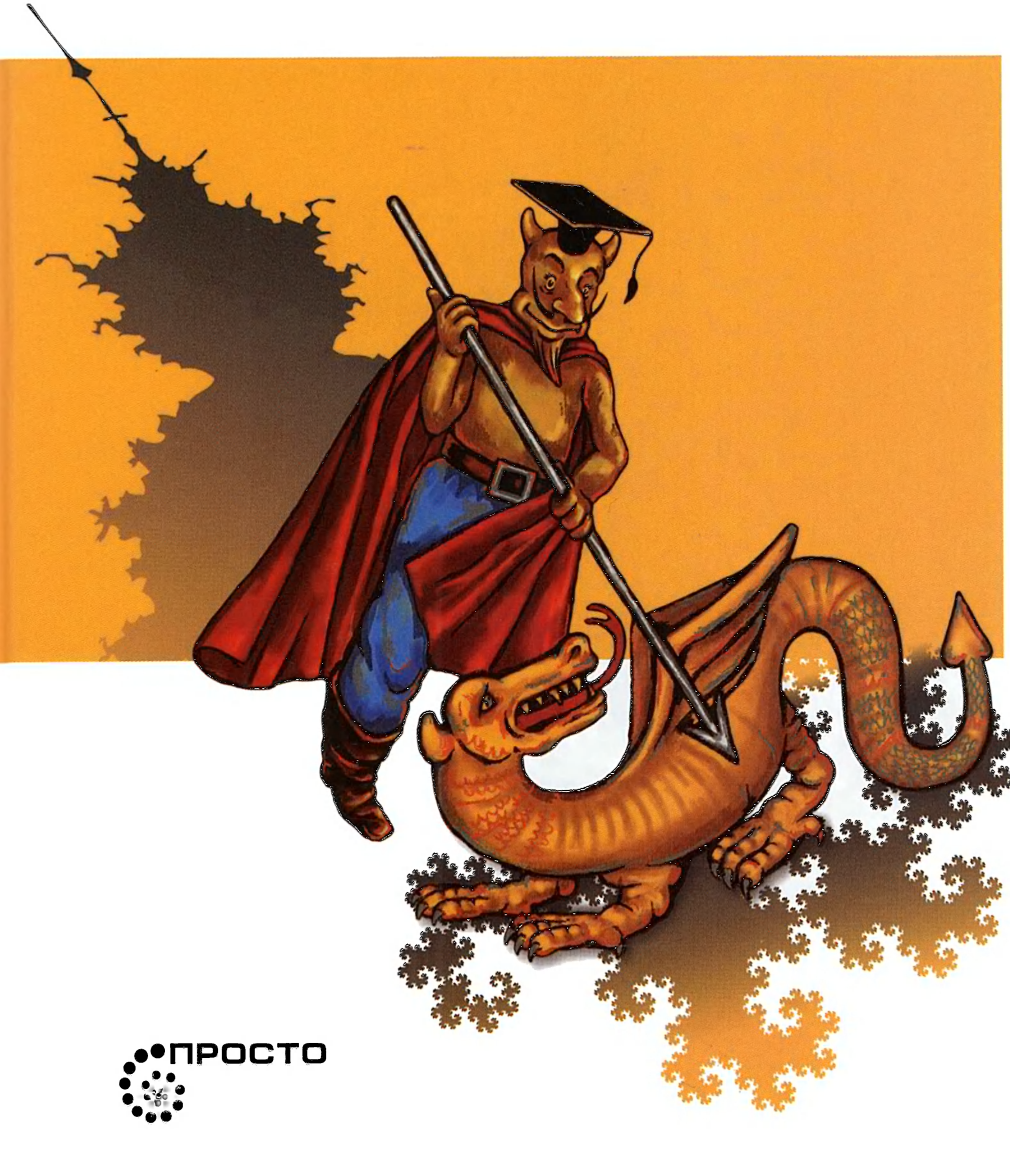
Сергей Деменок

ПРОСТО ФРАКТАЛ



ПРОСТО

Сергей Деменок

ПРОСТО ФРАКТАЛ

СТРАТА
Санкт-Петербург
2012

УДК 514:515.1+330
Д 30

Д 30 **Деменок С. Л.** Просто фрактал. — СПб.:
ООО «Страта», 2012. — 168 с.

ISBN 978-5-906150-01-1

Фрактальную геометрию открыл Бенуа Мандельброт в конце 1970-х годов. Фракталы появились на обложках глянцевых журналов и сразу привлекли внимание не только учёных и инженеров, но также дизайнеров и модельеров. Фракталы оказались полезными не только как математический инструмент для расчёта и описания сложных, рваных, «измятых» или изрезанных форм, но также для иллюстрации и интерпретации симбиоза на первый взгляд антагонистических идей и представлений. Мир не фрактален. Но фрактал блестяще иллюстрирует сложные сетевые структуры, которые не имеют фундаментальных элементов, не имеют «дна элементарности». Фрактал иллюстрирует единство формы и алгоритма, метода и результата. И это единство символизирует фрактальная размерность – число инвариантное на всех масштабах фрактала.

Настоящая книга посвящена фракталам не для математиков, не для инженеров и не для философов. Она для тех, кому нужно часто принимать правильные решения в нашем интенсивном сетевом настоящем. Она – для интеллектуалов в начале пути и поседевших от проблем управляющих. Словом, для тех, кто понимает, что путь от тривиального к простому лежит через сложное.

Моей маме –

моё приношение

МАНИФЕСТ ФРАКТАЛЬНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Не вечные истины, но правдивые интерпретации придают смысл существующему. Где начинается смысл, там сразу же начинается миф. Мифические Боги и чудесные существа – драконы, химеры, кентавры – есть, прежде всего, символы. Старые мифы великолепны, но они неповторимы. Символический язык новых мифов прилаживается к новым правдивым интерпретациям окружающего нас мира. Мы живём на планете, обращающейся вокруг звезды во внешнем рукаве спиральной галактики Млечный Путь. Пыль в спиральных рукавах мешает нам наблюдать собственную галактику, но по сторонам видимость отличная. Пространство вокруг причудливо изгибается и сворачивается, формируя единое варево с веществом, пропадающим в чёрных дырах и возникающим из «квантового вакуума». Рациональный опыт всё ближе сходится с опытом мистическим: «то, что вверху, то и внизу». И наше существование напоминает скольжение по ленте Мёбиуса, в котором метаморфозы внешнего и внутреннего, субъекта и объекта, прошлого и будущего образуют фантастическую реальность, которую мы желаем представить всю и сразу. Наши наблюдения часто несвязны, фрагментарны, и они конфликтуют между собой. И это влечёт одно, но существенное следствие – замедляет принятие решений. Поэтому цельная, слаженная и адекватная интерпретация мира и насущна и необходима.

Оглянитесь вокруг. Расслоение вещества, событий, мнений – обычное дело. Всё чаще мы слышим о стратификации (расслоении), в ходе которой формируются обособленные многообразия со своими уникальными мерами и ценностями. Окружающий нас мир стратифицирован по всем швам. В таком мире не существует базовых, фундаментальных первоэлементов, нет «дна элементарности». Мир напоминает бескрайнюю сеть Индры, украшенную драгоценными камнями и кусочками хрусталя, каждая драгоценность отражает все остальные и сама отражается во всех остальных. Ни одно свойство какой-либо части этой сети не является фундаментальным: все свойства одной части вытекают из свойств других частей, и общая связанность взаимоотношений определяет структуру всей сети. И чтобы не свернуть голову в этой перекрёстной стратификации, целесообразно выделить три магистральные страты. Назовём их суперстратами. Это пространственно-временная (предметная, вещественная, событийная) суперстрата; операционально-импульсная (акт действия, закон, ритуал) суперстрата и третья, имагинативная (воображаемая, символическая, виртуальная) суперстрата. Суперстраты друг в друга проникают и друг другом проницаемы. Любой фрагмент сетевого мира существует в поле этих суперстрат. Кластеры и структуры окружающего нас мира напоминают сплетённые спагетти или замысловатую шнуровку, сети, узлы и переплетения которой подчиняются строгому расчёту, любая случайная вариация зажата «двойной клешнёй» строгих правил.

Для иллюстрации и интерпретации такой сетевой реальности нужен ясный и точный геометрический образ. И таким образом может служить фрактал. Фрактальные формы имитируют разнообразные структуры, в которых и порядок и строй реализуются на всех масштабах согласованно и взаимосвязано. В этом ракурсе фрактал служит как нить Ариадны. Он сокращает путь в лабиринте конфликтных и парадоксальных интерпретаций фрагментов реальности. Фрактал наглядно и математически точно демонстрирует механизм ладного и согласованного симбиоза на первый взгляд отдельных и противоречивых эффектов и свойств «интенсивного настоящего». Мир не фрактален. Но фрактальная иллюстрация переводит многие его качества в формат здравого смысла. Кроме того, фракталы приятны для восприятия. Соблазн фрактальной интерпретации в том, что неиссякаемая эманация не сводится к примитивному дроблению, а единство не отождествляется с неделимостью. И ещё – у фрактала есть три ипостаси: формальная (геометрический образ, фигура), операциональная (алгоритм, правило, формула) и производная математического воображения – имагинарная, воображаемая (символ, число, фрактальная размерность). Эти ипостаси служат отображением трёх суперстрат. А сами фрактальные структуры моделируют сетевую иерархию, в которой мы живём.

I. ПУТЕШЕСТВИЕ К ИСТОКАМ

ЧЁРТ В САПОГАХ

Однажды я заснул, перечитывая известный рассказ Леонида Андреева «Правила добра». И во сне ко мне явился чёрт. Сначала проступил его большой любопытный нос, потом недоверчивая ухмылка, потом – голова и торс. Материализовавшаяся часть чёрта тут же облокотилась на невесть откуда возникшую шахматную доску и принялась трясти стаканчиком уличного напёрсточника – на доску высыпалась пригоршня цифр. Чёрт задумчиво расставлял их по клеткам, выстраивая некий порядок: 1, 2, 3, 5, 8, 13... На этой цифре он лукаво подмигнул и явился в полный рост. Чёрт был в сапогах. Всё так же ниоткуда возникли венское кресло, фолиант в кожаном переплёте, чернильница и гусиное перо. В кресле чёрт в сапогах устроился вальяжно. С показным удовольствием он открыл фолиант, на титульном листе которого я мог без труда прочитать название: «Слухи и сплетни, ходившие в Лиме в изящном 1826 году» перуанского писателя Ное Кальсадильяса[1]. Только теперь я обратил внимание на зеркало, висевшее на стене комнаты. В нём отражался чёрт в сапогах, но вместо фолианта в кожаном переплёте в руках у него был тоненький хромированный планшетник, вместо чернильницы – толстая таблетка памяти, а вместо гусиного пера – сканер-карандаш. Сидел зазеркальный чёрт в кожаном вращающемся кресле, положив ногу на ногу и демонстрируя сапоги a la Camouflage[2]. Перед ним простиралась столешница из матового стекла, на которой по какой-то причине встретились английский зонтик и швейная машинка «Зингер». Зазеркальный кабинет своей стерильной белизной напоминал

---

1 Увы, единственное упоминание об этой книге и её авторе содержится в романе лауреата Нобелевской премии по литературе 1982 г. Габриэля Гарсиа Маркеса «Генерал в своём лабиринте» (1989), так что искать сей труд в библиотеках не стоит. *[Здесь и далее прим. ред.].*

2 ***A la Camouflage*** – здесь, известный бренд резиновых сапог (*фр. camouflage* – «маскировка» – под камуфляж, т. е. пятнистой маскировочной окраски).

анатомический театр или белое пространство матрицы из одноимённого культового фильма. Каждым жестом отражение чёрта точно повторяло свой прообраз. Настолько, что не оставалось сомнений: они читают и правят один и тот же текст. Причём после каждой правки вокруг происходили едва различимые и точно согласованные изменения. Например, когда исказился узор на персидском ковре, то синхронно с ним изменился узор Морриса[1] на обоях. На лице у чёрта появлялись морщинки, на голенищах сапог – новые складки. Пластика перемен исключала разрывы реальности. Всё вокруг трансформировалось настолько согласованно, что во сне чувство реальности не ослабевало, но только усиливалось. Черти в сапогах, реальный и отражённый, заговорщически подмигнули друг другу, и первый пропел тему «Тонального канона» Баха. Не успел он завершить, как зазеркальный подхватил её, взяв на несколько тонов выше. И едва он довёл тему до конца, как её же подхватил реальный, взяв ещё несколькими тонами выше. Так продолжалось, пока от «Музыкального приношения» Баха не осталось ни единого звука, доступного слуху. Реальный чёрт при этом перелистывал свой фолиант – от конца к началу – и, дойдя до титульного листа, озадаченно почесал гусиным пером за ухом. На титульном листе теперь можно было прочесть новое название – «Слухи и сплетни о высшем замысле в памятном 2011 году» английского учёного Хопкайнда[2]. Оба чёрта принялись редактировать новейший текст без какого-либо перерыва. Однако один из них промурлыкал нечто вроде: «*Nomen est numen*[3]», – а второй в той же тональности: «*Почти постав*». Обе фразы могли быть наполнены разными смыслами и потому оставались бессмысленными. Тем временем происходящее во сне становилось всё «страньше и страньше». В процессе едва уловимых искажений реальная комната стала клинически белой, тогда как зазеркальная обрела декор в стиле модерн начала прошлого века. Да и сами черти будто поменялись местами. Процесс, который захватил их обоих, хотя и включал повторяющиеся операции, представлял собой совершенно непредсказуемый операциональный ряд. Единственное, что оставалось неизменным, были сапоги. И сапоги действительно заслуживали внимания. По форме они напоминали сапоги Шварца[4], их голенище собиралось частыми треугольными складками, площадь которых, как известно, ничем не ограничена, а размерность чуть превышала размер-

1 ***Узор Морриса*** – Уильям Моррис (1834–1896) – английский поэт, художник-прерафаэлит, издатель. В 1861 г. он основал фирму по производству предметов декоративно-прикладного искусства «Моррис, Маршалл, Фолкнер и К°», вскоре ставшую ведущей мануфактурой Европы в этой области и просуществовавшую до 1940 г. Среди прочего, она выпускала и обои по рисункам самого Морриса – преимущественно с растительным и геометрическим орнаментом.

2 Возможно, автор имеет в виду книгу учёного-астрофизика Стивена Хокинга «Высший замысел», вышедшую на русском языке в 2012 году.

3 ***Nomen est numen*** (лат.) – назвать – значит узнать.

4 ***Сапог Шварца*** – это не шедевр обувного искусства, а семейство приближений кругового цилиндра с помощью полиэдральных поверхностей.

ность гладкой поверхности, равной двум. Как ни странно, меня не покидала уверенность, что вся реальность сна слажена и согласованна именно присутствием этого странного символа – фрактальных складок на голенище сапога. Во сне это представлялось и естественным, и логичным, очевидным на уровне здравого смысла. По чистой случайности мысль зацепилась за фрактальный сапог именно в тот момент, когда в комнату начали проникать посторонние звуки, которые, нарастая, оформились в дружное разноголосье птиц, предвещающих рассвет. Их пение пробуждает мягко и сохраняет не только флёр сна, но также его сюжет и смысл.

Проснувшись, я уже не мог ничего поделать с потребностью разобраться, откуда и как взялись фракталы. И это стало побудительным мотивом к написанию книги.

Nomen est numen – эта мысль, столь естественная вплоть до позднего средневековья, становится крамольной в эпоху господства естественнонаучного познания и сопутствующего ему развития индустриального общества. Однако всё переменилось. Самая радикальная революция изо всех, произошедших в XX веке, случилась в тишине и осталась почти незамеченной. Её манифест производит впечатление парадокса: истины не существует. Точнее, не существует трансцендентной, объективной, абсолютной истины. Этот переворот мысли ведёт в самую гущу окружающей нас реальности, отличительным качеством которой стал символический обмен. В символическом мире означающее сливается с означаемым до такой степени, что назвать – действительно значит узнать. История появления фрактала иллюстрирует то, как эта идея проникает в самую сердцевину рационального мышления – в математику.

Ещё в начале XX века Анри Пуанкаре заметил:

> *«Удивляешься силе, которую может иметь одно слово. Вот объект, о котором ничего нельзя было сказать, пока он не был окрещён. Достаточно было дать ему имя, чтобы произошло чудо».*

Так и случилось, когда в 1975 году по созвучиям и подобиям сотрудник научно-исследовательского центра «IBM» в Йорктауне французский математик польского происхождения Бенуа Мандельброт собрал Слово. Из латинских слов *frangere* (ломать) и *fractus* (разрывный, дискретный, дробный) сложился фрактал. Слово получилось созвучным английским *fracture* (разрыв) и *fraction* (дробь). Более того, помимо значения «фрагментированный» (как, например, в словах «фракция» или «рефракция»), слово *fractus* имеет значение «неправильный по форме» – примером сочетания обоих значений может служить слово «фрагмент». Однако фрактал – не фрагмент. Мандельброт без намерения, быть может, только по наитию встроил в последний слог термина «фрактал» одну из самых важных ассоциаций (FRACTionAL) – алгоритм. Здесь уместно напомнить, что слово «алгоритм» – латинизированная форма имени Ал-Хорезми[1]. Алгоритм есть правило, инструкция, рецепт, суть которых сводится к формуле – «делай то, затем это». Вы понимаете, почему компьютеры любят алгоритмы? Потому, что любят чёткие, скучные, повторяющиеся операции. Но именно благодаря этой способности компьютеров выполнять рутинные задачи без устали и потери фокуса вни-

1 ***Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми*** (ок. 783 – ок. 850) – хорезмийский математик, астроном и географ, основатель классической алгебры.

мания стало возможным создание фрактальной геометрии. Мандельброт работал на фирме IBM и по роду службы имел дело с лучшими на то время компьютерами. Без вычислительной техники фрактальная геометрия не могла бы сформироваться и захватить внимание научного сообщества.

Подобно опытному бренд-менеджеру, Мандельброт искусно продвигал и пропагандировал фрактал как бренд с опорой на эмоциональную привлекательность и рациональную полезность. Полезность нового математического объекта он иллюстрирует в трёх монографиях: «Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность» (1975), «Фракталы: форма, случайность и размерность» (1977) и «Фрактальная геометрия природы» (1982). Не забыл Мандельброт и про броский слоган:

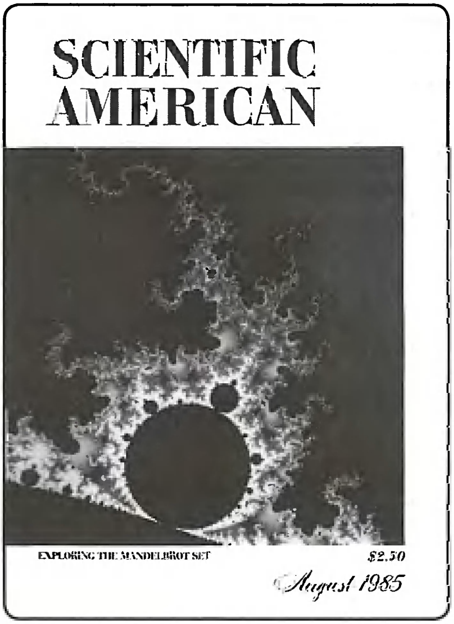
«У геометрии природы – фрактальное лицо».

У новой геометрии появляется логотип – «фрактал Мандельброта», который появляется на глянцевых обложках журналов и становится украшением выставок компьютерного искусства в восьмидесятых годах XX века. Всё без чудес – естественно. Техника продвижения новой идеи в массы не отличается от продвижения новейших гаджетов.

Рекламную компанию поддержали. Немецкие математики Хайнц-Отто Пайтген и Ханс Петер Рихтер выпускают роскошно иллюстрированную книгу «Красота фракталов». Майкл Барнсли из Джорджийского технологического института (США) публикует монографию «Фракталы повсюду», в предисловии к которой предостерегает:

> *«Фрактальная геометрия изменит ваше представление о мире. Дальше читать опасно. Вы рискуете утратить детское восприятие облаков, пены, галактик, листьев, цветов, скал, водных брызг и многого другого. Никогда вновь ваше впечатление о мире не станет прежним»*

Что ещё нужно для завладения вниманием? Скандал. И он развернулся в дискуссиях на страницах журнала «Математический информатор» («Mathematical Intelligencer»). В очередь за славой изобретателей ещё вчера безымянной геометрии, а сегодня геометрии фрактальной, выстроилась целая очередь учёных-математиков. Одни из них, Р. Брукс и Дж. Мателски (с подачи Стивена Дж. Кранца в упомянутом выше журнале), утверждали, будто именно они если не изобретатели, то уж никак не меньше, чем соавторы или вдохновители теории фракталов. Ведь они, по их мнению, описали фракталы в своей работе, вышедшей за два года до труда Мандельброта. Загадкой оставалось лишь то, почему эти два учёных не придавали своему «открытию» никакого значения до тех пор, пока Мандельброт не опубли-



Фрагмент множества Мандельброта на обложке журнала Scientific American. *Август 1985 г.*

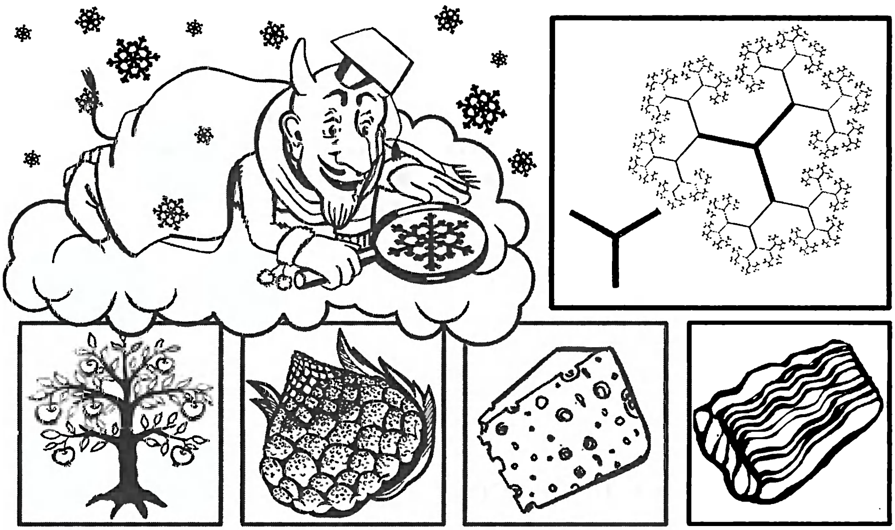
ковал свой труд, а Кранц не натолкнул их на некоторые моменты в их работе, из которых можно прийти к фрактальной теории. К гонке за лидерством подключился и Билл Б. Хаббард, утверждая, будто Мандельброт открыл теорию фракталов с подачи его, Хаббарда, аспиранта Кочмена, наблюдавшего множество Мандельброта на мониторе компьютера в 1976 году и якобы рассказавшего об этих исследованиях Мандельброту в 1978-м. Разумеется, проверить наличие чего бы то ни было на экране компьютера в 1976 году теперь попросту невозможно. Конфликт набирал обороты, и, наконец, Хаббард, Мателски и Брукс предприняли попытку отдать первенство в изобретении известному французскому математику Пьеру Фату (1878–1929), который описал одно из фрактальных множеств – пыль Фату – ещё в 1906 году. Эта попытка была не более логичной, чем предыдущие, и завершилась так же, как и они, – ничем. Отбирать первенство у Мандельброта такими аргументами всё равно, что лишать Исаака Ньютона права называться автором закона всемирного тяготения лишь на том основании, что до него многие учёные наблюдали действие этого закона. Однако ведь никто другой не смог его сформулировать и формализовать. Точно так же с фрактальными формами сталкивались многие математики – немец Георг Кантор ещё в XIX веке, швед Нильс Фабиан Хельге фон Кох, итальянец Джузеппе Пеано и поляк Вацлав Франциск Серпинский – в XX столетии. С фрактальными объектами работали многие архитекторы, со времен готики и барокко. Вы легко найдёте фрактальные фрагменты у многих художников и скульпторов, но сколько бы человек ни сталкивалось с фрактальными формами до Мандельброта, именно последний чётко выделил и дал определение фракталу, выписав ему путёвку в жизнь. Можно даже сказать, что до работы Мандельброта фракталы в чистом виде для математиков не существовали. Как художник из набора всем известных и доступных красок создаёт произведение искусства, меняющее мировоззрение поколений и делающее автора известным, так и Мандельброт из всем известных форм и элементов создал фрактальную геометрию природы. Именно по этой причине изобретателем фрактала следует считать Мандельброта и никого другого. Хотя он и не дал строгого математического определения фрактала, однако назвал его, чего ранее не сделал никто. И не следует игнорировать старую максиму «назвать – значит узнать».

ФРАКТАЛЫ В ПРИРОДЕ И ИСКУССТВЕ

Мандельброт предчувствовал значение введённого им понятия «фрактал» и потому не спешил с его формальным определением. Он писал:

> *«В 1975 году я придумал термин „фрактал“, чтобы дать название моей первой работе в этой области. Однако я не стал приводить математическое определение, чувствуя, что это понятие, как и хорошее вино, требует выдержки, прежде чем оно будет разлито по бутылкам».*

Тем не менее, он обозначил контуры фрактальной геометрии, отличной от Евклидовой. Отличие не относилось к аксиоме о параллельности, как в геометриях Лобачевского или Римана. Отличие заключалось в отказе от принятого Евклидом по умолчанию требования гладкости. Мандельброт обратил внимание на то, что контуры окружающих предметов неровны, шершавы, изъязвлены множеством отверстий самой причудливой формы, пронизаны трещинами и порами, покрыты сетью морщин, царапин и кракелюр. Таким объектам присущи шероховатость, пористость или раздробленность, причём многие из них обладают указанными свойствами «в одинаковой степени в любом масштабе». В природе нет недостатка в подобных формах: подсолнух и брокколи, морские раковины, папоротник, снежинки, горные расселины, береговые линии, фьорды, сталагмиты и сталактиты, молнии. Неправильные и фрагментарные формы – облака, горы, листья – демонстрируют повтор почти однотипных фрагментов при разных масштабах наблюдения. Вот на рисунке – кленовый лист, вот горный ландшафт, за ним фрагмент горной породы, далее – частицы грун-



та. Эти застывшие на рисунке формы на самом деле изменяются – облака движутся, пламя мерцает, лист увядает. И, если это движение фиксировать на киноплёнку, то каждый последующий кадр будет похож на предыдущий, но при этом будет чуть-чуть от него отличаться. Этому «почти повторению» «по времени» сопутствует такое же повторение «по ансамблю». Как писал философ и поэт Яков Эммануилович Голосовкер,

«ни один лист на дереве не адекватен любому другому, но тем не менее на берёзе ежегодно появляются только берёзовые листья, а не листья липы, тополя, дуба».

Люди внимательные и наблюдательные издавна замечали, что некоторые формы демонстрируют повторяющуюся структуру при рассмотрении их «вблизи или издалека». Приближаясь к таким объектам, мы замечаем, что изменяются лишь незначительные детали, но форма в целом остаётся почти неизменной. Исходя из этого, фрактал проще всего определить как геометрическую форму, содержащую в себе повторяющиеся элементы в любом масштабе. Когда мы приближаемся, желая что-либо лучше разглядеть, изменяются лишь незначительные детали, так что каждый малый участок фрактала представляет собой «ключ ко всему фракталу, как к единому целому». Мандельброт получил престижную премию Вольфа в 1993 году за «изменение нашего взгляда на мир посредством концепции фрактальной геометрии» (дословно: «for changing the way we look at the world through the concept of fractal geomenry»). Теперь фрактальные формы стали различимы в произведениях человеческой деятельности – в математике, архитектуре, физике, биржевой торговле и даже в музыке. Например, парижская башня, спроектированная Гюставом Эйфелем, состоит из ферм на основе треугольников. Выбор треугольного основания обусловлен тем, что треугольник – в отличие от прямоугольника – не может быть деформирован без деформации по крайней мере одной из его сторон. В конструкции Эйфеля отдельные элементы больших ферм сами представляют собой фермы, которые, в свою очередь, состоят из ферм ещё меньшего размера. Такая самоподобная конструкция гарантирует высокую прочность при низком весе. Ажурные купола Бакминстера Фуллера[1] также наглядно демонстрируют, что прочность есть результат ветвления фрагментов конструкции на сходные встроенные друг в друга элементы.

Фракталы обнаружились и в музыкальных произведениях. Например, в канонах Баха одна и та же тема играется на фоне самой себя. Тема задаётся первым голосом; спустя определённое время вступает второй, исполняя её же; через такое же время вступает третий голос – и так далее. Появились музыкальные фракталы, в которых отдельные части повторяют целое, но не точно, а с некоторым искажением. Такова фуга, где основную мелодию тоже ведут несколько голосов, но не столь строго и линейно, как в классическом каноне. Безошибочной определяющей приметой фуги является её начало: один голос исполняет тему до конца. Затем вступает второй, четырьмя тонами выше или тремя ниже. Первый в это время ведёт дополнительную тему, подобранную так, чтобы дать ритмический, гармонический и мелодический контраст к основной. Последующие голоса вступают по очереди, исполняя основную тему, часто являющуюся аккомпанементом дополнительной темы; остальные голоса в это время занимаются тем, что, следуя фантазии композитора, «украшают» фугу различными мелодиями. Когда все голоса «прибывают» к завершающей ноте, правила почти невозможно различить. Ангельское сладкоголосье сбивается на тревожный стон, напоминая, что космическая гармония неотделима от космического хаоса.

И хаос пугает. В серии картин «Крик» норвежский художник-экспрессионист Эдвард Мунк выразил именно этот испуг. В Средние века на страже против хаоса люди держали химер – тварей с львиными головами, козлиными телами, драконьими хвостами, вдобавок плюющихся огнём. И в математике ко времени появления фракталов существовали свои «монстры»: непрерывные и недифференцируемые одновременно множества – такие, как «пыль Кантора», «снежинка Коха», «ковёр Серпинского», «губка Менгера» и многие другие. Они охраняли границы существовав-

1 ***Ричард Бакминстер Фуллер*** (1895–1983) – американский архитектор, дизайнер, инженер и изобретатель, создатель архитектурной конструкции «геодезический купол».

ших в то время представлений о порядке. Появление фракталов продвинуло эти границы настолько, что «монстры» в новой интерпретации стали не только нормальными, но и высшей степени правильными формами – каноническими фракталами. Теперь не только эти «безобразные» формы стали привычными и узнаваемыми, но подобные им оказались различимы во всём окружающем: в природе, в искусстве, в науке и даже в быту.

Фракталы сразу обнаружили себя на полотнах живописцев. И не только Джексона Поллока, Маурица Корнелиса Эшера или Сальвадора Дали, но также на полотнах Хокусаи и Леонардо да Винчи. Множество артефактов, метафор, иносказаний указывают на то, что постепенное и филигранно точное накопление едва заметных формальных отличий радикально изменяет объект по существу. Такое накопление отличий не нарушает единого целого, благодаря тому, что каждый фрагмент созвучен целому, каждый «есть Альфа и Омега, начало и конец, первый и последний». В «Откровении» святой Иоанн Богослов пишет:

«И видел я в деснице у Сидящего на престоле книгу, написанную внутри и отвне, запечатанную семью печатями... Книга раскрыта, которая есть книга жизни... И вокруг престола 24 престола; а на престолах видел я сидевших 24 старца, которые облечены были в белые одежды и имели на головах своих золотые венцы. И от престола исходили молнии и громы и гласы, и семь светильников огненных горели перед престолом, которые суть семь духов Божиих».

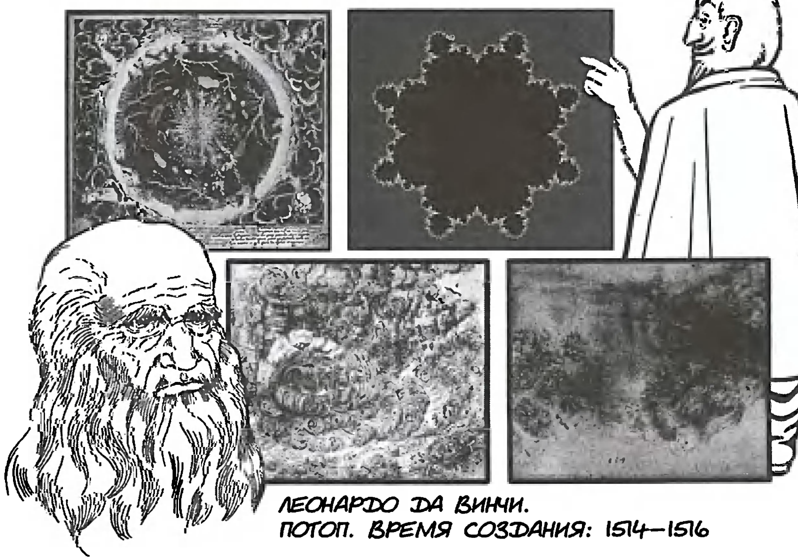
Всё верно: ритм, вложенность, соотнесённость и связность – строгий и арифметически точный лад вверху, внизу и посередине, на любом уровне, в любом масштабе. И вот уже Джордано Бруно замечает: «То, чего нельзя увидеть в малом, легко можно заметить в большом; в целом открывается то, что скрыто в отдельной части». Нечто подобное замечает Людвик Флашен: «Книгу можно открыть на любой её странице. Каждая страница содержит её целиком». Эта идея издавна присутствует и в изобразительном искусстве. Чего стоят одни зарисовки видений Хильдегарды Бингенской (род. 1098 г.), основательницы бенедиктинского монастыря Рупертсберг близ Бингена на Рейне. Ей, христианской провидице, внимали императоры и папы римские.

Два столетия спустя те, кто первыми брал в руки вышедшую в середине XIII века «Морализованную Библию», должно быть, представляли мир таким, как он изображён на гравюре «Бог измеряет мир циркулем», – замысловатым разнообразием форм, сопряжённых в единое соразмерное целое.

Невозможно обойти вниманием и труды Атанасиуса Кирхера, девиз которого «omnia in omnibus» – «всё во всём». Он – девятый ребёнок

в семье профессора теологии Иоганна Кирхера, получил прекрасное образование. В 26 лет, уже имея докторскую степень и занимая должность профессора математики, философии и восточных языков Вюрцбургского университета, он занимается теологией, математикой, естественными науками, географией, лингвистикой, древностями. Во время Тридцатилетней войны бежит от протестантов сначала в Авиньон, а потом в Рим. Во время своих бесчисленных путешествий, от границ Европы до самого Китая, Кирхер занимался геологическими исследованиями, наблюдал за действиями приливов и отливов, брал пробы почв, а после извержения Везувия даже спустился по верёвке в кратер, чтобы сделать замеры изнутри. Он написал монументальные труды по математике, медицине, геологии, географии, геодезии, археологии, астрономии, теологии, алхимии, чудесам и политике. Он придумал множество механических машин, сконструировал магнитные часы, примитивный калькулятор и аппарат для геодезических расчётов. Жадно набросился на изобретения того времени – вроде телескопа и микроскопа: он смог распознать солнечные пятна там, где их никто не видел, и разглядел бациллу чумы прежде, чем микроскоп был усовершенствован для наблюдения за бактериями. Он владел искусством налаживать связи между, казалось бы, совершенно разными вещами и понятиями. Его убеждённость в том, что всё соотносится со всем и любая часть, какую ни возьми, накрепко сцепляется с целым, неизбежно вела к поиску связей и почти болезненной потребности

Схема строения Земли из книги Атанасиуса Кирхера "Mundus subterraneus" (1664) и фрактал Мандельброта



Леонардо да Винчи. Потоп. Время создания: 1514–1516

в систематизации и коллекционировании. Им написаны четыре десятка трактатов по самым разнообразным предметам, где рядом с точными сведениями излагаются фантазии, не имеющие сколько-нибудь серьёзных оснований, но захватывающие. Трудно поверить, что этот умнейший человек не отдавал себе отчёта, как важно захватить внимание и вызвать эмоции у читателя и насколько сильна страсть к тайнам, скрытым аналогиям, кодам, магическим трюкам и мистификациям. На его зарисовках легко угадываются формы, очень напоминающие фрактальные.

И позднее, в эпоху Возрождения, мы видим, как снова и снова люди обращали внимание на явления, форма которых в современном понимании фрактальна. Под конец жизни Леонардо тщетно пытался изобразить то, что не могло быть изображено, – astrapen, bronten, ceraunobolian – молнии, бури, облака. Облака и пену не ухватишь пальцами, и Леонардо пытался зафиксировать саму их суть на кончиках пера или кисти. Он писал: «Обратные вихри ветра... взмутили воды и образовали в них огромную полость и подняли их в воздух в форме колонны, окрасив в цвет облака». Его последняя работа – рисунки потопа – завораживают и гипнотизируют. На них волны, изгибаясь сверху и закручиваясь снизу, создают причудливое образование – воздух, проницающий воду – пену.

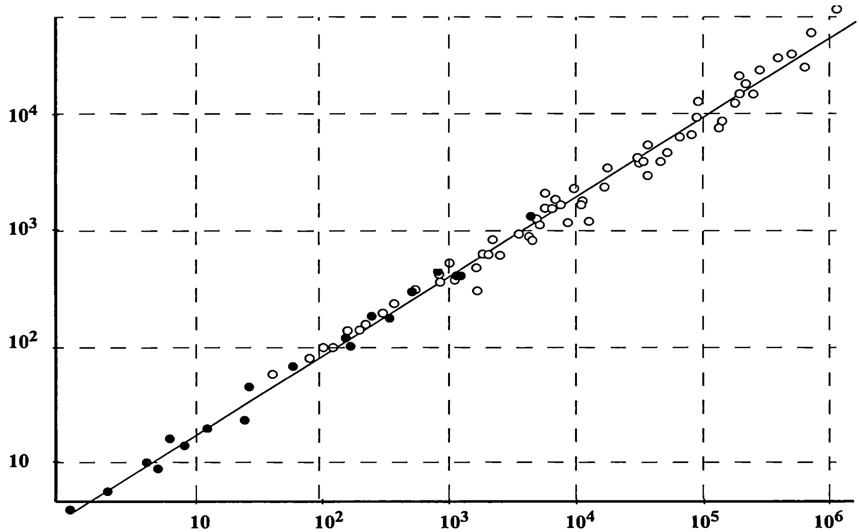


График зависимости периметра облака от его площади (о) и от площади зоны дождей (•) в логарифмическом масштабе. График построен на основании данных радиолокационных наблюдений зон дождей над тропической Атлантикой и данных наблюдений в инфракрасном диапазоне с геостационарного спутника зон облаков над Индийским океаном.

Эффект сохранения непрерывно распыляющейся формы замечали и пытались фиксировать многие, но тщетно. До тех пор, пока в последней четверти XX века Бенуа Мандельброт не открыл технику изображения «облаков и пены» – фрактальную геометрию. Отныне на экранах мониторов по расчёту появлялись узоры причудливые и прекрасные. Но они ещё и арифметически точны. Так, Мандельброт приводит график зависимости периметра облаков от их площади, который в диапазоне площадей от 1 до 1 000 000 км^2 подчиняется степенной аппроксимации с неизменным показателем степени, равным 4/3.

С доисторических времён фрактальные формы окружали человека, проникая из мира природы в искусство и культуру, как бы играя сразу за двумя сторонами доски. Будучи математически точными и рациональными, фракталы ещё и соблазнительно привлекательны. Такое редкое сочетание качеств делает фрактал символом, который обрастает смыслами – мистификациями и мифами.

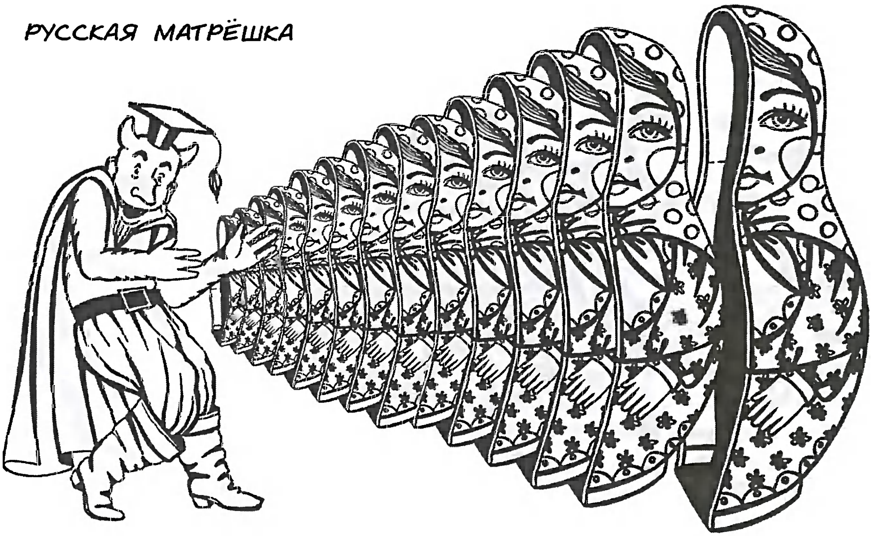
Фрактальный миф начинает формироваться с момента появления понятия «фрактал». Тот факт, что фрактальные структуры часто наблюдаются на границе порядка и хаоса – «фракталы там, где хаос», – всё чаще интерпретируют со сдвигом смысла – «хаос там, где фракталы». Если в первых книгах о фракталах («Фракталы и хаос в динамических системах» Ричарда М. Кроновера или «Фракталы, хаос, степенные законы» Манфреда Шредера) фрактал есть инструмент описания процессов на границе порядка и хаоса, то более поздние книги («Хаос и фракталы» Хайнц-Отто Пингена и др. или «Введение в нелинейную динамику: хаос и фракталы» Гринченко и др.) рассматривают фрактал в одном ряду с категорией хаоса. Этот сдвиг в интерпретации фрактала смещает акцент от рассмотрения «вселенной фракталов» к рассмотрению «Вселенной как фрактала».

Эта фикция приобретает статус факта в общественном сознании в тот момент, когда на новостных лентах появляются сообщения, подобные следующему: «*Группа астрономов пришла к выводу, что материя во Вселенной распределена в виде фрактала. Традиционно считается, что при увеличении масштаба распределение материи во Вселенной становится непрерывным. Опровержение этого постулата может привести к пересмотру существующих моделей Вселенной*».

Таким образом, исходный, рациональный посыл «фрактал – один из объектов реальности» трактуется в новом мифическом смысле: объективная реальность есть фрактал. Рациональное сознание с этим не соглашается, но чувственное восприятие требует мифов, которые восхищают и страшат. Только такие сильные эмоции пробуждают желание той силы, которая необходима для трансформации существующей и конструирования возникающей реальности.

При таком конструировании фрактальная геометрия открывает новые возможности для манипуляции формой. Теперь открытый Мандельбротом новый пласт форм стал золотой жилой для дизайнеров, архитекторов, инженеров. Несчётное число фракталов строится по одним и тем же принципам многократного повторения. Отсюда фрактал проще всего определить как геометрическую форму, которая содержит в себе повторяющиеся элементы в любом масштабе. Эта геометрическая форма локально неизменна (инвариантна), масштабно самоподобна и целостна в своей ограниченности – истинная сингулярность, сложность которой раскрывается по мере приближения, а на удалении – сама тривиальность.

Как русская матрёшка.



Идея настолько проста и настолько очевидна, что трудно поверить, будто никто до Мандельброта не решился её оформить и формализовать...

Весной 1999 года научный мир был буквально ошарашен удивительным открытием, оказавшимся искусной мистификацией. Благодаря историческим изысканиям, предпринятым немецким профессором комбинаторики Робертом Шипке, всеобщим достоянием стали гениальные труды малоизвестного прежде немецкого учёного Удо Ахенского, монаха, жившего и работавшего в период примерно с 1200 по 1270 годы. Как-то раз по случаю Роберту Шипке довелось посетить кафедральный собор города Ахена (Германия), где в одной из витрин с примечательными древними экспонатами он увидел церковный манускрипт XIII века, приковавший внимание математика. Всё дело было в иллюстрации, изображавшей вполне традиционный сюжет со Святым семейством, но каноническая Вифлеемская звезда в небе имела необычный вид.

Приглядевшись как следует, Шипке с изумлением обнаружил, что звезда явно имеет характерную форму фрактала Мандельброта.

Роберт Шипке настоял, чтобы ему дали возможность изучить документ подробнее, и установил имя переписчика, которым оказался некто Удо Ахенский. Дальнейшие поиски привёли профессора в Баварию, в старинный монастырь бенедиктинского ордена под Мюнхеном. С помощью местных историков удалось добраться до архива монастыря, где и был най-

ВИФЛЕЕМСКАЯ ЗВЕЗДА
УДО АХЕНСКОГО

ден толстенный фолиант Codex Udolphus, собственноручно написанный монахом Удо Ахенским.

Эта книга была известна историкам ещё с XIX века, но в те времена её сочли сугубо богословской. Однако в первой же части книги Шипке обнаружил изложение основ теории вероятностей, несколько замысловато упакованных в форму порицания пристрастий к азартным играм с попутным изложением стратегий для игры в карты и кости. Вторая часть книги почти целиком была посвящена вычислению числа π, а вот третья, под названием Salus (Спасение), неопровержимо свидетельствовала, что за семь веков до Мандельброта его удивительный фрактал был открыт никому не известным монахом Удольфом, попутно создавшим декартову систему координат и основы теории комплексных чисел.

Целью труда Удо была разработка метода для определения того, при каких условиях душе удастся достичь небес. Он предполагал, что всякая душа состоит из двух независимых частей, которые Удо назвал *profanus* (мирская) и *animi* (духовная), а затем стал представлять данные части как пару чисел на плоскости (любопытно, что ныне эти элементы комплексного числа семантически называются весьма похоже: действительной и мнимой частью). Разработав правила для сложения и умножения чисел, Удо стал исследовать, как

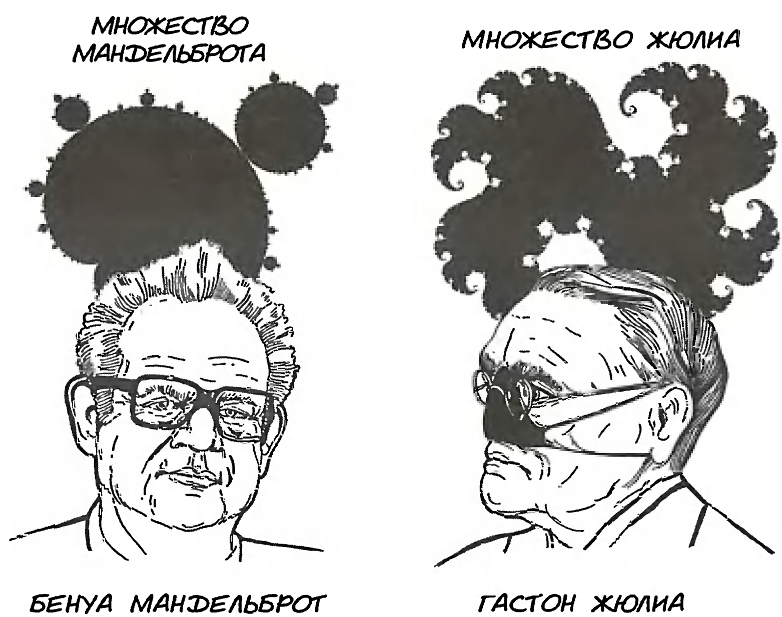
> *«душа каждого человека проходит испытания в течение жизни, из года в год колеблется между добром и злом, и в конечном итоге, согласно своей природе, либо засасывается во внешнюю тьму, либо навсегда притягивается к Господу».*

Выражаясь современным языком, Удо начинал с произвольного числа z_0 и затем примерно 70 раз повторял вычисления по формуле $z \to z^2 + c$, пока не становилось ясным, что величина z стремится к бесконечности или остаётся конечной. В последнем случае точка z_0 сохраняется, а точки, «ведущие к бесконечности», стираются или «выкалываются». Образуется объект, состоящий из многих тысяч сохранившихся точек, который Удо назвал Divinitas (Божественное), сообщив в тексте книги, что на вычисления у него ушло 9 лет...

Короче говоря, нынешнему учёному миру оставалось бы лишь поражаться столь удивительной монашеской целеустремлённости, сочетавшейся с гениальными прозрениями, если бы не единственное «но». Сообщение о сенсационном открытии датировано первым апреля 1999 года. Увы, это был всего лишь остроумный розыгрыш, хотя и сфабрикованный на редкость добротно. Эта мистификация удалась и была с доверием воспринята именно благодаря простоте и естественности фрактального концепта. И ещё потому, что просто интерпретировала тот самый алгоритм, который привёл Мандельброта к открытию фрактала. Но об этом – в следующей главе.

В Татьянин день 25 Января 1918 года, во время Первой мировой войны, штаб немецкой армии принял решение отметить день рождения Кайзера атакой по французским войскам. Атака была жестокой и унесла жизни многих солдат. Офицер Гастон Жюлиа был тяжело ранен. Его лицо навсегда осталось изуродованным. В промежутке между весьма болезненными операциями в госпитале он продолжал своё математическое исследование столь интенсивно, что в том же 1918 году опубликовал основополагающую работу по итерированию функций комплексного переменного – Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. Работа стала известной, и Жюлиа был удостоен Гран При Французской Академии Наук. Без сомнения, в 1920-х Гастон Жюлиа, профессор Ecole Polytechnique в Париже, был одним из самых авторитетных математиков своего времени.

Быть может, только Пьер Фату был столь же осведомлён в анализе функций с комплексной переменной. Они оба игнорировали графику и оперировали чистыми символами в традиции французской математической школы того времени. Надо сказать, что уже с XVII века стиль европейской математики постепенно смещался от геометрии (форм) к алгебре (формулам). Лаплас, один из великих формализаторов, гордился тем, что в его «Аполитической механике» нет ни одного рисунка. Математические построения Пьера Фату и Гастона Жюлиа находились в поле



тех же идей, символом и выразителем которых в XX веке стал Николай Бурбаки. Здесь нам не уйти ещё от одной знаковой мистификации.

Блестящая эта мистификация состояла в том, что группа ведущих французских математиков, выбрав в качестве коллективного псевдонима имя «Николя Бурбаки», предприняла систематическое изложение «Элементов математики» на основе аксиоматического метода, примерно так, как Евклид систематически изложил математику своего времени в «Началах». Перед самой войной, в 1939 году вышли первые тома «Элементов» Николя Бурбаки. Всего было издано более 40 книг. Неизвестный Бурбаки был непримирим к догматизму, но это не мешало ему быть необычайно основательным и неторопливым. Так, на определение математически непростого понятия «1» ушло более 200 страниц текста! Бурбаки стоял на том, что на основе теории множеств возможно целостное изложение математики без привлечения рисунков. Я думаю, многие литераторы придерживаются такой же точки зрения по отношению к комиксам. Цифры и буквы – вот чистые символы, обеспечивающие пластику и точность для выражения истинных мыслей и чувств, не искажённых смысловой нагрузкой образов.

Среди основателей группы был и Шалом Мандельброт – дядя Бенуа Мандельброта. Шалом Мандельброт был профессором математики в Париже, преемником Жака Соломона Хадамарда в престижном College de France. Он взял на себя ответственность за образование племянника Бенуа Мандельброта, семья которого эмигрировала из Польши во Францию в 1936 году. Именно дядя Шалом обратил внимание Бенуа Мандельброта на блестящие работы Гастона Жюлиа и Пьера Фату. Выбирая тему диссертации в 1945 году, Бенуа Мандельброт прочитал их работы и понял, что ему нечего к ним добавить. К разочарованию дяди, работы были отложены, но, к счастью, не забыты.

Им суждено было сослужить службу детонатора фрактального концепта, когда в 1977 году компьютеры стали доступными для учёных, а вместе с ними стала возможной и визуализация сложных, многократно повторяемых построений и расчётов. Работавшему к этому времени на фирме IBM Мандельброту не составило труда запустить итерацию Жюлиа на компьютере. На экране его монитора – вдруг, словно по мановению «невидимой руки», – появились узоры, замысловатые и эстетически привлекательные. Надо сказать, что с появлением компьютеров и новых возможностей математической графики стандарты Бурбаки утратили свою строгость. Мир в целом становился более чувственным и более эмоциональным. В этом новом мире смелые фантастические формы, производимые простыми алгоритмами, оказывались всё более востребованными. Алгоритм Жюлиа – простой до банальности – подходил этому новому тренду массовой инженерии фантастических форм.

