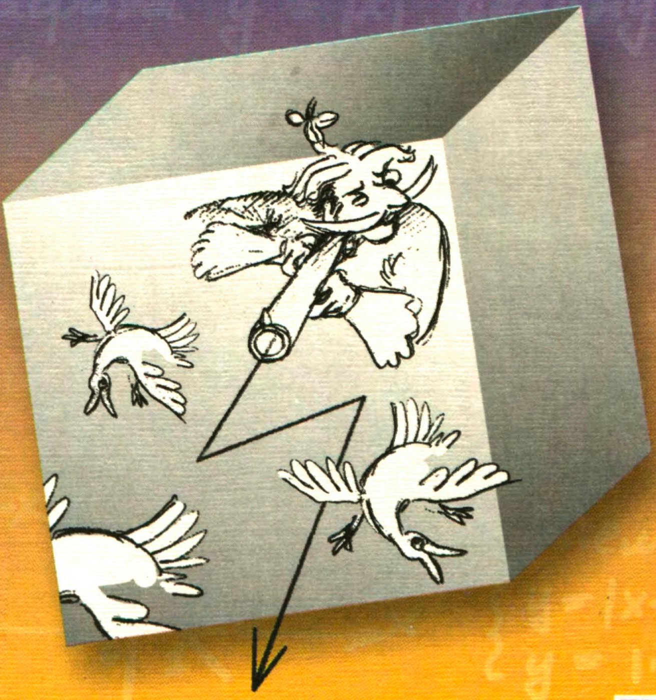
МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

Построение и преобразования графиков. Параметры

Часть 1. Линейные функции и уравнения



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Построение и преобразования графиков. Параметры

Часть 1. Линейные функции и уравнения

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

С.-Петербург
Москва
2014

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано
Московским институтом открытого образования (МИОО) и Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А.Х.
Ш32 Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения / А.Х. Шахмейстер — М. : Издательство МЦНМО : СПб. : «Петроглиф» : «Виктория плюс», 2014. — 176 с. : илл. — ISBN 978-5-4439-0105-3, ISBN 978-5-98712-212-9, ISBN 978-5-91673-109-5.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-4439-0105-3 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-212-9 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91673-109-5 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

6+

© Шахмейстер А.Х., 2014
© Дольник Е.В., обложка, 2014
© ООО «Петроглиф», 2014

Посвящается памяти Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 7-11 классов (32 урока).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий	Страницы
1–2	***Линейная функция.***	5–42
3–5	Теория.	5–12
	Самостоятельная работа 1	13
	Упражнения	
	Вариант 1 (1, 3). *Вариант 2* (2, 3)	
6–7	*Вариант 3*. *Вариант 4* (1, 2)	14–37
	Самостоятельная работа 2	
	Вариант 1 (4, 7, 8).	
8–9	*Вариант 2* (1, 4, 8).	38
	Самостоятельная работа 3	
	Вариант 1 (1, 3, 4, 6, 8, 13, 14).	
	Вариант 2 (3, 10, 11, 12, 15, 16).	39–42
10–11	**Уравнения прямых. Виды симметрии**	43–82
	Практикум 1 (1(a,b) 2, 3)	44–53
12–13	Практикум 2 (1, 2, 4 (частично))	54–59
14–15	Тренировочная работа 1 (1, 3, 6, 8(a), 9(a,b))	60–81
16–17	Самостоятельная работа 4 (1, 3, 4, 7 (частично))	82
18–20	**Кусочно-линейная функция**	83–127
	Примеры (1, 2, 4, 5, 7, 9, 10).	83–93
21–22	Анализ (1, 3, 4, 9, 10).	94–99
23–24	Тренировочная работа 2 (2, 3, 5).	100–108
25–26	Тренировочная работа 3	
	Вариант 1 (2 (частично), 3 (a,b), 4 (b), 6).	
	Вариант 2 (частично).	109–127
27–32	**Графики и параметры**	128-156
	Практикум 3 (1, 2(a), 3, 4, 6 (частично), 7 (a,b))	128-150
	Самостоятельная работа 5 *Вариант 2*	151-152
	Самостоятельная работа 6	
	Вариант 1 (1, 2 (b), 3)	153
	Самостоятельная работа 7 (4, 6, 7, 9)	154
	Самостоятельная работа 8 *Вариант 1*.	155

Программа разработана по материалам книги и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1 Линейная функция

График линейной функции

<u>Определение 1.</u>[1] Под функцией мы будем понимать такой закон или правило соответствия между элементами множеств A и B, по которому каждому элементу множества A соответствует вполне определенный элемент из множества B.

**<u>Определение 2.</u> Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют функциональному равенству $y = f(x)$, называется графиком функции,
т. е. $\Gamma\big(y = f(x)\big) = \{(x_0; y_0) \mid y_0 = f(x_0)\}$ (Γ — график).**

<u>Определение 3.</u> Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — конкретные заданные числа.

Так как прямая однозначно определяется двумя ее различными точками, то для построения графика функции $y = kx + b$ достаточно построить две точки графика (или указать их точные координаты).

Действительно, пусть $A\,(-2; 3) \in \Gamma(y = kx + b)$,
т. е. точка A принадлежит графику функции $y = kx + b$,
и $B\,(1; 4) \in \Gamma(y = kx + b)$.

[1] А. Х. Шахмейстер. Множества. Функции. Последовательности. СПб., М., 2008, 2014. С. 85–92.

