается равенство (7.30).

Если $A \cup B \subseteq C$, то $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ и $(C \backslash A)\Delta(C \backslash B)=(C\Delta A)\Delta(C\Delta B)=A\Delta B$. Тогда

$$[d_{X1p}(C \backslash A, C \backslash B)]^p = m(C \backslash A, C \backslash B) = m(A\Delta B) = [d_{X1p}(A,B)]^p,$$

откуда сразу получается равенство (7.31).

Если $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$, то нетрудно убедиться, что для множеств выполняется равенство $[(A \cup B) \backslash C] \cap [C \backslash (A \cap B)]=\varnothing$. Тогда

$$[d_{X1p}((A \cup B) \backslash C, C \backslash (A \cap B))]^p = m\{[(A \cup B) \backslash C)]\Delta[C \backslash (A \cap B)]\} =$$
$$= m[(A \cup B) \backslash C)] + m[C \backslash (A \cap B)] =$$
$$= m(A \cup B) - m(C) + m(C) - m(A \cap B) = m(A\Delta B) = [d_{X1p}(A,B)]^p,$$

откуда сразу получается равенство (7.32).

4°. $[d_{X1p}(A \cup B, A \cap B)]^p = m[(A \cup B)\Delta(A \cap B)] = m(A \cup B) - m(A \cap B) =$
$$= m(A\Delta B) = [d_{X1p}(A,B)]^p.$$
$$[d_{X1p}(A \backslash B, B \backslash A)]^p = m[(A \backslash B)\Delta(B \backslash A)] = m(A \backslash B) + m(B \backslash A) =$$
$$= m(A\Delta B) = [d_{X1p}(A,B)]^p.$$
$$[d_{X1p}(\overline{A}, \overline{B})]^p = m(\overline{A}\Delta \overline{B}) = m[(X \backslash A)\Delta(X \backslash B)] = m(A\Delta B) = [d_{X1p}(A,B)]^p.$$

Отсюда сразу получаются равенства (7.33). ■

У расстояния $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$ имеются дополнительные особенности.

Т е о р е м а 7.5. *Основное расстояние $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$ между измеримыми множествами*:

обладает свойством максиминной аддитивности относительно произвольного множества

$$d_{X1}(A,B) = d_{X1}(A \cup C, B \cup C) + d_{X1}(A \cap C, B \cap C); \qquad (7.34)$$

d-выпукло относительно множества C, находящегося между множествами A и B, то есть

$$d_{X1}(A,B) = d_{X1}(A,C) + d_{X1}(C,B) \qquad (7.35)$$

при $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Для произвольных множеств A, B, C из свойств объединения, пересечения и симметрической разности множеств имеем

$$d_{X1}(A \cup C, B \cup C) + d_{X1}(A \cap C, B \cap C) =$$
$$= m[(A \cup C)\Delta(B \cup C)] + m[(A \cap C)\Delta(B \cap C)] =$$
$$= m(A \cup C) + m(B \cup C) - 2m[(A \cup C) \cap (B \cup C)] +$$
$$+ m(A \cap C) + m(B \cap C) - 2m(A \cap B \cap C) =$$
$$= m(A) + m(C) - m(A \cap C) + m(B) + m(C) - m(B \cap C) - 2m(A \cap B) -$$
$$- 2m(C) + 2m(A \cap B \cap C) + m(A \cap C) + m(B \cap C) - 2m(A \cap B \cap C) =$$
$$= m(A) + m(B) - 2m(A \cap B) = m(A\Delta B) = d_{X1}(A,B).$$

2°. Если $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$, то нетрудно убедиться, что для множеств выполняется равенство $(A\Delta C) \cap (B\Delta C)=\varnothing$. Тогда неравенство (4.40) превращается в равенство, и в силу свойства (4.01) аддитивности меры множества имеем:

$$d_{X1}(A,B) = m(A\Delta B) = m[(A\Delta C) \cup (B\Delta C)] = m(A\Delta C)+m(B\Delta C) = d_{X1}(A,C)+d_{X1}(C,B).$$

Справедливость выражения (7.35) можно проверить и непосредственно, воспользовавшись соотношением

$$m[(A\Delta C)\bigcap(B\Delta C)] = m(A\bigcap B) + m(C) - m(A\bigcap C) - m(B\bigcap C),$$

которое в нашем случае равно 0. ■

У основных расстояний $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$ при $p\geq 2$ нет свойств максиминной аддитивности (7.34) и d-выпуклости (7.35) относительно множества, находящегося между двумя другими множествами.

Полностью усредненные расстояния между множествами $d_{X2p}(A,B)=$ $=[m(A\Delta B)/m(X)]^{1/p}$ по своим геометрическим свойствам ничем не отличаются от основных расстояний $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$ при всех числах $p\geq 1$. Они инвариантны относительно «симметрического» и «жесткого» сдвигов, исключения общей части, симметричных отображений, обладают при $p=1$ свойствами максиминной аддитивности и d-выпуклости. Говоря другими словами, для полностью усредненных расстояний $d_{X2p}(A,B)$ выполняются те же равенства (7.28)-(7.35), что и для основных расстояний $d_{X1p}(A,B)$.

Локально усредненные расстояния между множествами $d_{X3p}(A,B)=$ $=[m(A\Delta B)/m(A\bigcup B)]^{1/p}$ обладают значительно меньшим числом геометрических свойств по сравнению с расстояниями $d_{X1p}(A,B)$ и $d_{X2p}(A,B)$.

Т е о р е м а 7.6. *Локально усредненное расстояние* $d_{X3p}(A,B)=$ $=[m(A\Delta B)/m(A\bigcup B)]^{1/p}$ *между измеримыми множествами при любом фиксированном целом числе* p:

инвариантно относительно отображения

$$d_{X3p}(A,B) = d_{X3p}(A\bigcup B, A\bigcap B); \tag{7.36}$$

d*-выпукло при* $p=1$ *и* $C=A\bigcup B$

$$d_{X3}(A,B) = d_{X3}(A, A\bigcup B) + d_{X3}(A\bigcup B, B). \tag{7.37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Справедливость выражения (7.36) следует из определения (7.13) метрики d_{X3p} и равенства (7.33). Действительно,

$$d_{X3p}(A\bigcup B, A\bigcap B) = \frac{d_{X1p}(A\bigcup B, A\bigcap B)}{d_{X1p}[\varnothing,(A\bigcup B)\bigcup(A\bigcap B)]} = \frac{d_{X1p}(A,B)}{d_{X1p}(\varnothing, A\bigcup B)} = d_{X3p}(A,B).$$

2°. Согласно определению (7.04) метрики d_{X3} и свойству (7.35) d-выпуклости метрики d_{X1} при $C=A\bigcup B$ имеем равенство (7.37):

$$d_{X3}(A, A\bigcup B) + d_{X3}(A\bigcup B, B) =$$

$$= \frac{d_{X1}(A, A\bigcup B)}{d_{X1}(\varnothing, A\bigcup B)} + \frac{d_{X1}(A\bigcup B, B)}{d_{X1}(\varnothing, A\bigcup B)} = \frac{d_{X1}(A,B)}{d_{X1}(\varnothing, A\bigcup B)} = d_{X3}(A,B).\ ■$$

Локально усредненные расстояния $d_{X3p}(A,B)=[m(A\Delta B)/m(A\bigcup B)]^{1/p}$ при любых числах p не обладают свойством максиминной аддитивности. Метрика d_{X3}, в отличие от метрик d_{X1} и d_{X2}, d-выпукла только относительно множества, равного объединению множеств. Заметим, что при условии $A\bigcap B\subseteq C\subseteq A\bigcup B$ для метрики d_{X3} выполняется равенство:

$$d_{X3}(A,B) = \alpha d_{X3}(A,C) + \beta d_{X3}(C,B), \tag{7.38}$$

где $\alpha=m(A\bigcup C)/m(A\bigcup B)$, $\beta=m(B\bigcup C)/m(A\bigcup B)$, $0<\alpha,\beta\leq 1$, $\alpha+\beta=1+m(C)/m(A\bigcup B)$.

Геометрические свойства метрик d_{X1}, d_{X2} и d_{X3} хорошо иллюстрируются матрицами расстояний D_{X1}, D_{X2} и D_{X3} из примера 7.1.

7.5. Непрерывность метрик, порожденных мерой множества. Исследуем поведение метрик d_{Xqp}, порожденных мерой множества, рассматривая их как функции, которые определены на прямом произведении $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ над множеством X, или, что то же, на метрическом пространстве U_{qp}= =$(X_{qp}\times X_{qp}, d_U)$. Напомним, что согласно теоремам 1.4 и 1.5 только метрика

$$d_{U1}(A,B) = d_{Xqp}(A_1,B_1) + d_{Xqp}(A_2,B_2),$$

задаваемая формулой (1.22), сохраняет метрическую выпуклость и гиперметричность пространства U_{qp}. Поэтому для определенности именно метрику d_{U1} будем подразумевать в качестве метрики d_U. Напомним, кроме того, что функции d_{X1p}, d_{X2p} и d_{X3p} являются метриками лишь почти всюду на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$. Поэтому свойства расстояний между измеримыми множествами будут проявляться только почти всюду на соответствующих пространствах.

По аналогии с непрерывностью функции двух переменных $f(x,y)$ будем говорить, что определенная на метрическом пространстве $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp},\ d_{U1})$ действительная функция двух множеств $f(A,B)$:

непрерывна в точке (A_0,B_0) *по переменной* A, если предел функции $f(A,B_0)$ в точке (A_0,B_0) существует и выполняется равенство

$$\lim_{A_n\to A_0} f(A_n,B_0) = f(\lim_{A_n\to A_0} A_n,\ B_0). \tag{7.39}$$

непрерывна в точке (A_0,B_0) *по переменным* A *и* B, если предел функции $f(A,B)$ в точке (A_0,B_0) существует и равен значению функции в этой точке

$$\lim_{\substack{A_n\to A_0\\ B_n\to B_0}} f(A_n,B_n) = f(A_0,B_0) = f(\lim_{A_n\to A_0} A_n,\ \lim_{B_n\to B_0} B_n); \tag{7.40}$$

На «языке δ-ε» непрерывность функции f в точке (A_0,B_0) означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек $(A,B)\in U_{qp}$, лежащих в δ-окрестности $O_\delta(A,B)$ точки (A_0,B_0) и удовлетворяющих условиям $d_{Xqp}(A,A_0)<\delta$ и $d_{Xqp}(B,B_0)<\delta$, выполняется неравенство

$$d_{\mathbf{R}}(f(A,B), f(A_0,B_0)) = |f(A,B) - f(A_0,B_0)| < \varepsilon. \tag{7.41}$$

Функция f, непрерывная в точке (A_0,B_0) по каждой из переменных, может и не быть непрерывной по совокупности всех своих переменных.

Точка (A_0,B_0), в которой функция f не является непрерывной, назовем *точкой разрыва функции*. Если пределы функции f по каждой из переменных существуют в точке (A_0,B_0), равны друг другу и не равны $f(A_0,B_0)$, то точка (A_0,B_0) называется *точкой устранимого разрыва*. Если пределы функции f по каждой из переменных существуют в точке (A_0,B_0), но не равны друг другу и/или значению функции f в этой точке, то точка (A_0,B_0) называется *точкой разрыва первого рода*. Если в точке (A_0,B_0) не существует предела функции f хотя бы по одной из переменных, то точка (A_0,B_0) называется *точкой разрыва второго рода*.

Будем также говорить, что действительная функция множеств f:

непрерывна по своим переменным на метрическом пространстве $U_{qp}=$ $=(X_{qp}\times X_{qp},\ d_{U1})$, если она непрерывна в каждой точке (A,B) этого пространства;

кусочно непрерывна по своим переменным на метрическом пространстве $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp},\ d_{U1})$, если она непрерывна по всем переменным всюду на этом пространстве, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода;

равномерно непрерывна на метрическом пространстве $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp}, d_{U1})$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех пар точек (A,B), $(C,G)\in U_{qp}$, удовлетворяющих условиям $d_{Xqp}(A,C)<\delta$ и $d_{Xqp}(B,G)<\delta$, выполняется неравенство

$$d_{\mathbb{R}}(f(A,B), f(C,G)) = |f(A,B) - f(C,G)| < \varepsilon\,; \tag{7.42}$$

равностепенно непрерывна на метрическом пространстве $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp},$ $d_{U1})$, если неравенство (7.42) одновременно выполняется для всех функций f из некоторого семейства функций. Аналогично функциям двух переменных $f(x_1,x_2)$ нетрудно показать, что всякая равномерно непрерывная функция множеств $f(A,B)$ непрерывна. Обратное утверждение, в общем случае, неверно.

В отличие от расстояния $d_X(x_1,x_2)$, определенного на метрическом пространстве $U=(X\times X,\ d_{U1})$, расстояния $d_{X1p}(A,B)$, $d_{X2p}(A,B)$ и $d_{X3p}(A,B)$ между измеримыми множествами обладают различными свойствами непрерывности на соответствующих метрических пространствах $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp},\ d_{U1})$ при любых числах $p\geq1$, хотя сама мера множества является непрерывной функцией на полном пространстве $(X,\mathcal{S},m)$.

Т е о р е м а 7.7. *Основная метрика* $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$ *и полностью усредненная метрика* $d_{X2p}(A,B)=[m(A\Delta B)/m(X)]^{1/p}$ *являются непрерывными функциями, а локально усредненная метрика* $d_{X3p}(A,B)=[m(A\Delta B)/m(A\cup B)]^{1/p}$ – *кусочно непрерывной функцией своих переменных почти всюду на соответствующем метрическом пространстве* $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp},\ d_{U1})$ *при любом фиксированном целом числе* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Зафиксируем вначале, например, вторую переменную B и рассмотрим расстояния $d_{X1p}(A,B)$, $d_{X2p}(A,B)$ и $d_{X3p}(A,B)$ как функции одной первой переменной A. Пусть имеется произвольная последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств, сходящаяся при $n\to\infty$ почти всюду к некоторой точке A пространства $(X,\mathcal{S},m)$. Примем во внимание свойства (3.03), (3.06) сходящихся действительных функций, выражение (3.31) для предела A сходящейся почти всюду последовательности множеств $\{A_n\}$, свойство (4.18) непрерывности меры множества. Тогда получаем следующие соотношения для расстояний d_{X1p}, d_{X2p} и d_{X3p}:

$$\lim_{A_n\to_{mes}A}[d_{X1p}(A_n,B)]^p=\lim_{A_n\to_{mes}A}m(A_n\Delta B)=m[(\lim_{A_n\to_m A}A_n)\Delta B]=m(A\Delta B)=[d_{X1p}(A,B)]^p, \tag{7.43}$$

$$\lim_{A_n\to_{mes}A}[d_{X2p}(A_n,B)]^p=\lim_{A_n\to_{mes}A}[m(A_n\Delta B)/m(X)]=m(A\Delta B)/m(X)=[d_{X2p}(A,B)]^p, \tag{7.44}$$

$$\lim_{A_n\to_{mes}A}[d_{X3p}(A_n,B)]^p=\lim_{A_n\to_{mes}A}[m(A_n\Delta B)/m(A_n\cup B)]=$$

$$=[\lim_{A_n\to_{mes}A}m(A_n\Delta B)]/[\lim_{A_n\to_{mes}A}m(A_n\cup B)]=m(A\Delta B)/m(A\cup B)=[d_{X3p}(A,B)]^p. \tag{7.45}$$

Последнее равенство (7.45) выполняется, если $m(A\bigcup B)\neq 0$, то есть также почти всюду на метрическом пространстве $X_{3p}=(\mathcal{S},\ d_{X3p})$, кроме множеств меры нуль и точки $A=\varnothing$, $B=\varnothing$. Выполнение равенств (7.43)-(7.45) означает, что $d_{Xqp}(A_n,B)\to d_{Xqp}(A,B)$ при $A_n\to_{mes} A$ или при $n\to\infty$ для любых $q=1,2,3$ и произвольно заданного целого числа $p\geq 1$, то есть расстояние $d_{Xqp}(A,B)$ непрерывно по одной из переменных при фиксированной другой переменной на соответствующем метрическом пространстве $X_{qp}=(\mathcal{S},\ d_{Xqp})$.

2°. В силу равноправности выбора какой-либо переменной в качестве фиксированной из равенств (7.43), (7.44) сразу получаем условие (7.39) непрерывности расстояний d_{X1p}, d_{X2p} по каждой из переменных в точке (A,B) метрических пространств $X_{1p}=(\mathcal{S},d_{X1p})$ и $X_{2p}=(\mathcal{S},d_{X2p})$ для произвольного числа p, а значит, и искомое условие (7.40) непрерывности расстояния в точке (A,B) по обеим переменным. В силу произвольности выбора точки (A,B) условие непрерывности расстояния по каждой из переменных выполняется во всех точках метрических пространств X_{1p} и X_{2p}, а значит, согласно теореме 3.10, метрики d_{X1p} и d_{X2p} непрерывны почти всюду на соответствующем метрическом пространстве $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp},\ d_{U1})$.

3°. Иначе обстоит дело с метрикой d_{X3p}. Если последовательность множеств $\{A_n\}$, либо последовательность множеств $\{B_n\}$ сходится почти всюду при $n\to\infty$ к пустому множеству $\varnothing$, но при этом $A_n\neq\varnothing$ и $B=\varnothing$, либо $A=\varnothing$ и $B_n\neq\varnothing$, то из формулы (7.13) следует, что расстояния $d_{X3p}(A_n,\varnothing)=1$, $d_{X3p}(\varnothing,B_n)=1$, а значит, согласно формуле (7.45) и $\lim\limits_{A_n\to_{mes}\varnothing} d_{X3p}(A_n,\varnothing)=1$, $\lim\limits_{B_n\to_{mes}\varnothing} d_{X3p}(\varnothing,B_n)=1$. С другой стороны, по определению (7.05) расстояние $d_{X3p}(\varnothing,\varnothing)=0$ при любом фиксированном числе $p\geq 1$. Поэтому

$$d_{X3p}(\lim_{A_n\to_{mes}\varnothing} A_n,\ \lim_{B_n\to_{mes}\varnothing} B_n) = d_{X3p}(\lim_{A_n\to_{mes}\varnothing} A_n,\ \varnothing)= d_{X3p}(\varnothing,\ \lim_{B_n\to_{mes}\varnothing} B_n) = 0.$$

Таким образом, условия (7.39) и (7.40) не выполняются. Метрика d_{X3p} имеет разрыв первого рода по каждой из своих переменных в точках, где $A=\varnothing$ или $B=\varnothing$, и тем самым является кусочно непрерывной функцией на метрических пространствах $X_{3p}=(\mathcal{S},\ d_{X3p})$ и $U_{3p}=(X_{3p}\times X_{3p},\ d_{U1})$ при любых целых числах $p\geq 1$. Эта особенность отличает локально усредненное расстояние d_{X3p} от непрерывных в «нуле» расстояний d_{X1p} и d_{X2p}. ■

Полагая в формулах (7.43), (7.44) $A=B$, получаем при $n\to\infty$ следующие соотношения для расстояний d_{X1p} и d_{X2p}:

$$\lim_{n\to\infty} d_{X1p}(A_n,A) = 0,\quad \lim_{n\to\infty} d_{X2p}(A_n,A) = 0,$$

которые справедливы для любого множества A, в том числе и для $A=\varnothing$. Таким образом, имеет место следующее

Следствие 7.7.А. *Метрики* $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$ *и* $d_{X2p}(A,B)=$ $=[m(A\Delta B)/m(X)]^{1/p}$ *при одном и том же значении* $p\geq 1$ *эквивалентны почти всюду на пространстве множеств с полной мерой* $(X,\mathcal{S},m)$.

Аналогично теореме 3.11 доказывается

Т е о р е м а 7.8. *Метрики* $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$, $d_{X2p}(A,B)=$ $=[m(A\Delta B)/m(X)]^{1/p}$ *являются равномерно непрерывными функциями своих переменных почти всюду на соответствующем метрическом пространстве* $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp},\, d_{U1})$ *при любом фиксированном целом числе* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть расстояние d_{X1p} не равномерно непрерывно на метрическом пространстве $U_{1p}=(X_{1p}\times X_{1p},\, d_{U1})$. Тогда, поскольку функция d_{X1p} непрерывна почти всюду на пространстве U_{1p}, для любого числа $\delta>0$ в пространстве U_{1p} найдутся точки (A,B) и (C,G) такие, что $d_{X1p}(A,C)<\delta$ и $d_{X1p}(B,G)<\delta$, но при некотором $\varepsilon>0$ условие (7.42) не выполняется, то есть

$$d_{\mathbb{R}}(d_{X1p}(A,B),\, d_{X1p}(C,G)) = |d_{X1p}(A,B) - d_{X1p}(C,G)| \geq \varepsilon.$$

С другой стороны, принимая во внимание неравенство четырехугольника (1.19), имеем

$$|d_{X1p}(A,B) - d_{X1p}(C,G)| \leq d_{X1p}(A,C) + d_{X1p}(B,G) < 2\delta\,.$$

Полагая $2\delta=\varepsilon$, получаем противоречие со сделанным допущением. Точно таким же образом доказывается справедливость утверждения теоремы и для расстояния d_{X2p}. ■

Так как условие (7.42) равномерной непрерывности функции множеств выполняется для расстояний d_{X1p} и d_{X2p} одновременно при различных значениях $p\geq1$, то справедливо

С л е д с т в и е 7.8.А. *Метрики* $d_{X1p}(A,B)=[m(A\Delta B)]^{1/p}$, $d_{X2p}(A,B)=$ $=[m(A\Delta B)/m(X)]^{1/p}$ *являются равностепенно непрерывными функциями своих переменных почти всюду на соответствующем метрическом пространстве* $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp},\, d_{U1})$.

Подытоживая, можно констатировать, что свойства расстояний d_{X1p} и d_{X2p} практически во всем совпадают друг с другом и отличаются от свойств расстояния d_{X3p}. Усредненные метрики d_{X2p} и d_{X3p} ведут себя одинаково вблизи единицы σ-алгебры $\mathcal{S}(X)$ – множества X – и по-разному вблизи «нуля» – пустого множества $\varnothing$. При этом величина расстояния $d_{X2p}(A,B)$ всегда не превышает величину расстояния $d_{X3p}(A,B)$.

7.6. Сходимость на пространстве измеримых множеств. Понятия сходимости и предела последовательности множеств $\{A_n\}$, введенные в разделе 3.6, никак не были связаны с понятием метрики. В метрических пространствах $X_{qp}=(\mathcal{S},\, d_{Xqp})$ измеримых множеств такая связь естественна. Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств *сходится* на метрическом пространстве $X_{qp}=(\mathcal{S},\, d_{Xqp})$ *к пределу* A *по метрике* d_{Xqp}, порожденной мерой m, если последовательность действительных чисел $\{d_{Xqp}(A_n,A)\}$ сходится к нулю, то есть, если $d_{Xqp}(A_n,A)\to0$ при $n\to\infty$ или

$$\lim_{n\to\infty} d_{Xqp}(A_n,A) = 0. \tag{7.46}$$

Запишем это условие символически как $A_n \to_d A$. Определение (7.46) сходимости последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств по метрике d_{Xqp} по своему смыслу совпадает с определением (1.26) сходимости последовательности $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X,d) к пределу x_0 по метрике d.

Как явствует из теорем 7.1-7.3, функции d_{Xqp} являются метриками почти всюду на пространстве с полной мерой $(X,\mathcal{S}, m)$. Это означает, что сходимость последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств на метрическом пространстве $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ к пределу A по метрике d_{Xqp} будет сходимостью почти всюду, а в силу теоремы 4.8 одновременно и сходимостью по мере. В справедливости последнего утверждения легко убедиться и непосредственно, если учесть соотношения (7.43)-(7.45), условие (4.43) сходимости по мере и конечность мер множеств. Поэтому на любом метрическом пространстве $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ из сходимости последовательности измеримых множеств по метрике d_{Xqp} вытекает ее сходимость почти всюду и по мере m.

Обратное утверждение выполняется не всегда. Действительно, если, например, $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n\Delta\varnothing)=0$, то есть $A_n \to_{mes} \varnothing$ при $n\to\infty$, то, как было показано при доказательстве теоремы 7.7, для $B=\varnothing$ $\lim\limits_{n\to\infty} d_{X3p}(A_n,\varnothing)=1$. Это значит, что на метрических пространствах $X_{3p}=(\mathcal{S}, d_{X3p})$ последовательность измеримых множеств может сходиться к пределу по мере, но не сходиться по метрике d_{X3p}. Тем самым сходимость последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств к пределу A на метрических пространствах $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ по метрике d_{Xqp} является в ряде случаев более сильным условием, чем сходимость почти всюду или по мере.

Воспользовавшись соотношением (7.46), определение (4.41) сходимости последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств к пределу A почти всюду на метрическом пространстве $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ можно записать в виде

$$m(\{A_n \mid \lim_{n\to\infty} d_{Xqp}(A_n,A)\geq\varepsilon\}) = 0, \tag{7.47}$$

а определение (4.43) сходимости последовательности $\{A_n\}$ по мере – как

$$\lim_{n\to\infty} m(\{A_n \mid d_{Xqp}(A_n,A)\geq\varepsilon\}) = 0 \tag{7.48}$$

для любого $\varepsilon>0$. При этом по следствию 4.8.А предел A последовательности измеримых множеств $\{A_n\}$ также принадлежит пространству $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$.

Последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств, сходящиеся на метрическом пространстве $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$, обладают многими свойствами, совпадающими со свойствами сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X,d), а также рядом добавочных свойств.

Т е о р е м а 7.9. *Всякая последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств, сходящаяся к пределу A на пространстве $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$ по основной метрике d_{X1p}, сходится к тому же пределу A и на пространстве $X_{2p}=(\mathcal{S}, d_{X2p})$ по полностью усредненной метрике d_{X2p}, и наоборот.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно следует из определения (7.46) сходимости последовательности $\{A_n\}$ множеств к пределу A по метрике, эквивалентности метрик d_{X1p}, d_{X2p} и конечности меры $m(X)$. ■

Эквивалентность и равномерная непрерывность метрик d_{X1p} и d_{X2p} на метрических пространствах X_{1p} и X_{2p} порождает

С л е д с т в и е 7.9.А. *Для любого измеримого множества A найдется последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств, равномерно сходящаяся к* *множеству A на пространстве X_{1p}=($\mathcal{S}$, d_{X1p}) по метрике d_{X1p} и на пространстве X_{2p}=($\mathcal{S}$, d_{X2p}) по метрике d_{X2p}.*

Отсюда вытекает равносильность определений (7.46)-(7.48) сходимости последовательности измеримых множеств почти всюду, по мере m и по метрикам d_{X1p} и d_{X2p} на метрических пространствах X_{1p} и X_{2p}.

Последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств метрического пространства X_{qp}=($\mathcal{S}$, d_{Xqp}) назовем *сходящейся в себе по метрике* или *d-фундаментальной*, если для любого ε>0 существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ расстояние между множествами A_n и A_l удовлетворяет неравенству

$$d_{Xqp}(A_n,A_l) < \varepsilon, \tag{7.49}$$

которое равносильно условию $d_{Xqp}(A_n,A_l)\to 0$ при $n,l\to\infty$ или

$$\lim_{n,l\to\infty} d_{Xqp}(A_n,A_l) = 0. \tag{7.50}$$

Определение (7.50) d-фундаментальной последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств аналогично определению (1.29) фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X,d). Справедливо и утверждение, являющееся аналогом теоремы 1.8.

Т е о р е м а 7.10. *Всякая последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств, сходящаяся на метрическом пространстве X_{qp}=($\mathcal{S}$, d_{Xqp}) по метрике d_{Xqp}, является d-фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств сходится на метрическом пространстве X_{qp}=($\mathcal{S}$, d_{Xqp}) к пределу A по метрике d_{Xqp}, то есть для любого ε>0 найдется число N такое, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство $d_{Xqp}(A_n,A)<\varepsilon$. Тогда по аксиоме треугольника (1.03) для любых $n,l>N$ справедливо неравенство (7.49):

$$d_{Xqp}(A_n,A_l) \le d_{Xqp}(A_n,A) + d_{Xqp}(A,A_l) < 2\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Из теорем 4.10 и 7.10 имеем следующее

С л е д с т в и е 7.10.А. *Всякая d-фундаментальная последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств является m-фундаментальной.*

Справедливость следствия 7.10.А легко установить и непосредственно. Действительно, если учесть определения метрик (7.11)-(7.13), то условие (4.44) m-фундаментальности последовательности $\{A_n\}$ множеств на метрических пространствах X_{qp}=($\mathcal{S}$, d_{Xqp}) вытекает из неравенства (7.49) и имеет вид:

$$m(A_n\Delta A_l) = [d_{X1p}(A_n,A_l)]^p < (\varepsilon)^p = \varepsilon_1.$$

$$m(A_n\Delta A_l) = [m(X)\cdot d_{X2p}(A_n,A_l)]^p = [d_{X1p}(A_n,A_l)]^p < (\varepsilon)^p = \varepsilon_1.$$

$$m(A_n\Delta A_l) = [m(A_n\bigcup A_l)\cdot d_{X3p}(A_n,A_l)]^p = [d_{X1p}(A_n,A_l)]^p < (\varepsilon)^p = \varepsilon_1.$$

Обратное утверждение не всегда верно. Последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств может сходиться в себе по мере m, но не сходиться в себе по метрике d_{Xqp}, то есть быть m-фундаментальной и не быть d-фундаментальной.

Как было показано выше, различные понятия сходимости равносильны только на метрических пространствах измеримых множеств X_{1p}=($\mathcal{S}$, d_{X1p}) и X_{2p}=($\mathcal{S}$, d_{X2p}), метрики которых непрерывны. Отсюда, учитывая следствие 4.8.А, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения, в определенном смысле обратного теореме 7.10.

Т е о р е м а 7.11. *Всякая d-фундаментальная последовательность* $\{A_n\}$ *измеримых множеств сходится на метрическом пространстве* $X_{qp}=(\mathcal{S},d_{Xqp})$ *по метрике* d_{Xqp} *к пределу A, являющемуся точкой этого же пространства, если метрика* d_{Xqp} *непрерывна на этом пространстве.* ■

Теоремы 7.10 и 7.11 представляют собой необходимые и достаточные условия выполнения обобщенного критерия сходимости на метрических пространствах $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$ и $X_{2p}=(\mathcal{S}, d_{X2p})$ измеримых множеств.

7.7. Свойства метрических пространств измеримых множеств. Рассмотрим метрические и топологические свойства метрических пространств $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ измеримых множеств.

Инвариантность метрик d_{X1p} и d_{X2p} относительно сдвигов, выраженная формулами (7.28), (7.29), характеризует «однородность» метрических пространств X_{1p} и X_{2p} измеримых множеств в смысле однородности обычного векторного (евклидова) пространства $R^n{}_2=(\mathbb{R}^n,d_{R2})$, в котором при параллельном переносе векторов сохраняются расстояния между ними. Инвариантность (7.32) метрик d_{X1p} и d_{X2p} относительно исключения общей части, находящейся между двумя множествами, аналогична свойствам разбиений множеств, описанным в работах [KS62], [Мир80]. Равенства (7.33) указывают на наличие различных видов симметрии пространств X_{1p} и X_{2p}.

Наличие у метрик d_{X1}, d_{X2} и d_{X3} d-выпуклости означает, что справедливо

С л е д с т в и е 7.6.А. *Метрические пространства* $X_1=(\mathcal{S},d_{X1})$, $X_2=(\mathcal{S},d_{X2})$ *и* $X_3=(\mathcal{S}, d_{X3})$ *измеримых множеств метрически выпуклы.*

Согласно теореме 7.9 любая последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств сходится почти всюду на пространствах $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$ и $X_{2p}=(\mathcal{S}, d_{X2p})$ к одному и тому же пределу A. В таком случае выполняется

С л е д с т в и е 7.9.Б. *Метрические пространства* $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$ *и* $X_{2p}=(\mathcal{S}, d_{X2p})$ *измеримых множеств и метрики* d_{X1p}, d_{X2p} *гомеоморфны.*

Гомеоморфизм пространств X_{1p} и X_{2p} задается функцией $f(A)=m(A)/m(X)$. Гомеоморфность метрик d_{X1p} и d_{X2p} вытекает из равенств (7.03), (7.12).

Учитывая выполнение обобщенного критерия сходимости для метрических пространств X_{1p} и X_{2p} измеримых множеств, из теорем 7.10 и 7.11 имеем

С л е д с т в и е 7.11.А. *Метрические пространства* $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$ *и* $X_{2p}=(\mathcal{S}, d_{X2p})$ *измеримых множеств полны.*

Таким образом, понятия полноты метрических пространств $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$, $X_{2p}=(\mathcal{S}, d_{X2p})$ измеримых множеств и пространства с мерой $(X,\mathcal{S},m)$ совпадают, а метрики d_{X1p} и d_{X2p} являются полными.

Из полноты и гомеоморфности метрических пространств множеств X_{1p} и X_{2p} вытекает также

С л е д с т в и е 7.11.Б. *Метрические пространства* $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$ *и* $X_{2p}=(\mathcal{S},d_{X2p})$ *измеримых множеств являются топологически полными пространствами Бэра, а их метрики* d_{X1p} *и* d_{X2p} *– топологически эквивалентными.*

Справедливо и следующее утверждение.

Т е о р е м а 7.12. *Метрические пространства* $X_{1p}=(\mathcal{S}, d_{X1p})$ *и* $X_{2p}=(\mathcal{S},d_{X2p})$ *измеримых множеств сепарабельны.*

Доказательство. В силу следствия 7.9.А на пространствах X_{1p} или X_{2p} для любого измеримого множества A, принадлежащего σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$, существует сходящаяся к нему последовательность $\{A_n\}$ измеримых множеств. Это означает, что семейство множеств $\mathcal{A}=\{A_n\}$ является по определению всюду плотным в метрических пространствах $X_{1p}=(\mathcal{S},d_{X1p})$ или $X_{2p}=(\mathcal{S},d_{X2p})$. Среди семейств измеримых множеств $\{A_n\}$, всюду плотных в метрических пространствах X_{1p} или X_{2p}, всегда можно найти счетное всюду плотное семейство множеств, например, состоящее из одноэлементных множеств $\{x_n\}$ с мерами $m(\{x_n\})=q_n$, где неотрицательные рациональные числа q_n образуют сходящуюся последовательность $\{q_n\}$. ■

Воспользуемся теперь определением (4.03) вполне конечной (σ-конечной) меры множества m, равенством $m(A\bigcup B)=m(A\Delta B)+m(A\bigcap B)$, вытекающим из соотношений (4.12) и (4.13), формулами $\chi_{A\cup B}=\max(\chi_A,\chi_B)$, $\chi_{A\cap B}=\min(\chi_A,\chi_B)$, $\chi_{A\Delta B}=|\chi_A-\chi_B|$, выражающими объединение, пересечение и симметрическую разность множеств через их характеристические функции, и представим выражения (7.11)-(7.13) для расстояний на пространствах $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ в виде:

$$d_{X1p}(A,B)=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\,|\,\chi_A(x_i)-\chi_B(x_i)\,|\right)^{1/p}, \tag{7.51}$$

$$d_{X2p}(A,B)=\left(\sum_{i=1}^{n} w'_i\,|\,\chi_A(x_i)-\chi_B(x_i)\,|\right)^{1/p},\quad w'_i=1/\sum_{j=1}^{n} w_j\,, \tag{7.52}$$

$$d_{X3p}(A,B)=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\,|\,\chi_A(x_i)-\chi_B(x_i)\,|}{\sum_{i=1}^{n} w_i \max[\chi_A(x_i),\chi_B(x_i)]}\right)^{1/p}, \tag{7.53}$$

где число n соответственно конечно или бесконечно. Стоящее в знаменателе формулы (7.53) выражение можно записать также как булеву сумму характеристических функций χ_A«+»$\chi_B=\max(\chi_A,\chi_B)=|\chi_A-\chi_B|+\chi_A\cdot\chi_B$, где $\chi_A\cdot\chi_B(x_i)=\min(\chi_A,\chi_B)$.