Описанное Жюлиа отображение состояло из двух тактов – развёртывания и отсекания. Первый такт сводился к оператору Жюлиа $Z \to Z^2 + C$.

Квадратичные формы мистическим образом проявляют себя повсеместно. Треугольники со сторонами, кратными числам 3 : 4 : 5, называли в древности Божественными. Ещё одна известная в древности тройка – 5 : 12 : 13. Для этих троек справедлива теорема Пифагора $c^2 = b^2 + a^2$, известная, по крайней мере, за 1200 лет до Пифагора. Её описание приводилось в клинописных текстах Междуречья. Квадратичные формы Жюлиа оказываются в одном ряду с квадратичными формами Пифагора ($a^2 + b^2 = c^2$), свойствами чисел ряда Фибоначчи[1] ($f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$) или уравнением Эйнштейна ($E = m \times c^2$). Простота этого квадратичного оператора никак не вяжется со сложностью производимых им форм.

Но всё по порядку. Вот как работает отображение Жюлиа. Берём нуль, возводим его в квадрат и прибавляем к результату комплексную константу ***C***. Полученный результат возводим в квадрат и добавляем ту же константу ***C***. И так можно продолжать до бесконечности.

Но эту «глупую бесконечность» отсекает второй такт отображения Жюлиа, который сводится к простому правилу: если в результате повторов результат уходит на бесконечность, то данная точка не принадлежит множеству Жюлиа. Например, для действительных чисел больше 1 уже после небольшого количества итераций оператор Жюлиа приводит к большим цифрам, а для любого числа меньше 1 – к нулю.

В самом деле, для числа 1,1 оператор Жюлиа возрастает с каждым шагом, стремясь к бесконечности:

$$1{,}1^2 \to 1{,}21^2 \to 1{,}4641^2 \to 2{,}14358^2 \to 4{,}59497^2 \to 21{,}11377^2 \to$$
$$\to 445{,}79156^2 \to (1{,}99 \times 10^5)^2 \to 3{,}95 \times 10^{10}.$$

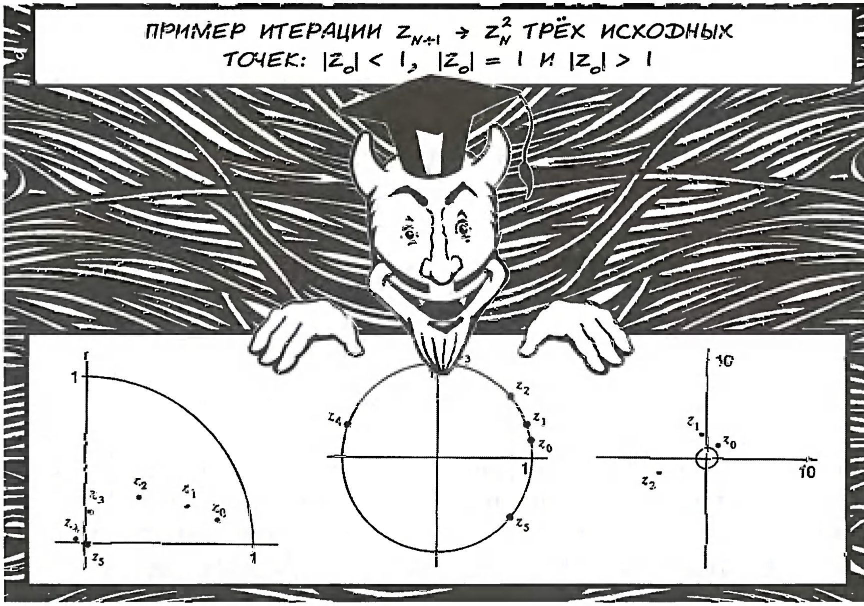
А для числа 0,9 отображение Жюлиа с каждым шагом уменьшается, стремясь к нулю:

$$0{,}9^2 \to 0{,}81^2 \to 0{,}6561^2 \to 0{,}4305^2 \to 0{,}1853^2 \to 0{,}0343^2 \to$$
$$\to (1{,}2 \times 10^{-3})^2 \to (1{,}4 \times 10^{-6})^2 \to 1{,}9 \times 10^{-12}.$$

Уже после восьми итераций мы можем заключить, ведёт или нет расчёт к бесконечности. Те точки, которые, после применения к ним оператора Жюлиа, не уводят результат итераций на бесконечность, образуют множество Жюлиа. Прочие точки «стираются». Всё изложенное для действительных чисел верно и для комплексных чисел с тем отличием, что действительные числа есть множество точек на линии, а комплексные числа – множество точек на плоскости.

Здесь мы сталкиваемся с тремя особыми точками – сингулярностями. Рассмотрим, например, отображение $f(z) = 1/z$, которое ведёт себя «вполне прилично» для всех z, кроме $z = 0$. Когда $z = 0$, значение функции

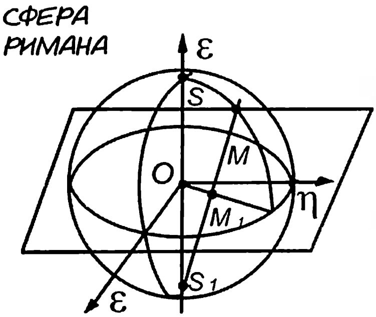
1 ***Леонардо Фибоначчи*** (ок. 1170 – ок. 1250) – правильнее Леонардо Пизанский по прозвищу Фибоначчи – первый крупный математик средневековой Европы. Числа Фибоначчи – ряд чисел, в котором каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.



f $(z) = 1/0$ теряет смысл, точнее, оно обращается в бесконечность. Это уточнение означает, что по мере приближения величины z к нулю ($z \to 0$) величина f (z) стремится к бесконечности (f $(z) \to \infty$). В этом смысле бесконечность (∞) есть не столько величина, сколько предельный процесс вычислений, когда величина становится сколь угодно большой. Ученик великого Гаусса Георг Риман нашёл элегантный способ интерпретировать бесконечность такого типа посредством модели, известной как «сфера Римана».

Сфера помещается на комплексную плоскость. Каждая точка сферы может быть спроектирована на комплексную плоскость, при этом по мере приближения к северному полюсу проекции точек на комплексную плоскость «уходят на бесконечность». На основании этой интерпретации сингулярность такого типа называют «полюсом». У сферы Римана два полюса – «северный и южный», они представляют собой две сингулярности, которые можно поменять местами.

Но есть ещё один тип сингулярности, совершенно отличный от сингулярностей типа «полюс». Эта «экваториальная» сингулярность реализуется вблизи единицы. Нет, не случайно Бурбаки посвятили единице двести страниц текста. Рассмотрим, например, отображение f $(z) = \sqrt{(z)}$. Большинство комплексных чисел имеют два значения корня. Так, корень от $2\,i$ может иметь значение $1 + i$ или $-1 - i$, подобно тому, как корень из 4-х может иметь значения 2 или –2. Теперь возьмём самый простой случай f $(z) = \sqrt{(z)} = 1$ и выберем один из корней – для простоты тот, зна-

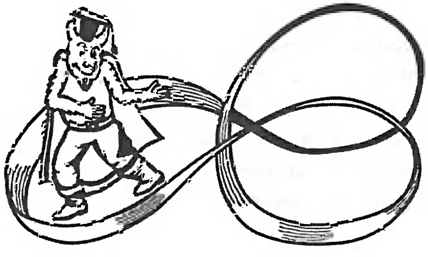


чение которого равно $z = 1$. Станем перемещаться по единичной окружности, рассчитывая величину отображения $f(z)$ для каждой точки. Когда мы завершим пол-оборота и придём в точку -1, значения отображения $f(z)$ совершат четверть аналогичного круга, дойдя до $+i$ или $-i$. Когда мы завершим полный оборот в комплексной плоскости и z вернётся в исходную точку, отображение $f(z)$ достигнет точки -1. Только после второго оборота в комплексной плоскости величины z её отображение завершит полный оборот в комплексной плоскости $f(z)$.

Для интерпретации такой сингулярности Риман предложил представить сферу, состоящую из двух слоёв. Вблизи полюсов геометрия слоёв напоминает спиральные лестницы голландского художника-графика Маурица Эшера – двигаясь по ним на два оборота вверх, вы возвращаетесь в исходную точку. Помните Алису в Зазеркалье? Чтобы пересечься с Королевой, ей пришлось идти в обратную сторону. Когда «все пути подчиняются Королеве», а Королева живёт в стране, где всё преображается пластично и плавно, иного и ждать не приходится. Совсем не случайно плавные преображения комплексной плоскости описывает преобразование Мёбиуса, которое в своём простейшем частном случае сводится к единичной поверхности – к поверхности, у которой есть только одна сторона. Такая поверхность – лента Мёбиуса[1] – двухмерна и ограничена, её минимальная длина, отнесённая к ширине, не может превышать $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Эта лента, будучи разрезана вдоль, не распадается на два кольца, но сохраняет свою связность. Образуется так называемая «афганская лента».

При повторении продольного разрезания петель лента Мёбиуса теряет связность, но сохраняет единство. Фрактал ведёт себя точно так же. Распадаясь на фрагменты, он сохраняет целостность. Из однообразного основания и при повторении однообразной операции возникает разнообразие фрагмен-

1 ***Лента Мёбиуса*** была открыта независимо немецкими математиками Августом Фердинандом Мёбиусом и Иоганном Бенедиктом Листингом в 1858 году. Модель ленты Мёбиуса легко можно сделать самостоятельно: для этого надо взять достаточно вытянутую бумажную полоску и склеить концы полоски, предварительно перевернув один из них.



тов, которое не нарушает уникальности целого. Напомним, что основанием «экваториальной» сингулярности может служить любое число, ведь мера измерения выбирается произвольно, хотя и не как попало. Любое число при этом ведёт себя, подобно единице. Единица отличается простотой, что не исключает её сложности. Единица производит самые разные множества цифр, структура которых может быть много сложнее натурального ряда. Напомним, что натуральный ряд образован из единицы следующим образом:

1
1 + 1 = 2
1 + 1 + 1 = 3
1 + 1 + 1 + 1 = 4
и т. д.

Результатом этого алгоритма является ряд натуральных чисел – 1, 2, 3, 4, 5, ... Совершенно иной ряд чисел, известный как «треугольник» Паскаля, возникает, если мы возьмём две единицы (11) – число одиннадцать и начнём возводить его в степень:

$(11)^0 = 1$ 1
$(11)^1 = 11$ 1 1
$(11)^2 = 121$ 1 2 1
$(11)^3 = 1331$ 1 3 3 1
$(11)^4 = 14641$ 1 4 6 4 1

и т. д.

Результатом повторения этой операции будет известный ряд, фрагменты которого встречаются в текстах на санскрите, датируемых V веком до Рождества Христова. Распределение этих цифр в треугольнике приведено Омаром Хайямом, поэтом и математиком, в 1070 году. В Китае уже около 1050 года Цзя Сянь открыл то же самое распределение цифр. В 1303 г. Чжу Шайчи, явно не претендуя на оригинальность, представил его же, обозначив как «правдивое зеркало четырёх элементов». Паскаль опубликовал свой «волшебный треугольник» много позже первооткрывателей этих рядов цифр, но именно он, в конечном счёте, стяжал все лавры славы. И, надо сказать, Паскаль знал о предшественниках. В своей автобиографии он писал:

> *«Пусть не говорят, будто я ничего нового не сказал. Новое – в построении. Когда мы играем в теннис, мы оба ударяем по одному и тому же мячу, однако один из нас посылает его лучше другого».*

Айзенберг показал, что простая единица и операция умножения достаточны для построения всего числового ряда. Построение Айзенберга выглядит следующим образом:

$1 \times 1 = 1$
$11 \times 11 = 121$
$111 \times 111 = 12321$
$1111 \times 1111 = 1234321$
$11111 \times 11111 = 123454321$

и т. д.

$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$

Мы видим, как квадрат чисел, состоящих из единиц, создаёт удвоенный цифровой ряд. Но вот что происходит дальше:

$$(1111111111)^2 = 123456\overset{\downarrow 8}{7}900987654321$$

$$(11111111111)^2 = 123456790120987654321$$

$$(111111111111111)^2 = 12345679012345654321098765 4321$$

Внутри числового ряда формируется новый удвоенный числовой ряд. Исходный ряд имеет едва заметное искажение – в восходящей его части исчезает восьмёрка! Вложенность, и повторяемость с едва заметным искажением выдаёт фрактальную структуру такого числового ряда.

Остаётся только удивляться, что достаточно одного числа – ЕДИНИЦЫ – для появления фрактального объекта, пусть самого простого ФРАКТАЛЬНОГО числового ряда.

Всякий фрактал представляет собой по существу цифровой ряд, обычно много более замысловатый, чем ряд Айзенберга. Среди математиков бытует руководство, согласно которому, чтобы упростить выражение, его рекомендуется представить в комплексной форме. На английском языке это правило отсылает к игре слов – *«для простоты – усложняй»* (*to simplify – make it complex*). И это правило не лишено смысла. Фрактальные ряды чисел, будучи графически представленные на комплексной плоскости, приобретают известную простоту и красоту. Примером служат нанесённые на комплексную плоскость точки отображения Жюлиа. Эти точки складываются в разнообразные формы, то гладкие как окружность, то изрезанные как кромка волны, то рваные как пыль или пена.

Напомним, как эти формы появляются на экране монитора. Отображение Жюлиа применяется к координатам каждой точки экрана, и, в зависимости от результата, чёрная точка на экране сохраняется, либо стирается. Такое удаление всех лишних точек напоминает работу скульптора, который, откалывая от глыбы камня всё лишнее, оставляет только то, что впечатляет и захватывает внимание.

Раньше, в Древней Греции, скульптуры ещё и раскрашивали. И математики раскрашивают фракталы. Как? Очень просто. Цвет соответствует номеру итерации, при котором результат оказывается за пределами круга условного круга, радиус которого может быть выбран произвольно[1]. Цвета подбираются из компьютерной палитры по соображениям хорошей различимости и эстетической привлекательности. Раскрашивание представляет собой третий, дополнительный такт в процессе получения отображения Жюлиа.

Но даже когда на экранах мониторов стали появляться ещё чёрно-белые отображения Жюлиа, их сложные, замысловатые и одновременно гармоничные формы вызывали восторг.

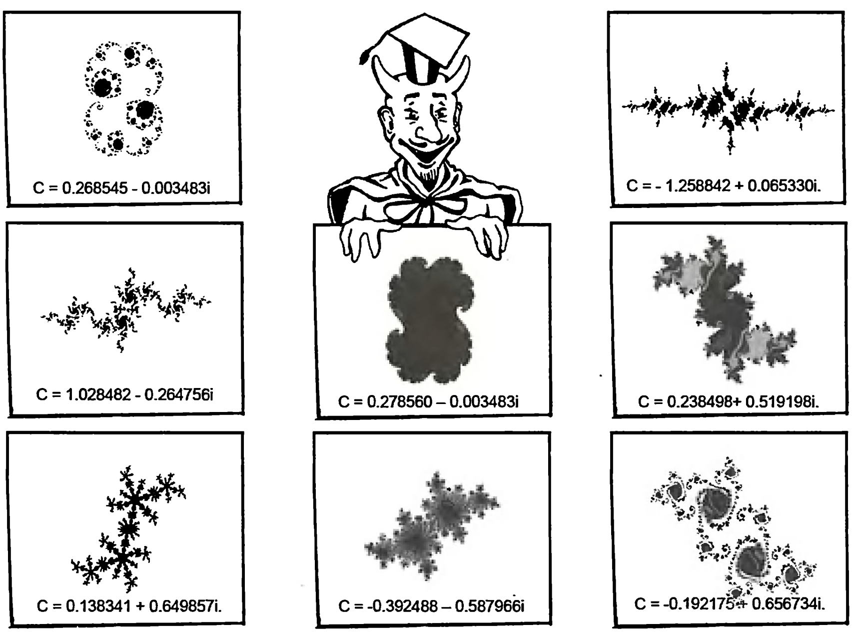
Постепенно эта феерия форм вызывала у математиков оторопь. Малейшее изменение постоянной C приводило к радикальному изменению формы отображения Жюлиа. Формы отображений Жюлиа не поддавались ранжированию. Билл Хаббард никак не мог найти правило, по которому по величине параметра C можно было бы судить о форме отображения Жюлиа. Сделать это удалось Мандельброту.

1 Введение условного круга основано на «предельной теореме», которую доказали Гастон Жюлиа и Пьер Фату. Суть её в том, что если изображающая точка квадратичного отображения вышла в процессе итераций за границы круга радиуса 2, то Z не принадлежит множеству Жюлиа и её орбита уходит на бесконечность.

Мандельброт решил разделить отображения Жюлиа на разрывные и сплошные и первым делом принялся определять границу между ними. Он использовал самый современный на тот момент компьютер IBM, связанный с принтером «Тектроникс», который отпечатывал найденные программой точки на белом листе. В марте 1980 года программа стала выводить на печать окончательный вариант расчётов. Бенуа Мандельброт смотрел на результат, не понимая, что происходит: на листе сформировалось нечто, напоминающее кляксу, поставленную нерадивым школяром.

Он решил улучшить качество расчётов, надеясь получать более чёткую картинку, но с определённого момента счастье изменило ему – контуры границ, вместо того, чтобы становиться всё определённее, размывались. При дальнейшем увеличении точности расчётов они становились ещё более размытыми. Это напоминало дьявольскую шутку – между двумя любыми чёрными точками всегда возникают белые. Увеличение масштаба погружало в мир восхитительного и пугающего разнообразия. Появлялись всё новые изгибы границы, которые приблизительно повторяют предыдущие формы, но не во всём. Всегда появляются формы иные, новые. Но в этом начала проступать некая системность. По мере увеличения

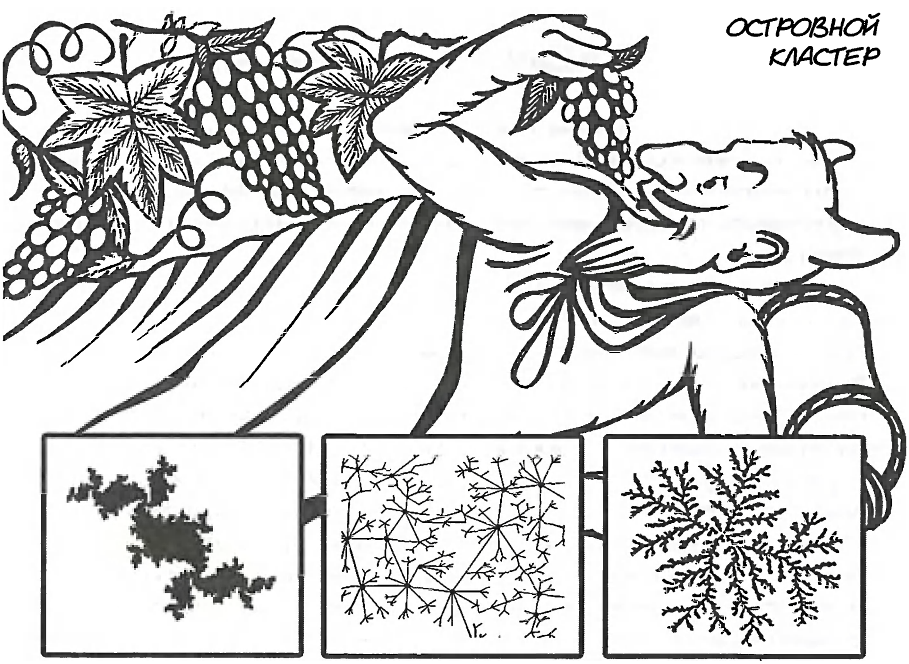
МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА С

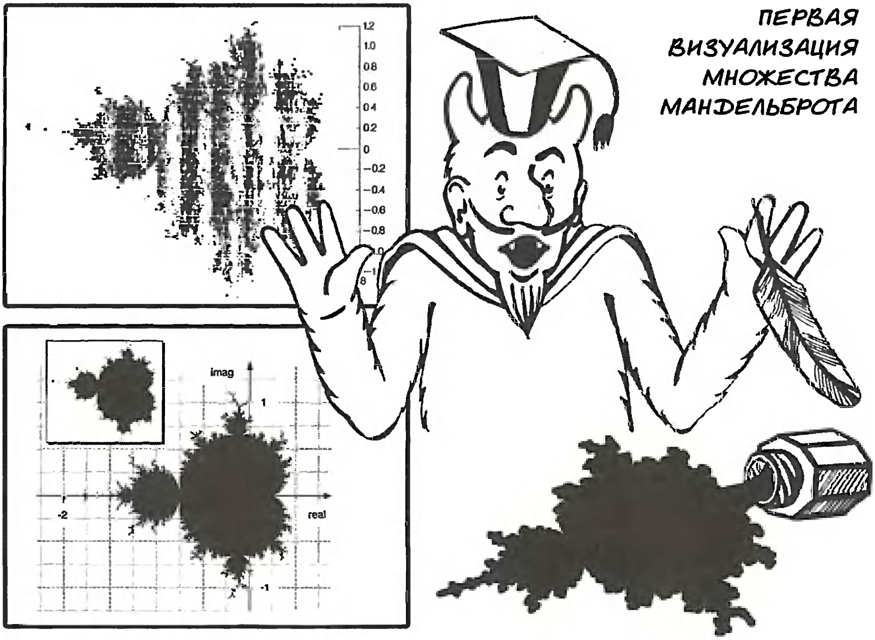


масштаба многие «кляксы» исчезли, но некоторые остались и обнаружили сложные структуры – винтовые завитки, усики и спирали; круги, усыпанные колючими шипами, завивающимися наружу; молекулы, висящие, словно виноградины на лозе.

В целом появился островной кластер – объект, представляющий собой скопление несвязных точек. Оказалось, что основной континент множества имеет ту же форму, что и каждый из островов. В то время, как внутренние их части не перекрывались, просветы между ними заполняли меньшие острова – и так до бесконечности. В конце концов, острова соединялись береговыми линиями, образуя множество, которое Мандельброт описал словами «дьявольский полимер» и которое известно сегодня как «фрактал Мандельброта».

Для его описания представим мысленный эксперимент. Пусть отрезок прямой пересекает «дьявольский полимер». Пусть точка ***C*** медленно продвигается вдоль линии из внутренней области «полимера» к его границе. При этом на экране строится соответствующее множество Жюлиа. Эта процедура изящно реализована в программе «Фрактория 1.0», служащей приложением к книге автора «Фракталы: между мифом и реальностью». Можно видеть, как с течением времени исходное множество Жюлиа сжимается вплоть до хрупкого дендритного (т. е. деревообразного) скелета, а когда ***C*** выйдет за границу множества Мандельброта, соответствующее



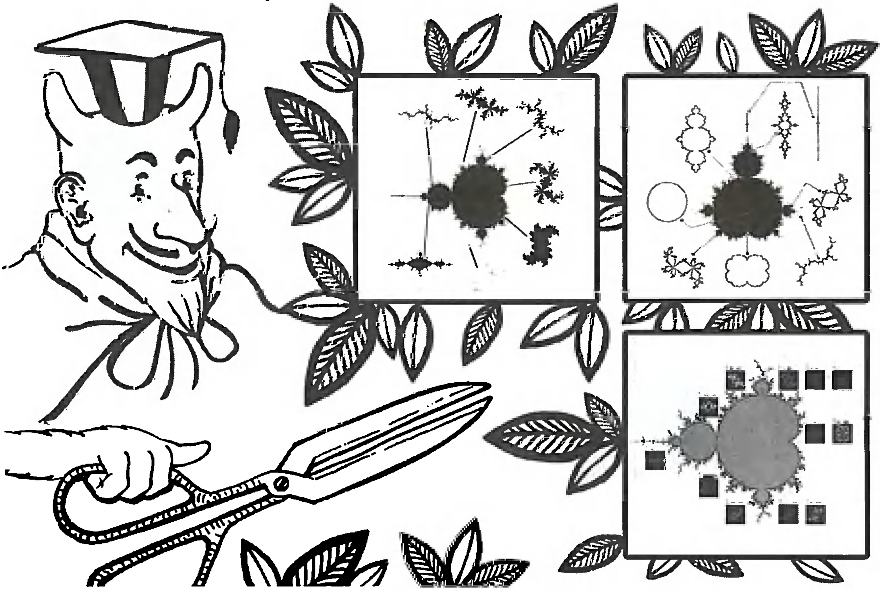


ему множество Жюлиа как бы взорвётся, превратившись во «фрактальную пыль».

Таким образом, любой точке множества Мандельброта соответствует связное множество Жюлиа, а любой точке вне множества Мандельброта – несвязное множество Жюлиа. Множество Мандельброта и его окрестность представляют собой некоторый свёрнутый план множеств Жюлиа.

Оказалось, что формы множеств Жюлиа двух соседних точек на множестве Мандельброта имеют сходный лейтмотив, который деформируется непрерывно, постепенно, от точки к точке. Множество Мандельброта функционирует как контролирующее, путеводное, ключевое начало среди разнообразия множеств Жюлиа. Ошеломляющее разнообразие отображений Жюлиа благодаря «дьявольскому полимеру» Мандельброта обретает порядок и строй. Однако строй этот указывает на иерархию совершенно нового типа, связность которой не видна с первого взгляда. Она раскрывается с того ракурса, который открылся Мандельброту, когда он совместил сложность границ «дьявольского полимера» со сложностью «дьявольской лестницы», которая возникает в ходе анализа шумов при передаче данных между компьютерами.

МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА, ОКРУЖАЮЩИЕ ФРАКТАЛ МАНДЕЛЬБРОТА, КОТОРЫЙ КОНТРОЛИРУЕТ ИХ СТРУКТУРУ

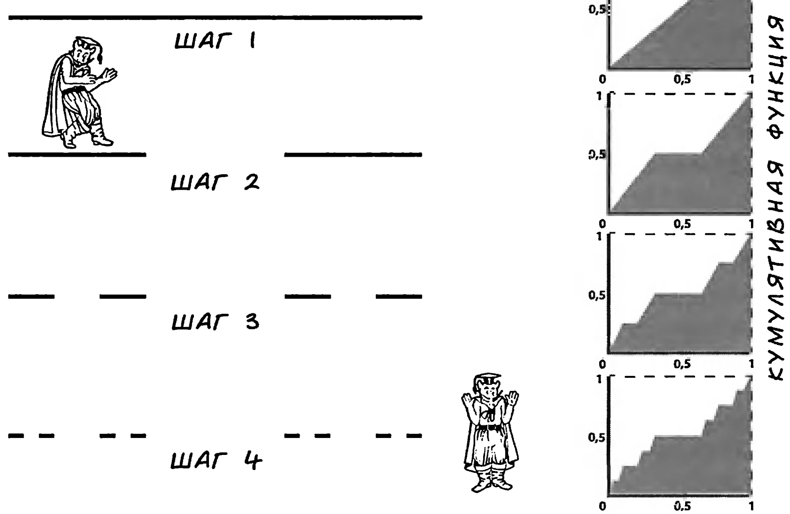


ДЬЯВОЛЬСКАЯ ЛЕСТНИЦА

Для передачи данных между компьютерами используются чрезвычайно сильные электрические сигналы. Такой сигнал дискретен. Помехи или шумы случайно возникают в электрических сетях вследствие многих причин и приводят к потере данных при передаче информации между компьютерами. Исключить влияние шумов на передачу данных в начале шестидесятых годов прошлого века было поручено группе инженеров «IBM», в работе которой принимал участие Мандельброт.

Грубый анализ показал наличие периодов, во время которых не регистрировалось ни одной ошибки. Выделив периоды длительностью в час, инженеры заметили, что между ними периоды прохождения сигнала без ошибок также прерывисты – здесь возникают более короткие паузы длительностью около двадцати минут. Таким образом, передача данных без ошибок характеризуется пакетами данных разной длины и паузами в шумах, в течение которых сигнал передаётся без ошибок. В пакетах более высокого ранга как бы встроены пакеты более низкого. Подобное описание предполагает существование такого понятия, как относительное расположение пакетов низшего ранга в пакете более высокого ранга. Опыт показал, что

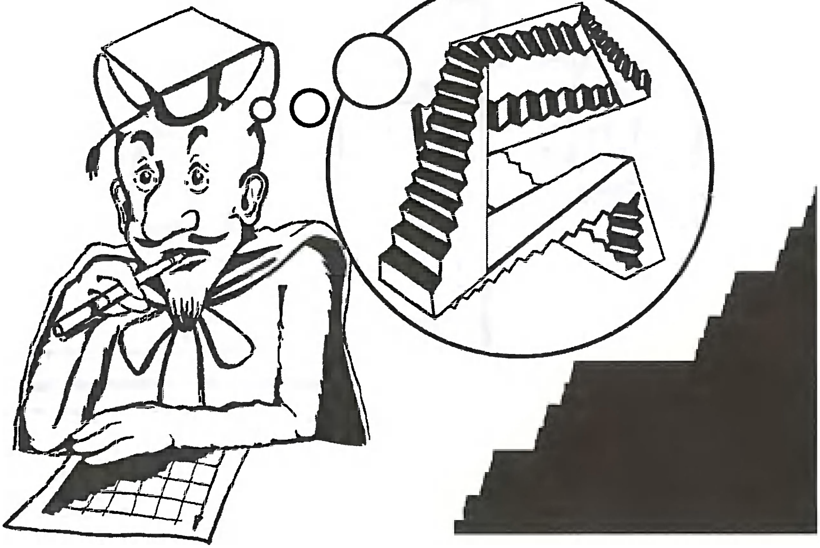
АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ «ПЫЛИ КАНТОРА»



распределение вероятностей этих относительных расположений пакетов не зависит от их ранга. Такая инвариантность говорит о самоподобии процесса искажения данных под действием электрических шумов. Сама процедура вырезания свободных от ошибок пауз в сигнале при передаче данных не могла прийти в голову инженерам-электрикам по той причине, что для них такое было внове.

Но Мандельброт, изучавший чистую математику, хорошо знал множество Кантора, описанное ещё в 1883 году и представляющее собой пыль из точек, полученных согласно строгому алгоритму. Суть алгоритма построения «пыли Кантора» сводится к следующему. Возьмите отрезок прямой. Удалите из него серединную треть отрезка, сохранив две концевых. Теперь повторим ту же операцию с концевыми отрезками – и так далее. Мандельброт обнаружил, что именно такова геометрия пакетов и пауз при передаче сигналов между компьютерами. Ошибка накапливается. Её накопление можно моделировать так. На первом шаге всем точкам из интервала [1/3, 2/3] присвоим значение 1/2, на втором шаге – из интервала [1/9, 2/9] – значение 1/4, значение 3/4 – точкам из интервала [7/9, 8/9] и т. д. Пошаговое суммирование этих величин позволяет построить так называемую «дьявольскую лестницу».

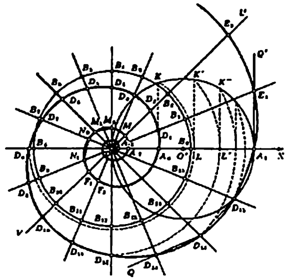
Почему дьявольскую? Потому, что построенная таким образом кумулятивная функция (результат пошагового суммирования) ведёт себя дьявольски странно. Будучи монотонной и непрерывной, она допускает расчёт производной в любой своей точке, но эта производная почти всюду равна нулю!

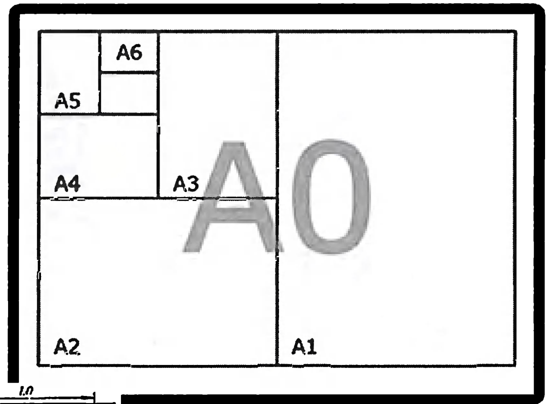


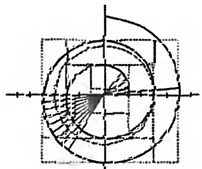
Не вникая в математические тонкости, инженеры приняли выводы Мандельброта на веру и перенастроили систему. Мандельброта же эта простая инженерная задача подвела к размышлениям о мерах для странных множеств, подобных множеству Кантора. Всё свидетельствовало, что для этих мер потребуются не только целые, не только дробные (рациональные) числа, но также числа иррациональные – ведь мерой «пыли Кантора» является число, равное 0,618..., известное как «золотое сечение» или «Божественная пропорция». Для уравновешивания дьявольских причуд и пояснения природы иррациональных чисел рассмотрим «Божественную пропорцию».

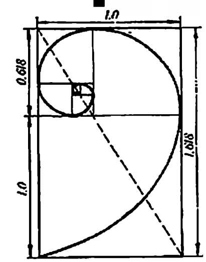
БОЖЕСТВЕННАЯ ПРОПОРЦИЯ

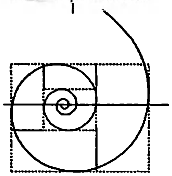
Пифагорейцы, быть может, первыми осознали силу числа – символа в его самом чистом виде. Пифагорейцам открылось, что число, будучи посуществу виртуальным и воображаемым, не менее реально, чем любой существующий предмет или любое имевшее место явление. И пифагорейцы обнаружили числа не только в том, что можно рассмотреть, но и в том, что можно расслышать. Гармония сфер и правильных фигур – в центре внимания пифагорейцев. Их не могла не тревожить задача о «квадратуре круга». Построить квадрат той же площади, что и круг, с помощью циркуля и ли-

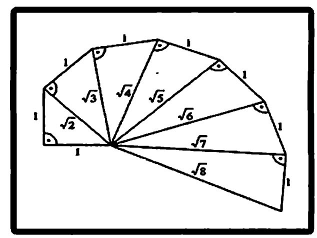












нейки пифагорейцам никак не удавалось. Главная причина была в том, что им мешали странные числа, которые не сводятся к отношению двух целых чисел. Эти числа мы называем иррациональными.

Иррациональные числа пугали пифагорейцев. Их древняя мудрость остерегает открывать эти числа неподготовленным, ибо кто коснётся тайны этих чисел, тот погрузится в «пучину возникновения и будет обмываемым её волнами, не знающими покоя». В схолиях[1] к X книге «Начал» Евклида приведена пифагорейская легенда о гибели при кораблекрушении Гиппаса Месопотамского, разгласившего, что отношение диагонали к стороне квадрата не может быть выражено в виде отношения двух натуральных чисел, то есть является иррациональным. Фидий, открывший самое известное иррациональное число *sectia aurea* – «*золотое сечение*», – скончался в изгнании, обвинённый противниками Перикла в том, что присвоил часть золота для статуи Афины, а также изобразил на щите Афины среди прочих себя. Всё это мистическим образом подтверждало предостережение пифагорейцев.

Что же такое иррациональное число? Величина корня из двух $\sqrt{2}$ – быть может, простейшее иррациональное число. Оно представляет собой решение простого квадратичного уравнения $x^2 - 2 = 0$.

1 ***Схолии*** (первоначально «школьный комментарий» *от греч. σχολή «досуг, школа»*) – небольшие комментарии на полях или между строк античной или средневековой рукописи.

Мы регулярно сталкиваемся с ним при использовании листов формата А – А3, А4, А5, но мало кто знает, что их соразмерность достигается при том, что их стороны друг с другом несоизмеримы. Нельзя найти такой меры длины, которая укладывалась бы целое число раз по периметру всех известных форматов. И это связано с тем, что соотношение сторон листов формата А равно иррациональному числу $\sqrt{2}$ = 1.4142... Так, для формата А4 это 210×197 мм: 210/197 = 1.4142... Для формата А5 – 197×148 мм: 197/148 = 1.4142... И так далее. При этом, как видно из рисунка, все форматы соразмерно размещаются на листе мастер-формата А0.

Иррациональных чисел существует великое множество. На рисунке – целая спираль вещёственных чисел, большинство которых – иррациональные. В общем, иррациональное число – это вещёственное число, которое не может быть представлено в виде дроби *m/n*, где *m* и *n* – целые числа. Многие иррациональные числа нам хорошо знакомы.

Так, если бы «Оскара» стали присуждать иррациональным числам, то, вне сомнений, больше всего их соберёт число π – отношение длины окружности к её диаметру.

Во втором тысячелетии до нашей эры строители Вавилона знали, что отношение длины окружности к её диаметру примерно равно трём. Пифагорейцы, пытаясь найти точное значение этой величины, обнаружили, что число π = 3,141... иррационально. Около 225 года до Р. Х. Архимед из Сиракуз нашёл ближайшее к числу π отношение натуральных чисел – 22/7, или более точное – 223/71. Китайские математики для расчёта числа π использовали приближение $\sqrt{10}$ = 3.16227766016837933199, которое отличается от верного значения числа π во втором знаке после запятой. Сриниваса Рамануджан Айенгор[1] вывел приближённую формулу для числа π как величину пропорциональную $\sqrt{2}$:

$$\pi = (9801/4412)\sqrt{2} = 3.141\,592\,730\,013\,305\,660\,313\,996\,1890\ldots$$

И это приближение отличается от более точного значения π в шестом знаке после запятой:

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884197\ldots$$

Для расчёта числа π придумано множество алгоритмов. В одном из них ряд чисел, повторяющий ряд числа π, возникает как число итераций, которые уводят за пределы круга радиуса 2 значения величин фрактала Мандельброта в окрестности точки C = – 0.75 + 0 *i*. Дэйв Болл обнаружил это

1 ***Сриниваса Рамануджан Айенгор*** (1887–1920) – индийский математик.

в процессе математического эксперимента par excellence. Более детально этот эксперимент описан в третьей части книги в главе «Нелинейные фракталы» (см. стр. 138–139). В 2002 году число π было вычислено с точностью до 1.124.100.000.000 знаков. По-русски это звучит так – один квадриллион сто двадцать четыре триллиона сто миллиардов знаков.

Если мы разместим эти цифры на ленте телетайпа, то она обернётся вокруг земного экватора 62 раза!

Сегодня в некоторых алгоритмах цифровой ряд числа π используется для моделирования случайного ряда. В нём иногда – по случаю – встречаются и регулярные кластеры цифр. Например, последовательность цифр 0123456789 нашлась в 1997 году, она начинается с позиции 17,387,594,880. Используя метафору экватора – это примерно 5 000 километров до конца первого оборота ленты вокруг Земли. На ленте цифр обнаруживается десять шестёрок подряд примерно в 990 километрах от начала и десять семёрок после одного оборота вокруг Земли и 6 000 километров за ним.

Ну как тут не вспомнить наблюдение за игрой в рулетку Фёдора Михайловича Достоевского:

«Между тем я вывел одно заключение, которое, кажется, верно: действительно, в течении случайных шансов бывает хоть и не система, но как будто какой-то порядок, что, конечно, очень странно. Например, бывает, что после двенадцати средних цифр наступают двенадцать последних; два раза, положим, удар ложится на эти двенадцать последних и переходит на двенадцать первых. Упав на двенадцать первых, переходит опять на двенадцать средних, ударяет сряду три, четыре раза по средним и опять переходит на двенадцать последних, где, опять после двух раз, переходит к первым, на первых опять бьёт один раз и опять переходит на три удара средних, и таким образом продолжается в течение полутора или двух часов. Один, три и два, один, три и два. Это очень забавно. Иной день или иное утро идёт, например, так, что красная сменяется чёрною и обратно почти без всякого порядка, поминутно, так что больше двух-трёх ударов сряду на красную или на чёрную не ложится. На другой же день или на другой вечер бывает сряду одна красная; доходит, например, больше чем до двадцати двух раз сряду и так идёт непременно в продолжение некоторого времени, например, в продолжение целого дня».

Число π не только вводит нас в капризы случая, но является ещё и трансцендентальным. Последнее означает, что оно не является решением степенного алгебраического уравнения, как число $\sqrt{2}$, например. Этот факт в 1882 году доказал Фердинанд фон Линдеманн[1], что положило конец многовековым поискам «квадратуры круга».

Ещё одно замечательное число было открыто в XVII веке, когда трудами нескольких математиков была развита идея логарифмов,

гениальная идея, позволяющая заменить умножение сложением.

Прежде всего, следует вспомнить Джона Непера, шотландского математика, который в 1618 году построил таблицы, позже получившие название логарифмических таблиц.

Фактически появление числа $e = 2{,}7182818284\ldots$ связано с *e*-коммерцией XVII века. В 1683 году Якоб Бернулли рассмотрел проблему начисления комиссионных на комиссию.

Допустим, что вы внесли 1 рубль на свой счёт в банке под 100% годовых. Через год банк начислит Вам комиссию в 1 рубль, и на вашем счёте будет 2 рубля. Теперь предположим, что банк начисляет Вам комиссию 50% каждые полгода. Тогда через полгода на Вашем счету будет 1.5 рублей, а через год – 1.5 +0.75 = 2.25 рубля! Продолжим. Пусть банк начисляет комиссию 25% ежеквартально. Тогда в конце года на Вашем счету будет 2.44141 рубля. Если банк будет начислять комиссию ежемесячно, то в конце года на Вашем счету будет 2.61304 рубль. Если банк будет начислять комиссию еженедельно, то в конце года на Вашем счету будет 2.69260 рубля. Этот ряд можно продолжить (см. таблицу). Самое удивительное, что сумма на Вашем счету не будет возрастать до бесконечности, но будет приближаться к пределу, равному числу ***e***:

$$\boldsymbol{e} = 2{,}7182818284\,5904523536\,0287471352\ldots$$

Период начисления комиссии	Сумма на счету в конце года
год	2.00000
полгода	2.25000
квартал	2.44141
месяц	2.61304
неделя	2.69260
день	2.71457
час	2.71813
минута	2.71828
секунда	2.71828

1 ***Карл Луи Фердинанд фон Линдеманн*** (1852–1939) – немецкий математик.

Число e, так называемое основание натурального логарифма, есть число иррациональное. И это доказал Леонард Эйлер в 1737 году. А в 1873 году Шарль Эрмит[1] доказал, что число это трансцендентально (от лат. *transcendens* – выходящий за пределы, здесь – рациональных чисел). И это указывает на схожесть природы чисел π и e. Александр Гельфонд[2] ввёл константу e^{π}, которая также является трансцендентальным числом. Число e встречается там, где наблюдается рост, но не только. Оно появляется и там, где присутствует случай. В статистике кривая, известная как «колокол нормального распределения», базируется на величине e, и о ней будет рассказано в конце книги.

А вот задача, которую в 1708 году рассмотрел Пьер Ремон де Монмор[3]. Группа людей приходит на банкет в одинаковых шляпах и по окончании разбирают первые, попавшиеся под руку. Ничего странного – ведь шляпы одинаковы. Пьер Монмор нашёл, что вероятность ситуации, при которой никто не возьмёт собственную шляпу, равна $1/e$ (около 37%). Таким образом, вероятность того, что человек из этой группы возьмёт свою шляпу, равна $1-1/e$ (около 63%).

И эта величина близка другому, быть может, самому мистическому и наиболее известному числу – «золотому сечению». И в этом тоже нет ничего удивительного, ведь логарифмическая спираль вписывается в «золотое сечение» прямоугольника, на чём основан один из способов её построения. С древних времен известна спираль Архимеда, расстояние между витками которой сохраняется постоянным. В цилиндрических координатах эту спираль описывает линейное уравнение $r = a + b \times \theta$ (r – радиус, θ – угол поворота, a и b – постоянные).

Логарифмическую спираль открыл Рене Декарт, а её свойства исследовал Якоб Бернулли.

В отличие от спирали Архимеда, после завершения полного оборота расстояние между её витками возрастает на величину, равную «золотой» пропорции. Эту спираль описывает степенное уравнение, основанием которого служит число натурального логарифма: $r = a \times e^{b\theta}$. Бернулли хотел, чтобы на его могиле была выгравирована логарифмическая спираль, но вместо этого по ошибке на надгробие поместили Архимедову. Тем не менее, надпись на латыни, выгравированная, согласно завещанию, вокруг спирали – «*eadem mutata resurgo*» («изменённая, я вновь воскресаю»), – свидетельствует, что имеется в виду именно логарифмическая спираль, которая обладает замечательным свойством восстанавливать свою форму после различных преобразований.

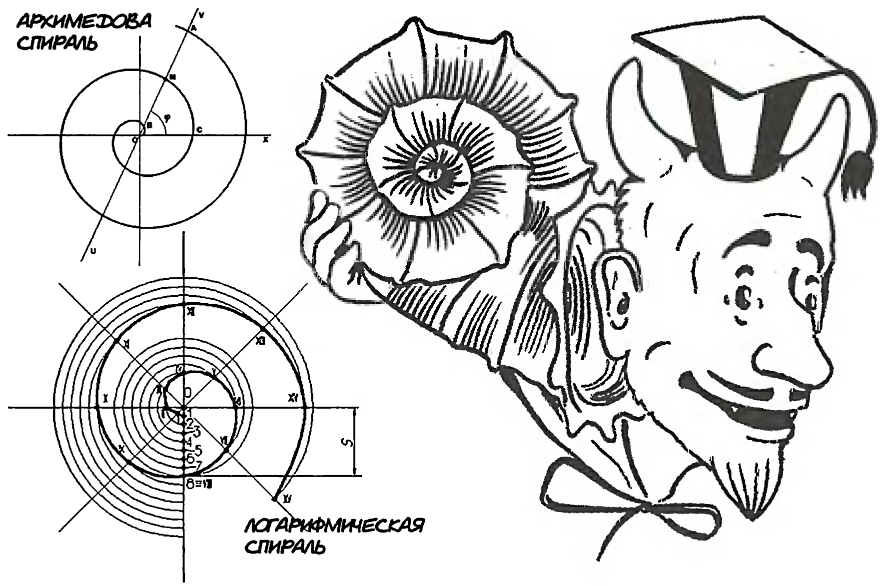
Логарифмическая спираль часто встречается в природе – от раковин моллюсков и атмосферных вихрей до галактик. Так, каждый последую-

---

1 ***Шарль Эрмит*** (1822–1901) – признанный лидер математиков Франции во второй половине XIX века.

2 ***Александр Осипович Гельфонд*** (1906–1968) – советский математик, член-корреспондент АН СССР. Известен своими работами по теории чисел.

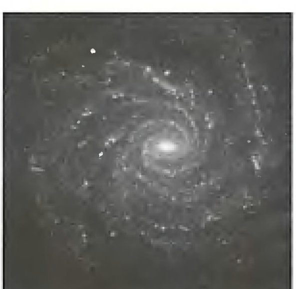
3 ***Пьер Ремон де Монмор*** (1678–1719) – французский математик.



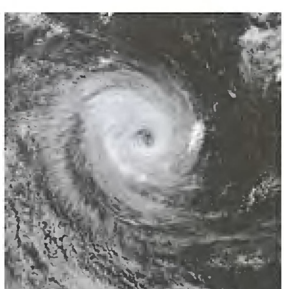
щий слой раковины моллюска Nautilus pompilius сохраняет форму исходного слоя, но увеличивается в размере по мере роста своего обитателя. В итоге раковина повторяет форму логарифмической спирали. По завершении полного оборота раковина прирастает на величину, пропорциональную золотой пропорции. Спирали атмосферных вихрей и галактик ведут себя также подобным образом.

Величина «золотого сечения» с точностью до сорокового знака после запятой равна:

$$\phi = 1{,}61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ldots$$



Галактика NGC1232



Циклон «Катарина» у побережья Бразилии в марте 2004 г.

Продольный разрез раковины моллюска Nautilus pompilius

Долгое время это число «посвящённые» хранили в секрете. Платон в «Тимее»[1] выдаёт свою осведомлённость, но осторожно, указывая лишь принцип построения «прекраснейшей из связей»:

«...из трёх чисел при любом среднем числе первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и, соответственно, последнее к среднему, как среднее к первому».

Витрувию[2] известна «формула гармонии» – *module d'or*, золотой модуль: одна часть целого относится к другой, как целое к большей части. Витрувианский человек символически выражает «золотую пропорцию». Леонардо Фибоначчи в «Счётной Книге» (1202 г.) обсуждает задачу о сложных процентах, известную как «задача о кроликах».

Сколько крольчат родится в течение года от одной пары в предположении, что каждый месяц каждая пара рождает другую и что кролики начинают рожать с двухмесячного возраста?

Фибоначчи доказывает, что в этом случае потомство исходной пары к концу года достигнет 233 пар. Дальше он допускает нечто чудесное: кролики не умирают и не теряют способности к воспроизводству. При таких допущениях популяция возрастает неограниченно. Вначале первая пара кроликов не будет размножаться до второго месяца. К четвёртому месяцу начнут размножаться их первые двое отпрысков. Коль скоро процесс продолжится, число пар кроликов в n-ом поколении описывается последовательностью Фибоначчи

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \varphi(n-1):$$

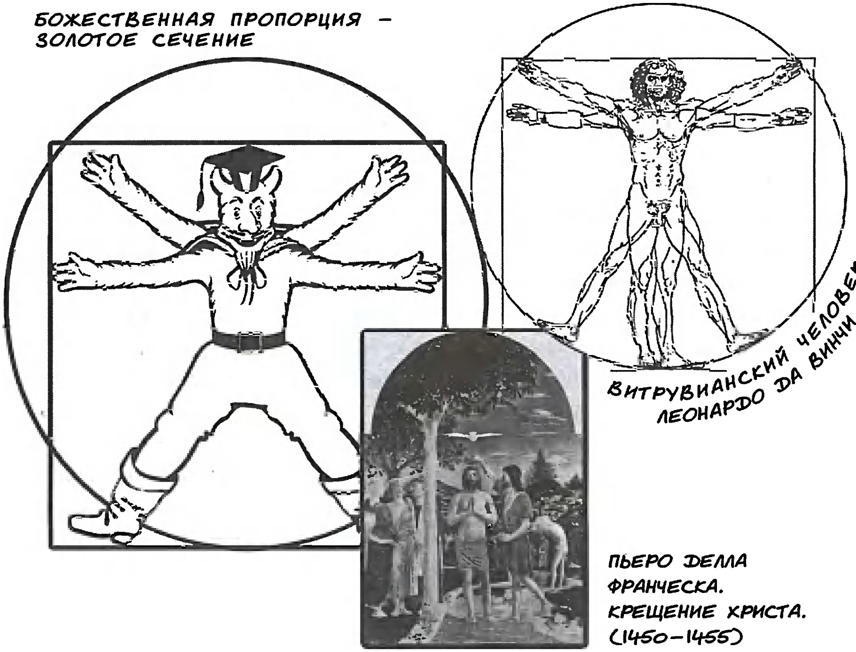
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584...

Здесь каждое последующее число является суммой двух предыдущих. Разделив каждое из них на предыдущее, как мы уже видели, по мере удаления от начала ряда, мы будем получать всё более точное приближение к «золотой пропорции» φ. Значение «золотой пропорции» трудно переоценить в силу того, что она встроена в морфологию всего живого в той мере, в которой ряд Фибоначчи моделирует рост популяций и кластеров живых клеток. По мере развития последних отношение численности прироста кластера составляет величину, равную φ.

В таком случае вовсе не удивительно то внимание, с которым относились к «золотой пропорции» архитекторы, художники и учёные. Леонардо

1 ***«Тимей»*** – один из диалогов Платона зрелого периода (70–60-е гг. IV века до Р. Х.)

2 ***Витрувий*** – полное имя – Марк Витрувий Поллион; римский архитектор, инженер, теоретик архитектуры второй половины I века до Р. Х.



да Винчи совсем не на ровном месте пришёл к пропорциям «витрувианского человека». История эта начинается, быть может, с того, что известный итальянский художник и геометр Пьеро делла Франческа (1420–1492) чудесным образом был осведомлён о привлекательности золотой пропорции для человеческого восприятия, что выдаёт композиции его картины «Крещение Христа» (1450–1455), например.

В центре картины Христос. Он по щиколотку в водах реки, его руки скрещены в молитвенном жесте. Рядом Иоанн Креститель, он льёт воду из блюдца на голову Христа – обряд крещения обливанием. Над головой Иисуса парит голубь – Дух Святой.