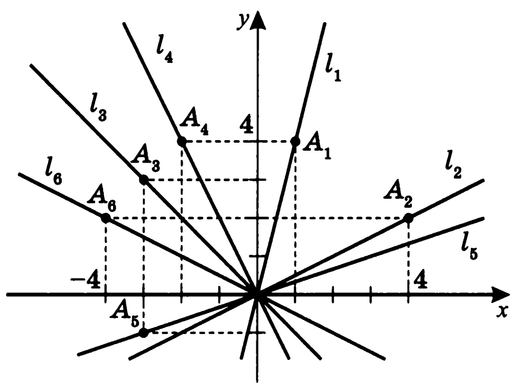
Тогда $\begin{cases} 3 = k\cdot(-2)+b \\ 4 = k\cdot 1 + b \end{cases}$; $\begin{cases} 3 = -2k+b \\ 4 = k+b \end{cases}$; $\begin{cases} b = 3+2k \\ b = 4-k \end{cases}$;

$(3+2k = 4-k)$; $\begin{cases} 3 = -2k+b \\ 1 = 3k \end{cases}$; $\begin{cases} b = 3\frac{2}{3} \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Значит, функция будет иметь вид: $\boxed{y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}}$.

Следовательно, двух точек, принадлежащих графику функции $y = kx+b$, достаточно для однозначного определения значений k и b.

Пример. Напишите уравнение графиков $y = kx$ ($y = kx + b$, где $b = 0$), данных на чертеже.



Решение.

а) $A_1\,(1;4) \in \Gamma(y = kx)$.

Подставляя координаты точки A_1 в уравнение прямой $y = kx$, получим $4 = k\cdot 1$; $k = 4$, т. е. $\boxed{l_1:\ y = 4x}$.

б) $A_2\,(4;2) \in \Gamma(y = kx)$.

Подставляя координаты точки A_2 в уравнение прямой $y = kx$, получим $2 = k\cdot 4$; $k = \frac{1}{2}$, т. е. $\boxed{l_2:\ y = \frac{1}{2}x}$.

в) $A_3\,(-3;3) \in \Gamma(y = kx)$.

Подставляя координаты точки A_3 в уравнение прямой $y = kx$, получим $3 = k\cdot(-3)$; $k = -1$, т. е. $\boxed{l_3:\ y = -x}$.

г) $A_4\,(-2;4) \in \Gamma(y = kx)$.

Подставляя координаты точки A_4 в уравнение прямой $y = kx$, получим

$4 = k\cdot(-2)$; $k = -2$, т. е. $\boxed{l_4 :\ y = -2x}$.

д) $A_5\,(-3;-1) \in \Gamma(y = kx)$.

Подставляя координаты точки A_5 в уравнение прямой $y = kx$, получим $-1 = k\cdot(-3)$; $k = \frac{1}{3}$, т. е. $\boxed{l_5 :\ y = \frac{1}{3}x}$.

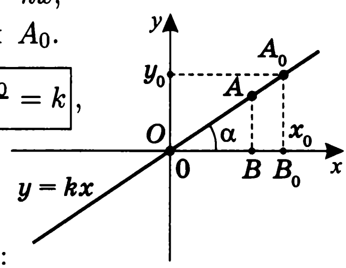
е) $A_6\,(-4;2) \in \Gamma(y = kx)$.

Подставляя координаты точки A_6 в уравнение прямой $y = kx$, получим $2 = k\cdot(-4)$; $k = -\frac{1}{2}$, т. е. $\boxed{l_6 :\ y = -\frac{1}{2}x}$.

Примечания

1. Для $y = kx$ $O\,(0;0) \in \Gamma(y = kx)$.
2. Пусть $A_0\,(x_0;y_0) \in \Gamma(y = kx)$.

Можно показать, что $k = \frac{y_0}{x_0}$ — угловой коэффициент для $y = kx$, независимый от выбора точки A_0.



$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{A_0B_0}{OB_0} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{kx_0}{x_0} = k},$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент[2].

Убедимся в этом на примерах:

а) $A_1\,(1;4)$; $k = \frac{4}{1} = 4$; г) $A_4\,(-2;4)$; $k = \frac{4}{-2} = -2$;

б) $A_2\,(4;2)$; $k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; д) $A_5\,(-3;-1)$; $k = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$;

в) $A_3\,(-3;3)$; $k = \frac{3}{-3} = -1$; е) $A_6\,(-4;2)$; $k = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

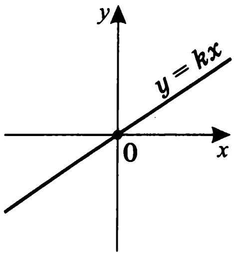
3. Тема отдельного разговора — это *доказательство* того, что любая прямая, непараллельная оси ординат, задается уравнением вида: $y = kx + b$.

---

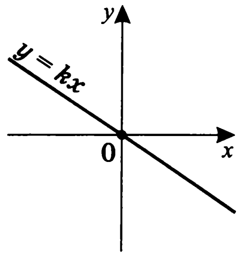
[2] А. Х. Шахмейстер. Планиметрия. СПб., М., 2011. С. 63, 64 и Тригонометрия, СПб., М., 2013. С. 18–19.