Основная метрика d_{X1} и полностью усредненная метрика d_{X2} на пространствах измеримых множеств $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ и $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$ аналогичны метрикам Хемминга d_{R1} на n-мерном векторном пространстве $R^n{}_1=(\mathbb{R}^n,d_{R1})$ и пространстве $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{l1})$ ограниченных числовых последовательностей, которые заданы равенствами (6.02) и (6.12). Локально усредненная метрика d_{X3} отчасти напоминает метрику d_s на пространстве $s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_s, d_s)$ равномерно сходящихся последовательностей, заданную равенством (6.20), и метрику d_S на пространстве $S=(S(T,\mathcal{S}, m), d_S)$ измеримых функций, определенную формулой (6.32), но не совпадает с ними, так как метрика d_{X3} есть отношение сумм функций в отличие от метрик d_s и d_S, являющихся суммой или интегралом отношений функций. Степенные функции от основной метрики d_{X1p} и усредненных метрик d_{X2p} и d_{X3p} при $p\geq 2$ не похожи ни на какие метрики других метрических пространств.

Сходство основной и полностью усредненной метрик с метриками Хемминга позволяет сформулировать следующие важные выводы.

Т е о р е м а 7.13. *Метрические пространства* $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ *и* $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$ *измеримых множеств, заданные на* σ*-алгебре множеств* $\mathcal{S}(X)$, *изометричны пространству* $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{l1})$ *ограниченных числовых последовательностей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{S}(X)$ – σ-алгебра измеримых множеств A_j, являющихся подмножествами некоторого множества $X=\{x_1,x_2,...\}$. Определим ограниченные числовые последовательности $Y_j=\{y_{j1},y_{j2},y_{j3},...\}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, члены которых зададим по следующему правилу: $y_{ji}=f_j(x_i)=w_i\,\chi_{A_j}(x_i)$, где $w_i\geq 0$, $x_i\in X$, χ_{A_j} – характеристическая функция множества A_j. Функция f задает взаимно однозначное отображение $f:\mathcal{S}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ метрического пространства $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ измеримых множеств в метрическое пространство $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{l1})$ ограниченных числовых последовательностей. В таком случае каждой точке A_j пространства X_1 сопоставляется точка Y_j пространства l_1. При этом согласно формулам (6.12), (7.51) сохраняется расстояние между парами соответствующих точек этих пространств:

$$d_X(A_j,A_h)=\sum_{i=1}^{\infty} w_i\,|\,\chi_{A_j}(x_i)-\chi_{A_h}(x_i)\,|=\sum_{i=1}^{\infty}|\,y_{ji}-y_{hi}\,|=d_{l1}(Y_j,Y_h),$$

то есть отображение $f:\mathcal{S}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является изометрией. Изометрия пространства $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$ измеримых множеств и пространства $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{l1})$ ограниченных числовых последовательностей устанавливается аналогичным образом и определяется функцией $y_{ji}=f_j(x_i)=w'_i\,\chi_{A_j}(x_i)$, где $w'_i=1/\sum_{j=1}^{n} w_j$. ■

Как отмечено в разделе 6.2, n-мерный вектор $\mathbf{y}_i=(y_{i1},\ldots,y_{in})$ всегда можно представить как ограниченную последовательность вида $Y_i=\{y_{i1},\ldots,y_{in},0,0,\ldots\}$. В свою очередь семейство $\mathcal{P}(X)$ подмножеств конечного n-элементного множества $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, как известно [КФ68], является минимальной алгеброй над множеством X. Учитывая это обстоятельство, получаем следующее

С л е д с т в и е 7.13.А. *Метрические пространства* $X^n{}_1=(\mathcal{P}, d_{X1})$ *и* $X^n{}_2=(\mathcal{P}, d_{X2})$ *измеримых множеств, определенные на семействе* $\mathcal{P}(X)$ *подмножеств n-элементного множества* $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, *изометричны n-мерному векторному пространству* $R^n{}_1=(\mathbb{R}^n, d_{R1})$.

Укажем на связь между пространствами измеримых множеств и псевдометрическими пространствами с разрезной полуметрикой $\delta_X^{(A)}(x,y)$, заданной формулой (1.35). Из теоремы 6.3 и следствия 7.13.А вытекает

С л е д с т в и е 7.13.Б. *Метрические пространства* $X^n{}_1=(\mathcal{P}, d_{X1})$ *и* $X^n{}_2=(\mathcal{P}, d_{X2})$ *измеримых множеств, определенные на семействе* $\mathcal{P}(X)$ *подмножеств n-элементного множества* $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, *изометричны конечному n-мерному пространству расстояний* (X,d_X), *в котором расстояние* d_X *является положительной линейной комбинацией m разрезных полуметрик вида* $d_X(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m} w_k\,\delta_X^{(A_k)}(x_i,x_j)$, *где* $w_k>0$, $A_k\subset X=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Непосредственное доказательство последнего утверждения можно найти, например, в книге [DL97].

Из теоремы 7.13 следует, что пространства $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ и $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$ измеримых множеств являются изометрически вложимыми подпространствами пространства Лебега – интегрируемых (суммируемых) измеримых функций $L_1=(L_1(T,\mathcal{S}, m), d_{L1})$. В таком случае, исходя из установленных в главе 6 характеристик функциональных пространств, можно утверждать, что пространства X_1, X_2 и $X^n{}_1$, $X^n{}_2$ измеримых множеств обладают метрическими и топологическими свойствами, одинаковыми со свойствами пространства ограниченных числовых последовательностей l_1 и n-мерного векторного пространства $R^n{}_1$. Поэтому получаем еще одно подтверждение того, что пространства $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ и $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$ *полны*, *сепарабельны*, *метрически выпуклы*, *локально компактны*, но *некомпактны*, а пространства $X^n{}_1=(\mathcal{P}, d_{X1})$ и $X^n{}_2=(\mathcal{P}, d_{X2})$ *всюду плотны*, *сепарабельны*, *неполны*, *некомпактны*, но *относительно компактны*, $l^n{}_1$-, $l^\infty{}_1$- и L_1-*вложимы*, *метрически выпуклы*, *гиперметричны*, а также, возможно, *связны, локально связны и отделимы*. Если положить меру множества равной $m(A)=|A|$, то пространство $X^n{}_1$ совпадает с n-мерным гиперкубом $Z^n{}_{(1)1}=(\{0,1\}^n,d_{R1})$, приведенным в примере 6.2. Вопрос о непосредственном доказательстве наличия тех или иных других свойств метрических пространств $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ измеримых множеств пока остается открытым.

Метрические пространства $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ и $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$, заданные на σ-алгебре $\mathcal{S}(X)$ измеримых множеств, представляют собой пополнения соответствующих пространств $X^n{}_1=(\mathcal{P}, d_{X1})$ и $X^n{}_2=(\mathcal{P}, d_{X2})$, заданных на семействе $\mathcal{P}(X)$ подмножеств конечного множества X, а также метрических пространств $X'_1=(\mathcal{K}_\sigma, d'_{X1})$ и $X'_2=(\mathcal{K}_\sigma, d'_{X2})$, заданных на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma(X)$ подмножеств множества X. Последнее обстоятельство свидетельствует о существовании определенной взаимосвязи между стандартным продолжением меры множества, определенным в разделе 4.4, и пополнениями метрических пространств измеримых множеств.

7.8. Аксиоматический подход к метризации пространств измеримых множеств. Вид функциональной зависимости метрики d, определяющей близость точек в метрическом пространстве (X,d), обычно считается заданным априорно. Вместе с тем, как было впервые показано в работе [KS62], расстояние между точками пространства можно ввести, исходя из некоторой «естественной» системы аксиом, учитывающей специфику рассматриваемых объектов. Подобный подход применялся, в частности, для построения расстояний между разбиениями на классы, отношениями, графами, матрицами, множествами, мультимножествами и другими объектами [KS62], [LG63], [Op79], [ГМР80], [Мир80], [Петр81], [Лит82], [Petr92], [Reb94].

Для однозначного определения метрики при аксиоматическом подходе аксиоматика метрического пространства обычно дополняется аксиомами, характеризующими геометрию пространства. Наиболее распространены условия, постулирующие близость «соседних» или удаленность «крайних» объектов в пространстве, инвариантность некоторых свойств пространства, вырожденность неравенства треугольника (1.03) для точек, «лежащих между» двух других точек пространства, и тому подобное.

Геометрические особенности метрических пространств измеримых множеств и мультимножеств позволяют сформулировать требования, однозначно определяющие метрики на этих пространствах [Петр81], [Петр82], [Petr92], [Petr94], [Петр94], [Петр95]. Дополнительно к аксиоматике метрического пространства (1.01)-(1.03) потребуем, чтобы расстояние $d(A,B)$ между измеримыми множествами удовлетворяло следующим геометрическим условиям, связанным с взаимным расположением точек в пространстве:

$$d(A,B) = d(\varnothing,A) - d(\varnothing,B) \quad \text{при } B\subseteq A, \tag{7.54}$$

$$d(A,B) = d(\varnothing,A) + d(\varnothing,B) \quad \text{при } A\cap B=\varnothing. \tag{7.55}$$

Как было установлено в разделе 7.4, расстояние $d_{X1}(A,B)$ в пространстве измеримых множеств $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ можно соотнести с длиной соответствующего отрезка $[A,B]$. Равенства (7.54) и (7.55) можно интерпретировать тогда как аналоги обычных геометрических правил, определяющих длину отрезка $[a,b]$ в евклидовом пространстве. В первом случае отрезок $[A,B]$ является общей частью вложенных друг в друга отрезков $[\varnothing,A]$ и $[\varnothing,B]$, имеющих общую «точку» $\varnothing$, а во втором случае – суммой соприкасающихся отрезков $[\varnothing,A]$ и $[\varnothing,B]$.

Покажем, что аксиоматика метрического пространства (1.01)-(1.03), условие совпадения (1.34), условие метрической выпуклости (7.35) пространства измеримых множеств и дополнительные геометрические требования (7.54), (7.55) являются необходимыми и достаточными условиями, которые однозначно определяют основную и полностью усредненную метрики (псевдометрики) $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$ и $d_{X2}(A,B)=m(A\Delta B)/m(X)$ на полном пространстве $(X,\mathcal{S}, m)$.

Т е о р е м а 7.14. *Функция* $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$, *где* m *– аддитивная и вполне* σ*-конечная мера, определенная на* σ*-алгебре множеств* $\mathcal{S}(X)$, *является метрикой почти всюду* (*псевдометрикой*) *на полном пространстве* $(X,\mathcal{S}, m)$ *тогда и только тогда, когда пространство* $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$ *метрически выпукло относительно множества* C, *находящегося между множествами* A *и* B, *а функция* d_{X1} *удовлетворяет геометрическим условиям* (7.54), (7.55) *взаимного расположения точек пространства* X_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть m – мера, определенная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$. Справедливость аксиом метрического пространства (1.01)-(1.03) и условия совпадения (1.34) для метрики (псевдометрики) $d_{X1}(A,B)=$ $=m(A\Delta B)$ доказана в теореме 7.1, а наличие свойства (7.35) метрической выпуклости пространства X_1 при $A\cap B\subseteq C\subseteq A\cup B$ – в теореме 7.5. Выполнение требований (7.54), (7.55) для расстояния $d_{X1}(A,B)$ непосредственно вытекает из его определения (7.02) и свойства (4.13) меры множества. Необходимость условий теоремы доказана.

2°. Пусть d_{X1} – метрика (псевдометрика) на метрическом пространстве $X_1=(\mathcal{S}, d_{X1})$, удовлетворяющая также условиям (7.35), (7.54) и (7.55). Для любых множеств A и B всегда выполняются включения: $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$. Тогда в силу соотношения (7.54) можно записать:

$$d_{X1}(A,A\cup B) = d_{X1}(\varnothing,A\cup B)-d_{X1}(\varnothing,A), \qquad d_{X1}(A\cup B,B) = d_{X1}(\varnothing,A\cup B)-d_{X1}(\varnothing,B).$$

С другой стороны, в силу условия (7.35) метрической выпуклости пространства

X_1 для произвольных множества A и B имеем:

$$d_{X1}(A,B) = d_{X1}(A,A\bigcup B) + d_{X1}(A\bigcup B,B).$$

Отсюда получаем

$$d_{X1}(A,B) = 2d_{X1}(\varnothing,A\bigcup B) - d_{X1}(\varnothing,A) - d_{X1}(\varnothing,B). \qquad (7.56)$$

Пусть множества A и B не пересекаются. В этом случае с учетом условия (7.55) равенство (7.56) примет вид:

$$d_{X1}(\varnothing,A\bigcup B) = d_{X1}(\varnothing,A) + d_{X1}(\varnothing,B). \qquad (7.57)$$

Обозначим

$$d_{X1}(\varnothing,A) = c_1 m(A), \qquad (7.58)$$

где $c_1>0$ и m – действительная функция, заданная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$. Так как расстояние $d_{X1}(\varnothing,A)$ неотрицательно, то и m – неотрицательная функция, обладающая согласно равенству (7.57) свойством (4.01) аддитивности

$$m(A\bigcup B) = m(A) + m(B)$$

для непересекающихся множеств $A\bigcap B=\varnothing$. Тем самым все требования, предъявляемые к функции m как к мере множества, оказываются выполненными.

Подставляя формулу (7.58) в равенство (7.56) и учитывая соотношения (4.12), (4.13), получим:

$$d_{X1}(A,B) = c_1[2m(A\bigcup B) - m(A) - m(B)] = c_1 m(A\Delta B).$$

В метрическом пространстве X_1 диаметр σ-алгебры множеств $D_{X1}(\mathcal{S})$ равен согласно формуле (7.19) мере множества $m(X)$. Тогда из равенства (7.58) получаем для коэффициента $c_1=1$. Следовательно, расстояние $d_{X1}(A,B)$ между измеримыми множествами однозначно определяется выражением $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$. Достаточность условий теоремы доказана. ■

Т е о р е м а 7.15. *Функция $d_{X2}(A,B)=m(A\Delta B)/m(X)$, где m – аддитивная и вполне σ-конечная мера, определенная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$, является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на полном пространстве $(X,\mathcal{S}, m)$ тогда и только тогда, когда пространство $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$ метрически выпукло относительно множества C, находящегося между множествами A и B, а функция d_{X2} удовлетворяет геометрическим условиям* (7.54), (7.55) *взаимного расположения точек пространства X_2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть m – мера, определенная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$. Справедливость аксиом метрического пространства (1.01)-(1.03), условий совпадения (1.34) и нормировки (7.06) для метрики (псевдометрики) $d_{X2}(A,B)=m(A\Delta B)/m(X)$ доказаны в теореме 7.3. Метрическое пространство X_2, как было отмечено ранее, обладает такими же свойствами, что и пространство X_1. Поэтому условие метрической выпуклости (7.35) выполняется и для метрики d_{X2}. Выполнение требований (7.54), (7.55) для расстояния $d_{X2}(A,B)$ непосредственно вытекает из его определения (7.02) и свойства (4.13) меры множества. Необходимость условий теоремы доказана.

2°. Пусть d_{X2} – метрика (псевдометрика) на метрическом пространстве $X_2=(\mathcal{S}, d_{X2})$, удовлетворяющая также условиям (7.35), (7.54), (7.55). Все приведенные выше рассуждения в доказательстве теоремы 7.14 остаются справедливыми и для метрики (псевдометрики) d_{X2}, в том числе и равенство (7.57). Обозначим $d_{X2}(\varnothing,A)=c_2m(A)$, где $c_2>0$ и m – действительная функция, определенная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$ и обладающая согласно равенству (7.57) свойством аддитивности (4.01) для непересекающихся множеств $A\bigcap B=\varnothing$. Учитывая, что на метрическом пространстве X_2 диаметр σ-алгебры множеств $D_{X2}(\mathcal{S})=1$, получаем для коэффициента c_2 соотношение $c_2=1/m(X)$. Таким образом, расстояние $d_{X2}(A,B)$ между измеримыми множествами однозначно определяется выражением $d_{X2}(A,B)=m(A\Delta B)/m(X)$, где m – мера множества. Достаточность условий теоремы доказана. ■

Потребуем теперь, чтобы расстояние $d(A,B)$ между измеримыми множествами удовлетворяло иным условиям взаимного расположения непустых множеств A и B в пространстве, а именно:

$$d(A,B) = 1 - [d(X,\overline{B})/d(X,\overline{A})] \quad \text{при } B\subseteq A, \tag{7.59}$$

$$d(A,B) = 1 \quad \text{при } A\bigcap B=\varnothing. \tag{7.60}$$

Покажем, что аксиоматика метрического пространства (1.01)-(1.03), условие совпадения (1.34), условие (7.05) $d_X(\varnothing,\varnothing)=0$, условие (7.37) метрической выпуклости пространства измеримых множеств при $C=A\bigcup B\neq\varnothing$ и дополнительные геометрические требования (7.59), (7.60) являются необходимыми и достаточными условиями, однозначно определяющими локально усредненную метрику (псевдометрику) $d_{X3}(A,B)=m(A\Delta B)/m(A\bigcup B)$ на полном пространстве $(X,\mathcal{S}, m)$.

Т е о р е м а 7.16. *Функция* $d_{X3}(A,B)=m(A\Delta B)/m(A\bigcup B)$, *где* m *– аддитивная и вполне* σ*-конечная мера*, *определенная на* σ*-алгебре множеств* $\mathcal{S}(X)$, *является метрикой почти всюду* (*псевдометрикой*) *на полном пространстве* $(X,\mathcal{S}, m)$ *тогда и только тогда, когда пространство* $X_3=(\mathcal{S}, d_{X3})$ *метрически выпукло относительно множества* $C=A\bigcup B\neq\varnothing$, *а функция* d_{X3} *удовлетворяет условию* $d_{X3}(\varnothing,\varnothing)=0$ *и геометрическим условиям* (7.59), (7.60) *взаимного расположения точек пространства* X_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть m – мера, определенная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$. Справедливость аксиом метрического пространства (1.01)-(1.03), условий совпадения (1.34) и нормировки (7.06) для метрики (псевдометрики) $d_{X3}(A,B)=m(A\Delta B)/m(A\bigcup B)$ доказаны в теореме 7.3, а наличие свойства (7.37) метрической выпуклости пространства X_3 при $C=A\bigcup B\neq\varnothing$ – в теореме 7.6. Воспользовавшись равенствами (4.12) и (7.27), убедимся в выполнении требования (7.59) для расстояния $d_{X3}(A,B)$. Действительно, при $B\subseteq A$ имеем:

$$d_{X3}(A,B) = [m(A)-m(B)]/m(A) = 1 - [m(B)/m(A)] = 1 - [d_{X3}(X,\overline{B})/d_{X3}(X,\overline{A})].$$

Требование (7.60) следует непосредственно из определения (7.08) метрики d_{X3} и равенств (4.12), (4.13). Необходимость условий теоремы доказана.

2°. Пусть d_{X3} – метрика (псевдометрика) на метрическом пространстве $X_3=(\mathcal{S}, d_{X3})$, удовлетворяющая также условиям (7.37), (7.59) и (7.60). Для любых множеств A и B всегда выполняются включения: $A\subseteq A\bigcup B$, $B\subseteq A\bigcup B$. Тогда в силу соотношения (7.59) при $A\bigcup B\neq\varnothing$ или $\overline{A\bigcup B}\neq X$ можно записать:

$$d_{X3}(A,A\bigcup B) = 1 - [d_{X3}(X,\overline{A})/d_{X3}(X,\overline{A\bigcup B})],$$

$$d_{X3}(A\bigcup B,B) = 1 - [d_{X3}(X,\overline{B})/d_{X3}(X,\overline{A\bigcup B})].$$

С другой стороны, в силу условия (7.37) метрической выпуклости пространства X_3 при $C=A\bigcup B$ для произвольных множества A и B имеем:

$$d_{X3}(A,B) = d_{X3}(A, A\bigcup B) + d_{X3}(A\bigcup B, B).$$

Отсюда получаем

$$d_{X3}(A,B) = 2 - [(d_{X3}(X,\overline{A})+d_{X3}(X,\overline{B}))/d_{X3}(X,\overline{A\bigcup B})]. \qquad (7.61)$$

Пусть множества A и B не пересекаются. В этом случае с учетом условия (7.60) равенство (7.61) примет вид:

$$d_{X3}(X,\overline{A\bigcup B}) = d_{X3}(X,\overline{A}) + d_{X3}(X,\overline{B}), \qquad (7.62)$$

внешне аналогичный равенству (7.57). Обозначим

$$d_{X3}(X,\overline{A}) = c_3 m(A), \qquad (7.63)$$

где $c_3>0$ и m – действительная функция, заданная на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$. Так как расстояние $d_{X3}(X,\overline{A})$ неотрицательно, то и m – неотрицательная функция, обладающая согласно равенству (7.62) свойством (4.01) аддитивности

$$m(A\bigcup B) = m(A) + m(B)$$

для непересекающихся множеств $A\bigcap B=\varnothing$. Тем самым все требования, предъявляемые к функции m как к мере множества, оказываются выполненными.

Подставляя формулу (7.63) в равенство (7.61) и учитывая соотношения (4.12), (4.13), получим:

$$d_{X3}(A,B) = 2 - [(m(A)+m(B))/m(A\bigcup B)] = m(A\Delta B)/m(A\bigcup B).$$

Условие $d_{X3}(\varnothing,\varnothing)=0$ вводится по определению (7.05). Следовательно, расстояние $d_{X3}(A,B)$ между измеримыми множествами однозначно определяется выражением $d_{X3}(A,B)=m(A\Delta B)/m(A\bigcup B)$. Достаточность условий теоремы доказана. Полагая $A=X$ и $B=\overline{A}=\varnothing$ и учитывая требование (7.60) имеем $d_{X3}(X,\overline{A})=1$, а значит, из формулы (7.63) коэффициент $c_3=1/m(X)$. В таком случае формула (7.63) совпадет с соотношением (7.27) при $p=1$. ■

Глава 8
Пространства измеримых мультимножеств

8.1. Метрики, порожденные мерой мультимножества. Построение основ теории метрических пространства измеримых мультимножеств будем вести в духе теории метрических пространства измеримых множеств. Содержание этой главы внешне во многом будет напоминать изложенное в предыдущей главе, однако целый ряд утверждений доказывается здесь иначе.

Введем по аналогии с метрическим пространством измеримых множеств $X=(\mathcal{S}(X), m, d_X)$ понятие *метрического пространства измеримых мультимножеств* $\boldsymbol{Z}=(\mathcal{S}(\boldsymbol{Z}), m, d_Z)$. Для определенности будем считать, что $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ есть σ-алгебра подмультимножеств некоторого максимального мультимножества $\boldsymbol{Z}=\{k_Z(x_1)\bullet x_1,\ k_Z(x_2)\bullet x_2,\ldots\}$ над доменом $G=\{x_1,x_2,\ldots\}$; мультимножества $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{Z}$, входящие в σ-алгебру $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, измеримы; мера мультимножества m сильно счетно-аддитивна, вполне σ-конечна и полна; метрика d_Z задана на пространстве с мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$ и является некоторым функционалом от меры мультимножества.

Рассмотрим различные способы метризации σ-алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ измеримых мультимножеств. Как и в случае множеств, определим, прежде всего, метрическое пространство измеримых мультимножеств, которое обозначим через $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}(\boldsymbol{Z}), m, d_{Z1})$ или более кратко $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$, где расстояние между мультимножествами $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ задается выражением

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}). \tag{8.01}$$

Убедимся, что функция d_{Z1}, определяющая отображение $d_{Z1}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathbb{R}_+$, действительно является метрикой (псевдометрикой), которая удовлетворяет аксиоматике метрического пространства (1.01)-(1.03), (1.34).

Т е о р е м а 8.1. *Функция $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$, где m – сильно счетно-аддитивная и вполне σ-конечная мера мультимножества, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Действительность и неотрицательность функции $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$ вытекает непосредственно из определения меры как действительной и неотрицательной функции мультимножества, определенной на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, а бинарность операции симметрической разности мультимножеств Δ означает по определению арности операции, что функция d_{Z1} задана на прямом произведении семейств мультимножеств $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$. Аксиома симметрии (1.01) для функции d_{Z1} следует из свойства коммутативности операции симметрической разности $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{A}$, которое вытекает из ее определения (0.23). Неравенство треугольника (1.03) следует из неравенства (5.30)

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) \le m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C}) + m(\boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{B}) = d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) + d_{Z1}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}).$$

2°. Проверим теперь выполнение аксиомы тождества (1.02) или условия совпадения (1.34). Так как согласно свойству идентичности симметрической разности мультимножеств $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}=\varnothing$ при $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, то из равенства мультимножеств $\boldsymbol{A}$

и $\boldsymbol{B}$ следует, что $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})=m(\varnothing)=0$. В то же время из равенства $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$ следует только, что $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=0$, что в общем случае не означает равенства мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Тем самым, строго говоря, выполняется условие совпадения (1.34). Таким образом, функция d_{Z1}, определяемая формулой (8.01), является псевдометрикой на σ-алгебре $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ измеримых мультимножеств, а $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$ – псевдометрическим пространством.

3°. Как и при доказательстве теоремы 7.1, изометрически преобразуем псевдометрическое пространство $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$ в метрическое пространство путем «склеивания» в классы эквивалентностей всех пар точек исходного пространства, для которых псевдометрика равна нулю. В этом случае в силу леммы 5.A в общий класс попадут m-равные мультимножества, совпадающие с точностью до мультимножеств меры нуль. Для m-равных мультимножеств из условия $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$ следует, что $\boldsymbol{A}=_m\boldsymbol{B}$. Если классы m-равных мультимножеств взять в качестве элементов некоторого семейства мультимножеств $\mathcal{S}_m$, то пространство $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}_m, d_{Z1})$, на котором выполняется и аксиома тождества (1.02), становится метрическим. Пространство с полной мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$ почти всюду совпадает с пространством $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}_m,m)$. Поэтому, пренебрегая различием между m-равными мультимножествами, пространство $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$ также можно считать метрическим пространством, где функция d_{Z1} является метрикой почти всюду. ■

Для построения новых видов пространств измеримых мультимножеств воспользуемся тем же приемом, что и в случае пространств измеримых множеств. Выполним метрические преобразования пространства $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$, вводя на σ-алгебре $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ измеримых мультимножеств новые метрики $d_{Zq}=F_q(d_{Z1})$. Одно из таких преобразованных расстояний определим как прямо пропорциональный функционал вида (1.41)

$$d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = F_2(d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})) = h_0 d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \frac{d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{\sup\limits_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})} d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}. \qquad (8.02)$$

Другое преобразованное расстояние зададим как удвоенное расстояние вида (1.42), усредненное по трем точкам относительно пустого мультимножества $\varnothing$

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = F_3(d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})) = 2d_{Z1}^{(\varnothing)}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \frac{2d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) + d_{Z1}(\boldsymbol{A},\varnothing) + d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{B})}. \qquad (8.03)$$

Так как $d_{Z1}(\varnothing,\varnothing)=0$, то функция $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, заданная формулой (8.03), не доопределена в «нуле» при $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\varnothing$. Поэтому по определению будем считать, что

$$d_{Z3}(\varnothing,\varnothing) = 0. \qquad (8.04)$$

Метрически преобразованные пространства мультимножеств с метриками d_{Zq}, q=2,3 обозначим как $Z_q=(\mathcal{S}(\boldsymbol{Z}), m, d_{Zq})$ или более кратко $\boldsymbol{Z}_q=(\mathcal{S}, d_{Zq})$. Согласно определению (8.02) и теореме 1.15 преобразованные пространства $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S}, d_{Z2})$ и $\boldsymbol{Z}_3=(\mathcal{S}, d_{Z3})$ измеримых мультимножеств останутся метрическими (псевдометрическими), как и исходное пространство $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$. Из формул (8.02), (8.03) вытекает также, что расстояния d_{Z2} и d_{Z3} удовлетворяют следующему условию нормировки

$$0 \le d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \le 1. \qquad (8.05)$$

Поэтому функции d_{Zq}, q=2,3 задают отображения $d_{Zq}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\rightarrow\mathbb{R}_{01}$ прямого произведения σ-алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ измеримых мультимножеств на интервал [0,1] действительных чисел.

Примем теперь во внимание определение (8.01) расстояния d_{Z1}, формулы (5.09), (5.10), связывающие меры мультимножеств, и представим преобразованные (нормированные) расстояния d_{Z2} и d_{Z3} следующим образом:

$$d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = F_2(d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})) = d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})/d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{Z}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z}), \quad (8.06)$$

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = F_3(d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})) = d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})/d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}). \quad (8.07)$$

Полагая согласно соотношению (5.07) меру мультимножества равной его мощности, выражения (8.01), (8.06) и (8.07) для расстояний между измеримыми мультимножествами можно записать в виде

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|,\quad d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|/|\boldsymbol{Z}|,\quad d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|/|\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|. \quad (8.08)$$

Как и для множеств, назовем расстояние между измеримыми мультимножествами $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ *основным*, $d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ – *полностью усредненным* и $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ – *локально усредненным*. Полностью усредненное расстояние $d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ представляет собой удельное расстояние между двумя мультимножествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, которое соотносит основное расстояние с расстоянием, максимально возможным в исходном пространстве. Локально усредненное расстояние $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ задает удельное расстояние между мультимножествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, относя основное расстояние к максимально возможной «общей части» только этих двух мультимножеств в исходном пространстве. Метрики d_{Z1}, d_{Z2} и d_{Z3} на пространстве мультимножеств были введены в работах [Petr92], [Petr94], [Петр94], [Петр95].

8.2. Степенное преобразование расстояний между мультимножествами. Пространства измеримых мультимножеств более общего вида, которые будем обозначать как $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}(\boldsymbol{Z}), m, d_{Zqp})$ или более кратко $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$, можно образовать, если одну из метрик $d_{Zq}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, q=1,2,3 взять в качестве исходной и осуществить степенное преобразование

$$d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = F_p(d_{Zq}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})) = [d_{Zq}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^{1/p}, \quad (8.09)$$

где $p\geq1$ – фиксированное целое число. Очевидно, что функции d_{Z1p} задают отображение $d_{Z1p}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\rightarrow\mathbb{R}_+$, а функции d_{Z2p} и d_{Z3p} – отображение $d_{Zqp}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\rightarrow\mathbb{R}_{01}$= =[0,1]. Ясно, что пространства мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{q1}$ есть пространства $\boldsymbol{Z}_q$.

Подставляя в формулу (8.09) равенства (8.01), (8.06), (8.07), получим следующие выражения для расстояний между измеримыми мультимножествами:

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = [d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^{1/p} = [m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}, \quad (8.10)$$

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = [d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^{1/p} = d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})/d_{Z1p}(\varnothing,\boldsymbol{Z}) = [m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}, \quad (8.11)$$

$$d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = [d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^{1/p} = d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})/d_{Z1p}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = [m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})]^{1/p}. \quad (8.12)$$

Заменяя согласно формуле (5.07) меру мультимножества его мощностью, имеем из соотношений (8.10)-(8.12)

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|^{1/p}, \quad (8.13)$$

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = (|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|/|\boldsymbol{Z}|)^{1/p}, \quad (8.14)$$

$$d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = (|\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}|/|\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}|)^{1/p}. \quad (8.15)$$

что представляет собой степенное преобразование соответствующих расстояний $d_{Xq}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, заданных формулами (8.08).

Для пространств мультимножеств, где $m(\boldsymbol{Z})=1$, расстояния d_{Z1p} и d_{Z2p} равны при любых числах $p\geq1$. Отметим, что при фиксированном числе $p\geq1$ каждое локально усредненное расстояние d_{Z3p} подчиняется требованию $d_{Z3p}(\varnothing,\varnothing)=0$ (8.04), а все усредненные расстояния между мультимножествами d_{Z2p} и d_{Z3p} удовлетворяют условию нормировки $0\leq d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leq1$ (8.05).

Таким образом, на σ-алгебре $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ измеримых мультимножеств можно определить целое семейство расстояний, в котором каждое преобразованное расстояние $d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ при $p\geq1$ и $q=2,3$ представляет собой некоторую сложную функцию $d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=F_p(d_{Zq}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))=F_p[F_q(d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))]$ от основного расстояния $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. Согласно теоремам 1.15, 1.16 соответствующие преобразованные пространства $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ измеримых мультимножеств сохраняют метричность (псевдометричность) исходного пространства $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$. В этом можно убедиться и непосредственно.

Т е о р е м а 8.2. *Функция $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$, где m – сильно счетно-аддитивная и вполне σ-конечная мера мультимножества, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, и $p\geq1$ – фиксированное целое число, является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение аксиом симметрии (1.01) и тождества (1.02) для функции d_{Z1p} устанавливается так же, как и для функции d_{Z1}. Доказательство дословно повторяет соответствующие рассуждения из теоремы 8.1. Неравенство треугольника (1.03) для функции d_{Z1p} следует из соотношения (5.30). Действительно, принимая во внимание определение (8.10), условие (5.30) и неотрицательность расстояния, имеем при фиксированном числе $p\geq1$:

$$[d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) \leq m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C}) + m(\boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{B}) =$$
$$= [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})]^p + [d_{Z1p}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B})]^p \leq [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) + d_{Z1p}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B})]^p.$$

Отсюда сразу получаем аксиому (1.03). Аналогично функции d_{Z1} функция d_{Z1p} является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$. ■

Т е о р е м а 8.3. *Функции $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{X})]^{1/p}$ и $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=$ $=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})]^{1/p}$, где m – сильно счетно-аддитивная и вполне σ-конечная мера мультимножества, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, и $p\geq1$ – фиксированное целое число, являются метриками почти всюду (псевдометриками) на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$, удовлетворяющими условию нормировки* $0\leq d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leq1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Действительность и неотрицательность функций d_{Zqp}, $p\geq1$, $q=2,3$ вытекает непосредственно из определения меры как действительной и неотрицательной функции мультимножества. Выполнение аксиомы симметрии (1.02) и неравенства треугольника (1.03) для функции d_{Z2p} устанавливается так же, как и для метрики d_{Z1p}. Выполнение условия нормировки (8.05) для функции d_{Z2p} очевидно из определения (8.11), поскольку всегда $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{Z}$, а значит, в силу (5.13) $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})\leq m(\boldsymbol{Z})$.