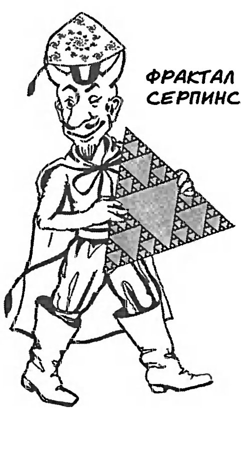
Крылья голубя делят полотно картины в «золотой пропорции».

Его ученик Лука Пачоли, профессор университета города Перуджи, в «Сумме арифметики, геометрии, учении о пропорциях и отношениях» (1494) изложил знания учителя, на него не сославшись. К счастью, в начале XX века были обнаружены оригиналы утерянных математических рукописей делла Франческа и сейчас они находятся в библиотеке Ватикана. В 1496 году Пачоли читает лекции в университете Милана по приглашению герцога Лодовико Сфорца. Здесь судьба сводит его с Леонардо да Винчи. В 1509 году они в соавторстве издают фолиант «De divina proportione» («О Божественной пропорции»). В этом трактате Божественная пропорция, выраженная числом φ, представляется основой гармонии и соразмерности в мире. В трактате читаем:

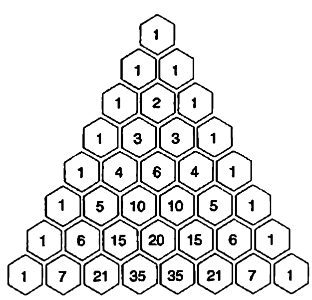
> *«И наша пропорция для всякой непрерывной и определённой величины одна и та же, велики или малы эти части, никаким образом не может быть ни изменена, ни по-иному воспринята... Подобно тому, как Бог не может быть ни определён, ни словом разъяснён, наша пропорция не может быть выражена ни доступным нам числом, ни какой бы то ни было рациональной величиной и остаётся скрытой и тайной и поэтому математиками названа иррациональной».*

Многие работы Леонардо по исследованию анатомии человека, лошади, птицы были мотивированы поиском порядков, кодом которых служила «Божественная пропорция». После него «Божественная пропорция» стала каноном художников, скульпторов и архитекторов эпохи Возрождения. Треугольник Паскаля, как и ряд Фибоначчи, имеет своей кодовой характеристикой величину «золотого сечения». Сравните их с фракталом «салфетка Серпинского». Они похожи. И не случайно размерность «салфетки Серпинского» 1,584... близка по величине к «золотому сечению». Близкие «золотому сечению» размерности характерны для спиральных фрагментов множеств Жюлиа и Мандельброта. Они весьма напоминают логарифмические спирали.

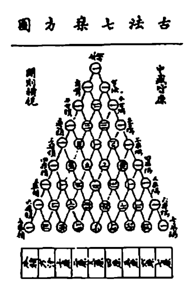
Божественная пропорция, как и число π, имеет прямое отношение к капризам случая. Здесь уместно вспомнить то, что случилось с Паскалем незадолго до того, как этот амбициозный и талантливый математик вдруг отречётся от геометрии:



ФРАКТАЛ СЕРПИНСКОГО



ТРЕУГОЛЬНИК БЛЕЗА ПАСКАЛЯ (1623–1662)



ХУ ШАИЧИ, КИТАЙ, 1303

«Я едва помню о существовании этой самой геометрии. Она видится мне до того бесполезной... вероятнее всего, я никогда больше не вспомню о ней».

Что же произошло? Нечто совершенно особенное и даже мистическое. В 1654 году Паскаль погрузился на два часа в транс. После этого он стал другим человеком. Он продал свой экипаж, лошадей, мебель, библиотеку... Всё. Оставил только Библию. Деньги раздал беднякам, оставив себе до того мало, что зачастую вынужден был просить милостыню или занимать, чтобы не умереть с голоду. Он носил на себе железный, с шипами на внутренней стороне пояс: когда он ловил себя на том, что испытывает счастье, затягивал пояс потуже. Паскаль бросил занятия математикой и наукой вообще.

Паскаль умер в 1662 году. Через несколько дней после смерти Паскаля его слуга заметил, что один карман куртки господина подозрительно оттопыривается. Слуга распорол подкладку и нашёл свёрнутые листы пергамента и бумаги. Видимо, последние восемь лет жизни Паскаль носил их с собой. На листах его рукой были нацарапаны отдельные слова и фразы, датированные 23 ноября 1654 г. Они представляли собой эмоциональное описание того самого состояния транса: Паскаль рассказывал, как Господь в течение двух часов наставлял его на путь Истинный. После этого Паскаль мыслил только о Боге, религии, жизни. Мысли эти позднее были опубликованы в книге под названием «Мысли о религии и других предметах».

Паскаль отрёкся от математики, но он не смог изменить свой математический по существу строй мысли. Вот известный аргумент Паскаля в пользу существования Бога. Предположим, вы допускаете, что не знаете наверняка, существует Бог или нет, и таким образом шансы вероятности каждого предположения примерно равны – 50% и 50%. Каким образом вы можете взвесить шансы, чтобы решить, стоит или не стоит вести жизнь добродетельную? Если вы будете жить, соблюдая добродетельность, и если Бог существует, то ваш выигрыш – вечная жизнь – бесконечно велик. С другой стороны, если Бог не существует – ваш проигрыш, то есть невозможность возвращения на землю, невелик – можно снизить расходы на обряды, посты и всяческие ограничения. Чтобы сравнить возможные выгоды и потери, Паскаль предложил умножить вероятность каждого возможного исхода на его результат и все их сложить, приходя к среднему или же ожидаемому результату. При умножении пусть даже большой вероятности, что Бога нет, на небольшую ценность приза получается величина, возможно, и большая, но всегда конечная. При умножении любой конечной, даже очень маленькой, вероятности, что Бог окажет человеку милость за его добродетельное поведение, на бесконечно большую ценность приза получается бесконечно большая величина.

Введённое таким образом понятие «ожидания» стало важным фрагментом в развитии теории вероятности, в которой «волшебный треугольник» Паскаля играет роль волшебной палочки. Он пригождается всякий раз, когда нужно выяснить количество способов, которыми можно выбрать группы гостей, скажем, из десяти человек. Для этого берём десятый ряд треугольника Паскаля:

1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

Первое число в этом ряду указывает на количество способов, которым вы можете разместить 0 гостей из группы в 10 человек. Способ тут, разумеется, один – вы просто-напросто никого не выбираете. Второе число обозначает количество способов, которыми можно выбрать 1 гостя из 10. Этих способов, очевидно, десять. Третье число менее очевидно. Это число способов, которыми можно выбрать двух гостей из 10: $10 \times 9/2 = 45$.

Далее, три гостя из десяти: $10 \times 9 \times 8/6 = 120$. Очевидно, что после выборки из пяти гостей мы можем заменить расчёт на выборку «невыбранных» гостей. Так количество способов, которыми можно выбрать 6 гостей из 10, равно количеству способов, которыми можно исключить 4 гостя из 10. Это повторит наши варианты по нисходящей.

Волшебная палочка – треугольник Паскаля – в теории вероятности позволяет рассчитать нормальное распределение случайной величины, о чём мы расскажем в самом конце книги. Но полезные свойства треугольника Паскаля не исчерпываются теорией вероятности. В 1714 году свойства треугольника Паскаля исследовал Лейбниц. Среди свойств треугольника Паскаля, прежде всего, бросается в глаза симметрия. При внимательном анализе многие замечают, что сумма цифр диагональных рядов представляет собой ряд чисел Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

В этом ряду, как известно, отношение последующего числа к предыдущему приближается к «золотой пропорции» по мере удаления от начала ряда:

1, 2, 1.5, 1.333, 1.600, 1.625, 1.615, 1,619, 1.617...

Итак, иррациональные числа возникают там, где встречаются несоизмеримые друг с другом объекты.

Это выражает тот факт, что не существует такой меры, которая измеряет оба объекта в целых величинах. Диагональ квадрата со сторонами, равными единице, имеет длину $\sqrt{2}$ – диагональ квадрата и её стороны несоизмеримы. Отношение длины окружности к диаметру круга равно π – длина окружности и диаметр круга опять же несоизмеримы. Но эти несоразмерности – «видимые». Совсем иное дело «золотое сечение» – оно не столь очевидно. Оно связывает три элемента, но этой сложности уже достаточно, чтобы сделать его как бы скрытым от глаз. Представьте себе, если таких элементов будет пять или двенадцать, или ещё больше. Но именно таким объектом является фрактал. Нет ничего удивительного, что фрактальную размерность нельзя вычислить из отношений длин его фрагментов. Впрочем, даже о длинах фрактальных фрагментов приходиться говорить с осторожностью – они то ли есть, то ли их вовсе нет.

Все эти странности примерно того же порядка, как и «улыбка без кота», при том, что кот без улыбки – дело весьма обыкновенное.

II. ФРАКТАЛЫ – СУТЬ ДЕЛА

ЧЕШИРСКИЙ СИМУЛЯКР

Чёрт в сапогах, явившийся во сне, конечно, персонаж мнимый. Однако, его виртуальный образ – уже реален. Не менее реален, чем, например, «улыбка без кота», введённая в обиход Льюисом Кэроллом. Образы, метафоры, притчи испокон веков служат для внедрения в массы новых и сложных воззрений. Они формируют массовое представление о мире, которое, в свою очередь, изменяет окружающую нас реальность. Этот эффект обратного влияния не нов, его заметили и зафиксировали ещё в мифическую эпоху посредством самих же мифов. Вот, например, небольшой фрагмент из древнего сказания индейцев Колумбии, в котором творение мира называется «творением чистой видимости»:

> *«Вначале не было ничего, кроме чистой видимости, ничего по-настоящему не существовало. Наш отец прикоснулся к призраку, к иллюзии; то, за что он взялся, было чем-то таинственным. С помощью сна наш отец, Тот-который-только-видимость, Найнема, прижал призрак к своей груди, а затем погрузился в думу. Не было даже дерева, которое могло бы поддержать этот призрак, и только своим дыханием Найнема скреплял эту иллюзию нитью своего сна. Он попытался узнать, что находится на самом дне, но не нашёл ничего. «Я скрепил то, что не существовало», сказал он. Ничего не было. Тогда наш отец попробовал снова и исследовал дно этого ничто, и его пальцы ощупывали пустой призрак. Он привязал пустоту к нити сна и прижал к ней магическое*

клейкое вещество. Так с помощью сна он вцепился в дно призрака и принялся его толочь, так что в конце концов он смог опереться о землю, которая ему снилась».

В этом фрагменте нет ничего сказочного – sine miraculo, naturaliter – всё без чудес, фантастически естественно. И мы живём в самом центре этой фантастики. Технический прогресс погружает нас в новую виртуальную реальность, но это всё та же плотно стратифицированная имагинарная атмосфера, которая много раз сгущалась в прошлом, будет сгущаться и в будущем. История имагинарного – это история сотворения и использования образов, побуждающих к мыслям и действиям. У воображаемого нет границ, но и от Земли оно не должно отрываться. Когда творцы барокко вознеслись настолько, что их образы совершенно оторвались друг от друга и от Земли, исчез и сам стиль барокко.

В мире физическом нас оберегает и удерживает у Земли сила притяжения, в виртуальном – сила ограничения, которую пионеры компьютерных технологий почувствовали с появлением первых стандартов – от шрифтов до Интернета. Со страхом они замечали, как креативный произвол заменяется сводами правил. Креативность, добрая доля которой зависит от случая, оказалась зажатой в «двойной клешне» строжайших правил. В обмен на творческую свободу система предлагает массовое вирусное распространение любой уникальности, попавшей в сеть. В процессе копирования форм, по ходу симуляции операций происходят искажения, в череде которых возникают симулякры – копии, оригиналов которых никогда не существовало.

Как, например, улыбка чеширского кота.

Такие многократно повторенные симулякры обретают культовую плотность и сами начинает стимулировать воображение в русле своего собственного смысла. В конце концов такие симулякры подготавливают события, уплотняющие эти симулякры. Любое событие уникально и неповторимо, но кластер событий предопределён. Связное, кластерное поведение системы есть манифест многочисленных сетевых и обратных связей, пронизывающих систему. Вся наша жизнь есть жизнь в сети, поскольку сеть захватила даже такое интимное состояние, как одиночество. Этот сетевой захват придает бытию «невыносимую лёгкость». Каждый из нас неповторим и живёт единожды. Вне сети то, что происходит единожды, могло и вовсе не происходить. Но в сети любой расчёт, как и любое безумство в серии отражений и трансформаций, станет тем, чем ему следует быть, – фрагментом сети. Свобода выбора, зажатая «двойной клешнёй» необходимости, есть реальность.

И в этой реальности нет ничего фатального – только фрактальное, в том смысле, что фрактал блестяще иллюстрирует эти воззрения. Разнообразию фрактальных фрагментов сопутствует однообразие правил и операций их построения. Фрактальные формы и фрактальные правила согласованы и связаны характерным символом – числом, выражающим величину фрактальной размерности. Эти три ипостаси – формальная, операциональная и имагинарная – определяют суть фрактального объекта. Однако «с простенького цветка не сорвёшь даже смеха». И фрактальная парадигма – не исключение. Она может служить как метафора или как афоризм для интерпретации «странных» феноменов, но для понимания анатомии и механики фрактальных объектов нужно знать технические детали. Дьявол, как известно, в деталях. С них и начнём.

Не столько чеширский кот, сколько его улыбка будет в фокусе нашего внимания.

Размерность, рассматриваемая в этой главе, – одно из фундаментальных понятий, выходящее далеко за пределы математики. Начнём с простого. Греки представляли пространство как некое вместилище форм. Платон в седьмой главе «Государства» нормирует пространство тремя измерениями. Он пишет:

«После точки есть линия, после линии – плоская поверхность, после плоской поверхности <...> правильным будет добавить к двум измерениям третье, <...> то есть измерение, присущее кубам и прочим телам, обладающим глубиной».

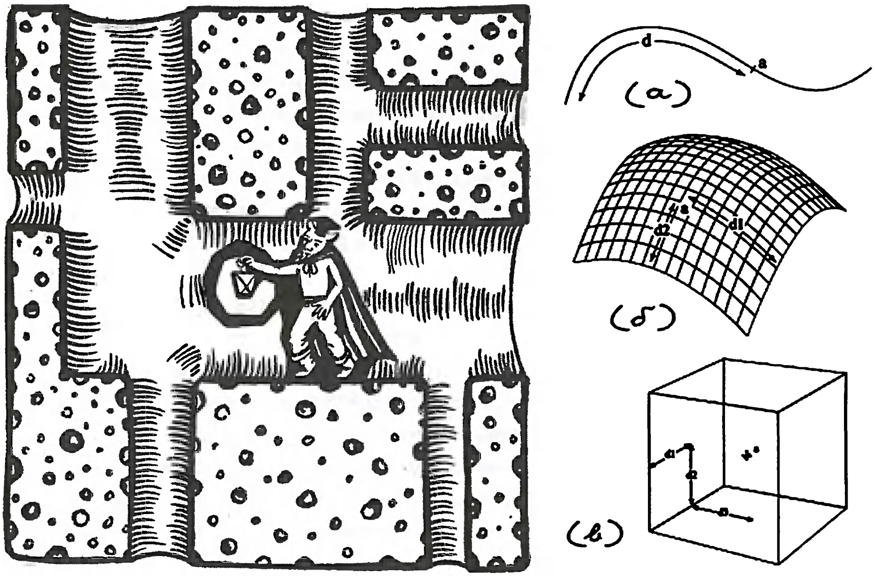
Евклид придал основательность этим весьма расплывчатым суждениям. В первой книге «Начал» он определил основные понятия геометрии – точка, линия, плоскость. Для этого ему понадобились пять простых утверждений. Вот они:

- ***точка есть фигура, не имеющая частей;***
- ***линия есть фигура, обладающая длиной, но не обладающая шириной;***
- ***оконечностями линии являются точки;***
- ***поверхность есть фигура, обладающая только длиной и шириной;***
- ***оконечностями поверхности являются линии.***

Основанное на этих определениях понятие трёхмерного евклидова пространства оставалось неизменным почти две с половиной тысячи лет. Одна из последних работ Анри Пуанкаре называется «Почему пространство имеет три измерения?». Пуанкаре пишет:

«Что мы имеем в виду, говоря, что размерность пространства равна трём? Если для разделения непрерывного и связного множества точек (континуума) C достаточно рассмотреть в качестве сечений определённое количество различных элементов, мы говорим, что размерность такого континуума равна единице... Если же для разделения континуума достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов с размерностью, равной единице, мы говорим, что размерность континуума C равна двум. Если достаточно взять сечения, образующие один

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ
$d_\tau = 1$ (а), $d_\tau = 2$ (б), $d_\tau = 3$ (в)



или несколько континуумов с размерностью, не превышающей двух, мы говорим, что размерность континуума С равна трём; и так далее».

Переведённое на язык множеств, это всё то же трёхмерное евклидово пространство. Оно может быть искривлено, растянуто или свёрнуто, но его «топологическая» размерность остаётся равной трём. Многочисленные заигрывания с пространствами четырёх, пяти и более измерений ничего по существу не прибавляют, но сталкиваются с тем, что представить их человеческое воображение не может. С открытием фрактальной геометрии в представлениях о размерности произошёл радикальный переворот. Размерностей появилось великое множество – и среди них не только целые, но и дробные, и даже иррациональные. И эти размерности доступны для наглядного и чувственного представления.

В самом деле, мы легко представляем сыр с дырками – модель среды, размерность которой больше двух, но не дотягивает до трёх из-за сырных дырок, понижающей размерность сырной массы. Эта несколько примитивная интерпретация породила множество фантазий на тему путешествия в пространстве, размерность которого чуть-чуть меньше трёх.

Ведь если в пространстве есть дыры и тоннели, то их можно использовать, чтобы «срезать» расстояние между двумя точками во Вселенной, размерность которой, например, 2,9999999...!

Это случай, когда «простота доведёт до поста» – в том смысле, что открытия, как и откровения, в процессе многочисленных упрощающих интерпретаций теряют исходное содержание, превращаются в ритуал, смысл которого давно утрачен. Чтобы не потерять смысла понятия дробной или фрактальной размерности, нам следует вернуться к истокам, к парадоксу Ричардсона, который утверждал, что длина изрезанной береговой линии Британии бесконечна!

История такова. При разборе архива английского специалиста по гидродинамике и геофизике Луиса Фрая Ричардсона среди его бумаг были обнаружены черновики удивительного исследования. Он задался вопросом о влиянии масштаба измерения на величину измеряемой длины береговой линии Британии. При переходе от масштаба контурных карт к масштабу «береговых камешков» он приходил к странному и неожиданному выводу: длина береговой линии неограниченно возрастает, причём это возрастание не имеет предела. Гладкие изогнутые линии так себя не ведут. Со школьной скамьи мы знаем о длине окружности. Если измерять длину окружности при помощи циркуля, переставляя его из одной точки в другую, то по мере уменьшения его раствора мы обнаружим, что длина окружности будет увеличиваться. Однако увеличение этой длины имеет предел, равный πD. И чем меньше раствор циркуля, тем ближе измеряемая длина окружности к этому пределу, и тем точнее отношение длины окружности к её диаметру описывает величину числа Пифагора π.

Ричардсон попытался применить тот же самый метод к измерению длины негладкой линии побережья. При большом шаге циркуля он мерил только крупные изгибы береговой линии, однако по мере его уменьшения он измерял всё более и более мелкие детали береговой линии. В пределе процесс сулил необходимость измерять омываемые водой береговые камешки и песчинки. Но до этого не дошло. Эмпирические данные Ричардсона, полученные на картах всё более крупных масштабов, свидетельствовали о степенном росте длины береговой линии при уменьшении шага циркуля:

$$L \approx 1/\varepsilon^{\beta}.$$

В этой простой формуле Ричардсона L есть измеренная длина побережья, ε – величина шага циркуля, а $\beta \approx 3/2$ – найденная им степень роста длины побережья с уменьшением шага циркуля. В отличие от длины окружности, длина береговой линии Великобритании возрастает, не имея предела. Она бесконечна! Приходиться смириться с тем, что кривые изломанные, негладкие не имеют предельной длины.

Однако исследования Ричардсона наводили на мысль, что они имеют некоторую характерную меру – степень роста длины с уменьшением масштаба измерения. Оказалось, что именно эта величина мистическим образом идентифицирует ломаную линию – как отпечаток пальцев личность человека.

Мандельброт интерпретировал береговую линию как фрактальный объект – объект, размерность которого совпадает с показателем степени β. Такая смелая интерпретация нуждается в разъяснении. Прежде всего, поясним, при чём тут размерность, и, во-вторых, разберёмся с дробной размерностью. Мы помним, что топологическую размерность мыслители от Евклида до Пуанкаре определяли, мысленно разрезая его поверхностями, сечениями, кривыми и точками.

Ремесленники поступали и проще, и технологичней. Так, для измерения площади фигуры сложной формы они использовали палетку.

Палетка – это прозрачная пластина, на которой нанесена сетка с квадратными ячейками, стороны которых одинаковы и равны некоторой величине δ. Если такую сетку наложить на карту Великобритании и подсчитать количество клеток, попавших в область объекта измерения, то можно оценить его площадь, которая пропорциональна количеству ячеек, попавших в его границы. Точность оценки возрастает с уменьшением шага сетки. Число ячеек, попавших в границы измеряемого объекта N, возрастает с уменьшением стороны ячейки δ. При измерении площади $N \sim 1/\delta^2$. При аналогичном измерении длины кривой $N \sim 1/\delta$, а объёма некоторого тела $N \sim 1/\delta^3$. Степень в этих отношениях указывает на топологическую размерность, не правда ли? Пропорции, полученные методом палетки, сильно напоминают нам результат Ричардсона. Метод палетки перевели на язык математики и формализовали два замечательных учёных – Хаусдорф[1] и Безикович[2]. Результатом их работы стало новое техническое определение размерности, согласно которому при уменьшении величины δ размерность измеряемого объекта равна отношению логарифма от N к логарифму от $1/\delta$. По существу это показатель степени в формуле $N \sim 1/\delta^q$. Такое отношение запросто может быть не только целым, но и дробным, при том, что топологическая размерность всегда целое число – 1, 2, 3.

Здесь начинается самое интересное. Я поясню логику представлений Хаусдорфа и Безиковича упрощённо, пожертвовав математической строгостью и формализмом, на примере броуновского движения на плоскости. Пусть подопытная частица помещена в прозрачный раствор. Мысленно

1 ***Феликс Хаусдорф*** (1868–1942) – немецкий математик, один из основоположников современной топологии.

2 ***Абрам Самойлович Безикович*** (1891–1970) – российский и британский математик караимского происхождения. В России работал в Санкт-Петербургском и Пермском университетах., в Великобритании – в университетах Ливерпуля, Кембриджа (Тринити-колледж).

представим, что в процессе движения она оставляет след, который проецируется на плоскость. Вначале там появится ломаная траектория, размерность которой легко определить с помощью палетки. Как у всякой кривой, она будет равна 1.

После продолжительного броуновского блуждания в замкнутом объёме траектория полностью «заштрихует» проекцию – не останется ни одного видимого просвета. Размерность такой заполненной траекторией области будет равна 2.

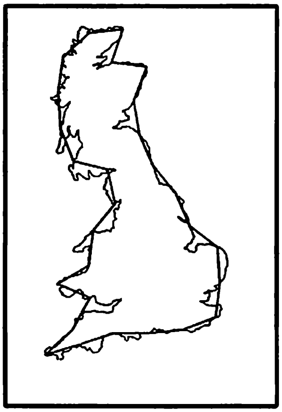
Между этими пределами мы можем зафиксировать промежуточное состояние, в котором траектория броуновской частицы уже перестала напоминать линию, но ещё не заполнила плоскость. В этот момент она напоминает паутину, которая постоянно уплотняется. Размерность такой паутины принимает промежуточное значение между 1 и 2. Это и дает фантазёрам великолепную возможность представить, будто размерность нашего пространства не равна в точности трём, но составляет 2,99. Заметить такую разницу крайне сложно, зато позволяет говорить об уже упоминавшихся выше «дырах» в пространстве.

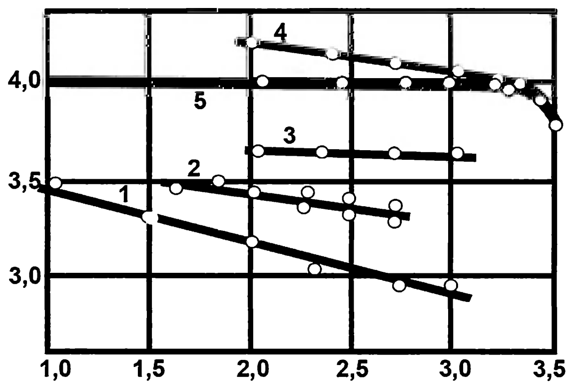
На самом деле эти спекулятивные фантазии возникают оттого, что люди не вникают в суть представлений о размерности Хаусдорфа – Безиковича. Я вник и постараюсь изложить это представление доступно. Напомню, что в подобных случаях Эйнштейн советовал излагать просто – насколько это возможно, но не проще.

Представим универсальную ячейку палетки, которая для одномерного объекта трансформируется в отрезок, для двумерного – в квадрат, а для трёхмерного – в куб. Мерой этой ячейки будут: для одномерного объекта – длина δ^1, для двумерного – площадь δ^2, и для трёхмерного – объём δ^3. В обобщённом случае мерой ячейки является величина δ^d. Мерой объекта, покрытого такими ячейками, является, очевидно, величина $M = N \times \delta^d$ – при условии, что размер ячейки δ уменьшается, стремясь к нулю. Эта мера зависит от выбранной наблюдателем размерности палетки – от величины d. Мы видели, что число ячеек, соприкасающихся с измеряемым объектом N, есть величина, обратно пропорциональная размеру ячейки δ в некоторой степени q: $N \sim 1/\delta^q$. Величина q при этом характеризует структуру измеряемого объекта и не имеет отношения к палетке наблюдателя. При этом $M = \mathrm{const} \times \delta^{d-q}$. Поскольку $\delta \to 0$, то при $d-q > 0$ величина $M \to 0$. При $d-q < 0$ величина $M \to \infty$ – «уходит» на бесконечность. Только при $d = q$ мера M принимает конечное значение, которое и называется размерностью Хаусдорфа – Безиковича.

В практических расчётах для определения размерности Хаусдорфа – Безиковича используются упрощения, вполне обоснованные для большинства сложных форм. Так, на основании приведённой выше формулы $M = N \times \delta^d$, размерность d может быть представлена отношением ln (M/N)

ТОЧКИ НА ГРАФИКЕ ОБЫЧНО ЛОЖАТСЯ НА ОТРЕЗОК ПРЯМОЙ, УГОЛ НАКЛОНА КОТОРОЙ И РАВЕН α. НАПРИМЕР, РАЗМЕРНОСТИ ПРИБРЕЖНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ЗАПАДНОГО ПОБЕРЕЖЬЯ НОРВЕГИИ — 1,52; ДЛЯ ВЕЛИКОБРИТАНИИ (1) — 1,25; ДЛЯ ГЕРМАНИИ (2) — 1,15; ДЛЯ АВСТРАЛИИ (4) — 1,13; ДЛЯ СРАВНИТЕЛЬНО ГЛАДКОГО ПОБЕРЕЖЬЯ ЮЖНОЙ АФРИКИ (3) — 1,02 И, НАКОНЕЦ, ДЛЯ ИДЕАЛЬНО ГЛАДКОЙ ОКРУЖНОСТИ (5) — 1,0.





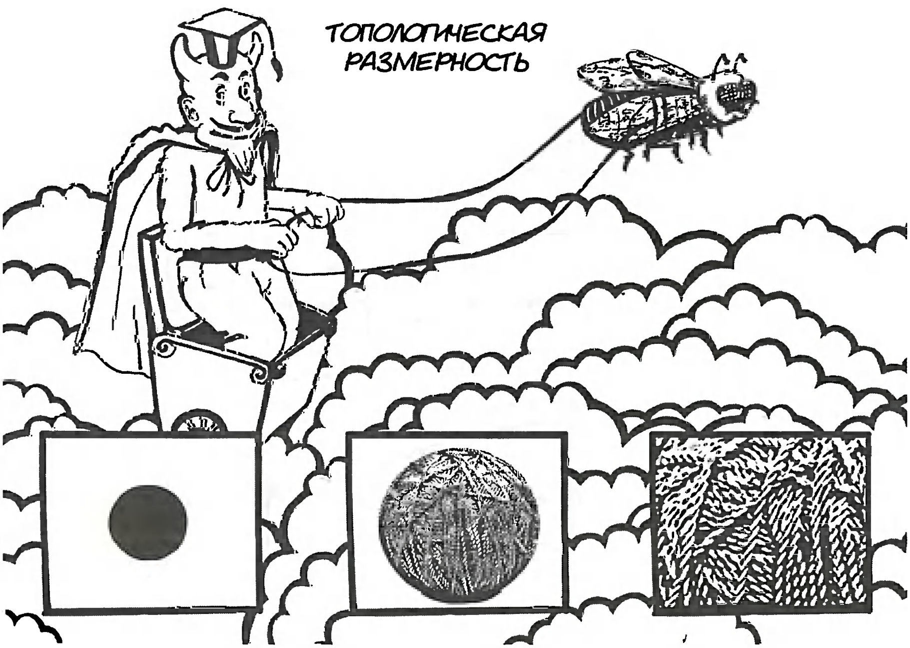
к ln (δ). При фиксированном значении меры M её можно исключить, произведя расчёт размерности d по двум точкам (N_1, δ_1) и (N_2, δ_2):

$$d = -\,(\ln N_1 - \ln N_2)/(\ln \delta_1 - \ln \delta_2).$$

На основании этой формулы алгоритм определения фрактальной размерности обычно сводится к следующему. Строится график зависимости N от δ в логарифмических координатах. Точки на графике обычно ложатся на отрезок прямой, угол наклона которой и равен d. Например, размерности прибрежных пограничных кривых для западного побережья Норвегии – 1,52; для Великобритании – 1,25; для Германии – 1,15; для Австралии – 1,13; для сравнительно гладкого побережья Южной Африки –1,02 и, наконец, для идеально гладкой окружности – 1,0.

Размерность Хаусдорфа – Безиковича отличается от Евклидовой. Она может принимать нецелые значения. Она неизменна (инвариантна) при рассмотрении объекта «вблизи или издалека». Будучи трансмасштабной, она не сводится к геометрии фрагмента, но содержит элемент, отражающий его трансформацию при смене масштаба.

Остановимся на этих свойствах подробнее. Прежде всего, обратим внимание: дробная размерность не имеет ничего общего с «дырами» в пространстве. Дробность связана с тем, что характеристики выбран-



ной обозревателем сетки не совпадают с характеристиками, присущими объекту измерения. Как бы ни приближались друг к другу мера и измеримое, между ними всегда возможно некоторое различие. Оно может выражаться в появлении дробной размерности, выраженной рациональными или иррациональными числами. Появление последних говорит о несоразмерности мер измеряющего и измеряемого, но это не исключает их соизмеримости.

Ведь суть иррационального числа – соизмерять несоизмеримое.

Таким образом, дробная размерность появляется не как свойство пространства, но как отношение между наблюдаемым и наблюдателем.

Размерность по своей природе – величина относительная. Мандельброт иллюстрировал это известным примером о размерности клубка бечёвки с точки зрения мухи. Клубок бечёвки кажется мухе с большего расстояния точкой (топологическая размерность 0). Подлетев поближе, она видит большую точку – диск (топологическая размерность 2). С ещё меньшего расстояния муха видит, что перед ней шар (топологическая размерность 3). Во всех случаях неровности сглаживаются из-за большого расстояния, и размерность Хаусдорфа – Безиковича совпадает с топологической. Подлетев совсем близко, муха видит перед собой клубок бечёвки, то есть запутанную пространственную кривую (топологическая размерность 1).

Мандельброт продемонстрировал, что истинной, абсолютной размерности клубка бечёвки просто не существует; всё зависит от точки зрения наблюдателя.

«Представление о том, что численный результат измерений зависит от отношения объекта к наблюдателю, – писал он, – вписывается в понятия современной физики и даже является их превосходной иллюстрацией».

Тот факт, что размерность есть величина относительная, не удивляет. Удивляет другое: факт существования таких структур, размерность которых не изменяется при изменении масштаба их обозрения – «вблизи или вдали». В природе среди множества разных форм довольно часто, как мы видели, встречаются именно такие конструкции – фракталы. Мухе Мандельброта нужно сесть на клубок бечёвки, чтобы увидеть скрученную нить и ощутить её структурную целостность, несмотря на беспорядочное расположение волокон.

Взглянув на евклидову фигуру, вы довольно легко определите её размерность – одномерная линия, двухмерный круг, трёхмерный шар. Здесь размерность неотделима от фигуры. Перед вами обычный «кот без улыбки». Вы довольно часто встречаете котов без улыбки, но часто ли вам встречается улыбка без кота?

Фрактальная размерность именно такой феномен – улыбка без кота.

Взглянув на фрагмент фрактала, вы не сможете сказать, какова его размерность. И причина не в геометрической сложности фрагмента – фрагмент может быть очень простым, но в том, что фрактальная размерность отражает не только форму фрагмента, но и формат трансформации фрагмента в процессе построения фрактала. Фрактальная размерность как бы отстранена от формы. И благодаря этому величина фрактальной размерности остаётся инвариантной – она одинакова для любого фрагмента фрактала при любом масштабе обзора. Её нельзя «ухватить пальцами», но можно рассчитать. При этом в самой сердцевине алгоритма расчёта скрывается многократное повторение – терпеливый пересчёт снова и снова с изменением масштаба ячеек палетки, покрывающих фрактальный объект. Повтор одной и той же операции есть также основная отличительная черта алгоритмов построения фрактальных форм.

Где повторение, там и магия.

Завораживающие, затягивающие внимание фрактальные формы появляются в результате многократного повтора одного и того же алгоритма. Переход с одного масштаба на другой при рассмотрении фрактала часто открывает новые и новые фрактальные формы, при том, что сама операция их построения повторяется в точности.

Древние греки уже замечали нечто подобное в природе. Гераклит отмечал, что «нельзя войти дважды в одну и ту же реку». Важно понимать то, что говорит Гераклит. Сколько бы раз мы ни входили в реку, каждый раз река будет иной, даже если между вхождениями прошёл ничтожно малый промежуток времени. Принцип Гераклита запрещает точный повтор результата. Другое дело точный повтор процесса или операции. В отличие от неповторимости результата, точный повтор операции – итерация – обычное дело. Даже рождение и смерть повторяют себя несчётное число раз при том, что каждый рождённый и каждый смертный неповторим, уникален, индивидуален. В действительности феномен повтора состоит в том, что процесс и результат неразделимы. Это напоминает квант действия или волну-частицу. Степень связности повторяющегося процесса и производимого результата определяется силой петель обратного влияния, сопутствующих процессу. В этом смысле следует трактовать замечание датского философа Сёрена Керкегора:

> *«На личном опыте убедился, что повторений вообще не бывает, ведь даже если окружающая обстановка та же, сам действующий субъект изменился уже тем, что он намерен осуществить повтор».*

Далее в его «опыте экспериментальной психологии» на передний план выходят упорство и привычка, молитва и ритуал – действия, упорное повторение которых изменяет реальность. В качестве иллюстрации силы повторения Керкегор напоминает библейскую притчу об Иове.

Иов был непорочен, справедлив, богобоязнен и удалялся ото зла, а богатством превосходил всех сынов Востока. У него было семь сыновей и три дочери, составлявшие счастливое семейство. Этому счастью позавидовал сатана и перед лицом Божьим стал утверждать, будто Иов праведен и богобоязнен лишь благодаря своему земному счастью, с потерей которого исчезнет и всё его благочестие. Чтобы изобличить эту ложь, Бог позволил Иову испытать все бедствия земной жизни. Сатана лишает его всех богатств, слуг и детей, а когда и это не поколебало праведника – поражает его проказой. Болезнь лишила Иова права пребывания в городе: ему пришлось удалиться за стены и там, соскабливая струпья черепком, сидеть в пепле и навозе. Все отвернулись от него; жена – и та презрительно отзывалась о результатах его благочестия. Но Иов ни словом не пожаловался на своё положение. Друзья – Елифаз, Вилдад и Софар – семь дней молча оплакивали его страдания; наконец они стали утешать Иова, уверяя, что Бог справедлив, и если он страдает теперь, то страдает за какие-нибудь согрешения свои, в которых должен покаяться. Это ветхозаветный догмат: всякое страдание есть возмездие за какую-нибудь неправду. Друзья, особенно один, Вилдад, видели единственный выход: смирением перед карой Иов должен купить себе право надеяться на прощение, вплоть до возвращения богатств. Иов не захотел. Тут-то и завязался узел, который мог быть разрублен только ударом грома. Опираясь на сознание собственной правоты, Иов восстаёт против всех человеческих доводов. Он твёрдо выразил веру в неисповедимость путей Божиих, пред которыми человеческая логика должна признать полное бессилие. Хотя истинная причина постигших его бедствий оставалась для Иова непостижимой, он верил в правду Божию и, чувствуя также собственную правоту перед Богом, победил именно своей безграничной верой. Сатана потерпел поражение; Бог исцелил Иова от проказы и обогатил вдвое против прежнего. У него опять родились семеро сыновей и три дочери, и он снова сделался патриархом счастливой семьи. Умер Иов в старости, насыщенный днями.

Здесь прежде всего упорно повторяется состояние духа – вера в правоту Божию. Повторение богоугодно и вознаграждено. В эссе «Миф о Сизифе» Альбер Камю замечает нечто подобное. Сизиф осуждён вкатывать камень на вершину горы, прекрасно зная: тот неизбежно скатится, и труд придётся начинать сызнова. И всё же Камю находит нечто ободряющее и обнадёживающее в способности Сизифа выражать свободную волю, бороться с непреодолимыми препятствиями и утверждать свой выбор, даже «занимаясь абсурдным трудом в равнодушной Вселенной». Сизиф – утверждает Камю – одерживает победу.

Я привожу столь широкое толкование повторения затем, чтобы стало понятно: повтор алгоритма при построении формы – вовсе не исключительное, но скорее одно из самых распространенных явлений в природе и в человеческом обществе. Всякое ремесло есть точный повтор операции; на математическом языке – итерация. Математика строго различает тождество и равенство. Тождество подчеркивает уникальность и неповторимость, равенство – связность.

Например, число 3 тождественно числу 3, а вот параметрическое уравнение $x + y - R = 0$ производит множество связанных друг с другом равенств при вариации параметра R. Фактически тождество есть повторение результата, а равенство – повтор операции. Ограничение Гераклита исключает тождественный повтор всех параметров системы, но допускает повтор одних параметров системы при изменении других. Такой повтор можно моделировать с помощью нелинейных уравнений. С математической точки зрения нелинейность означает, что каждому значению некоторой переменной соответствует несколько значений другой. Например, параметрическое уравнение окружности, если её центр совпадает с началом координат, нелинейно: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Любому значению параметра y в области допустимых значений соответствует два значения параметра x и vice versa[1].

Графики нелинейных функций обычно искривлены и извилисты. Линейные уравнения характеризуются однозначным соответствием переменных: каждому значению x соответствует одно и только одно значение y и наоборот. Например, уравнение $x + y = 5$ – линейно. Поведение линейных функций полностью детерминировано, однозначно определено начальными условиями. Поведение нелинейных функций не столь однозначно, ведь два разных начальных условия могут привести к одному результату. На этом основании итерация – повторение операции – проявляется в двух различных форматах. Она может иметь характер линейной референции, когда на каждом шаге вычислений идёт возврат к начальному условию. Это своего рода «итерация по шаблону». Серийное производство на конвейере есть «итерация по шаблону». Итерация в формате линейной референции не зависит от промежуточных состояний эволюции системы. Здесь каждая новая итерация стартует «от печки». Совсем иное дело, когда итерация имеет формат рекурсии, т. е. результат предыдущего шага итерации становится начальным условием для следующего.

Так, например, дифференциальное исчисление описывает положение и скорость тела в каждый момент времени через значение этих параметров в предыдущий момент времени. Рекурсию можно иллюстрировать также рядом Фибоначчи, представленным в форме последовательности Жирара: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Результат – числа Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

В этом примере совершенно очевидно, что функция применяется сама к себе, не отсылая к начальному значению. Она как бы скользит по ряду Фибоначчи, и каждый результат предыдущей итерации становится начальным значением для следующей. Именно такое повторение реализуется при построении фрактальных форм.

Покажем, как фрактальный повтор реализуется в различных алгоритмах построения фрактала. Пусть это будет фрактал «салфетка Серпинского». Рассмотрим пять кардинально различных алгоритмов построения фрактала – вырезание трем[2], FASS-метод, алгебраический алгоритм, метод

1 ***Vice versa*** (лат.) – противоположным образом, наоборот.

2 ***Трема*** – от греч. *trēma* – отверстие, щель.

L-систем и CIF-метод. Эти столь различные алгоритмы построения фракталов имеют общую черту: многократный рекурсивный повтор типовой операции – повтор от достигнутого.

Итак, рассмотрим эти алгоритмы подробнее.

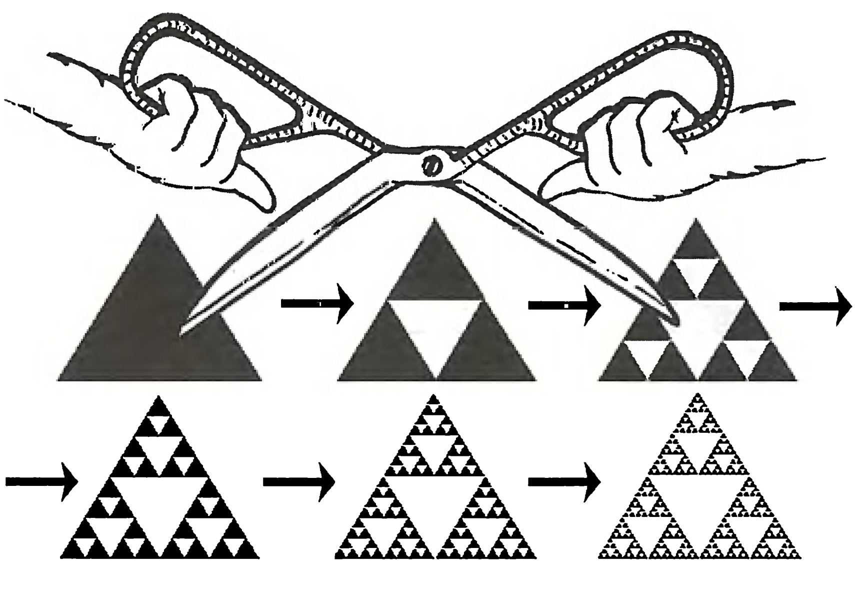
Метод вырезания трем

Берём равносторонний треугольник со стороной r. На первом шаге вырезаем в центре него перевёрнутый вершиной вниз равносторонний треугольник с длиной стороны $r_1 = r_0/2$. В результате этого шага у нас получаются три равносторонних треугольника с длинами сторон $r_1 = r_0/2$, располагающиеся в вершинах исходного треугольника.

На втором шаге в каждом из трёх образовавшихся треугольников вырезаем перевёрнутые вписанные треугольники с длиной стороны $r_2 = r_1/2 = r_0/4$. Результат – 9 треугольников с длиной стороны $r_2 = r/4$.

Продолжаем повторять эту операцию, на любом n-ом шаге в каждом из имеющихся треугольников вырезая перевёрнутый треугольник со стороной $r_n = r_0/2^n = r_0 2^{-n}$.

В результате форма «салфетки Серпинского» постепенно становится всё более и более определённой. Фиксация происходит на каждом шаге. Все предыдущие фиксации как бы «стираются».



Алгебраический алгоритм

Поместим равносторонний треугольник с длиной стороны, равной 1, на комплексную плоскость $= x + iy$ (левый треугольник на рисунке). Пусть у нас имеются три оператора t_1, t_2, t_3, каждый из которых переводит исходный равносторонний треугольник в подобный ему, но в два раза меньшего размера.

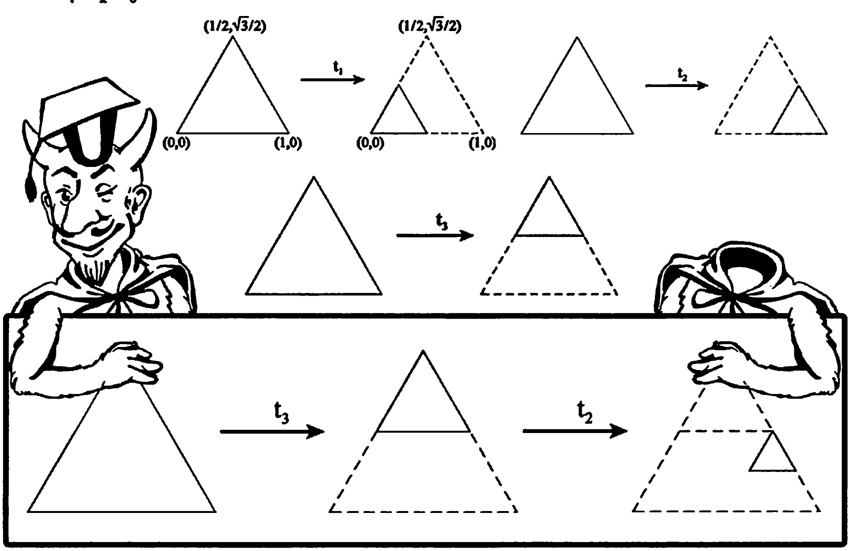
Применение операторов t_1, t_2, t_3 приводит к тому, что мы получаем треугольник, подобный исходному, но меньшего размера и строго определённого положения по отношению к исходному треугольнику, как показано на рисунке.

Многократное повторение этих операторов позволяет построить «салфетку Серпинского».

Привлекательность этого метода в том, что операторы t_1, t_2, t_3 можно выразить алгебраическими формулами, приведёнными в таблице, и запрограммировать.

Здесь реализуется кумулятивная фиксация образа, то есть накопительное пошаговое формирование его так, что фрагмент n-ого шага накладывается на образ n-1 шага.

ТРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ. СХЕМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ t_1, t_2, t_3 (В СКОБКАХ ПРИВЕДЕНЫ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ ВЕРШИН)



t_1: сжатие в два раза	t_2: сдвиг на 1\2 стороны	t_3: перемещение на $1/4 + i\sqrt{3}/4$
$f_1(z) = \frac{1}{2}z$	$f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$	$f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

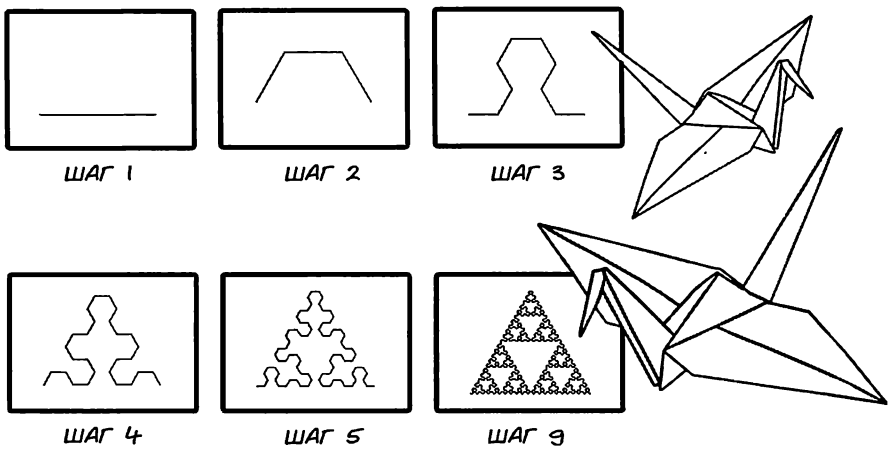
Метод FASS-линии

Данный метод позволяет построить фрактал Серпинского при помощи алгоритма построения так называемых FASS-кривых.

Название происходит от английского описания подобных кривых: «space-Filling, self-Avoiding, Simple and self-Similar», что означает кривые, заполняющие собой всю плоскость, без самопересечений, состоящие из простых и самоподобных фрагментов. Пошаговое построение FASS-линии при многократном повторении может произвести фрактал Серпинского.

Конечно, при фиксации образа последующего шага все предыдущие построения «стираются».

ПОСТРОЕНИЕ «САЛФЕТКИ СЕРПИНСКОГО» С ПОМОЩЬЮ FASS-ЛИНИИ



Метод L-систем

Он изобретён в 1968 году не математиком, а венгерским биологом Аристидом Линденмайером, разработавшим метод описания сложных природных систем и процессов с помощью простых составляющих и правил их преобразования.

Линденмайер использовал формальную грамматику, опирающуюся на правила генерации преобразования символов. L-система позволяет получить сложную форму при помощи аксиомы и правил преобразования. Результат этого процесса детерминирован, то есть строго и однозначно определён алгоритмом построения. Однако проблемой метода в общем смысле является то, что предсказать конечный результат невозможно до тех пор, пока алгоритм не будет завершён полностью. При этом каждый шаг вызывает удлинение командной строки, а значит, на её обработку требуется всё больше и больше времени, так что даже современные компьютеры тратят на этот процесс достаточно много времени, а в далёком 1968-м году на решение задачи потребовалась бы почти вечность.

Рассмотрим алгоритм построения «салфетки Серпинского» методом L-систем немного подробнее.

Аксиомой этого процесса служит выражение: FXF – – FF – – FF. Имеется также три правила:

F → FF;

x → – – FXF++FXF++FXF – –;

угол β = 360°/6 = 60°.

Нулевой шаг процесса имеет вид: FXF – – FF – – FF. Уже первый шаг имеет довольно длинную запись: FF – – FXF ++ FXF ++ FXF – – FF – – FF FF – – FF FF... О длине записи на десятом или двадцатом шаге даже говорить не приходится.

Компьютеризировать, впрочем, можно, для чего следует лишь сформулировать правило. Здесь реализуется кумулятивная фиксация.

Метод SIF, или Метод систем итерированных функций Барнсли

Дано: равносторонний треугольник с координатами углов A (0,0), B (1,0), C ($1/2$, $3^{1/2}/2$), Z_0 и произвольная точка внутри этого треугольника – игральная кость, на гранях которой имеется по две буквы A, B и C.

Шаг 1. Бросаем кость. Вероятность выпадения каждой буквы составляет 2/6 = 1/3.

- Если выпала буква А – строим отрезок z_0–А, на середине которого ставим точку z_1.
- Если выпала буква В – строим отрезок z_0–В, на середине которого ставим точку z_1.
- Если выпала буква С – строим отрезок z_0–С, на середине которого ставим точку z_1.

Шаг 2. Бросаем кость ещё раз.

- Если выпала буква А – строим отрезок z_1–А, на середине которого ставим точку z_2.
- Если выпала буква В – строим отрезок z_1–В, на середине которого ставим точку z_2.
- Если выпала буква С – строим отрезок z_1–С, на середине которого ставим точку z_2.

Повторяя операцию много раз, мы получим точки z_3, z_4,.., z_n. Особенность каждой из них в том, что точка находится точно на полпути от предыдущей до произвольно выбранной вершины. Теперь, если отбросить достаточно большое количество точек, например, от z_0 до z_{100},

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ «САЛФЕТКИ СЕРПИНСКОГО» МЕТОДОМ СЛУЧАЙНЫХ ИТЕРАЦИЙ БАРНСЛИ. СЛЕВА НАПРАВО 10^3, 10^4, 3×10^4 ИТЕРАЦИЙ то остальные при достаточно большом их количестве образуют структуру «салфетки Серпинского». Чем больше точек, чем больше итераций, тем явственнее является наблюдателю фрактал Серпинского. И это при том, что процесс идет, казалось бы, случайным путём (благодаря игральной кости). «Салфетка Серпинского» представляет собой своего рода аттрактор процесса, то есть фигуру, к которой стремятся все траектории, построенные в этом процессе при достаточно большом количестве итераций. Фиксация образа при этом представляет собой кумулятивный, накопительный процесс.