Графики линейных функций $y = kx + b$

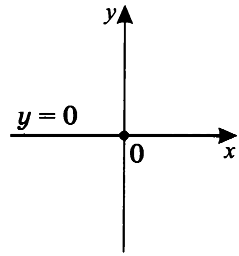
$k > 0;\ b = 0$



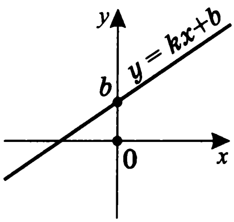
$k < 0;\ b = 0$



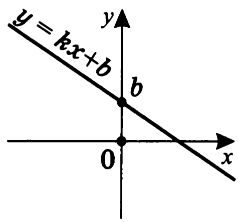
$k = 0;\ b = 0$



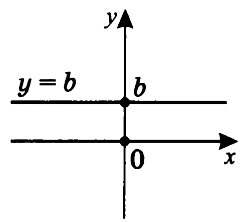
$k > 0;\ b > 0$



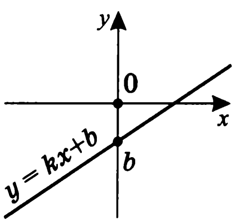
$k < 0;\ b > 0$



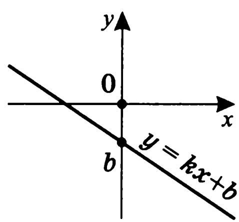
$k = 0;\ b > 0$



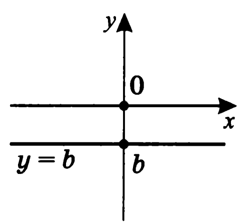
$k > 0;\ b < 0$



$k < 0;\ b < 0$

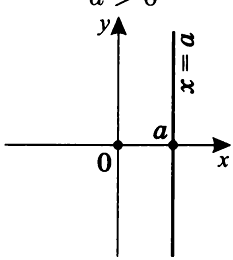


$k = 0;\ b < 0$

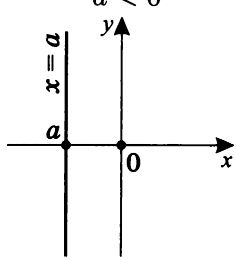


Графики уравнения $x = a$

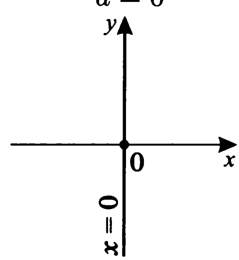
$a > 0$



$a < 0$



$a = 0$



Примечания

1. Необходимо отметить, что общий вид *любой* прямой, принадлежащей плоскости, определен в виде уравнения $\boxed{mx + ny + c = 0}$ при $m^2 + n^2 \neq 0$.

   а) При $\begin{cases} n = 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$ $x = -\frac{c}{m}$ (прямая параллельна Oy).
   В этом случае $mx + ny + c = 0$ функциональным соответствием не является.

   б) При $\begin{cases} n \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$ $y = -\frac{m}{n}x - \frac{x}{n}$; полагая $-\frac{m}{n} = k$, $-\frac{c}{n} = b$, получим привычный вид $y = kx + b$, причем прямая вида $y = kx + b$ всегда непараллельна оси Oy.

   в) При $\begin{cases} m = 0 \\ n \neq 0 \end{cases}$ $y = -\frac{c}{n}$ (прямая параллельна Ox).

2. Если у прямых $f(x) = k_1x + b_1$ и $g(x) = k_2x + b_2$:

   а) $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются;

   б) $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны;

   в) $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают (параллельны).

3. Наглядное правило: если «идти» по графику функции слева направо (по стрелке направления оси Ox), то если мы при этом поднимаемся вверх, то функция возрастающая, а если опускаемся вниз — убывающая.

4. Тогда прямые l_1, l_2 и l_5 из примера — графики возрастающих функций, а прямые l_3, l_4 и l_6 — графики убывающих функций.

5. Отметим, что при $k > 0$ функция $y = kx + b$ — возрастающая, а при $k < 0$ — убывающая, независимо от b.

6. График прямой $y = kx$ иногда называют *графиком прямой пропорциональности*, а число k — *коэффициентом пропорциональности*.

Уравнение $y = kx$

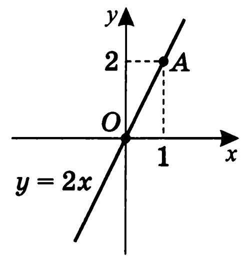
Рассмотрим построение графиков функции $y = kx$ при различных значениях k.

Возьмем для примера $k = 2$; $k = \frac{1}{2}$; $k = -3$ и $k = -\frac{1}{3}$.

1. $k = 2$; $y = 2x$.

   Составим таблицу значений:

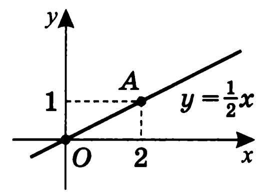
x	y	Координаты точек
1	2	$A(1;2)$
0	0	$O(0;0)$



   Построим по двум точкам график $y = 2x$.

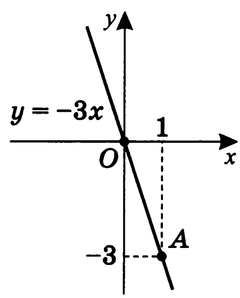
2. $k = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x$.

x	y	Координаты точек
2	1	$A(2;1)$
0	0	$O(0;0)$



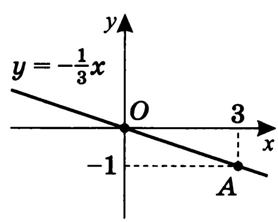
3. $k = -3$; $y = -3x$.

x	y	Координаты точек
1	-3	$A(1;-3)$
0	0	$O(0;0)$



4. $k = -\frac{1}{3}$; $y = -\frac{1}{3}x$.

x	y	Координаты точек
3	-1	$A(3;-1)$
0	0	$O(0;0)$



Примечания

1. Обратите внимание, график функции $y = kx$ *всегда* проходит через точку начала координат.
2. Значения x и y подбираем для удобства так, чтобы это были одновременно целые числа.

Уравнение $kx = a$

Рассмотрим уравнение $kx = a$.

1. Если $\begin{cases} k = 0 \\ a = 0 \end{cases}$, уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, т. е. $0 = 0$ — истина.

   Значит, любое x ($\forall x$) есть решение уравнения.

2. Если $\begin{cases} k = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$, уравнение принимает вид $0 \cdot x = a$, т. е. $0 = a \neq 0$ — ложь.

   Значит, решения нет (нет корней уравнения).

3. если $\begin{cases} k \neq 0 \\ a \text{ — любое} \end{cases}$, тогда $x = \frac{a}{k}$, т. е. существует единственное решение уравнения.

Можно отметить, что при этом:

если $\begin{cases} k > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} k < 0 \\ a < 0 \end{cases}$, то $x > 0$;

если $\begin{cases} k > 0 \\ a < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} k < 0 \\ a > 0 \end{cases}$, то $x < 0$;

если $\begin{cases} a = 0 \\ k \text{ — любое} \end{cases}$, то $x = 0$.