2°. Справедливость аксиомы симметрии (1.02) для функции d_{Z3p} следует из свойства коммутативности операций объединения и симметрической разности мультимножеств $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{A}$, которое вытекает из их определений (0.11) и (0.23). Выполнение неравенства треугольника (1.03) для функции d_{Z3p} проверим для нетривиального случая $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}\neq\varnothing$. Нетрудно убедиться в справедливости включения $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}\subseteq(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})$ для произвольных мультимножеств. Для этого достаточно проверить, что неравенство

$$\min[k_A(x),k_C(x)] \le \min[k_A(x),k_B(x)] + |k_B(x)-k_C(x)|$$

выполняется при любых соотношениях между функциями кратности $k_A(x)$, $k_B(x)$ и $k_C(x)$ для $\forall x\in G$. Учитывая это включение, в силу свойств (5.13) монотонности и (5.01) сильной аддитивности меры мультимножества имеем:

$$m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}) \le m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) + m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C}), \quad m(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}) \le m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) + m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C}). \qquad (8.16)$$

Принимая во внимание равенства (5.09), (5.10) и неравенства (1.43), (5.30), (8.16), получаем следующее соотношение для мер мультимножеств:

$$\frac{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})}{m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})} = \frac{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})}{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})+m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})} \le \frac{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})} =$$

$$= \frac{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})} + \frac{m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})} \le$$

$$\le \frac{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})} + \frac{m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})+m(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})} = \frac{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})} + \frac{m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})}.$$

Тогда при фиксированном числе $p\ge 1$ имеем:

$$[d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p = \frac{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})}{m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})} \le \frac{m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})} + \frac{m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})}{m(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})} =$$

$$= [d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})]^p + [d_{Z3p}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B})]^p \le [d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) + d_{Z3p}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B})]^p,$$

откуда сразу следует неравенство треугольника (1.03) для функции d_{Z3p}. И, наконец, в силу определения (8.12) и условия (5.15) для функции d_{Z3p} выполняется требование нормировки (8.05).

3°. Все рассуждения, приведенные в теореме 8.1 о выполнимости аксиомы тождества (1.02) или условия совпадения (1.34) для метрики d_{Z1}, остаются справедливыми для функции d_{Z2p}, а при учете равенств $\boldsymbol{A}_1\cup\boldsymbol{A}_2=_m\boldsymbol{B}_1\cup\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{A}_1\cap\boldsymbol{A}_2=_m\boldsymbol{B}_1\cap\boldsymbol{B}_2$ – и для функции d_{Z3p}. Таким образом, d_{Z2p} и d_{Z3p} являются метриками почти всюду (псевдометриками) на полном пространстве $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S},m)$. ■

В дальнейшем, если дело будет касаться одновременно всех пространств измеримых мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ при любых значениях $p\ge 1$ и q=1,2,3, то для краткости будем обозначать эти пространства все вместе как $\boldsymbol{Z}_{qp}$.

8.3. Особенности расстояний, порожденных мерой мультимножества. Рассмотрим некоторые особенности метрик d_{Z1p}, d_{Z2p} и d_{Z3p} в зависимости от значений их переменных.

В соответствии с определением (1.09) диаметр семейства мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ есть ничто иное как расстояние $d(\varnothing,\boldsymbol{Z})$ между «минимальным» пустым мультимножеством $\varnothing$ и максимальным мультимножеством $\boldsymbol{Z}$, являющимся единицей σ-алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ мультимножеств:

$$D(\mathcal{S}) = \sup_{A_i, A_j \in \mathcal{S}(Z)} d(\boldsymbol{A_i}, \boldsymbol{A_j}) = d(\varnothing, \boldsymbol{Z}). \tag{8.17}$$

Таким образом, диаметры σ-алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ на пространствах $\boldsymbol{Z}_1$ и $\boldsymbol{Z}_{1p}$ с учетом формул (8.01), (8.10) и (5.06) определяются выражениями:

$$D_{Z1}(\mathcal{S}) = m(\boldsymbol{Z}) = \sum_{x_i \in G} w_i k_Z(x_i), \tag{8.18}$$

$$D_{Z1p}(\mathcal{S}) = [m(\boldsymbol{Z})]^{1/p} = [D_{Z1}(\mathcal{S})]^{1/p}. \tag{8.19}$$

Можно сказать, что на пространствах измеримых мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ метрика d_{Z1p} задает отображение $d_{Z1p}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to[0, D_{Z1p}(\mathcal{S})]$ прямого произведения $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ σ-алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ на интервал $[0, D_{Z1p}(\mathcal{S})]$ множества неотрицательных действительных чисел при любом фиксированном числе $p\geq1$.

На метрических пространствах измеримых мультимножеств, где выполняется условие $m(\boldsymbol{Z})=1$, диаметр $D_{Z1p}(\mathcal{S})$ σ-алгебры мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$ равен 1 при любых числах p, а метрика d_{Z1p} задает отображение $d_{Z1p}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to[0,1]$. На любом из метрических пространств измеримых мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{qp}$ ($p\geq1$, q=2,3) с нормированной метрикой диаметр $D_{Zqp}(\mathcal{S})$ σ-алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ также равен 1, а метрики d_{Zqp} задают отображение $d_{Zqp}:\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to[0,1]$ прямого произведения σ-алгебры мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ на интервал [0,1].

На каждом метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{1p}$ при фиксированном числе $p\geq1$ расстояния между пустым мультимножеством $\varnothing$, мультимножеством $\boldsymbol{Z}$ и произвольным мультимножеством $\boldsymbol{A}$ и его дополнением $\overline{\boldsymbol{A}}$ до мультимножества $\boldsymbol{Z}$ согласно определению (8.10) и свойству идентичности $\varnothing\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ симметрической разности мультимножеств равны

$$d_{Z1p}(\varnothing,\boldsymbol{A}) = d_{Z1p}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}) = [m(\boldsymbol{A})]^{1/p}, \tag{8.20}$$

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{A}) = d_{Z1p}(\varnothing,\overline{\boldsymbol{A}}) = [m(\overline{\boldsymbol{A}})]^{1/p}. \tag{8.21}$$

При выводе соотношений (8.20), (8.21) учитывалась связь (5.29) между мерами измеримого мультимножества $\boldsymbol{A}$ и его дополнения $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Таким образом, мера мультимножества $m(\boldsymbol{A})$, как и мера множества, может трактоваться в геометрическом смысле и как «абсолютная величина» мультимножества $\boldsymbol{A}$, и как длина отрезка $[\varnothing,\boldsymbol{A}]$ между «нулевой точкой» $\varnothing$ и «точкой» $\boldsymbol{A}$ или отрезка $[\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}]$ между «точкой» $\overline{\boldsymbol{A}}$ и «максимальной точкой» $\boldsymbol{Z}$ на пространстве измеримых мультимножеств $\boldsymbol{Z}_1$. Равенства (8.24) и (8.20) указывают также на равенство самих отрезков $[\varnothing,\boldsymbol{A}]$ и $[\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}]$, $[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{A}]$ и $[\varnothing,\overline{\boldsymbol{A}}]$. Мера одноэлементного мультимножества (множества) $\{x_i\}$ в соответствии с выражением (5.06) равна $m(\{x_i\})=w_i$, и значит, величине w_i можно сопоставить длину отрезка $[\varnothing,\{x_i\}]$ или $[\boldsymbol{Z}-\{x_i\},\boldsymbol{Z}]$ в пространстве $\boldsymbol{Z}_1$.

Полностью усредненная метрика d_{Z2p} согласно ее определению (8.11) обладает такими же свойствами, что и основная метрика d_{Z1p}, с тем только отличием, что длины отрезков $[\varnothing,\boldsymbol{A}]$ и $[\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}]$ в пространствах $\boldsymbol{Z}_{2p}$ будут равны «относительной величине» мультимножества $\boldsymbol{A}$

$$d_{Z2p}(\varnothing,\boldsymbol{A}) = d_{Z2p}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}) = [m(\boldsymbol{A})/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}, \tag{8.22}$$

а длины отрезков $[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{A}]$ и $[\varnothing,\overline{\boldsymbol{A}}]$ – «относительной величине» дополнения $\overline{\boldsymbol{A}}$ мультимножества $\boldsymbol{A}$

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{A}) = d_{Z2p}(\varnothing,\overline{\boldsymbol{A}}) = \{1-[m(\boldsymbol{A})/m(\boldsymbol{Z})]\}^{1/p} = [m(\overline{\boldsymbol{A}})/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}. \quad (8.23)$$

Иная картина наблюдается на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{3p}=(\mathcal{S}, d_{Z3p})$. Локально усредненная метрика d_{Z3p} в соответствии с ее определением (8.12) в значительной степени зависит от взаимного положения и величины «общей части» мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Так, если непустые мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются ($\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\varnothing$), то в силу равенств (5.09), (5.10) $m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})$. Поэтому расстояние $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ между такими мультимножествами на пространствах $\boldsymbol{Z}_{3p}=(\mathcal{S}, d_{Z3p})$ равно по определению (8.12) диаметру σ-алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ мультимножеств, то есть $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=D_{Z3p}(\mathcal{S})=1$, а значит, всегда максимально и не зависит от «абсолютной величины» мультимножеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. В частности, таковы расстояния между пустым мультимножеством $\varnothing$ и произвольным непустым мультимножеством $\boldsymbol{A}$ или его дополнением $\overline{\boldsymbol{A}}$

$$d_{Z3p}(\varnothing,\boldsymbol{A}) = d_{Z3p}(\varnothing,\overline{\boldsymbol{A}}) = D_{Z3p}(\mathcal{S}) = 1, \quad (8.24)$$

Данное обстоятельство всегда требуется учитывать, чтобы иметь правильное геометрическое представление о взаимном расположении мультимножеств на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{3p}$.

На пространствах мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{3p}$, так же как и на пространствах $\boldsymbol{Z}_{2p}$, длина отрезка $[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{A}]$ равна «относительной величине» дополнения мультимножества $\overline{\boldsymbol{A}}$

$$d_{Z3p}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{A}) = \{1-[m(\boldsymbol{A})/m(\boldsymbol{Z})]\}^{1/p} = [m(\overline{\boldsymbol{A}})/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}. \quad (8.25)$$

Однако, в отличие от пространств $\boldsymbol{Z}_{2p}$, на пространствах $\boldsymbol{Z}_{3p}$ «относительная величина» мультимножества $\boldsymbol{A}$ равна длине только одного отрезка $[\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}]$

$$d_{Z3p}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}) = [m(\boldsymbol{A})/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}. \quad (8.26)$$

Из равенств (5.29) и (8.24)-(8.26) вытекает, что расстояния между мультимножеством $\boldsymbol{A}$, «минимальным» $\varnothing$ и максимальным $\boldsymbol{Z}$ мультимножествами связаны на пространствах $\boldsymbol{Z}_{3p}$ соотношением:

$$[d_{Z3p}(\varnothing,\boldsymbol{A})]^p = [d_{Z3p}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{A})]^p + [d_{Z3p}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}})]^p.$$

Таким образом, как следует из формул (8.22)-(8.26), длины отрезков $[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{A}]$ и $[\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}]$ в пространствах $\boldsymbol{Z}_{2p}$ и $\boldsymbol{Z}_{3p}$ одинаковы, а длины отрезков $[\varnothing,\boldsymbol{A}]$ и $[\varnothing,\overline{\boldsymbol{A}}]$ различны. Тем самым на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{3p}=(\mathcal{S}, d_{Z3p})$ роли максимального мультимножества $\boldsymbol{Z}$ и «минимального» мультимножества $\varnothing$, так же как и в случае множеств, заметно отличаются.

Общее представление о расстояниях между мультимножествами на различных метрических пространствах в зависимости от значений переменных дает следующий пример.

П р и м е р 8.1. Пусть $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$, $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S}, d_{Z2})$ и $\boldsymbol{Z}_3=(\mathcal{S}, d_{Z3})$ – пространства измеримых мультимножеств, образованные σ-алгеброй $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ над мультимножеством $\boldsymbol{Z}=\{1\bullet a,2\bullet b,3\bullet c\}$, порожденным доменом $G=\{a,b,c\}$. Минимальная σ-алгебра мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ совпадает с семейством $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z})$ подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{Z}$ и включает в себя подмультимножества $A_i\subseteq\boldsymbol{Z}$, которые представляются векторами $\mathbf{c}_i$ следующим образом: $\varnothing$~(0,0,0); $\{1\bullet a\}$~(1,0,0); $\{1\bullet b\}$~(0,1,0); $\{1\bullet c\}$~(0,0,1); $\{1\bullet a,1\bullet b\}$~(1,1,0); $\{1\bullet a,1\bullet c\}$~(1,0,1); $\{1\bullet b,1\bullet c\}$~(0,1,1); $\{2\bullet b\}$~(0,2,0); $\{2\bullet c\}$~(0,0,2); $\{1\bullet a,1\bullet b,1\bullet c\}$~(1,1,1); $\{1\bullet a,2\bullet b\}$~(1,2,0);

$\{1\bullet a,2\bullet c\}\sim(1,0,2)$; $\{2\bullet b,1\bullet c\}\sim(0,2,1)$; $\{3\bullet c\}\sim(0,0,3)$; $\{1\bullet b,2\bullet c\}\sim(0,1,2)$; $\{1\bullet a,2\bullet b,1\bullet c\}\sim(1,2,1)$; $\{1\bullet a,3\bullet c\}\sim(1,0,3)$; $\{1\bullet a,1\bullet b,2\bullet c\}\sim(1,1,2)$; $\{2\bullet b,2\bullet c\}\sim(0,2,2)$; $\{1\bullet b,3\bullet c\}\sim(0,1,3)$; $\{1\bullet a,2\bullet b,2\bullet c\}\sim(1,2,2)$; $\{1\bullet a,1\bullet b,3\bullet c\}\sim(1,1,3)$; $\{2\bullet b,3\bullet c\}\sim(0,2,3)$; $\{1\bullet a,2\bullet b,3\bullet c\}\sim(1,2,3)$. Расстояния между подмультимножествами $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j\subseteq\boldsymbol{Z}$ заданы формулами $d_{Z1}(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j)=|\boldsymbol{A}_i\Delta\boldsymbol{A}_j|$, $d_{Z2}(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j)=|\boldsymbol{A}_i\Delta\boldsymbol{A}_j|/|\boldsymbol{Z}|$, $d_{Z3}(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j)=|\boldsymbol{A}_i\Delta\boldsymbol{A}_j|/|\boldsymbol{A}_i\cup\boldsymbol{A}_j|$. Элементы d_{ij} квадратных матриц D_{Zq} расстояний между подмультимножествами $\boldsymbol{A}_i$ и $\boldsymbol{A}_j$ определяются правилом $d_{ij}=d_{Zq}(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j)=d_{Zq}(\mathbf{c}_i,\mathbf{c}_j)$. Матрицы расстояний D_{Zq}, где для краткости записи опущены запятые между компонентами векторов $\mathbf{c}_i$, приведены ниже. Выделенные полужирным шрифтом элементы матриц D_{Zq} соответствуют элементам матриц D_{Xq} из примера 7.1. Матрицы расстояний D_{Z1} и D_{Z2} симметричны относительно поворота на 180º и относительно обеих своих диагоналей, а матрица D_{Z3} симметрична только относительно одной диагонали, состоящей из нулей. Заметим, что элементы матрицы D_{Z1} показывают также суммарную длину кратчайшего маршрута, соединяющего соответствующие вершины трехмерного параллелепипеда Λ_3, представляющего семейство мультимножеств $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z})$ и изображенного на рис.0.2, если расстояние между смежными вершинами параллелепипеда принять равным 1. ◘

При переходе от мультимножеств к множествам практически все свойства расстояний между мультимножествами совпадут с соответствующими свойствами расстояний между множествами. Однако в отличие от метрических пространств множеств X_{1p}, X_{2p} и X_{3p}, на всех метрических пространствах мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{1p}$, $\boldsymbol{Z}_{2p}$ и $\boldsymbol{Z}_{3p}$ расстояние между произвольным мультимножеством и его дополнением в общем случае уже не будет постоянным и равным диаметру

$\mathrm{D}_{Z1} =$

	(000)	(100)	(010)	(001)	(110)	(101)	(011)	(020)	(002)	(111)	(120)	(102)	(021)	(003)	(012)	(121)	(103)	(112)	(022)	(013)	(122)	(113)	(023)	(123)
(000)	**0**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	2	2	**3**	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6
(100)	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**1**	**3**	3	3	**2**	2	2	4	4	4	3	3	3	5	5	4	4	6	5
(010)	**1**	**2**	**0**	**2**	**1**	**3**	**1**	1	3	**2**	2	4	2	4	2	3	5	3	3	3	4	4	4	5
(001)	**1**	**2**	**2**	**0**	**3**	**1**	**1**	3	1	**2**	4	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5
(110)	**2**	**1**	**1**	**3**	**0**	**2**	**2**	2	4	**1**	1	3	3	5	3	2	4	2	4	4	3	3	5	4
(101)	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**0**	**2**	4	2	**1**	3	1	3	3	3	2	2	2	4	4	3	3	5	4
(011)	**2**	**3**	**1**	**1**	**2**	**2**	**0**	2	2	**1**	3	3	1	3	1	2	4	2	2	2	3	3	3	4
(020)	2	3	1	3	2	4	2	0	4	3	1	5	1	5	3	2	6	4	2	4	3	5	3	4
(002)	2	3	3	1	4	2	2	4	0	3	5	1	3	1	1	4	2	2	2	2	3	3	3	4
(111)	**3**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	3	3	**0**	2	2	2	4	2	1	3	1	3	3	2	2	4	3
(120)	3	2	2	4	1	3	3	1	5	2	0	4	2	6	4	1	5	3	3	5	2	4	4	3
(102)	3	2	4	2	3	1	3	5	1	2	4	0	4	2	2	3	1	1	3	3	2	2	4	3
(021)	3	4	2	2	3	3	1	1	3	2	2	4	0	4	2	1	5	3	1	3	2	4	2	3
(003)	3	4	4	2	5	3	3	5	1	4	6	2	4	0	2	5	1	3	3	1	4	2	2	3
(012)	3	4	2	2	3	3	1	3	1	2	4	2	2	2	0	3	3	1	1	1	2	2	2	3
(121)	4	3	3	3	2	2	2	2	4	1	1	3	1	5	3	0	4	2	2	4	1	3	3	2
(103)	4	3	5	3	4	2	4	6	2	3	5	1	5	1	3	4	0	2	4	2	3	1	3	2
(112)	4	3	3	3	2	2	2	4	2	1	3	1	3	3	1	2	2	0	2	2	1	1	3	2
(022)	4	5	3	3	4	4	2	2	2	3	3	3	1	3	1	2	4	2	0	2	1	3	1	2
(013)	4	5	3	3	4	4	2	4	2	3	5	3	3	1	1	4	2	2	2	0	3	1	1	2
(122)	5	4	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	4	2	1	3	1	1	3	0	2	2	1
(113)	5	4	4	4	3	3	3	5	3	2	4	2	4	2	2	3	1	1	3	1	2	0	2	1
(023)	5	6	4	4	5	5	3	3	3	4	4	4	2	2	2	3	3	3	1	1	2	2	0	1
(123)	6	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0

$D_{Z2} =$	(000)	(100)	(010)	(001)	(110)	(101)	(011)	(020)	(002)	(111)	(120)	(102)	(021)	(003)	(012)	(121)	(103)	(112)	(022)	(013)	(122)	(113)	(023)	(123)
(000)	0	1/6	1/6	1/6	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	5/6	5/6	5/6	1
(100)	1/6	0	1/3	1/3	1/6	1/6	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	5/6	5/6	2/3	2/3	1	5/6
(010)	1/6	1/3	0	1/3	1/6	1/2	1/6	1/6	1/2	1/3	1/3	2/3	1/3	2/3	1/3	1/2	5/6	1/2	1/2	1/2	2/3	2/3	2/3	5/6
(001)	1/6	1/3	1/3	0	1/2	1/6	1/6	1/2	1/6	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	2/3	2/3	2/3	5/6
(110)	1/3	1/6	1/6	1/2	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/6	1/6	1/2	1/2	5/6	1/2	1/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1/2	1/2	5/6	2/3
(101)	1/3	1/6	1/2	1/6	1/3	0	1/3	2/3	1/3	1/6	1/2	1/6	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	1/2	1/2	5/6	2/3
(011)	1/3	1/2	1/6	1/6	1/3	1/3	0	1/3	1/3	1/6	1/2	1/2	1/6	1/2	1/6	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	2/3
(020)	1/3	1/2	1/6	1/2	1/3	2/3	1/3	0	2/3	1/2	1/6	5/6	1/6	5/6	1/2	1/3	1	2/3	1/3	2/3	1/2	5/6	1/2	2/3
(002)	1/3	1/2	1/2	1/6	2/3	1/3	1/3	2/3	0	1/2	5/6	1/6	1/2	1/6	1/6	2/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	2/3
(111)	1/2	1/3	1/3	1/3	1/6	1/6	1/6	1/2	1/2	0	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	1/6	1/2	1/6	1/2	1/2	1/3	1/3	2/3	1/2
(120)	1/2	1/3	1/3	2/3	1/6	1/2	1/2	1/6	5/6	1/3	0	2/3	1/3	1	2/3	1/6	5/6	1/2	1/2	5/6	1/3	2/3	2/3	1/2
(102)	1/2	1/3	2/3	1/3	1/2	1/6	1/2	5/6	1/6	1/3	2/3	0	2/3	1/3	1/3	1/2	1/6	1/6	1/2	1/2	1/2	1/3	2/3	1/2
(021)	1/2	2/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/6	1/6	1/2	1/3	1/3	2/3	0	2/3	1/3	1/6	5/6	1/2	1/6	1/2	1/3	2/3	1/3	1/2
(003)	1/2	2/3	2/3	1/2	5/6	1/2	1/2	5/6	1/6	2/3	1	1/3	2/3	0	1/3	5/6	1/6	1/2	1/2	1/6	2/3	1/3	1/3	1/2
(012)	1/2	2/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/6	1/2	1/6	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3	0	1/2	1/2	1/6	1/6	1/6	1/3	1/3	1/3	1/2
(121)	2/3	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/6	1/6	1/2	1/6	5/6	1/2	0	2/3	1/3	1/3	2/3	1/6	1/2	1/2	1/3
(103)	2/3	1/2	5/6	1/2	2/3	1/3	2/3	1	1/3	1/2	5/6	1/6	5/6	1/6	1/2	2/3	0	1/3	2/3	1/3	1/2	1/6	1/2	1/3
(112)	2/3	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	1/6	1/2	1/6	1/2	1/2	1/6	1/3	1/3	0	1/3	1/3	1/6	1/6	1/2	1/3
(022)	2/3	5/6	1/2	1/2	2/3	2/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/6	1/2	1/6	1/3	2/3	1/3	0	1/3	1/6	1/2	1/6	1/3
(013)	2/3	5/6	1/2	1/2	2/3	2/3	1/3	2/3	1/3	1/2	5/6	1/2	1/2	1/6	1/6	2/3	1/3	1/3	1/3	0	1/2	1/6	1/6	1/3
(122)	5/6	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	1/6	1/2	1/6	1/6	1/2	0	1/3	1/3	1/6
(113)	5/6	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	5/6	1/2	1/3	2/3	1/3	2/3	1/3	1/3	1/2	1/6	1/6	1/2	1/6	1/3	0	1/3	1/6
(023)	5/6	1	2/3	2/3	5/6	5/6	1/2	1/2	1/2	2/3	2/3	2/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/6	1/6	1/3	1/3	0	1/6
(123)	1	5/6	5/6	5/6	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/6	1/6	1/6	0

$D_{Z3} =$	(000)	(100)	(010)	(001)	(110)	(101)	(011)	(020)	(002)	(111)	(120)	(102)	(021)	(003)	(012)	(121)	(103)	(112)	(022)	(013)	(122)	(113)	(023)	(123)
(000)	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(100)	1	0	1	1	1/2	1/2	1	1	1	2/3	2/3	2/3	1	1	1	3/4	3/4	3/4	1	1	4/5	4/5	1	5/6
(010)	1	1	0	1	1/2	1	1/2	1/2	1	2/3	2/3	1	2/3	1	2/3	3/4	1	3/4	3/4	3/4	4/5	4/5	4/5	5/6
(001)	1	1	1	0	1	1/2	1/2	1	1/2	2/3	1	2/3	2/3	2/3	2/3	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	4/5	4/5	4/5	5/6
(110)	1	1/2	1/2	1	0	2/3	2/3	2/3	1	1/3	1/3	3/4	3/4	1	3/4	1/2	4/5	1/2	4/5	4/5	3/5	3/5	5/6	2/3
(101)	1	1/2	1	1/2	2/3	0	2/3	1	2/3	1/3	3/4	1/3	3/4	3/4	3/4	1/2	1/2	1/2	4/5	4/5	3/5	3/5	5/6	2/3
(011)	1	1	1/2	1/2	2/3	2/3	0	2/3	2/3	1/3	3/4	3/4	1/3	3/4	1/3	1/2	4/5	1/2	1/2	1/2	3/5	3/5	3/5	2/3
(020)	1	1	1/2	1	2/3	1	2/3	0	1	3/4	1/3	1	1/3	1	3/4	1/2	1	4/5	1/2	4/5	3/5	5/6	3/5	2/3
(002)	1	1	1	1/2	1	2/3	2/3	1	0	3/4	1	1/3	3/4	1/3	1/3	4/5	1/2	1/2	1/2	1/2	3/5	3/5	3/5	2/3
(111)	1	2/3	2/3	2/3	1/3	1/3	1/3	3/4	3/4	0	1/2	1/2	1/2	4/5	1/2	1/4	3/5	1/4	3/5	3/5	2/5	2/5	2/3	1/2
(120)	1	2/3	2/3	1	1/3	3/4	3/4	1/3	1	1/2	0	4/5	1/2	1	4/5	1/4	5/6	3/5	3/5	5/6	2/5	2/3	2/3	1/2
(102)	1	2/3	1	2/3	3/4	1/3	3/4	1	1/3	1/2	4/5	0	4/5	1/2	1/2	3/5	1/4	1/4	3/5	3/5	2/5	2/5	2/3	1/2
(021)	1	1	2/3	2/3	3/4	3/4	1/3	1/3	3/4	1/2	1/2	4/5	0	4/5	1/2	1/4	5/6	3/5	1/4	3/5	2/5	2/3	2/5	1/2
(003)	1	1	1	2/3	1	3/4	3/4	1	1/3	4/5	1	1/2	4/5	0	1/2	5/6	1/4	3/5	3/5	1/4	2/3	1/3	2/5	1/2
(012)	1	1	2/3	2/3	3/4	3/4	1/3	3/4	1/3	1/2	4/5	1/2	1/2	1/2	0	3/5	3/5	1/4	1/4	1/4	2/5	2/5	2/5	1/2
(121)	1	3/4	3/4	3/4	1/2	1/2	1/2	1/2	4/5	1/4	1/4	3/5	1/4	5/6	3/5	0	2/3	2/5	2/5	2/3	1/5	1/2	1/2	1/3
(103)	1	3/4	1	3/4	4/5	1/2	4/5	1	1/2	3/5	5/6	1/4	5/6	1/4	3/5	2/3	0	2/5	2/3	2/5	1/2	1/5	1/2	1/3
(112)	1	3/4	3/4	3/4	1/2	1/2	1/2	4/5	1/2	1/4	3/5	1/4	3/5	3/5	1/4	2/5	2/5	0	2/5	2/5	1/5	1/5	1/2	1/3
(022)	1	1	3/4	3/4	4/5	4/5	1/2	1/2	1/2	3/5	3/5	3/5	1/4	3/5	1/4	2/5	2/3	2/5	0	2/5	1/5	1/2	1/5	1/3
(013)	1	1	3/4	3/4	4/5	4/5	1/2	4/5	1/2	3/5	5/6	3/5	3/5	1/4	1/4	2/3	2/5	2/5	2/5	0	1/2	1/5	1/5	1/3
(122)	1	4/5	4/5	4/5	3/5	3/5	3/5	3/5	3/5	2/5	2/5	2/5	2/5	2/3	2/5	1/5	1/2	1/5	1/5	1/2	0	1/3	1/3	1/6
(113)	1	4/5	4/5	4/5	3/5	3/5	3/5	5/6	3/5	2/5	2/3	2/5	2/3	2/5	2/5	1/2	1/5	1/5	1/2	1/5	1/3	0	1/3	1/6
(023)	1	1	4/5	4/5	5/6	5/6	3/5	3/5	3/5	2/3	2/3	2/3	2/5	2/5	2/5	1/2	1/2	1/2	1/5	1/5	1/3	1/3	0	1/6
(123)	1	5/6	5/6	5/6	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/6	1/6	1/6	0

соответствующего пространства, поскольку согласно формулам (0.48) для мультимножеств не выполняются соотношения $\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}} = \varnothing$. Действительно, из выражений (5.10), (5.29) и формул (8.03), (8.07) и (8.08) имеем

$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\overline{\boldsymbol{A}})]^{1/p}=[m(\boldsymbol{Z})-2m(\boldsymbol{A}\cap\overline{\boldsymbol{A}})]^{1/p}\neq[m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}=D_{Z1p}(\mathcal{S})$,
$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\overline{\boldsymbol{A}})/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}=[(m(\boldsymbol{Z})-2m(\boldsymbol{A}\cap\overline{\boldsymbol{A}}))/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}\neq 1=D_{Z2p}(\mathcal{S})$,
$d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\overline{\boldsymbol{A}})/m(\boldsymbol{A}\cup\overline{\boldsymbol{A}})]^{1/p}=[(m(\boldsymbol{Z})-2m(\boldsymbol{A}\cap\overline{\boldsymbol{A}}))/m(\boldsymbol{A}\cup\overline{\boldsymbol{A}})]^{1/p}\neq 1=D_{Z3p}(\mathcal{S})$.

Равенство расстояния $d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}})$ соответствующему диаметру $D_{Zqp}(\mathcal{S})$ в вышеприведенных соотношениях возможно только на таких пространствах мультимножеств, для которых $\boldsymbol{A}\cap\overline{\boldsymbol{A}}=\varnothing$.

8.4. Геометрические свойства расстояний между измеримыми мультимножествами. Расстояния между мультимножествами обладают также рядом геометрических свойств, которые можно соотнести с различными видами преобразований пространств $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ измеримых мультимножеств.

Т е о р е м а 8.4. *Основное расстояние* $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$ *между измеримыми мультимножествами при любом фиксированном целом числе* p:

инвариантно относительно «мягкого» сдвига на произвольное мультимножество

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z1p}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}); \tag{8.27}$$

инвариантно относительно «жесткого» сдвига на произвольное дизъюнктивное мультимножество

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z1p}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}), \tag{8.28}$$

где $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}=\varnothing$;

инвариантно относительно исключения общей части

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z1p}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}), \tag{8.29}$$

если выполняется условие $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$,

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z1p}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}), \tag{8.30}$$

если выполняется условие $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}$,

инвариантно относительно отображений

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z1p}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) = d_{Z1p}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = d_{Z1p}(\overline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{B}}), \tag{8.31}$$

где $\overline{\boldsymbol{A}}$ *– дополнение мультимножества* $\boldsymbol{A}$ *до мультимножества* $\boldsymbol{X}$;

эластично относительно растяжения мультимножеств

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = (1/h)^{1/p}d_{Z1p}(h\bullet\boldsymbol{A}, h\bullet\boldsymbol{B}), \tag{8.32}$$

где h *– положительное целое число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость выражений (8.27)-(8.32) легко выводится из определения (8.03) метрики $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$ с помощью свойств (5.01), (5.09)-(5.12) меры мультимножества и соответствующих свойств (0.53)-(0.60) операций над мультимножествами.

1°. Для произвольных мультимножеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ выполняется равенство

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})\Delta(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = [(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})]+[(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})] = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}.$$

Действительно, по определению операций сложения (0.17), вычитания (0.20) и пересечения (0.14) мультимножеств для функций кратности любого элемента $x\in G$ имеем:

$$k_{(A+C)-(B+C)} = k_A+k_C - \min(k_A+k_C, k_B+k_C) = \min(k_A-k_B,0) = k_{A-B}, \quad k_{(B+C)-(A+C)} = k_{B-A}.$$

Тогда

$$[d_{Z1p}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})]^p = m[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})\Delta(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})] = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p,$$

откуда сразу получается равенство (8.27).

2°. Если $\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}=\varnothing$, то $\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$. Тогда этот случай сводится к предыдущему, откуда сразу получается равенство (8.28).

3°. Если $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{B}$, и тогда выполняется равенство

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\Delta(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}) = [(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})]+[(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})] = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}.$$

Действительно, по определению операций вычитания (0.20) и пересечения (0.14) мультимножеств для функций кратности любого элемента $x\in G$ имеем:

$$k_{(A-C)-(B-C)} = k_A-k_C - \min(k_A-k_C,\, k_B-k_C) = \min(k_A-k_B,0) = k_{A-B},\quad k_{(B-C)-(A-C)} = k_{B-A}.$$

Тогда

$$[d_{Z1p}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})]^p = m(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p,$$

откуда сразу получается равенство (8.29).

Если $\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}$, то $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}$, и аналогично предыдущему пункту нетрудно убедиться, что выполняется равенство $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})\Delta(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}$. Тогда

$$[d_{Z1p}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})]^p = m(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p,$$

откуда сразу получается равенство (8.30).

4°. $$[d_{Z1p}(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B},\, \boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B})]^p = m[(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B})\Delta(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B})] = m(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}) - m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}) =$$
$$= m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p.$$
$$[d_{Z1p}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\, \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})]^p = m[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\Delta(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})] = m(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) + m(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) =$$
$$= m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p.$$
$$[d_{Z1p}(\overline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{B}})]^p = m(\overline{\boldsymbol{A}}\Delta\overline{\boldsymbol{B}}) = m[(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{A})\Delta(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{B})] = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p.$$

Отсюда сразу получаются равенства (8.31).

5°. Для произвольных мультимножеств из равенства (5.12) имеем

$$[d_{Z1p}(h\bullet\boldsymbol{A},\, h\bullet\boldsymbol{B})]^p = m[(h\bullet\boldsymbol{A},\, h\bullet\boldsymbol{B})] = hm(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = h[d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p.$$

Отсюда сразу получается равенство (8.32). ■

По сравнению с основным расстоянием $d_{X1}(A,B)=m(A\Delta B)$ между множествами у основного расстояния $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$ между мультимножествами отсутствуют свойства, аналогичные (7.28) инвариантности относительно «симметрического» сдвига на произвольное множество C и (7.32) инвариантности относительно исключения общей части C, лежащей между множествами A и B, то есть при $A\bigcap B\subseteq C\subseteq A\bigcup B$.