Каждая отдельная точка, быть может, никогда и не совпадёт с точкой фрактала Серпинского, но каждая следующая точка этого организованного «по случаю» процесса притягивается ближе и ближе к точкам «салфетки Серпинского». При этом радиус попадания каждой следующей точки в окрестность точки фрактала Серпинского уменьшается экспоненциально. Например, так. На 10-м шаге размеры радиуса попадания составляют 2^{-10} или 10^{-3} метра. Одна тысячная метра – миллиметр. Такое различие вполне различимо невооружённым глазом. Но уже на 30-м шаге получим размеры 2^{-30} или 9×10^{-10} метра. Для тех, кому эти цифры мало что говорят, скажем, что это примерно равно размеру атома, и заметить такое отличие можно только в самый мощный современный электронный микроскоп. Согласитесь, что такое попадание можно считать точным и полным с практической точки зрения.

Эта точность отличает случай, зажатый «двойной клешнёй» алгоритма, от чистой случайности. Не удивительно, что, брызгая краской на холст без строгих и чётких правил, вам не повторить полотен Энди Уорхола, Питера Корнелиса Мондриана или Казимира Малевича.

Поскольку все рассмотренные алгоритмы сводятся к повтору установленных правил, общей идеей для их вычислений будет организация цикла – петли, в которой по завершении последней операции программа будет возвращаться к исходной операции. Эта серия операций, повторяющихся по кругу, есть операциональная петля. Она не возвращает нас к изначальному значению, но каждый раз его переопределяет. На каждом такте этого цикла обновляются начальные условия, и это всякий раз приводит к новому результату в конце цикла. Промежуточные результаты могут «стираться», но могут и накапливаться: это определяет последнее правило в цикле – оператор фиксации.

Такой рекурсивный повтор реализуется в полном согласии с утверждением Гераклита: мы можем сколько угодно раз входить в реку, но всякий раз это будет новая река. Рекурсивный цикл лежит в основе построения множества форм – в том числе и фрактальных. Он обнаруживается в природе, в поведении живых организмов, в общественной жизни. Теперь он хорошо известен как петля обратного влияния или обратной связи.

Однако технику функционирования такой петли начали изучать совсем недавно.

ПЕТЛЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Эта глава будет полностью посвящена такому понятию, как обратная связь. Мы погрузимся в этот удивительный мир, настолько разнообразный и восхитительный, что он захватывает воображение и завораживает своей красотой.

А начнём с простого примера, который в своё время придумал основоположник кибернетики и теории искусственного интеллекта Норберт Винер. Пример этот, хотя и был впервые опубликован в 1943 году, не потерял ни наглядности, ни простоты, ни полноты.

Для описания петли обратной связи Винер в качестве примера привёл рулевого на лодке. Рулевой должен придерживаться заданного курса и постоянно проводит оценку того, насколько лодка его придерживается. Если рулевой видит, что лодка отклоняется, он поворотом руля возвращает её на заданный курс. Через некоторое время он снова производит оценку – и опять корректирует направление движения при помощи руля. Таким образом, навигация осуществляется при помощи итераций, повтора и последовательного приближения движения лодки к заданному курсу.

Простейший механизм с обратной связью нам хорошо знаком – это маятниковые часы. Приоритет их создания принадлежит голландскому математику, механику и изобретателю Христиану Гюйгенсу. В 1657 году он описал и запатентовал конструкцию часов, основанную на идее Галилея о соединении маятника со счётчиком колебаний. Впервые в часах Гюйгенса регулятор колебаний (маятник) сам определял моменты времени, когда требовалась доставка энергии от двигателя (подвешенной гири) так, что энергия подводилась, не нарушая периода колебаний. Это достигалось с помощью простого и остроумного устройства в виде якоря с косо срезанными зубцами (анкера), периодически подталкивающего маятник.

Справедливости ради, надо отметить, что подобный спусковой механизм независимо от Гюйгенса был изобретён английским физиком Робертом Гуком (ок. 1660), а затем в 1734–1768 годах усовершенствовался английским часовщиком Джоном Гаррисоном. Часы Гаррисона (морской хронометр), основанные на этом механизме, впервые позволили морякам точно определять географическую долготу нахождения судна.

Проблема вычисления долготы считалась столь трудноразрешимой и насущной, что в то время Парламент Великобритании назначил награду за её решение в размере 20 000 фунтов стерлингов (что сейчас сопоставимо с пятью миллионами долларов).

Типовая схема петли обратной связи показана на рисунке. Она сводится к изменению переменного параметра X (направление лодки, подвод энергии к маятнику) и контролируемого параметра C (курс лодки, момент подвода энергии к маятнику).

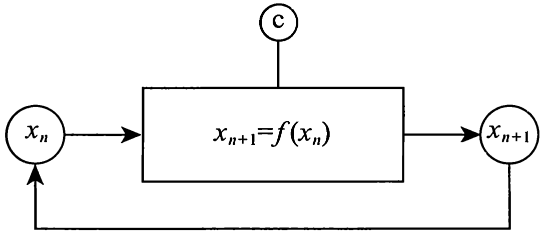


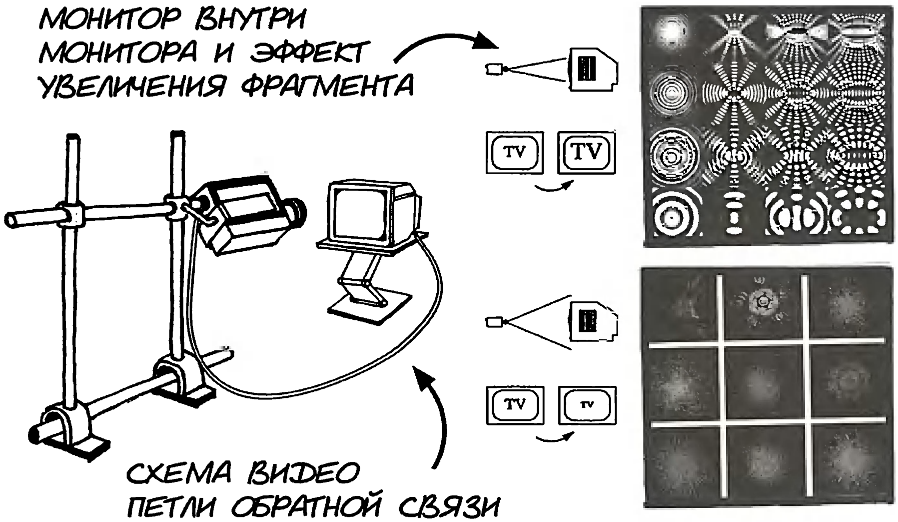
Схема петли обратной связи. X – переменный параметр, C – контролируемый параметр

Ещё одним более современным примером петли обратной связи служит система, состоящая из монитора и направленной на него видеокамеры. Камера снимает монитор и на него же передаёт изображение, то есть снимает переданное ею же. Этот эксперимент сегодня, когда почти в каждом доме имеются компьютер и веб-камера, очень легко произвести самостоятельно. Контролируемые параметры в данной системе – яркость, контрастность, расстояние до монитора, фокус, направление камеры (угол между камерой и перпендикуляром к плоскости монитора), насыщенность, а также ряд других. Период процесса (время, за которое осуществляется одна итерация, один шаг) 1/30 секунды (если съёмка идёт со скоростью 30 кадров в секунду), однако в зависимости от формата видеосигнала она может быть и больше, и меньше – например, 1/15 секунды.

В этом эксперименте возможны несколько вариантов.

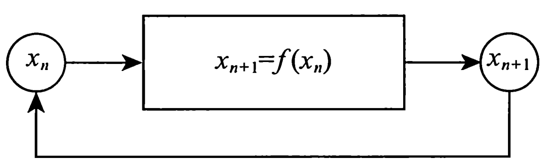
Вариант 1. Камера снимает монитор полностью, не захватывая ничего более монитора и не обрезая ни одной его части. Результат – многократное отражение монитора в мониторе, подобно тому, что мы видим, когда находимся между двумя плоскими параллельными зеркалами, расположенными строго друг напротив друга.

Вариант 2. Камера захватывает лишь часть монитора, неважно, насколько большую – 99% или 1%. Результат – увеличение монитора до бесконечности: ведь камера будет увеличивать этот фрагмент, заполняя им весь монитор.



Вариант 3. Камера, как и в варианте 1, захватывает весь монитор в масштабе 1:1. Если мы будем изменять угол между осью камеры и перпендикуляром к плоскости монитора, то на экране мы увидим довольно замысловатые картины (см. рис.). Эти образы непредсказуемы из-за совокупности влияющих на них причин: сдвиг при сканировании образа с монитора, деформация образа в камере, память и задержка сигналов и прочих.

А ведь, по сути, всё это многообразие достигнуто при помощи довольно примитивной системы с достаточно простой петлёй обратной связи. Чтобы во всём разобраться, упростим задачу и рассмотрим одношаговую петлю без контролируемых параметров, схема которой приведена на рисунке.



Одношаговая петля обратной связи

Допустим, оператор $x_{n+1}=f\ (x_n)$ – это умножение произвольного числа α на себя. При $\alpha>1$ ряд чисел стремится к бесконечности, и если $\alpha=10$, имеем последовательность 10, 100, 10 000... Если $\alpha<1$, ряд стремится к нулю, и при $\alpha=1/2$ получаем 1/2, 1/4, 1/16... Если $\alpha=1$, то имеем бесконечный ряд единиц. Следовательно, мы можем выделить несколько видов обратной связи – усиливающая или положительная ($\alpha > 1$), стабилизирующая или отрицательная ($\alpha < 1$), нейтральная ($\alpha = 1$). Эти эффекты иллюстрирует поведение системы микрофон–громкоговоритель, с которыми все знакомы по собраниям в актовых залах. Если звук, усиленный громкоговорителем, превышает порог чувствительности микрофона ($\alpha > 1$), то система микрофон–громкоговоритель породит нарастающий гул или свист, в зависимости от частоты сигнала, на которой происходит это нарастание. Если звуки относительно слабый ($\alpha < 1$), они просто затухнут. Если система микрофон–громкоговоритель работает в нормальном (номинальном) режиме ($\alpha = 1$), то голос, усиленный системой, похож на естественный.

Положительная обратная связь – связь, при которой результат, полученный на каждом шаге, приводит к тому, что на следующем отклонение ещё более возрастает. Такая связь может дестабилизировать режим работы системы, но иногда – и обеспечить переход к новому устойчивому режиму. Последнее может произойти вследствие самоорганизации системы, наступающей, когда скорость обратной связи превышает скорость течения внутренних процессов. При том режим, занявший по воле случая «командные высоты», подчиняет себе поведение всех частей системы.

Это тот случай, когда будущее формирует настоящее.

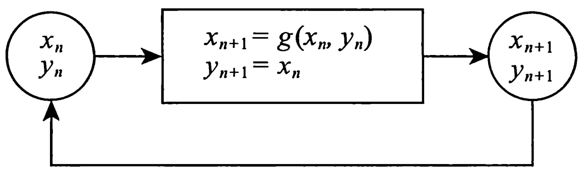
Отрицательная обратная связь представляет собой тип обратной связи, при котором выходной сигнал системы направляется на её же вход и приводит к тому, что часть выходного сигнала гасится. То есть выходной сигнал на одном шаге ослабляет сигнал следующего шага. Поэтому такая связь называется стабилизирующей. Она гарантирует, что система будет помнить начальные условия, но «забудет» все последующие состояния и останется «глухой» к помехам. Так, например, работает холодильник, у которого в морозилке установлена температура –15°С, и при этом она независима от колебаний температуры наружного воздуха. Эту стабильность обеспечивает петля обратной связи между датчиком температуры внутри морозилки и включением охлаждающего двигателя. Чем теплее воздух снаружи, тем чаще включается охлаждающий двигатель, и наоборот.

Нейтральная обратная связь. Этот тип обратной связи приводит к рефракциям – едва заметным отклонениям. Рассмотрим пример. 4000 лет назад для расчёта квадратного корня числа 2 стали использовать метод последовательных приближений.

Была получена простая формула: $x_{n+1} = ½\, x_n + 1/x_n$.

Пусть $x_0 = 2$, тогда $x_1 = ½\,(2 + 2/2) = 1.5$. И далее $x_2 = ½\,(1.5 + 2/1.5) = 1.41666...$

С каждым шагом значение отклоняется от реального значения корня из 2 то в меньшую, то в большую сторону с уменьшением величины таких отклонений. Примеров такого поведения в окружающем мире великое множество – вспомните маятник, который под действием силы тяжести стремится прийти к нулевому положению и с каждым колебанием всё более и более приближается к нему. Впрочем, этим же свойством обладают многие процессы – волны на воде при условии отсутствия внешнего возмущения, акустические волны и т. д. При этом состояние притяжения (аттрактор) системы может лежать и вне множества реализаций системы, и даже в поле, ортогональном реализации.



Двухшаговая петля обратной связи содержит две переменные: $g\,(x_n, x_{n-1}) = x_n + x_{n-1}$.

Для примера снова поговорим о кроликах Фибоначчи. «Задача о кроликах» по сути является двухшаговой петлёй обратной связи.

В момент времени $t = 0$ родилась пара кроликов. Через месяц она рожает ещё двух кроликов. И затем каждая пара ежемесячно приносит по новой паре. Кролики бессмертны. Задача – определить популяцию через n месяцев.

Пусть J_n – количество пар крольчат, A_n – количество пар взрослых кроликов.

$n = 0, J_0 = 1, A_0 = 0$ (пара крольчат)
$n = 1, J_1 = 0, A_1 = 1$ (крольчата выросли)
$n = 2, J_2 = 1, A_2 = 1$
$n = 3, J_3 = 1, A_3 = 2$

Легко заметить, что $J_{n+1} = A_n$, и мы можем вывести систему из 2 уравнений:

$J_{n+1} = A_n$
$A_{n+1} = A_n + J_n$

Подставляя одно в другое, получаем $A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$. Эта формула производит числовой ряд Фибоначчи:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610…, в котором каждое число есть сумма двух ближайших предыдущих. А значит, в этом примере каждое число «помнит» и начальное значение, и все последующие этапы эволюции системы. Этот ряд, как отмечалось, обладает уникальной особенностью: отношение любых двух стоящих рядом чисел этого ряда при $n \to \infty$ равно величине «золотого сечения»

$$A_{n+1} / A_n = 1{,}618033\ldots$$

Странная петля

Описанную выше алгебраическую интерпретацию петель обратной связи называют рекурсией. Геометрической же интерпретацией обратной связи служит рефлексия – повторение отображения себя на себя. Приведём примеры.

Петля умножения отражений

Петлю умножения отражений проще всего представить как предмет, отражаемый двумя идеально параллельными плоскими зеркалами, расположенными друг напротив друга. Эта система лишь многократно отражает образ. Такое отражение можно назвать «волновым» на том основании, что волны на море имеют ту же природу отражения от берегов, что и световые волны между двумя зеркалами. Эту идею хорошо демонстрирует картина Никаса Сафронова «Отражение девушки с жемчужиной в истории волны».

Искажающие образ петли: диффузия, свёртывание, рефракция

Диффузия – распространение, рассеивание образа – лучше всего иллюстрируется обратными петлями с $\alpha > 1$. Эти петли, как мы видели ранее, с каждым шагом всё больше и больше увеличивают образ или его часть, с каждой итерацией рассеивая первоначальный образ.

При $\alpha < 1$ мы наблюдаем обратное диффузии искажение – ***свёртывание.*** При этом первообраз постепенно сворачивается, уменьшается и, в конце концов, сводится в точку.

Не всё так просто с ***рефракцией*** (преломлением, деформацией). В этом процессе весь образ не испытывает постоянного увеличения или уменьшения с каждой итерацией, но при отражении немного искажается. Иногда – едва заметно. Это можно сравнить с многократным отражением предмета в кривых зеркалах, расположенных друг напротив друга: с каждым новым отражением первичный образ всё больше и больше меняется. Некоторые его части сдвигаются, одни увеличиваются, другие, напротив, уменьшаются.

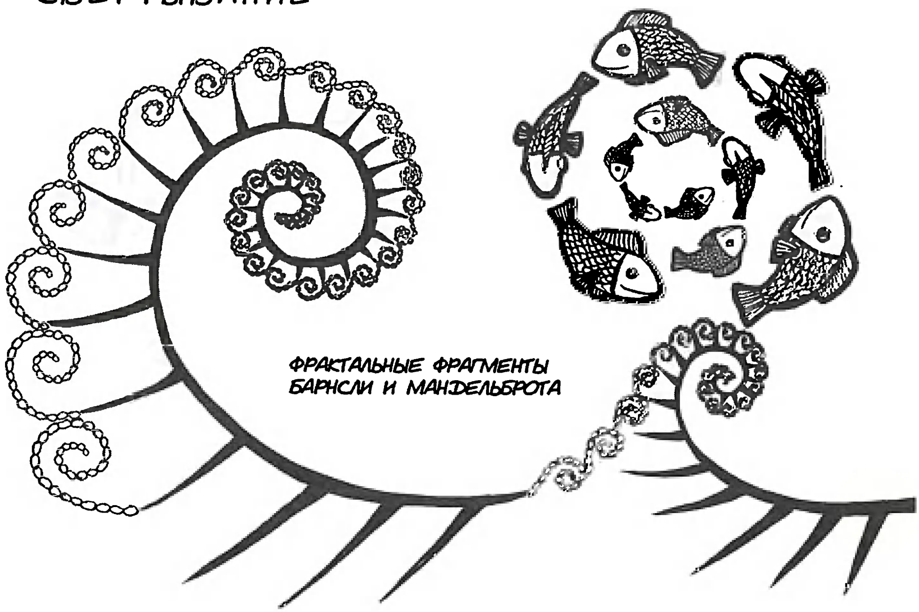
ПЕТЛЯ УМНОЖЕНИЯ ОТРАЖЕНИЙ

НИКАС САФРОНОВ.
ОТРАЖЕНИЕ ДЕВУШКИ С ЖЕМЧУЖИНОЙ В ИСТОРИИ ВОЛНЫ.
2005.

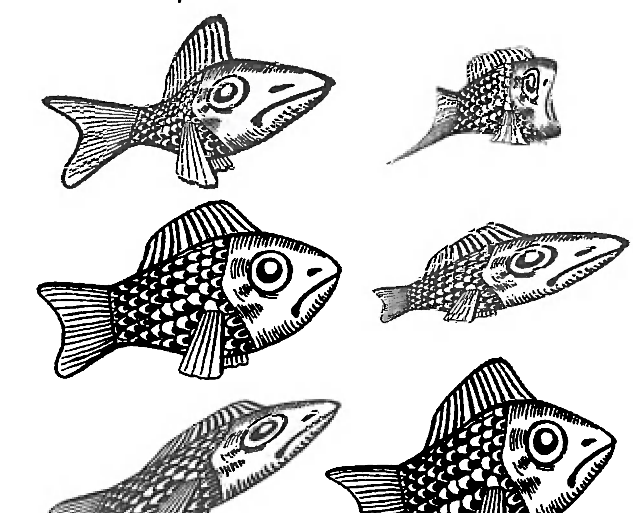
ДИФФУЗИЯ

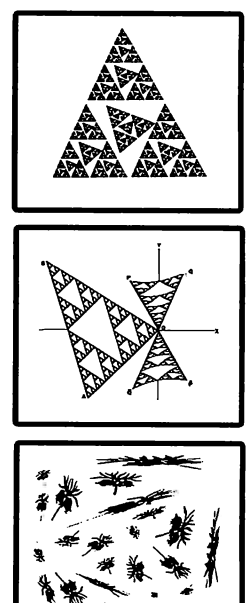
РОБЕР КАМПЕН.
ИОАНН КРЕСТИТЕЛЬ И ГЕНРИХ ФОН ВЕРЛЬ.
1438.
НАВЕРХУ – ФРАГМЕНТ С ЗЕРКАЛОМ

СВЕРТЫВАНИЕ



РЕФРАКЦИЯ





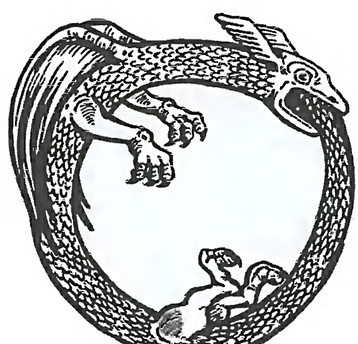
ФРАКТАЛЬНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ.
ПРИМЕРЫ ИЗ РАБОТ БАРНСЛИ

Реверс – петля обратной связи, при которой образ трансформируется в свою противоположность ($\alpha=-1$). Реверсивная петля сформулирована в парадоксе Эпименида[1]: «все критяне – лжецы». Но ведь и сам Эпименид родился на острове Крит! Если мы на минуту представим, что это суждение истинно, то тут же увидим, что ошиблись и на самом деле оно ложно. Точно так же из предпосылки ложности этого суждения вытекает, что оно должно быть истинным. Эпименид выворачивает суждение наизнанку и вновь восстанавливает его, но, восстановленное, оно изменило смысл: от безапелляционной истины – к относительности любой истины. Пожалуй, самым ярким примером такой петли может служить многослойная лента Мёбиуса, нижняя сторона которой с каждым кругом переходит в верхнюю, внутреннее становится внешним и наоборот. Накопление различий в процессе реверса сначала уводит образ от исходного, а затем к нему возвращает. При этом начальные условия переопределяются, и любая попытка продолжить цикл ведёт к новому образу, вложенному в исходный. Дракон, кусающий себя за хвост, – древний символ реверсивной петли.

Герой и дракон древних мифов – суть противоположности. Но, отведав драконьей крови, герой сам превращается в дракона. Причём дра-

1 ***Эпименид*** – древнегреческий жрец и провидец, представитель предфилософской традиции, живший на Крите в VII в. до Р. Х.

РЕВЕРС



ЗМЕЯ ОУРОБОР,
КУСАЮЩАЯ СВОЙ ХВОСТ

кон, бывший рыцарем, ведёт себя иначе, нежели дракон, рыцарем никогда не бывший.

Реверс ведёт от себя к другому и снова – к себе изменённому. Как заметили философы постмодернисты, *«другой – это то, что позволяет мне не повторяться до бесконечности»*. Переопределение начальных условий на каждом шаге реверсивной петли производит её постепенное, плавное изменение и деформацию. Реверсивная деформация обеспечивает самоорганизацию и стабилизацию системы. Ещё конструктор первых счётных машин Чарлз Бэббидж[1] заметил, что даже простейшие из них способны *«укусить себя за хвост»*. Он описывал такую петлю, когда машина *«залезала внутрь себя»* и меняла заложенную в неё программу. Реверсивная петля, способная изменять алгоритм своей реализации, становиться петлёй эволюции, но её развитию противостоит вирус.

Вирус – это также циклическая петля, представляющая собой однообразное копирование ($\alpha = 1$). Вирус сравним с ксерокопированием, при котором можно напечатать огромное количество одинаковых копий, похожих друг на друга до йоты, но при этом всё же не совсем идентичных. Производители серийных продуктов привыкли заботиться о контроле качества только в пределах спецификации. Они хорошо понимают, что тождество невозможно – возможно лишь соответствие некоторых параметров допустимым отклонениям. Оказываясь среди серийных продуктов, вы обнаруживаете, что взгляду не на чем остановиться. Ни один не способен захватить вашего внимания – взгляд блуждает между ними туда-сюда. Этот эффект хорошо передан на картинах Энди Уорхола, и он выражает рассеивание внимания, стагнацию, застой. Вирус, производя однотипные копии, приводит к патологии, которая ведёт к смерти системы. Умножая одни и те же клетки, он тем самым убивает организм. Вирус не возвращает к началу, а напротив, создаёт заграждение из копий, заставляя реальность бессмысленно блуждать вокруг и около. Жан Бодрийяр[2] выразился эмоционально:

> *«Наличие вирусов есть патология замкнутых и целостных окружностей, скученности и цепной реакции. Это патология инцеста в широком и метафорическом смысле. Отсутствие изменений порождает другое, неуловимое, но абсолютное изменение, которое и являет собой вирус. Тот, в чьей жизни не происходит изменений, погибает от этого»*.

---

1 ***Чарлз Бэббидж*** (1791–1871) – английский математик, изобретатель первой аналитической вычислительной машины. В 1820–1822 гг. сконструировал и построил машину для табулирования. С 1822 г. работал над постройкой разностной машины. В 1833 г. разработал проект универсальной цифровой вычислительной машины – прообраза компьютера.

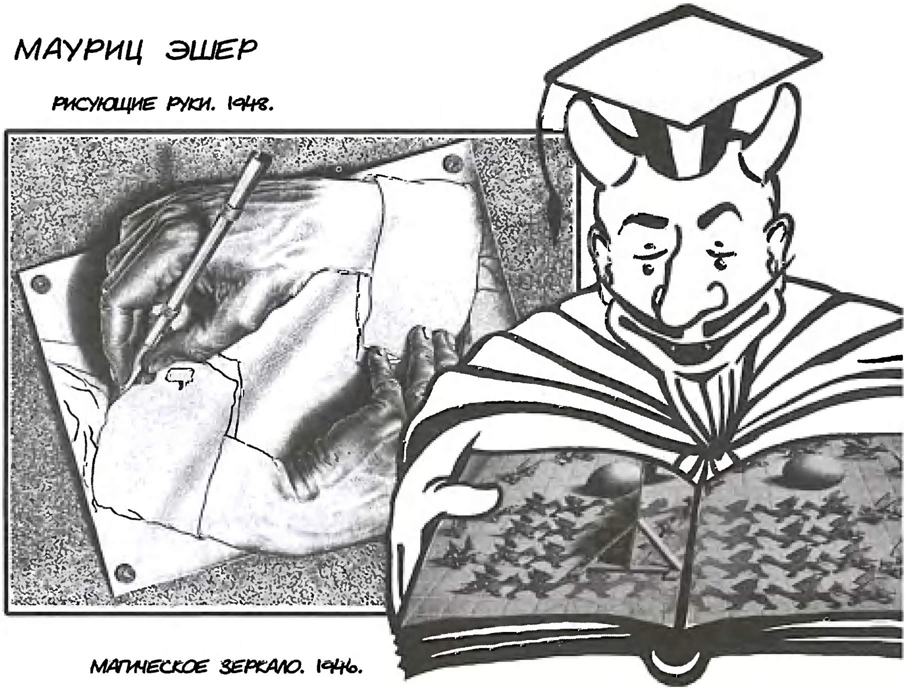
2 ***Жан Бодрийяр*** (1929–2007) – французский социолог, культуролог, философ-постмодернист и фотограф.

Блокируя возможность возвращения, вирус заставляет систему всё время топтаться у своего начального состояния. Система способна только «начинать быть, начинать быть начинать». Система теряет потенцию реагировать на изменения внешних условий и погибает.

Самозаглатывание

Эффект самозаглатывания, быть может, самый удивительный феномен проявления петли обратного влияния. Феномен этот сводится к тому, что образ, трансформируясь и всё больше отличаясь от исходного, в процессе многочисленных деформаций возвращается к исходному образу, но никогда не повторяет его в точности. Так в известном примере «возвращения Пуанкаре»[1] в процессе повторения строго определённых операций образ Пуанкаре трансформируется до полного исчезновения, но потом после 200-го шага начинает возвращаться, повторяет себя почти точно и исчезает снова. Повторять этот алгоритм можно сколько угодно раз и всегда

1 В 1890 году французский математик, физик, астроном и философ Анри Пуанкаре сформулировал в небесной механике теорему о возвращении, согласно которой система из материальных точек, обладающих массами и движущихся по законам механики, через некоторое время обязательно должна вернуться в состояние, весьма близкое к первоначальному, руководствуясь аналогией.

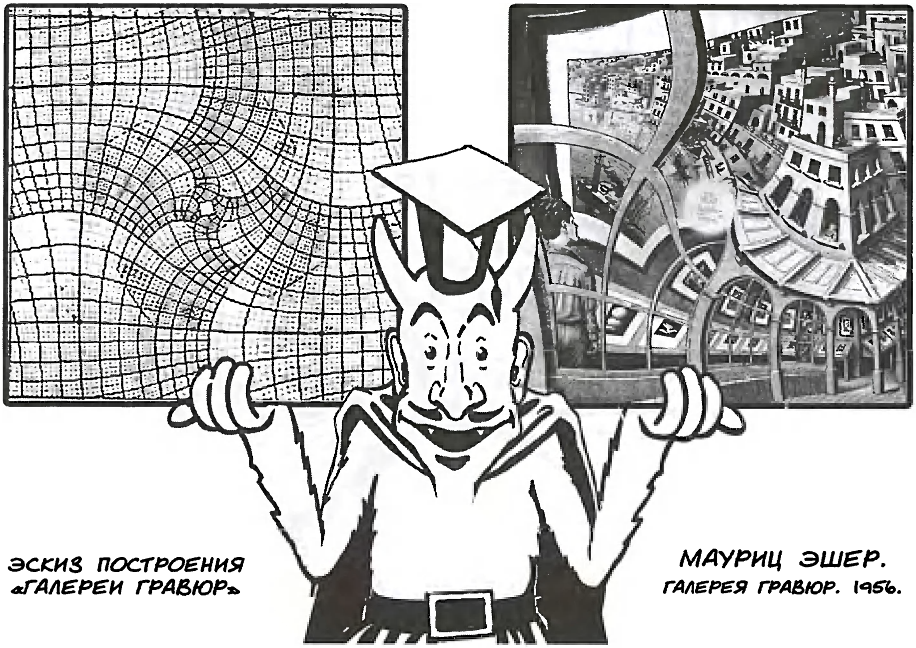


получать одно и то же, но вот не повторяя алгоритм, предсказать шаг появления образа никак невозможно. Это тот самый случай, когда система детерминирована, но непредсказуема.

Описывая этот феномен, Хофштадтер[1] в книге «Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда» вводит термин «странная петля». Он приходит к выводу, что и Эшер, и Бах, и Гёдель обнаружили или, точнее, использовали странные петли в своих работах и творчестве – в изобразительном искусстве, музыке и математике соответственно.

Эшер исследовал зеркальные умножения отражений: картина в картине ($\alpha = 1$), угасающее отражение ($\alpha < 1$), возрастающее отражение ($\alpha > 1$). Но в «Магическом зеркале» и «Метаморфозах» он открыл для себя новый путь распространения пространства – вложенность, которая повторяет саму себя на нескольких планах реальности. Один из планов легко узнаётся как обыкновенный, за ним – несколько фантастический. Сама картина, возможно, содержит только эти два плана; однако их игра приглашает зрителя увидеть самого себя как часть ещё одного. Сделав этот шаг, вы оказываетесь околдованы возможностью бесконечной последовательности планов, вложенных

1 ***Дуглас Роберт Хофштадтер*** (род. 1945) – американский физик и информатик; сын лауреата Нобелевской премии по физике Роберта Хофштадтера. Книга «Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда» опубликованна в 1979 г. и в 1980 г. удостоена Пулитцеровской премии в номинации «Нехудожественная литература».



ЭСКИЗ ПОСТРОЕНИЯ «ГАЛЕРЕИ ГРАВЮР»

МАУРИЦ ЭШЕР. ГАЛЕРЕЯ ГРАВЮР. 1956.

друг в друга. Кроме того, в «Метаморфозах» движение по кругу, по петле имеет столько начал, сколько способен вообразить изощрённый зритель, но в «Рисующих руках» вы вправе выбрать только одно из двух, а в «Галерее гравюр» выбора нет: начало и конец, первый и последний, альфа и омега – одно. Стяжение всех планов в один и естественно, и неизбежно: создатель каждого и любого изо всех возможных планов – один, вне планов, на ином уровне реальности. Такая ситуация сама по себе является достаточно удивительной и соблазняющей.

Повторяемость без повтора – странность.

Подобная странность причудливым образом проявилась и в музыке. Один из канонов «Музыкального приношения» Баха (Canon per Tonos – «Тональный канон») сконструирован таким образом, что его кажущийся финал неожиданно плавно переходит в начало, но со сдвигом тональности. Эти последовательные модуляции уводят слушателя всё выше и выше от начальной тональности. Однако, чудесным образом, после шести модуляций мы почти возвращаемся. Все голоса теперь звучат ровно на октаву выше, чем в начале. Странность в том только, что, поднимаясь по уровням некой иерархии, мы неожиданно обнаруживаем себя почти на том же месте, от-

ИОГАНН СЕБАСТЬЯН БАХ

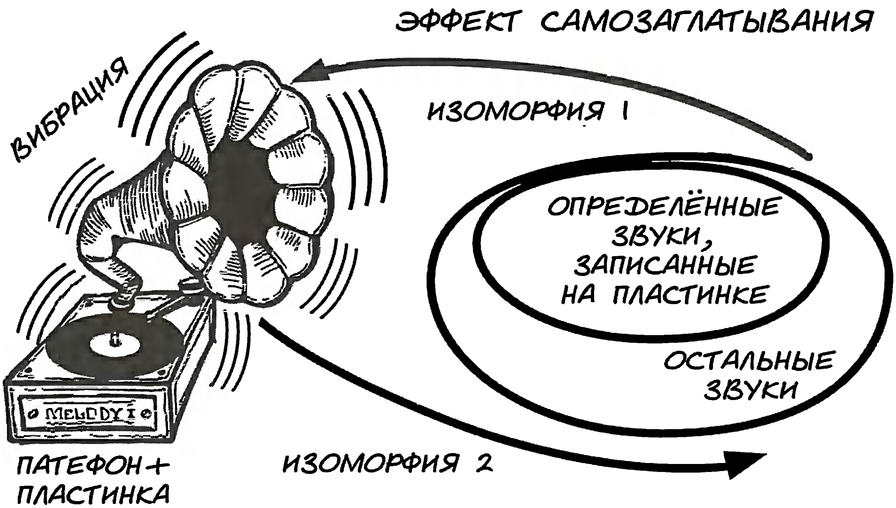
куда начали путь, – возвращение без повтора. На этом месте можно прервать пьесу; быть может, Бах именно это и намеревался сделать, но, может статься, он упивался возможностью продолжать этот процесс бесконечно, следуя «бесконечно поднимающемуся канону». Возможно, поэтому он и написал на полях:

«Пусть Королевская слава возрастает подобно этой модуляции».

Эта ремарка на полях – вне плана музыкального произведения – создаёт новый уровень восприятия, в ракурсе которого произведение обретает цельность и завершенность.

Курт Гёдель открыл странные петли в теории чисел, одной из самых древних и освоенных областей математики. В своей теореме, опубликованной в 1931 году, Гёдель утверждает следующее – «Все непротиворечивые аксиоматические формулировки теории чисел содержат неразрешимые суждения».

Суждения теории чисел не говорят ничего про суждения теории чисел; они не более как суждения теории чисел. Здесь есть петля, но нет странности. Странная петля спрятана в доказательстве. Для доказательства Гёдель



предложил простое построение. Выбрав произвольно суждение теории чисел (последовательность символов), он присваивает ему номер – код. В этом коде, обычно именуемом Гёделевой нумерацией, символы и последовательности символов обозначаются числами. В дальнейшем для ссылки на данное суждение используется соответствующий Гёделев номер. Теперь множество суждений теории чисел включает суждения о суждениях теории чисел. Став на этот путь, можно без конца продолжать суждения о суждениях относительно суждений теории чисел.

В этом и состоит открытие Гёделя. Ограниченное число вполне заурядных ограниченных множеств создаёт пространство неограниченного разнообразия, поле для неограниченного блуждания. Любое множество суждений теории чисел о теории чисел вполне заурядно. Множество суждений о суждениях теории чисел также заурядно. Любое множество суждений следующего уровня – заурядное множество. При этом множество всех множеств суждений есть множество самозаглатывающее. Теория множеств выделяет два их типа – заурядные и самозаглатывающие. Самозаглатывающие множества содержат самих себя, как, например, множество всех множеств. Согласно здравому смыслу, множества могут быть одного из этих двух типов – либо заурядные, либо самозаглатывающие. Однако ничто не мешает нам изобрести множество всех заурядных множеств. На первый взгляд, оно может показаться довольно заурядным изобретением, но вам придётся пересмотреть свое мнение, если вы спросите себя, является ли такое множество самозаглатывающим или заурядным. Вы придёте к следующему ответу: оно не является ни тем, ни другим.

Для иллюстрации теоремы Гёделя Хофштадтер привёл такую метафору. На патефон ставится пластинка. Создаваемый им звук неожиданно попадает в резонанс с конструкцией патефона и разрушает его. Итак, есть два тесно связанных отображения, создающих эффект бумеранга. Первый – от звуковых дорожек пластинки к звуку, полученному при помощи патефона. Второй – от звука – к вибрации патефона. Таким образом, теорема Гёделя утверждает, что система не может понять своё собственное устройство, если не поднимется на следующий уровень: для любого патефона существуют такие пластинки, которые нельзя на нём проигрывать.

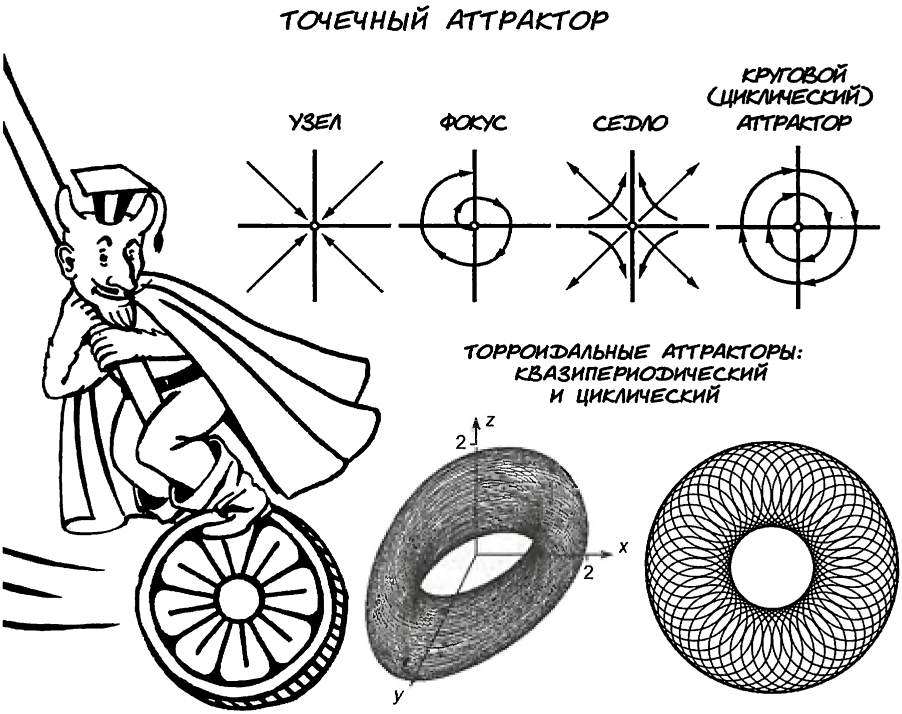
Все приведённые выше примеры говорят о том, что эффект самозаглатывания можно «ухватить» в его целостности, только выйдя за границы системы, рассматривая систему со стороны. Петлевые траектории системы, которые мы ожидаем увидеть, должны соответствовать следующим условиям: бесконечно продолжаться и при этом размещаться в ограниченном (обозримом) пространстве; они не должны пересекаться и соприкасаться, чтобы оставаться всегда неповторимыми. Надо отдать должное, что Эшер интуитивно нашёл и изобразил одну из таких самозаглатывающихся траекторий на гравюре «Спирали» (1953 г.).

Десять лет спустя такие объекты были открыты и названы странными аттракторами.

СТРАННЫЙ АТТРАКТОР

Аттрактор (от англ. *attract* – притягивать) – точка или замкнутая линия, притягивающая к себе все возможные траектории поведения системы. Аттрактор устойчив, то есть в долгосрочной перспективе единственная возможная модель поведения – аттрактор, всё другое временно. Аттрактор – пространственно-временной объект, охватывающий весь процесс, не являясь ни его причиной, ни следствием. Он формируется лишь системами с ограниченным числом степеней свободы.

Формальное определение аттрактора на математическом языке звучит следующим образом. Пусть имеется некоторая область G_1, включающая в себя область G_0 обе области удовлетворяют двум условиям: а) для любых начальных условий $X(t_0)$ из области G_1 при $t \to \infty$ (или при $n \to \infty$ для систем с дискретным временем) все фазовые траектории достигают области G_0; б) если фазовая траектория принадлежит области G_0 в момент времени $t=t_1$ $(n=n_1)$ то она всегда будет принадлежать области G_0, то есть для любых $t>t_1$ $(n>n_1)$ фазовая траектория будет находиться в этой же области. При выполнении этих двух условий область G_0 называется аттрактором



динамической системы, а область G_1 – областью или бассейном притяжения аттрактора G_0.

Аттракторы могут представлять собой точку, круг, тор и фрактал. В последнем случае аттрактор называется «странным».

Рассмотрим понятие аттракторов на уровне понятий здравого смысла, который нам более всего необходим при описании «странных аттракторов». Но всё по порядку, от простого – к сложному. Простейшим является точечный аттрактор. С него и начнём.

Точечный аттрактор описывает любое устойчивое состояние системы. В фазовом пространстве он представляет собой точку, вокруг которой формируются локальные траектории «узла», «фокуса» или «седла». Так ведёт себя маятник: при любой начальной скорости и любом начальном положении по истечении достаточного времени под действием трения маятник останавливается – приходит в состояние устойчивого равновесия.

На рынке – это монополия в условиях очень стабильной экономики. В человеческом поведении – фиксация на одном желании.

А вот простейший способ привнести порядок в хаос: покупайте только чёрные носки своего размера; тогда любая пара носок, взятых поутру, будет чёрной (пусть не идентичные, носки сохранят порядок по параметру цвета).

Круговой (циклический) аттрактор – это движение взад-вперёд, подобно идеальному маятнику (без трения), по кругу. Он притягивает, затем отталкивает, затем снова притягивает и т. д. Круговой аттрактор иллюстрирует смена дня и ночи. Такая ситуация описана в Екклесиасте:

«Что было, то и будет; и что делалось, то и будет делаться, и нет ничего нового под солнцем».

Круговой аттрактор описывает рынок, заключённый в коридор, где цена движется вверх и вниз в определённом диапазоне и в течение некоторого времени.

Так, например, высокие рыночные цены на зерно нынешней осенью вызовут увеличение посевных площадей следующей весной, что, в свою очередь, приведёт к увеличению урожая и снижению цены в будущем году. Затем фермеры уменьшат посевные площади и т. д. В фазовом пространстве признаком кругового аттрактора служат концентрические фигуры.

Основная характеристика тороидального аттрактора – повторяющееся действие. Однако – по сравнению с круговым аттрактором – тороидальный демонстрирует большую степень сложности. Графически он выглядит как траектория на кольце: спиралевидные круги после множества оборотов возвращаются в исходную точку, и цикл повторяется.

Так представляли себе небесный свод халдейские жрецы, которые делили его на 12 частей. На протяжении года мы видим Солнце в созвездиях Козерога, Водолея, Рыб, Овна, Тельца, Близнецов, Рака, Льва, Девы, Весов, Скорпиона и Стрельца – «звериный круг».

Библейское сказание о толковании снов фараона Иосифом – о семи благодатных и семи неурожайных годах – определяет ритм развития общины.

В Индокитае – двенадцатилетний цикл, связанный с периодом вращения Юпитера вокруг Солнца (11,3 года) – год Крысы, Быка, Тигра, Кролика, Дракона, Змеи, Лошади, Козы, Обезьяны, Петуха, Собаки и Кабана, – наложенный на ритм из пяти элементов или стихий – металл, дерево, вода, огонь и земля, – образует цикл в 60 лет.

Зороастрийский календарь основан на 32-летнем цикле обращения Сатурна вокруг Солнца.

Мы видим, как тороидальный аттрактор всякий раз возвращает нас в исходную точку. Эту цикличность движения звёзд искажает прецессия – незначительное отличие начального положения – и положения, в которое звёзды возвращаются, завершив цикл. Прецессия звёзд значительно усложняет поведение системы. Теперь система совершает квазипериодические колебания. В такой системе можно выделить две частоты ω_1 и ω_2, причём их отношение – ω_1/ω_2 – иррациональное число. Эта ситуация реализуется, только если размерность фазового пространства не меньше трёх. Асимптотическое поведение такой системы соответствует заполнению траекторией поверхности двумерного тора. Русский философ и писатель Яков Эммануилович Голосовкер так описывал подобную ситуацию:

> *«Ни одна весна не походит на другую. Но каждый год возвращается весна. Ни один поворот планеты вокруг Солнца не тождественный с другим, ибо: отклонения изменяют линию орбиты, изменяется тело планеты, изменяется Солнце, вся планетная система передвигается в мировом пространстве, и, тем не менее, каждая планета вращается вокруг своего Солнца по постоянной орбите».*

Наконец, перейдём к рассмотрению наиболее удивительного аттрактора – странного аттрактора.

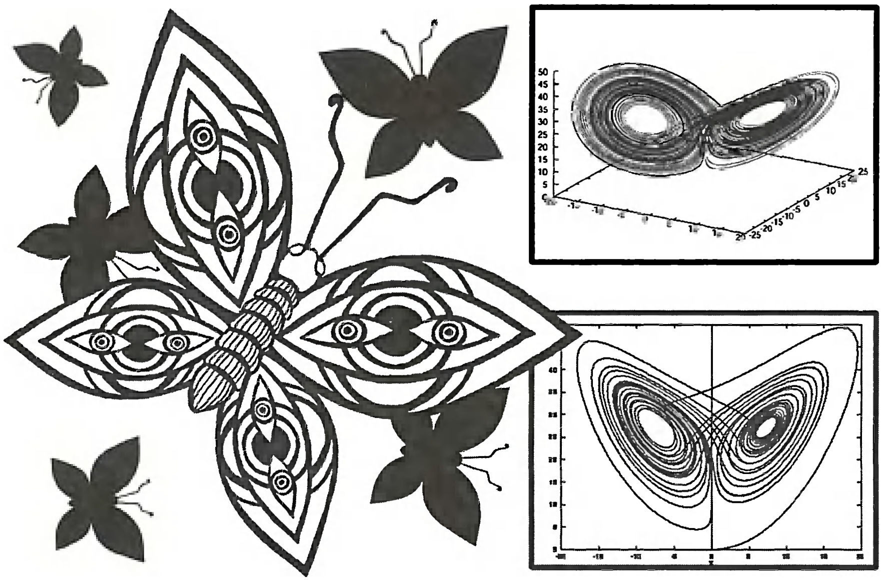
Странные аттракторы (strange attractors) кажутся странными только со стороны (strangers), но термин «странный аттрактор» оказался притягательным (attractive) и распространился сразу после появления в 1971 году статьи Давида Рюэля[1] и голландца Флориса Такенса[2] «Природа турбулентности». Её название эхом отражает заглавие статьи академика Льва Ландау «К проблеме турбулентности» (1944). Статья Рюэля и Такенса изменила парадигму понимания турбулентности, созданную Ландау и общепринятую на тот момент в научном сообществе.

Суть этой классической парадигмы в том, что турбулентный поток представляет собой суперпозицию вихрей всех возможных масштабов, т. е. число степеней свободы системы бесконечно. Вместо рассмотрения системы перекрывающих друг друга вихрей Рюэль и Такенс задались вопросом, обладает ли какой-либо аттрактор подходящим набором характеристик: устойчивостью, ограниченным числом степеней свободы и непериодич-

1 ***Давид Рюэль*** (род. 1935) – бельгийско-французский математический физик, работающий в области статистической физики и теории динамических систем.

2 ***Флорис Такенс*** (1940–2010) – голландский математик, известный благодаря работам, связанным с теорией хаотических динамических систем.

АТТРАКТОР «БАБОЧКА ЛОРЕНЦА»



ностью. С геометрической точки зрения вопрос казался чистой головоломкой. Какой вид должна иметь бесконечно протяжённая траектория, изображаемая в ограниченном пространстве, чтобы никогда не повторять и не пересекать саму себя? Чтобы воспроизвести каждый ритм, орбита должна являть собой бесконечно длинную линию на ограниченной площади – другими словами, быть самозаглатывающей.

Исходя из математических резонов, Рюэль и Такенс провозгласили, что описанный феномен должен существовать, хотя они никогда не видели и не изображали его. Упоминание о том, что непрерывный спектр будет ассоциироваться с незначительным числом степеней свободы, многие физики посчитали ересью.

На самом же деле к 1971 году в научной литературе уже имелся один набросок такого аттрактора – Эдуард Лоренц[1] сделал его приложением к своей статье о детерминистском хаосе, вышедшей в 1963 году. Этот аттрактор был устойчивым, непериодическим, имел малое число степеней свободы и никогда не пересекал сам себя. Если бы подобное случилось и он возвратился в точку, которую уже миновал, движение в дальнейшем повторялось бы, образуя тороидальный аттрактор, но такого не происходило.

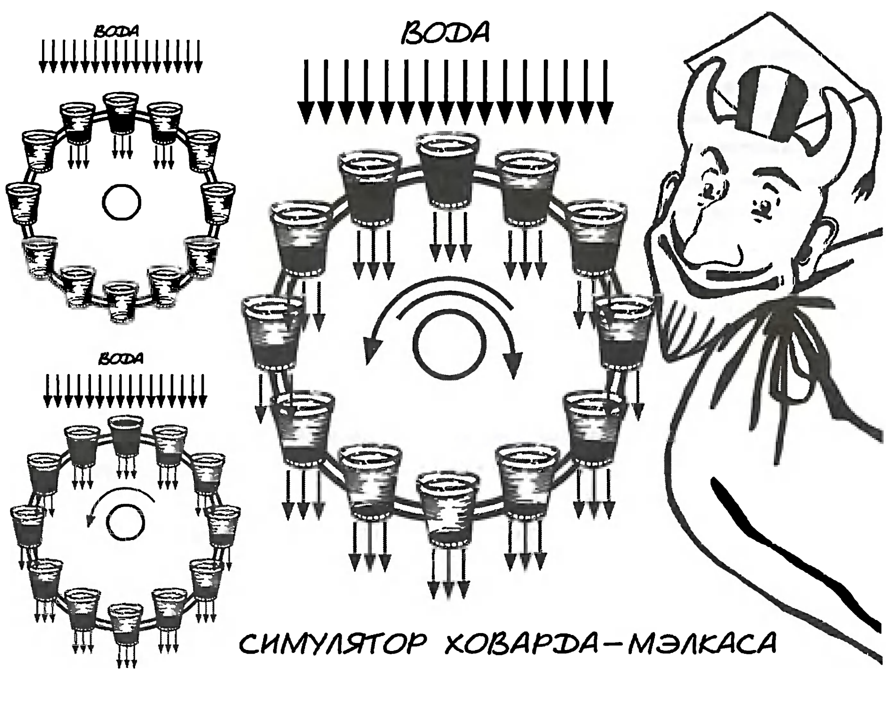
---

1 ***Лоренц, Эдвард Нортон*** (1917–2008) – американский математик и метеоролог, один из основоположников теории хаоса, автор «эффекта бабочки».

В этом-то и заключалась странная прелесть аттрактора: являвшиеся взору петли и спирали казались бесконечно глубокими, никогда до конца не соединявшимися и не пересекавшимися. Тем не менее, они оставались внутри пространства, имевшего свои предел, границы и форму.

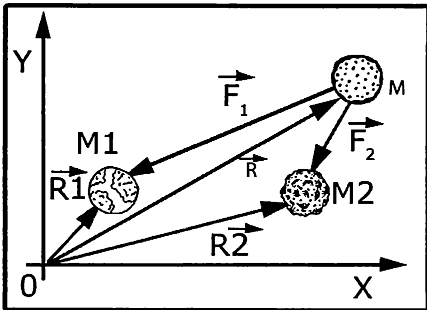
В 1970 году математики из Массачусетского технологического института Лоу Ховард и Виллем Мэлкас создали первый механический симулятор странного аттрактора. Представьте себе устройство в виде настольного «чёртова колеса», на котором вместо кабинок для катания прикреплены стаканы с перфорированным дном. Струя воды наполняет стаканы, заставляя колесо вращаться. Изменяя силу струи, авторы симулятора убедились, что при определённом напоре колесо начинает вращаться хаотически.

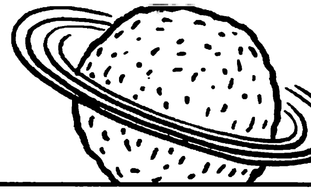
В XVII веке Иоганн Кеплер, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы, сформулировал задачу о трёх небесных телах: тело массой m, в первоначальный момент времени находится в точке с радиус вектором $\vec{r}$ и имеет скорость $\vec{v}$. Притягивающие центры массами M_1 и M_2 находятся в точках с радиус-векторами R_1 и R_2 соответственно.