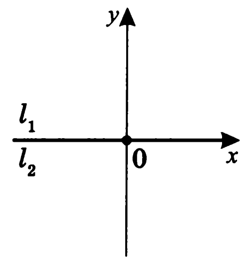
Геометрическая интерпретация решения уравнения $kx = a$

Уравнение можно рассматривать как равенство двух функций, $y = kx$ и $y = a$, а нахождение корней есть нахождение абсцисс точек пересечения их графиков, представляющих из себя прямые l_1 и l_2.

1. $\begin{cases} k = 0 \\ a = 0 \end{cases}$,

   тогда $l_1: \ y = 0, \ l_2: \ y = 0.$

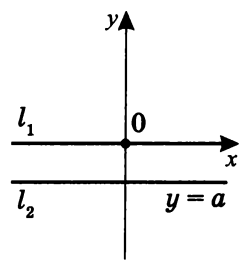
   Две прямые l_1 и l_2 сливаются в одну, значит, есть бесконечное множество решений.



2. $\begin{cases} k = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$,

   тогда $l_1: \ y = 0, \ l_2: \ y = a \neq 0.$

   Две прямые l_1 и l_2 параллельны, значит, нет общих точек, и решений нет.

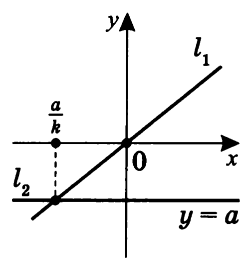


3. $\begin{cases} k \neq 0 \\ a \text{ — любое} \end{cases}$,

   тогда прямые l_1 и l_2 пересекаются.

   Значит, существует единственное решение $x = \frac{a}{k}$.

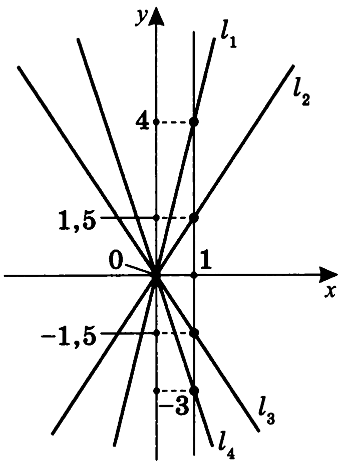
   На данном рисунке $k > 0$, но можно иллюстрировать решение при любых знаках k и a.



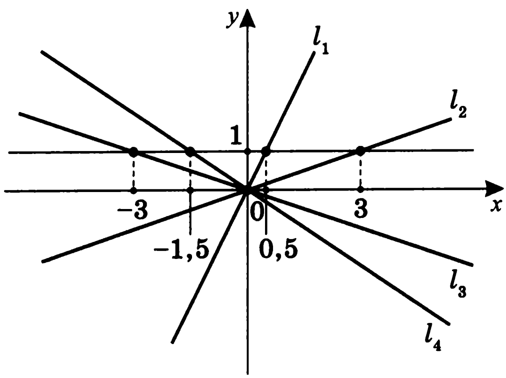
Самостоятельная работа 1

Даны графики прямых вида $y = kx + b$. Определите значения k и b для прямых l_1, l_2, l_3 и l_4.

1.



2.



Упражнения

Вариант I

1. Постройте график функций вида $y = kx + b$, заданных таблицей:

$k \setminus b$	-1	2	-3	4
2	l_1	l_2	l_3	l_4
-3	l_5	l_6	l_7	l_8
4	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
-1	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}

l_1: $y = 2x - 1$; l_{10}: $y = 4x + 2$;
l_7: $y = -3x - 3$; l_{16}: $y = -x + 4$.

2. Сравните графики функций и укажите их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек:

а) 1. l_5: $y = -3x - 1$ и l_5': $y = -3x$;
l_{13}: $y = -x - 1$ и l_{13}': $y = -x$.

2. l_5 и l_{13}.

б) l_9: $y = 4x - 1$ и l_{12}: $y = 4x + 4$.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми l_2; l_6; l_3; l_7.

б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.

в) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного данными прямыми.

Вариант II

1. Постройте график функций вида $y = kx + b$, заданных таблицей:

$k \setminus b$	-1	2	-3	4
2	l_1	l_2	l_3	l_4
-3	l_5	l_6	l_7	l_8
4	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
-1	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}

l_5: $y = -3x - 1$; l_{14}: $y = -x + 2$;
l_{11}: $y = 4x - 3$; l_4: $y = 2x + 4$.

2. Сравните графики функций и укажите их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек:

а) 1. l_2: $y = 2x + 2$ и l'_2: $y = 2x$;
l_{10}: $y = 4x + 2$ и l'_{10}: $y = 4x$.

2. l_2 и l_{10}.

б) l_7: $y = -3x - 3$ и l_6: $y = -3x + 2$.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми l_1; l_4; l_5; l_8.

б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.

в) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного данными прямыми.

Вариант III

1. Постройте график функций вида $y = kx + b$, заданных таблицей:

$k \backslash b$	-1	2	-3	4
2	l_1	l_2	l_3	l_4
-3	l_5	l_6	l_7	l_8
4	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
-1	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}

l_9: $y = 4x - 1$; l_2: $y = 2x + 2$;
l_{15}: $y = -x - 3$; l_8: $y = -3x + 4$.

2. Сравните графики функций и укажите их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек:

а) 1. l_3: $y = 2x - 3$ и l'_3: $y = 2x$;
l_{11}: $y = 4x - 3$ и l'_{11}: $y = 4x$.

2. l_3 и l_{11}.

б) l_4: $y = 2x + 4$ и l_1: $y = 2x - 1$.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми l_9; l_{12}; l_{13}; l_{16}.

б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.

в) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного данными прямыми.