Расстояние $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$ имеет дополнительные особенности.

Т е о р е м а 8.5. *Основное расстояние $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$ между измеримыми мультимножествами*:

обладает свойством максиминной аддитивности относительно произвольного мультимножества

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z1}(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C}) + d_{Z1}(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}); \tag{8.33}$$

d-выпукло относительно мультимножества $\boldsymbol{C}$, находящегося между мультимножествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, то есть

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) + d_{Z1}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}) \tag{8.34}$$

при $\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Для произвольных мультимножеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ из свойств объединения, пересечения и симметрической разности мультимножеств имеем

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C}) + d_{Z1}(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}) =$$

$= m[(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C})\Delta(\boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C})] + m[(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C})\Delta(\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C})] =$
$= m(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C}) + m(\boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C}) - 2m[(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C})\bigcap(\boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C})] +$
$+ m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C}) + m(\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}) - 2m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}) =$
$= m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{C}) - m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C}) + m(\boldsymbol{B}) + m(\boldsymbol{C}) - m(\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}) - 2m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}) -$
$- 2m(\boldsymbol{C}) + 2m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}) + m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C}) + m(\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}) - 2m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}) =$
$= m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{B}) - 2m(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$

2°. Если $\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}$, то нетрудно убедиться, что для мультимножеств выполняется равенство $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{B})$. Тогда неравенство (5.30) превращается в равенство, и в силу свойства (5.01) сильной аддитивности меры мультимножества имеем:

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{C}) + m(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C}) = d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) + d_{Z1}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}). \ \blacksquare$$

У основных расстояний $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$ при $p\geq 2$ нет свойств максиминной аддитивности (8.33) и d-выпуклости (8.34) относительно мультимножества, находящегося между двумя другими мультимножествами.

Полностью усредненные расстояния между мультимножествами $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}$ по своим геометрическим свойствам почти ничем не отличаются от основных расстояний $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$ при всех числах $p\geq 1$, за исключением отсутствия у них свойства эластичности (8.32), которое заменяется свойством инвариантности относительно растяжения мультимножеств.

Т е о р е м а 8.6. *Полностью усредненное расстояние* $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z})]^{1/p}$ *между измеримыми мультимножествами при любом фиксированном целом числе* p:

инвариантно относительно «мягкого» сдвига на произвольное мультимножество

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z2p}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}); \qquad (8.35)$$

инвариантно относительно «жесткого» сдвига на произвольное дизъюнктивное мультимножество

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z2p}(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C}), \qquad (8.36)$$

где $\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}=\varnothing$;

инвариантно относительно исключения общей части

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z2p}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}), \qquad (8.37)$$

если выполняется условие $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}$,

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z2p}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}), \qquad (8.38)$$

если выполняется условие $\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}$,

инвариантно относительно симметричных отображений

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z2p}(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}) = d_{Z2p}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = d_{Z2p}(\overline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{B}}), \qquad (8.39)$$

где $\overline{\boldsymbol{A}}$ *– дополнение мультимножества* $\boldsymbol{A}$ *до мультимножества* $\boldsymbol{X}$;

инвариантно относительно растяжения мультимножеств

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z2p}(h\bullet\boldsymbol{A}, h\bullet\boldsymbol{B}), \qquad (8.40)$$

где h *– положительное целое число*;

обладает при p=1 *свойством максиминной аддитивности относительно произвольного мультимножества*

$$d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z2}(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C}) + d_{Z2}(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}); \qquad (8.41)$$

d-выпукло при p=1 относительно мультимножества C, находящегося между мультимножествами A и B, то есть

$$d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) + d_{Z2}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}), \qquad (8.42)$$

если $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$.

Доказательство. 1°-4°. Справедливость выражений (8.35)-(8.39) следует из определения (8.11) метрики $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})/d_{Z1p}(\varnothing,\boldsymbol{Z})$ и доказывается аналогично пунктам 2°-4° теоремы 8.4.

5°. Выражение (8.40) вытекает из определения (8.11) метрики d_{Z2p} и равенства (5.22):

$$d_{Z2p}(h\bullet\boldsymbol{A},\, h\bullet\boldsymbol{B}) = d_{Z1p}(h\bullet\boldsymbol{A},\, h\bullet\boldsymbol{B})/d_{Z1p}(h\bullet\varnothing,\, h\bullet\boldsymbol{Z}) = d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})/d_{Z1p}(\varnothing,\boldsymbol{Z}) = d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

6°-7°. Справедливость выражений (8.41), (8.42) следует из определения (8.06) метрики d_{Z2} и доказывается аналогично пунктам 1°, 2° теоремы 8.5. ■

Локально усредненные расстояния между мультимножествами $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$= =$[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})]^{1/p}$ обладают значительно меньшим числом геометрических свойств по сравнению с расстояниями $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ и $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

Теорема 8.7. *Локально усредненное расстояние $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$= =$[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})]^{1/p}$ между измеримыми мультимножествами при любом фиксированном целом числе p*:

инвариантно относительно симметричного отображения

$$d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z3p}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\, \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}); \qquad (8.43)$$

инвариантно относительно растяжения мультимножеств

$$d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z3p}(h\bullet\boldsymbol{A},\, h\bullet\boldsymbol{B}), \qquad (8.44)$$

где h – положительное целое число;

d-выпукло при p=1 и $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z3}(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) + d_{Z3}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\, \boldsymbol{B}). \qquad (8.45)$$

Доказательство. 1°. Справедливость выражения (8.43) следует из определения (8.12) метрики d_{Z3p} и равенства (8.31). Действительно,

$$d_{Z3p}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\, \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}) = \frac{d_{Z1p}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})}{d_{Z1p}[\varnothing,(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})]} = \frac{d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{d_{Z1p}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})} = d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

2°. Из определения (8.12) метрики d_{Z3p} и равенства (5.22) имеем соотношение (8.44):

$$d_{Z3p}(h\bullet\boldsymbol{A},h\bullet\boldsymbol{B}) = \frac{d_{Z1p}(h\bullet\boldsymbol{A},h\bullet\boldsymbol{B})}{d_{Z1p}[h\bullet\varnothing,(h\bullet\boldsymbol{A})\cup(h\bullet\boldsymbol{B})]} = \frac{d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{d_{Z1p}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})} = d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

3°. Согласно определению (8.07) метрики d_{Z3} и свойству (8.34) d-выпуклости метрики d_{Z1} при $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ имеем равенство (8.45):

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) + d_{Z3}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\, \boldsymbol{B}) =$$

$$= \frac{d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})}{d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})} + \frac{d_{Z1}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})}{d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})} = \frac{d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})} = d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}). \;\blacksquare$$

Локально усредненные расстояния $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})]^{1/p}$ при любых числах p не обладают свойством максиминной аддитивности. Метрика d_{Z3}, в отличие от метрик d_{Z1} и d_{Z2}, d-выпукла только относительно мультимножества, равного объединению мультимножеств. Заметим, что при условии $\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}$ для метрики d_{Z3} выполняется равенство:

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \alpha d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) + \beta d_{Z3}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}), \tag{8.46}$$

где $\alpha=m(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{C})/m(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B})$, $\beta=m(\boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C})/m(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B})$, $0<\alpha,\beta\leq 1$, $\alpha+\beta=1+m(\boldsymbol{C})/m(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B})$. Выражение (8.46) по форме совпадает с аналогичным равенством (7.38) для множеств.

При переходе от мультимножеств к множествам большая часть результатов теорем 8.4-8.7 совпадает с результатами аналогичных теорем 7.4-7.6. Вместе с тем метрики на пространствах мультимножеств имеют и ряд свойств, которые отличаются от свойств метрик на пространствах множеств. Геометрические особенности метрик d_{Z1}, d_{Z2} и d_{Z3} хорошо иллюстрируются матрицами расстояний D_{Z1}, D_{Z2} и D_{Z3} из примера 8.1.

8.5. Непрерывность метрик, порожденных мерой мультимножества. Исследуем поведение введенных выше метрик d_{Zqp}, порожденных мерой мультимножества, рассматривая их как функции, которые определены на прямом произведении $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ σ-алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ над мультимножеством $\boldsymbol{Z}$, или, что то же, на метрическом пространстве $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_W)$. Напомним, как и ранее, что согласно теоремам 1.4 и 1.5 только метрика

$$d_{W1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1) + d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_2),$$

задаваемая формулой (1.22), сохраняет метрическую выпуклость и гиперметричность пространства $\boldsymbol{W}_{qp}$. Поэтому для определенности именно метрику d_{W1} будем рассматривать в качестве метрики d_W. Напомним, кроме этого, что функции d_{Z1p}, d_{Z2p} и d_{Z3p} являются метриками лишь почти всюду на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$. Поэтому свойства расстояний между измеримыми мультимножествами будут проявляться только почти всюду на соответствующих пространствах.

Аналогично действительной функции двух множеств $f(A,B)$, определенной на метрическом пространстве $U_{qp}=(X_{qp}\times X_{qp}, d_{U1})$, будем говорить, что определенная на метрическом пространстве $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$ действительная функция двух мультимножеств $f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$:

непрерывна в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ *по переменной* $\boldsymbol{A}$, если предел функции $f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_0)$ в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ существует и выполняется равенство

$$\lim_{\boldsymbol{A}_n\to\boldsymbol{A}_0} f(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B}_0) = f(\lim_{\boldsymbol{A}_n\to\boldsymbol{A}_0} \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{B}_0). \tag{8.47}$$

непрерывна в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ *по переменным* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$, если предел функции $f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ существует и равен значению функции в этой точке

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{A}_n\to\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{B}_n\to\boldsymbol{B}_0}} f(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B}_n) = f(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0) = f(\lim_{\boldsymbol{A}_n\to\boldsymbol{A}_0} \boldsymbol{A}_n, \lim_{\boldsymbol{B}_n\to\boldsymbol{B}_0} \boldsymbol{B}_n); \tag{8.48}$$

На «языке δ-ε» непрерывность функции f в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех точек $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\boldsymbol{W}_{qp}$, удовлетворяющих условиям $d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_0)<\delta$ и $d_{Zqp}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}_0)<\delta$, выполняется неравенство

$$d_{\mathbb{R}}(f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}), f(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)) = |f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) - f(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)| < \varepsilon. \tag{8.49}$$

Функция f, непрерывная в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ по каждой из переменных, может и не быть непрерывной по совокупности всех своих переменных.

Точка $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$, в которой функция f не является непрерывной, назовем *точкой разрыва функции*. Если пределы функции f по каждой из переменных существуют в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$, равны друг другу и не равны $f(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$, то точка $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ называется *точкой устранимого разрыва*. Если пределы функции f по каждой из переменных существуют в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$, но не равны друг другу и/или значению функции f в этой точке, то точка $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ называется *точкой разрыва первого рода*. Если в точке $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ не существует предела функции f хотя бы по одной из переменных, то точка $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0)$ называется *точкой разрыва второго рода*.

Будем также говорить, что действительная функция мультимножеств f:

непрерывна по своим переменным на метрическом пространстве $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$, если она непрерывна в каждой точке $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ этого пространства;

кусочно непрерывна по своим переменным на метрическом пространстве $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$, если она непрерывна по всем переменным всюду на этом пространстве, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода;

равномерно непрерывна на метрическом пространстве $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех пар точек $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),(\boldsymbol{C},\boldsymbol{G})\in\boldsymbol{W}_{qp}$, удовлетворяющих условиям $d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})<\delta$ и $d_{Zqp}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{G})<\delta$, выполняется неравенство

$$d_{\mathbb{R}}(f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}), f(\boldsymbol{C},\boldsymbol{G})) = |f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) - f(\boldsymbol{C},\boldsymbol{G})| < \varepsilon; \tag{8.50}$$

равностепенно непрерывна на метрическом пространстве $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$, если неравенство (8.50) одновременно выполняется для всех функций f из некоторого семейства функций. Аналогично функциям двух переменных $f(x_1,x_2)$ нетрудно показать, что всякая равномерно непрерывная функция мультимножеств $f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ непрерывна. Обратное утверждение, в общем случае, неверно.

Как и в случае множеств, расстояния $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ и $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ между измеримыми мультимножествами обладают различными свойствами непрерывности на соответствующих метрических пространствах $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$ при любых числах $p\geq1$, хотя сама мера мультимножества является непрерывной функцией на полном пространстве $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$.

Т е о р е м а 8.8. *Основная метрика* $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$ *и полностью усредненная метрика* $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{X})]^{1/p}$ *являются непрерывными функциями, а локально усредненная метрика* $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})]^{1/p}$ – *кусочно непрерывной функцией своих переменных почти всюду на соответствующем метрическом пространстве* $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$ *при любом фиксированном целом числе* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Зафиксируем вначале, например, вторую переменную $\boldsymbol{B}$ и рассмотрим расстояния $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ и $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ как функции одной первой переменной $\boldsymbol{A}$. Пусть имеется произвольная последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств, сходящаяся при $n\to\infty$ почти всюду к некоторой точке $\boldsymbol{A}$ пространства $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$. Примем во внимание свойства (3.03), (3.06) сходящихся действительных функций, выражение (3.49) для предела $\boldsymbol{A}$ сходящейся почти всюду последовательности мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$, свойство

(5.17) непрерывности меры мультимножества. Тогда получаем следующие соотношения для расстояний d_{Z1p}, d_{Z2p} и d_{Z3p}:

$$\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} [d_{Z1p}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B})]^p = \lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{B}) = m[(\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_n)\Delta \boldsymbol{B}] = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p, \quad (8.51)$$

$$\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} [d_{Z2p}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B})]^p = \lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} [m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{X})] = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{X}) = [d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p, \quad (8.52)$$

$$\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} [d_{Z3p}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B})]^p = \lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} [m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}_n \cup \boldsymbol{B})] =$$
$$= [\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{B})]/[\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \boldsymbol{A}} m(\boldsymbol{A}_n \cup \boldsymbol{B})] = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = [d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]^p. \quad (8.53)$$

Последнее равенство (8.53) выполняется, если $m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\neq 0$, то есть также почти всюду на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{3p}=(\mathcal{S}, d_{Z3p})$, кроме мультимножеств меры нуль и точки $\boldsymbol{A}=\varnothing$, $\boldsymbol{B}=\varnothing$. Выполнение равенств (8.51)-(8.53) означает, что $d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B})\to d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ при $\boldsymbol{A}_n\to_{mes}\boldsymbol{A}$ или при $n\to\infty$ для любых q=1,2,3 и произвольно заданного целого числа $p\geq 1$, то есть расстояние $d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ непрерывно по одной из переменных при фиксированной другой переменной на соответствующем метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$.

2°. В силу равноправности выбора какой-либо переменной в качестве фиксированной из равенств (8.51), (8.52) сразу получаем условие (8.47) непрерывности расстояний d_{Z1p}, d_{Z2p} по каждой из переменных в точке $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ метрических пространств $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$ для произвольного числа p, а значит, и искомое условие (8.48) непрерывности расстояния в точке $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ по обеим переменным. В силу произвольности выбора точки $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ условие непрерывности расстояния по каждой из переменных выполняется во всех точках метрических пространств $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$, а значит, согласно теореме 3.10, метрики d_{Z1p} и d_{Z2p} непрерывны почти всюду на соответствующем метрическом пространстве $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$.

3°. Иначе обстоит дело с метрикой d_{Z3p}. Если последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$, либо последовательность мультимножеств $\{\boldsymbol{B}_n\}$ сходится почти всюду при $n\to\infty$ к пустому мультимножеству $\varnothing$, но при этом $\boldsymbol{A}_n\neq\varnothing$ и $\boldsymbol{B}=\varnothing$, либо $\boldsymbol{A}=\varnothing$ и $\boldsymbol{B}_n\neq\varnothing$, то из формулы (8.08) следует, что расстояния $d_{Z3p}(\boldsymbol{A}_n,\varnothing)=1$, $d_{Z3p}(\varnothing,\boldsymbol{B}_n)=1$, а значит, согласно формуле (8.53) и $\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \varnothing} d_{Z3p}(\boldsymbol{A}_n,\varnothing)=1$, $\lim_{\boldsymbol{B}_n \to_{mes} \varnothing} d_{Z3p}(\varnothing,\boldsymbol{B}_n)=1$. С другой стороны, по определению (8.09) расстояние $d_{Z3p}(\varnothing,\varnothing)=0$ при любом фиксированном числе $p\geq 1$. Поэтому

$$d_{Z3p}(\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \varnothing} \boldsymbol{A}_n, \lim_{\boldsymbol{B}_n \to_{mes} \varnothing} \boldsymbol{B}_n) = d_{Z3p}(\lim_{\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \varnothing} \boldsymbol{A}_n, \varnothing)= d_{Z3p}(\varnothing, \lim_{\boldsymbol{B}_n \to_{mes} \varnothing} \boldsymbol{B}_n) = 0.$$

Таким образом, условия (8.48) и (8.16) не выполняются. Метрика d_{Z3p} имеет разрыв первого рода по каждой из своих переменных в точках, где $\boldsymbol{A}=\varnothing$ или $\boldsymbol{B}=\varnothing$, и тем самым является кусочно непрерывной функцией на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{3p}=(\mathcal{S}, d_{Z3p})$ и $\boldsymbol{W}_{3p}=(\boldsymbol{Z}_{3p}\times\boldsymbol{Z}_{3p}, d_{W1})$ при любых целых числах p. Эта особенность отличает локально усредненное расстояние d_{Z3p} от непрерывных в «нуле» расстояний d_{Z1p} и d_{Z2p}. ■

Полагая в формулах (8.51), (8.52) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, получаем при $n\to\infty$ следующие соотношения для расстояний d_{Z1p} и d_{Z2p}:

$$\lim_{n\to\infty} d_{Z1p}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d_{Z2p}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}) = 0,$$

которые справедливы для любого мультимножества $\boldsymbol{A}$, в том числе и для $\boldsymbol{A}=\varnothing$. Таким образом, имеет место следующее

С л е д с т в и е 8.8.А. *Метрики* $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$ *и* $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})= =[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{X})]^{1/p}$ *при одном и том же значении* $p\geq 1$ *эквивалентны почти всюду на пространстве с полной мерой* $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$.

Для расстояний d_{Z1p} и d_{Z2p} выполняется аналогичная теореме 7.8

Т е о р е м а 8.9. *Метрики* $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$, $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})= =[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{X})]^{1/p}$ *являются равномерно непрерывными функциями своих переменных почти всюду на соответствующем метрическом пространстве* $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$ *при любом фиксированном целом числе p*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть расстояние d_{Z1p} не равномерно непрерывно на метрическом пространстве $\boldsymbol{W}_{1p}=(\boldsymbol{Z}_{1p}\times\boldsymbol{Z}_{1p}, d_{W1})$. Тогда, поскольку функция d_{Z1p} непрерывна почти всюду на пространстве $\boldsymbol{W}_{1p}$, для любого числа $\delta>0$ в пространстве $\boldsymbol{W}_{1p}$ найдутся точки $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ и $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{G})$ такие, что $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})<\delta$ и $d_{Z1p}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{G})<\delta$, но при некотором $\varepsilon>0$ условие (8.50) не выполняется, то есть

$$d_{\mathbb{R}}(d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}), d_{Z1p}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{G})) = |d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) - d_{Z1p}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{G})| \geq \varepsilon.$$

С другой стороны, принимая во внимание неравенство четырехугольника (1.19), имеем

$$|d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) - d_{Z1p}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{G})| \leq d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}) + d_{Z1p}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{G}) < 2\delta.$$

Полагая $2\delta=\varepsilon$, получаем противоречие со сделанным допущением. Аналогичным образом доказывается справедливость утверждения теоремы и для расстояния d_{Z2p}. ■

Так как условие (8.50) равномерной непрерывности функции мультимножеств выполняется для расстояний d_{Z1p} и d_{Z2p} одновременно при различных значениях $p\geq 1$, то справедливо

С л е д с т в и е 8.9.А. *Метрики* $d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})]^{1/p}$, $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})= =[m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{X})]^{1/p}$ *являются равностепенно непрерывными функциями своих переменных почти всюду на соответствующем метрическом пространстве* $\boldsymbol{W}_{qp}=(\boldsymbol{Z}_{qp}\times\boldsymbol{Z}_{qp}, d_{W1})$.

Итак, можно констатировать, что свойства расстояний d_{Z1p} и d_{Z2p} практически во всем совпадают друг с другом и отличаются от свойств расстояния d_{Z3p}. Усредненные метрики d_{Z2p} и d_{Z3p} ведут себя одинаково вблизи единицы алгебры $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ – максимального мультимножества $\boldsymbol{Z}$ – и по-разному вблизи «нуля» – пустого мультимножества $\varnothing$. При этом величина расстояния $d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ никогда не превосходит величину расстояния $d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. При переходе от мультимножеств к множествам результаты теорем 8.8, 8.9 переходят в результаты аналогичных теорем 7.7, 7.8.

8.6. Сходимость на пространстве измеримых мультимножеств. Понятия сходимости и предела последовательности мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$, введенные в разделе 3.7, никак не были связаны с понятием метрики. В метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ измеримых мультимножеств наличие такой связи естественно. Как и в случае последовательности множеств, будем говорить, что последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств *сходится* на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ *к пределу* $\boldsymbol{A}$ *по метрике* d_{Zqp}, порожденной мерой m, если последовательность действительных чисел $\{d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A})\}$ сходится к нулю, то есть, если $d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A})\to 0$ при $n\to\infty$ или

$$\lim_{n\to\infty} d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}) = 0. \tag{8.54}$$

Будем записывать это условие символически как $\boldsymbol{A}_n \to_d \boldsymbol{A}$. Определение (8.54) сходимости последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств по метрике d_{Zqp} по своему смыслу совпадает с определением (1.26) сходимости последовательности $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X,d) к пределу x_0 по метрике d и определением (7.46) сходимости последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств по метрике d_{Xqp}.

Как следует из теорем 8.1-8.3, функции d_{Zqp} являются метриками почти всюду на пространстве с полной мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$. Это означает, что сходимость последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ к пределу $\boldsymbol{A}$ по метрике d_{Zqp} будет сходимостью почти всюду, а в силу теоремы 5.5 одновременно и сходимостью по мере. В справедливости последнего утверждения легко убедиться и непосредственно, если учесть соотношения (8.51)-(8.53), условие (5.33) сходимости по мере и конечность мер мультимножеств. Тем самым на любом метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ из сходимости последовательности измеримых мультимножеств по метрике d_{Zqp} вытекает ее сходимость почти всюду и по мере m.

Обратное утверждение выполняется не всегда. Действительно, если, например, $\lim\limits_{n\to\infty} m(\boldsymbol{A}_n\Delta\varnothing)=0$, то есть $\boldsymbol{A}_n \to_{mes} \varnothing$ при $n\to\infty$, то, как было показано при доказательстве теоремы 8.8, для $\boldsymbol{B}=\varnothing$ $\lim\limits_{n\to\infty} d_{Z3p}(\boldsymbol{A}_n,\varnothing)=1$. Это значит, что на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{3p}=(\mathcal{S}, d_{Z3p})$ последовательность измеримых мультимножеств может сходиться к пределу по мере, но не сходиться по метрике d_{Z3p}. Тем самым сходимость последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств к пределу $\boldsymbol{A}$ на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ по метрике d_{Zqp} является иногда более сильным условием, чем сходимость почти всюду или по мере.

Воспользовавшись соотношением (8.54), определение (5.31) сходимости последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств к пределу $\boldsymbol{A}$ почти всюду на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ можно записать в виде

$$m(\{\boldsymbol{A}_n \mid \lim_{n\to\infty} d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A})\geq\varepsilon\}) = 0, \tag{8.55}$$

а определение (5.33) сходимости последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ по мере – как

$$\lim_{n\to\infty} m(\{\boldsymbol{A}_n \mid d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A})\geq\varepsilon\}) = 0 \tag{8.56}$$

для любого $\varepsilon>0$. При этом по следствию 5.5.A предел $\boldsymbol{A}$ последовательности измеримых мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$ также принадлежит пространству $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$.

Последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств, сходящиеся на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$, обладают практически такими же свойствами, что и сходящиеся последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств.

Т е о р е м а 8.10. *Всякая последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств, сходящаяся к пределу $\boldsymbol{A}$ на пространстве $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ по основной метрике d_{Z1p}, сходится к тому же пределу $\boldsymbol{A}$ на пространстве $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$ по полностью усредненной метрике d_{Z2p}, и наоборот.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно следует из определения (8.54) сходимости последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ мультимножеств к пределу $\boldsymbol{A}$ по метрике, эквивалентности метрик d_{Z1p}, d_{Z2p} и конечности меры $m(\boldsymbol{Z})$. ■

Эквивалентность и равномерная непрерывность метрик d_{Z1p} и d_{Z2p} на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$ порождает

С л е д с т в и е 8.10.А. *Для любого измеримого мультимножества $\boldsymbol{A}$ найдется последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств, равномерно сходящаяся к мультимножеству $\boldsymbol{A}$ на пространстве $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ по метрике d_{Z1p} и на пространстве $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$ по метрике d_{Z2p}.*

Отсюда вытекает равносильность определений (8.54)-(8.56) сходимости последовательности измеримых мультимножеств почти всюду, по мере m и по метрикам d_{Z1p} и d_{Z2p} на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$.

Последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств метрического пространства $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ будем называть *сходящейся в себе по метрике* или *d-фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что для всех номеров $n,l>N$ расстояние между мультимножествами $\boldsymbol{A}_n$ и $\boldsymbol{A}_l$ удовлетворяет неравенству

$$d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}_l) < \varepsilon, \tag{8.57}$$

которое равносильно условию $d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}_l)\to 0$ при $n,l\to\infty$ или

$$\lim_{n,l\to\infty} d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}_l) = 0. \tag{8.58}$$

Определение (8.58) d-фундаментальной последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств аналогично определению (1.29) фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X,d) и определению (7.50) d-фундаментальной последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств. Справедливо и утверждение, являющееся аналогом теорем 1.8 и 7.10.

Т е о р е м а 8.11. *Всякая последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств, сходящаяся на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ по метрике d_{Zqp}, является d-фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств сходится на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ к пределу $\boldsymbol{A}$ по метрике d_{Zqp}, то есть для любого $\varepsilon>0$ найдется число N такое, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство $d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A})<\varepsilon$. Тогда по аксиоме треугольника (1.03) для любых $n,l>N$ справедливо неравенство (8.57):

$$d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}_l) \le d_{Zqp}(\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}) + d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_l) < 2\varepsilon. \quad ■$$

Из теорем 5.7 и 8.11 имеем следующее

С л е д с т в и е 8.11.А. *Всякая d-фундаментальная последовательность* $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *измеримых мультимножеств является m-фундаментальной*.

Справедливость следствия 8.11.А легко установить и непосредственно. Действительно, если учесть определения метрик (8.10)-(8.12), то условие (5.34) m-фундаментальности последовательности $\{\boldsymbol{A}_n\}$ мультимножеств на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ вытекает из неравенства (8.57) и имеет вид:

$$m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}_l) = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_l)]^p < (\varepsilon)^p = \varepsilon_1.$$

$$m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}_l) = [m(\boldsymbol{X}) \cdot d_{Z2p}(\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_l)]^p = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_l)]^p < (\varepsilon)^p = \varepsilon_1.$$

$$m(\boldsymbol{A}_n \Delta \boldsymbol{A}_l) = [m(\boldsymbol{A}_n \cup \boldsymbol{A}_l) \cdot d_{Z3p}(\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_l)]^p = [d_{Z1p}(\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_l)]^p < (\varepsilon)^p = \varepsilon_1.$$

Обратное утверждение не всегда верно. Последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств может сходиться в себе по мере m, но не сходиться в себе по метрике d_{Zqp}, то есть быть m-фундаментальной и не быть d-фундаментальной.

Как было показано ранее, различные понятия сходимости равносильны только на метрических пространствах измеримых множеств $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$, метрики которых непрерывны. Отсюда, учитывая следствие 5.5.А, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения, в определенном смысле обратного теореме 8.11.

Т е о р е м а 8.12. *Всякая d-фундаментальная последовательность* $\{\boldsymbol{A}_n\}$ *измеримых мультимножеств сходится на метрическом пространстве* $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ *по метрике* d_{Zqp} *к пределу* $\boldsymbol{A}$, *являющемуся точкой этого же пространства*, *если метрика* d_{Zqp} *непрерывна на этом пространстве.*

Теоремы 8.11 и 8.12 представляют собой необходимые и достаточные условия выполнения обобщенного критерия сходимости на метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$ измеримых мультимножеств.

При переходе от мультимножеств к множествам свойства сходящихся последовательностей измеримых мультимножеств совпадут с соответствующими свойствами сходящихся последовательностей измеримых множеств.

8.7. Свойства метрических пространств измеримых мультимножеств. Рассмотрим метрические и топологические свойства метрических пространств $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ измеримых мультимножеств.

Инвариантность метрик d_{Z1p} и d_{Z2p} относительно сдвигов, выраженная формулами (8.27), (8.28) и (8.35), (8.36), и относительно исключения общей части, выраженная формулами (8.29), (8.30) и (8.37), (8.38), в каком-то смысле повторяет, хотя и не во всем, инвариантность метрик d_{X1p} и d_{X2p} на пространствах X_{1p} и X_{2p} измеримых множеств и характеризует определенную «однородность» метрических пространств $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$ измеримых мультимножеств. Равенства (8.31), (8.39) указывают на наличие различных видов симметрии пространств $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$. Свойство эластичности (8.32) присуще только метрическим пространствам мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{1p}$. В отличие от пространств множеств X_{1p} пространства мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{1p}$. неоднородны относительно «симметрического» сдвига на произвольное мультимножество и относительно исключения общей части, находящейся между двумя другими мультимножествами.

Наличие у метрик d_{Z1}, d_{Z2} и d_{Z3} d-выпуклости означает, что справедливо

С л е д с т в и е 8.6.А. *Метрические пространства* $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S},d_{Z1})$, $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S},d_{Z2})$ *и* $\boldsymbol{Z}_3=(\mathcal{S}, d_{Z3})$ *измеримых мультимножеств метрически выпуклы*.

Так как согласно теореме 8.8 любая последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств сходится почти всюду на пространствах $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S},d_{Z2p})$ к одному и тому же пределу $\boldsymbol{A}$, то выполняется

С л е д с т в и е 8.8.Б. *Метрические пространства* $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ *и* $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S},d_{Z2p})$ *измеримых мультимножеств и метрики* d_{Z1p}, d_{Z2p} *гомеоморфны*.

Гомеоморфизм пространств $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$ задается функцией $f(\boldsymbol{A})=m(\boldsymbol{A})/m(\boldsymbol{Z})$. Гомеоморфность метрик d_{Z1p} и d_{Z2p} вытекает из равенств (8.02), (8.11).

Учитывая выполнение обобщенного критерия сходимости для метрических пространств $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$ измеримых мультимножеств, из теорем 8.11 и 8.12 получаем

С л е д с т в и е 8.12.А. *Метрические пространства* $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ *и* $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$ *измеримых мультимножеств полны*.

Таким образом, понятия полноты метрических пространств $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$, $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$ измеримых мультимножеств и пространства с мерой $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$ совпадают, а метрики d_{Z1p} и d_{Z2p} являются полными.

Из полноты и гомеоморфности метрических пространств мультимножеств $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$ вытекает также

С л е д с т в и е 8.12.Б. *Метрические пространства* $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ *и* $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$ *измеримых мультимножеств являются топологически полными пространствами Бэра, а их метрики* d_{Z1p} *и* d_{Z2p} *– топологически эквивалентными*.

Справедливо и следующее утверждение.

Т е о р е м а 8.13. *Метрические пространства* $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S},d_{Z1p})$ *и* $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S},d_{Z2p})$ *измеримых мультимножеств сепарабельны*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 8.10.А на пространствах $\boldsymbol{Z}_{1p}$ и $\boldsymbol{Z}_{2p}$ для любого измеримого мультимножества $\boldsymbol{A}$, принадлежащего σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, существует сходящаяся к нему последовательность $\{\boldsymbol{A}_n\}$ измеримых мультимножеств. Это означает, что семейство мультимножеств $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_n\}$ является по определению всюду плотным в метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{1p}=(\mathcal{S}, d_{Z1p})$ или $\boldsymbol{Z}_{2p}=(\mathcal{S}, d_{Z2p})$. Среди семейств измеримых мультимножеств $\{\boldsymbol{A}_n\}$, всюду плотных в метрических пространствах $\boldsymbol{Z}_{1p}$ или $\boldsymbol{Z}_{2p}$, всегда можно найти счетное всюду плотное семейство мультимножеств, например, состоящее из одноэлементных мультимножеств (множеств) $\{x_n\}$ с мерами $m(\{x_n\})=q_n$, где неотрицательные рациональные числа q_n образуют сходящуюся последовательность $\{q_n\}$. ■

Воспользуемся теперь определением (5.06) вполне конечной (σ-конечной) меры мультимножества m, равенством $m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})+m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})$, вытекающим из равенств (5.09) и (5.10), формулами $k_{A\cup B}=\max(k_A,k_B)$, $k_{A\cap B}=\min(k_A,k_B)$, $k_{A\Delta B}=|k_A-k_B|$, выражающими объединение, пересечение и симметрическую разность мультимножеств через их функции кратности, и представим выражения (8.10)-(8.12) для расстояний на пространствах $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ в виде:

$$d_{Z1p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \left(\sum_{x_i \in G} w_i \,|\, k_A(x_i) - k_B(x_i) \,|\right)^{1/p}, \tag{8.59}$$

$$d_{Z2p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \left(\sum_{x_i \in G} w'_i \,|\, k_A(x_i) - k_B(x_i) \,|\right)^{1/p}, \quad w'_i = 1/\sum_{j=1}^{n} w_j\,, \tag{8.60}$$

$$d_{Z3p}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \left(\frac{\sum_{x_i \in G} w_i \,|\, k_A(x_i) - k_B(x_i) \,|}{\sum_{x_i \in G} w_i \max[k_A(x_i), k_B(x_i)]} \right)^{1/p}, \tag{8.61}$$

где домен $G=\{x_1,x_2,\ldots\}$ – соответственно конечное или счетное множество. Стоящее в знаменателе формулы (8.61) выражение можно записать также как

$$\max(k_A,k_B) = \min(k_A,k_B) + |k_A-k_B|.$$

Как и в случае пространств измеримых множеств, основная метрика d_{Z1} и полностью усредненная метрика d_{Z2} на пространствах измеримых мультимножеств $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$ и $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S}, d_{Z2})$ аналогичны метрикам Хемминга d_{R1} на n-мерном векторном пространстве $R^n{}_1=(\mathbb{R}^n,d_{R1})$ и пространстве $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{l1})$ ограниченных числовых последовательностей, которые заданы равенствами (6.02) и (6.12). Локально усредненная метрика d_{Z3} отчасти напоминает метрику d_s на пространстве $s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_s, d_s)$ равномерно сходящихся последовательностей, заданную равенством (6.20), и метрику d_S на пространстве $S=(S(T,\mathcal{S}, m),d_S)$ измеримых функций, определенную формулой (6.32), но не совпадает с ними, так как метрика d_{Z3}, как и для множеств, есть отношение сумм функций в отличие от метрик d_s и d_S, являющихся суммой или интегралом отношений функций. Степенные функции от основной метрики d_{Z1p} и усредненных метрик d_{Z2p} и d_{Z3p} при $p\geq 2$ не похожи ни на какие метрики других метрических пространств.