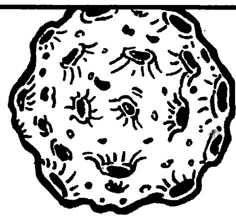


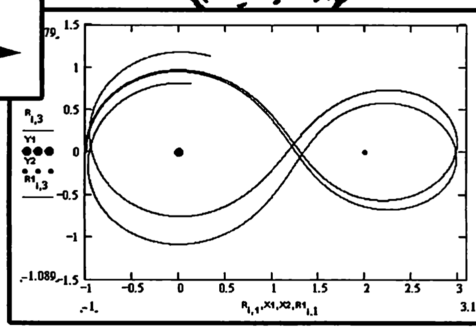
СИМУЛЯТОР ХОВАРДА–МЭЛКАСА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТРЁХ ТЕЛ И ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ТЕЛА В ПОЛЕ ДВУХ БОЛЬШИХ ТЕЛ









Задача сводится к определению траектории меньшего тела между двумя относительно большими центрами притяжения. Известно, что суперпозиция двух точечных аттракторов создаёт тороидальный аттрактор. Движение в такой системе предсказуемо, периодично, регулярно, ритмично. Проблема заключается в том, что в данной задаче появление третьего тела оказывает влияние на поведение всей системы. В результате траектория меньшего тела не замыкается, не совпадает сама с собой и, продолжая совершать тороидальные петли, демонстрирует своего рода перманентную прецессию – странную петлю, которая никогда не пересекает саму себя, не повторяется и остаётся в пределах ограниченной области. Астрономы уже давно замечали нечто подобное. Так, Николай Орем[1] в трактате «Об отношениях отношений» писал:

> *«Если три планеты однажды оказались в конъюнкции (связаны; в поле взаимного притяжения – Ред.) на определённой долготе так, что оказываются вместе в то же мгновение (sint simui in eodem indivisibili), невозможно им вновь оказаться в такой же конъюнкции, даже если бы они двигались вечно.*

1 **Николай Орем**, или Николай Орезмский (до 1330–1382) – французский философ, натурфилософ, математик, астроном, теолог. Епископ города Лизьё. Его научные труды оказали влияние на Николая Кузанского, Коперника, Галилея и Декарта.

И, следовательно, в любое мгновение будет такая констелляция (взаимное расположение – Ред.) планет, которой никогда не было раньше и которой никогда вовеки не будет впоследствии. Если полное затмение Луны произошло однажды, невозможно, чтобы произошло совершенно такое же».

Эти примеры странного поведения динамических систем иллюстрируют проявления странного аттрактора. Странность аттрактора заключается, как считал Рюэль, в трёх неэквивалентных, но на практике существующих вместе признаках:

- ***фрактальности (вложенность, подобие, согласованность);***
- ***детерминированности (зависимость от начальных условий);***
- ***сингулярности (конечное число определяющих параметров).***

Поясним эти «странные» свойства аттрактора Рюэля.

Прежде всего, этот аттрактор выглядит странно. Он представляет собой бесконечное число петель и спиралей, которые постоянно друг от друга удаляются, отстраняются и никогда друг с другом не пересекаются (неповторимость) в ограниченном пространстве. Он содержит все масштабы, он бесконечен и при этом ограничен. Странные аттракторы фрактальны: ограниченная область заполняется непредсказуемо движущейся точкой, траектория которой порождает фигуру дробной размерности. При этом точка в странном аттракторе совершает весьма сложные движения, хаотически перепрыгивая вперёд и назад, однако не нарушая параметров порядка странного аттрактора. При этом странные аттракторы и ведут себя странно. Они демонстрируют сверхчувствительность к начальным условиям. Малейшие различия в них или малейшее возмущение не затухает, а усиливается аттрактором. Оказавшись в зоне действия аттрактора, система слабо реагирует на внешние воздействия и не зависит от начальных условий, но вот в пограничном слое между двумя аттракторами – крайне чувствительна к начальным условиям и к внешним воздействиям.

Таким образом, в поле странных аттракторов система подобна двуликому Янусу: с одной стороны она предопределена, с другой – непредсказуема.

И, наконец, странный аттрактор представляет собой странную сингулярность. Из полифонии частот избираются только некоторые – так, что формируется система конечной размерности, которая может содержать непрерывный спектр частот. На поверхности такой объект хаотичен, но на определённом уровне проявляется порядок, если видеть под правильным углом и в верном масштабе.

Так, колебания температуры в экваториальной зоне Тихого океана за 900 000 лет представляют собой странный аттрактор малой размерности[1]. Локальные температуры являются результатом взаимодействия большого числа переменных, каждая из которых подвержена своему статистическому распределению. Однако небольшого числа независимых переменных достаточно, чтобы описать долговременные вариации климата.

Любая область странного аттрактора в процессе эволюции стягивается. Например, в трёхмерном фазовом пространстве размерность аттрактора $d < 3$. Требование сильной зависимости от начальных условий обеспечивается только для аттракторов с размерностью $d > 2$. Таким образом, размерность хаотического аттрактора в трёхмерном фазовом пространстве определяется неравенством $2 < d < 3$. Это чисто техническое условие стягивает объект в ограниченную область, делает его сингулярностью.

После появления работ Мандельброта стало ясно, что всем перечисленным условиям удовлетворяет фрактальное скопление аттракторов. Странный аттрактор есть траектория в поле фрактала. Открытия Мандельброта и Лоренца запустили процесс, в результате которого учёные и инженеры изменяют представление о мире вокруг нас. Физики, биологи, психологи, геологи, химики и механики на всех направлениях применяют фрактальную геометрию и хаотическую динамику для построения моделей, симуляций и манипуляций процессами и явлениями. Феномен настоящего в том, что новые методы позволили вторгнуться на территории, ранее неизвестные – хаоса, турбулентности и свёрнутых пространств. Многие факты, отражающие фрактальную природу и хаотическое поведение, были давно замечены и интерпретированы, однако «одно дело понимать, а другое дело мочь: дьявольская разница».

Фрактальная инженерия не только применяется в прикладных науках, но также помогает визуализировать и интерпретировать современные философские концепты, приводя их в формат здравого смысла.

По этим причинам с фрактальной геометрией просто необходимо освоиться хотя бы и в упрощённой форме.

1 Рюэль Д. Случайность и хаос. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

III. МНИМАЯ ЛЁГКОСТЬ ФРАКТАЛЬНЫХ ФОРМ

ЛИНКОЛЬНСКИЕ ЧЕРТЯТА

Согласно легенде два чертёнка были отправлены самим Сатаной порезвиться в Северной Англии. Попав в Линкольн, они принялись творить пакости в Линкольнском Соборе, как то: задувать восковые свечи, подставлять ножки псаломщику и нашёптывать прихожанам скабрёзности.

Однажды, резвясь, они набедокурили прилично, разбив камнем витраж. Епископа, вышедшего их утихомирить, они, войдя в раж, забросали голубиным помётом. И тогда явился ангел. При виде его один осторожный чертёнок сбежал, а второй с вызовом дразнил ангела, взлетев высоко, к самым сводам Храма. Однако и ангельское терпение имеет предел. По ангельскому слову чертёнок окаменел, застыв на стене хора, который с тех пор именуется Ангельским. Теперь и рассмотреть его трудно. Любопытная публика толпится у небольшой оптической трубы, направленной на окаменевшего чертёнка – символ посрамления Зла и победы Добра. Символический образ линкольнского чертёнка, помещённый на множестве оберегов, повторенный и размноженный, стал визитной карточкой Линкольна – города на холме посередине бескрайней равнины.

Но вернёмся ко второму чертёнку, который сбежал от ангельского гнева. Похоже, что именно о нём поведал Леонид Андреев в своём рассказе «Правила добра» (1911).

Чертёнок, сбежавший из Линкольнского Собора, прожил чертовски правильную жизнь, сохранил крепкое здоровье и служил при одной маленькой католической церкви во Флоренции в качестве соблазнителя. Ему была свойственна склонность к порядку и ясная прямолинейность мысли – добродетели, весьма распространённые среди чертей. Ум у чёрта был дьявольский, тонкий, не терпящий противоречий. С годами он вошёл в разум и обратился к Святому Писанию. Со свойственной ему обстоятельностью чёрт изучил Писание и знал его не хуже богословов. При этом со святым отцом, настоятелем католической церкви, чёрт держался скромно, не лебезил, не забегал вперёд и производил впечатление персоны строгой и положительной. Просил он священника научить его правилам добра. И тот согласился в надежде привести к богу «новую овцу». И указал священник чёрту на простые и ясные правила, которые в писании сформулированы точно и лаконично – если попросят, то последнюю рубаху отдай, а если по щеке ударят, то другую щеку подставь.

Пытался чёрт следовать этим правилам, но выходило всё неправильно, и взялся святой отец ему помочь выйти на путь добра. До самого своего смертного часа трудился священник и, умирая, передал чёрту рукопись, которая состояла из коротеньких деловых рецептов, тончайшего описания тех действий, которые надо совершать по дням недели, по часам дня. И ни единого закона, ни единого правила. Что-то вроде поваренной книги.

Не найдя в книге ни единого правила и подозревая священника в хитрости, чёрт тщательно изучил и сверил рецепты между собой и, к своему ужасу, обнаружил только жесточайшие противоречия: когда надо – не убий, а когда надо – убий; когда надо – не лги, а когда надо – солги, когда надо – отдай, а когда надо – сам возьми, даже отними, и так до самого конца.

Но стал чёрт жить по рецептам священника. Когда требовала рукопись спасать – спасал, а когда требовала убить – убивал. И если было противоречие в словах, то в действиях всё уживалось согласно и ладно, от чего стал чёрт чувствовать даже некоторое удовлетворение. Вот только когда встречались пробелы в тексте – то в бездействии застывал чёрт, как старая колонна в храме, но никто не замечал его в эти часы.

Притча о первом чертёнке рассказывает о том, как дерзкий вызов может стать центром внимания, даже символом, исполненным смысла, о котором бросивший вызов и не помышлял.

Согласно притче о втором чертёнке, ускользнувший от ангельского гнева герой нашёл смысл своей жизни в сосредоточенном и точном повторении предписания день за днём, час за часом. Это путь искусного ремесленника, проводящего жизнь в молитвах монаха, медитирующего буддиста. В процессе сосредоточенного повторения изменяется сам повторяющий, а с ним по необходимости, но не как попало изменяется и весь мир. Мир изменяется слаженно, но непредсказуемо.

И если нужен наглядный пример из нового времени, посмотрите на блогеров в Интернете. Они, ремесленники нового виртуального мира, компилируют цитаты, комбинируют мотивы, создают уникальные мэшапы, из хаоса которых сами собой формируются блоги блогов – метаблоги.

Метаблоги имеют строгую структуру, которая не линейна и не фатальна – она пластична и она фрактальна. Фрактал ясно и точно иллюстрирует суть дела. Плотная масса фиксированых после многократного повторения точек служит основанием для феерии фантастических образов. И эти образы демонстрируют поразительную слаженность и лёгкость.

Но не следует заблуждаться. Эта лёгкость, создающая впечатление свободы и произвола, есть, на самом деле, производная многократного повторения одних и тех же операций.

Филигранная слаженность вложенных друг друга и сопряжённых один с другим фрагментов фрактала есть результат строжайшей дисциплины и ограничений, основанных на строгих и математически точных представлениях о мнимых числах, фазовых портретах и о теории вероятности.

Пожалуй, каждый на личном опыте знает, что прочувствовать суть предмета можно, лишь уловив его техническую сторону. Чтобы плавать, необходимо освоить технику плавания, чтобы играть в футбол – технику владения мячом. Идеи обычно просты и возвышенны; их применение – не столь однозначно, ведь трудности всегда в деталях.

Если говорить об идее, то фрактальная геометрия есть манифест связности, согласованности и слаженности трёх ортогональных друг другу ипостасей: формальной, операциональной и символической. Вот только на основании этого манифеста не построишь даже простейшей формы. Для построения необходим набор инструментов и техник – технология. Возникновение фрактальной геометрии было бы невозможно без достижений математиков и физиков прошлого – ведь именно наработанный ими инструментарий фрактальная геометрия и использует. Она, как земля на трёх китах в древних мифах, покоится на теории мнимых чисел, динамических фазовых портретах и теории вероятностей.

Итак, мнимые числа. В жизни мы постоянно сталкиваемся с действительными числами – ещё в детстве, когда учимся считать пальчики, игрушки или яблочки. Их нетрудно материализовать или пощупать, то есть превратить в длину, массу, время или, наконец, в количество купюр. И сделать это можно даже с иррациональными числами – при округлении они превращаются в числа рациональные, подлежащие монетизации. Но вот с мнимыми числами всё не так просто. Их никак нельзя интерпретировать при помощи материальных объектов, они не опираются ни на что из нашего опыта.

Теория мнимых чисел допускает, что существует квадратный корень из минус единицы. С точки зрения привычной логики это так же невозможно, как, прыгнув с табуретки, упасть на потолок. Остаётся только удивляться тому, как столь креативные идеи развиваются из самых, что ни на есть приземлённых потребностей. Трудно заподозрить в поэтическом отрыве от реальности Джероламо Кардано[1], творившего в Италии в XVI веке. Как и многие умы эпохи Возрождения, он одновременно и врач, и физик, и математик. Он – азартный игрок и расчётливый профессор университета. Он составляет гороскопы. И не только свой

1 Его именем назван знакомый многим механизм современного автомобиля – карданная передача, проще – карданный вал. Эта передача широко используется в различных областях, когда трудно обеспечить соосность элементов, передающих вращательный момент, в том числе от коробки передач автомобиля к оси его ведущих колёс. Основой этой передачи служит карданов подвес – универсальная шарнирная опора, позволяющая закреплённому в ней объекту вращаться одновременно в нескольких плоскостях. Однако Кардано не только не изобрёл эти механизмы, но даже и не претендовал на авторство: он только описал устройство в своей получившей широкую известность книге «De subtilitate rerum» («Хитроумное устройство вещей», 1550 г.). Любопытно, что такой подвес был впервые изобретён греческим инженером Филоном Византийским в III в. до Р. Х.

и своих знакомых, но даже – смелая ересь – гороскоп Христа. За это он предстаёт перед папой римским, но папы эпохи Возрождения оставались детьми своего времени. И неожиданно для себя самого Кардано получает от папы пенсион. Я потому так много сказал о Кардано, что он первым системно изложил уже полученные к тому времени решения кубических уравнений. В своём труде «Великое искусство» («Ars Magna», 1545) он представил общее решение кубического уравнения $z^3 + pz + q = 0$. На современном математическом языке его решение выглядит так:

Краткий экстракт из «Ars Magna» показывает, насколько изменился математический язык:

«5 p: R m:15; 5 m: R m:15; 25 m: m:15 qd. est 40».

Сегодня мы бы выразили это следующим образом:

$$(5 + \sqrt{-15})\,(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40.$$

Кардано использует мнимые числа как средство технического формализма. Иногда этот формализм помогает получать нормальные и верные решения. Но порой всё не так просто. Он замечает странность, которую иллюстрирует простым уравнением $x^3 = 15x + 4$. Это уравнение имеет одно очевидное решение: x = 4. Однако обобщающая формула даёт странный результат. Он содержит корень из отрицательного числа: $x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2+11i}$.

Рафаэль Бомбелли[1] в своей книге по алгебре («L'Algebra», 1560) указал на то, что $\sqrt[3]{2\pm 11i}=2\pm i$, и это сразу позволило ему получить вещественный корень x = 4. В подобных случаях, когда комплексные числа сопряжены, получается вещественный корень, а комплексные числа служат техническим подспорьем в процессе получения решения кубического уравнения.

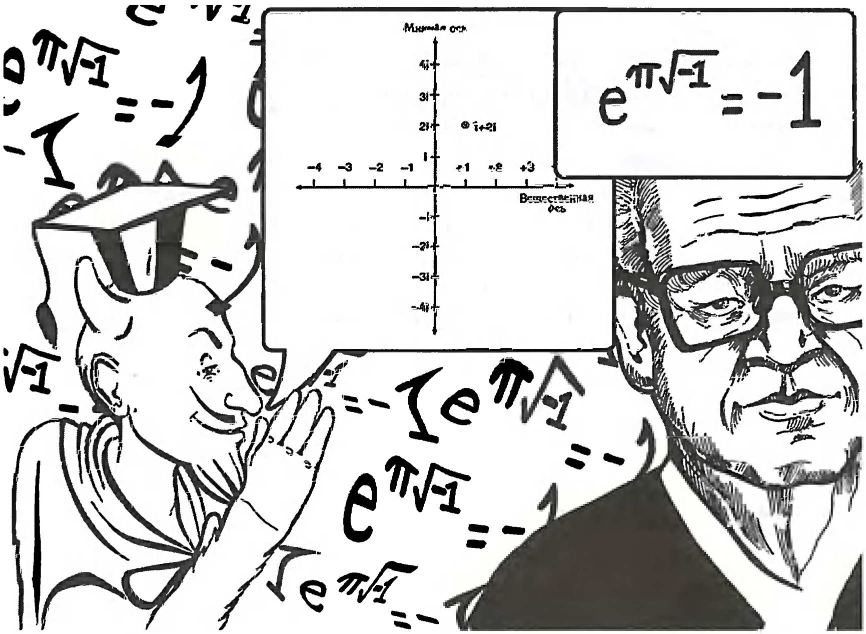
Этот шаг положил начало применению комплексных чисел в математике – пока как технического приёма, с помощью которого в некоторых частных случаях удаётся получить решение кубического уравнения. Однако, и довольно часто, в решениях по формуле Кардано не удавалось исключить корень из минус единицы. В течение двух столетий это свойство решений кубического уравнения оставалась «чудесным и уродливым» фрагментом анализа. Лейбниц, например, писал:

> *«Дух Божий нашёл тончайшую отдушину в этом чуде анализа, уроде из мира идей, двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием, которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы».*

Ньютон считал, что решения, содержащие корень из минус единицы, следует считать «не имеющими физического смысла» и отбрасывать. В XVII–XVIII веках формировалось понимание того, что нечто воображаемое, духовное, мнимое не менее реально, чем всё действительное, вместе взятое. Мы даже можем назвать точную дату – 10 ноября 1619 года, – когда Декарт сформулировал манифест нового мышления – «cogito ergo sum». С этого момента мысль есть абсолютная и несомненная реальность: «если я мыслю, то, значит, я существую»! Точнее – мысль теперь воспринимается как реальность.

В свете такого революционного переворота реальность мнимых чисел уже не кажется «чудесной и уродливой», напротив, становится естественной. Причудливым образом идея Декарта об ортогональной системе координат, благодаря мнимым числам, обретает свою завершённость. В самом деле, двухмерная система координат предполагает наличие двух числовых осей, которые вовсе не обязаны быть ортогональными. Однако коль скоро мы говорим об оси мнимых чисел, ортогональность становится необходимым условием. Ситуация напоминает представления Декарта о мнимой реальности мысли, которая материальной реальности ортогональна, благодаря чему обе способны пронизывать друг друга, одна в другую проникать и проникаться. Такое

1 ***Рафаэль Бомбелли*** (настоящая фамилия Маццоли; ок. 1526–1572) — итальянский математик, инженер-гидравлик. Известен тем, что ввёл в математику комплексные числа и разработал базовые правила действий с ними.



позитивное восприятие мнимых чисел складывается благодаря работам Джона Валлиса[1] и Каспара Весселя[2], в которых мнимым числам отводится место – ось, ортогональная оси действительных чисел. Теперь появилась возможность наполнять эти воображаемые числа смыслами.

В XIX веке трудами Эйлера, Аргана[3], Коши[4], Гамильтона[5] разрабатывается арифметический аппарат работы с комплексными числами. Любое комплексное число может быть представлено как сумма $X+iY$, где X и Y – привычные нам вещественные числа, а i – мнимая единица (по сути это $\sqrt{-1}$). Каждому комплексному числу соответствует точка с координатами $\{X, Y\}$ на так называемой комплексной плоскости.

1 ***Джон Валлис*** (1616–1703) – английский математик, один из предшественников математического анализа.

2 ***Каспар Вессель*** (1745–1818) – датско-норвежский математик, по профессии землемер. Автор сочинения «Об аналитическом представлении направлений» (1799), посвящённого теории векторов на плоскости и в пространстве, в котором впервые дано геометрическое представление комплексных чисел. В течение столетия сочинение Весселя оставалось неизвестным, а его результаты открывались вновь.

3 ***Жан Робер Арган*** (1768–1822) – французский математик-любитель. В 1806 г., управляя книжным магазином в Париже, он издал идею геометрической интерпретации комплексных чисел, известную сейчас как диаграмма Аргана. Позже он ввёл термин «модуль комплексного числа».

4 ***Огюстен Луи Коши*** (1789–1857) – великий французский математик. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

5 ***Уильям Роуэн Гамильтон*** (1805–1865) – выдающийся ирландский математик и физик XIX в.

Второе важное понятие – фазовый портрет динамической системы – сформировалось в XX веке. После того, как Эйнштейн показал, что по отношению к свету всё движется с одинаковой скоростью, идея о возможности выразить динамическое поведение системы в формате застывших геометрических линий – так называемом фазовом портрете динамической системы – обрела ясный физический смысл.

Проиллюстрируем её на примере маятника. Простота его поведения обманчива. Когда Аристотель рассматривал колебания камня на нити, а Галилей наблюдал колебания люстры в Пизанском соборе, то первый видел, как конечная точка предопределяет траекторию движения камня, а второй – как, опускаясь в процессе колебаний, люстра приобретала скорость, позволяющую ей подняться на ту же высоту. Первые опыты с маятником Жан Фуко[1] проводил в 1851 году в погребе, потом в Парижской обсерватории, потом под куполом Пантеона. Наконец, в 1855 году маятник Фуко был подвешен под куполом парижской церкви Сен-Мартен-де-Шан. Длина каната маятника Фуко – 67 м, вес гири – 28 кг. Именно его описывает Умберто Эко[2] в своём романе «Маятник Фуко»:

«И тут я увидел Маятник. Шар, висящий на долгой нити, опущенной с вольты хора, в изохронном величии описывал колебания. Медный шар поигрывал бледными переливчатыми отблесками под последними лучами, шедшими из витража. Если бы, как когда-то, он касался слоя мокрого песка на плитах пола, при каждом из его касаний прочерчивался бы штрих, и эти штрихи, бесконечно мало изменяя каждый раз направление, расходились бы, открывая разломы мистической розы... Если бы я пробыл там долго, я поверил бы, что колебательная плоскость совершила полный оборот и возвратилась в первоначальное положение, описав за тридцать два часа сплюснутый эллипс – эллипс создавался обращением плоскости вокруг собственного центра с постоянной угловой скоростью, пропорциональной синусу географической широты».

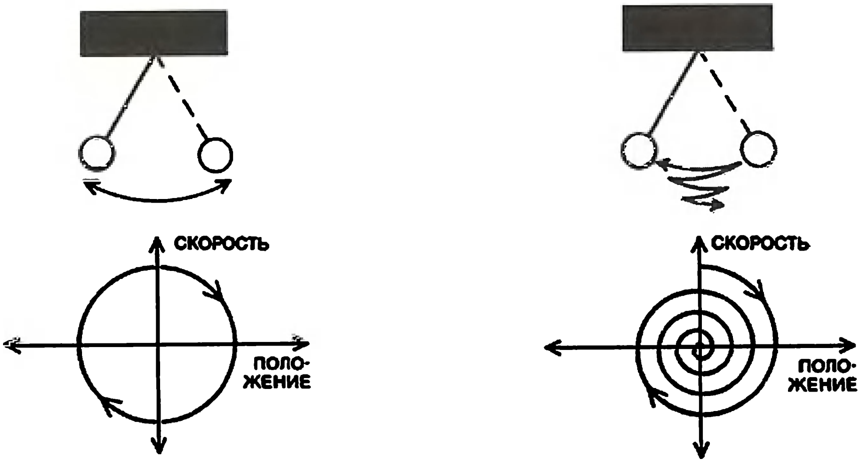
И это всего лишь один из возможных режимов колебаний маятника с одного из возможных ракурсов обзора. С огромного расстояния маятник выглядит как точка. Точка всегда неподвижна. Приближаясь, мы различим систему с тремя типовыми траекториями: гармонический осциллятор ($\sin\phi \approx \phi$), маятник (колебания взад-вперёд), пропеллер (вращение). Там, где локальный наблюдатель видит одну из трёх возможных

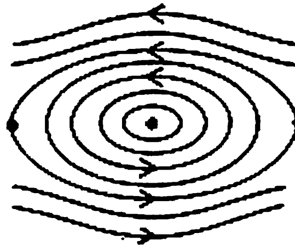
---

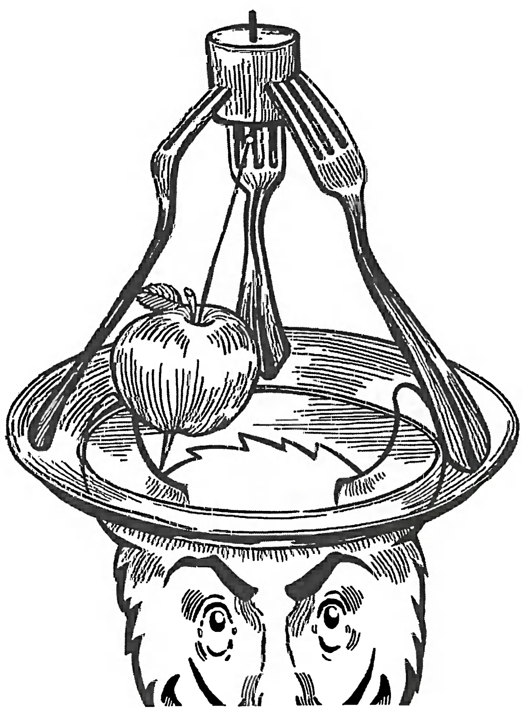
1 ***Жан Бернар Леон Фуко*** (1819–1868) – французский физик и астроном, член Парижской АН.

2 ***Умберто Эко*** (род. 1932) – итальянский учёный-философ, историк-медиевист, профессор семиотики Болонского университета. Роман опубликован в 1988 году.

ИДЕАЛЬНЫЙ МАЯТНИК, ЕГО ТРАЕКТОРИЯ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕГО ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ







МАЯТНИК ФУКО

конфигураций движения шара, отстранённый от процесса аналитик может предположить, что шар совершает одно из трёх типовых движений. Это не только можно предположить, но даже изобразить на одном плане. Необходимо условиться, что мы переместим «шар на нити» в абстрактное фазовое пространство, имеющее столько координат, сколько степеней свободы имеет рассматриваемая система. В этом случае мы говорим о двух степенях свободы – скорость v и угол наклона нити с шаром к вертикали ϕ. В координатах $\phi - v$ траектория гармонического осциллятора представляет собой систему концентрических окружностей, по мере увеличения угла ϕ эти окружности становятся овальными, а при $\phi = \pm\, \pi$ теряется замыкание овала. Это означает, что маятник перешёл в режим пропеллера: $v \approx \text{const}$.

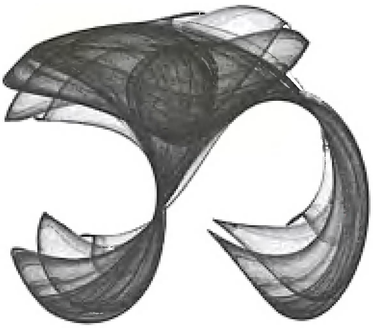
В фазовом пространстве может не быть длин, длительностей, движений. Здесь любое действие пред-дано, но не всякое действительно. От геометрии остаётся только топология, вместо мер – параметры, вместо размеров – размерности. Здесь любая динамическая система имеет свой уникальный отпечаток – фазовый портрет. И среди них встречаются фазовые портреты довольно странные: будучи сложными, они определены одним-единственным параметром; будучи соизмеримыми, они несоразмерны; будучи непрерывными, они дискретны. Такие странные фазовые портреты характерны для систем с фрактальной конфигурацией аттракторов. Дискретность центров притяжения (аттракторов) создаёт эффект кванта действия, эффект разрыва или скачка при том, что траектории сохраняют непрерывность и производят единую связанную форму – странный аттрактор.

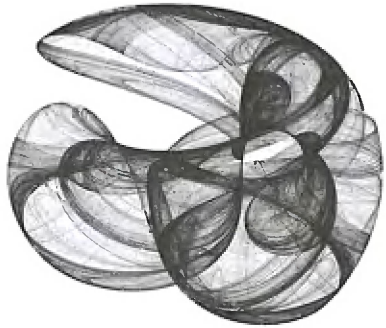
Теперь обсудим последнего «кита» в основании фрактальной геометрии – вероятность в самом широком и общем смысле этого понятия.

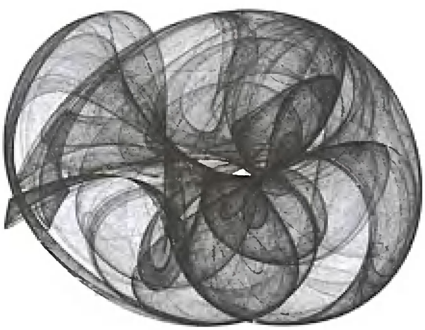
Рациональное мышление сводит случай к «вероятности флуктуаций». Флуктуация может быть алеаторной, то есть случайной. Бросок кости, «чистый случай», клинамен Эпикура[1] – синонимы алеаторной флуктуации. Флуктуации могут быть кажущимися. Такие псевдофлуктуации возникают вследствие неосведомлённости, как результат неизвестных «побудительных сил». В теории вероятности разработаны методы, позволяющие такие псевдофлуктуации выявить. Надо помнить, что на событие могут влиять и цели, предвосхищающие событие. Такое представление отсылает нас к парадигме Аристотеля, для которого главным параметром любого момента движения было расстояние до конечной точки, а не расстояние от начала движения.

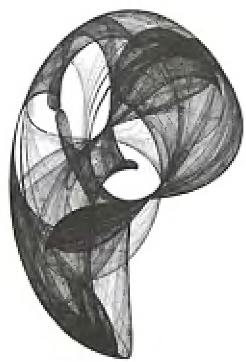
1 ***Эпикур*** (342/341 до Р. Х., – 271/270 до Р. Х.) – древнегреческий философ, основатель эпикуреизма в Афинах, в котором развил Аристиппову этику наслаждений в сочетании с Демокритовым учением об атомах. ***Клинамен*** – термин эпикурейской атомистики, означающий микроскопическое отклонение атома, падающего под действием силы тяжести. Поскольку атомы падают в пространстве с одинаковой скоростью, то без их отклонения (клинамена) они никогда бы не встретились и не могли бы создавать всего разнообразия природных тел.

СТРАННЫЙ АТТРАКТОР КЛИФФОРДА









Будущее притягивает настоящее. Настоящее чревато будущим – «сегодня» становится из «вчера», но через «завтра».

При такой трактовке неосведомлённость не в прошлом (там всё определённо) и даже не в будущем (сценарии прогнозируемы), но только в настоящем, в процессе постава реальности, в той точке этого постава, где «*alea jacta est*» – «жребий брошен». Именно такую технику генерации случайных величин используют в процессе построения некоторых фракталов.

Разнообразие фрактальных форм сначала восхищает, но со временем приводит в оторопь. Чтобы окончательно не растеряться в этих «фрактальных джунглях», целесообразно ввести хоть какую-нибудь классификацию. Мы должны отдавать себе отчёт, что любая классификация – прежде всего интерпретация, и потому всегда условна. Не следует удивляться, что границы нашей классификации размыты – таково свойство любой интерпретации. Фрактал имеет три ипостаси: формальную, операциональную и символическую, которые ортогональны друг другу. И это значит, что одна и та же форма фрактала может быть получена посредством разных алгоритмов, а одно и то же число – фрактальная размерность – может появиться у совершенно разных по форме фракталов.

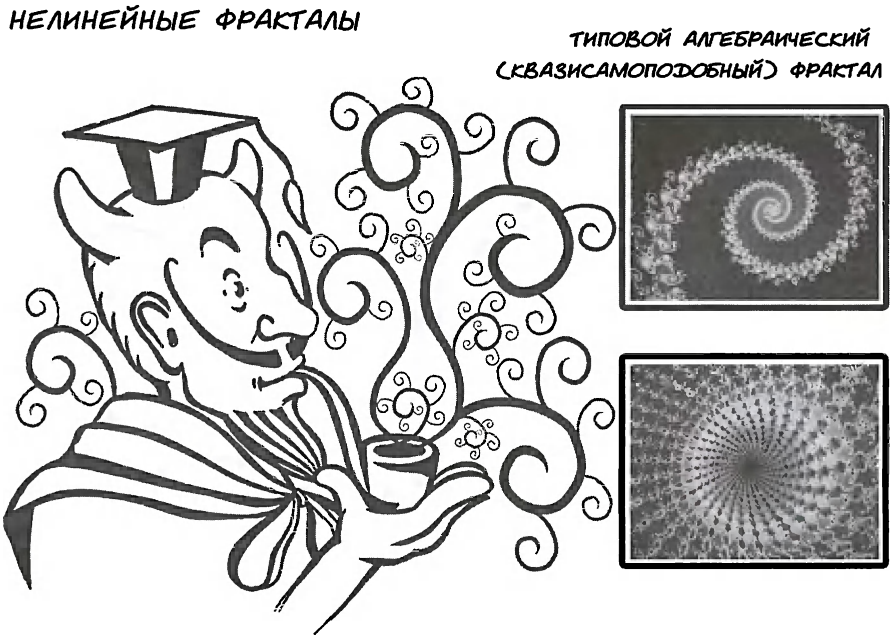
С учетом этих замечаний мы примем за основу не слишком точную, но простую и достаточно распространённую классификацию. Согласно ей, фракталы могут быть разделены на детерминированные и стохастические. В рамках детерминированных фракталов мы выделим классы линейных и нелинейных, а в рамках стохастических – класс СИФ-фракталов, алгоритм построения которых разработан уже упоминавшимся Майклом Барнсли в середине восьмидесятых годов прошлого века, и алеаторные фракталы, алгоритм построения которых предложен мной в 2010 году.

Детерминированные фракталы строятся по строго определённому алгоритму. Процесс построения при этом обратим. Вы можете повторить все операции в обратном порядке, стирая любой созданный в процессе детерминированного алгоритма образ, точка за точкой. Детерминированный алгоритм может быть линейным или нелинейным.

Линейные фракталы строго самоподобны (не искажаются при изменении масштаба). Они изломаны настолько, что недифференцируемы в каждой своей точке. Такие фракталы строятся по регулярному алгоритму. При геометрическом алгоритме построения линейных фракталов задают основу и фрагмент, которые повторяются при каждом уменьшении

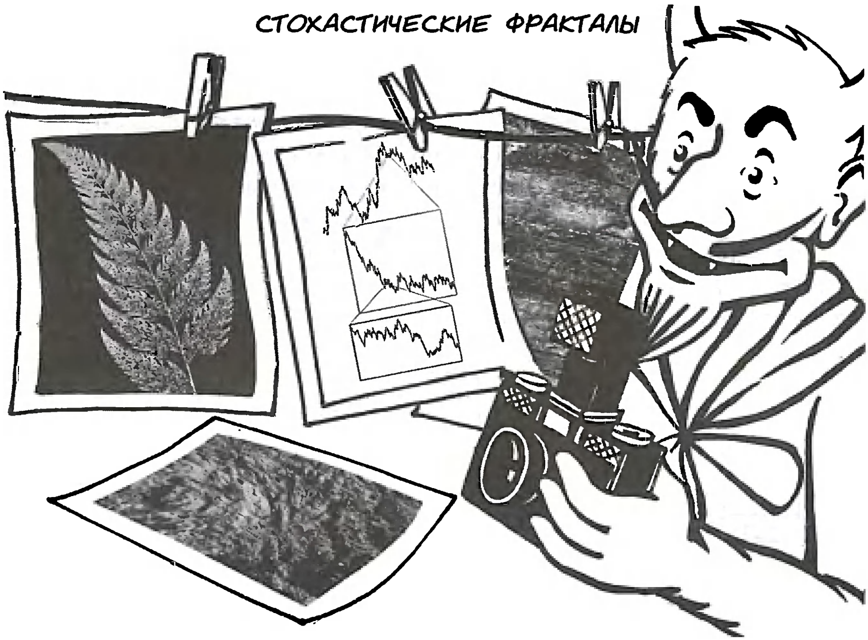
масштаба. Например, «снежинка фон Коха» строится из отрезка, замещённого типовым фрагментом _/_. Далее каждый новый отрезок сегмента замещается типовым фрагментом и т. д.

Нелинейные фракталы квази-самоподобны. Их конструируют, используя нелинейные функции одной, двух, трёх и более переменных. Самыми известными из них являются множества Мандельброта и Жюлиа, «бассейны Ньютона» и т. д. Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. Состояние, в котором окажется динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от начальных условий. Поэтому каждое устойчивое состояние (аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, при которых система обязательно перейдёт в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом, фазовое пространство разбивается на области притяжения аттракторов. Геометрия взаимного расположения аттракторов (паттерн) зависит от масштаба обзора. Применение оператора приближения (zoom) не аннулирует уже выявленных аттракторов, но ведёт на более глубокий (тонкий) уровень, где паттерн аттракторов постепенно трансформируется до неузнаваемости.



Стохастические фракталы, подобные в стохастическом смысле, возникают, когда в алгоритме их построения, в процессе итераций какие-либо параметры изменяются случайным образом. Термин «стохастичность» восходит к греческому слову stochasis – догадка, предположение. Стохастический процесс – процесс, характер изменения которого точно предсказать невозможно. Фракталы производятся по капризу природы (поверхности разлома горных пород, облака, турбулентные потоки, пена, гели, контуры частиц сажи, изменения биржевых цен и уровня рек и прочие), лишены геометрического подобия, но упорно воспроизводят в каждом фрагменте статистические свойства целого в среднем. Компьютер позволяет генерировать последовательности псевдослучайных чисел и сразу моделировать стохастические алгоритмы и формы.

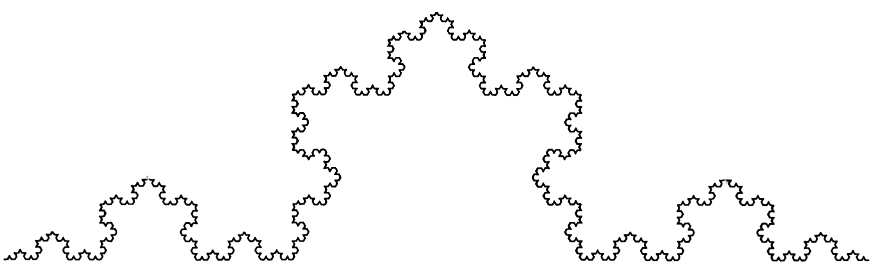
СИФ-фракталы – это класс фракталов, построенных на основе метода Брансли. Суть метода в том, что на каждом шаге итераций включается генератор случайных чисел, который с определённой вероятностью выбирает ту или иную функцию из заданного набора – системы функций. Случайные внешние возмущения непосредственно не влияют на получаемый образ, что исключает из моделирования большой класс реальных про-



цессов, в которых внешнее возмущение непосредственно влияет на форму, производимую при выполнении некоторых операций.

Алеаторные фракталы – совершенно новое семейство фрактальных форм. Они представляют собой естественную модификацию детерминированных (линейных и нелинейных) фракталов, а также СИФ-фракталов посредством включения в их алгоритм на каждом шаге генератора случайных внешних возмущений, непосредственно изменяющих значения величин и параметров, входящих в алгоритм построения фрактала.

Линейные фракталы названы так по той причине, что все они строятся по определённому линейному алгоритму. Эти фракталы самоподобны, не искажаются при любом изменении масштаба и не дифференцируемы в любой своей точке. Для построения таких фракталов достаточно задать основу и фрагмент. Эти элементы будут многократно повторяться с уменьшением масштаба до бесконечности. Рассмотрим наиболее известные геометрически регулярные фракталы.



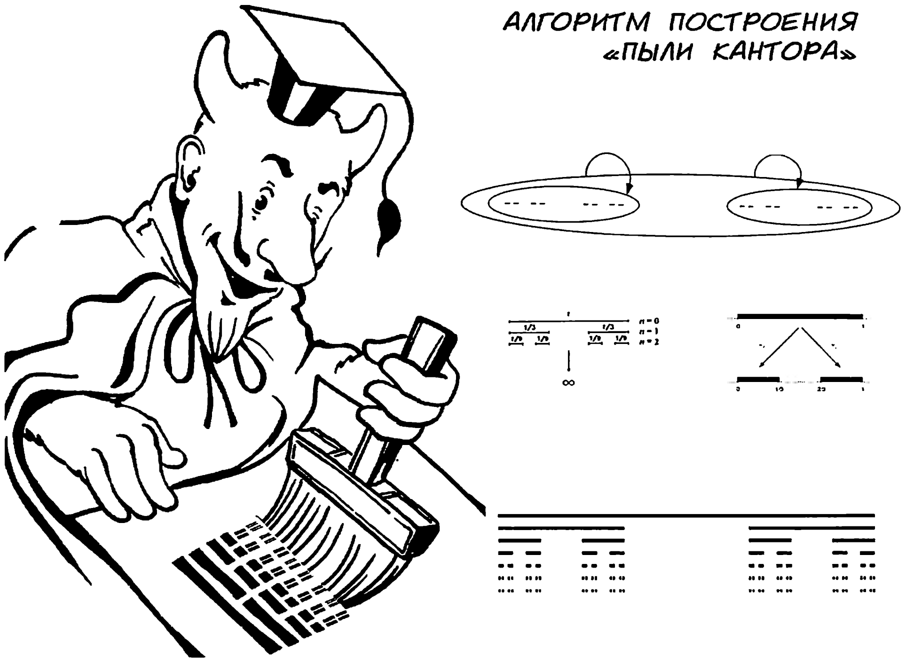
Типовой пример регулярного (строго самоподобного) фрактала – «снежинка Коха»

Пыль Кантора

В XIX веке немецкий математик Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор (1845–1918) предложил математическому сообществу странное множество чисел в интервале от 0 до 1. Множество содержало бесконечное число элементов в указанном промежутке и притом имело нулевую размерность. Пущенная наугад стрела вряд ли поразила бы хоть один элемент этого множества.

Удивительно, но факт! На единичном отрезке Кантор построил множество, содержащее столько же точек, сколько и отрезок, но которое на этом отрезке совсем не занимает места! Можно ли представить себе что-либо более странное? Чтобы понять, о чём мы говорим, давайте сначала рассмотрим принцип построения такого множества, получившего название «пыли Кантора».

Для начала необходимо выбрать отрезок единичной длины (первый шаг: $n = 0$), затем разделим его на три части и изымем среднюю треть ($n = 1$). Далее будем поступать точно так же с каждым из образовавшихся отрезков. В результате бесконечного количества повторений операции получаем иско-



мое множество – «пыль Кантора». Теперь между разрывным и бесконечно делимым не существует противопоставления – «пыль Кантора» представляет собой и то, и другое.

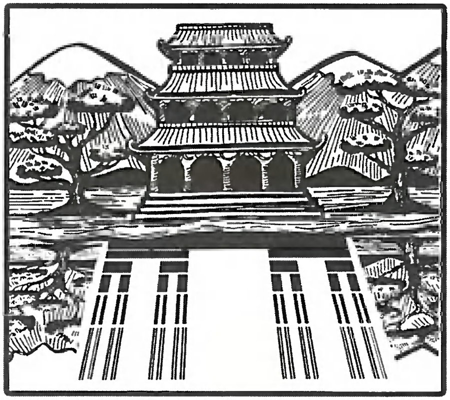
Подсчитаем суммарную длину удалённых интервалов:

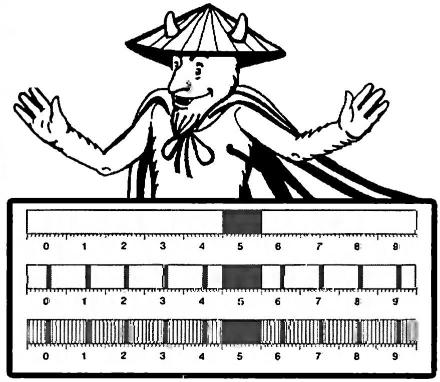
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{3^n}+\ldots=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=1.$$

То есть длина удалённых отрезков, при большом количестве итераций, в точности равна начальной длине отрезка, а на всё остальное не остаётся никакого места. Однако и начальный отрезок, и множество Кантора одинаково насыщены точками и имеют равную мощность. А ведь равенство мощностей множеств достигается тогда, когда между точками сравниваемых множеств можно установить однозначное соответствие.

Это утверждение в отношении «пыли Кантора» и бесконечных множеств вообще потребовало доказательства – и оно было Кантором предоставлено. Причём довольно простое. Построим отображение квадрата на единичный отрезок. Точка этого квадрата с прямоугольными координатами x = 0,125 и y=0,456 получит однозначное отображение – точку

«СТЕРЖЕНЬ КАНТОРА» И «МЕТР КАНТОРА»





0,142536 на единичном отрезке. Таким образом, каждой точке квадрата соответствует только одна точка на отрезке и наоборот. Это кажется парадоксальным, и даже сам Кантор в письме Дедекинду[1] от 20 июня 1877 года признавался:

«Я вижу это, но не верю».

После появления фрактальной геометрии такие странные эффекты стали каноническими. «Пыль Кантора» – фрактал. Его топологическая размерность равна нулю. Его фрактальная размерность отлична от нуля и равна 0,6304... Можно построить множество подобных форм. Например, возьмём для определённости метр. На первом шаге удалим пятый дециметр. С равным успехом это может быть шестой или любой другой. Останется 9 дециметров. Из каждого оставшегося дециметра удалим пятый сантиметр. Останется 81 сантиметр. Из каждого оставшегося сантиметра удалим пятый миллиметр. Продолжая следовать описанному правилу, мы получим «пыль Кантора» с фрактальной размерностью 0,954...

Фрактальную размерность можно интерпретировать как массу вещественных систем, имеющих фрактальную структуру.

Пример распределения массы во фрактальном множестве даёт «канторов стержень». Будем считать первоначальным элементом не единичный отрезок, а стержень из какого-либо материала с плотностью ρ_0. Исходный стержень имеет длину $l_0 = 1$, и, следовательно, массу, $\mu_0 = 1$. Разрезаем стержень на две половины равной массы $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}5$, которые затем в результа-

1 **_Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд_** (1831–1916) – немецкий математик, известный работами по абстрактной алгебре и основаниям действительных чисел.

те ковки укорачивают до длины l_1 =1/3. (одинаковой для обеих половин). В результате такой обработки плотность возрастает до $\rho_0 = \mu_1/l_1 = 3/2$. Повторяя процедуру, получим в n-м поколении N=2 n стержней, каждый из которых имеет длину l_i =3 n и массу μ_i=2-n при i = 1,., N – номер стержня. При этом общая масса в ходе обработки сохраняется, поэтому

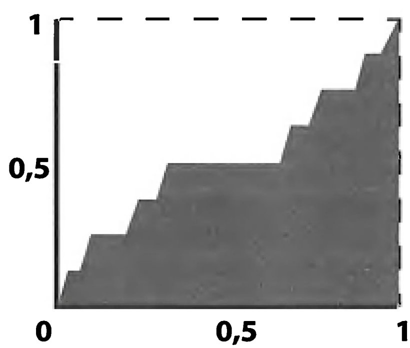
$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1.$$

Мандельброт сравнивает этот процесс со свёртыванием молока, когда первоначально равномерное распределение массы в результате разбивается на множество мелких областей с высокой плотностью.

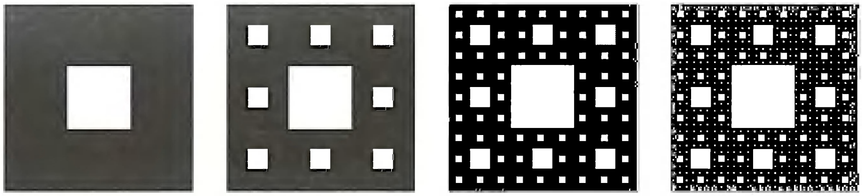
На основе канторова стержня можно получить интересную конструкцию, называемую «чёртова лестница» (devil's staircase). Выбрав за начало отсчёта левый конец стержня, запишем массу, содержащуюся на отрезке $[0, x]$, в виде:

$$M(x) = \int_0^x \rho(t)\,dt = \int_0^x d\mu(t).$$

Здесь плотность ρ (x) равна нулю в промежутках и равна бесконечности во всех бесконечно многих точках, образующих канторово множество. Масса M (x) остаётся постоянной на интервалах, соответствующих пустым промежуткам. Длины таких интервалов в сумме равны 1, то есть равны длине исходного стержня. Для обычной (не фрактальной) гладкой кривой отсюда можно было бы сделать заключение, что M (x) = 0. Но масса возрастает бесконечно малыми скачками в точках канторова множества, и эти скачки в сумме дают M (1) = 1. Зависимость массы от x напоминает самоподобную лестницу, которая почти всюду горизонтальна. Фракталь-



Чёртова лестница – распределение массы «канторова стержня» по координатам



«Канторов ковёр» или «ковёр Серпинского»

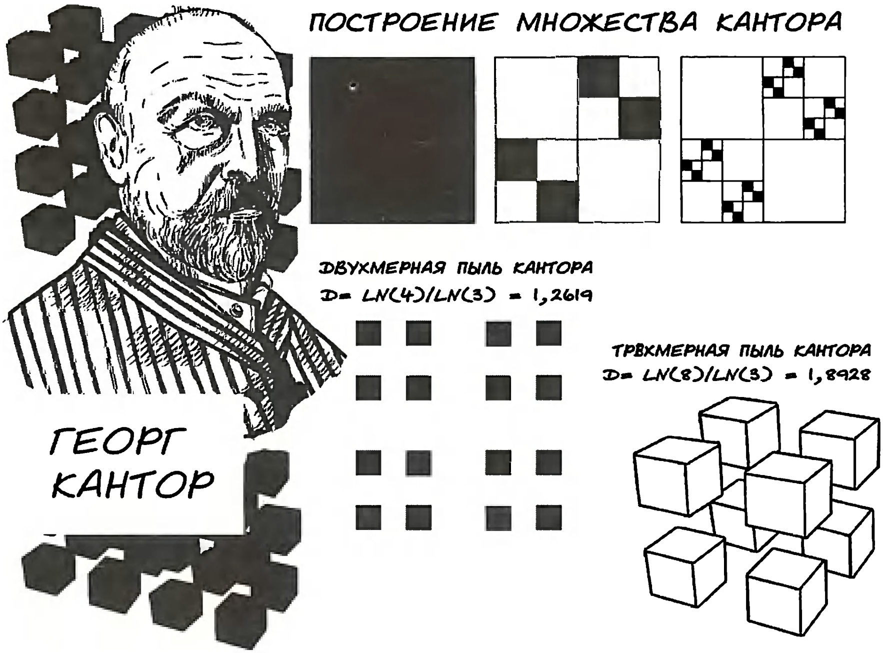
ная размерность множества абсцисс подступеней чёртовой лестницы примерно равна 0,6309...

Теперь перейдём к рассмотрению двухмерных множеств Кантора. Один из двухмерных аналогов одномерого множества Кантора был описан польским математиком Вацлавом Серпинским. Его называют «канторов ковёр» или чаще «ковёр Серпинского». «Канторов ковёр» строго самоподобен. Мы можем рассчитать его фрактальную размерность как ln8/ln3 = 1,89... (8 квадратов со стороной 1/3).

Наряду с «ковром Кантора» мы можем построить и менее плотное двухмерное множество. Например, так. Допустим, дано число r, причём $0 < r < 1/2$. Из центра отрезка единичной длины удалим отрезок диной $1-2$ r. Понятно, что длина оставшихся отрезков будет равна r. Повторяя операцию на шаге n, получаем множество из 2 n отрезков длиной каждый. Топологическая размерность таких множеств точек всегда равна нулю, а фрактальная размерность различна и равна $\ln(2^{n})/\ln(r^{n}) = -\ln(2)/\ln(r)$. Аналогичный алгоритм можно придумать для двухмерного объекта – квадрата, например. Пусть исходное множество есть квадрат со стороной, равной единице. Теперь имеющиеся квадраты будем заменять на 4 меньшего размера по алгоритму, который можно понять из рисунка. На n-м шаге построения получаем количество квадратов $N(\delta) = 4^{n}$ со стороной, равной $\delta = 1/4^{n}$. При $n \to \infty$ величина $\delta \to 0$ и фрактальная размерность таково объекта равна $d = 1$.