Вариант IV

1. Постройте график функций вида $y = kx + b$, заданных таблицей:

$k \setminus b$	-1	2	-3	4
2	l_1	l_2	l_3	l_4
-3	l_5	l_6	l_7	l_8
4	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
-1	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}

l_3: $y = 2x - 3$; l_{12}: $y = 4x + 4$;
l_{13}: $y = -x - 1$; l_6: $y = -3x + 2$.

2. Сравните графики функций и укажите их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек:

а) 1. l_8: $y = -3x + 4$ и l'_8: $y = -3x$;
l_{16}: $y = -x + 4$ и l'_{16}: $y = -x$.

2. l_8 и l_{16}.

б) l_{15}: $y = -x - 3$ и l_{14}: $y = -x + 2$.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми l_{10}; l_{14}; l_{11}; l_{15}.

б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.

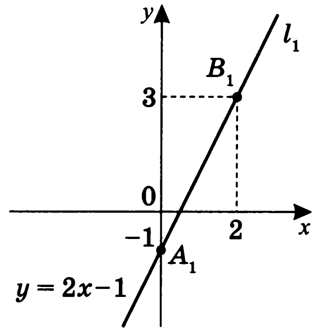
в) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного данными прямыми.

Решение упражнений

Вариант I

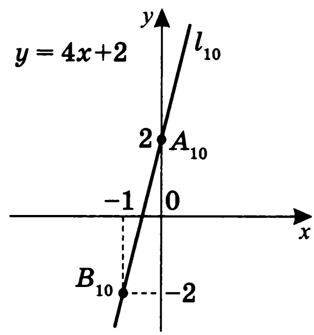
1. $l_1: \ y = 2x - 1.$

x	y	Координаты точек
0	-1	$A_1\,(0; -1)$
2	3	$B_1\,(2; 3)$



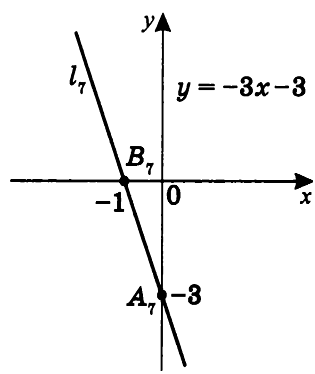
$l_{10}: \ y = 4x + 2.$

x	y	Координаты точек
0	2	$A_{10}\,(0; 2)$
-1	-2	$B_{10}\,(-1; -2)$



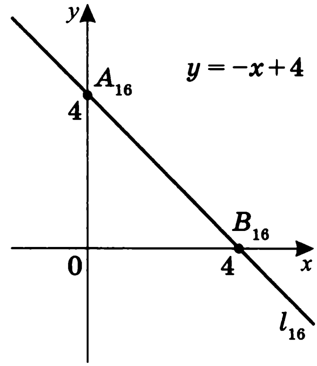
$l_7: \ y = -3x - 3.$

x	y	Координаты точек
0	-3	$A_7\,(0; -3)$
-1	0	$B_7\,(-1; 0)$



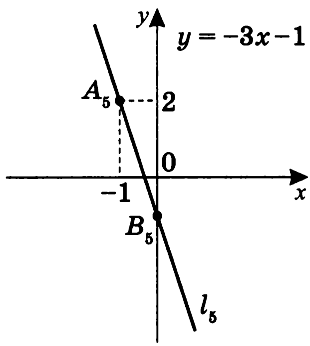
$l_{16}: \ y = -x + 4.$

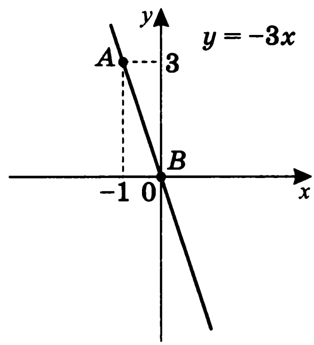
x	y	Координаты точек
0	4	$A_{16}\,(0; 4)$
4	0	$B_{16}\,(4; 0)$



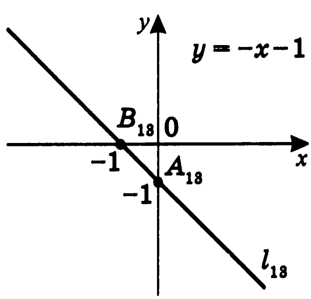
2. Сравним графики функций и укажем их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек.

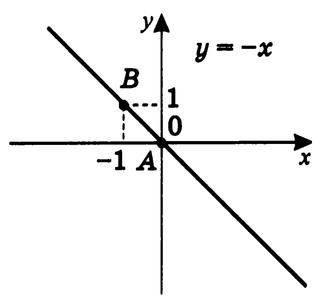
а) l_5: $y = -3x - 1$; $\quad l'_5$: $y = -3x$.





l_{13}: $y = -x - 1$; $\quad l'_{13}$: $y = -x$.

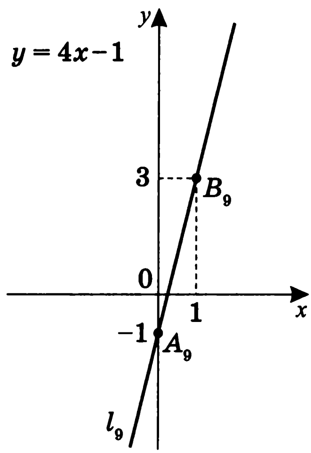


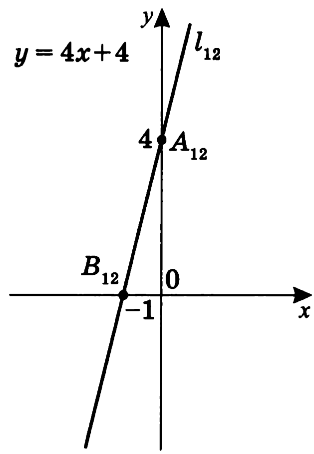


Первое: график $y = -3x - 1$ получен параллельным переносом графика $y = -3x$ вниз на единицу, так как у них один и тот же угловой коэффициент $k = -3$, а b отличается на единицу. Аналогично график $y = -x - 1$ — получен параллельным переносом графика $y = -x$ вниз на единицу.