Сходство основной и полностью усредненной метрик с метриками Хемминга позволяет установить следующие важные факты.

Т е о р е м а 8.14. *Метрические пространства* $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$ *и* $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S}, d_{Z2})$ *измеримых мультимножеств, заданные на* σ*-алгебре мультимножеств* $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, *изометричны пространству* $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_{l1})$ *ограниченных числовых последовательностей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ – σ-алгебра измеримых мультимножеств $\boldsymbol{A}_j$, являющихся подмультимножествами некоторого мультимножества $\boldsymbol{Z}=\{k_Z(x_1)\bullet x_1,k_Z(x_2)\bullet x_2,\ldots\}$, $x_i\in G=\{x_1,x_2,\ldots\}$. Определим ограниченные числовые последовательности $Y_j=\{y_{j1},y_{j2},y_{j3},\ldots\}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, члены которых зададим по следующему правилу: $y_{ji}=f_j(x_i)=w_i k_{A_j}(x_i)$, где $w_i\geq 0$, $x_i\in G$, k_{A_j} – функция кратности мультимножества $\boldsymbol{A}_j$. Функция f задает взаимно однозначное отображение $f\colon\mathcal{S}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ метрического пространства $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$ измеримых мультимножеств в метрическое пространство $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_{l1})$ ограниченных числовых последовательностей. В таком случае каждой точке $\boldsymbol{A}_j$ пространства $\boldsymbol{Z}_1$ сопоставляется точка Y_j пространства l_1. При этом согласно формулам (6.12), (8.59) сохраняется расстояние между парами соответствующих точек этих пространств:

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{A}_h)=\sum_{x_i\in G} w_i\,|\,k_{A_j}(x_i)-k_{A_h}(x_i)\,|=\sum_{i=1}^{\infty}|\,y_{ji}-y_{hi}\,|=d_{l1}(Y_j,Y_h),$$

то есть отображение $f{:}\,\mathcal{S}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является изометрией. Изометрия пространства $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S},\,d_{Z2})$ измеримых мультимножеств и пространства $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\,d_{l1})$ ограниченных числовых последовательностей устанавливается аналогичным образом и определяется функцией $y_{ji}=f_j(x_i)=w'_i\,k_{A_j}(x_i)$, где $w'_i=1/\sum_{j=1}^{n} w_j$. ■

Как отмечено в разделе 6.2, n-мерный вектор $\mathbf{y}_i=(y_{i1},\ldots,y_{in})$ всегда можно представить как ограниченную последовательность вида $Y_i=\{y_{i1},\ldots,y_{in},0,0,\ldots\}$. В свою очередь семейство $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z})$ подмультимножеств конечного n-мерного мультимножества $\boldsymbol{Z}=\{k_Z(x_1)\bullet x_1,\ldots,k_Z(x_n)\bullet x_n\}$ является минимальной алгеброй над мультимножеством $\boldsymbol{Z}$. Учитывая это обстоятельство, получаем следующее

С л е д с т в и е 8.14.А. *Метрические пространства измеримых мультимножеств* $\boldsymbol{Z}^n{}_1=(\mathcal{P},\,d_{Z1})$ *и* $\boldsymbol{Z}^n{}_2=(\mathcal{P},\,d_{Z2})$, *определенные на семействе* $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z})$ *подмультимножеств n-мерного мультимножества* $\boldsymbol{Z}=\{k_Z(x_1)\bullet x_1,\ldots,\,k_Z(x_n)\bullet x_n\}$, *изометричны n-мерному векторному пространству* $R^n{}_1=(\mathbb{R}^n,\,d_{R1})$.

Как и в случае множеств, существует связь между пространствами измеримых мультимножеств и псевдометрическими пространствами с разрезной полуметрикой $\delta_X^{(A)}(x,y)$, заданной формулой (1.35). Из теоремы 6.3 и следствия 8.14.А вытекает

С л е д с т в и е 8.14.Б. *Метрические пространства измеримых мультимножеств* $\boldsymbol{Z}^n{}_1=(\mathcal{P},\,d_{Z1})$ *и* $\boldsymbol{Z}^n{}_2=(\mathcal{P},\,d_{Z2})$, *определенные на семействе* $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z})$ *подмультимножеств n-мерного мультимножества* $\boldsymbol{Z}=\{k_Z(x_1)\bullet x_1,\ldots,\,k_Z(x_n)\bullet x_n\}$, *изометричны конечному n-мерному пространству расстояний* (X,d_X), *в котором расстояние* d_X *является положительной линейной комбинацией m разрезных полуметрик вида* $d_X(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m} w_k\delta_X^{(A_k)}(x_i,x_j)$, *где* $w_k>0$, $A_k\subset X=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Для мультимножеств можно сформулировать еще один интересный результат. Напомним, что согласно определению k-ограниченная серия есть семейство мультимножеств $\mathcal{P}_{[k]}$ над доменом G, в котором на количество экземпляров каждого элемента x любого из мультимножеств $\boldsymbol{A}$ наложено ограничение $k_A(x)\leq k$. Другими словами, k-ограниченная серия $\mathcal{P}_{[k]}$ представляет собой семейство $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z}_{[k]})$ всех подмультимножеств универсума $\boldsymbol{Z}_{[k]}$, являющегося постоянным мультимножеством высоты k над доменом G. Тогда имеем

С л е д с т в и е 8.14.В. *Метрические пространства измеримых мультимножеств* $\boldsymbol{Z}_{[k]1}=(\mathcal{S}_{[k]},\,d_{Z1})$ *и* $\boldsymbol{Z}_{[k]2}=(\mathcal{S}_{[k]},\,d_{Z2})$, *заданные на σ-алгебре мультимножеств* $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z}_{[k]})$ *над постоянным мультимножеством* $\boldsymbol{Z}_{[k]}=\{k\bullet x_1,k\bullet x_2,\ldots\}$ *высоты k, изометричны пространству* $l_1=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\,d_{l1})$ *числовых последовательностей, ограниченных числом k.*

Из теоремы 8.14 следует, что пространства $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S},\,d_{Z1})$ и $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S},\,d_{Z2})$, $\boldsymbol{Z}_{[k]1}=(\mathcal{S}_{[k]},\,d_{Z1})$ и $\boldsymbol{Z}_{[k]2}=(\mathcal{S}_{[k]},\,d_{Z2})$, $\boldsymbol{Z}^n{}_1=(\mathcal{P},\,d_{Z1})$ и $\boldsymbol{Z}^n{}_2=(\mathcal{P},\,d_{Z2})$ измеримых мультимножеств являются изометрически вложимыми подпространствами пространства Лебега – интегрируемых (суммируемых) измеримых функций L_1=(L_1(T,$\mathcal{S}$, m), d_{L1}). В таком случае, исходя из установленных в главе 6 характеристик функциональных пространств, можно утверждать, что пространства $\boldsymbol{Z}_1$ и $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_{[k]1}$ и $\boldsymbol{Z}_{[k]2}$, $\boldsymbol{Z}^n{}_1$ и $\boldsymbol{Z}^n{}_2$ измеримых мультимножеств обладают метрическими и топологическими свойствами, одинаковыми со свойствами пространства ограниченных числовых последовательностей l_1 и n-мерного векторного пространства $R^n{}_1$. Поэтому получаем еще одно подтверждение того, что пространства $\boldsymbol{Z}_1$=($\mathcal{S}$, d_{Z1}) и $\boldsymbol{Z}_2$=($\mathcal{S}$, d_{Z2}), $\boldsymbol{Z}_{[k]1}$=($\mathcal{S}_{[k]}$, d_{Z1}) и $\boldsymbol{Z}_{[k]2}$=($\mathcal{S}_{[k]}$, d_{Z2}) *полны*, *сепарабельны*, *метрически выпуклы*, *локально компактны*, но *некомпактны*, а пространства $\boldsymbol{Z}^n{}_1$=($\mathcal{P}$, d_{Z1}) и $\boldsymbol{Z}^n{}_2$=($\mathcal{P}$, d_{Z2}) *всюду плотны*, *сепарабельны*, *неполны*, *некомпактны*, но *относительно компактны*, $l^n{}_1$-, $l^\infty{}_1$- и L_1-*вложимы*, *метрически выпуклы*, *гиперметричны*, а также, по-видимому, *связны, локально связны и отделимы*. Если положить меру мультимножества равной $m(\boldsymbol{A})=|\boldsymbol{A}|$, то пространство $\boldsymbol{Z}^n{}_1$ совпадает с n-мерной целочисленной решеткой $Z^n{}_{(+)1}$=($\mathbb{Z}_+{}^n$, d_{R1}), приведенной в примере 6.3. Вопрос о непосредственном доказательстве наличия тех или иных других свойств метрических пространств $\boldsymbol{Z}_{qp}$=($\mathcal{S}$, d_{Zqp}) измеримых мультимножеств пока остается открытым.

Метрические пространства $\boldsymbol{Z}_1$=($\mathcal{S}$, d_{Z1}) и $\boldsymbol{Z}_2$=($\mathcal{S}$,d_{Z2}), заданные на σ-алгебре $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ измеримых мультимножеств, представляют собой пополнения соответствующих пространств $\boldsymbol{Z}^n{}_1$=($\mathcal{P}$, d_{Z1}) и $\boldsymbol{Z}^n{}_2$=($\mathcal{P}$, d_{Z2}), заданных на семействе $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z})$ подмультимножеств конечного мультимножества $\boldsymbol{Z}$, а также метрических пространств $\boldsymbol{Z}'_1$=($\mathcal{K}_\sigma$, d'_{Z1}) и $\boldsymbol{Z}'_2$=($\mathcal{K}_\sigma$, d'_{Z2}), заданных на σ-кольце $\mathcal{K}_\sigma(\boldsymbol{Z})$ подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{Z}$. Последнее обстоятельство свидетельствует о существовании определенной взаимосвязи между стандартным продолжением меры мультимножества, определенным в разделе 5.3, и пополнениями метрических пространств измеримых мультимножеств.

Согласно теоремам 7.13 и 8.14 пространства X_1=($\mathcal{S}$, d_{X1}), X_2=($\mathcal{S}$, d_{X2}) измеримых множеств и $\boldsymbol{Z}_1$=($\mathcal{S}$, d_{Z1}), $\boldsymbol{Z}_2$=($\mathcal{S}$, d_{Z2}) измеримых мультимножеств обладают одинаковыми топологическими свойствами. Сопоставление результатов этих теорем и их следствий позволяет сделать еще один весьма важный вывод. Метрические пространства измеримых мультимножеств $\boldsymbol{Z}_1$=($\mathcal{S}$, d_{Z1}), $\boldsymbol{Z}_2$=($\mathcal{S}$, d_{Z2}), заданные на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, и $\boldsymbol{Z}^n{}_1$=($\mathcal{P}$, d_{Z1}), $\boldsymbol{Z}^n{}_2$=($\mathcal{P}$, d_{Z2}), определенные на семействе $\mathcal{P}(\boldsymbol{Z})$ подмультимножеств n-мерного мультимножества $\boldsymbol{Z}=\{k_Z(x_1)\bullet x_1,\ldots,k_Z(x_n)\bullet x_n\}$, топологически эквивалентны соответственно метрическим пространствам измеримых множеств X_1=($\mathcal{S}$, d_{X1}), X_2=($\mathcal{S}$, d_{X2}), заданным на σ-алгебре множеств $\mathcal{S}(X)$, и $X^n{}_1$=($\mathcal{P}$, d_{X1}), $X^n{}_2$=($\mathcal{P}$, d_{X2}), определенным на семействе $\mathcal{P}(X)$ подмножеств n-элементного множества $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

8.8. Аксиоматический подход к метризации пространств измеримых мультимножеств. Геометрические особенности метрических пространств $\boldsymbol{Z}_q$=($\mathcal{S}$, d_{Zq}) измеримых мультимножеств, как и в случае множеств, позволяют сформулировать условия, однозначно определяющие метрики на этих пространствах. Дополнительно к аксиоматике метрического пространства (1.01)-(1.03) потребуем, чтобы расстояние $d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ между измеримыми мультимножествами удовлетворяло следующим геометрическим условиям, связанным с взаимным расположением точек в пространстве и аналогичны требованиям (7.54), (7.55) для расстояний между множествами:

$$d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d(\varnothing,\boldsymbol{A}) - d(\varnothing,\boldsymbol{B}) \quad \text{при } \boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}, \tag{8.62}$$

$$d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d(\varnothing,\boldsymbol{A}) + d(\varnothing,\boldsymbol{B}) \quad \text{при } \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\varnothing. \tag{8.63}$$

Как и ранее, будем отождествлять расстояние $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ в пространстве измеримых мультимножеств $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$ с длиной соответствующего отрезка $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$. Тогда равенства (8.62) и (8.63) можно интерпретировать как аналоги обычных геометрических правил, определяющих длину отрезка $[a,b]$ в евклидовом пространстве. В первом случае отрезок $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ является общей частью вложенных друг в друга отрезков $[\varnothing,\boldsymbol{A}]$ и $[\varnothing,\boldsymbol{B}]$, имеющих общую «точку» $\varnothing$, а во втором случае – суммой соприкасающихся отрезков $[\varnothing,\boldsymbol{A}]$ и $[\varnothing,\boldsymbol{B}]$.

Аксиоматика метрического пространства (1.01)-(1.03), условие совпадения (1.34), условие (8.34) метрической выпуклости пространства измеримых мультимножеств и дополнительные геометрические требования (8.62), (8.63) являются необходимыми и достаточными условиями, которые однозначно определяют основную и полностью усредненную метрики (псевдометрики) $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$ и $d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z})$ на полном пространстве $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$.

Т е о р е м а 8.15. *Функция $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$, где m –аддитивная и вполне σ-конечная мера, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на полном пространстве $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$ тогда и только тогда, когда пространство $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$ метрически выпукло относительно мультимножества $\boldsymbol{C}$, находящегося между мультимножествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, а функция d_{Z1} удовлетворяет геометрическим условиям* (8.62), (8.63) *взаимного расположения точек пространства $\boldsymbol{Z}_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть m – мера, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$. Справедливость аксиом метрического пространства (1.01)-(1.03) и условия совпадения (1.34) для метрики (псевдометрики) $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$ доказана в теореме 8.1, а наличие свойства (8.34) метрической выпуклости пространства $\boldsymbol{Z}_1$ при $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ – в теореме 8.5. Выполнение требований (8.62), (8.63) для расстояния $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ непосредственно вытекает из его определения (8.01) и свойства (5.10) меры мультимножества. Необходимость условий теоремы доказана.

2°. Пусть d_{Z1} – метрика (псевдометрика) на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_1=(\mathcal{S}, d_{Z1})$, удовлетворяющая также условиям (8.34), (8.62) и (8.63). Для любых мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ всегда выполняются включения: $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$. Тогда в силу соотношения (8.62) можно записать:

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})-d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}),\quad d_{Z1}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}) = d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})-d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{B}).$$

С другой стороны, в силу условия (8.34) метрической выпуклости пространства $\boldsymbol{Z}_1$ для произвольных мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеем:

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) + d_{Z1}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}).$$

Отсюда получаем

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = 2d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) - d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}) - d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{B}). \tag{8.64}$$

Пусть мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются. В этом случае с учетом условия (8.63) равенство (8.64) принимает вид:

$$d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}) + d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{B}). \tag{8.65}$$

Обозначим

$$d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A}) = c_1 m(\boldsymbol{A}), \tag{8.66}$$

где $c_1>0$ и m – действительная функция, заданная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$. Так как расстояние $d_{Z1}(\varnothing,\boldsymbol{A})$ неотрицательно, то и m – неотрицательная функция, обладающая согласно равенству (8.65) свойством (5.03) аддитивности

$$m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{B})$$

для непересекающихся мультимножеств $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\varnothing$. Тем самым все требования, предъявляемые к функции m как к мере мультимножества, оказываются выполненными.

Подставляя формулу (8.66) в равенство (8.64) и учитывая соотношения (5.09), (5.10), получим:

$$d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = c_1[2m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) - m(\boldsymbol{A}) - m(\boldsymbol{B})] = c_1 m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}).$$

В метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_1$ диаметр σ-алгебры мультимножеств $D_{Z1}(\mathcal{S})$ равен согласно формуле (8.18) мере мультимножества $m(\boldsymbol{Z})$. Тогда из равенства (8.66) получаем для коэффициента $c_1=1$. Следовательно, расстояние $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ между измеримыми мультимножествами однозначно определяется выражением $d_{Z1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})$. Достаточность условий теоремы доказана. ■

Т е о р е м а 8.16. *Функция $d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z})$, где m – аддитивная и вполне σ-конечная мера, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на полном пространстве $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S}, m)$ тогда и только тогда, когда пространство $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S}, d_{Z2})$ метрически выпукло относительно мультимножества $\boldsymbol{C}$, находящегося между мультимножествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, а функция d_{Z2} удовлетворяет геометрическим условиям* (8.62), (8.63) *взаимного расположения точек пространства $\boldsymbol{Z}_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть m –мера, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$. Справедливость аксиом метрического пространства (1.01)-(1.03), условий совпадения (1.34) и нормировки (8.05) для метрики (псевдометрики) $d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z})$ доказаны в теореме 8.3, а наличие свойства (8.42) метрической выпуклости пространства $\boldsymbol{Z}_2$ при $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ – в теореме 8.6. Выполнение требований (8.62), (8.63) для расстояния $d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ непосредственно вытекает из его определения (8.06) и свойства (5.10) меры мультимножества. Необходимость условий теоремы доказана.

2°. Пусть d_{Z2} – метрика (псевдометрика) на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_2=(\mathcal{S}, d_{Z2})$, удовлетворяющая также условиям (8.42), (8.62), (8.63). Все приведенные выше рассуждения в доказательстве теоремы 8.15 остаются справедливыми и для метрики (псевдометрики) d_{Z2}, в том числе и равенство (8.65). Обозначим $d_{Z2}(\varnothing,\boldsymbol{A})=c_2 m(\boldsymbol{A})$, где $c_2>0$ и m – действительная функция, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$ и обладающая согласно равенству (8.65) свойством (5.03) аддитивности для непересекающихся мультимножеств $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\varnothing$. Учитывая, что на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_2$ диаметр σ-алгебры мультимножеств $D_{Z2}(\mathcal{S})=1$, получаем для коэффициента c_2 соотношение $c_2=1/m(\boldsymbol{Z})$. Таким образом, расстояние $d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ между измеримыми мультимножествами однозначно определяется выражением $d_{Z2}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z})$, где m – мера мультимножества. Достаточность условий теоремы доказана. ■

Пусть теперь выполняются аксиоматика метрического пространства (1.01)-(1.03), условие совпадения (1.34), условие (8.04) $d_Z(\varnothing,\varnothing)=0$, условие (8.45) метрической выпуклости пространства измеримых мультимножеств при $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\neq\varnothing$ и дополнительные геометрические требования

$$d_Z(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = 1 - [d_Z(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{B}})/d_Z(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}})] \quad \text{при } \boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}, \tag{8.67}$$

$$d_Z(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = 1 \quad \text{при } \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\varnothing. \tag{8.68}$$

совпадающие с аналогичными требованиям (7.59), (7.60) для расстояний между множествами. Покажем, что перечисленные выше требования являются необходимыми и достаточными условиями, однозначно определяющими локально усредненную метрику (псевдометрику) $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})$ на полном пространстве $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S},m)$.

Т е о р е м а 8.17. *Функция* $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})$, *где* m *– аддитивная и вполне* σ*-конечная мера, определенная на* σ*-алгебре мультимножеств* $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$, *является метрикой почти всюду (псевдометрикой) на полном пространстве* $(\boldsymbol{Z},\mathcal{S},m)$ *тогда и только тогда, когда пространство* $\boldsymbol{Z}_3=(\mathcal{S},d_{Z3})$ *метрически выпукло относительно мультимножества* $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\neq\varnothing$, *а функция* d_{Z3} *удовлетворяет условию* $d_{Z3}(\varnothing,\varnothing)=0$ *и геометрическим условиям* (8.67), (8.68) *взаимного расположения точек пространства* $\boldsymbol{Z}_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть m – мера, определенная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$. Справедливость аксиом метрического пространства (1.01)-(1.03), условий совпадения (1.34) и нормировки (8.05) для метрики (псевдометрики) $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})$ доказаны в теореме 8.3, а наличие свойства (8.45) метрической выпуклости пространства $\boldsymbol{Z}_3$ при $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\neq\varnothing$ – в теореме 8.7. Воспользовавшись равенствами (5.09) и (8.26), убедимся в выполнении требования (8.67) для расстояния $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. Действительно, при $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$ имеем:

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = [m(\boldsymbol{A})-m(\boldsymbol{B})]/m(\boldsymbol{A}) = 1 - [m(\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A})] = 1 - [d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{B}})/d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}})].$$

Требование (8.68) следует непосредственно из определения (8.07) метрики d_{Z3} и равенств (5.09), (5.10). Необходимость условий теоремы доказана.

2°. Пусть d_{Z3} – метрика (псевдометрика) на метрическом пространстве $\boldsymbol{Z}_3=(\mathcal{S},d_{Z3})$, удовлетворяющая также условиям (8.45), (8.67) и (8.68). Для любых мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ выполняются включения: $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$. Тогда в силу соотношения (8.67) при $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\neq\varnothing$ или $\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}\neq\boldsymbol{Z}$ можно записать:

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = 1 - [d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}})/d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}})],$$

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}) = 1 - [d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{B}})/d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}})].$$

С другой стороны, в силу условия (8.45) метрической выпуклости пространства $\boldsymbol{Z}_3$ при $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ для произвольных мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеем:

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) + d_{Z3}(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}).$$

Отсюда получаем

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = 2 - [(d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}})+d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{B}}))/d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}})]. \tag{8.69}$$

Пусть мультимножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются. В этом случае с учетом условия (8.68) равенство (8.69) принимает вид:

$$d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}) = d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}) + d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{B}}). \tag{8.70}$$

внешне аналогичный равенству (7.57). Обозначим

$$d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}}) = c_3 m(\boldsymbol{A}), \tag{8.71}$$

где $c_3>0$ и m – действительная функция, заданная на σ-алгебре мультимножеств $\mathcal{S}(\boldsymbol{Z})$. Так как расстояние $d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}})$ неотрицательно, то и m – неотрицательная функция, обладающая согласно равенству (8.70) свойством (5.03) аддитивности

$$m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{B})$$

для непересекающихся мультимножеств $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\varnothing$. Тем самым все требования, предъявляемые к функции m как к мере мультимножества, оказываются выполненными.

Подставляя формулу (8.71) в равенство (8.69) и учитывая соотношения (5.09), (5.10), получим:

$$d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = 2 - [(m(\boldsymbol{A})+m(\boldsymbol{B}))/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})] = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}).$$

Условие $d_{Z3}(\varnothing,\varnothing)=0$ вводится по определению (8.04). Следовательно, расстояние $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ между измеримыми мультимножествами однозначно определяется выражением $d_{Z3}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})$. Достаточность условий теоремы доказана. Полагая $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{B}=\overline{\boldsymbol{A}}=\varnothing$ и учитывая требование (8.68) имеем $d_{Z3}(\boldsymbol{Z},\overline{\boldsymbol{A}})=1$, а значит, из формулы (8.71) коэффициент $c_3=1/m(\boldsymbol{Z})$. В таком случае формула (8.71) совпадет с соотношением (8.26) при $p=1$. ■

При переходе от мультимножеств к множествам метрические пространства $\boldsymbol{Z}_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$ измеримых мультимножеств превращаются в соответствующие метрические пространства $X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$ измеримых множеств, а практически все результаты, полученные в главе 8, становятся результатами аналогичных теорем из главы 7.

Глава 9
Примеры практических применений

9.1. Способы представления многопризнаковых объектов. Выбор той или иной модели для представления рассматриваемых объектов и исследования структуры их связей определяется свойствами этих объектов, которые выражаются признаками (атрибутами) объектов. Признаки, характеризующие свойства объектов, могут быть непрерывными и дискретными, количественными и качественными, либо смешанными.

Обычно совокупность объектов представляется множеством точек в некотором многомерном (как правило, метрическом) пространстве, оси которого соотносятся с соответствующими признаками. В прикладных задачах в качестве такого пространства достаточно часто (но, заметим, не всегда обоснованно) выбирается пространство типа евклидового E^n с метриками d_{En} при различных значениях n, выраженными формулами (1.04)-(1.06). Задание расстояния между объектами позволяет оценивать близость или удаленность этих объектов относительно друг друга вне зависимости от их природы, исследовать структурные особенности совокупности объектов и всего пространства в целом.

Приведем несколько примеров практического применения рассмотренных выше типов метрических пространств. Упомянем в первую очередь теорию измерений, где важную роль играют различные способы приближения функции $x_0(t)$ с помощью последовательностей $\{x_k(t)\}$, сходящихся в метрических пространствах функций. Так, метрика Чебышева $d_C(x_k,x_0)$, задаваемая в пространстве непрерывных функций формулой (6.22), определяет максимальную ошибку измерения. Квадрат метрики Евклида $d_{L2}(x_k,x_0)$, задаваемой в пространстве интегрируемых функций формулой (6.29) при p=2, характеризует среднюю квадратичную ошибку, которой оценивается точность аппроксимации функции в методе наименьших квадратов.

В проблемах многокритериального принятия решений, распознавания образов, классификации, обработки разнородной информации, теории кодирования и других предметных областях рассматриваются совокупности объектов $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$, которые описываются m дискретными признаками $Q_1,\ldots,Q_m$, имеющими конечное число $q_s^{e_s}$, $e_s=1,\ldots,h_s$, $s=1,\ldots,m$ количественных (числовых) или качественных (номинальных, либо порядковых) значений. Порядковые значения качественного признака Q_s обычно предполагаются упорядоченными от лучшего значения к худшему $q_s^1 \succ q_s^2 \succ \ldots \succ q_s^{h_s}$. Каждый объект A_i, $i=1,\ldots,k$ из совокупности $\mathcal{A}$ можно представить как точку q_i в m-мерном векторном пространстве $Q=Q_1\times Q_2\times\ldots\times Q_m$, являющемся прямым произведением шкал значений признаков Q_s, и поставить объекту A_i в соответствие m-мерный вектор

$$q_i = (q_{i1}^{e_1}, q_{i2}^{e_2}, \ldots, q_{im}^{e_m}). \tag{9.01}$$

Ситуация существенным образом усложняется, если одному и тому же объекту A_i может соответствовать не один, а несколько m-мерных векторов с различающимися значениями признаков. Подобная ситуация возникает, например, когда необходимо одновременно учесть m параметров объекта A_i, измеренных n различными способами, либо когда объект A_i оценивается n независимыми экспертами по m критериям $Q_1,\ldots,Q_m$ [Петр01], [Petr01a-d]. В таком случае объект A_i представляется в m-мерном пространстве Q уже не одной точкой q_i, а группой (“облаком”), состоящей из n точек $\{q_i^{(1)},\ldots, q_i^{(n)}\}$ вида

$$A_i = \{(q_{i1}^{e_1(1)}, q_{i2}^{e_2(1)},\ldots, q_{im}^{e_m(1)}),\ldots,(q_{i1}^{e_1(n)}, q_{i2}^{e_2(n)},\ldots, q_{im}^{e_m(n)})\}, \qquad (9.02)$$

которая должна рассматриваться и анализироваться как единое целое. При этом, очевидно, измеренные разными способами значения параметров или индивидуальные оценки экспертов, могут быть похожими, различающимися и даже противоречивыми, что может приводить к несравнимости m-мерных векторов $q_i^{(j)}=(q_{i1}^{e_1(j)}, q_{i2}^{e_2(j)},\ldots, q_{im}^{e_m(j)})$, характеризующих один и тот же объект A_i.

Совокупность таких многомерных объектов может иметь в пространстве Q сложную структуру, достаточно трудную для анализа. Непросто ввести в этом пространстве и метрику для измерения расстояний между объектами. Одна из главных причин трудностей – множественность и повторяемость факторов, характеризующих объекты, которая обусловлена тем, что один и тот же объект может существовать в нескольких «копиях», различающихся между собой значениями признаков. При исследовании структуры и свойств подобного рода объектов необходимо одновременно учитывать большое количество вербальных и числовых данных и обрабатывать эти данные, не прибегая к дополнительным преобразованиям типа усреднения, смешивания, которые могут привести к необоснованным и необратимым искажениям исходных данных.

Указанные трудности можно преодолеть, воспользовавшись иным способом представления многопризнаковых объектов, основанным на формализме мультимножеств, который позволяет одновременно учесть все комбинации значений количественных и качественных признаков, а также число значений каждого из этих признаков [Петр94]. Вместо прямого произведения m шкал значений признаков $Q=Q_1\times Q_2\times\ldots\times Q_m$ введем обобщенную шкалу признаков – множество $G=\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_m\}$, состоящее из m групп признаков, и представим объект $\boldsymbol{A}_i\in\mathcal{A}$ в таком символическом виде:

$$\boldsymbol{A}_i = \{k_{Ai}(q_1^{\,1})\bullet q_1^{\,1},\ldots,k_{Ai}(q_1^{h_1})\bullet q_1^{h_1},\ldots,k_{Ai}(q_m^{\,1})\bullet q_m^{\,1},\ldots, k_{Ai}(q_m^{h_m})\bullet q_m^{h_m}\}, \qquad (9.03)$$

где число $k_{Ai}(q_s^{e_s})$ указывает, сколько раз признак $q_s^{e_s}\in Q_s$ встречается в описании объекта $\boldsymbol{A}_i$, знак • обозначает кратность вхождения признака $q_s^{e_s}$. Например, в случае многокритериальной оценки объекта $\boldsymbol{A}_i$ несколькими экспертами число $k_{Ai}(q_s^{e_s})$ равно числу экспертов, давших объекту $\boldsymbol{A}_i$ оценку $q_s^{e_s}$ по критерию Q_s. Объект $\boldsymbol{A}_i$ можно записать и более единообразно как

$$\boldsymbol{A}_i = \{k_{Ai}(x_1)\bullet x_1,\ldots,k_{Ai}(x_h)\bullet x_h\}, \qquad (9.04)$$

определив элементы множества $G=\{x_1,...,x_h\}$ следующим образом:

$$x_1=q_1^{\,1}, x_2=q_1^{\,2},\ldots,\ x_{h_1}=q_1^{h_1},\ x_{h_1+1}=q_2^{\,1},\ldots, x_{h_1+h_2}=q_2^{h_2},\ldots,$$

$$x_{h_1+\ldots+h_{m-1}+1}=q_m^{\,1},\ldots,\ x_{h_1+\ldots+h_m}=q_m^{h_m}, \qquad h=h_1+\ldots+h_m.$$

Множество G определяет свойства совокупности объектов $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$.

Приведем еще несколько аналогичных примеров из других предметных областей. Пусть $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$ является массивом текстовых документов по некоторой проблематике. Эти документы могут быть, к примеру, статьями, книгами, проектами, патентами, отчетами, обзорами и тому подобным [Петр94], [Petr97]. Предположим, что содержание документа отражается с помощью отдельных слов или так называемых лексических единиц – дескрипторов, ключевых слов, терминов и прочее. Множество $G=\{x_1,...,x_h\}$ таких лексических единиц образует тезаурус или проблемно-ориентированный терминологический словарь, характеризующий особенности проблематики. В этом случае каждый текстовый документ $\boldsymbol{A}_i$ можно рассматривать как совокупность повторяющихся лексических единиц x_j и представить его в виде (9.04), где $k_{Ai}(x_j)$ будет равно числу лексических единиц x_j, присутствующих в документе $\boldsymbol{A}_i$. Заметим, что представление документа формулой (9.04) может соответствовать и полному тексту документа, и некоторому краткому описанию его содержания, индексированному лексическими единицами.

Пусть теперь $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$ представляет собой коллекцию распознаваемых графических объектов: печатных или рукописных символов, линий, изображений, строк или страниц [Сла00], [АЛС02]. В ходе распознавания каждый распознаваемый объект $\boldsymbol{A}_i$ сравнивается с набором $G=\{x_1,...,x_h\}$ стандартных образцов целых символов или отдельных структурных элементов (фрагментов), составляющих в совокупности базу образцов, и относится к одному или нескольким образцам из стандартного набора с какой-то определенной точностью. Результат распознавания объекта $\boldsymbol{A}_i$ также можно выразить формулой (9.04), где число $k_{Ai}(x_j)$ будет соответствовать некоторой вычисленной оценке распознавания объекта $\boldsymbol{A}_i$ по отношению к стандартному образцу x_j.

В рассмотренных выше случаях объект (текстовый документ, распознаваемый символ) $\boldsymbol{A}_i$ характеризуется многими количественными и/или качественными признаками (измерениями, оценками по критериям, лексическими единицами, стандартными образцами) x_j. Различные признаки могут повторяться в описании объекта, и число $k_{Ai}(x_j)$ отражает кратность вхождения признака x_j в описание объекта $\boldsymbol{A}_i$. Иными словами, такие объекты и их совокупности суть множества с повторяющимися элементами или мультимножества, порожденные доменом $G=\{x_1,...,x_h\}$, и их следует представлять точками в метрических пространствах мультимножеств.

Соотношения между совокупностью объектов $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$ и множеством их признаков $G=\{x_1,...,x_h\}$ удобно выражать с помощью матрицы $\mathrm{C}=\|c_{ij}\|_{k\times h}$, которая часто используется в анализе данных, теории принятия решений, распознавании образов, других приложениях и называется таблицей «объекты-признаки», информационной таблицей или таблицей решений [Мир80], [PS94]. Строки этой матрицы соответствуют объектам, столбцы – признакам, а элементы матрицы являются значениями признаков. Таким образом, каждая строка матрицы C характеризует свойства рассматриваемого объекта, а каждый столбец дает информацию об объектах, обладающих данным свойством. Объекты, которые описываются многими количественными и/или качественными признаками и могут существовать в нескольких экземплярах представляются мультимножествами. Элементы матрицы C для таких многопризнаковых объектов задаются функциями кратности мультимножеств в виде $c_{ij}=k_{Ai}(x_j)$.