Совершенно ясно, что можно построить трёхмерное канторово множество, например, «сыр Кантора». Представить его несложно. В кубе распределены полости в форме кубов с длиной ребра равной 1/3. «Канторов сыр» строго самоподобен. Его единичная ячейка содержит $27-1 = 26$ кубических каверн. Соответсвенно, фрактальная размерность «канторова сыра» равна ln26/ln3 = 2.97... Заметим, что «канторов сыр» отличается от широко известной фрактальной «губки Менгера» тем, что последняя имеет сквозные отверстия, а не закрытые каверны. Можно построить менее плотную «канторову пыль». Если размерность двухмерной «канторовой пыли» равна d= ln (4)/ln (3) = 1,2619..., то размерность трёхмерной «канторовой пыли» равна d= ln (8)/ln (3) = 1,8928...

Благодаря работам Георга Кантора изменилось представление о бесконечности. Бесконечность, на которой пересекаются параллель-



ные линии, его мало интересовала. В фокусе его внимания была «актуальная» бесконечность, которую он иллюстрировал множеством бесконечно малых отрезков, имеющих бесконечно малую длину, но при бесконечном суммировании дающих конечное число. Это отрезки отказывался признать Зенон[1]. Но Георга Кантора парадоксы не страшили. Он нашёл числа, логика которых понятна только божественному Уму. Для человеческого же ума, пытающегося схватить эту божественную бесконечность, неизбежно было впадать в противоречия. Кантор приводил строку из стихотворения швейцарского натуралиста и поэта XVIII века Альбрехта фон Галера:

«Пусть его (чудовищно огромное число) отнимаю,
а ты (вечность) лежишь целая передо мной».

1 **_Зенон Элейский_** (ок. 490 до Р. Х. – ок. 430 до Р. Х.) – древнегреческий философ, ученик Парменида, автор известных парадоксов.

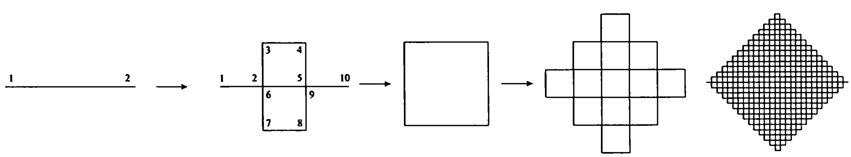
Далее рассмотрим целое семейство регулярных фракталов, которые представляют собой кривые, способные заполнить плоскость. Ещё Лейбниц утверждал:

> *«Если предположить, что некто ставит на бумаге множество точек по воле случая, <...> я говорю, что можно выявить постоянную и целостную, подчиняющуюся определённому правилу геометрическую линию, которая пройдёт через все точки».*

Это утверждение Лейбница противоречило Евклидову пониманию размерности, как наименьшего количества параметров, при помощи которых однозначно определяется положение точки в пространстве. За неимением строгого доказательства эти идеи Лейбница оставались на периферии математической мысли.

Кривая Пеано

Но вот в 1890 году математик из Италии Джузеппе Пеано[1] сконструировал линию, которая полностью покрывает плоскую поверхность, проходя через все её точки. Построение «кривой Пеано» показано на рисунке.



Построение кривой Пеано

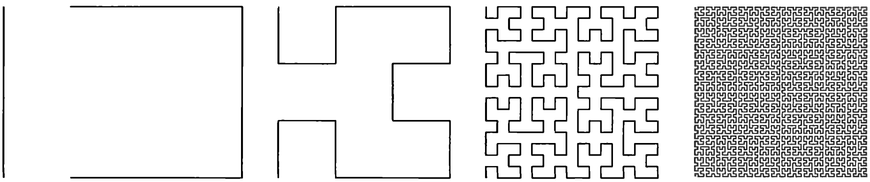
При том, что топологическая размерность кривой Пеано равна единице, её фрактальная размерность равна $d = \ln(1/9)/\ln(1/3) = 2$. В рамках фрактальной геометрии парадокс разрешился самым естественным образом. Линией, как паутиной, можно покрыть плоскость. При этом устанавливается однозначное соответствие: каждой точке линии соответствует

1 ***Джузеппе Пеано*** (1858–1932) – итальянский математик и логик, профессор математики Туринского университета. Известен важными результатами в математическом анализе, теории дифференциальных уравнений (где ему принадлежит классическая формулировка основной теоремы о существовании решения), геометрии (знаменитый пример «кривой Пеано»), разработкой международного языка на основе латыни (Latino sine flexione), а также работами в области логических оснований математики.

точка на плоскости. Но это соответствие не взаимно-однозначное, ведь каждой точке на плоскости соответствует одна или более точек на линии.

Кривая Гильберта

Годом позже, в 1891 году появилась статья немецкого математика Дэвида Гильберта (1862–1943), в которой он представил кривую, покрывающую плоскость без пересечений и касаний. Построение ***«кривой Гильберта»*** показано на рисунке.



Построение фрактала Гильберта. Шаги 1, 2, 3, 5, 7

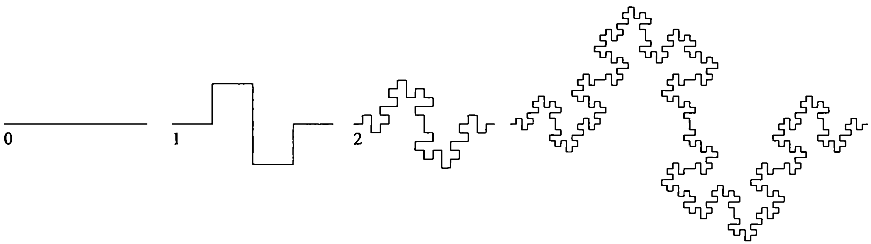
Кривая Гильберта стала первым примером FASS-кривых (space-Filling, self-Avoiding, Simple and self-Similar – заполняющих пространство самоизбегающих, простых и самоподобных линий). Фрактальная размерность линии Гилберта, как и кривой Пеано, равна двум. Точность построения являются необходимым требованием установления взаимно-однозначного соответствия точек линии и точек плоскости.

Малейшая неточность, малейшее послабление – и всё насмарку! Порядок держится только на жесточайшей дисциплине, и эта формула порядка всегда была понятна математикам и политикам.

Лента Минковского

Герман Минковский[1], близкий друг Гильберта со студенческих времён, построил кривую, которая не покрывает всю плоскость, но формирует нечто наподобие ленты. При построении ***«ленты Минковского»***

1 ***Герман Минковский*** (1864–1909) – немецкий (хотя и родился в Ковенской губернии Российской империи) математик и физик, профессор университетов в Бонне (с 1893), Кёнигсберге (с 1894), Цюрихе (с 1896) и Гёттингене (с 1902). Он разработал т. н. геометрию чисел, в которой употребляются геометрические методы решения трудных вопросов теории чисел.



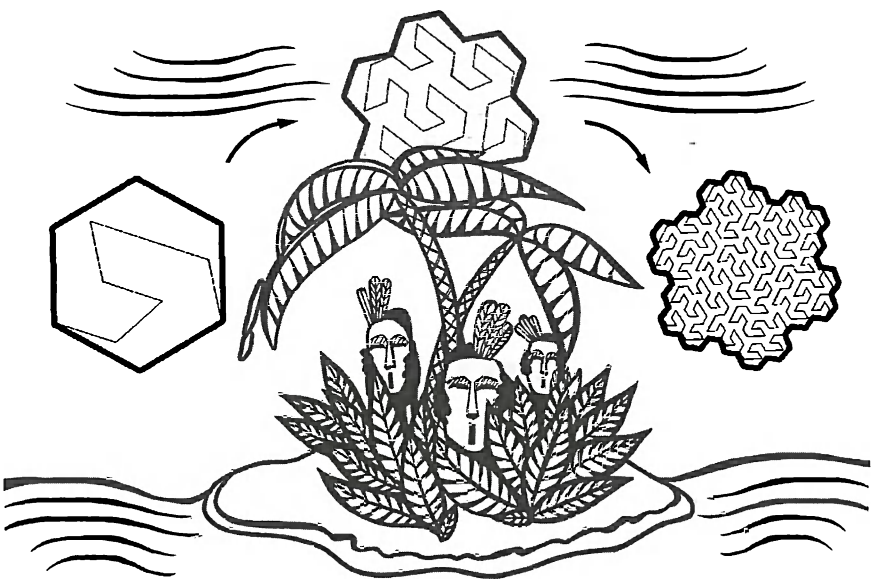
Построение фрактала Германа Минковского

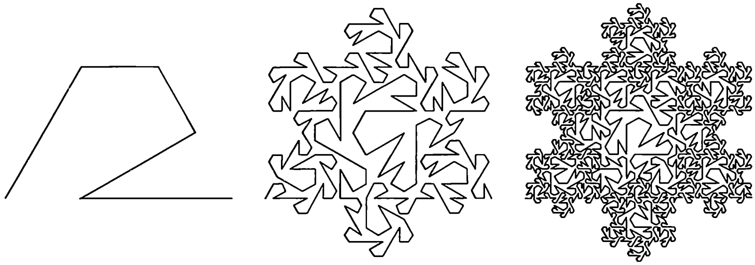
на каждом шаге каждый отрезок заменяется на ломаную линию, состоящую из 8 отрезков. На следующем этапе с каждым новым отрезком операция повторяется в масштабе 1:4. Фрактальная размерность ленты Минковского $d = \ln(1/8)/\ln(1/4) = 1{,}5$.

Остров Госпера

Позже Ральф Уильям Госпер, американский математик и программист, построил свою FASS-линию – кривую Госпера. Она состоит из 7 отрезков длиной $1/\sqrt{7}$ каждый. Фрактальная размерность этой кривой равна двум: $d = \ln(1/1)/\ln(1/\sqrt{7}) = 2$.

ПОСТРОЕНИЕ «ОСТРОВА ГОСПЕРА»





Фрактал на основе семизвенного генератора

В свою очередь, кривая Госпера формирует так называемый «остров Госпера». Его поверхность – фрактальная кривая с размерностью $d=(\ln 3)/(\ln 7^{1/2})=1{,}1291$.

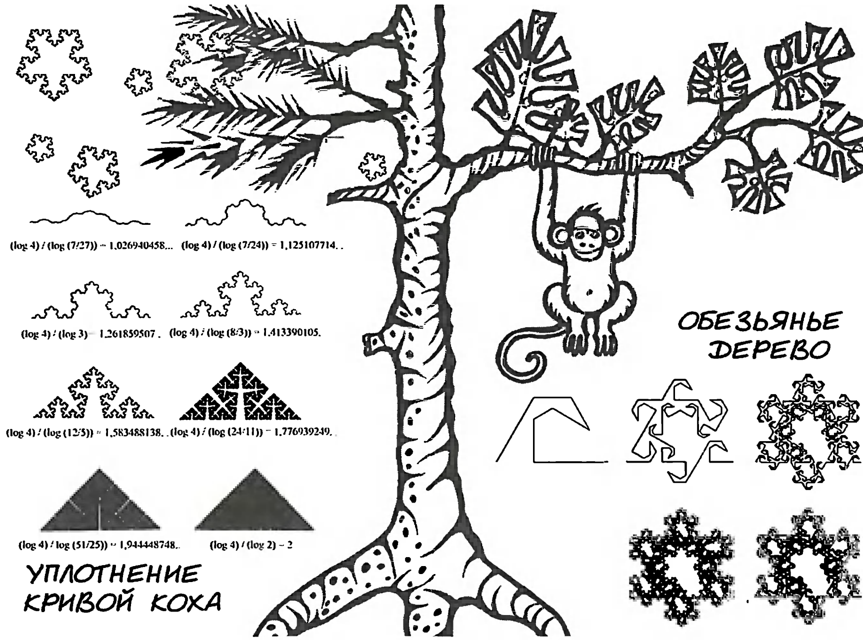
Такие острова удобно использовать для непрерывного покрытия плоскости, поскольку можно показать, что они идеально стыкуются друг с другом. Более того, семь таких островов, состыкованных вместе (один в центре и шесть вокруг), снова образуют «остров Госпера» в три раза большего размера. Заметим, что подобным свойством из правильных многоугольников обладает только квадрат.

Если при построении Госпера был использован генератор из шести звеньев, то Бенуа Мандельброт показал возможность построения подобных фракталов на базе семизвенного и даже тринадцатизвенного генераторов. Фрактальная размерность этих форм также равна двум, тогда как границы заполненных кривыми областей сохраняют некоторую «размытость», напоминая собой ленту Минковского с фрактальной размерностью между 1 и 2.

Обезьянье дерево

«Обезьянье дерево» – ещё одна известная FASS-кривая с фрактальной размерностью $d = 1{,}8687$. Эту кривую сконструировал Мандельброт, сопроводив её притчей о «расколе в снежных палатах».

Давным-давно, в далекой стране, в прекрасных Снежных Палатах восседал Великий Правитель со своею свитой. Однако между его подданными произошел раскол, за ним последовала война, в которой они провели границу, разделившую Палаты надвое, дабы и представители и Севера, и Юга могли без опасений ступить на враждебную территорию.



Все эти примеры подводят нас вплотную к той идее, что области, заполняемые линией на плоскости, представляют некоторый уникальный объект, свойства которого описывают как фрактальная размерность собственно объекта, так и фрактальная размерность его границы.

Кривая дракона

Одна из самых известных кривых, заполняющих область с фрактальной границей, – «кривая дракона». Это фрактальная кривая, которая имеет и второе название – фрактал Хартера-Хейтуэя; она была описана в 1967 году в одном из лучших рецензируемых научных журналов мира «Scientific American». Эта кривая, как и кривая Госпера, образует фигуру с фрактальной границей. Алгоритм построения фрактала приведён на рисунке.

Фрактальная размерность «линии дракона» равна $\ln 2/\ln(2^{1/2}) = 2$ при том, что фрактальная размерность границы этой линии равна $d = 1{,}5236$. Если рассматривать область, заполненную «кривой дракона», то можно обнаружить самые разнообразные кластеры, объединённые в острова, вихри, всегда несколько иные структуры, но всегда друг другу подобные и друг с другом сцеплённые. Это напоминает средневековую гравюру, на которой дракон видится по-разному под различными ракурсами обзора.

ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛА ДРАКОНА (ХАРТЕРА-ХЕЙТУЭЯ)

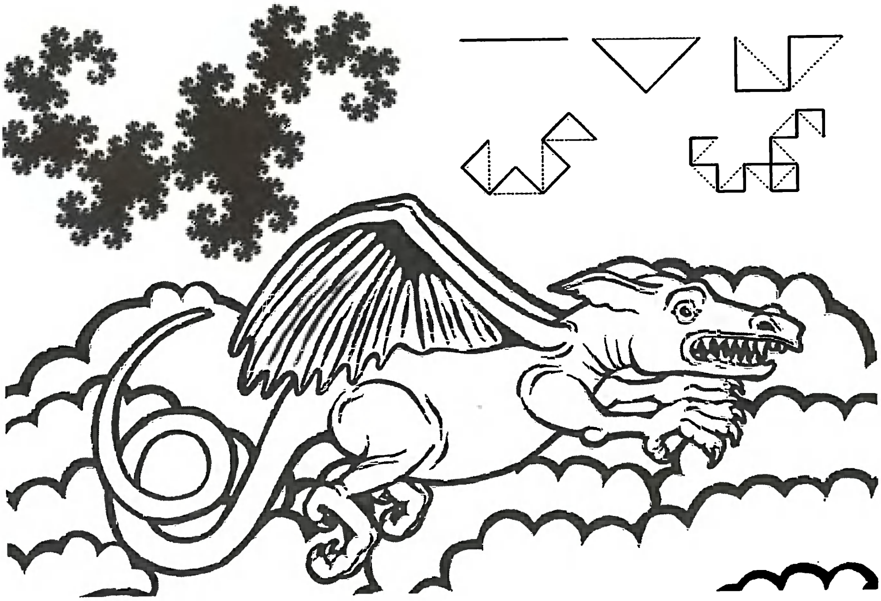
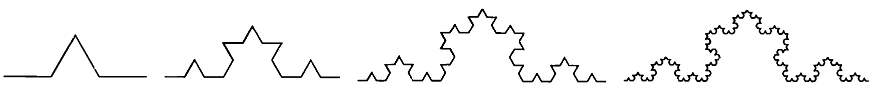


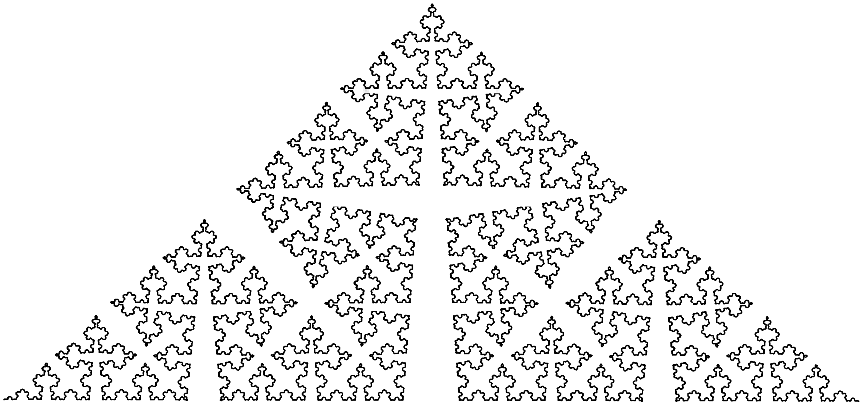
Иллюстрация из трактата
об оптических приборах
Иоганна Зана
«Oculus artificialis teledioptricus
sive telescopium»
(Вюрцбург, 1685)

Снежинка Коха

«Снежинка Коха» – это, быть может, одна из самых знаковых фрактальных кривых. Шведский математик Нильс Фабиан Хельге фон Кох в 1904 году построил кривую, которая непрерывна в каждой своей точке, но не дифференцируема. Для построения такой кривой начальный отрезок делится на 3 части, а потом средняя треть заменяется на два отрезка такой же длины – и так до бесконечности. Фактически на средней трети отрезка строится равносторонний треугольник, после чего основание треугольника (та самая средняя треть) изымается. Топологическая размерность фигуры $d_T=1$.



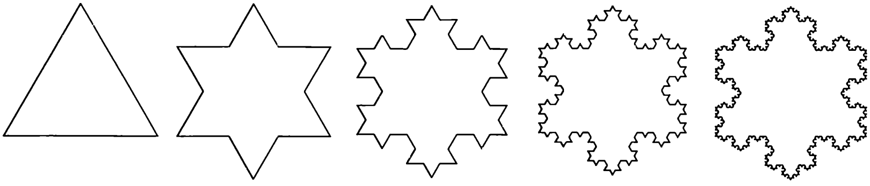
Протяжённость границы любого фрагмента кривой Коха имеет бесконечную длину, поскольку в пределе $\lim_{n\to\infty} 4^n/3^n = \infty$, её фрактальная размерность равна $d=\ln(4)/\ln(3) \approx 1{,}2618\ldots$ Как и лента Минковского, кривая Коха – уже не просто изломанная линия, но ещё и не плоская фигура, пол-



Модифицированная кривая Коха

ностью покрывающая некоторую площадь. Естественно модифицировать алгоритм Коха с целью «уплотнения» кривой. Так, если мы будем извлекать не 1/3 отрезка, а 1/9, то ломаная получится более плотной. Фрактальная размерность такой фигуры равна $d = \ln(4)/\ln(9/4) \approx 1{,}7095...$

Небольшая модификация алгоритма Коха позволяет построить самые разнообразные замкнутые фигуры. Например, «снежинку Коха». Для этого при построении в качестве начального элемента построения принимается не отрезок, а равносторонний треугольник, после чего алгоритм выполняется описанным ранее методом с заменой средней трети каждой стороны на два отрезка такой же длины. Результат построения – симметричная бесконечно изломанная замкнутая непересекающаяся сама с собой кривая, являющаяся самоподобным множеством – «снежинкой Коха».



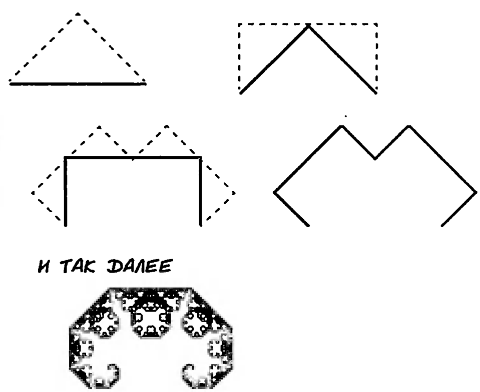
Пять шагов построения «снежинки Коха»

Фрактальная кривая Леви

Кривая, построение которой предложено Полем Пьером Леви[1] в тридцатых годах XX века, представляет собой самоподобный фрактал. На первом шаге берётся базовый отрезок, который заменяется двумя отрезками такой же длины (как при построении «снежинки Коха» мы делали со средней третью отрезка, только здесь мы заменяем весь отрезок). На втором шаге мы так же поступаем с получившимися двумя отрезками. Продолжая так бесконечное число раз, в пределе получим кривую Леви. Построив эту кривую на сторонах квадрата, получим двумерный «остров Леви», фрактальная размерность границ которого равна 1,9340...

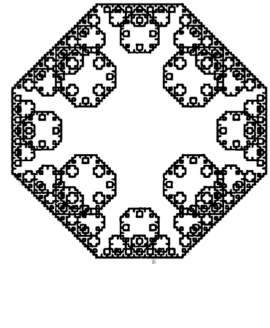
1 ***Поль Пьер Леви*** (1886–1971) – французский математик, член Парижской АН, профессор Политехнической школы в Париже. Основные труды по теории вероятностей, где он был одним из основоположников общих предельных теорем (каноническое представление Леви–Хинчина), и теории случайных процессов, функциональному анализу, теории функций, механике.

ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛА ЛЕВИ



ПОЛЬ ПЬЕР ЛЕВИ

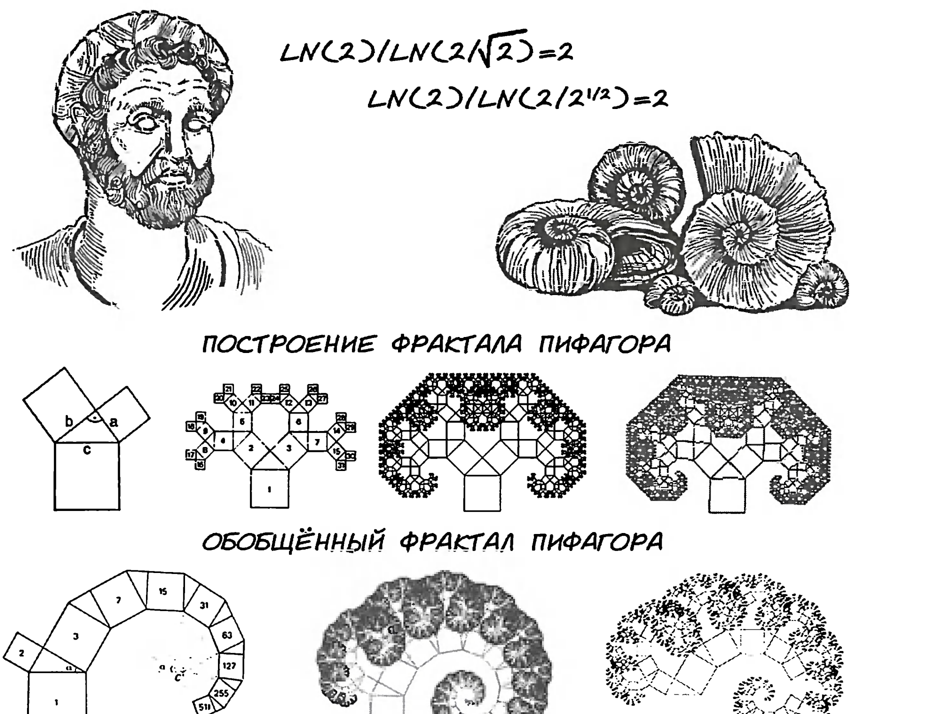
ОСТРОВ ЛЕВИ



Данный фрактал построил немецкий инженер Альберт Босман, проектировавший подводные лодки для Третьего Рейха. Эта форма следовала из размышлений о повышении прочности конструкций корпуса подводной лодки при снижении его веса.

Босман нашёл эту форму интересной и опубликовал её после войны в 1957 году в своём эссе «Геометрия в плане: поле чудес» («Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde»). Впоследствии она стала известна как фрактал Пифагора. Алгоритм построения фрактала Пифагора приведён на рисунке. Фрактальная размерность этой конструкции равна $\ln(2)/\ln(2/2^{1/2}) = 2$.

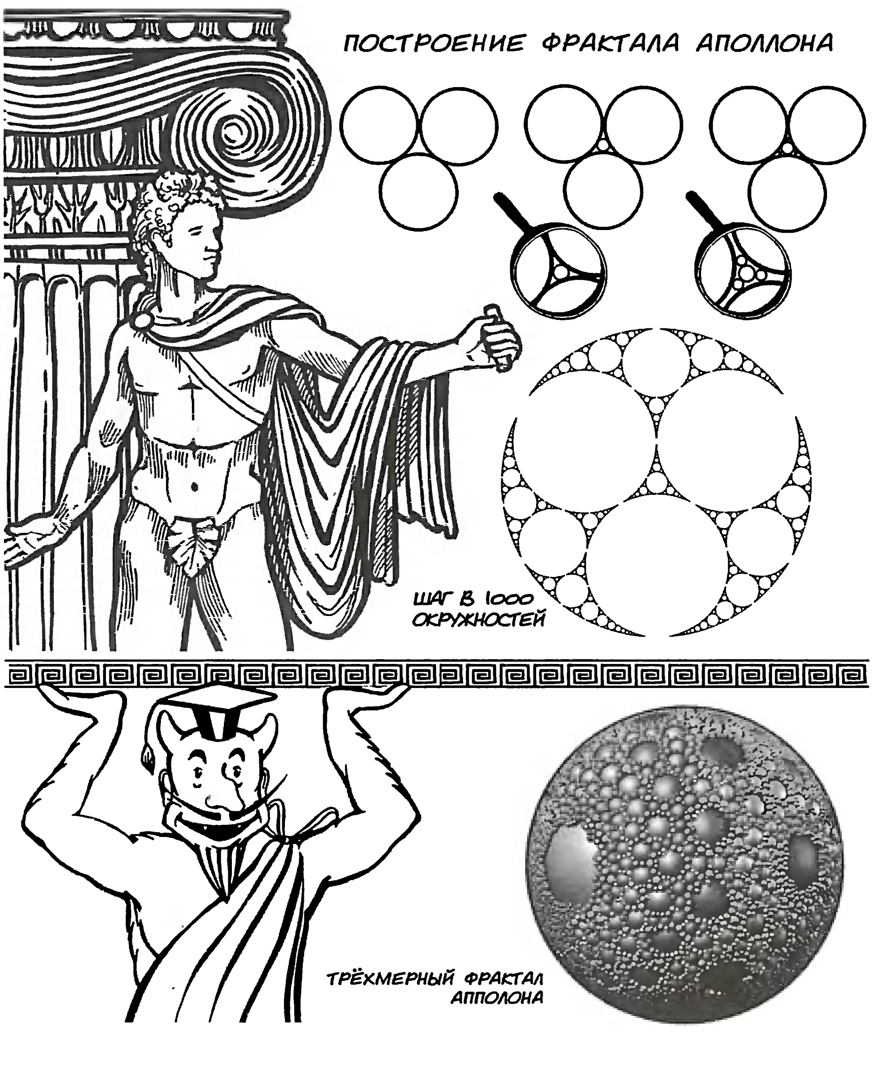
Со временем появился обобщённый фрактал Пифагора. Его фрактальная размерность равна $\ln(2)/\ln(2/\sqrt{2}) = 2$.



Фрактал Аполлона

Данный фрактал носит имя Аполлония Пергского, жившего в Перге (Малая Азия) во II–III веках до Р. Х., поскольку в своём труде «Конические сечения» он описал процесс постепенного заполнения окружности кругами всё меньшего и меньшего диаметра. Как показано на рисунке, этот алгоритм приводит к построению формы, фрактальная размерность которой равна 1,3058...

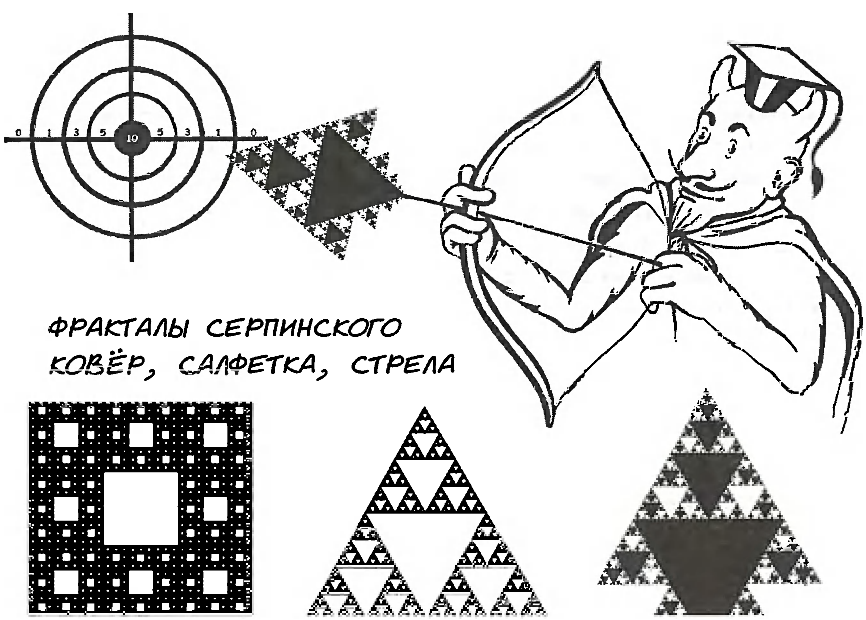
Если от окружности перейти к шарам, то фрактальная размерность трёхмерного фрактала Аполлона равна 2,4739...



Широко известно семейство самоподобных фракталов польского математика Вацлава Серпинского – салфетка, ковёр, стрела. Стоит заметить, что в этих фракталах самоподобие сочетается с симметрией поворота в классическом смысле, то есть эти фракталы имеют поворотную ось 3-го и 4-го порядков, что означает полное совпадение фигуры с самой собой при повороте на 360°/3 = 120° – для треугольника и на 360°/4 = 90° – для квадрата.

Первый из этих фракталов – «салфетка Серпинского» – появился в 1915 году, задолго до появления фрактальной геометрии. Он отсылает к формам, которые часто встречаются в математике, в искусстве и даже в религиозных учениях. Мауриц Эшер изучал оформление кафедры собора в Равелло (Италия), выполненной мастером XII века Николаем Бартоломео Фогги. Орнаменты Фогги содержат фигуры, напоминающие формы фракталов Серпинского.

Описанный ранее треугольник Паскаля также напоминает фрактал «салфетка Серпинского». Но, может быть, более всего фрактал «салфетка Серпинского» созвучен эмблеме пифагорейского союза – «тетраксису». Образованный десятью точками, он символизировал переход к десятеричной системе счёта, но, кроме того, в нём скрыто много уровней симметрии. Центральная точка равноудалена от точек, образующих равносторонний



треугольник. Продолжив построение из любой точки, мы получим потенциально бесконечную сетку, в которую вписано бесконечное множество равносторонних треугольников. Построение «салфетки Серпинского» может быть реализовано разными алгоритмами, которые мы рассматривали в первой части (см. стр. 63).

Фрактальная размерность «салфетки Серпинского» равна

$$d = \ln(3)/\ln(2) \approx 1{,}5849.$$

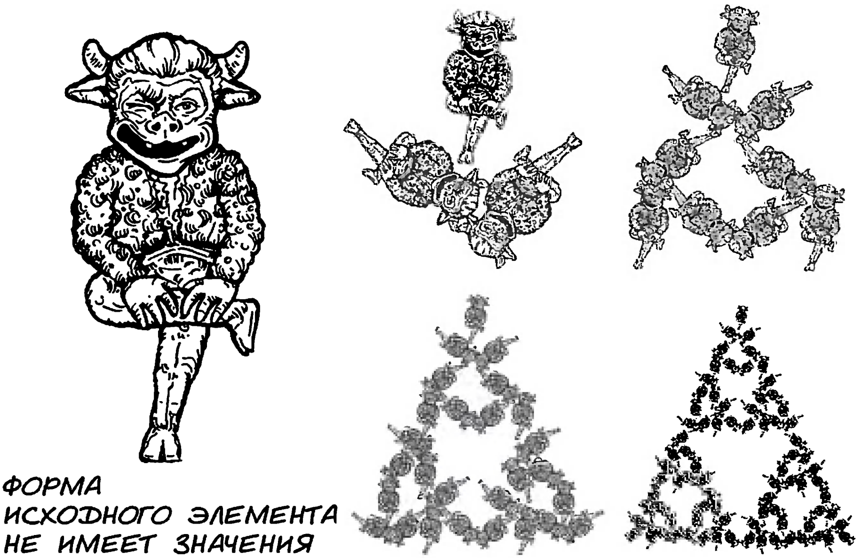
По аналогии можно построить и пирамиду. Процесс построения тот же, но вместо треугольника в этом случае используется тетраэдр, в середине которого вырезается перевёрнутый тетраэдр вдвое меньшего размера. Результатом бесконечного повторения такой процедуры станет так называемая «паутина Серпинского» – трёхмерная форма с фрактальной размерностью $d = \ln 4/\ln 2 = 2$.

Но вернёмся к «салфетке Серпинского». Она имеет нулевую площадь! В самом деле, на первом шаге из квадрата единичной площади вырезали ¼, затем $3 \times (1/4)^2$. То есть:

$$\frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + 3^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - 3/4} = 1.$$

А значит, оставшаяся площадь равна 0. Полностью аналогично тому, что мы наблюдали с «пылью Кантора» и прочими фракталами, постро-



енными по тому же принципу. Объёмная мера «салфетки Серпинского» пропорциональна мере площади.

Это утверждение также весьма необычно и требует пояснения. Для евклидовых тел в d-мерном пространстве объём V пропорционален R^d, где R – некоторый характеристический линейный размер тела. Площадь поверхности S изменяется пропорционально R^{d-1}.

Таким образом, $S \sim V^{(d-1)/d}$. Например, в трёхмерном пространстве ($d = 3$) справедлива зависимость $S \sim V^{2/3}$ (вспомним, что для сферы $S = 4\pi R^2 = (36\pi)^{1/3} V^{2/3}$). Однако во фрактальном пространстве это простое, наполненное смыслом отношение нарушается. Фрактальная размерность «салфетки Серпинского» $d = \ln(3)/\ln(2)$. Фрактальная размерность границы «салфетки Серпинского» равна $d = \ln 3/\ln 2$ (при уменьшении мерного стержня в 2 раза число отрезков, образующих края, увеличивается в 3 раза). Следовательно, фрактальная размерность границы и поверхности «салфетки Серпинского» равны. В этом можно также убедиться, представив массу M (R) салфетки, т. е. число точек внутри окружности радиуса R, как функцию радиуса: мы обнаружим, что в среднем $V(R) \sim R^{1,58}$. Но для полной протяжённости границы салфетки S (R) внутри окружности радиуса R получаем ту же самую зависимость $S(R) \sim R^{1,58}$. Следовательно, $V \sim S$.

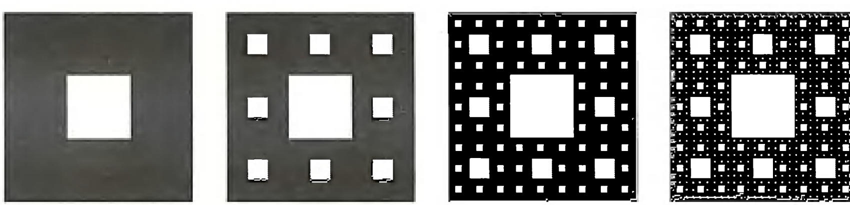
Результат, что и говорить, странный! Обратим внимание ещё на одно странное свойство «салфетки Серпинского». Результат построения не зависит от исходной фигуры построения. Какую бы базовую фигуру мы ни взяли, в результате множества повторений двукратного уменьшения и утроения количества «базовых элементов» они превращаются в точки «ковра Серпинского».

Наконец, и это довольно неожиданно, все точки «салфетки Серпинского» являются репелерами (от английского *to repel* – отталкивать). Это означает, что в процессе построения «салфетки» две соседние точки будут с каждым шагом удаляться друг от друга, а не сходиться к одному центру притяжения, как этого можно было бы ожидать.

Таким образом, на примере свойств «салфетки Серпинского» мы показали, что фрактальная геометрия как бы «переформатирует» здравый смысл.

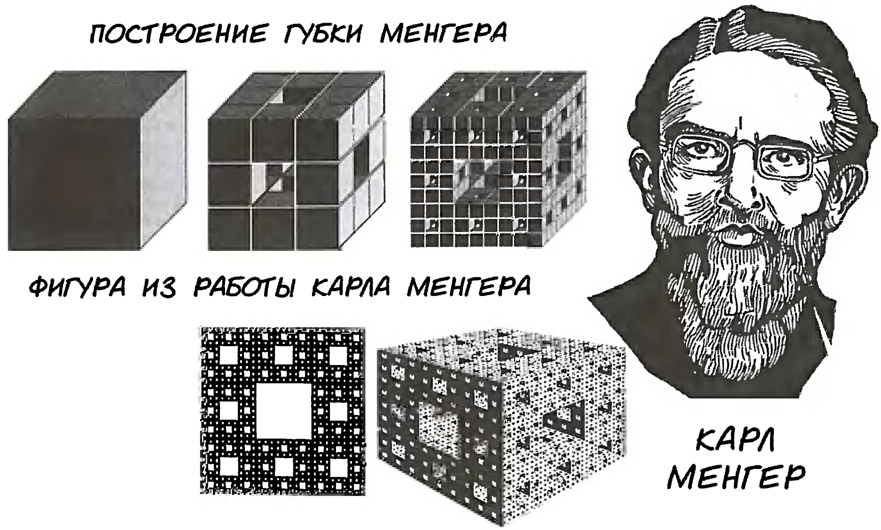
И это её качество позволяет наглядно интерпретировать странные и парадоксальные эффекты реальности во многих сферах человеческой деятельности.

Но вернёмся к «ковру Серпинского» и его естественному трёхмерному аналогу – «губке Менгера». Алгоритм построения «ковра Серпинского» сводится к следующему. Квадрат делится на 9 равных квадратов со стороной, равной 1/3 от длины стороны исходного. После этого вырезается центральный квадрат. На втором шаге каждый из оставшихся квадратов делится на 9 равных квадратов со стороной, равной 1/9 длины стороны начальной фигуры и 1/3 стороны квадратов, полученной после первого шага. Затем в каждом из 8 квадратов, оставшихся после первого шага, опять вырезается центральный. Процедура повторяется до бесконечности, формируя форму ковра, фрактальная размерность которого равна $d = \ln 8/\ln 3 \approx 1{,}8928\ldots$



Построение ковра Серпинского

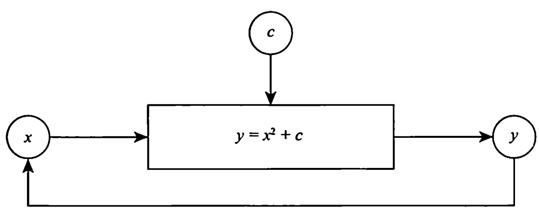
В 1946 году профессор Иллинойского технологического институт Карл Менгер построил фигуру, представляющую собой трёхмерный эк вивалент «ковра Серпинского». Эта фигура названа в его честь «губко Менгера». Каждая грань куба единичной длины делится на 9 равных кв: дратов (как кубик Рубика). Затем из исходного кубика удаляется 7 кубикс со стороной 1/3 (центральный и по одному центральному кубику из к ждой грани), из 27 кубиков остаётся только 20. С оставшимися кубикам



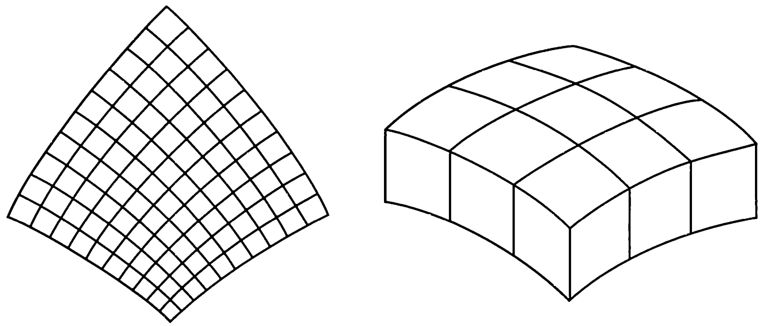
со стороной 1/3 проделывается та же самая процедура, в итоге образуя самоподобный объект, в котором любая грань – это «ковёр Серпинского». Учитывая, что $2<D<3$, приходим к выводу, что «губка» обладает нулевым объёмом, но бесконечной площадью поверхности пор, её фрактальная размерность равна $d = \ln 20/\ln 3 \approx 2{,}7268\ldots$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ФРАКТАЛЫ

Простейшим нелинейным отображением комплексной плоскости на себя является рассмотренное в первой части отображение Жюлиа $z \to z^2 + C$. Оно представляет собой расчёт по замкнутому циклу, в котором результат предыдущего цикла умножается сам на себя с приплюсовыванием к нему некоей константы, т. е. представляет собой квадратичную петлю обратной связи.



Квадратичная петля обратной связи



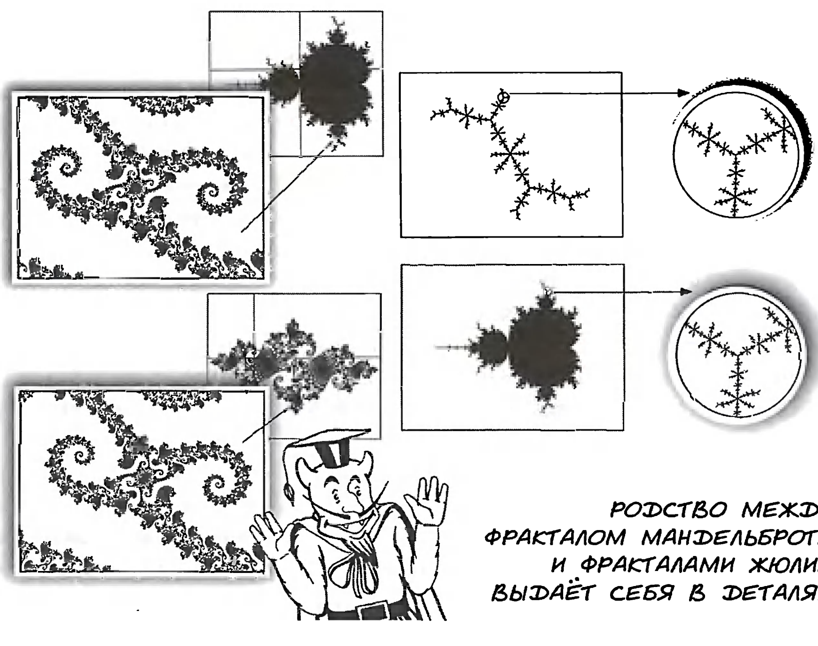
В отображении Жюлиа углы сохраняются, искривляются линии

В процессе итераций при фиксированной величине константы C, в зависимости от произвольной начальной точки Z_0, точка Z_n при $n \to \infty$ может быть или конечной, или бесконечной. Всё зависит от положения Z_0 относительно начала отсчёта $z = 0$. Если расчётная величина конечна, то она включается в множество Жюлиа; если уходит на бесконечность, то отсекается от множества Жюлиа. На топологическом языке это отображение сводится к вырезанию узора на резиновом лоскутке, сопровождаемого выкалыванием (перфорированием) на нём точек, и свёртыванию его вокруг себя при одновременном растягивании, причём свёртывание и растягивание согласованы между собой так, что при искажении линий на лоскутке углы между ними сохраняются.

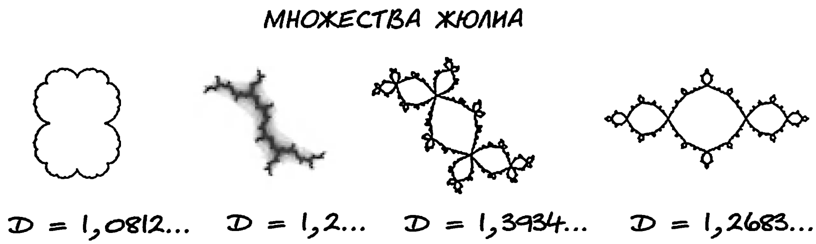
Процесс вычислений облегчает «предельная теорема», которую доказали Гастон Жюлиа и Пьер Фату. Суть её в том, что если изображающая точка квадратичного отображения вышла в процессе итераций за границы круга радиуса 2, то z не принадлежит множеству Жюлиа и её орбита уходит на бесконечность. Форма, которая получается после применения отображения Жюлиа к точкам некоторой поверхности, однозначно определяется параметром C. При малых C – это несложные связные петли, при больших C – это кластеры несвязных, но строго упорядоченных точек. По большому счёту, все формы Жюлиа могут быть разбиты на два больших семейства – связных и несвязных отображений. Первые напоминают «снежинку Коха», вторые – «пыль Кантора». На границе этих двух областей появляются формы, связывающая линия которых истончается до предела, и уже трудно уверенно сказать, являются ли эти формы связными или несвязными. Малейшее отклонение параметра C нарушает связность. Выявить такую сложную и тонкую пограничную область без многократных и высокоточных компьютерных расчётов практически невозможно. Мандельброту удалось это сделать в 1980 году. Он присвоил чёрный цвет точкам, в которых отображения Жюлиа связны, а белый оставил для несвязных отображений.

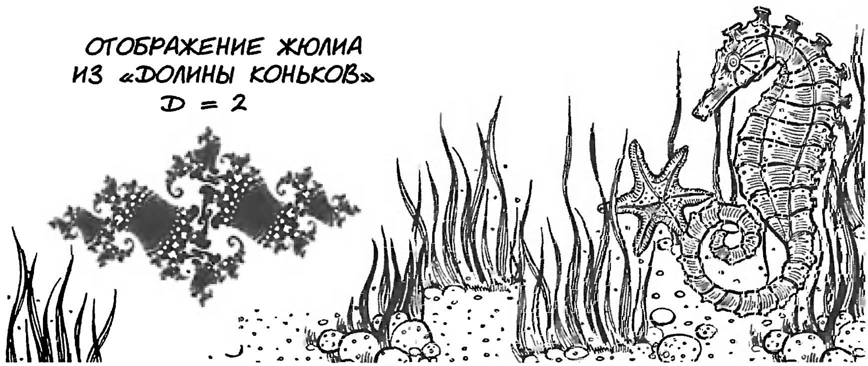
Эту непростую задачу определения границы между связными и несвязными отображениями Жюлиа существенно упростила теорема, доказанная ещё Жюлиа и Фату в 1918 году. Суть её в том, что если орбита исходной точки отображения уходит на бесконечность, то отображение будет несвязным. С учётом этой теоремы относительно простая компьютерная программа позволяла определять, к какому классу относится та или иная точка на плоскости.

Когда первые картинки области связных множеств Жюлиа появились на плоскости, Мандельброт ощутил разочарование. Картинка была столь неожиданной, что породила подозрения в программной ошибке. После нескольких недель скрупулёзной работы с программой и её результатами в лаборатории Гарвардского университета Мандельброт смог объявить об удивительном открытии. Он обнаружил, что при увеличении точности расчётов контуры границы между связными и разрывными отображениями Жюлиа не только не становились чётче, но, наоборот, размывались. При достаточно высокой точности наметились некая система и сложная структура, которая стала заметна при высоком разрешении. Оказалось, что многие примыкающие к основному континенту «островки» имеют ту же форму, что и «основной континент» множества. В просветах между островами наблюдались ещё меньшие острова, и процессу этому не было предела, а береговые линии замысловато извивались, производя иногда нечто наподобие пирсов.



РОДСТВО МЕЖДУ ФРАКТАЛОМ МАНДЕЛЬБРОТА И ФРАКТАЛАМИ ЖЮЛИА ВЫДАЁТ СЕБЯ В ДЕТАЛЯХ



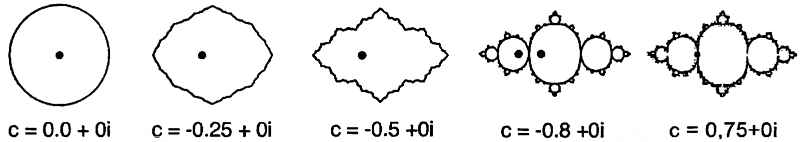


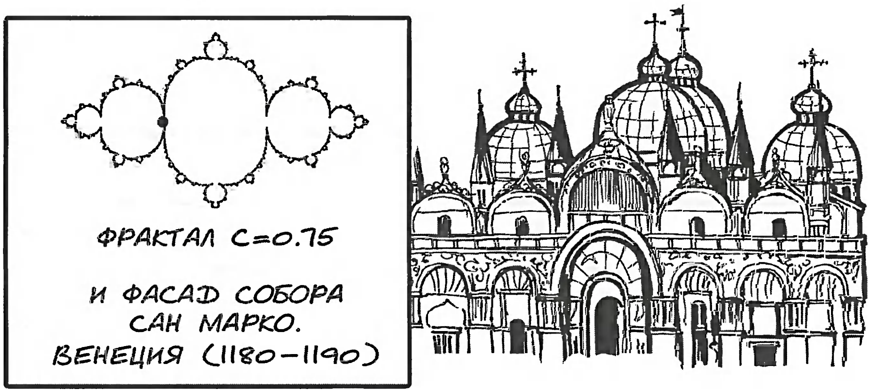
Такая граница представляла собой фрактальную форму, причём её фрагменты напоминали формы отображений Жюлиа. Несколько позже китайский математик Тан Ли докажет, что в пограничной области отображение Мандельброта асимптотически подобно отображению Жюлиа.

В 1991 году японский математик, профессор Киотского университета Мицухиро Шишикура доказал, что фрактальная размерность границы отображения Мандельброта равна двум. Это означает, что никто не сможет указать точной границы отображения Мандельброта и рассчитать точную площадь этого отображения, хотя с высокой степенью точности она примерно равна 1,50659177... Здесь мы снова попадаем в область иррациональных чисел, которых так страшились пифагорейцы. В известном смысле неопределённость иррациональных чисел связана с неограниченным разнообразием форм, которые появляются на границах фрактала Мандельброта и удивительным образом напоминают разнообразные формы отображений Жюлиа.

Напомним, что именно разнообразие форм Жюлиа обескуражило математиков, когда они впервые смогли наблюдать эти формы на мониторах компьютеров. Попытки ранжировать это многообразие носили весьма условный характер и свелись к тому, что за основу классификации отображений Жюлиа было взято множество Мандельброта, границы кото-

ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ОТ 0 ДО −1



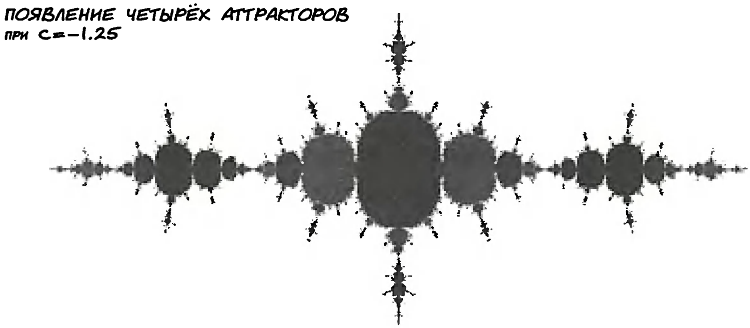


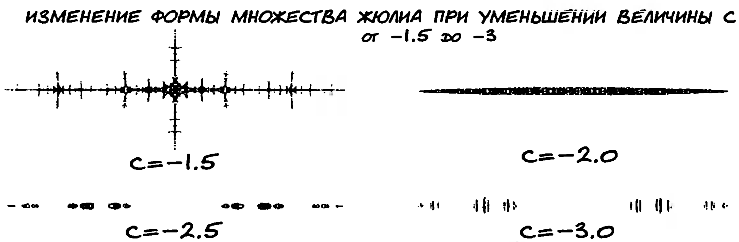
рого, как оказалось, асимптотически подобны отображениям Жюлиа. Тем не менее, это лучше, чем ничего.