Второе: очевидно, что оба графика прямых l_5 и l_{13} проходят через точку с координатами $(0; -1)$.

б) $l_9: \ y = 4x - 1$; $\quad l_{12}: \ y = 4x + 4$.





Первое: очевидно, что оба графика параллельны $(k = 4)$.

Второе: относительно друг друга они сдвинуты параллельным переносом на 5 единиц (вверх или вниз в зависимости от прямой отсчета).

Примечания

1. Графики прямых l_5, l_{13}, l_9 и l_{12} построены (см., соответственно, варианты II, IV, III и IV) на страницах 23, 33, 28, 33.
2. $y = -3x - 1$ — убывающая функция;
   $y = -x - 1$ — убывающая функция;
   $y = 4x + 4$ — возрастающая функция;
   $y = 4x - 1$ — возрастающая функция.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми l_2, l_6, l_3 и l_7.

б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.

в) Вычислите площадь такого четырехугольника.

Для построения четырехугольника найдем точки пересечения данных прямых:

$$l_2: \ y = 2x + 2,$$
$$l_6: \ y = -3x + 2,$$
$$l_3: \ y = 2x - 3,$$
$$l_7: \ y = -3x - 3.$$

$$l_2 \cap l_6: \quad \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -3x + 2 \end{cases}; \quad 2x + 2 = -3x + 2,$$

тогда $x = 0$, $y = 2$,

т. е. $B\,(0; 2)$ — общая точка прямых l_2 и l_6.

$$l_6 \cap l_3: \quad \begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}; \quad -3x + 2 = 2x - 3,$$

тогда $x = 1$, $y = -1$,

т. е. $C\,(1; -1)$ — общая точка l_6 и l_3.

$$l_3 \cap l_7: \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -3x - 3 \end{cases}; \quad 2x - 3 = -3x - 3,$$

тогда $x = 0$, $y = -3$,

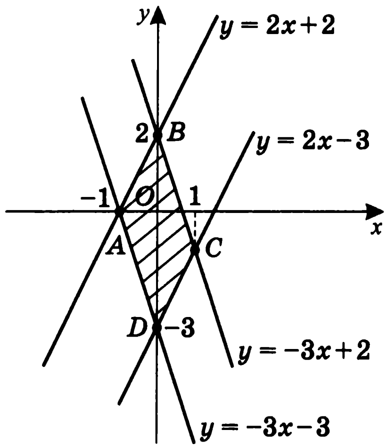
т. е. $D\,(0; -3)$ — общая точка l_3 и l_7.

$$l_2 \cap l_7: \quad \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -3x - 3 \end{cases}; \quad 2x + 2 = -3x - 3,$$

тогда $x = -1$, $y = 0$,

т. е. $A\,(-1; 0)$ — общая точка l_2 и l_7.

а)



б) Очевидно, что $BD = 5$ — наибольшая диагональ.

в) $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = 2S_{\triangle ABD}$;

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AO$; $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2{,}5$ кв. ед.

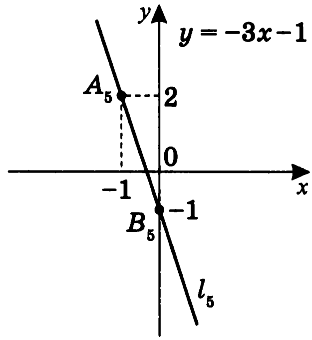
Тогда $\boxed{S_{ABCD} = 5}$.

Примечание. Очевидно, что модуль абсцисс точек A и C равен высоте $\triangle ABD$ и $\triangle CDB$.

Вариант II

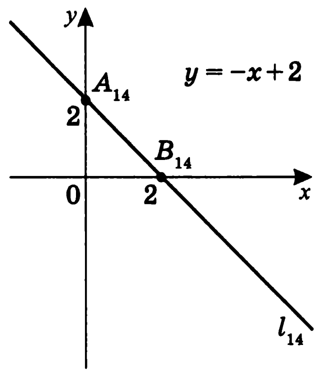
1. $l_5: \; y = -3x - 1.$

x	y	Координаты точек
-1	2	$A_5\,(-1; 2)$
0	-1	$B_5\,(0; -1)$



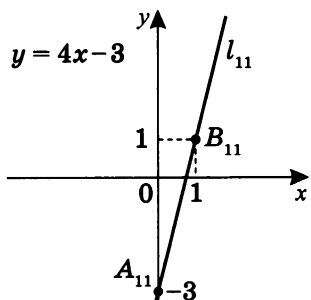
$l_{14}: \; y = -x + 2.$

x	y	Координаты точек
0	2	$A_{14}\,(0; 2)$
2	0	$B_{14}\,(2; 0)$



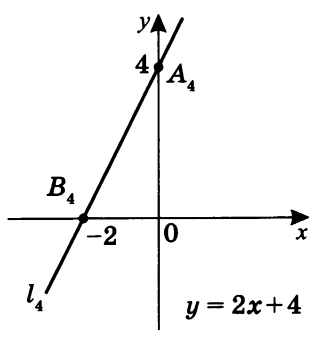
$l_{11}: \; y = 4x - 3.$

x	y	Координаты точек
0	-3	$A_{11}\,(0; -3)$
1	1	$B_{11}\,(1; 1)$



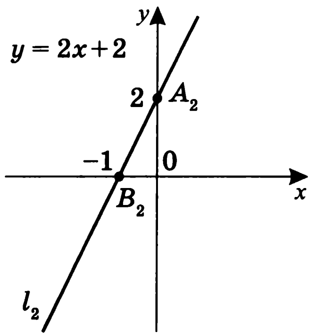
$l_4: \; y = 2x + 4.$

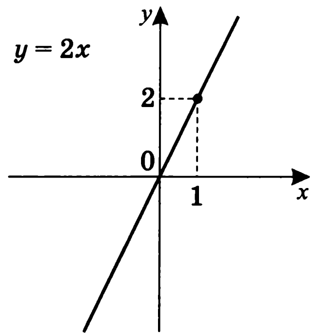
x	y	Координаты точек
0	4	$A_4\,(0; 4)$
-2	0	$B_4\,(-2; 0)$