В различных прикладных задачах часто возникает необходимость сгруппировать анализируемые объекты, основываясь на их свойствах, выраженных признаками объектов. Формирование групп объектов по их свойствам служит полезным приемом при структурировании рассматриваемой проблемы. Существуют разнообразные методологические подходы к агрегированию объектов и выявлению их структуры. В формально-алгоритмических методах упор делается на построение эффективных процедур логической и статистической обработки массивов данных [Заг72], [Мир80], [БМ83], [АБЕМ89], [Заг99]. При экспертной структуризации взаимоотношения между объектами устанавливаются на основе предпочтений лиц, принимающих решения (ЛПР), и/или знаний экспертов [Лит82], [ЛМ96], [Ног02].

Новые типы операций над мультимножествами открывают новые возможности для группирования многопризнаковых объектов. Например, группа $\boldsymbol{X}_t$ объектов, представленных мультимножествами $\boldsymbol{A}_i$, может быть получена как сумма $\boldsymbol{X}_t=\sum_{i\in I_t}\boldsymbol{A}_i$, объединение $\boldsymbol{X}_t=\bigcup_{i\in I_t}\boldsymbol{A}_i$ или пересечение $\boldsymbol{X}_t=\bigcap_{i\in I_t}\boldsymbol{A}_i$ мультимножеств, описывающих объекты A_i. Тогда совокупность $\boldsymbol{X}_t$ объектов характеризуется матрицей C'=$\|c_{tj}'\|$, $c_{tj}'=k_t'(x_j)$, имеющей соответственно следующие элементы

$$k_t'(x_j)=\sum_{i\in I_t}k_i(x_j),\quad k_t'(x_j)=\max_{i\in I_t}k_i(x_j),\quad k_t'(x_j)=\min_{i\in I_t}k_i(x_j). \qquad (9.05)$$

Группа объектов может быть также сформирована как линейная комбинация различных мультимножеств вида $\boldsymbol{X}_t=\sum_{i\in I_t}h_i\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{X}_t=\bigcup_{i\in I_t}h_i\boldsymbol{A}_i$ или $\boldsymbol{X}_t=\bigcap_{i\in I_t}h_i\boldsymbol{A}_i$, $h_i>0$. В этих случаях элементы c_{tj}' соответствующих матриц C' будут включать в себя произведения $h_ik_i(x_j)$. При сложении объектов агрегируются все свойства x_j всех членов группы, что выражается первым соотношением в формуле (9.05). Когда группа образуется в результате объединения или пересечения объектов, происходит усиление самых лучших свойств (максимальных значений признаков x_j) или соответственно самых худших свойств (минимальных значений признаков x_j), присутствующих у индивидуальных членов группы.

Наличие разных возможностей для агрегирования многопризнаковых объектов требует уточнения понятия «класс», а сама проблема многопризнаковой классификации нуждается в более аккуратной постановке. Прежде, чем перейти к ее рассмотрению, напомним некоторые известные понятия.

Наиболее общим определением класса является следующее: класс – это совокупность (семейство) объектов, обладающих общими свойствами. Информация о свойствах объекта может быть получена путем наблюдений, измерений, оценок и тому подобное и представлена совокупностью признаков, значения которых выражаются в числовых и/или вербальных шкалах. Входящие в один и тот же класс объекты считаются неразличимыми (эквивалентными), а каждый класс объектов характеризуется некоторым качеством, отличающим его от других классов. Все классы вместе должны составлять исходную совокупность объектов.

Применяется два основных способа классификации объектов: так называемая *прямая классификация*, которая состоит в перечислении объектов, составляющих класс, и *непрямая классификация*, которая производится на основе перечисления свойств, характеризующих класс. Прямая классификация осуществляется непосредственным отнесением объектов в заданные классы. При непрямой классификации классы выделяются по некоторым признакам или их сочетаниям, которые определяют особенности, общие для каждого класса, и отличают классы друг от друга. Объекты, обладающие требуемыми значениями признаков, включаются в соответствующий класс. Классом могут быть, к примеру, наиболее близкие объекты, как в кластерном анализе; объекты, имеющие желаемую комбинацию качеств, как в задаче сортировки; объекты, свойства которых лежат в определенных границах, заданных в признаковом пространстве.

Результатом прямой классификации является зачисление каждого классифицируемого объекта в определенный класс, при этом максимально возможное число классов ограничено, очевидно, числом рассматриваемых объектов. Возникает проблема найти такие признаки, которые наиболее характерны для каждого класса и позволяют различить классы.

При непрямой классификации теоретически возможное число классов определяется мощностью декартового произведения множеств значений признаков. Когда число признаков и/или их значений достаточно велико, число потенциально возможных классов может существенно превысить число реально имеющихся объектов. Основная проблема в этом случае состоит в том, чтобы найти, какие комбинации признаков и их значений позволяют сформировать необходимое число классов, которые отличаются друг от друга по своим качествам и включают достаточное количество объектов.

Свойство сходства и различимости объектов, относящихся к одному и тому же классу, широко используется при построении различных методов классификации. Так, например, в ряде методов сортировки объектов, основанных на теориях нечетких множеств [Za65], [Kau77], [Орл81], [ZZG84] и грубых множеств [PS94], [Slo95], допускается неоднозначность классификации объектов, связанная с разной степенью принадлежности объекта к классу, то есть объекты, которые «несомненно» и «возможно» принадлежат к некоторому классу, считаются различающимися.

Структурирование рассматриваемой проблемы является важным предварительным этапом процесса ее анализа и решения. Изучение группировок объектов и возможных отношений между объектами, обусловленных их свойствами, которые выражаются набором признаков, позволяет глубже понять природу проблемы, а значит, и найти ее наилучшее решение.

9.2. Кластерный анализ объектов. Широко применяемым методом исследования естественных группировок большого числа объектов и связей между ними является *кластерный анализ* [Дор71], [And73], [SS73], [Ev74], [Hart75], [Jam78], в результате которого исходная совокупность объектов $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$ агрегируется в небольшое количество групп $\mathcal{A}=\{X_1,...,X_R\}$. В кластерном анализе объединение объектов в группы производится, исходя из их сходства или различия, которое оценивается степенью близости объектов в метрических пространствах признаков. Объекты рассматриваются как точки признакового пространства, а кластер традиционно формируется как теоретико-множественное объединение наиболее близких объектов. Таким образом, кластерный анализ относится к числу непрямых методов классификации.

Для того чтобы сгенерировать группы объектов, в алгоритмах кластерного анализа обычно используются следующие подходы: минимизировать различие (максимизировать сходство) между объектами внутри группы; максимизировать различие (минимизировать сходство) между группами объектов. Эти критерии формирования групп являются общими и для методов иерархической кластеризации, когда число получающихся классов заранее не известно, и при неиерархической кластеризации с заданным числом классов [Hart75].

Принципиальными моментами кластерного анализа являются: выбор выражения, определяющего расстояние между объектами в признаковом пространстве; выбор алгоритма группирования объектов; разумная интерпретация сформированных групп [And73], [Jam78]. Выбор вида пространства и типа метрики зависит от свойств анализируемых объектов. Для рассмотренных выше многопризнаковых объектов наиболее адекватно метрическое пространство измеримых мультимножеств ($\mathcal{A}$, d) с основным, полностью или локально усредненным расстоянием, заданным одной из формул (8.01), (8.06), (8.07).

Будем считать для простоты, что различие между разными объектами $\boldsymbol{A}_i$ внутри группы $\boldsymbol{X}_t$, между некоторым объектом $\boldsymbol{A}_i$ и группой объектов $\boldsymbol{X}_t$, между группами объектов $\boldsymbol{X}_t$, представленными как точки или группы точек в признаковом пространстве, определяется одинаковым образом. Подставляя в формулы (8.01), (8.06), (8.07) соответствующие соотношения (5.07) для меры мультимножества $m(\boldsymbol{A})$, (2.1.30) для максимального мультимножества $\boldsymbol{Z}$ и (2.2.2), (2.2.5), (2.2.13) для операций над мультимножествами, получим следующие выражения для расстояний между объектами, представленными мультимножествами:

$$d_1(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q) = D_{pq}; \quad d_2(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q) = D_{pq}/W; \quad d_3(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q) = D_{pq}/M_{pq}; \qquad (9.06)$$

Здесь

$$D_{pq} = \textstyle\sum_j w_j\,|k_p'(x_j) - k_q'(x_j)|; \qquad L_{pq} = \textstyle\sum_j w_j \min\,[k_p'(x_j),\, k_q'(x_j)];$$
$$W = \textstyle\sum_j w_j \sup k_t'(x_j); \qquad M_{pq} = \textstyle\sum_j w_j \max\,[k_p'(x_j),\, k_q'(x_j)],$$

а элементы $k_p'(x_j)$, $k_q'(x_j)$ определяются формулами (9.05). Заметим, что для величин D_{pq}, L_{pq} и M_{pq} выполняется равенство $D_{pq}+L_{pq}=M_{pq}$.

Основное расстояние d_1 есть расстояние типа Хемминга между объектами (группами объектов), традиционно используемое во многих приложениях. Полностью усредненное расстояние d_2 характеризует различие двух объектов (групп объектов), обусловленное свойствами, общими для всех объектов из анализируемой совокупности, а локально усредненное расстояние d_3 – различие, относящееся к свойствам только двух объектов (групп) из совокупности. Обсудим вкратце основные идеи различных разновидностей кластерного анализа в метрических пространствах мультимножеств [Petr94], [Петр95], [Петр01].

Рассмотрим общую схему процедуры *иерархической кластеризации* совокупности объектов $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$, представленных мультимножествами, когда число R генерируемых кластеров $\{X_1,...,X_R\}$ заранее не определено.

Шаг1. Положить $R=k$, где R – число кластеров, k – число объектов $\boldsymbol{A}_i$. Тогда каждый кластер $\boldsymbol{X}_i$ совпадает с некоторым объектом $\boldsymbol{A}_i$ для всех $i=1,...,R$.

Шаг 2. Вычислить расстояния $d(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q)$ между всеми возможными парами кластеров $\boldsymbol{X}_p$ и $\boldsymbol{X}_q$, $1\leq p,q\leq R$, $p\neq q$, используя одну метрик (9.06) метрического пространства мультимножеств.

Шаг 3. Найти пару наиболее близких кластеров $\boldsymbol{X}_u,\boldsymbol{X}_v$ таких, что

$$d(\boldsymbol{X}_u,\boldsymbol{X}_v) = \min_{p,q} d(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q), \tag{9.07}$$

и сформировать новый кластер путем сложения $\boldsymbol{X}_r=\boldsymbol{X}_u+\boldsymbol{X}_v$, объединения $\boldsymbol{X}_r=\boldsymbol{X}_u\bigcup\boldsymbol{X}_v$ или пересечения $\boldsymbol{X}_r=\boldsymbol{X}_u\bigcap\boldsymbol{X}_v$ мультимножеств по соответствующей формуле (9.05), или путем линейной комбинации одной из этих операций.

Шаг 4. Уменьшить число кластеров на единицу: $R=k-1$. Если $R=1$, то остановиться и вывести результат, например, в виде дендрограммы. Если $R>1$, перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Вычислить расстояния $d(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q)$ между новыми парами кластеров для всех $1\leq p\leq R$, $p\neq q\neq r$. Вернуться к шагу 3. ◙

Процесс иерархической кластеризации заканчивается, когда все объекты будут объединены в несколько классов или в один единственный класс. Процедура может быть также прервана на некотором шаге, когда индекс различия превысит некоторый пороговый уровень. Предложены методы оптимизации дендрограмм [Mi87], основанные на поиске удовлетворительного порогового уровня $d_{\text{opt}}(\boldsymbol{X}_u,\boldsymbol{X}_v)$ для расстояния, которые позволяют дать разумную интерпретацию сформированным группам объектов.

Характер образования кластеров и результаты процесса кластеризации в значительной мере определяется видом метрики d, используемой в критерии (9.07). Основная метрика d_1 и полностью усредненная метрика d_2 дают практически одинаковые результаты. В этом случае сначала происходит слияние «небольших» (имеющих небольшое число признаков) объектов, мало различающихся между собой, а затем начинается агрегирование более «крупных» объектов. Получающиеся в итоге группы более или менее сопоставимы по числу входящих в них объектов, но сильно отличаются друг от друга наборами характеризующих их признаков. Процесс кластеризации с локально усредненной метрикой d_3 начинается с группирования похожих объектов «среднего» и «большого» размеров, имеющих существенные «общие» наборы признаков, к которым постепенно присоединяются «небольшие» объекты, все более и более отличающиеся от ранее сформированных групп. Итоговые группировки объектов, полученные в первом и во втором случаях, могут различаться достаточно сильно.

Еще одна особенность процедуры иерархической кластеризации состоит в том, что, начиная с 3 шага, она может сильно ветвиться. Появляется много вариантов для дальнейшего слияния кластеров, так как имеется большое число эквивалентных пар кластеров $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$, находящихся в признаковом пространстве на одинаковом минимальном расстоянии, вычисленном по формуле (9.07). И, как следствие, в итоге могут сформироваться несовпадающие конечные группы объектов даже при использовании одной и той же метрики. Наименьшее число таких конечных групп возникает, если агрегирование объектов осуществляется путем сложения мультимножеств, наибольшее – при пересечении мультимножеств. Использование локально усредненной метрики d_3 порождает меньшее число точек ветвления алгоритма по сравнению с основной метрикой d_1 и полностью усредненной метрикой d_2.

Чтобы уменьшить число возможных комбинаций при выборе пар соединяемых кластеров, предлагается вместо единственного критерия близости кластеров (9.07) использовать несколько различных критериев [Литв00]. В этом случае модифицированный алгоритм иерархической кластеризации может выглядеть следующим образом.

Шаг 3.1. Найти все эквивалентные пары наиболее близких кластеров $\boldsymbol{X}_u$, $\boldsymbol{X}_v$, соответствующих условию (9.07), и с помощью одной из операций – суммирования, объединения или пересечения мультимножеств – сформировать новые кластеры $\boldsymbol{X}_{rl}$, l=1,…,g для всех g эквивалентных пар кластеров.

Шаг 3.2. Найти кластер $\boldsymbol{X}_r^{\#}$, минимизирующий некоторый дополнительный критерий, например, компактность кластера, выражаемая функционалом

$$K(\boldsymbol{X}_r^{\#}) = \min_l \sum\nolimits_{i,p \in I_{rl}} d(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_p) / N_{rl}, \tag{9.08}$$

где N_{rl} равно числу объектов $\boldsymbol{A}_i$ в кластере $\boldsymbol{X}_{rl}$. Перейти к шагу 4.

Эксперименты показали, что добавление к критерию (9.07) близости кластеров дополнительных критериев позволяет существенно улучшить результаты, получаемые при иерархической кластеризации мультимножеств для всех способов образования кластеров.

В методах *неиерархического кластерного анализа* число кластеров R считается фиксированным и заданным заранее. В алгоритмах кластеризации [And73] часто используется понятие центра $\boldsymbol{A}_t^{\circ}$ кластера $\boldsymbol{X}_t$ (t=1,...,R), который находится как решение задачи минимизации некоторого функционала от расстояния, например, следующего вида:

$$J(\boldsymbol{A}_t^{\circ}, \boldsymbol{X}_t) = \min_p \sum\nolimits_{i \in I_t} d(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_p), \tag{9.09}$$

где $d(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_p)$ – расстояние типа (9.06) между объектами $\boldsymbol{A}_i$ и $\boldsymbol{A}_p$ в метрическом пространстве мультимножеств ($\mathcal{A}$, d). Функционал $J(\boldsymbol{A}_t^{\circ},\boldsymbol{X}_t)$ по своему смыслу близок критерию $K(\boldsymbol{X}_r^{\#})$ компактности кластера (9.08) и характеризует своего рода «кучность» распределения объектов в признаковом пространстве. Заметим, что в нашем случае центр $\boldsymbol{A}_t^{\circ}$ кластера $\boldsymbol{X}_t$ может совпадать с одним из реально имеющихся объектов $\boldsymbol{A}_i$ из совокупности $\mathcal{A}$, или быть так называемым «фантомным» объектом, сконструированным в виде (9.04) из признаков x_j, но реально отсутствующим в исходной совокупности объектов $\mathcal{A}$.

Обобщенная схема неиерархической кластеризации совокупности объектов $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$, представленных мультимножествами, включает следующие основные этапы.

Шаг 1. Выбрать некоторое начальное разбиение совокупности объектов $\mathcal{A}$ на R кластеров $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{X}_1,...,\boldsymbol{X}_R\}$.

Шаг 2. Распределить все объекты $\boldsymbol{A}_i$ по кластерам $\boldsymbol{X}_t$ (t=1,...,R) в соответствии с некоторым правилом. Например, вычислить расстояния $d(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{X}_t)$ между каждым объектом $\boldsymbol{A}_i$ и кластерами $\boldsymbol{X}_t$ по одной из формул (9.06), и поместить объект $\boldsymbol{A}_i$ в ближайший из кластеров $\boldsymbol{X}_n$, задаваемый условием

$$d(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{X}_n) = \min_{1\le t\le R} d(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{X}_t).$$

Или определить центр $\boldsymbol{A}_t{}^\circ$ для каждого кластера $\boldsymbol{X}_t$, решив уравнение (9.09), и поместить каждый объект $\boldsymbol{A}_i$ в кластер с ближайшим центром $\boldsymbol{A}_s{}^\circ$, который определяется условием

$$d(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_s{}^\circ) = \min_{1\le t\le R} d(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_t{}^\circ).$$

Шаг 3. Если после распределения всех объектов $\boldsymbol{A}_i$ по кластерам $\boldsymbol{X}_t$ объекты не изменят своей кластерной принадлежности, заданной первоначальным разбиением, то остановиться и вывести результат. В противоположном случае вернуться к шагу 2. ◙

Результаты классификации объектов можно оценить качеством разбиения, заданным в виде некоторого функционала [АБЕМ89], [Hart75]. В частности, наилучшее разбиение $\boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}}$ может быть найдено как решение следующей оптимизационной задачи:

$$H(\boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}}) = \min\sum_{t=1}^{R} J(\boldsymbol{A}_t^\circ, \boldsymbol{X}_t)\,, \qquad (9.10)$$

где функционал $J(\boldsymbol{A}_i{}^\circ, \boldsymbol{X}_t)$ определяется, например, выражением (9.09). В общем случае решение задачи (9.10) неоднозначно, поскольку функционал $H(\boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}})$ качества разбиения является функцией, имеющей много локальных экстремумов. Конечный результат зависит, кроме того, и от первоначального (близко или далеко от оптимального) распределения объектов по классам.

Часто в процедурах кластеризации вместо расстояния d между объектами, характеризующего их различия, используются разнообразные показатели сходства объектов s. Можно задать следующие показатели (индексы) сходства объектов, представленных мультимножествами:

$$s_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = 1-m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z});\;\; s_2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{Z});\;\; s_3(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})/m(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}).$$

Функции s_1, s_2, s_3 обобщают на случай мультимножеств известные индексы сходства объектов, такие как соответственно коэффициент простой согласованности, мера сходства Рассела-Рао, коэффициент Жаккара или мера Роджерса-Танимото [RT60], [Go71], [And73], [SS73], [Jam78].

Коэффициент простой согласованности s_1 и мера сходства Рассела-Рао s_2 связаны соотношением

$$s_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = s_2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) + s_2(\overline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{B}}),$$

которое представляет собой одно из возможных бинарных разложений максимального мультимножества $\boldsymbol{Z}$ на блоки, являющиеся покрытиями и перекрытиями, образованными мультимножествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и их дополнениями [Петр00].

Показатели сходства s_1, s_2, s_3 можно записать в виде, аналогичном формулам (9.06), как

$$s_1(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q) = 1-(D_{pq}/W);\quad s_2(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q) = L_{pq}/W;\quad s_3(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q) = L_{pq}/M_{pq}. \qquad (9.11)$$

При использовании в процедурах кластеризации одного из индексов сходства объектов $s(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q)$ вида (9.11) условие $\min d(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q)$ следует всюду в соответствующих выражениях заменить условием $\max s(\boldsymbol{X}_p,\boldsymbol{X}_q)$.

При решении практических задач может быть полезным следующий прием. Вначале производится иерархическая кластеризация исходной совокупности объектов, и формируются несколько возможных разбиений объектов. Эти разбиения затем анализируются неиерархическими методами, и находится наилучшее или наиболее приемлемое из разбиений.

В ряде случаев возникает необходимость решить обратную задачу кластерного анализа, например, построить классификацию множества $G=\{x_1,...,x_h\}$ свойств объектов, используя совокупность объектов $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$. Или требуется одновременно расклассифицировать и объекты, и их свойства. В последнем случае применяются методы двойной классификации [And73] и строятся две последовательности $\{X_1,...,X_R\}$ групп объектов и $\{G_1,...,G_L\}$ групп свойств. Содержательную интерпретацию полученных группировок можно дать, например, с помощью многомерного шкалирования [АБЕМ89]. При этом, однако, могут возникнуть ситуации, особенно если множество G свойств объектов состоит из элементов разного «качества» (как в рассмотренном ранее случае объектов, оцененным по многим качественным критериям), когда содержательная интерпретация отдельных кластеров свойств G_q окажется затруднительной.

9.3. Классификация объектов. Процедура классификации объектов в рамках формальной логики может быть описана как совокупность (последовательность) решающих правил, которые представляются выражениями вида:

$$\text{ЕСЛИ } \langle\text{условия}\rangle\text{, ТО } \langle\text{решение}\rangle. \tag{9.12}$$

При прямой классификации терм ⟨условия⟩ включает названия объектов или перечень значений признаков, описывающих объекты класса, что часто считается эквивалентным. При непрямой классификации один или несколько термов ⟨условия⟩ конструируются как отношения между различными признаками и/или их значениями. Терм ⟨решение⟩ в обоих случаях означает, что объект принадлежит к определенному классу. Заметим, что подобным образом формируются и базы знаний экспертных систем продукционного типа.

При достаточно небольшом числе классифицируемых объектов и признаков, их описывающих, семейство решающих правил легко обозримо и доступно для анализа. Чем больше количество рассматриваемых объектов и разнообразнее решающее правила их классификации, тем труднее становится анализ этих правил. Могут существовать различные причины, обусловливающие неоднозначность классификации, к примеру, если объекты сортируются разными экспертами. Эксперты могут относить сильно различающиеся объекты в один и тот же класс, а объекты со сходными значениями признаков – в разные классы. Несогласованность индивидуальных решающих правил может быть вызвана неоднозначностью понимания экспертами решаемой задачи, ошибками или неточностями, допущенными экспертами при первоначальной классификации объектов, субъективным различием решающих правил, используемых разными экспертами, специфичностью знаний самих экспертов, нетранзитивностью отдельных экспертных суждений и многими другими причинами.

В итоге могут появиться решающие правила, среди которых будут одинаковые, сходные, различающиеся и противоречивые правила. В этом случае возникает проблема: построить такое обобщенное решающее правило или небольшую группу правил, которые наилучшим (в некотором смысле) образом аппроксимируют совокупность всех индивидуальных правил сортировки объектов, включают минимальный набор признаков и относят объекты в заданные классы с допустимой точностью [Petr01a-d].

Рассмотрим одну из практических задач, в которой, исходя из некоторой предварительной сортировки совокупности многопризнаковых объектов, требуется распределить эти объекты по нескольким классам. Нередко для решения какой-либо важной проблемы (научно-технической, экономической, производственной, экологической) создается программа, которая состоит из отдельных работ, проектов, заданий и тому подобное. Примером такого рода проблемы может служить высокотемпературная сверхпроводимость, для изучения которой была сформирована государственная научно-техническая программа [ЛППСШ89]. Общее руководство разработкой и реализацией программы осуществлял научный совет. Формирование программы проводилось на основе конкурсного отбора предложений. На конкурс было представлено более 250 предложений на выполнение исследований и разработок, которые нужно было разделить на группы, в той или иной степени отвечающие целям программы и им не соответствующие. Для этого по основным разделам программы были образованы конкурсные комиссии из числа наиболее компетентных ученых, которые проводили экспертную оценку и предварительный отбор заявок.

Заявка на участие в конкурсе включала в себя сведения об исполнителях проекта, содержании предлагаемой работы и ожидаемых результатах. Несколько экспертов оценивали каждую заявку по специально разработанным качественным критериям и предлагали принять или отклонить ее. Экспертиза заявок осуществлялась экспертами независимо друг от друга без согласования их мнений. Основываясь на заключениях экспертов, конкурсная комиссия после совместного обсуждения заявок давала рекомендации о включении того или иного проекта в соответствующий раздел программы. Каждая из конкурсных комиссий принимала такое решение самостоятельно, руководствуясь своими собственными соображениями о необходимости принятия или отклонения заявки. Окончательное решение по отбору проектов и формированию программы в целом принимал научный совет, который на практике внес лишь незначительные коррективы в предложения конкурсных комиссий. Всего было отобрано около 170 проектов для включения в программу.

Экспертная оценка и конкурсный отбор проектов проводился по следующим качественным критериям: Q_1. Важность проекта для программы; Q_2. Перспективность проекта; Q_3. Новизна подхода к решению поставленных задач; Q_4.Квалификация исполнителей проекта; Q_5. Ресурсное обеспечение работ; Q_6.Возможность быстрого выхода результатов в практику.

Каждый критерий имел порядковую или номинальную шкалу оценок с развернутыми словесными формулировками градаций качества. Так, шкала критерия Q_4. «Квалификация исполнителей проекта» имела вид:

q_4^1 – по опыту и квалификации исполнители проекта являются одним из лучших научных коллективов;

q_4^2 – опыт и квалификация исполнители находятся на уровне, достаточном для проведения работ;

q_4^3 – исполнители не обладают необходимыми опытом и квалификацией;

q_4^4 – опыт и квалификация исполнителей неизвестны.

Шкала оценок по критерию Q_6. «Возможность быстрого выхода результатов в практику» выглядела следующим образом:

q_6^1 – результаты будут обладать достаточной степенью технологичности, обеспечивающей их быстрое использования в практике;

q_6^2 – для использования запланированных результатов на практике потребуются дополнительные исследования и разработки;

q_6^3 – результаты будут носить в основном теоретический характер.

Каждый эксперт, наряду с оценкой заявки по всем критериям, давал одну из следующих рекомендаций:

r_1 – включить проект в программу;

r_2 – отклонить проект;

r_3 – отложить рассмотрение заявки и отправить проект на доработку.
Указанные рекомендации экспертов являются, по существу, правилами предварительной классификации (сортировки) рассматриваемых заявок. В других задачах критерии оценки объектов и правила их сортировки могут быть и иными.

Если бы заявка оценивалась только одним экспертом, то не составляло бы особого труда найти на множестве многокритериальных оценок обобщенное решающее правило для отбора предложений. Известно большое число разных подходов к решению подобного рода задач классификации, например, [Дор71], [Тюр79], [Лит82], [ЛМ96], [GMS98], [Сол99]. Однако когда заявка рассматривается несколькими экспертами, то появляется несколько различных вариантов («экземпляров») одной и той же заявки, поскольку и многокритериальные экспертные оценки, и заключения экспертов могут быть как схожими, так и противоречивыми. В силу качественного характера экспертных данных их агрегирование тем или иным способом представляет самостоятельную, достаточно сложную проблему. Помимо этого, вырабатывая решение о включении заявки в программу, необходимо учесть все, даже и не совпадающие заключения экспертов по принятию или отклонению заявки, а также рекомендации конкурсных комиссий, которые также могут различаться. Желательно поэтому иметь некое единое решающее правило для отнесения заявки к какому-либо классу, которое, во-первых, базировалось бы на характеристиках заявок, выраженных их многокритериальными оценками, а во-вторых, в наибольшей степени соответствовало бы индивидуальным экспертным правилам сортировки.

Для нахождения такого обобщенного решающего правила и информационного сопровождения конкурса проектов была разработана специальная система поддержки принятия решений [ПШ90], [ПРШ98], которая включала в себя базы данных по проектам, экспертные оценки и ряд методов многокритериального сравнения альтернатив, не рассчитанных, впрочем, на непосредственную работу с указанной выше качественной противоречивой информацией. Поэтому были разработаны специальные эвристические процедуры, позволившие, используя интерактивный диалог между руководителями научного совета и системой, найти приемлемое решающее правило для отбора проектов.

Это правило гласило: «Проект должен либо иметь первостепенную важность для достижения одной из основных целей программы, либо способствовать достижению одной из этих целей (оценки q_1^1 или q_1^2 по критерию Q_1); коллектив исполнителей проекта должен быть одним из лучших научных коллективов или его опыт и квалификация должны соответствовать уровню, достаточному для проведения работ (оценки q_4^1 или q_4^2 по критерию Q_4); исполнитель проекта должен располагать, по крайней мере, основной частью материально-технических ресурсов (оценка q_5^2 по критерию Q_5)» [ЛППСШ89]. Сформулированное правило практически полностью совпало с рекомендациями всех конкурсных комиссий. Среди отобранных проектов только четыре частично не удовлетворяли этим требованиям. Однако проблема создания метода для построения такого обобщенного правила долгое время оставалась нерешенной.

Перейдем к формальной постановке задачи аппроксимации большого числа правил сортировки многопризнаковых объектов компактным набором простых решающих правил. Пусть $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$ – совокупность объектов, которые описываются m дискретными признаками $Q_1,\ldots,Q_m$, имеющими качественные значения. Каждая группа признаков $Q_s=\{q_s^{e_s}\}$, $e_s=1,\ldots,h_s$, $s=1,\ldots,m$ отражает содержательное качество объектов, например, $q_s^{e_s}$ может быть значением показателя, характеризующего какое-либо свойство объекта, или оценкой объекта по критерию, и тому подобное. Объекты A_i, $i=1,\ldots,k$ предварительно рассортированы по нескольким классам X_t, $t=1,\ldots,f$ путем прямой классификации. Принадлежность объекта A_i к некоторому классу X_t выражается правилом сортировки R, которое можно считать еще одним качественным признаком со шкалой значений $R=\{r_t\}$. Любой объект A_i может существовать в n экземплярах, которые отличаются наборами признаков, его характеризующих. Однако в описании каждого экземпляра объекта присутствует только одно какое-то значение признака из каждой группы $Q_1,\ldots,Q_m,R$. Других дополнительных предположений об особенностях классов, признаков объектов и их значений (важности, предпочтительности, характерности, упорядоченности и прочее) не делается. Требуется построить одно или несколько решающих правил, составленных из небольшого числа значений признаков, которые относили бы объекты к заданным классам наилучшим (в смысле близости к предварительной сортировке) образом. Само понятие близости также должно быть формализовано.

Сопоставим каждый многопризнаковый объект с мультимножеством вида, аналогичного выражению (9.03)

$$\boldsymbol{A}_i = \{(k_{Ai}(q_s^{e_s})\bullet q_s^{e_s}), (k_{Ai}(r_t)\bullet r_t)\} \tag{9.13}$$

над доменом $G=\{Q_1,\ldots,Q_m,R\}$. Запись объекта $\boldsymbol{A}_i$ в таком виде может трактоваться как еще один способ выражения индивидуальных правил сортировки (9.12). А именно: терм ⟨условия⟩ ассоциируется тогда с различными комбинациями значений признаков $q_s^{e_s}$, описывающими свойства объекта $\boldsymbol{A}_i$, а терм ⟨решение⟩ – с принадлежностью объекта $\boldsymbol{A}_i$ к классу $\boldsymbol{X}_t$. В терм ⟨решение⟩ входит также некоторое правило, позволяющее говорить о принадлежности объекта $\boldsymbol{A}_i$ к какому-то определенному классу $\boldsymbol{X}_t$. Это может быть, например, правило простого большинства голосов, в соответствии с которым объект $\boldsymbol{A}_i$ будет считаться принадлежащим к классу $\boldsymbol{X}_t$, если $k_{Ai}(r_t)>k_{Ai}(r_p)$ для всех $p\neq t$, или правило квалифицированного большинства голосов, по которому должно выполняться условие $k_{Ai}(r_t)>\sum_{p\neq t} k_{Ai}(r_p)$, или любое другое правило. При этом предполагается, что каждый объект оценивается всеми n экспертами.

Вся совокупность объектов $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$, представленных мультимножествами (9.13), порождает семейство первичных решающих правил сортировки. Правила совпадают или похожи, когда различные объекты с идентичными или схожими (близкими) значениями признаков включаются в один класс. Противоречивые правила относят слабо различимые объекты в разные классы.

Для простоты будем считать, что результатом классификации должно быть разложение совокупности объектов $\mathcal{A}$ только на два класса $\boldsymbol{X}_a$ и $\boldsymbol{X}_b$. Требование бинарной декомпозиции $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{X}_a, \boldsymbol{X}_b\}$ не является принципиальным ограничением. Если необходимо рассортировать объекты на большее число классов, можно сначала разбить совокупность объектов на две группы, затем одну из них или обе группы – на подгруппы, и так далее. Например, заявки можно разделить на принятые и отклоненные, отклоненные заявки – на отложенные для дальнейшей доработки и окончательно не принятые, и так далее.

Возможны различные подходы к агрегированию многопризнаковых объектов. Рассмотрим наиболее простой и типичный случай, когда все группы объектов формируются как суммы соответствующих им мультимножеств. Тогда каждое из мультимножеств $\boldsymbol{X}_t$, $t=a,b$, представляющее свой класс объектов, можно записать в виде следующего разложения на мультимножества по группам признаков:

$$\boldsymbol{X}_t=\sum_{s=1}^{m}\boldsymbol{Q}_{st}+\boldsymbol{R}_t\,, \tag{9.14}$$

где каждое слагаемое есть в свою очередь разложение

$$\boldsymbol{Q}_{st}=\sum_{e_s=1}^{h_s}\boldsymbol{Q}_{st}^{e_s},\qquad \boldsymbol{Q}_{st}^{e_s}=\sum_{i\in I_{st}^{e_s}}\boldsymbol{A}_i,\qquad \boldsymbol{R}_t=\sum_{i\in I_{rt}}\boldsymbol{A}_i,$$

подмножества индексов $I_{st}^{e_s}=I_s^{e_s}\bigcap I_t$ и $I_{rt}=I_r\bigcap I_t$; I_t – подмножество индексов i для объектов $\boldsymbol{A}_i$, имеющих функции кратности $k_{Ai}(r_t)>\sum_{p\neq t}k_{Ai}(r_p)$ или $k_{Ai}(r_t)>k_{Ai}(r_p), p\neq t$; $I_s^{e_s}$ – подмножество индексов i для объектов $\boldsymbol{A}_i$, имеющих $k_{Ai}(q_s^{e_s})\neq 0$, $k_{Ai}(q_v^{e_v})=0$, $v\neq s$, $k_{Ai}(r_t)=0$; I_r – подмножество индексов i для объектов $\boldsymbol{A}_i$, имеющих $k_{Ai}(r_t)\neq 0$, $k_{Ai}(q_s^{e_s})=0$. Так как каждый экземпляр объекта $\boldsymbol{A}_i$ может обладать только единственными значениями $k_{Ai}(q_s^{e_s})$ и $k_{Ai}(r_t)$ из каждой группы признаков Q_s и R, то выполняются следующие условия для мощностей введенных мультимножеств:

$$|\boldsymbol{Q}_{sa}|+|\boldsymbol{Q}_{sb}|=k,\quad |\boldsymbol{R}_a|+|\boldsymbol{R}_b|=k,\quad |\boldsymbol{X}_a|+|\boldsymbol{X}_b|=k\cdot(m+1),$$

где, напомним, k равно числу объектов, а m – числу групп признаков.