Начнём с простого и рассмотрим отображения Жюлиа при С = 0. В этом случае повторение отображения Жюлиа даёт последовательность чисел $z_0, z_0^2, z_0^4, z_0^8, z_0^{16}$... В итоге возможны три варианта:

- при $|z_0| < 1$ в процессе итераций числа z_n по модулю будут уменьшаться, последовательно приближаясь к нулю. Иными словами, ноль есть точечный аттрактор;
- при $|z_0| > 1$ в ходе итераций числа z_n по модулю увеличиваются, стремясь к бесконечности. В этом случае аттрактором является бесконечно удалённая точка, и такие значения мы исключаем из множества Жюлиа;
- при $|z_0| = 1$ все точки последовательности продолжают оставаться на этой единичной окружности. В этом случае аттрактором является окружность.

Таким образом, при С = 0 граница между притягивающими и отталкивающими исходными точками есть круг. В этом случае отображение имеет две неподвижные точки: $z = 0$ и $z = 1$. Первая из них является притягивающей, так как производная квадратичной функции в нуле есть 0, а вто-





рая – отталкивающей, так как производная квадратичной функции при значении параметра единица равна двум.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда постоянная C является действительным числом, т. е. мы как бы перемещаемся по оси множества Мандельброта. Изменение формы и границ таких множеств Жюлиа от 0 до −1 показано на рисунке. Здесь для любой итерации $z_0 \to z_1 \to z_2 \to z_3$... также имеются три из перечисленных выше возможностей. Есть точечные аттракторы, есть круговые аттракторы, форма которых по мере изменения постоянной C всё больше отличается от окружности. Более того, появляются сложные формы с двумя точечными аттракторами. Причём форма границ становится всё более изломанной, всё более фрактальной по мере приближения к границам множества Мандельброта.

Обратим внимание, что при C = −0,75 происходит самопересечение границы множества Жюлиа и появляется второй аттрактор. Фрактал в этой точке носит имя фрактала Сан-Марко, данное ему Мандельбротом в честь известного венецианского собора. Глядя на рисунок, нетрудно понять, почему Мандельброту пришла идея назвать фрактал именно в честь этого строения: сходство потрясающее.

Уменьшая далее C до −1,25, мы получим новую типовую форму с четырьмя неподвижными точками, которые сохраняются до значений C < 2.

При C = –2 множество Жюлиа вырождается в отрезок, который тут же распадается в пыль, аналогичную «пыли Кантора».

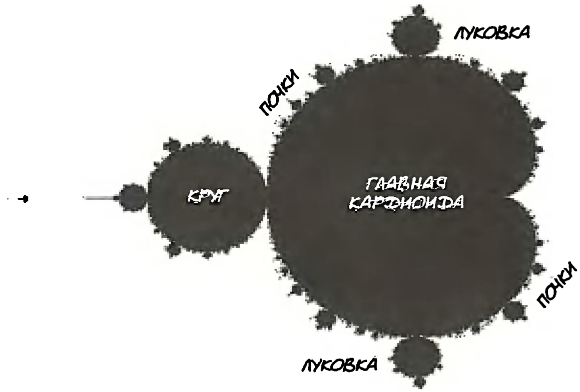
Итак, даже оставаясь на оси фрактала Мандельброта (постоянная C – действительное число), мы «захватили» в поле внимания и некоторым образом ранжировали довольно большое разнообразие форм Жюлиа – от окружности до пыли. Теперь рассмотрим знаковые области фрактала Мандельброта и соответствующие им формы фракталов Жюлиа. Прежде всего, опишем фрактал Мандельброта в терминах «кардиоид», «почек» и «луковок».

Главная кардиоида[1] и примыкающий к ней круг формируют основную форму фрактала Мандельброта. К ним примыкает бесконечное число её же копий, которые принято называть почками. Каждая из этих почек облеплена бесконечно большим количеством меньших почек, похожих одна на другую. Две самые большие почки сверху и снизу от основной кардиоиды назвали луковками. Теперь появилась возможность ориентироваться на фрактале Мандельброта. В пределах главной кардиоиды все формы Жюлиа представляют собой некоторые фрактально деформированные окружности, которые охватывают единственную притягивающую неподвижную точку. В главном круге формы Жюлиа усложняются, появляется доминанта из трёх островных связанных форм, охватывающих две неподвижные точки. Это означает, что, стартовав внутри одной из таких деформированных окружностей, после достаточно большого числа итераций, изображающая точка будет чередовать свое появления в «бассейнах» одного или второго центров притяжения.

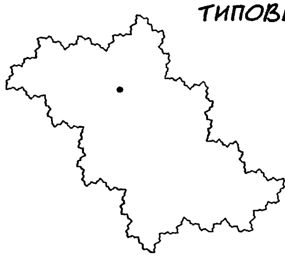
Форма фракталов Жюлиа в пределах главного круга напоминает колье из perola barroca[2] – жемчужин неправильной формы. В луковках форма Жюлиа становится ещё более замысловатой. Здесь пять связанных доминирующих островов охватывают три неподвижные точки. Исследовавшие типовой фрактал этого множества ($C = -0{,}12 + 0{,}74\,i$) француз Адриен Дауди и американец Билл Хаббард назвали его «фракталом кролика». Наибольшие после луковки почки расположены справа от луковки. В них формы Жюлиа представляют собой «семь островов», которые охватывают четыре неподвижные точки. В крупных почках слева от луковок формы Жюлиа выглядят как семь доминирующих островов, которые охватывают пять неподвижных точек. В зонах прирастания мелких почек ко главной кардиоиде встречаются весьма маргинальные фракталы Жюлиа, такие, как «диск Зигеля» при $C = -0.3905407802 - 0.5867879073\,i$. Особенность этого фрактала в том, что на нём появляются круговые аттракторы, напоминающие собой квази-

1 ***Кардиоида*** (греч. *καρδία* – сердце, греч. *εἶδος* – вид) – линия, которая описывается фиксированной точкой одной окружности, катящейся по неподвижной другой окружности с таким же радиусом. Получила своё название из-за схожести со стилизованным изображением сердца.

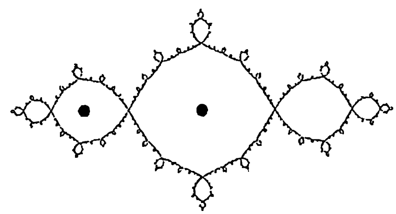
2 ***Perola barroca*** (португ.) – жемчужина неправильной формы (дословно «жемчужина с пороком»); ***barocco*** (итал.) – странный, причудливый. Предполагается, что название «барокко», стиля европейской культуры XVII–XVIII вв., происходит от этих слов.



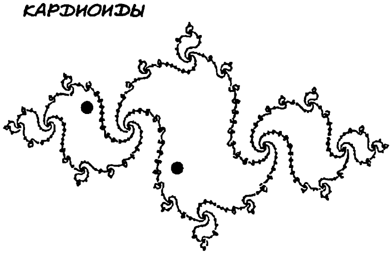
ТИПОВЫЕ МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА:



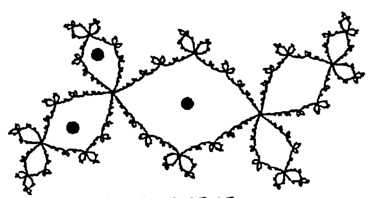
«КВАЗИОКРУЖНОСТЬ» В ПРЕДЕЛАХ ГЛАВНОЙ КАРДИОИДЫ



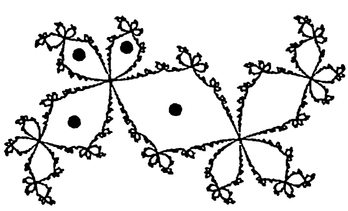
«ЖЕМЧУЖИНЫ БАРОККО» В ГЛАВНОМ КРУГЕ



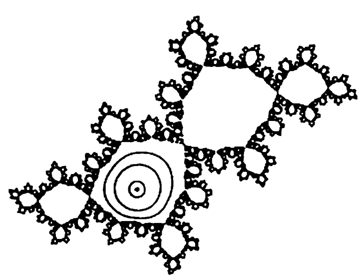
«ФРАКТАЛ КРОЛИКА» В ЛУКОВКЕ



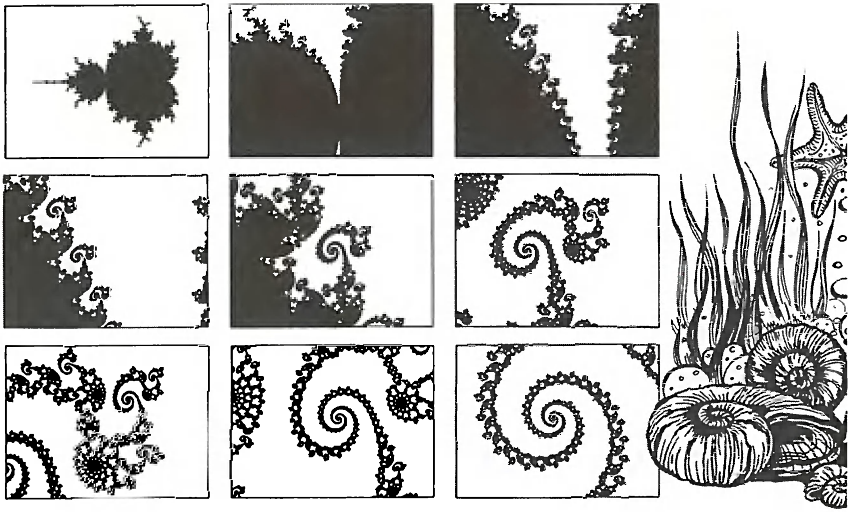
«СЕМЬ ОСТРОВОВ» В КРУПНЫХ ПОЧКАХ СПРАВА ОТ ЛУКОВОК



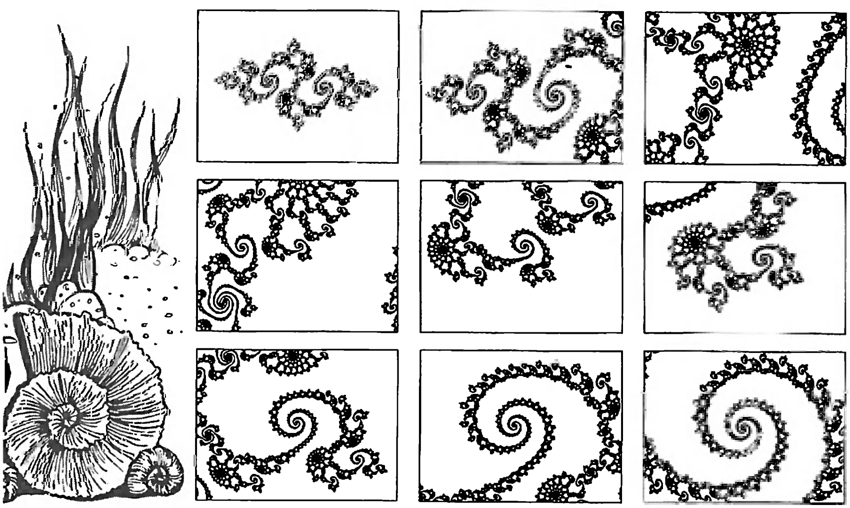
«ДЕВЯТЬ ОСТРОВОВ» В КРУПНЫХ ПОЧКАХ СЛЕВА ОТ ЛУКОВОК



«ДИСК ЗИГЕЛЯ» НА ГРАНИЦЕ ПРИРАСТАНИЯ ПОЧКИ СЛЕВА ОТ ЛУКОВКИ



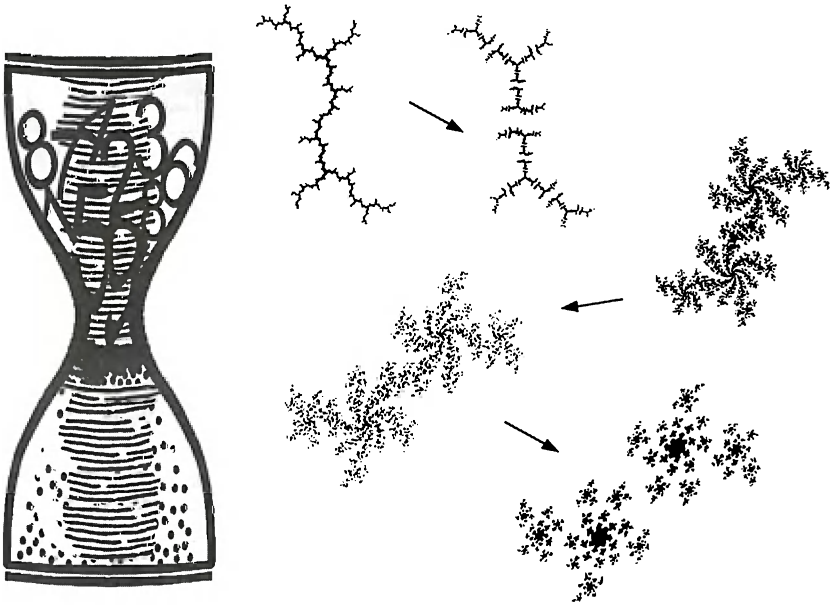
ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРА ПРИБЛИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ «ДОЛИНЫ МОРСКИХ КОНЬКОВ» ФРАКТАЛА МАНДЕЛЬБРОТА И ДЛЯ ФРАКТАЛА ЖЮЛИА В ОКРЕСТНОСТИ $z_0 = 0$ ПРИ ОДИНАКОВЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА $c = -0.1011 + 0.9563\, i$



окружности. Выбрав начальную точку на какой-нибудь из этих квазиокружностей, мы её уже никогда не покинем в процессе итераций.

Восхитительное семейство фракталов Жюлиа находится в «долине морских коньков» – в области между главными кардиоидой и кругом. Здесь подобие между формами Жюлиа и формами границы фрактала Мандельброта проявляет себя наиболее наглядно.

ТРАНСФОРМАЦИЯ СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ В ПЫЛЬ



Вдоль границ фрактала Мандельброта разбросано довольно много ответвлений, которые напоминают иглы, усики и антенны. Такие формы ещё называют дендритами (от греческого *δευδρον* – дерево). Они как бы не имеют «внутренностей», т. е. не ограничивают собой никакой области притяжения на комплексной плоскости.

Если построить фрактал Жюлиа на «кончике иглы», то получим форму, очень похожую на такую же иглу. Стартовав в любой форме такого фрактала Жюлиа, мы будем продолжать оставаться на нём бесконечно долго, совершая хаотические блуждания. При малейшем изменении параметра С дендриты Жюлиа истончаются, теряют связность, распадаются в пыль, как только мы сходим с фрактала Мандельброта.

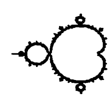
При переходе границы фрактала Мандельброта фракталы Жюлиа всегда теряют связность и превращаются в пыль, которую принято называть «пылью Фату» – в честь Пьера Фату, доказавшего, что для определённых значений С бесконечно удалённая точка притягивает всю комплексную плоскость, кроме очень тонкого множества, подобного пыли. Примеры трансформации связных множеств Жюлиа в «пыль Фату» показанын на рисунке.

Фрактал Мандельброта не перестает удивлять и тогда, когда, казалось бы, все его изгибы и складки уже изучены. Так в 1991 году Дэйв Болл исследовал точку сращивания главной кардиоиды и главного круга, в которой $C = -0.75 + 0\,i$. Он решил проверить количество итераций, которые уводят точки в окрестности сращивания кардиоиды и круга на бесконечность. Тестируя точки $C = -0.75 + \varepsilon\, i$, он сводил в таблицу результаты.

ε	итерации
0,1	33
0,01	315
0,001	3143
0,0001	31417
0,00001	314160
0,000001	3141593
0,0000001	31415928

Данные, которые появлялись в таблице, заставили Дэйва Болла воскликнуть: *«Какого чёрта оно тут делает!»* Или на языке оригинала: *«What the hell is it doing here?»* При чём здесь число $\pi = 3.141592...$? И число ли это π? Болл поступил, как и следует поступать: «когда сомневаешься, продолжай!» («When in doubt, keep going»). И, продолжив изыскания в окрестности точки $C = 0.25 + 0\,i$, снова получил то же самое число итераций, которое возрастало по мере приближения к исследуемой точке, причём число итераций по мере их роста всё точнее повторяли ряд, в котором располагаются цифры в числе π.

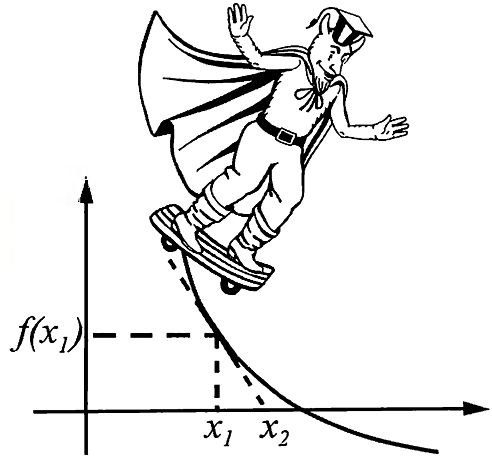
В чём причина? Ответа не было и нет. Во всяком случае, я его не знаю. А если кто-то знает и понимает ответ, то первому, кто ясно и доходчиво растолкует мне природу появления числа π в экспериментах Дэйва Болла, я обещаю приз!



Ведь это один из тех случаев, когда формальная странность может вытянуть на свет что-либо весьма существенное. Именно так, как это случилось в 1977 году. Тогда ещё совсем молодому американскому математику Джону Хаббарду, преподававшему математику в Парижском университете Орсей, студенты-первокурсники задали невинный вопрос: как будет сходиться точка, равноудалённая от трёх корней кубического уравнения? Здесь необходимо некоторое введение – боюсь, придётся «плясать от печки».

Итак, сэр Исаак Ньютон заложил основы классической механики, оптики, исчисления бесконечно малых. Но, кроме того, он открыл ещё множество менее известных методов, с пользой применяющихся и сегодня.

ИСААК НЬЮТОН



Например, формализовал алгоритм «проб и ошибок», известный со времён античности. Решение начинается с выбора произвольного числа. Далее итерация этого числа по определённому алгоритму приводит к решению. Процесс обыкновенно идёт достаточно быстро, и количество точных цифр после запятой, как правило, удваивается с каждым шагом. Примером такого итерационного алгоритма служит «метод касательных».

Пусть задана функция $f(x)$, для которой известно приближённое значение её корня x_1, а также значение функции $f(x_1)$ и её производная $f'(x_1)$. Тогда, проводя касательную к графику функции $f(x)$ в точке x_1 и определяя её пересечение с осью OX, получаем уточнённое значение корня, равное x_2. Поскольку уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_1)(x-x_1) + f(x_1)$, то, приравняв его к нулю, получим формулу для расчёта $x_2 = x_1 - [f(x_1)/f'(x_1)]$. Теперь, беря значение x_2 в качестве приближённого значения корня и повторяя этот алгоритм, находим следующее значение x_3 и так далее. Этот процесс быстро сходится к искомому значению корня.

Решения действуют как центры притяжения, а тема притяжения всегда притягивала Ньютона!

Единственный досадный недостаток этого метода в том, что уравнения обычно имеют более одного корня, особенно если среди этих корней есть комплексные решения. Какое именно решение будет найдено с помощью метода итераций, зависит от первоначальной догадки и первого шага.

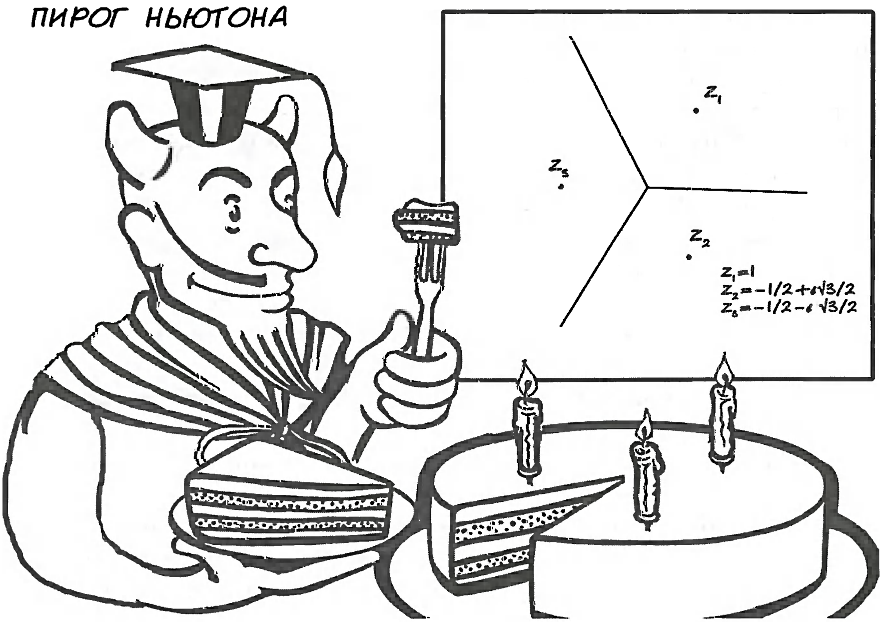
В 1879 году английский математик сэр Артур Кейли (1821–1895) опубликовал работу, в которой рассматривался собственно оператор Ньютона, а не его результаты. Найдя ответ для уравнения 2-й степени, Кейли анонсировал, что случай многочленов более высокой степени будет представлен в следующей публикации, которая так никогда и не появилась. Лорду Кейли пришлось оставить этот вопрос, поскольку он оказался слишком сложным.

Итерация Ньютона для квадратичного уравнения $z^2-1 = 0$ приводит к областям притяжения в виде двух полуплоскостей. Естественно думать, что для кубического уравнения $z^3-1 = 0$ существуют три области притяжения, которые разбивают комплексную плоскость на три сектора по 120° каждый. Но, как обнаружил Артур Кейли, к своему крайнему изумлению, это не так.

Проблема, с которой он столкнулся, явилась начальной точкой исследований Хаббарда. Как далеко простирается влияние притяжения различных центров и на что похожа граница между ними? Хаббард довольно быстро доказал, что для уравнения второй степени данная последовательность всегда будет сходиться к ближайшему корню. Исключение составляют случаи, когда начальная точка z_0 равноудалёна от обоих корней, т. е. лежит на прямой, проведённой через середину отрезка, соединяющего два корня, перпендикулярно ему. В этом случае последовательность итераций всё время остаётся на этой прямой, совершая хаотическое движение. В отличие от Кейли, у Хаббарда в распоряжении был компьютер. Уже к концу семестра им и его студентами было получено несколько важных экспериментальных результатов, описание которых заслуживает внимания. Рассмотрим простое кубическое уравнение $z^3-1 = 0$, при решении которого требуется найти кубический корень из единицы. В случае с действительными числами решение вполне тривиально – единица. Однако данный многочлен имеет также два комплексных корня: $-1/2+i\sqrt{}(3/2)$ и $-1/2 - i\sqrt{}(3/2)$. В самом грубом приближении комплексную плоскость можно было, как пирог, разделить на три равные части, каждая из которых являлась областью притяжения соответствующего корня.

Эта была именно та картинка, которую первоначально представлял себе Хаббард (и многие другие до него). Однако более скрупулёзное компьютерное исследование выявило, что геометрия границ областей притяжения имеет гораздо более сложную форму.

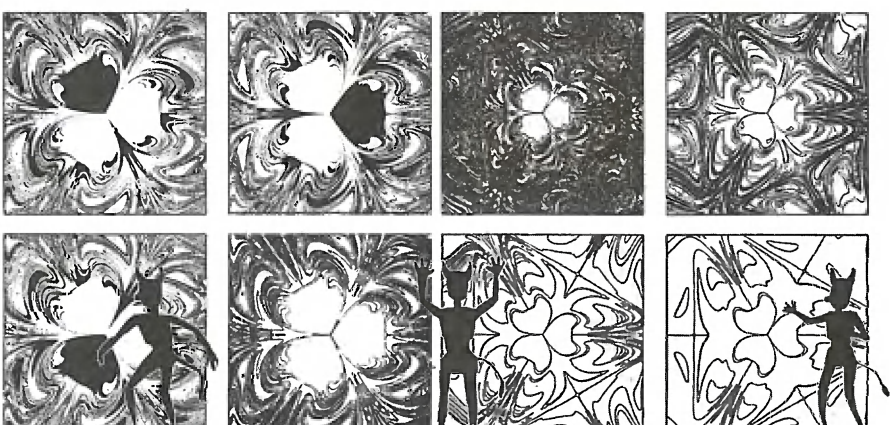
Нанесённые на комплексную плоскость, три указанных корня образуют равносторонний треугольник. Коль скоро в качестве начальной точки выбрано любое комплексное число, вопрос заключается в том, чтобы увидеть, какое именно из трёх решений даст вычисление по методу Ньютона. Это всё равно, что рассматривать данный метод как динамическую систему, а три решения – как три аттрактора. Метод Ньютона для кубического уравнения $z^3-1 = 0$ сводится к итерационной формуле:



$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}.$$

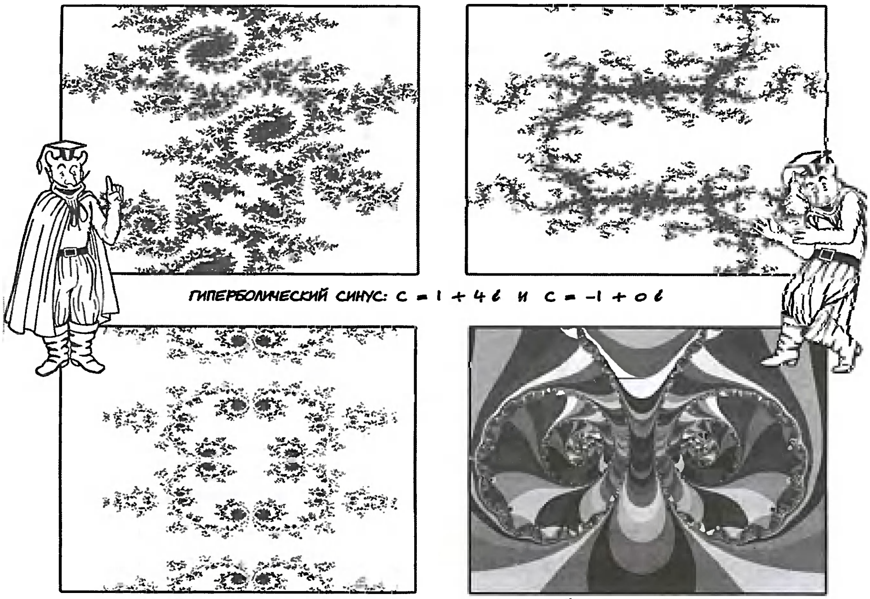
Анализ этой формулы показывает, что решения кубического уравнения ведут себя *странно*. Представим комплексную плоскость в виде ровной поверхности, спускающейся к трём углублениям, окрашенным для наглядности в разные цвета. Шарик, начав катиться из любой точки на плоскости, приведёт в одну из долин: состояние, в котором оказалась динамическая система, зависит от её начального состояния. Наивное предположение, будто любое z_0 будет сходиться к ближайшему из трёх корней, следует отбросить по причине его несостоятельности. Например, начальное значение $z_0 = -1$ сходится к 1, наиболее удалённому от него корню. Системный расчёт показывает, как некоторые расчётные точки быстро приводят к одному из корней, другие словно бы прыгают рядом с ним совершенно произвольно, пока не приближались к решению. Иногда кажется, что точка может стать началом периодического цикла, который будет повторяться вечно, не достигая ни одного из трёх возможных корней (неравновесная устойчивость).

Интересно, что форма этих областей удивительно напоминает множества Жюлиа для многочленов второй степени. Можно сказать, что существуют «хорошие» (по отношению к методу Ньютона) уравнения, для



которых почти все начальные точки ведут к какому-либо корню, и «плохие», для которых метод Ньютона иногда приводит к появлению притягивающего цикла.

ФРАКТАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА



ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ СИНУС: $c = 1 + 4i$ И $c = -1 + 0i$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ КОСИНУС: $c = -1{,}5 + 1{,}5i$

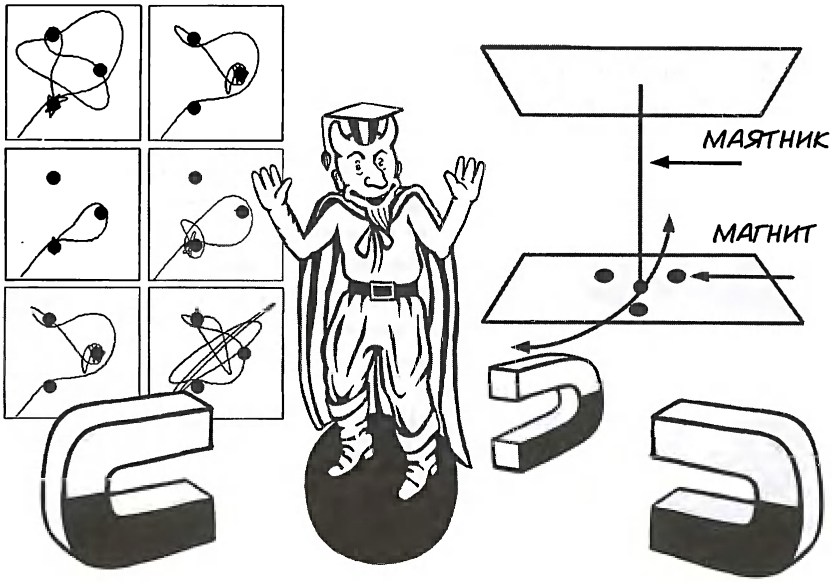
СЕМЕЙСТВО HYPNOSES (ГИПНОЗ) ПИТЕРА БРАНДЕРХОСТА: $c = 0{,}258919i$

Линии границ в конце концов открыли Хаббарду особое – фрактальное – их свойство: между областями притяжения двух центров всегда появляется область притяжения третьего центра. Непостижимо, но каждую пограничную точку окаймляли зоны всех трёх центров – совершенно безумное лоскутное одеяло. На границе между любыми двумя центрами притяжения всегда расположена гирлянда островков третьего центра притяжения. Границы этих островков, в свою очередь, состоят из гирлянд островков меньшего размера и т. д.

Такая феерия была бы невозможна, если бы не фрактальная природа границ: непрерывно уменьшаясь в размерах, детали границ постоянно воспроизводят сами себя. В результате оказывается, что каждая точка такой фрактальной границы соседствует сразу с тремя областями притяжения.

Таков естественный результат конкуренции нескольких центров за доминирование на плоскости. Простые границы между территориями в результате соперничества возникают редко. Чаще имеет место нескончаемое филигранное переплетение и непрекращающаяся борьба даже за самые малые участки. Между двумя конкурентами порой возникает третий, который пользуется разногласиями двух других и насаждает свою область влияния. Может случиться, что один центр захватит всю плоскость, но и его власть имеет границы в виде изолированных точек, которые неподвласт-

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ШАРА В ПОЛЕ ТРЁХ МАГНИТОВ



ны его притяжению – это, так сказать, «диссиденты». Пайтген и Рихтер в книге «Красота фракталов» поясняют:

> *«Простые контуры, отражающие противоборство противоположных принципов, являются исключением. Каждый большой конфликт сопровождают тысячи малых. Таким же образом типичной структуре границы соответствуют аналогичные структуры всё меньших и меньших масштабов».*

Удивительно, что столь сложная структура границ и чередующихся областей сформировалась в поле всего лишь трёх точек притяжения. Траектория в поле притяжения трёх тел заслуживает особого внимания.

**Будучи предопределённой, она непредсказуема.
Эта непредсказуемость завораживает.**

Иначе отчего бы по всему миру продают игрушку – маятник, состоящий из подвешенного на конце нити железного шарика. Под маятником находятся три магнита, притягивающие шарик. Траектория шара выглядит весьма запутанно и очень чувствительна к исходным условиям: начальному положению шара, трению и силе гравитации.

После серии колебаний маятник замрёт, а шарик зависнет точно над одним из трёх магнитов. Но всегда ли шарик устремится к тому из аттракторов, который окажется ближайшим к его начальному положению? Отнюдь нет! Попробуйте – и убедитесь сами. При различных начальных условиях шарик описывает весьма замысловатую траекторию, а его конечное положение представляется совершенно непредсказуемым, будучи предопределённым. Иначе говоря, траектория шарика в поле притяжения трёх магнитов есть траектория на фрактале – фрагмент странного аттрактора.

Нелинейных фракталов существует множество. Например, гиперболический синус, гиперболический косинус и другие.

Однако суть их ключевых странностей вполне адекватно описана выше и сводится к тому, что простые по форме функции, которые занимают ничтожно мало места в памяти компьютера, производят сложное разнообразие форм, для хранения которых не хватит памяти даже самого мощного компьютера.

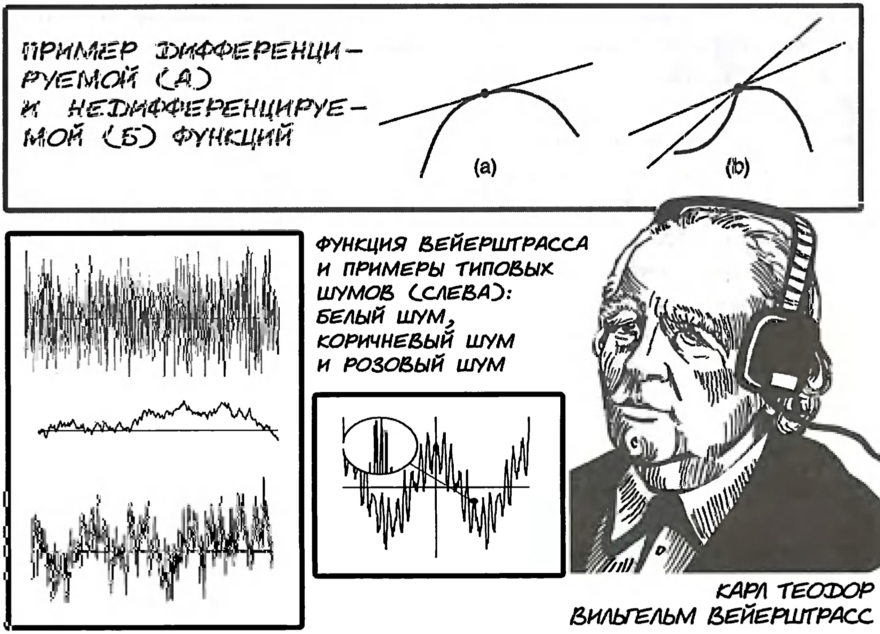
И это напоминает генетическую организацию живой материи, принцип которой в том, что ограниченный набор генов определяет неограниченное разнообразие фенотипов организмов, иными словами: «геном контролирует феном».

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Фракталам присущи эффекты изломанного, причудливого, случайного, которые столь часто встречаются в природе. Вместе с тем, есть существенное отличие между строго самоподобной кривой фон Коха и, например, побережьем Норвегии. Последняя, не являясь строго самоподобной, проявляет подобие в статистическом смысле. Обе кривые при этом изломаны настолько, что ни к одной из их точек вы не сможете провести касательную, или, иными словами, не сможете её дифференцировать. Такие кривые – своего рода «монстры» среди нормальных евклидовых линий.

Первым, кто построил непрерывную функцию, не имеющую касательной ни в одной своей точке, был Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс[1]. Его работа была представлена Королевской Прусской Академии 18 июля 1872 года и опубликована в 1875 году. Функции, описанные Вейерштрас-

1 ***Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс*** (1815–1897) – выдающийся немецкий математик, которого называют «отцом современного анализа».



сом, выглядят подобно шумам, приведённым на рисунке. В то же время между функциями Вейерштрасса и шумами есть существенное различие. Любая точка функции Вейерштрасса строго детерминирована, а точка на графике шума – случайна.

Такие случайные траектории скорее являются правилом, чем исключением.

Посмотрите на графики биржевых бюллетеней, сводку колебаний температуры или давления воздуха – и обнаружите некую регулярную изрезанность. Причём при увеличении масштаба характер изрезанности сохраняется. И это отсылает нас к фрактальной геометрии. Так, анализ траектории броуновского движения на плоскости показывает, что она имеет фрактальную размерность, равную двум, а фрактальная размерность границы броуновского движения частицы равна 1,33...

Броуновское движение – один из самых известных примеров стохастического процесса. В 1926 году Жан Перрен[1] получил Нобелевскую премию за исследование характера броуновского движения. Именно он обратил внимание на самоподобие и недифференцируемость броуновской траектории. Ещё в 1828 году шотландский ботаник Роберт

---

1 ***Жан Батист Перрен*** (1870–1942) – французский физик, лауреат Нобелевской премии по физике.

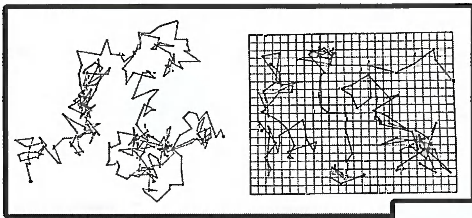
Броун (1773–1858) описал, как частички пыльцы самопроизвольно перемещаются в пробирке с водой. Он объяснил свои наблюдения следующим образом:

«Это чрезвычайно мелкие частицы твёрдой материи, полученные из органических или неорганических веществ, при растворении в чистой воде или в некоторых других жидкостях демонстрируют движение, для которого я не могу найти объяснения, которое по своей нерегулярности и видимой независимости в большой степени напоминает менее быстрые движения некоторых из простейших микроорганизмов. Эти мельчайшие наблюдаемые частицы перемещаются, я назвал их «активными молекулами», видимо, имеют сферическую или почти таковую форму и размер между 1/20 000 и 1/30 000 долями дюйма в диаметре; а другие частицы значительно большего и различного размера, как подобных, так и очень отличающихся форм, также демонстрируют аналогичные движения в подобных обстоятельствах. Я уже заявлял о своей уверенности в том, что эти движения частиц не являются ни результатом течений жидкости, содержащей их, ни внутреннего движения, сопровождающего её испарение».

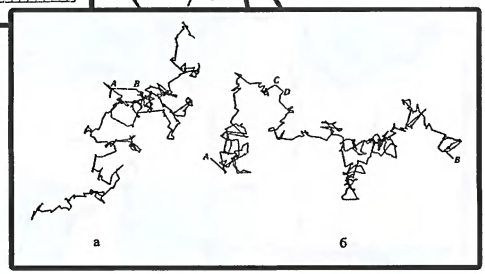
Вряд ли уместно пересказывать здесь те презабавные истории, которые породила причудливая пляска частиц цветочной пыльцы под микроскопом. Какие только фантастические интерпретации ни предлагались – от живых молекул, наделённых свободой воли, до прямого вмешательства сверхъестественных сил. Достаточно сказать, что когда Броун кипятил, замораживал и вновь нагревал жидкость, частицы всё так же продолжали свою безумную пляску, весьма напоминающую столпотворение. Появилось объяснение: движение происходит из-за случайных колебаний водных молекул, бомбардирующих зёрна пыльцы с различных направлений. Это тривиальное толкование скрывает самое интересное – то, что нашёл Жан Батист Перрен. В своей известной работе «Les Atomes» он описал эффект самоподобия броуновских траекторий:

«И величина, и направление видимой средней скорости частицы изменяются самым безумным образом, что даёт лишь слабое представление об изумительной запутанности реальной траектории. Если бы положения частицы регистрировались в 100 раз чаще, то вместо каждого отрезка прямой мы получили бы ломаную, столь же сложную, как и исходный рисунок, хотя и меньших размеров, – и так

ИЗОБРАЖЕНЫ ЧЕТЫРЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОЛЛОИДНОЙ ЧАСТИЦЫ РАДИУСА 0,53мкм, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ МИКРОСКОПА



ПОКАЗАНО, КАК ВЫГЛЯДИТ ПОД МИКРОСКОПОМ ТИПИЧНАЯ ТРАЕКТОРИЯ ЧАСТИЦЫ ПЫЛЬЦЫ, СОВЕРШАЮЩЕЙ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ



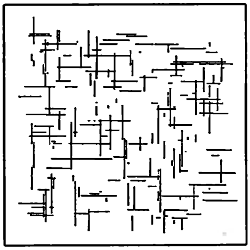
далее. Нетрудно убедиться, что на практике понятие касательной в применении к таким кривым является полной бессмыслицей».

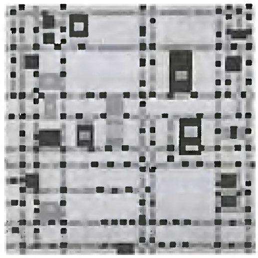
Масштабное самоподобие! Под микроскопом типичная траектория частицы пыльцы выглядит как изломанная лента из прямых звеньев. Но стоит только увеличить разрешение микроскопа, как каждый прямой участок превратится в новое скопление прямых звеньев. И это новое скопление будет подобно скоплению, зафиксированному на более грубом масштабе.

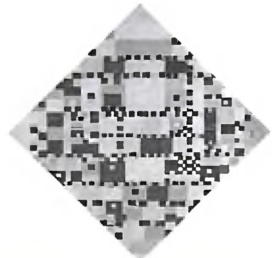
С появлением компьютеров стало возможным не только фиксировать стохастическое поведение в природе, но и моделировать стохастические процессы. Для этого применяются компьютерные генераторы случайных чисел, которые используют различные алгоритмы. Для примера опишем два.

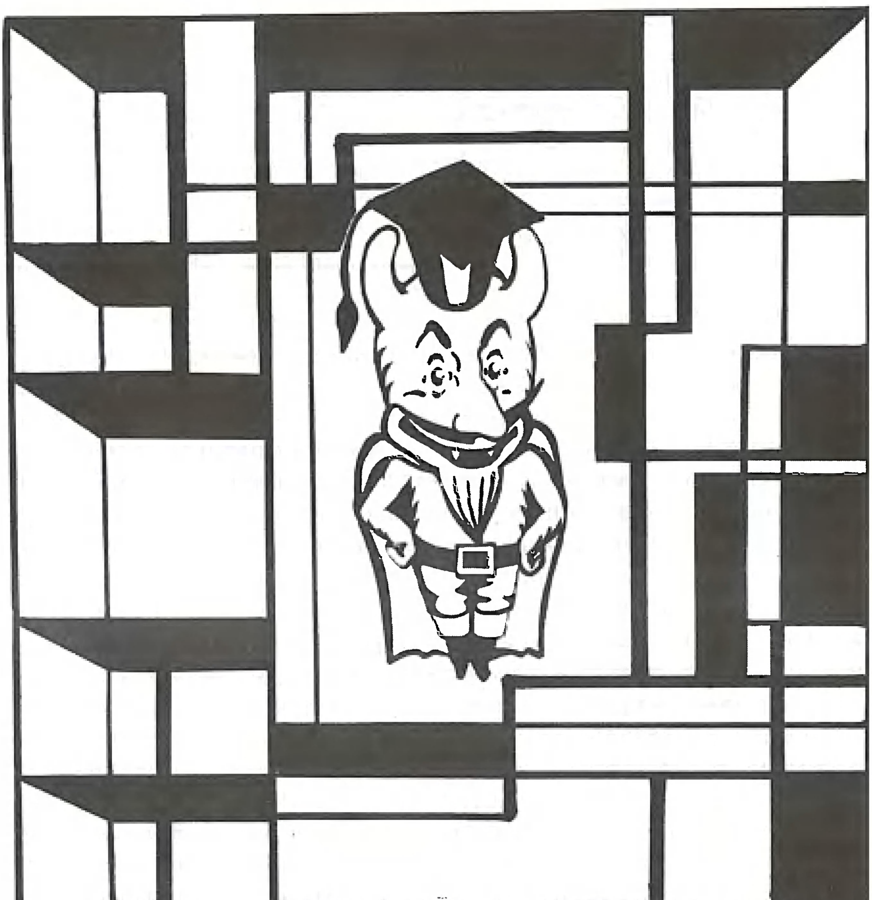
Генератор случайных чисел **RND** (от англ. *random* – случайный, беспорядочный), хотя и подчиняется вполне определённому алгоритму, «выбрасывает» числа, которые можно считать случайными. На первом этапе выбираем 4 случайных числа, например, 1, 2, 3, 4, и составляем из них число 4321. На этом всё случайное в этом процессе заканчивается. Теперь возведём это число в квадрат, получим 18671041 и отбросим крайние числа. Останется четырёхзначное число 6710. Для получения третьего числа в квадрат возводится число, полученное на предыдущем этапе. После ше-

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭСКИЗ A LA MONDRIAN
И РАБОТЫ ПИТЕРА МАНДРИАНА
«БУГИ-ВУГИ НА БРОДВЕЕ» (1942–1943), «ПОБЕДА БУГИ-ВУГИ» (1942–1944)









стого шага результат – выборка из четырёх цифр – подчиняется нормальному закону распределения случайных величин. Заметим, вопреки тому, что весь процесс строго детерминирован, предопределён и повторим, коль скоро мы начнём его с одинакового начального числа.

Другой часто используемый генератор случайных чисел, **FRAC** (от англ. *fraction* – доля, дробный), в качестве случайного числа «выбрасывает» дробную часть некоего реккурентного алгебраического выражения, такого, например, как $x_{n+1} = \mathrm{FRAC}\,(r\,x_n)$, $x_{n+2} = a\,x_{n+1} + c\,x_n$. Как логически следует из принципа действия оператора FRAC, полученное число больше или равно 0 и меньше 1.

Таким образом, очевидно, что числа, полученные нами в результате применения функций RND и FRAC, имеют одинаковый масштаб и ни одно из них не выделяется из ряда других и не выглядит небоскрёбом «Тайбей 101» в квартале одноэтажных халуп. Согласно центральной предельной теореме, сумма достаточно большого количества полученных случайных или псевдослучайных чисел будет иметь нормальное или близкое к нормальному распределение. На практике достаточно суммы всего шести таких чисел, чтобы получить случайную величину, которая может считаться нормальной.

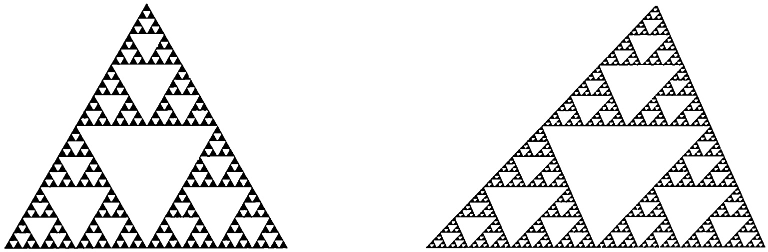
Заметим, что псевдослучайность не лишена эстетической привлекательности. Так, программа **MONDRIAN**[1] производит отрезки, положение, длина и ориентация которых задаётся генератором случайных чисел. Результат – эскиз *a la Mondrian*, приведённый на предыдущей странице.

ИГРА ХАОСА

В восьмидесятых годах минувшего столетия Майкл Барнсли сконструировал метод, обозначенный как «система итерированых функций» или СИФ-алгоритм. Суть его в следующем. Пусть есть система (набор) правил. Эти правила исполняются с определённой вероятностью в той последовательности, которая задаётся генератором случайных чисел (классический пример построения фрактала «салфетка Серпинского» с помощью СИФ-алгоритма был рассмотрен во второй части книги). Теперь несколько расширим наше понимание этого метода.

Давайте представим, что играем в игру Барнсли с трёхгранным кубиком; конечно, такого кубика в реальности не бывает, поэтому да-

1 ***Пит Мондриан*** (1872–1944) – голландский художник, который одновременно с Кандинским и Малевичем положил начало абстрактной живописи. Его картины, представляющие собой сочетания прямоугольников и линий, являются примером наиболее строгой, бескомпромиссной геометрической абстракции в современной живописи. В его честь названа программа графической визуализации статистических данных.

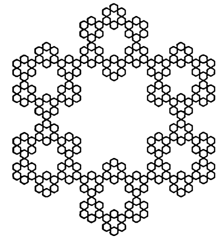


Равносторонний и скошенный треугольники

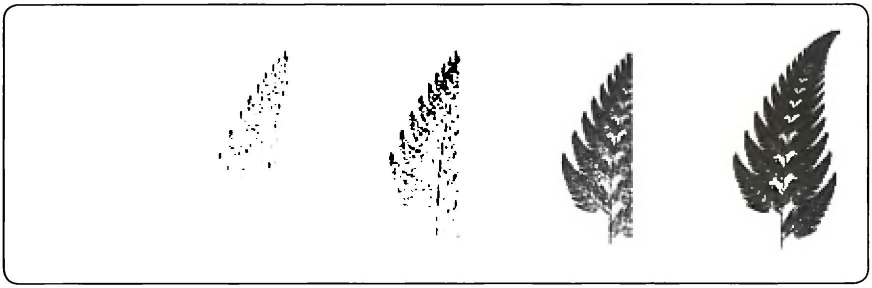
вайте представим, будто играем стандартной костью с буквами *x, y, z* на трёх парах граней. Теперь нарисуем равносторонний треугольник (хотя, конечно, соотношение сторон треугольника не играет никакой роли в аспектах данной задачи) с вершинами *x, y, z* и выберем произвольную точку внутри этого треугольника. Теперь примемся бросать кубик и при выпадении буквы строить отрезок от последней поставленной точки ломаной линии до соответствующей вершины. После многочисленных повторений получим классический фрактал «салфетка Серпинского».

Теперь изменим правила и станем фиксировать точки не на середине отрезка, а на расстоянии в 1/3 от соответствующей вершины. Получившееся множество точек аналогично «пыли Кантора».

Фрактальная размерность такого множества равна единице. В качестве исходной фигуры можно выбрать и любой другой многоугольник. Например, квадрат. Однако в случае квадрата нас ожидает сюрприз. Если проводить игру по тем же правилам, что и для треугольника Серпинского (т. е. ставить новую точку на середине отрезка), то точки равномерно заполнят весь квадрат. Но если, например, взять правильный шестиугольник и ставить точку не в середине отрезка, а на расстоянии в 1/3 от соответствующей вершины, то эти точки в процессе итераций образуют множество, которое условно можно назвать шестиугольником Серпинского. Шестиугольник Серпинского состоит из шести одинаковых частей, каждая из ко-



Фрактальная пыль и шестиугольник Серпинского



Лист папоротника, полученный посредством СИФ-алгоритма.
Слева направо показано 2 000, 4 000, 10 000, 50 000 и 200 000 итераций

торых подобна целому, но имеет размер в три раза меньше исходного. Поэтому его фрактальная размерность равна $\ln 6/\ln 3 = 1{,}6309...$

Кстати, именно в этом случае игра в хаос будет подобна настоящей игре в кости: на шести гранях игрального кубика можно поставить цифры от одного до шести, соответствующие каждой из вершин шестиугольника. Заметьте также, что внутренняя граница этой фигуры представляет собой уже известный нам фрактал – «снежинку Коха».

Система правил и фиксированная вероятность выбора того или иного правила на каждом шаге итераций позволяет сконструировать множество самых различных фигур.

Заметим, что нет никакой необходимости запоминать все эти формы в высоком разрешении. Достаточно помнить алгоритм, который почти не требует сколько-нибудь значимого объёма памяти. В 1985 году Барнсли разработал метод фрактального сжатия изображений, на который им был получен патент. Этот метод давал потрясающие результаты.

Фрактальное сжатие (СИФ-метод) позволяло сократить требуемый объём памяти для хранения изображения в 200 раз – больше, чем это позволял сделать популярный формат JPEG.

Однако метод фрактального сжатия, как иначе называется метод IFS, не безупречен и относится к методам с потерями, то есть восстановленное изображение может не соответствовать исходному точка в точку. Впрочем, и формат JPEG грешит потерей точности изображений. Зато скорость декомпрессии при передаче изображений фрактальным методом остаётся вне конкуренции.

Эти преимущества позволили Барнсли организовать конкурентноспособный бизнес. В 1987 году он вместе со Слоаном основал компанию «Iterated Systems Inc.», оборот которой достиг полутора миллионов долларов

ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА КОЛЛАЖА

в 1991 году, четырёх с половиной – в 1992-м, десяти с половиной – в 1993-м и 1994 годах. В 2001 году «Iterated Systems, Inc.» была переименована в «MediaBin Inc.», а в 2003-м куплена компанией «Interwoven Inc.» Свой бизнес Барнсли защитил целой баррикадой патентов: US 5065447, US 4941193, 5065447, 5384867, 5416856 и 5430812. Они ограничивали доступ к использованию фрактального сжатия изображений и серьёзно тормозили его развитие.