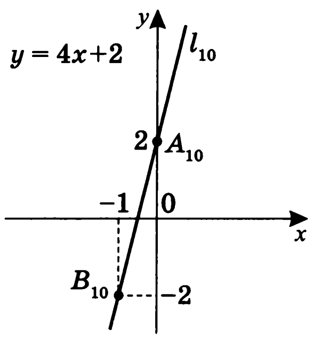
2. Сравним графики функций и укажем их взаимное расположение с точки зрения их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек.

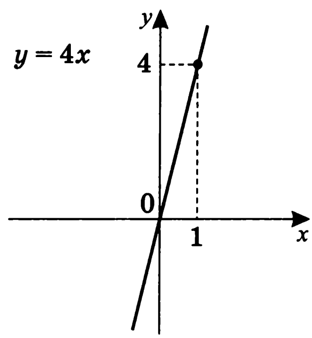
а) l_2: $y = 2x + 2$ и l'_2: $y = 2x$.





l_{10}: $y = 4x + 2$ и l'_{10}: $y = 4x$.

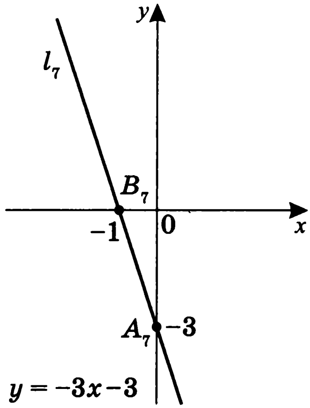


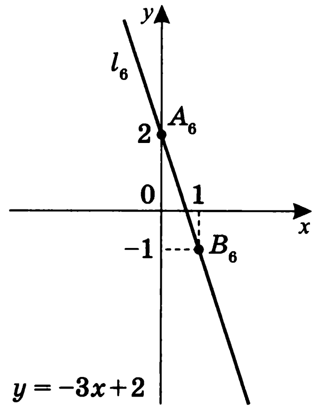


Первое: график $y = 2x + 2$ получен параллельным переносом графика $y = 2x$ вверх на две единицы, так как у них один и тот же угловой коэффициент $k = 2$, а b отличается на 2. Аналогично график $y = 4x + 2$ получен параллельным переносом графика $y = 4x$ на две единицы вверх ($k = 4$).

Второе: очевидно, что оба графика — $y = 2x + 2$ и $y = 4x+2$ — проходят через точку с координатами $(0; 2)$.

б) $l_7: \; y = -3x - 3; \qquad l_6: \; y = -3x + 2.$





Первое: очевидно, что оба графика параллельны, так как у них один и тот же угловой коэффициент $k = -3$.

Второе: относительно друг друга они сдвинуты параллельным переносом на 5 единиц (вверх или вниз, зависит от прямой отсчета).

Примечания

1. Графики прямых l_2, l_{10}, l_7 и l_6 построены (см., соответственно, варианты III, I, I и IV) на страницах 28, 18, 18, 34.

2. $y = 2x + 2$ — возрастающая функция;

   $y = 4x + 2$ — возрастающая функция;

   $y = -3x - 3$ — убывающая функция;

   $y = -3x + 2$ — убывающая функция.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми l_1, l_4, l_{15} и l_8.

б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.

в) Вычислите площадь такого четырехугольника.

Для построения четырехугольника найдем точки пересечения данных прямых:

$l_1: \ y = 2x - 1,$
$l_4: \ y = 2x + 4,$
$l_5: \ y = -3x - 1,$
$l_8: \ y = -3x + 4.$

$l_1 \cap l_5$: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$; $\quad 2x - 1 = -3x - 1,$

тогда $x = 0$, $y = -1$,

т. е. $B\,(0; -1)$ — общая точка прямых l_1 и l_5.

$l_4 \cap l_5$: $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$; $\quad 2x + 4 = -3x - 1,$

тогда $x = -1$, $y = 2$,

т. е. $C\,(-1; 2)$ — общая точка прямых l_4 и l_5.

$l_1 \cap l_8$: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$; $\quad 2x - 1 = -3x + 4,$

тогда $x = 1$, $y = 1$,

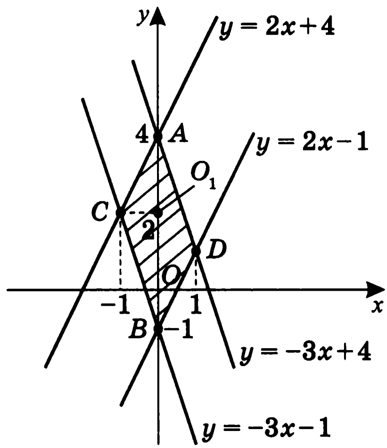
т. е. $D\,(1; 1)$ — общая точка прямых l_1 и l_8.

$l_4 \cap l_8$: $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$; $\quad 2x + 4 = -3x + 4,$

тогда $x = 0$, $y = 4$,

т. е. $A\,(0; 4)$ — общая точка прямых l_4 и l_8.

а)



б) Очевидно, что $AB = 5$ — наибольшая диагональ.

в) $S_{ACBD} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle BDA} = 2S_{\triangle ACB}$;

$S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}AB \cdot CO_1$; $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2{,}5$ кв. ед.