Очевидно, что объекты $\boldsymbol{A}_i$, которые попали в разложение $\{\boldsymbol{R}_a, \boldsymbol{R}_b\}$, сделанное только по правилам сортировки, образуют наилучшую из всех возможных декомпозиций рассматриваемой совокупности объектов $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$ на два класса для имеющегося набора первичных правил сортировки. Обозначим через $d^*=d(\boldsymbol{R}_a, \boldsymbol{R}_b)$ расстояние между мультимножествами $\boldsymbol{R}_a$ и $\boldsymbol{R}_b$ в метрическом пространстве мультимножеств $(\mathcal{A}, d)$ с метрикой d, определяемой одним из выражений (9.06). В каждой конкретной задаче классификации расстояние d^* является предельно возможным расстоянием между объектами, входящими в разные классы. При идеальной предварительной сортировке объектов противоречия в индивидуальных правилах отсутствуют. В этом случае максимально возможное расстояние в метрическом пространстве мультимножеств $(\mathcal{A}, d)$, на котором могут находиться объекты, принадлежащие разным классам, будет равно соответственно $d_1^*=kn$, $d_2^*=1/h$, $d_3^*=1$. Здесь n есть число индивидуальных правил сортировки, приходящихся на один объект, совпадающее, в частности, с числом экспертов, h – общее число значений всех признаков, описывающих объекты, равное для задачи классификации $h=h_1+...+h_m+f$.

Сформулируем теперь основную идею нахождения обобщенного решающего правила, аппроксимирующего большое семейство противоречивых правил сортировки многопризнаковых объектов. Для каждой группы признаков Q_s нужно сгенерировать пары новых мультимножеств таким образом, чтобы мультимножества внутри каждой пары были удалены друг от друга в метрическом пространстве $(\mathcal{A}, d)$ как можно больше и с достаточной точностью совпадали с первоначальной сортировкой объектов по классам $\boldsymbol{X}_a$ и $\boldsymbol{X}_b$, заданной разложением $\{\boldsymbol{R}_a, \boldsymbol{R}_b\}$. Разные комбинации признаков, определяющих границы между сгенерированными мультимножествами внутри каждой пары, дадут желаемые обобщенные решающие правила для классификации объектов.

Решение задачи аппроксимации решающих правил для классификации многопризнаковых объектов сводится, таким образом, к решению m оптимизационных задач вида

$$d(\boldsymbol{Q}_{sa}, \boldsymbol{Q}_{sb}) \to \max d(\boldsymbol{Q}_{sa}, \boldsymbol{Q}_{sb}) = d(\boldsymbol{Q}_{sa}^*, \boldsymbol{Q}_{sb}^*), \tag{9.15}$$

где мультимножества $\boldsymbol{Q}_{sa}^*$ и $\boldsymbol{Q}_{sb}^*$ принадлежат к разным классам и находятся на максимально возможном расстоянии в метрическом пространстве мультимножеств $(\mathcal{A}, d)$. Решение каждой из задач (9.15) является наилучшей бинарной декомпозиций $\{\boldsymbol{Q}_{sa}^*, \boldsymbol{Q}_{sb}^*\}$ имеющейся совокупности многопризнаковых объектов $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$ по s-ой группе признаков. Когда число h_s значений $q_s^{e_s}$ каждого из признаков невелико ($h_s=2\div5$), решение задачи (9.15) не вызывает существенных трудностей и может быть получено даже путем простого перебора.

Каждое мультимножество $\boldsymbol{Q}_{st}^*$ $(t=a,b)$, относящееся к одному и тому же классу, представляет собой сумму двух подмультимножеств $\boldsymbol{Q}_{st}^* = \boldsymbol{Q}_{st}^{*1} + \boldsymbol{Q}_{st}^{*2}$. Значение признака q_s^*, которое определяет границу между слагаемыми $\boldsymbol{Q}_{st}^{*1}$ и $\boldsymbol{Q}_{st}^{*2}$, назовем *аппроксимирующим признаком*. Комбинации аппроксимирующих признаков $\{q_s^*\}$ для разных номеров s групп признаков Q_s задают условия отнесения объекта $\boldsymbol{A}_i$ к соответствующему классу $\boldsymbol{X}_t$ и образуют в совокупности искомые обобщенные правила классификации объектов вида (9.12).

Аппроксимирующие признаки q_s^* для различных групп признаков можно упорядочить по величине расстояния $d(\boldsymbol{Q}_{sa}^*, \boldsymbol{Q}_{sb}^*)$. Для построения обобщенных правил классификации следует использовать признаки q_s*, занимающие первые места в такой ранжировке. Чем ближе значения расстояний $d(\boldsymbol{Q}_{sa}*, \boldsymbol{Q}_{sb}*)$ к расстоянию $d^*=d(\boldsymbol{R}_a, \boldsymbol{R}_b)$, тем более точной будет аппроксимация первоначальной индивидуальной сортировки объектов. Оценить точность аппроксимации по s-ой группе признаков можно, например, выражением

$$\rho_s = d(\boldsymbol{Q}_{sa}*, \boldsymbol{Q}_{sb}*)/d(\boldsymbol{R}_a, \boldsymbol{R}_b), \qquad (9.16)$$

В обобщенное решающее правило должны тогда включаться аппроксимирующие признаки q_s*, имеющие показатель точности ρ_s, превышающей некоторый желаемый пороговый уровень ρ_0. Заметим, что величина ρ_s показателя точности аппроксимации характеризует в определенном смысле относительную важность s-ой группы признаков Q_s в обобщенном правиле классификации.

Информацию о свойствах совокупности $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$ многопризнаковых объектов $\boldsymbol{A}_i$ и их принадлежности к некоторому классу решений $\boldsymbol{X}_t$ можно также представить в виде исходной таблицы решений $C=\|k_{Ai}(x_j)\|_{k\times h}$, $x_j=q_s^{e_s}, r_t$, где каждая строка является аргументом выражения (9.13). Разложению совокупности объектов $\mathcal{A}$ на два класса $\boldsymbol{X}_a$ и $\boldsymbol{X}_b$, которые задаются формулой (9.14), соответствует преобразованная таблица решений $C'=\|k_{Xt}'(x_j)\|_{2\times h}$, состоящая из двух строк $k_{Xa}'(x_j)$ и $k_{Xb}'(x_j)$. Матрицы C и C' состоят из $2(m+1)$ блоков, которые соответствуют мультимножествам признаков $\boldsymbol{Q}_{sa}$, $\boldsymbol{Q}_{sb}$ и решений $\boldsymbol{R}_a$, $\boldsymbol{R}_b$.

Итак, процедура построения обобщенного решающего правила для классификации многопризнаковых объектов включает следующие основные этапы.

Шаг 1. Построить таблицу решений $C=\|k_{Ai}(x_j)\|_{k\times h}$ для рассматриваемой совокупности многопризнаковых объектов $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_k\}$, строки которой соответствуют мультимножествам $\boldsymbol{A}_i$ вида (9.13).

Шаг 2. Объединить объекты $\boldsymbol{A}_i$, относящиеся к заданным классам $\boldsymbol{X}_a$ и $\boldsymbol{X}_b$, воспользовавшись формулами (9.05), (9.14). Получить преобразованную таблицу решений $C'=\|k_{Xt}'(x_j)\|_{2\times h}$, строки которой соответствуют мультимножествам $\boldsymbol{X}_a$ и $\boldsymbol{X}_b$.

Шаг 3. Решить задачу оптимизации (9.15) для каждого бинарного разложения $\{\boldsymbol{Q}_{sa}*, \boldsymbol{Q}_{sb}*\}$ по s-ой группе признаков Q_s и найти аппроксимирующий признак q_s* в каждом s-ом блоке преобразованной матрицы C'.

Шаг 4. Проранжировать аппроксимирующие признаки q_s* по убыванию величины расстояния $d^*=d(\boldsymbol{R}_a, \boldsymbol{R}_b)$ или показателя точности ρ_s (9.16).

Шаг 5. Выбрать аппроксимирующие признаки q_s*, которые обеспечивают необходимую точность аппроксимации $\rho_s\geq\rho_0$, и сформировать из них обобщенное решающее правило для классификации многопризнаковых объектов. ◙

Проиллюстрируем предложенный подход к построению обобщенного решающего правила для классификации многопризнаковых объектов, которое аппроксимирует большое число противоречивых правил сортировки, на примере рассмотренной выше процедуры экспертной оценки и конкурсного отбора проектов для формирования государственной научно-технической программы по высокотемпературной сверхпроводимости. Каждая представленная на конкурс заявка независимо оценивалась 3 экспертами по 6 качественным критериям, которые давали также свое заключение по принятию или отклонению заявки. Всего было подано более 250 заявок и около 170 из них было отобрано для включения в программу.

Приведем некоторые данные, иллюстрирующие рассматриваемый пример: часть таблицы решений C=$\|k_{Ai}(x_j)\|_{k\times h}$, характеризующей поданные на конкурс проекты $\boldsymbol{A}_i$; преобразованная таблица решений C'=$\|k_{Xt}'(x_j)\|_{2\times h}$, соответствующая классам принятых $\boldsymbol{X}_a$ и отклоненных $\boldsymbol{X}_b$ проектов; значения расстояний между бинарными разложениями $d_1(\boldsymbol{Q}_{sa}^*,\boldsymbol{Q}_{sb}^*)$ и $d_1(\boldsymbol{R}_a,\boldsymbol{R}_b)$ в метрическом пространстве мультимножеств ($\mathcal{A}$, d_1); значения показателей точности ρ_s для аппроксимирующих признаков q_s^* по каждому s-ому блоку матрицы.

Объекты — Признаки

	$q_1^1\ q_1^2\ q_1^3$	$q_2^1\ q_2^2\ q_2^3$	$q_3^1\ q_3^2\ q_3^3$	$q_4^1\ q_4^2\ q_4^3\ q_4^4$	$q_5^1\ q_5^2\ q_5^3\ q_5^4$	$q_6^1\ q_6^2\ q_6^3$	$r_a\ r_b$
$\boldsymbol{A}_1$	1 2 0	2 1 0	3 0 0	2 1 0 0	0 2 1 0	2 1 0	3 0
…							
$\boldsymbol{A}_i$	1 1 1	0 2 1	1 2 0	0 2 1 0	0 1 2 0	0 0 3	2 1
$\boldsymbol{A}_{i+1}$	1 1 1	0 2 1	1 2 0	0 2 1 0	0 1 2 0	0 0 3	1 2
…							
$\boldsymbol{A}_k$	0 2 1	0 1 2	0 3 0	0 1 1 1	0 0 2 1	0 3 0	0 3

Классы — Признаки

	$q_1^1\ q_1^2\ q_1^3$	$q_2^1\ q_2^2\ q_2^3$	$q_3^1\ q_3^2\ q_3^3$	$q_4^1\ q_4^2\ q_4^3\ q_4^4$	$q_5^1\ q_5^2\ q_5^3\ q_5^4$	$q_6^1\ q_6^2\ q_6^3$	$r_a\ r_b$
$\boldsymbol{X}_a$	144 360 21	81 324 120	99 336 90	219 297 9 0	72 435 18 0	126 300 99	510 15
$\boldsymbol{X}_b$	45 156 51	27 93 132	36 111 105	51 132 63 6	60 147 30 15	45 135 72	78 174

d_1	333	297	303	393	327	273	591
ρ_s	0,563	0,503	0,517	0,665	0,553	0,462	

Принятые проекты $\boldsymbol{A}_1$–$\boldsymbol{A}_i$ входят в класс $\boldsymbol{X}_a$, отклоненные проекты $\boldsymbol{A}_{i+1}$–$\boldsymbol{A}_k$ относятся к классу $\boldsymbol{X}_b$. Обратим внимание читателя, что хотя проекты $\boldsymbol{A}_i$ и $\boldsymbol{A}_{i+1}$ имеют одинаковые значения оценок $\{q_s\}$ по всем признакам, но наборы их индивидуальных правил сортировки не совпадают, и поэтому $\boldsymbol{A}_i\in\boldsymbol{X}_a$, а $\boldsymbol{A}_{i+1}\in\boldsymbol{X}_b$.

Множество аппроксимирующих признаков q_s^*, упорядоченное по величине расстояния $d_1(\boldsymbol{Q}_{sa}^*,\boldsymbol{Q}_{sb}^*)$, выглядит следующим образом:

$$\{q_s^*\} = \{q_4^1, q_4^2; q_1^1, q_1^2; q_5^1, q_5^2; q_3^1, q_3^2; q_2^1, q_2^2\}. \qquad (9.17)$$

Заметим, что задача (9.15) не имеет оптимального решения по критерию Q_6, то есть любое значение признака q_6 является неаппроксимирующим. Выбрав некоторое желаемое значение точности аппроксимации ρ_0, получим следующие обобщенные решающие правила для отбора проектов.

«Исполнители проекта должны быть одними из лучших или обладать опытом и квалификацией, достаточными для проведения работ» (оценки q_4^1 или q_4^2; точность аппроксимации $\rho_s\geq 0{,}66$).

«Проект должен быть крайне важным или важным для достижения одной из основных целей программы; исполнители проекта должны быть одними из лучших или обладать опытом, квалификацией и материально-техническими ресурсами, достаточными для проведения работ» (оценки q_4^1 или q_4^2; и q_1^1 или q_1^2; и q_5^1 или q_5^2; точность аппроксимации $\rho_s\geq 0{,}55$).

Отметим, что второе из этих правил полностью совпадает с решающим правилом для отбора проектов, приведенным ранее в работе [ЛППСШ89]. Аналогичным образом можно найти и правила для отбора проектов, применявшиеся различными конкурсными комиссиями, и сравнить их с обобщенным решающим правилом. Обобщенное решающее правило классификации объектов позволяет также выявить расхождения в индивидуальных правилах сортировки отдельных экспертов и при необходимости скорректировать их.

Ранжирование (9.17) аппроксимирующих признаков по величине расстояния d_1 показывает, что наиболее важным для отбора проектов оказывается критерий Q_4, характеризующий опыт и квалификацию исполнителей, а следующими по важности – критерии Q_1, оценивающий важность проекта для достижения целей программы, и Q_5, отражающий ресурсное обеспечение работ.

9.4. Упорядочение объектов. Еще одним весьма распространенным подходом к структуризации совокупности объектов $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$ является их строгое или нестрогое упорядочение, которое представляет собой введение между объектами бинарных отношений строгого или нестрогого порядка, эквивалентности или несравнимости, заданных на множестве свойств объектов. Сравнение объектов по их свойствам производится на основе признаков, характеризующих объекты.

К числу наиболее популярных методов упорядочения объектов относятся непосредственная порядковая классификация, ранжирование, парные сравнения. Многие задачи принятия решений [Евл84] часто сводятся именно к ранжированию объектов, где итоговое упорядочение ищется либо на основе свойств объектов, либо исходя из предпочтений ЛПР, либо на сочетании того и другого.

Наименее трудоемким для эксперта методом упорядочения объектов является метод *непосредственной классификации* с именованными и упорядоченными классами – метод сортировки [Тюр79]. В этом методе эксперт непосредственно относит объект A_i к одному из выделенных классов, назначая объекту одну из оценок по порядковой или номинальной шкале критериев. В ряде случаев допускается одновременное указание пары соседних оценок, если эксперт затрудняется с выбором одной из них.

При коллективной экспертизе сортировка объектов проводится обычно на основе распределений экспертных оценок. Вначале распределения проверяются на согласованность мнений экспертов. Признаком рассогласования мнений можно считать полимодальность или близость оценок к равномерному распределению. Если согласованность оценок оказывается приемлемой, то в качестве коллективной средней оценки используется медиана Кемени-Снелла [KS62], [Лит82], которая практически достаточно часто совпадает с модой распределения. Итоговое упорядочение объектов строится на основе средних оценок. При равенстве последних возможно применение модифицированного метода квантильного упорядочения [ТВА77].

При упорядочении объектов с помощью метода *ранжирования* для каждого объекта A_i тем или иным образом, например, на основе предпочтений ЛПР или оценок эксперта вычисляется натуральное число r_i, называемое *рангом*. Упорядочению объектов соответствует упорядочение рангов $r_1<r_2<\ldots<r_i<\ldots<r_c$.

При строгом ранжировании (c=k) ранги r_i в вышеприведенном выражении удовлетворяют отношению строгого неравенства, при нестрогом ранжировании (c<k) – нестрогого неравенства. В последнем случае ранжирование также можно сделать строгим, если эквивалентным объектам присвоить так называемые связанные ранги, равные среднему арифметическому значению рангов эквивалентных объектов.

Возможны различные способы ранжирования объектов. Например, объекты могут предъявляться эксперту все сразу или поочередно. При небольшом числе объектов и одном признаке (критерии) оценке объектов ранжирование не представляет больших трудностей для экспертов. При увеличении числа объектов, критериев и экспертов, оценивающих объекты, количество связей между оценками резко возрастает. Поэтому эксперты могут допускать в таких случаях существенные ошибки при определении рангов объектов. В силу ограниченных возможностей человека при обработке информации методы ранжирования объектов являются для экспертов более трудоемкими по сравнению с методами непосредственной классификации.

В случае многопараметрического описания объектов, например, при их оценке по многим качественным критериям $Q_1,\ldots,Q_m$, возникает задача построения итогового упорядочения k объектов на основании m отдельных ранжировок, полученных по каждому из параметров. Пусть результаты экспертизы представлены в виде k разных m-мерных векторов $q_i=(q_{i1}^p, q_{i2}^p,\ldots,q_{im}^p)$, где q_{is}^p – средняя оценка i-го объекта по s-му критерию Q_s. В частности, оценки q_{is}^p могут быть медианами распределений или рангами r_i. Для получения итогового упорядочения можно воспользоваться векторным отношением предпочтения, а именно: i-ый объект A_i считается предпочтительнее j-ого A_j, что записывается как $A_i \succ A_j$, если выполняется условие $q_{is}^p \geq q_{js}^p$ для всех s=1,…,m, причем хотя бы по одному из критериев Q_s имеет место строгое неравенство.

При упорядочении несравнимых объектов необходимо учитывать дополнительную информацию, например, предпочтения ЛПР [ЛМ96], [Roy96] или относительную важность критериев [Ног02]. В первом случае это можно сделать следующим образом [Петр94]. Объекты, соответствующие несравнимым комбинациям оценок, предъявляются ЛПР в виде словесных образов, составленных из вербальных оценок по шкалам критериев. ЛПР предлагается проанализировать эти словесные образы (несравнимые сочетания оценок) и, воспользовавшись методом сортировки, оценить каждый из образов по какому-либо иному критерию Q_0, не совпадающему с критериями $Q_1,\ldots,Q_m$ и имеющему порядковую шкалу с развернутыми формулировками оценок. Другими словами, ЛПР предлагается отнести каждый из объектов к одному из упорядоченных классов, совпадающему с наименованием оценки по шкале критерия Q_0. Предпочтительнее будет тот объект, который получит лучшую оценку по критерию Q_0. Подобный подход может использоваться как в сочетании с векторным отношением предпочтения, так и независимо от него.

В методах *парных сравнений* итоговое упорядочение объектов строится на основе сравнения всех пар объектов. ЛПР или эксперту предъявляется пара объектов и предлагается указать, какой из объектов более предпочтителен. В случае сравнения всех пар объектов и транзитивности предпочтений эксперта, получается полное упорядочение объектов. Если эксперт считает некоторые из объектов несравнимыми, то упорядочение будет частичным. Для каждого эксперта и признака (критерия) составляется своя матрица парных сравнений «объект-объект». Таким образом, появляется набор матриц, обработка которых для получения итогового упорядочения требует создания специальных вычислительных алгоритмов.

ЛПР и эксперты могут быть не всегда последовательными в своих ответах, могут допускать неточности, особенно в трудных случаях, предпочтения ЛПР могут быть противоречивыми. Для преодоления таких трудностей при построении итоговых упорядочений объектов разрабатываются специальные процедуры. Так, например, в группе методов ЗАПРОС (Замкнутые Процедуры у Опорных Ситуаций) [ЛМ96] для упорядочения многокритериальных альтернатив используется процедура выявления цепочек сравнений, образующих нетранзитивные триады. Выявленные нарушения предъявляются ЛПР для изменения его оценок с тем, чтобы устранить противоречия и построить единую порядковую шкалу оценок. Обнаружение и устранение нарушений транзитивности предпочтений при попарных сравнениях объектов может производиться как непосредственно в ходе опроса экспертов [ГФ90], так и апостериорно [Каз81]. В группе методов ELECTRE (Elimination et Choix Traduisant la Realite) [Roy96] упорядочение многокритериальных альтернатив осуществляется путем их попарного сравнения с использованием специальных индексов согласия и несогласия, рассчитываемых на основе предпочтений ЛПР.

Когда объекты имеют многопараметрическое описание, которое должно рассматриваться и анализироваться как единое целое, например, объекты оцениваются несколькими экспертами по многим качественным критериям $Q_1,\ldots,Q_m$, построение итогового упорядочения таких объектов вызывает значительные трудности. Исторически сложились два подхода к их преодолению, которые можно условно назвать статистическим и алгебраическим [Тюр79]. В *статистическом подходе* каждое из индивидуальных упорядочений, к примеру, заданных экспертом, рассматривается как одна из возможных реализаций одного и того же наиболее вероятного упорядочения объектов. Известны различные модели для построения такого вероятностного упорядочения, например, модели Льюса, Терстоуна и другие.

При *алгебраическом подходе* итоговое упорядочение ищется как наиболее близкое ко всем индивидуальным упорядочениям. Близость ранжировок оценивается по некоторому расстоянию, обычно вводимому аксиоматически. Одним из широко используемых видов таких компромиссных решений является медиана Кемени-Снелла. Другим часто употребляемым методом построения итогового упорядочения служит упорядочение объектов по средним рангам, то есть по среднему арифметическому значению рангов, присвоенных каждому объекту разными экспертами. Как отмечается в работе [Лит82], со статистической точки зрения и медиана Кемени-Снелла, и упорядочение по средним рангам представляют собой упорядочения, наиболее коррелированные в среднем с индивидуальными экспертными предпочтениями. В первом случае корреляции ищутся с использованием в качестве коэффициента ранговой корреляции коэффициента Кендалла, а во втором – коэффициента Спирмена.

В перечисленных выше подходах построение итогового упорядочения объектов производится либо на основе информации, полученной от одного источника, либо путем согласования или усреднения различных оценок. Однако имеется много реально существующих задач, когда невозможно или крайне сложно найти согласованное мнение экспертов, например, если эксперты работают независимо друг от друга и не могут знать оценок, данных другими экспертами. Поэтому необходимы методы упорядочения многопризнаковых объектов, которые позволяли бы одновременно учитывать оценки, в том числе и противоречивые, всех экспертов без поиска компромисса между мнениями отдельных экспертов.

Рассмотрим одну достаточно часто встречающуюся практическую задачу нахождения рейтинга компаний, занимающихся бизнесом в некоторой области. Решить такую задачу, можно, например, голосованием – рейтинг компаний определяется тогда по количеству поданных за нее голосов. Но в этом случае получается обобщенная оценка компании «в целом» без каких-либо деталей.

Более сложной является задача построения рейтинга компаний, основываясь на фактических показателях их деятельности и/или экспертных оценках по многим критериям. Перечень критериев формируется заранее, он зависит от целей анализа. Например, компании, действующие в некотором секторе рынка, можно оценивать по следующим критериям: Q_1. Уровень деловой активности; Q_2. Объем прибыли от реализации продукции; Q_3. Объем продаж; Q_4. Число выполненных проектов; Q_5. Квалификация персонала; Q_6. Численность сотрудников компании; и тому подобное.

Шкалы критериев оценки могут быть как количественными, так и качественными. Для удобства оценки и сравнения компаний количественные критерии можно трансформировать в качественные с небольшим числом упорядоченных градаций шкал. Шкалы критериев Q_4. «Число выполненных проектов» и Q_6. «Численность сотрудников компании» могут иметь, например, такой вид:

q_4^1 – очень высокое (больше ста);
q_4^2 – высокое (от пятидесяти до ста);
q_4^3 – среднее (от десяти до пятидесяти);
q_4^4 – низкое (меньше десяти).

Каждая компания из совокупности $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$ оценивается несколькими экспертами по всем критериям. В частности, возможна ситуация, когда представитель каждой компании является экспертом, оценивающим все рассматриваемые компании, в том числе и свою собственной. При этом оценки разных экспертов могут отличаться друг от друга и даже быть противоречивыми. Каждая компания A_i представляет собой многопризнаковый объект. Определение рейтинга компаний можно тогда рассматривать как задачу упорядочивания многопризнаковых объектов. Основной трудностью при решении таких задач является необходимость учета всех описаний объекта – различающихся оценок, сделанных разными экспертами, при условии, что не существует «главного» эксперта, и мнения всех экспертов считаются одинаково важными.

Дадим формальную постановку задачи. Пусть $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_k\}$ – совокупность объектов, которые оцениваются n экспертами по m критериям $Q_1,\ldots,Q_m$. Каждый критерий Q_s имеет порядковую шкалу количественных или качественных оценок $\{q_s^{e_s}\}$, $e_s=1,\ldots,h_s$, $s=1,\ldots,m$, которые упорядочены от лучшего значения к худшему $q_s^1\succ q_s^2\succ\ldots\succ q_s^{h_s}$. Предполагается, что разные критерии могут иметь различную относительную важность, но значения оценок, относящихся к одному и тому же критерию, равноценны. Будем также считать, что каждый объект оценивается всеми n экспертами по всем m критериям, и что экспертные оценки независимы. В таком случае можно выделить два объекта (возможно, гипотетических) – абсолютно лучший и абсолютно худший, которым все эксперты дали соответственно наивысшие и наинизшие оценки по всем критериям. Требуется, исходя из многокритериальных оценок объектов, упорядочить объекты от лучшего к худшему.

Представим объект A_i как мультимножество вида (9.03)

$$\boldsymbol{A}_i=\{k_{Ai}(q_1^1)\bullet q_1^1,\ldots,k_{Ai}(q_1^{h_1})\bullet q_1^{h_1},\ldots,k_{Ai}(q_m^1)\bullet q_m^1,\ldots,k_{Ai}(q_m^{h_m})\bullet q_m^{h_m}\}$$

над доменом $G=\{Q_1,\ldots,Q_m\}$, являющимся множеством критериальных оценок. Функция кратности $k_{Ai}(q_s^{e_s})$ мультимножества характеризует здесь количество экспертов, давших объекту A_i оценку $q_s^{e_s}$. Наилучшему и наихудшему объектам соответствуют мультимножества

$$\boldsymbol{A}_{\max}=\{n\bullet q_1^1,0,\ldots,0,\ n\bullet q_2^1,0,\ldots,0,\ldots,\ n\bullet q_m^1,0,\ldots,0\},\qquad(9.18)$$

$$\boldsymbol{A}_{\min}=\{0,\ldots,0,n\bullet q_1^{h_1},\ 0,\ldots,0,n\bullet q_2^{h_2},\ldots,\ 0,\ldots,0,n\bullet q_m^{h_m}\},\qquad(9.19)$$

и их принято называть *идеальным* и *антиидеальным решениями*. В дальнейшем мы не будем делать различия между объектом A_i и представляющим его мультимножеством $\boldsymbol{A}_i$. Задача упорядочения многопризнаковых объектов сводится, таким образом, к упорядочению мультимножеств. Рассмотрим возможные подходы к ее решению.

Простейший способ сравнения и упорядочения объектов состоит в упорядочении мультимножеств по включению. В этом случае i-ый объект $\boldsymbol{A}_i$ будет лучше j-ого объекта $\boldsymbol{A}_j$ ($\boldsymbol{A}_i\succ\boldsymbol{A}_j$), если для мультимножеств выполняется включение $\boldsymbol{A}_i\supset\boldsymbol{A}_j$, что равносильно условию $k_{Ai}(q_s^{e_s})>k_{Aj}(q_s^{e_s})$ для всех $q_s^{e_s}\in G$. Однако такая возможность на практике встречается достаточно редко.

Мультимножество $\boldsymbol{A}$ в определенном смысле эквивалентно целочисленному вектору $\mathbf{c}_A=(k_{A1},\ldots,k_{Ah1},\ldots,k_{Am1},\ldots,k_{Ahm})$, различные компоненты k_{As} которого являются значениями функции кратности $k_A(q_s^{e_s})$ мультимножества $\boldsymbol{A}$. Используя представление объекта $\boldsymbol{A}$ с помощью вектора $\mathbf{c}_A$, мы возвращаемся к методам группового сравнения и упорядочения многопризнаковых объектов, рассмотренным выше. Важнейшим недостатком этих методов является трудоемкость процедур сбора и обработки информации об объектах.

Будем теперь считать многопризнаковые объекты точками метрического пространства мультимножеств ($\mathcal{A}$, d), например, с основной метрикой (типа Хемминга), которая задается формулой (8.01), принимающей вид

$$d_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = \sum_{s=1}^{m} w_s \sum_{e_s=1}^{h_s} | k_A(q_s^{e_s}) - k_B(q_s^{e_s}) |, \tag{9.20}$$

где $w_s > 0$ – коэффициенты относительной важности критериев Q_s. Будем сравнивать объекты по их близости к идеальному решению $\boldsymbol{A}_{\max}$ и говорить, что объект $\boldsymbol{A}_i$ лучше объекта $\boldsymbol{A}_j$ ($\boldsymbol{A}_i \succ \boldsymbol{A}_j$), если он находится ближе к идеальному решению $\boldsymbol{A}_{\max}$, то есть выполняется условие

$$d_1(\boldsymbol{A}_{\max}, \boldsymbol{A}_i) < d_1(\boldsymbol{A}_{\max}, \boldsymbol{A}_j). \tag{9.21}$$

Упорядочим все объекты по величине их расстояния от идеального решения. Если для некоторых объектов $d_1(\boldsymbol{A}_{\max},\boldsymbol{A}_i)=d_1(\boldsymbol{A}_{\max},\boldsymbol{A}_j)$, то объекты $\boldsymbol{A}_i$ и $\boldsymbol{A}_j$ будут или эквивалентными, или несравнимыми. Тем самым полученное ранжирование объектов окажется нестрогим.

Так как каждый объект $\boldsymbol{A}_i$ оценивается n экспертами по всем m критериям, то нетрудно убедиться, что выполняются равенства

$$\sum_{e_s=1}^{h_s} k_{Ai}(q_s^{e_s}) = n, \qquad \sum_{s=1}^{m} \sum_{e_s=1}^{h_s} k_{Ai}(q_s^{e_s}) = m \cdot n,$$

Отсюда, в частности, для любого критерия Q_s следует соотношение

$$\sum_{e_s=2}^{h_s} k_{Ai}(q_s^{e_s}) = n - k_{Ai}(q_s^{1}). \tag{9.22}$$

Воспользовавшись формулами (9.18), (9.20), условием равноценности оценок по каждому критерию и учитывая равенство (9.22), запишем выражение для расстояния от идеального решения $\boldsymbol{A}_{\max}$ до объекта $\boldsymbol{A}_i$ в виде:

$$d_1(\boldsymbol{A}_{\max}, \boldsymbol{A}_i) = \sum_{s=1}^{m} w_s \sum_{e_s=1}^{h_s} | k_{A\max}(q_s^{e_s}) - k_{Ai}(q_s^{e_s}) | = 2 \sum_{s=1}^{m} w_s \, [n - k_{Ai}(q_s^{1})].$$

Условие (9.21) сравнения многопризнаковых объектов приобретает тогда следующую форму: объект $\boldsymbol{A}_i$ лучше объекта $\boldsymbol{A}_j$ ($\boldsymbol{A}_i \succ \boldsymbol{A}_j$), если

$$\sum_{s=1}^{m} w_s \, k_{Ai}(q_s^{1}) > \sum_{s=1}^{m} w_s \, k_{Aj}(q_s^{1}). \tag{9.23}$$

Таким образом, правило упорядочения многопризнаковых объектов сводится к сравнению взвешенных сумм $S_{Ai}^{1} = \sum_s w_s \, k_{Ai}(q_s^{1})$ первых (наилучших) оценок объектов по всем критериям Q_s. Лучшим будет тот объект $\boldsymbol{A}_i$, у которого эта сумма S_{Ai}^{1} будет больше.

Для некоторых объектов $\boldsymbol{A}_{ir}$ вместо неравенств (9.21) или (9.23) выполняются равенства $d_1(\boldsymbol{A}_{\max}, \boldsymbol{A}_{i1}) = \ldots = d_1(\boldsymbol{A}_{\max}, \boldsymbol{A}_{it})$, $r=1,\ldots t$. В таком случае получим частичное упорядочение объектов, в котором объекты $\boldsymbol{A}_{i1},\ldots,\boldsymbol{A}_{it}$ «делят» одно и то же место. Чтобы упорядочить эти объекты внутри группы воспользуемся следующим приемом. Подсчитаем для объектов взвешенные суммы $S_{Air}^{2} = \sum_s w_s \, k_{Air}(q_s^{2})$ вторых оценок по всем критериям, и будем считать, что объект $\boldsymbol{A}_{iu}$ лучше объекта $\boldsymbol{A}_{iv}$, если выполняется условие

$$\sum_{s=1}^{m} w_s \, k_{Aiu}(q_s^{1}) > \sum_{s=1}^{m} w_s \, k_{Aiv}(q_s^{1}). \tag{9.24}$$

Если для каких-то объектов $\boldsymbol{A}_{irp}$ и эти суммы окажутся одинаковыми, то упорядочим объекты из этой подгруппы по суммам $S_{Airp}^{3} = \sum_s w_s\, k_{Airp}(q_s^{3})$ третьих оценок по всем критериям. И так далее, пока не расставим по своим местам все объекты $\boldsymbol{A}_{i1},\ldots,\boldsymbol{A}_{it}$ данной группы и всей совокупности $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_k\}$ в целом.

Представим рассмотренную процедуру упорядочения совокупности многопризнаковых объектов в виде следующего алгоритма [Литв02].

Шаг 1. Вычислить для каждого объекта $\boldsymbol{A}_i$ из совокупности $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_k\}$ взвешенную сумму $S_{Ai}^{1} = \sum_s w_s\, k_{Ai}(q_s^{1})$ всех первых (наилучших) оценок по всем критериям Q_s и упорядочить объекты от лучшего к худшему по величинам S_{Ai}^{1} сумм первых оценок. Если найдутся группы эквивалентных или несравнимых объектов $\boldsymbol{A}_{i1},\ldots,\boldsymbol{A}_{it}$, имеющих одинаковые суммы S_{Ai}^{1}, перейти к шагу 2.