Сегодня срок действия большинства патентов истёк или истекает в ближайшем будущем. Это, возможно, приведёт к ренессансу фрактального метода сжатия изображений. Суть его, поясним, состоит в том, что на изображении обнаруживаются самоподобные участки, а затем осуществляется полное покрытие всего исходного изображения множеством уменьшенных трансформированных его копий.

Этот своего рода коллаж подчиняется известной теореме коллажа, суть которой в том, что если разница (погрешность) d между оригиналом и коллажем меньше e, то разница исходного и сгенерированного изображений меньше отношения e/(1-s), где s – размер самого большого фрагмента коллажа. Эта теорема позволяет рассчитать погрешность при передаче изображения в зависимости от искусности подобранного для этой цели коллажа. Из неё, в частности, вытекает, что для снижения погрешности следует выбирать как можно больше фрагментов как можно меньшего размера. Но при этом уменьшается степень сжатия. Таким образом, «пирог либо большой, либо сладкий» – по законам диалектики.

Новое семейство фракталов открылось, когда мне пришло в голову довольно простое соображение, навеянное внедрением стандартов ISO[1] на одном из наших предприятий. Суть его в следующем. Одни и те же процессы и процедуры, которые повторяются на предприятии изо дня в день, тем не менее, повторяются не в «безвоздушном пространстве», не в «стерильной атмосфере». Они повторяются в реальности, где внешнее воздействие от макроэкономических до микробиологических факторов оказывает постоянное влияние на ход выполняемых процессов и процедур. В результате бизнес-процессы становятся уникальными настолько, что структура компаний в Санкт-Петербурге и в Луганске отличаются друг от друга радикальным образом – при том, что обе компании реализуют одну и ту же бизнес-идею: производят и поставляют на рынок натуральные пищевые красители.

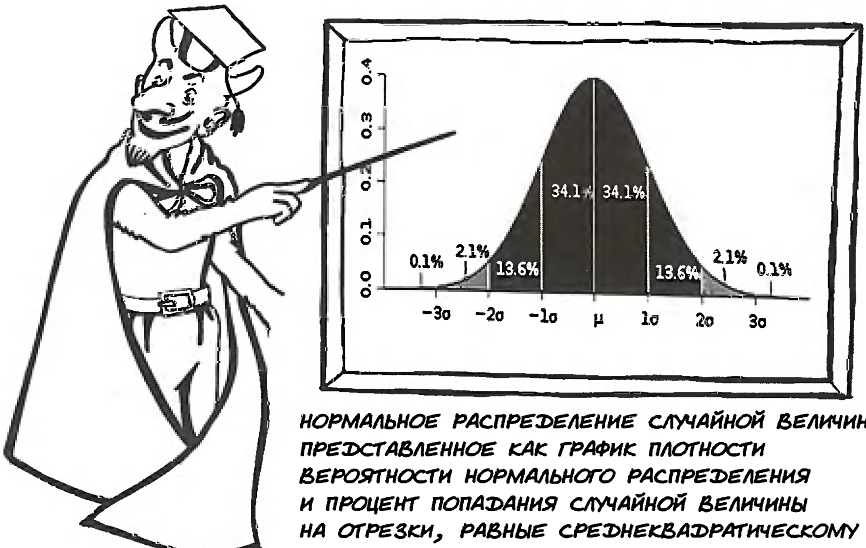
Математическая модель, которая может симулировать суть такой дифференциации структур при неизменной последовательности типовых процессов, должна включать случайные вмешательства, приходящие извне. Вместе с тем, такая модель принципиально отличается от СИФ-алгоритма в том, что процессы и процедуры повторяются в строго определённом порядке. СИФ-алгоритм чередует операции с заданной вероятностью. Так, погода может изменить наши планы на выходные дни, но в течение рабочей недели возможность такой адаптации весьма ограничена. Гибкость «выходного дня» желанна, но пока реальный производственный процесс организован более жёстко.

Последовательность операций фиксирована. Операции повторяются циклически. Повторное выполнение одной и той же операции сопровождается внешними флуктуациями. Иногда избранные моды (набор предсказуемых колебаний) этих флуктуаций учитываются в производственном процессе, и он допускает изменение процедур по заранее разработанному алгоритму. Например, если сырьё поступило в форме более высококонцентрированного ингредиента, то его дозировка будет снижена. Однако при этом вне алгоритма остаётся множество параметров, подверженных случайным внешним флуктуациям. Построение фрактальной формы может служить моделью формирования структуры предприятия при заданном и фиксированном процессе производства.

Для моделирования фрактальной формы влияния внешнего «шума» на производство добавим генератор случайных чисел, который позволит адекватно симулировать случайные возмущения. При больших случайных флуктуациях любая геометрическая форма будет ими рассеяна. Если флук-

---

1 **ISO 9000** – серия международных стандартов, описывающих требования к системе менеджмента качества организаций и предприятий.



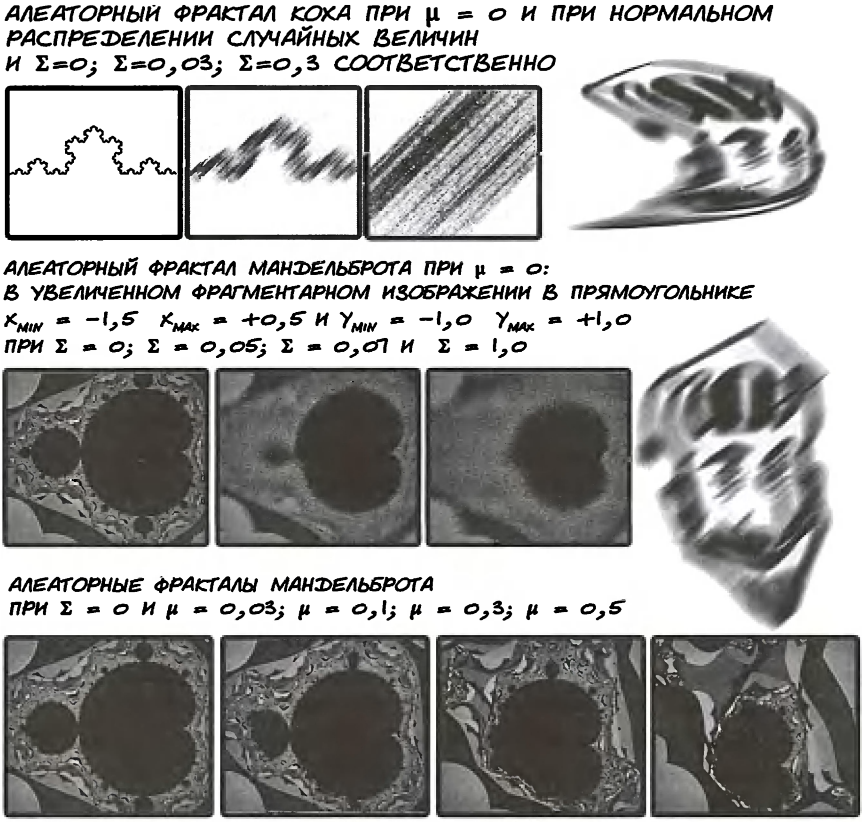
НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ПРЕДСТАВЛЕННОЕ КАК ГРАФИК ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРОЦЕНТ ПОПАДАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ НА ОТРЕЗКИ, РАВНЫЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМУ ОТКЛОНЕНИЮ. КАЖДАЯ ПОЛОСА ИМЕЕТ ШИРИНУ ОДНОГО СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

туации пренебрежимо малы, то они не исказят исходную форму сколько-нибудь заметным образом. Однако между этими двумя крайностями существует некоторая область, в которой незначительное изменение уровня внешнего воздействия приводит к радикальной трансформации геометрических форм, получаемых в процессе построения по одному и тому же алгоритму. Это открытие послужило основанием для того, чтобы выделить новое семейство фрактальных форм и обозначить его термином «алеаторные фракталы».

Итак, построение алеаторных фракталов сводится к построению любых фракталов, как линейных, так и нелинейных, по любому детерминированному алгоритму, включая СИФ-алгоритм, с тем отличием, что после каждой операции встроено обращение к генератору случайных чисел (оператору Random). В простейшем случае генератор производит возмущения, которые подчиняются нормальному распределению случайных величин, а их интенсивность характеризуется двумя параметрами – математическим ожиданием $\mu(x)$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma(x)$.

Математическое ожидание – число, вокруг которого сосредоточены значения случайной величины, а среднеквадратичное отклонение – мера рассеяния случайной величины от его математического ожидания.

Оба параметра – математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение внешних воздействий задаются до начала расчётов. В качестве примеров рассмотрим алеаторные кривые Коха и алеаторные фрак-



талы Мандельброта. Алеаторные фракталы Коха построены при $\mu = 0$. Расчёты показывают, что математическое ожидание не влияет на форму линейного фрактала, приводя только к смещению его относительно осей координат. Что же касается среднеквадратичного отклонения, то с увеличением рассеяния случайных возмущений форма фрактала Коха «размазывается и распыляется».

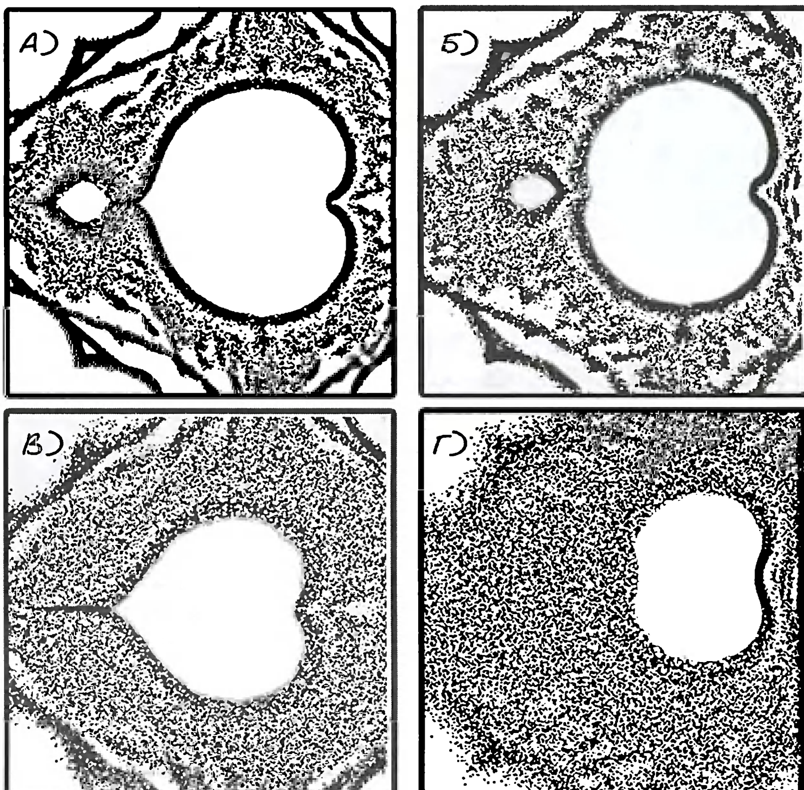
Построение фрактала Мандельброта производится по формуле

$$Z_n = Z_0^2 + C$$

с добавлением оператора Random по параметру C или по координатам точки Z. Необходимо отметить, что возмущающее воздействие по параметру перекрёстно влияет на действительную и мнимую части координат, а возмущающее воздействие на координаты точки Z имеет независимый и более грубый характер влияния на их значения. Результаты, полученные при $\mu = 0$, демонстрируют формирование асимметрии, сопутствующей размыванию привычной картинки Мандельброта.

Нами замечено, что, в отличие от линейного фрактала Коха, форма нелинейного фрактала Мандельброта чувствительна к величине математического ожидания, что отлично иллюстрируют алеаторные фракталы Мандельброта, приведённые на рисунке (на предыдущей странице).

Наконец, самый наглядный эффект влияния случайных возмущений на форму фрактала в целом показан на последнем рисунке. Здесь мы видим, что главные кардиоида и круг радикально изменяют свою форму при изменении случайного воздействия. Появляются совершенно новые формы – символы, напоминающие сердце, знак пик, знаки слияния и разделения.



АЛЕАТОРНЫЕ ФРАКТАЛЫ МАНДЕЛЬБРОТА, ПОЛУЧЕННЫЕ В ОБЛАСТИ $X_{MIN} = -1.5$; $X_{MAX} = 0.5$; $Y_{MIN} = -1$; $Y_{MAX} = 1$:
А) ВОЗДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА RANDOM ПО ПАРАМЕТРУ X ПРИ $\mu = 0.045$ И $\Sigma = 0.045$;
Б) ВОЗДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА RANDOM ПО ПАРАМЕТРУ Y ПРИ $\mu = 0.045$ И $\Sigma = 0.045$;
В) ВОЗДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА RANDOM ПО ПАРАМЕТРУ X ПРИ $\mu = 0.12$ И $\Sigma = 0.12$;
Г) ВОЗДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА RANDOM ПО ПАРАМЕТРУ Y ПРИ $\mu = 0.12$ И $\Sigma = 0.12$

ПО ТУ СТОРОНУ ЧУДЕСНОГО

Двадцатый век завершился, и настало время подвести его итоги и поговорить о чудесах. Разумеется, не того сорта, что предлагают шарлатаны-экстрасенсы и адепты сомнительной торсионной физики, а о настоящих научных чудесах. Есть такая отрасль знания, которая в принципе не терпит фальсификаций и шарлатанства, – это математика, самая строгая из всех наук, изобретённых человечеством. Строгая, даже суровая, но отнюдь не чуждая романтики и самых ярких проявлений гениальности.

Итак, двадцатое столетие завершилось. Как можно было бы его назвать? На слуху часто два определения: атомный век, космический век – но, если вдуматься, оба они неверны. Наши успехи в освоении космоса не очень впечатляют; прошло более пятидесяти лет с полёта Гагарина, но нет ни научной станции на Луне, ни корабля, способного унести людей к Венере и Марсу, ни орбитальных поселений, «эфирных городов» Циолковского. Кое-что мы получили – навигацию, наблюдения за погодой, связь через спутники, и это совсем немало. Немало, но и не очень много, если вспомнить ожидания шестидесятых–семидесятых годов, когда не только писатели-фантасты, но и серьёзные учёные толковали о скором освоении других планет. Но – увы! – мы, земляне, пока что не космическая раса.

Прогресс в атомных технологиях тоже не слишком велик. Самые впечатляющие эффекты относятся к применению атомного оружия, авариям на энергостанциях и субмаринах, и эти истории «от Хиросимы до Фукусимы», как выразился автор одноименной книги В. Сливяк, носят, безусловно, негативный характер. Что до позитива, то здесь нет глобальных достижений – имеются атомные энергоблоки, весьма опасные в эксплуатации, но получение энергии более эффективным и «чистым» способом, при помощи термоядерной установки, остаётся неосуществлённой мечтой. Хотя со времён первых токамаков прошло больше лет, чем с полёта Гагарина.

Безусловно, двадцатый век был веком электричества, радикально изменившего промышленное производство, транспорт, связь и быт миллиардов людей. Но, переступив порог нового века, мы обычно вспоминаем достижения последних двадцати-тридцати, максимум пятидесяти лет – то, чему мы были живыми свидетелями. Космонавтика и атомная энергетика?.. Отнюдь нет, при всей важности этих дисциплин в научном и практическом смыслах. Мы наблюдали и наблюдаем по сию пору другое, более мощное, более глобальное явление – информационный взрыв. Стоит припомнить, что первые электронно-вычислительные машины (ЭВМ), созданные в сороковых–пятидесятых годах, являются ровесниками начала атомных проектов и полётов в космос, но, в отличие от того и другого, прогресс в этой сфере воистину потрясает. Некогда ламповая или полупроводниковая ЭВМ занимала помещение площадью метров пятьдесят, её обслуживал десяток инженеров и техников, на ней решались сугубо математические задачи, и, конечно, такая установка принадлежала не частному лицу, а научной, военной или промышленной организации. Но этот электронный монстр стремительно прогрессировал, и теперь мы держим на ладони компьютер неизмеримо большей мощности, чем те первые М-20, БЭСМ-6, «Минск», «Эниак», «Юнивак», «Марк-1». Этот маленький компьютер умеет не только считать, но также обеспечивает связь, фиксирует изображения, позволяет читать книги и смотреть фильмы. Впечатляющий рывок, занявший всего половину века! Скачок в габаритах на три-четыре порядка, скачок в разнообразии функций, в простоте производства и обслуживания и, разумеется, в цене. Нет термоядерной энергостанции, нет поселений на Луне и флота космических кораблей, но есть небольшое устройство «компьютер-телефон-видеокамера-библиотека» и цена ему в твёрдой валюте долларов пятьсот. Если без изысков, можно купить и дешевле.

Не атомным и не космическим был двадцатый век, но информационным. Век компьютеров, век связи, век не знающей границ фантомной среды, всемирной паутины, получившей название Интернет. Этот невиданно быстрый прогресс породил множество мифов. Вот один из них: в начале пятидесятых в штате Нью-Мексико якобы потерпели крушение инопланетные космические аппараты. Эти НЛО, вместе с останками экипажей, перевезли на военную авиабазу Райт-Паттерсон в секретное хранилище «Ангар 18» и подвергли тщательному изучению. Все «инопланетные тайны» раскрыть не удалось, но кое в чём успех был достигнут – в частности, в исследовании материалов с необычными свойствами, которые можно использовать в информационных технологиях. Эти сведения будто бы обеспечили упомянутый выше бурный прогресс.

Забавная байка, но если отвлечься от сказочных историй, реальность преподнесёт более интригующие факты, почти неизвестные широкой публике. Дело в том, что в конце минувшего века в ряде отраслей знания, начиная от физики и биологии и кончая экономикой и общественными науками, сформировался новый взгляд на мир. Суть его в следующем. Прежде в расчётах сложных систем – например, волновых функций атомов, молекул и твёрдых тел – физики стремились описать изучаемый объект с помощью системы линейных уравнений. Для этого использовались различные аппроксимации, разложения в функциональные ряды и т. д., а смысл такой упрощённой модели состоял в том, что линейную систему, пусть даже очень высокого порядка, можно решить. Но природа принципиально «нелинейна», и мы видим это на каждом шагу. Течение жидкости и движение воздушных масс неламинарны, а, скорее, турбулентны; поверхности твёрдых тел не идеально гладкие, а шероховатые; листья, камни, снежинки, облака имеют выпуклости и вмятины, завитки, усики, шипы; погодные явления, взлёты и спады в экономике, функционирование живых организмов не описываются простыми циклическими процессами. Эти явления, как и великое множество других, хаотичны, и их зримым символом может служить флаг, который беспорядочно развевается на ветру. Более тонкое и точное их описание требует иных средств, чем линейная аппроксимация, и эти средства появились: фрактальная геометрия и нелинейная динамика, то есть теория хаоса.

Я не буду касаться истории вопроса, так как она изложена в книге С. Л. Деменка и в других изданиях – например, в книге Дж. Глейка «Хаос. Создание новой науки». Остановлюсь на самом понятии «фрактал». В простейшем случае это геометрический объект с эффектом самоподобия, внутренняя структура которого состоит из фрагментов, повторяющих в уменьшающемся масштабе исходную форму. Представим, что перед нами некий узор, имеющий вид завитка. Изучая его детальнее, мы выясним, что он слагается из таких же завитков, но меньшего размера; эти малые завитки состоят из ещё более меньших, меньшие – из крохотных, и так далее. Автор книги «Просто фрактал» пишет: «Где повторение, там и магия. Завораживающие, затягивающие внимание фрактальные формы повторяются в результате многократного повтора одного и того же алгоритма». И правда, магии хватает – чего стоит только одна терминология! Человек, хотя бы понаслышке знакомый с высшей математикой, вспомнит про интеграл, дифференциал, производную, но в данном случае объекты другие, с воистину чарующими названиями: «пыль Кантора», «снежинки Коха», «коврики» и «салфетки» Серпинского, «кривая дракона», «обезьянье дерево».

Взгляните на эти восхитительные формы, которые приводятся на страницах книги. Только современные компьютеры позволили получить их в явном виде, и в этом смысле фрактальная геометрия тоже является детищем информационного взрыва. С. Л. Деменок пишет о том, что некоторые гении прошлого интуитивно ощущали фрактальность мира, что отразилось в их творениях – полотнах Леонардо да Винчи, гравюрах Эшера, музыке Баха. Но между интуитивным и осознанным разница немалая, по времени иногда это целый век или несколько веков, и только в нашу эпоху гениальные прозрения можно выразить в точных алгоритмах. Что, разумеется, связано с развитием информационных технологий.

Собственно, Бенуа Мандельброт, создатель фрактальной геометрии, именно этими технологиями и занимался. Одна из главных проблем, возникающих при передаче сигналов в электрических цепях – например, в телефонных линиях, соединяющих компьютеры, – связана с искажением информации из-за шумов. Этот фактор, на первый взгляд совершенно случайный и хаотический, потребовал изучения искажающих информацию флуктуационных процессов. Работая в этой области (по заданию корпорации IBM), Мандельброт выяснил удивительную вещь: существует устойчивое отношение между промежутками «чистого» прохождения сигнала и периодами шумовых помех. С одной стороны, это позволило выбрать правильную стратегию создания «помехоустойчивых» алгоритмов, с другой, подвигло Мандельброта к дальнейшему исследованию хаотических процессов.

В этом он не был одинок, так как, начиная с семидесятых годов прошлого века, хаос и проблемы нелинейной динамики всё чаще привлекали внимание учёных различных специальностей – математиков, физиков, биологов, физиологов, экономистов. В этой связи уместно вспомнить Митчела Файгенбаума, Стивена Смэйла, Джеймса Йорка, Джона Хаббарда и почившего недавно Эдварда Лоренца, который первым наблюдал «эффект бабочки». Данный феномен, возникший при компьютерном моделировании атмосферных процессов, был назван «странным аттрактором Лоренца», и его связь с фрактальной геометрией рассмотрена в соответствующем разделе книги.

Подведем итог сказанному выше. С одной стороны, компьютеры и информационные технологии позволили вторгнуться в доселе неведомую область – в хаос. При этом выяснились удивительные вещи: то, что при ближайшем рассмотрении хаос не так уж хаотичен, и подобные явления можно в принципе анализировать; то, что нелинейные системы обладают несколькими устойчивыми состояниями; то, что поведение таких систем поддаётся прогнозированию; то, что фрактальность мира в равной степени питает науки и искусства, ибо узоры фракталов дают нам эстетическое удовольствие. С другой стороны, эта новая парадигма природы и творимых людьми артефактов, бесспорно, влияет на информационную науку – возможно, в большей степени, чем на другие отрасли знания. Информация, то есть упорядоченность, и хаос, мнимый беспорядок, – две стороны одной медали. На рубеже этих двух категорий, казалось бы, столь противоположных, нас, несомненно, ждут чудесные открытия.

Мне остаётся добавить, что книга «Просто фрактал» написана Сергеем Леонидовичем Деменком, математиком, который плодотворно работает в области фрактальной геометрии. Читатель найдёт в ней массу интересного, связанного не только с фракталами и порождающими их алгоритмами, но и с историей этой науки, с её творцами, гениями прошлого и нашими современниками. Несомненно, эта книга для пытливых умов, жаждущих истинных чудес, и я надеюсь, что таким читателям она доставит радость. Ибо что приятнее, чем познание нового?

М. С. Нахмансон (Михаил Ахманов),
кандидат физ.-мат. наук, писатель

БЛАГОДАРНОСТИ

Прежде всего, выражаю свою признательность родителям, поддержавшим меня в освоении языка математики. Это дало мне возможность без страха воспринимать информацию, изложенную на языке формул, который многие стараются избегать подобно тому, как избегают текстов на латыни. Надеюсь, что некоторые идеи мне удалось интерпретировать без использования математического языка, прежде всего в эссе, предваряющих каждую из трёх частей книги.

Этой книге было суждено появиться только благодаря поддержке моих близких, которые терпели моё «отсутствие» в кабинете по выходным дням, – моей жене Нине и моим детям – Ане, Кате и Алёше.

Все ссылки и комментарии в книге сделаны уважаемым редактором текста А. Д. Балабухой, т. к. автор не имел возможности принять участие в этой скрупулёзной работе в сетях Интернета. Автор признателен редактору за проделанный труд.

Работа могла и не приобрести окончательный вид без поддержки моих коллег и единомышленников – И. С. Калинина, Т. В. Ковалёвой, С. В. Мороза, А. В. Ефимова и М. С. Нахмансона, а также В. А. Яковлева и Т. С. Жмудь, которым я выражаю свою искреннюю признательность.

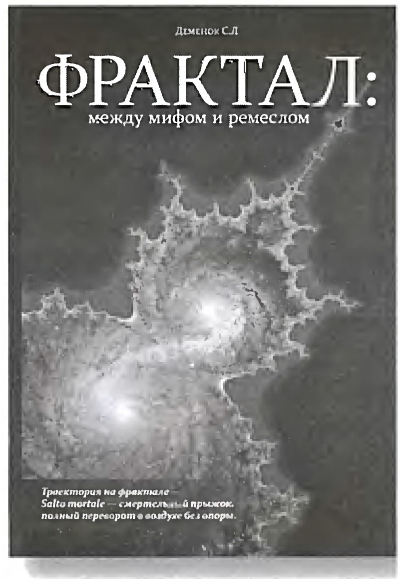
Сергей Деменок

СОДЕРЖАНИЕ

III. Мнимая лёгкость фрактальных форм

Деменок С. Л.
ФРАКТАЛ: между мифом и ремеслом.

СПб.: ООО «Ринвол», Академия исследования культуры, 2011. – 296 с.



Эта книга – воистину картина мира. Автор ярко и оригинально живописует наш мир, который складывается из элементарных частиц, но при этом не укладывается в голове. Структуры нашего мира глобальны, но фрагментарны, хаотичны, но геометричны, рациональны, но парадоксальны. В общем, они фрактальны.

Фрактал предстаёт в книге как парадигма, как та универсальная форма, которая обнаруживает себя повсюду и вбирает в себя всё – от древней гравюры до компьютерной графики, от квантовой механики до постмодернистской философии, от неравновесной термодинамики до игры на бирже. Книга о новой парадигме познания и творчества будет интересна и полезна тем интеллектуалам, чье занятие – выработка концептуальных решений и построение моделей на переднем крае науки, бизнеса, инжиниринга, управления.

Иванов Дмитрий Владиславович
доктор социологических наук, профессор СПбГУ

Диск CD-ROM, *который является приложением к данной книге, содержит программу* ***Фрактория™1.0.*** *Она создана для демонстрации фракталов, рассмотренных в книге «Фрактал: между мифом и ремеслом», а также для создания собственных, уникальных фракталов.*

По вопросам приобретения книг можно обращаться в издательство «СТРАТА» по адресу:
195112, Россия,Санкт-Петербург, Новочеркасский пр., дом 39, корпус 1, лит. А.
Тел/факс +7(812)528-68-71
www.strata.spb.ru E-mail: info@strata.spb.ru

Деменок Сергей Леонидович

ПРОСТО ФРАКТАЛ

Научно-популярное издание

**Иллюстрации
Ковалёвой Татьяны**

Директор издательства:
Калинин Игорь Сергеевич

Редактор:
Балабуха Андрей Дмитриевич

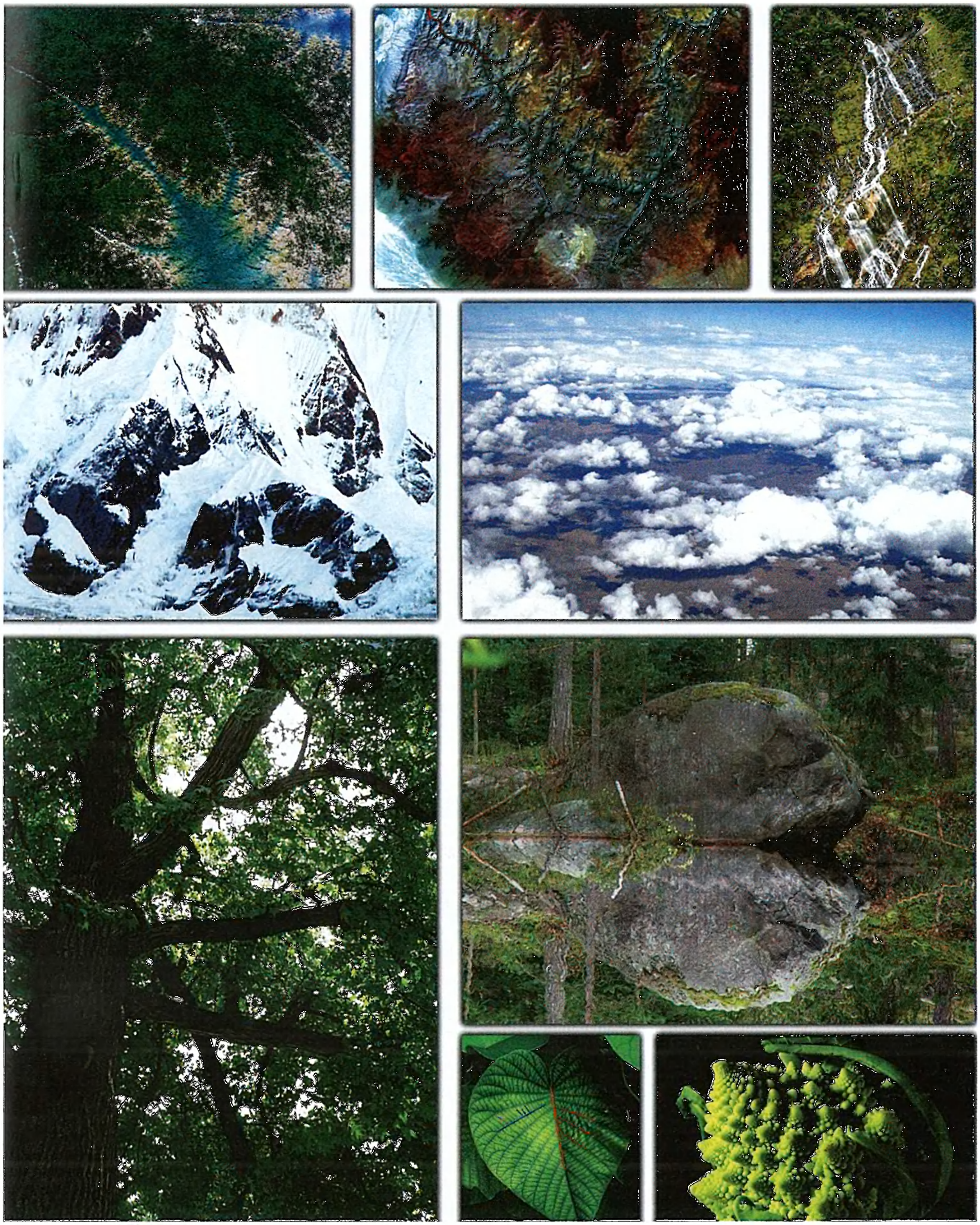
Корректор:
Муратова Ангелина Валерьевна

Верстка и допечатная подготовка:
Мороз Сергей Владимирович

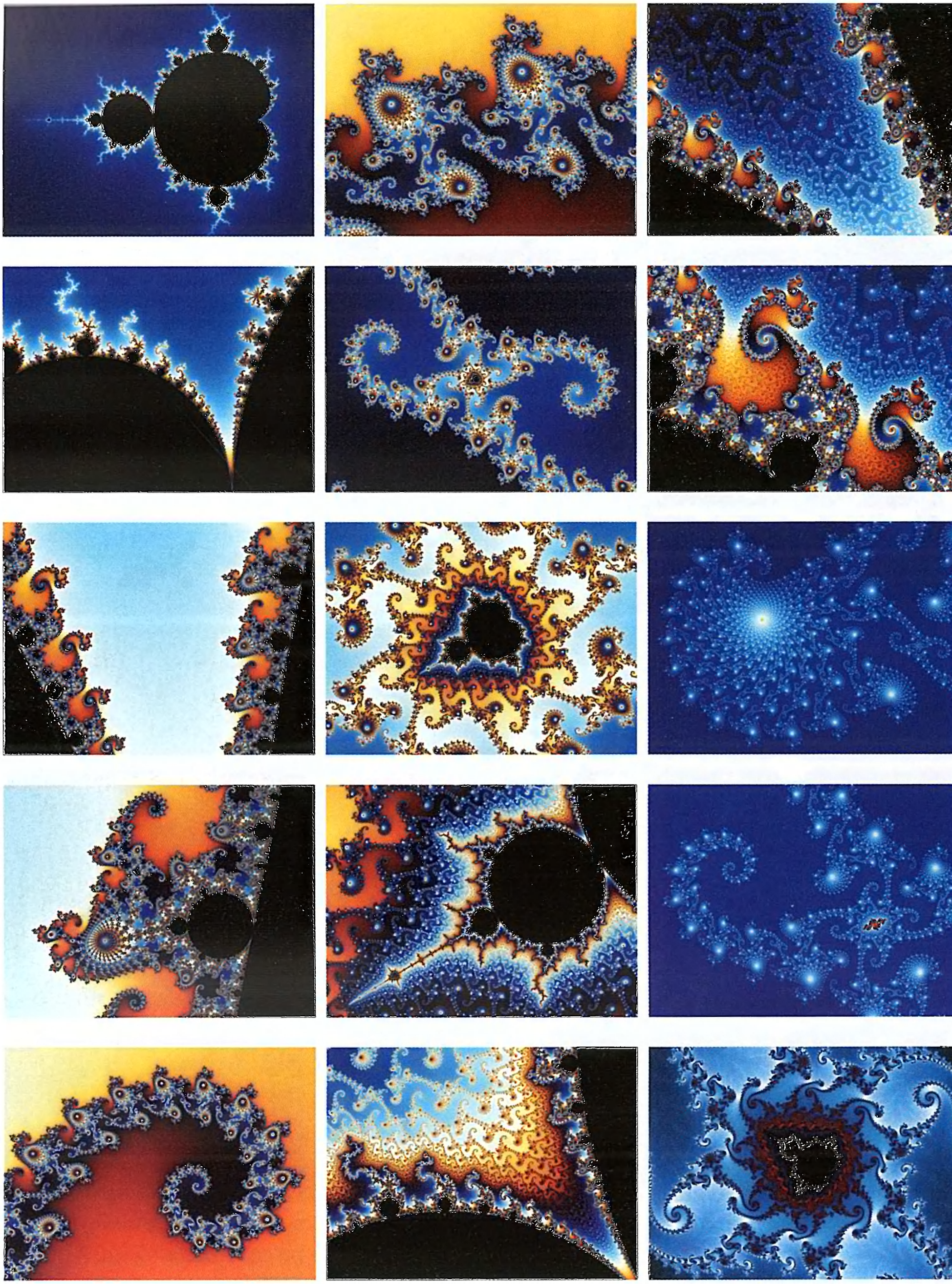
ООО «Страта»
195112, Санкт-Петербург,
Новочеркасский пр., д. 39, корп.1
Тел. /факс: +7 (812) 528-68-71
www.strata.spb.ru
E-mail: info@strata.spb.ru

Подписано в печать 4.10.2012. Формат 60 x 90 / 16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9.
Тираж 1000 экз. Заказ № 3324

Первая Академическая типография «НАУКА»
Санкт-Петербург, В. О., 9-я линия, д. 12/28
Тел. (812) 323-20-18

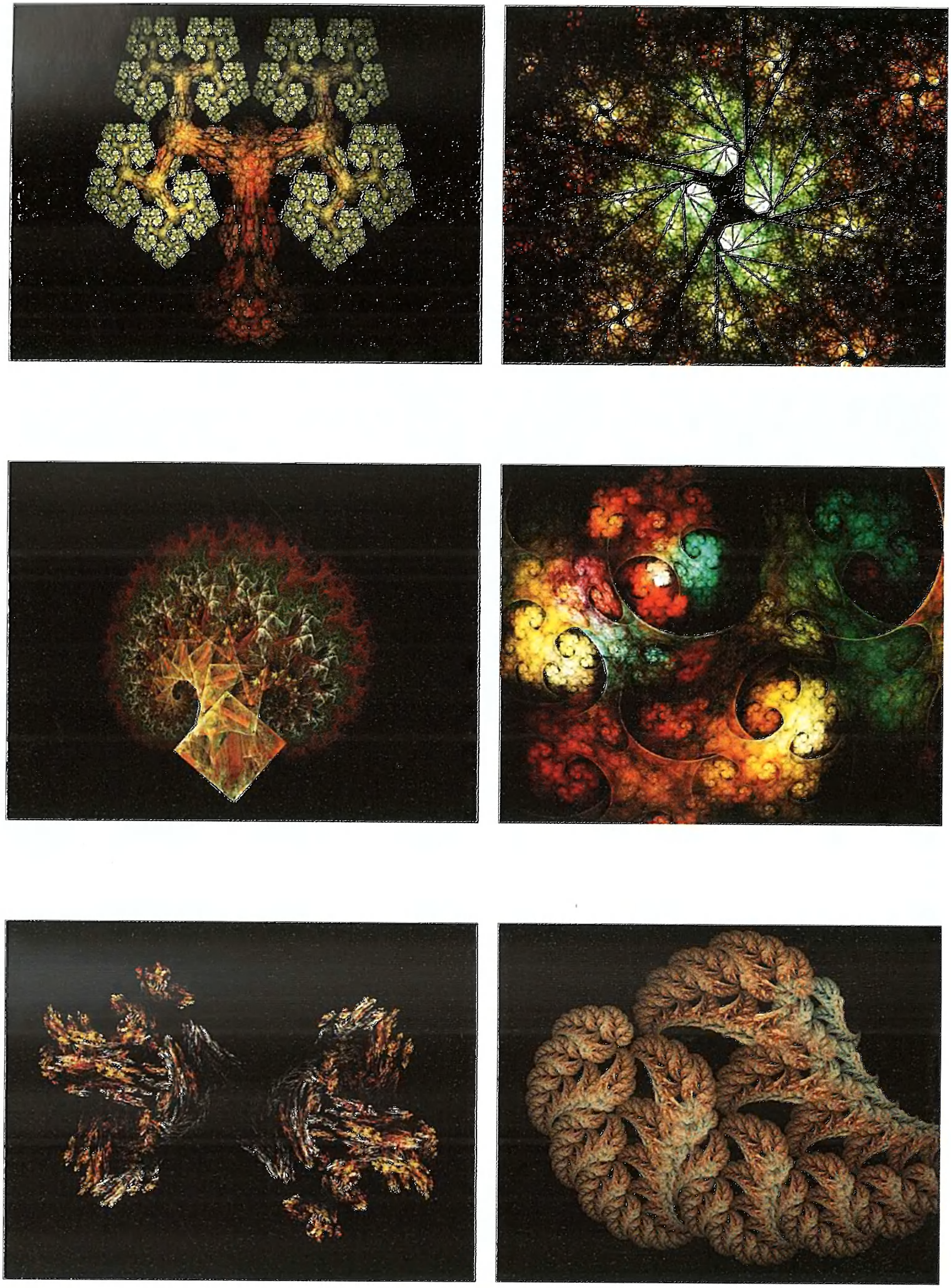


I. Фракталы в природе

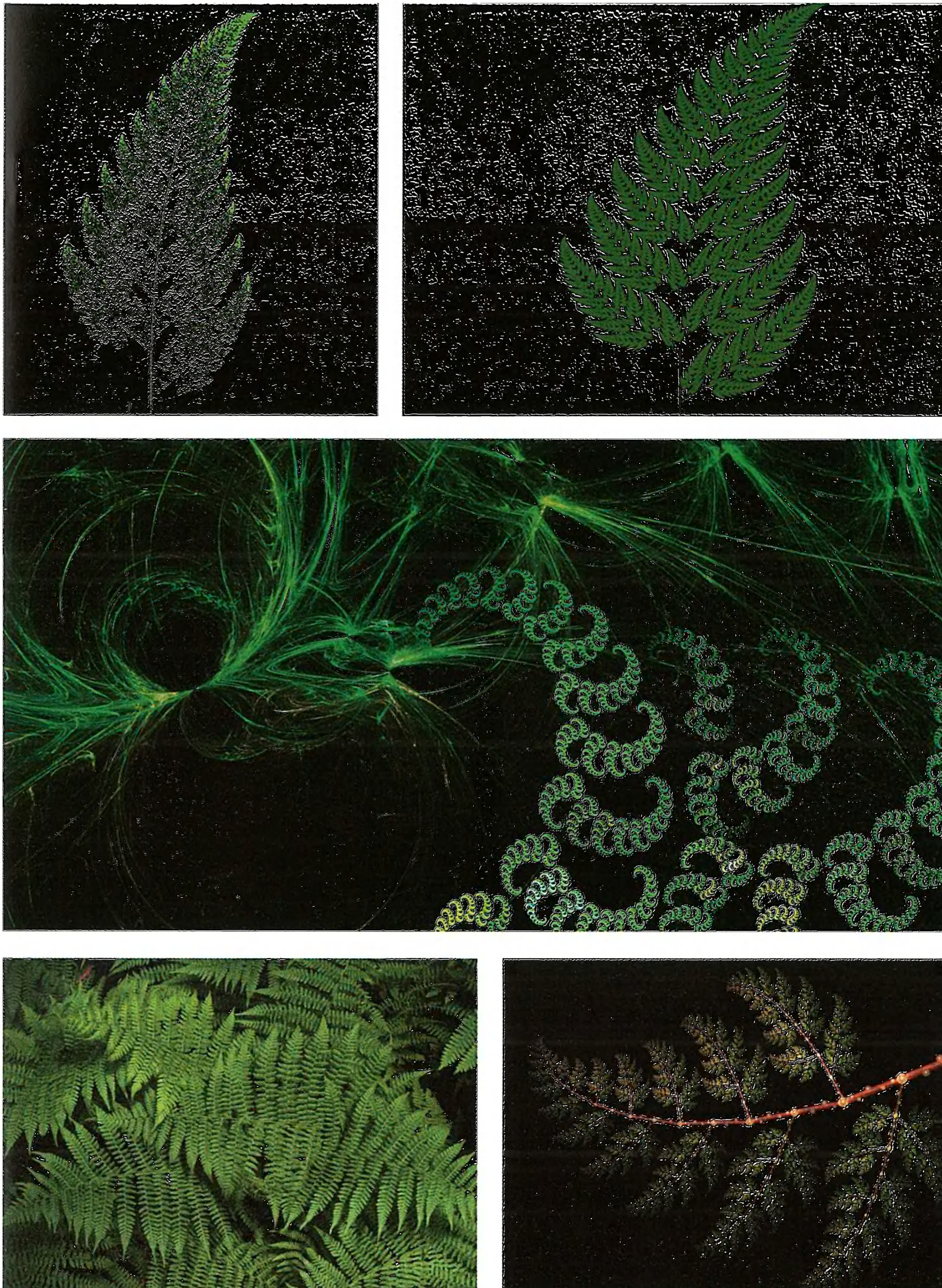


II. Фракталы Мальдельброта

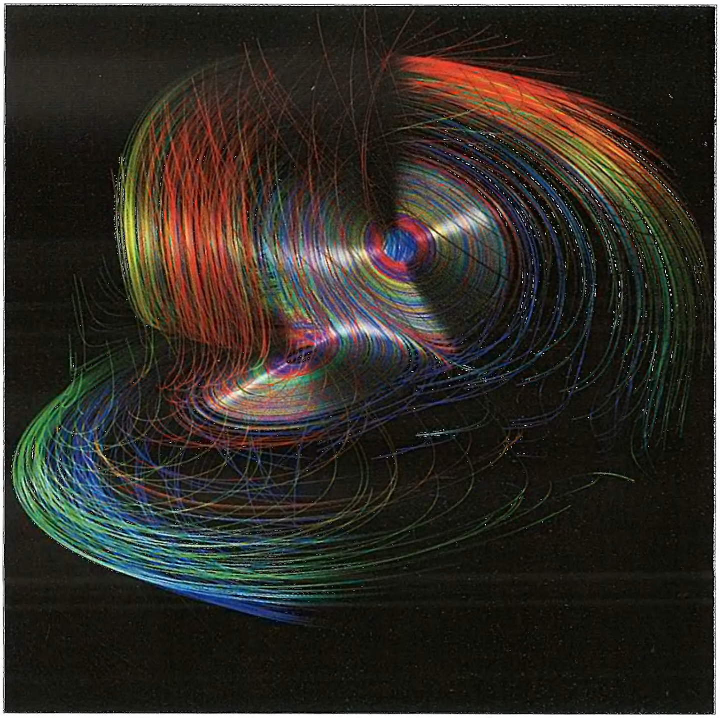
III. Фракталы Жюлиа

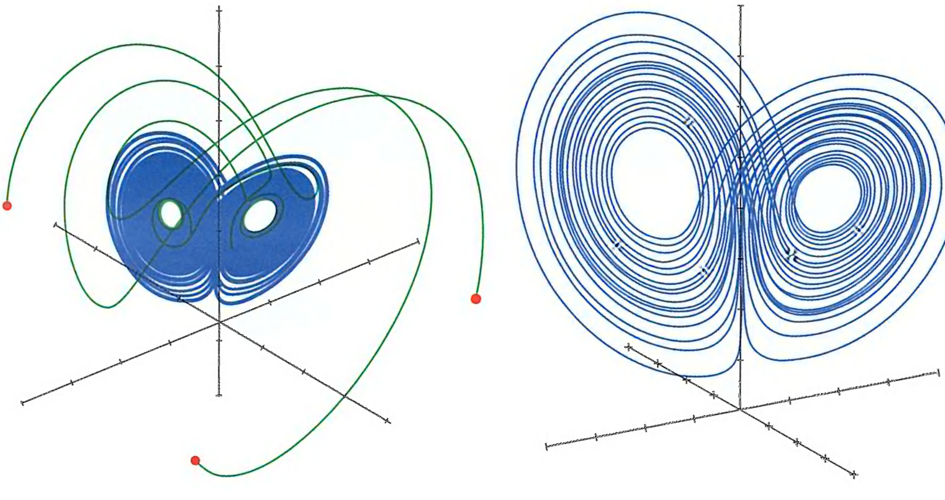


IV. Древовидные фракталы

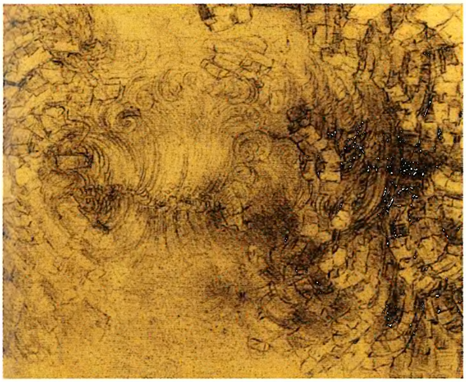


V. Фрактальные инсталляции «феерия папоротника»





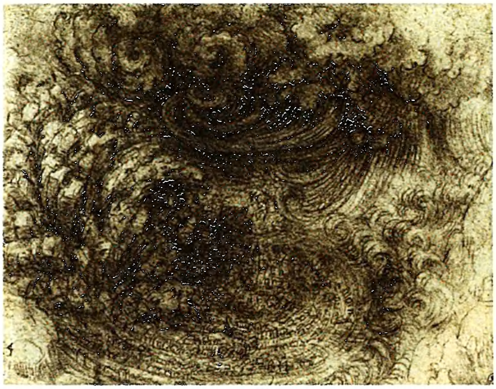
VI. Странный аттрактор «Бабочка Лоренца»



Вода, прорывающаяся сквозь скальную породу.
По Леонардо (Франческо Мельци?). Ок. 1515 г.
Итальянский карандаш. 152 × 205 мм.
Королевская библиотека,Виндзорский замок

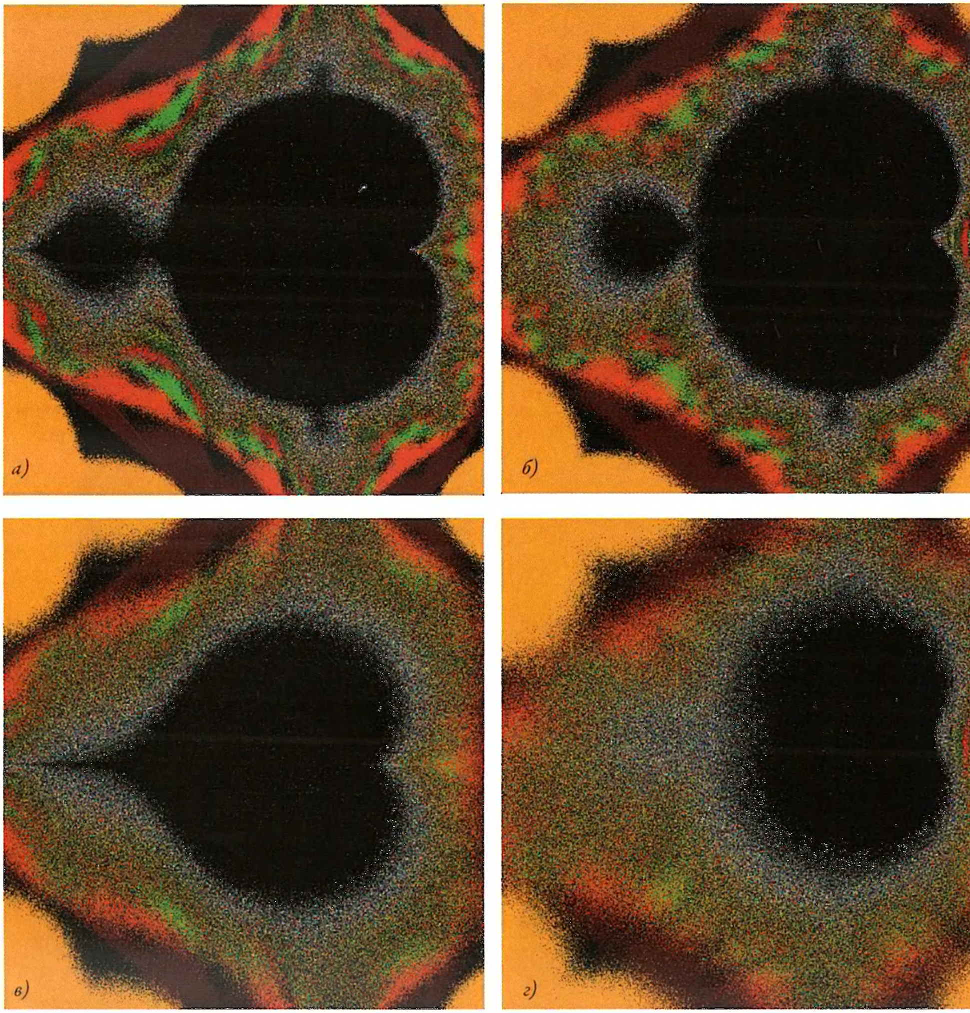
Взрыв горной породы, обусловленный прорывом подземных вод, волны на озере от падающих обломков. Ок. 1515 г. (?).
Перо, чернила двух цветов. Итальянский карандаш..
162 × 203 мм.
Королевская библиотека, Виндзорский замок

Потоп накрывает город на холме.
Ок. 1515 г.
Итальянский карандаш. 158 × 210 мм.
Королевская библиотека, Виндзорский замок



Ливень затапливает город.
Ок. 1508-1511 или ок. 1515 г.
Итальянский карандаш. 163 × 210мм.
Королевская библиотека, Виндзорский замок

VII. Леонардо да Винчи. Рисунки потопа



VIII. Алеаторные фракталы Мандельброта, полученные в области $X_{min} = -1{,}5$; $X_{max} = 0{,}5$; $Y_{min} = -1$; $Y_{max} = 1$:

а) воздействие оператора Random по параметру X при $\mu = 0{,}045$ и $\varsigma = 0{,}045$;
б) воздействие оператора Random по параметру Y при $\mu = 0{,}045$ и $\varsigma = 0{,}045$;
в) воздействие оператора Random по параметру X при $\mu = 0{,}12$ и $\varsigma = 0{,}12$;
г) воздействие оператора Random по параметру Y при $\mu = 0{,}12$ и $\varsigma = 0{,}12$