Шаг 2. Вычислить для каждого объекта $\boldsymbol{A}_{ir}$, $r=1,\ldots t$ в соответствующей группе взвешенную сумму $S_{Air}^{2} = \sum_s w_s\, k_{Air}(q_s^{2})$ всех вторых оценок по всем критериям Q_s и упорядочить объекты внутри каждой группы от лучшего к худшему по величинам S_{Air}^{2} сумм вторых оценок. Если останутся подгруппы эквивалентных или несравнимых объектов $\boldsymbol{A}_{iru},\ldots,\boldsymbol{A}_{irv}$, имеющих одинаковые суммы S_{Air}^{2}, перейти к шагу 3.

Шаг 3. Вычислить для каждого объекта $\boldsymbol{A}_{irp}$ в соответствующей подгруппе взвешенную сумму $S_{Airp}^{3} = \sum_s w_s\, k_{Airp}(q_s^{3})$ всех третьих оценок по всем критериям Q_s и упорядочить объекты внутри каждой подгруппы от лучшего к худшему по величинам сумм S_{Airp}^{3} третьих оценок. Продолжить процедуру до полного упорядочения всех объектов из совокупности $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_k\}$. Если число h_s значений оценок $q_s^{e_s}$ у некоторых критериев Q_s окажется меньше требуемого на данном b-ом шаге алгоритма, то следует считать $k_{Air\ldots p}(q_s^{b})=0$. ◙

В приведенном выше алгоритме предполагалась различная относительная важность критериев Q_s, выражаемая коэффициентами $w_s>0$, на которые могут накладываться некоторые условия, например, $\sum_s w_s=1$. Проблема определения (вычисления) важности критериев имеет самостоятельное значение [Ног02] и в контексте данной работы не рассматривается. В случае, когда все критерии одинаково важны, все коэффициенты w_s полагаются равными 1.

Аналогичным образом можно построить процедуру упорядочения многопризнаковых объектов $\boldsymbol{A}_i$ по отношению к антиидеальному решению $\boldsymbol{A}_{\min}$, заданному выражением (9.19), считая, что объект $\boldsymbol{A}_i$ лучше объекта $\boldsymbol{A}_j$ ($\boldsymbol{A}_i \succ \boldsymbol{A}_j$), если он находится дальше от антиидеального решения $\boldsymbol{A}_{\min}$, то есть

$$d_1(\boldsymbol{A}_{\min}, \boldsymbol{A}_i) > d_1(\boldsymbol{A}_{\min}, \boldsymbol{A}_j). \tag{9.25}$$

Как и выше, объекты $\boldsymbol{A}_i$ и $\boldsymbol{A}_j$ будут эквивалентными или несравнимыми, если $d_1(\boldsymbol{A}_{\min},\boldsymbol{A}_i)=d_1(\boldsymbol{A}_{\min},\boldsymbol{A}_j)$. Подчеркнем, однако, что в общем случае упорядочение объектов по близости к идеальному решению (наилучшему объекту) $\boldsymbol{A}_{\max}$ может не совпадать с упорядочением по удаленности от антиидеального решения (наихудшего объекта) $\boldsymbol{A}_{\min}$.

Предложенный метод упорядочения многопризнаковых объектов был применен для построения рейтинга российских компаний, работающих в секторе информационно-коммуникационных технологий [Кто00]. Экспертная оценка деятельности компаний давалась по специально разработанным критериям с качественными оценками, аналогичным указанным выше, а результаты обрабатывались по описанной процедуре. Всего было оценено около 50 компаний, из которых были выделены 30 ведущих высокотехнологичных компаний, а также составлены рейтинги 10 ведущих разработчиков программного обеспечения и 10 наиболее динамично развивающихся компаний.

Проблемы классификации и упорядочения объектов, которые описываются многими количественными и качественными признаками, причем каждый из объектов может существовать в нескольких различающихся «экземплярах», являются достаточно трудными. Эти трудности имеют и содержательные основания (например, некорректность применения процедур «усреднения» качественных признаков), и формальные причины (например, большая размерность задачи). Главные из перечисленных трудностей оказалось возможным преодолеть благодаря использованию нового теоретического инструментария, основанного на понятии мультимножества. Применение теории мультимножеств позволяет разрабатывать новые подходы к решению новых классов задач, новые методы анализа и обработки данных и знаний, которые не содержат необоснованных преобразований и не приводят к потере или искажению исходной информации.

Теория мультимножеств и практика их применения находятся еще только в начале своего развития. Однако, несмотря на недостаточную «зрелость» теоретических разработок, мультимножества уже успешно используются в различных приложениях, в частности, в многокритериальном анализе слабо формализованных проблем и принятии решений [Петр94], [ПРШ98], теории сетей Петри [Pet81], [Лом01], моделировании и анализе сложных систем [CFGV71], [БС89], распознавании образов [Сла00], искусственном интеллекте [Вел02], теории формальных языков [Pet76], [HO80], [Knu92], математическом программировании [Knu69], [DM79], методах обработки разнородной информации [Yag86], [Li90], [Reb94], [Petr01c] и так далее. И здесь, и в других областях можно ожидать появления многих новых и интересных результатов.

Литература

[АБЕМ89]. С.А.Айвазян. В.М.Бухштабер, И.С.Енюков, Л.Д.Мешалкин. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989.

[АВЛ94]. М.А.Айзерман, В.И.Вольский, Б.М.Литваков. Элементы теории выбора. Псевдокритерии и псевдокритериальный выбор. – М.: Фонд “Российская наука”, 1994.

[Ал48]. П.С.Александров. Введение в общую теорию множеств и функций. – М.: Гостехиздат, 1948.

[АЛС02]. В.Л.Арлазаров, А.С.Логинов, О.А.Славин. Характеристики программ оптического распознавания текста.//Программирование, 2002, №3, 45-63.

[БМ83]. Э.М.Браверман, И.Б.Мучник. Структурные методы обработки эмпирических данных. – М.: Наука, 1983.

[БС89]. В.И.Баранов, Б.С.Стечкин. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. – М.: Наука, 1989.

[Вел02]. В.Ю.Величко. Решение задачи прогнозирования свойств составных объектов на основе вывода по аналогии. 2002 (в печати).

[Вул73]. Б.З.Вулих. Краткий курс теории функций вещественной переменной (введение в теорию интеграла). – М.: Наука, 1973.

[ГМР80]. Г.М.Гамбаров, Н.Д.Мандель, И.А.Рыбкина. О некоторых метриках, возникающих в задачах обработки данных.//Автоматика и телемеханика, 1980, №12, 116-123.

[ГФ90]. Л.С.Гнеденко, Е.М.Фуремс. Эффективная процедура выявления нарушений транзитивности при попарных сравнениях.//Проблемы и методы принятия уникальных и повторяющихся решений. Сборник трудов. – М.: ВНИИСИ, 1990, 46-58.

[Дор71]. А.А.Дорофеюк. Алгоритмы автоматической классификации.//Автоматика и телемеханика, 1971, №12, 78-113.

[Евл84]. Л.Г.Евланов. Теория и практика принятия решений. – М.: Экономика, 1984.

[Жур77]. Ю.И.Журавлев. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I,II,III.//Кибернетика, 1977,№4,14-21; 1977,№6,21-27; 1978,№2,35-43.

[Заг72]. Н.Г.Загоруйко. Методы распознавания и их применение. – М.: Советское радио,1972.

[Заг99]. Н.Г.Загоруйко. Прикладные методы анализа данных и знаний. – Новосибирск: Издательство Института математики, 1999.

[КА84]. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.

[Каз81]. Т.А.Казанская. Исследование непротиворечивости данных экспертизы, проведенной методами парных сравнений.//I Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации. Тезисы докладов. – М.-Алма-Ата: Казахский государственный университет, Научный совет АН СССР по комплексной проблеме “Кибернетика”, ВСНТО, ВНИИСИ ГКНТ и АН СССР, 1981, 122-123.

[Кто00]. Кто в России самый интеллектуальный? Рейтинг ведущих российских разработчиков высоких технологий.//Компания, 2000, №47(143),38-39.

[Кур68]. А.Г.Курош. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968.

[КФ68]. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968.

[Лит82]. Б.Г.Литвак. Экспертная информация: методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 1982.

[Литв00]. А.В.Литвинова. Исследование методов иерархического кластерного анализа многопризнаковых объектов.//Дипломная работа на соискание степени бакалавра. Московский физико-технический институт (государственный университет), М., 2000.

[Литв02]. А.В.Литвинова. Упорядочивание многопризнаковых объектов на основе теории мультимножеств.//Дипломная работа на соискание степени магистра. Московский физико-технический институт (государственный университет), М., 2002.

[ЛМ96]. О.И.Ларичев, Е.М.Мошкович. Качественные методы принятия решений. Вербальный анализ решений. – М.: Наука, Физматлит, 1996.

[Лом01]. И.А.Ломазова. Анализ семантических свойств некоторых классов программ и сетей Петри.//Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Институт программных систем РАН, Переяславль-Залесский, 2001.

[ЛППСШ89]. О.И.Ларичев, А.С.Прохоров, А.Б.Петровский, М.Ю.Стернин, Г.И.Шепелев. Опыт планирования фундаментальных исследований на конкурсной основе.//Вестник АН СССР, 1989, №7, 51-61.

[ЛС65]. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. Элементы функционального анализа. – М.:Наука,1965.

[Мир80]. Б.Г.Миркин. Анализ качественных признаков и структур. – М.: Статистика, 1980.

[Нат74]. И.П.Натансон. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.

[Ног02]. В.Д.Ногин. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2002.

[Ор79]. А.И.Орлов. Устойчивость в социально-экономических моделях. – М.: Наука, 1979.

[Орл81]. С.А.Орловский. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981.

[Петр81]. А.Б.Петровский. О расстояниях между множествами, инвариантных относительно преобразований пространства.//I Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации. Тезисы докладов. – М.-Алма-Ата: Казахский государственный университет, Научный совет АН СССР по комплексной проблеме “Кибернетика”, ВСНТО, ВНИИСИ ГКНТ и АН СССР, 1981, 50-51.

[Петр82]. А.Б.Петровский. Аксиоматический подход к метризации пространства множеств.// Депонированная рукопись №999-82. ВИНИТИ, М., 1982.

[Петр94]. А.Б.Петровский. Системы поддержки принятия решений для структуризации и анализа качественных альтернатив.//Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Институт системного анализа РАН, М., 1994.

[Петр95]. А.Б.Петровский. Метрические пространства мультимножеств.//Доклады Академии наук, 1995, Т.344, №2, 175-177.

[Петр00]. А.Б.Петровский. Комбинаторика мультимножеств.//Доклады Академии наук, 2000, Т.370, №6, 750-753.

[Петр01]. А.Б.Петровский. Агрегирование многопризнаковых объектов: подход теории мультимножеств.//Международный конгресс «Искусственный интеллект в XXI веке». Труды конгресса. – М.: Физматлит, 2001, том 1, 507-515.

[Петр02а]. А.Б.Петровский. Основные понятия теории мультимножеств. – М.: Едиториал УРСС, 2002.

[Петр02б]. А.Б.Петровский. Мультимножества как модель представления многопризнаковых объектов в принятии решений и распознавании образов.//Искусственный интеллект, 2002, №2, 236-243.

[Петр03]. А.Б.Петровский. Операции над мультимножествами.//Доклады Академии наук, 2003, Т.389, №1, 32-35.

[ПРШ98]. А.Б.Петровский, В.В.Румянцев, Г.И.Шепелев. Система поддержки поиска решения для конкурсного отбора.//Научно-техническая информация. Серия 2, 1998, №3, 46-51.

[ПШ90]. А.Б.Петровский, Г.И.Шепелев. Система поддержки принятия решений для конкурсного отбора научных проектов.//Проблемы и методы принятия уникальных и повторяющихся решений. Сборник трудов. – М.: ВНИИСИ, 1990, 25-31.

[Сач77]. В.Н.Сачков. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1977.

[Сла00]. О.А.Славин. Комбинированные алгоритмы в задачах распознавания текстов.// Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Институт системного анализа РАН, М., 2000.

[Сол99]. Е.А.Соловьева. Естественная классификация: системологические основания. – Харьков: ХТУРЭ, 1999.

[ТВА77]. Ю.Н.Тюрин, А.П.Василевич, П.Ф.Андрукович. Статистические модели ранжирования.//Статистические методы анализа экспертных оценок. – М.: Наука, 1977, 30-58.

[Тюр79]. Ю.Н.Тюрин. Экспертная классификация.//Экспертные методы в современных исследованиях. Сборник трудов. – М.: ВНИИСИ, 1979, 5-15.

[ШГ67]. Г.Е.Шилов, Б.Л.Гуревич. Интеграл, мера и производная (общая теория). – М.: Наука, 1967.

[Шре71]. Ю.А.Шрейдер. Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971.

[Юди89]. Д.Б.Юдин. Вычислительные методы теории принятия решений. – М.: Наука, 1989.

[Aig79]. M.Aigner. Combinatorial theory. – Springer-Verlag, New York, 1979. (М.Айгнер. Комбинаторная теория./Пер. с англ. – М.: Мир, 1982).

[And73]. M.R.Anderberg. Cluster Analysis for Applications. – Academic Press, New York, 1973.

[Ass79]. P.Assouad. Produit tensoriel, distances extrémales et réalisation de covariances.//Comptes Rendus de l'Acdémie des Sciences de Paris, 1979, 288(A), 649-652, 675-677.

[BDK66]. J.Bretagnolle, D.Dacunha-Castelle, J.-L.Krivine. Lois stables et espaces L^p.//Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1966, №2, 231-259.

[Bir67]. G.Birkhoff. Lattice theory. – Providence, Rhode Island, 1967. (Г.Биркгоф. Теория решеток./Пер. с англ. – М.: Наука, 1984).

[Blu53]. L.M.Blumenthal. Theory and applications of distance geometry. – Oxford University Press, Oxford, 1953.

[Bur61]. N.Bourbaki. Eléments de mathématiques. Livre I. Théorie des ensembles. – Hermann, Paris, 1961. (Н.Бурбаки. Элементы математики. Книга I. Теория множеств./Пер. с франц. – М.: Мир, 1965).

[BZ70]. R.E.Bellman, L.A.Zade. Decision-making in fuzzy environment.//Management Science, 1970, №4, 141-164. (Р.Беллман, Л.Заде. Принятие решений в расплывчатых условиях.// Вопросы анализа и процедуры принятия решений./Пер. с англ. – М.:Мир,1976,172-215).

[CFGV71]. V.G.Cerf, E.B.Fernandez, K.P.Gostelow, S.A.Volansky. Formal control-flow properties of a graph model of computation.//Report ENG-7178. Computer science department, University of California, Los Angeles, 1971.

[DGK63]. L.Danzer, B.Grunbaum, V.Klee. Helly's theorem and its relatives. – Providence, Rhode Island, 1963. (Л.Данцер, Б.Грюнбаум, В.Кли. Теорема Хелли и ее применения./Пер. с англ. – М.: Мир, 1968).

[DL97]. M.M.Deza, M.Laurent. Geometry of cuts and metrics. – Springer-Verlag, Berlin, 1997. (М.М.Деза, М.Лоран. Геометрия разрезов и метрик./Пер. с англ. – М.: МЦНМО, 2001).

[DM79]. N.Dershowitz, Z.Manna. Proving termination with multiset ordering.//Communication of ACM, 1979, V.22, №8, 465-476.

[Eng77]. R.Engelking. General Topology. – Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1977. (Р.Энгелькинг. Общая топология./Пер. с англ. – М.: Мир, 1986).

[Ev74]. B.Everitt. Cluster Analysis. – Wiley, New York, 1974.

[Fi94]. B.Fichet. Dimensionality problem in L_1-norm representation.//B. Van Cutsem (Ed.). Classification and dissimilarity analysis. – Springer-Verlag, New York, 1994, 201-224.

[FKD64]. R.Faure, A.Kaufman, M.Denis-Papin. Mathématiques nouvelles. – Dunod, Paris, 1964. (Р.Фор, А.Кофман, М.Дени-Папен. Современная математика./Пер. с франц. – М.: Мир, 1966).

[GMS98]. S.Greco, B.Matarazzo, R.Slowinski. A rough set approach to multicriteria and multiattribute classification.//L.Polkowski and A.Skowron (Eds.). Rough sets and current trends in computing. – Springer-Verlag, Berlin, 1998, 60-67.

[Go71]. J.C.Gower A general coefficient of similarity and some of its properties.//Biometrics, 1971, V.27, №43, 857-872.

[Har69]. F.Harary. Graph theory. – Addison-Wesley, Reading, 1969. (Ф.Харари. Теория графов./Пер. с англ. – М.: Мир, 1973).

[Hart75]. J.A.Hartigan. Clustering Algoritms. – Wiley, New York, 1975.

[HO80]. G.Huet, D.C.Oppen. Equations and rewrite rules: a survey.//R.Book (Ed.). Formal languages perspectives and open problems. – Academic Press, New York, 1980.

[Jam78]. M.Jambu. Classification automatique pour l'analyse des donnees. – Bordas, Paris,1978. (М.Жамбю. Иерархический кластерный анализ и соответствия./Пер. с франц. – М.: Финансы и статистика, 1988).

[JL82]. J.P.Jouannaud, P.Lescanne. On multiset ordering.//Information Processing Letters, 1982, V.15, №2, 57-63.

[Kau77]. A.Kaufman. Introduction a la théorie des sous-ensemble flous. – Masson, Paris, 1977. (А.Кофман. Введение в теорию нечетких множеств./Пер. с франц. – М.: Радио и связь, 1982).

[KM67]. K.Kuratowski, A.Mostowski. Set theory. – North-Holland, Amsterdam - Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1967. (К.Куратовский, А.Мостовский. Теория множеств./Пер. с англ. – М.: Мир, 1970).

[Knu69]. D.E.Knuth. The art of computer programming. V.2. Seminumerical algorithms. – Addison-Wesley, Reading, 1969. (Д.Э.Кнут. Искусство программирования.Т.2. Получисленные алгоритмы./Пер. с англ. – М.: Мир, 1977).

[Knu92]. D.E.Knuth. Context-free multilanguages.//J.D.Ullman (Ed.). Theoretical studies in computer science. – Academic Press, New York, 1992, 1-13.

[KS62]. J.G.Kemeni, J.L.Snell. Mathematical models in the social sciences. – Ginn, Boston, 1962. (Дж.Кемени, Дж.Снелл. Кибернетическое моделирование./Пер. с англ. – М.: Советское радио, 1972).

[LG63]. R.D.Luce, E.Galanter. Psychophysical scales.//R.D.Luce, R.R.Bush, E.Galanter. (Eds.). Handbook of mathematical psychology. –Wiley, New York, 1963, V.1, 201-224. (Р.Льюс, Е.Галантер. Психофизические шкалы.//Психологические измерения./Пер. с англ. – М.: Мир, 1967, 111-195).

[Li90]. B.Li. Fuzzy bags and applications.//Fuzzy Sets and Systems, 1990, №34, 61-71.

[Lip82]. W.Lipski. Kombinatoryka dla programistow. – Wydawnictwa naukowo-techniczne, Warszawa, 1982. (В.Липский. Комбинаторика для программистов./Пер. с польск. – М.: Мир, 1988).

[LM97]. Larichev O.I., Moshkovich H.M. Verbal Decision Analysis for Unstructured Problems. – Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.

[Mi87]. S. Miyamoto. Cluster analysis as a tool of interpretation of complex systems.//Working paper WP-87-41. IIASA, Laxenburg, Austria, 1987.

[MS58]. F.Marczewski, H.Steinhaus. On certain distance of sets and the corresponding distance of functions.//Colloquium Mathematicum, 1958, №6, 319-327.

[Oxt71]. J.Oxtoby. Measure and category. – Springer-Verlag, New York, 1971. (Дж.Окстоби. Мера и категория./Пер. с англ. – М.: Мир, 1974).

[Par66]. R.J.Parikh. On context-free languages.//Journal of the Association for Computing Machinery, 1966, V.13, №4, 570-581.

[Pet76]. J.L.Peterson. Computation sequence sets.//Journal of Computer and System Sciences, 1976, V.13, №1, 1-24.

[Pet81]. J.L.Peterson. Petri net theory and the modeling of systems. – Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, 1981. (Дж.Питерсон. Теория сетей Петри и моделирование систем./Пер. с англ. – М.: Мир, 1984).

[Petr92]. A.B.Petrovsky. An axiomatic approach to metrization of multiset space.//The 10th International Conference on Multiple Criteria Decision Making. Proceedings. – Taipei, Taiwan, R.O.C. July 19-24, 1992, V.1, 381-390.

[Petr94]. A.B.Petrovsky. An axiomatic approach to metrization of multiset space.//G.H.Tzeng, H.F.Wang, U.P.Wen, P.L.Yu (Eds.). Multiple Criteria Decision Making. – Springer-Verlag, New York, 1994, 129-140.

[Petr97]. A.B.Petrovsky. Structuring techniques in multiset spaces.//G.Fandel, T.Gal with T.Hanne (Eds.). Multiple Criteria Decision Making. – Springer-Verlag, Berlin, 1997, 174-184.

[Petr01a]. A.B.Petrovsky. Multiattribute sorting of qualitative objects in multiset spaces.// M.Koksalan, S.Zionts (Eds.). Multiple Criteria Decision Making in New Millennium. – Springer-Verlag, Berlin, 2001, 124-131.

[Petr01b]. A.B.Petrovsky. Constructing a general decision rule for contradictory expert classification of multiattribute objects.//Pattern Recognition and Image Analysis, 2001,V.11,№1,73-76.

[Petr01c]. A.Petrovsky. Method for approximation of diverse individual sorting rules.//Informatica, 2001, V.12, №1, 109-118.

[Petr01d]. A.Petrovsky. Multiple criteria project selection based on contradictory sorting rules.// M.Goldevsky, H.Mayr (Eds.). Information Systems Technology and its Applications. – Gesellschaft fur Informatik, Bonn, 2001, 199-206.

[PS94]. Z.Pawlak, R.Slowinsky. Rough set approach to multi-attribute decision analysis.//European Journal of Operational Research, 1994, №72, 443-459.

[Reb93]. A.Rebai. BBTOPSIS: A bag based technique for order preference by similarity to ideal solution.//Fuzzy Sets and Systems, 1993, №60, 143-162.

[Reb94]. A.Rebai. Canonical fuzzy bags and bag fuzzy measure as a basis for MADM with mixed non cardinal data.//European Journal of Operational Research, 1994, №78, 34-48.

[Roy96]. B.Roy. Multicriteria methodology for decision aiding. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[RT60]. D.Rogers, T.Tanimoto. A computer program for classifying plants.//Science, 1960, V.132, №3434, 1115-1118.

[Slo95]. R.Slowinski. Rough set approach to decision analysis.//AI Expert, 1995, V.10, №3, 19-25.

[SS73]. P.H.A.Sneath, R.R.Sokal. Numerical taxonomy. The princi1ples and practice of numerical classification. – Freeman, San Francisco, 1973.

[SeS03]. M.Sertel, A.Slinko. Ranking committees, words or multisets. 2003 (Unpublished).

[WW27]. E.T.Whittaker, G.N.Watson. A course of modern analysis. – University Press, Cambridge, 1927. (Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс современного анализа./Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1963).

[Yag86]. R.R.Yager. On the theory of bags.//International Journal of General Systems, 1986, V.13, 23-37.

[Za65]. L.A.Zadeh. Fuzzy sets.//Information and Control, 1965, V.8, №3, 338-353.

[ZZG84]. H.J.Zimmerman, L.A.Zadeh, B.R.Gaines. Fuzzy sets and decision analysis. – North-Holland, Amsterdam, 1984.

Основные обозначения

a	– элемент, число
$\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$	– вектор
$A=\{a,b,c,\ldots\}$	– множество
$\boldsymbol{A}=\{3a,b,2c,\ldots\}$	– мультимножество
$\mathrm{A}=\|a_{ij}\|_{m\times n}$	– матрица размерности $m\times n$
A'	– производное множество множества A
$\boldsymbol{C}_{[h]}$	– постоянное мультимножество высоты h
d_X	– метрика, псевдометрика, симметрика, ультраметрика
F_σ	– счетное объединение замкнутых множеств
G_δ	– счетное пересечение открытых множеств
G	– порождающее множество, домен мультимножеств
k_A	– функция числа экземпляров, функция кратности мультимножества $\boldsymbol{A}$
m	– мера множества, мультимножества
m^*	– внешняя (верхняя) мера множества, мультимножества
m_*	– внутренняя (нижняя) мера множества, мультимножества
$q_s{}^*$	– аппроксимирующий признак
$Q_s=\{\,q_s^{e_s}\,\}$	– набор признаков, критерий оценки объекта
$R=\{r_t\}$	– правила сортировки объектов
r_i	– ранг объекта
U	– основное множество
x_{A^*}	– пиковый элемент, пик мультимножества $\boldsymbol{A}$
x^*	– класс эквивалентности, содержащий элемент x
X^*	– пополнение неполного метрического пространства X
$\boldsymbol{Z}$	– максимальное мультимножество (универсум)
$D_X(A)$	– диаметр множества $A\subset X$
$\mathrm{hgt}\boldsymbol{A}$	– пиковое значение, высота мультимножества $\boldsymbol{A}$
$\mathrm{Int}A$	– внутренность, открытое ядро множества A
$\mathrm{Fr}A$	– граница множества A
$O_r(x_0)$	– окрестность точки x_0
$\mathrm{Supp}\boldsymbol{A}$	– опорное множество, носитель мультимножества $\boldsymbol{A}$
$\{A_n\}$	– последовательность множеств
$\{\boldsymbol{A}_n\}$	– последовательность мультимножеств
$\{f_n(x)\}$	– последовательность функций
$\{x_n\}$	– последовательность элементов, точек
$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$	– обобщенная последовательность, направленность
$\{x_{nm}\}$	– двойная последовательность
(a,b)	– открытый интервал
$[a,b]$	– замкнутый интервал
$\langle a,b\rangle$	– упорядоченная пара элементов
$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$	– n-элементный кортеж, n-ка
$B[x_0,r]$	– замкнутый шар радиуса r с центром в точке x_0
$O(x_0,r)$	– открытый шар радиуса r с центром в точке x_0
$O(A,r)$	– шар, окружающий множество A
$S[x_0,r]$	– сфера радиуса r с центром в точке x_0

$d_X(x,y)$	– расстояние между точками x и y множества X
$d_t(x,y)=t\mathbb{1}$	– эквидистантная метрика
$d(x,A)$	– расстояние от точки x до множества A
$d_{Xqp}(A,B)$	– расстояние между измеримыми множествами A и B
$d_{Zqp}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$	– расстояние между измеримыми мультимножествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$
$(\mathcal{A}, d)$	– метрическое пространство множеств, мультимножеств
(L,d_v)	– пространство решетки
(V,d_Γ)	– графическое пространство, ассоциированное с графом Г
(X,d_X)	– метрическое пространство элементов, точек
$(X, F(d_X))$	– метрически преобразованное пространство
$(X,\mathcal{T})$	– топологическое пространство
$(X,\mathcal{S}, m)$	– пространство множеств, мультимножеств с мерой
$c=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_c,d_m)$	– пространство равномерно сходящихся числовых последовательностей
$C[0,1]=(C,d_C)$	– пространство непрерывных на интервале [0,1] функций
$E^1=(\mathbb{R},d_{E1})$	– числовая прямая
$E^2=(\mathbb{R}^2,d_{E2})$	– числовая плоскость
$E^n=(\mathbb{R}^n,d_{En})$	– n-мерное числовое (координатное, евклидово) пространство
$I^n=(\mathbb{R}_{01}{}^n,d_{En})$	– n-мерное кубическое пространство (n-мерный куб)
$l^n{}_p=R^n{}_p=(\mathbb{R}^n,d_{Rp})$	– n-мерное векторное пространство
$l^\infty{}_p=l_p=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d_{lp})$	– пространство ограниченных числовых последовательностей
$L_\infty=(\mathcal{S}, d_{L\infty})$	– пространство ограниченных измеримых функций
$L_\infty[0,1]=(\mathbb{R}_{01},d_{L\infty})$	– пространство ограниченных измеримых на интервале [0,1] функций
$L_p=(\mathcal{S}, d_{Lp})$	– пространство интегрируемых измеримых функций
$L_p[0,1]=(\mathbb{R}_{01},d_{Lp})$	– пространство интегрируемых измеримых на интервале [0,1] функций
$M[0,1]=(M,d_M)$	– пространство ограниченных на интервале [0,1] функций
$s=(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_s,d_s)$	– пространство неравномерно сходящихся числовых последовательностей
$S=(\mathcal{S}, d_S)$	– пространство измеримых функций
$S[0,1]=(\mathbb{R}_{01},d_S)$	– пространство измеримых на интервале [0,1] функций
$Z^n{}_{(1)1}=(\mathbb{Z}_{01}{}^n,d_{R1})$	– n-мерное гиперкубическое пространство (n-мерный гиперкуб)
$X_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Xqp})$	– пространство измеримых множеств
$Z_{qp}=(\mathcal{S}, d_{Zqp})$	– пространство измеримых мультимножеств
$\mathcal{A}=\{A,B,C,\ldots\}$	– семейство множеств
$\mathcal{A}=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\ldots\}$	– семейство мультимножеств
$\mathsf{A}=\{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\ldots\}$	– система множеств, мультимножеств
$\mathcal{C}_n$	– семейство n-мерных целочисленных векторов
$\mathcal{E}$	– полукольцо множеств, мультимножеств
$\mathcal{K}$	– кольцо множеств, мультимножеств
$\mathcal{K}(\mathcal{E})$	– минимальное кольцо, порожденное полукольцом $\mathcal{E}$
$\mathcal{K}_\delta$	– δ-кольцо множеств, мультимножеств
$\mathcal{K}_\sigma$	– σ-кольцо множеств, мультимножеств
$\mathcal{P}(X)$	– семейство подмножеств (булеан) множества X
$\mathcal{P}(\boldsymbol{X})$	– семейство подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}$
$\mathcal{P}_{[k]}$	– k-ограниченная серия мультимножеств
$\mathcal{P}_{[\infty]}$	– неограниченная серия мультимножеств
$\mathcal{S}(X)$	– σ-алгебра подмножеств множества X
$\mathcal{S}(\boldsymbol{X})$	– σ-алгебра подмультимножеств мультимножества $\boldsymbol{X}$

$\varnothing$	– пустое множество, пустое мультимножество
$\mathbb{I}$	– множество иррациональных чисел
$\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$	– множество натуральных чисел
$\mathbb{Q}$	– множество рациональных чисел
$\mathbb{Q}_+$	– множество неотрицательных рациональных чисел
$\mathbb{Q}_{01}$	– множество рациональных чисел из интервала [0,1]
$\mathbb{R}$	– множество действительных чисел
$\mathbb{R}_+$	– множество неотрицательных действительных чисел
$\mathbb{R}_{01}=[0,1]$	– множество действительных чисел из интервала [0,1]
$\mathbb{Z}$	– множество целых чисел
$\mathbb{Z}_+$	– множество неотрицательных целых чисел
$\mathbb{Z}_{01}=\{0,1\}$	– бинарное множество
$\mathbb{Z}_{kl}=\{k,k+1,\ldots,l\}$	– множество целых чисел от k до l
$\delta_X^{(A)}(x,y)$	– разрезная полуметрика для множества $A\subset X$
$\delta_X^{(A_1,\ldots,A_k)}(x,y)$	– мультиразрезная полуметрика для разбиения $(A_1,\ldots,A_k)$ множества X
Γ	– граф, мультиграф
$\Gamma(V_1,V_2,E)$	– двудольный граф, двудольный мультиграф
K_n	– единичный n-мерный куб-граф
Λ_n	– n-мерный параллелепипед-граф
$\Lambda_n{}^*$	– полный n-мерный параллелепипед-граф
$\Theta(V,\mathcal{W})$	– гиперграф
χ_A	– характеристическая функция множества, мультимножества A
inf	– точная нижняя грань
sup	– точная верхняя грань
min	– минимальный элемент, минимальное значение
max	– максимальный элемент, максимальное значение
$\lim\limits_{n\to\infty}$	– предел последовательности при $n\to\infty$
$\varliminf\limits_{n\to\infty}$	– нижний предел последовательности при $n\to\infty$
$\varlimsup\limits_{n\to\infty}$	– верхний предел последовательности при $n\to\infty$
$\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha$	– предел обобщенной последовательности
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	– предел функции $f(x)$ в точке x_0
$\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$	– нижний предел функции $f(x)$ в точке x_0
$\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$	– верхний предел функции $f(x)$ в точке x_0
$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$	– левый предел функции $f(x)$ в точке x_0
$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$	– правый предел функции $f(x)$ в точке x_0
$\to$	– сходимость последовательности к пределу, отображение
$\to_d$	– сходимость последовательности к пределу по метрике d
$\to_{mes}$	– сходимость последовательности к пределу по мере m
$\to_{aew}$	– сходимость последовательности к пределу почти всюду

$\uparrow$	– возрастание (неубывание) последовательности
$\downarrow$	– убывание (невозрастание) последовательности
$\succ$	– строгое упорядочение множеств, мультимножеств
$\subset$	– строгое включение множества, мультимножества
$\subseteq$	– нестрогое включение множества, мультимножества
$\subseteq_m$	– m-включение множества, мультимножества
$=_m$	– m-равенство множеств, мультимножеств
$\sim$	– эквивалентность множеств
$\cong$	– одноименная S-эквивалентность мультимножеств
$\approxeq$	– разноименная D-эквивалентность мультимножеств
$\forall$	– квантор общности («для любых…из», «для каждого…из»)
$\exists$	– квантор существования («существует такой…, что…»)
$\wedge$	– логическое И («и тот, и другой»)
$\vee$	– логическое ИЛИ («хотя бы один из…»)
$\rceil$	– логическое НЕ (в смысле отрицания)
$\Rightarrow$	– логическое следствие («если…, то…»)
$\Leftrightarrow$	– логическая эквивалентность («тогда и только тогда, когда…»)
$\lvert\ \rvert$	– абсолютная величина (модуль) числа, вектора, мощность множества, мультимножества
$/\ /$	– размерность мультимножества
$\lVert\ \rVert$	– матрица
$[\ ]$	– замыкание множества
$\bar{\ }$	– дополнение множества, мультимножества
$\bigcup$	– объединение множеств, мультимножеств
$\bigcap$	– пересечение множеств, мультимножеств
$+$	– арифметическое сложение мультимножеств
$\setminus$	– теоретико-множественное вычитание множеств
$-$	– арифметическое вычитание мультимножеств
Δ	– симметрическая разность множеств, мультимножеств
$\cdot$	– умножение чисел, скалярное произведение векторов
$\bullet$	– арифметическое умножение мультимножеств, умножение мультимножества на число, кратность вхождения элемента в мультимножество
$\times$	– прямое произведение множеств, мультимножеств
^{n}	– арифметическая n-ая степень мультимножества
$(\times)^n$	– прямая n-ая степень множества, мультимножества
$\circ$	– композиция отображений
□	– окончание замечания
◘	– окончание примера
◙	– окончание алгоритма
■	– окончание доказательства

Предметный указатель