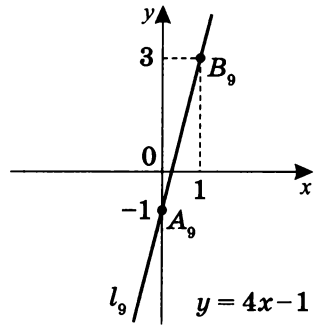
Тогда $\boxed{S_{ACBD} = 5}$.

Примечание. Очевидно, что модуль абсцисс точек C и D равен высоте $\triangle ACB$ и $\triangle BDA$.

Вариант III

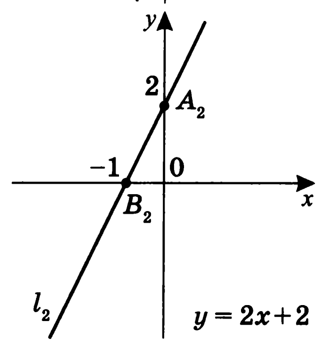
1. $l_9: \ y = 4x - 1.$

x	y	Координаты точек
0	−1	$A_9\,(0;-1)$
1	3	$B_9\,(1;3)$



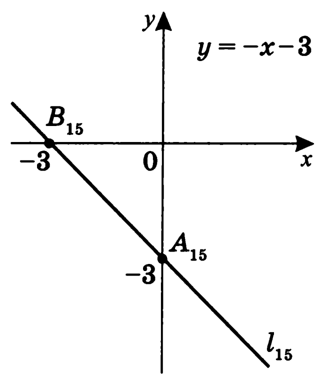
$l_2: \ y = 2x + 2.$

x	y	Координаты точек
0	2	$A_2\,(0;2)$
−1	0	$B_2\,(-1;0)$



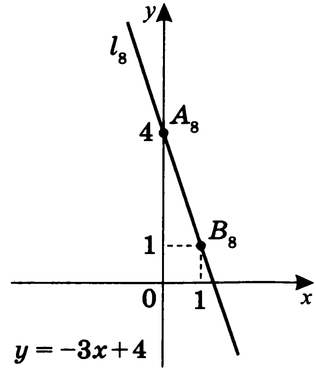
$l_{15}: \ y = -x - 3.$

x	y	Координаты точек
0	−3	$A_{15}\,(0;-3)$
−3	0	$B_{15}\,(-3;0)$



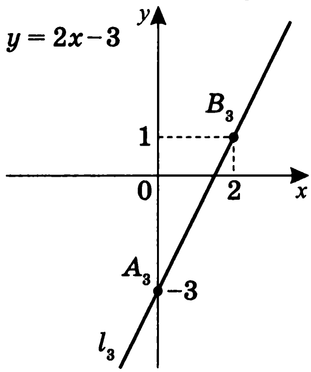
$l_8: \ y = -3x + 4.$

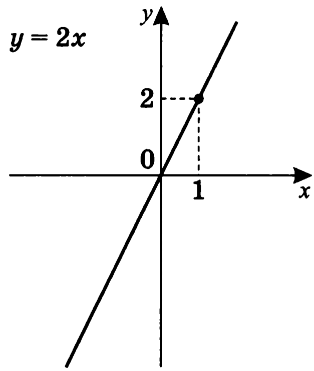
x	y	Координаты точек
0	4	$A_8\,(0;4)$
1	1	$B_8\,(1;1)$



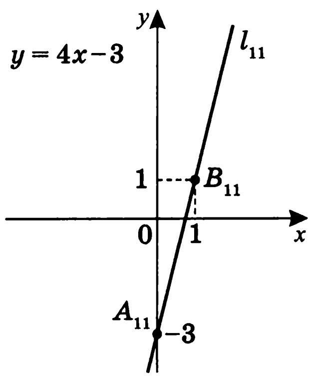
2. Сравним графики функций и укажем их взаимное расположение с точки зрения их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек.

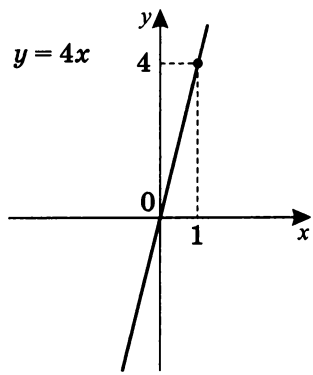
а) l_3: $y = 2x - 3$ и l'_3: $y = 2x$.





l_{11}: $y = 4x - 3$ и l'_{11}: $y = 4x$.

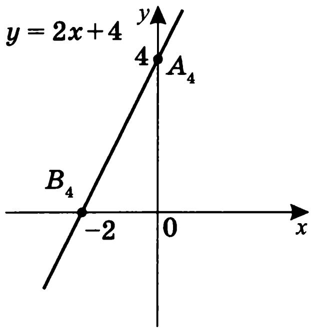


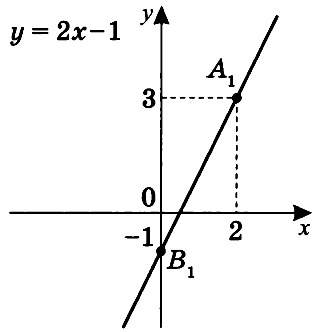


Первое: график $y = 2x - 3$ получен параллельным переносом графика $y = 2x$ вниз на три единицы, так как у них один и тот же угловой коэффициент $k = 2$, а b отличается на 3. Аналогично график $y = 4x - 3$ получен параллельным переносом графика $y = 4x$, тоже вниз на три единицы.

Второе: очевидно, что оба графика — $y = 2x - 3$ и $y = 4x - 3$ — проходят через точку с координатами $(0; -3)$.

б) l_4: $y = 2x + 4$; l_1 : $y = 2x - 1$.





Первое: очевидно, что оба графика параллельны, так как у них один и тот же угловой коэффициент $k = 2$.

Второе: относительно друг друга они сдвинуты параллельным переносом на 5 единиц (вверх или вниз, зависит от прямой отсчета).

Примечания

1. Графики прямых l_3, l_{11}, l_4 и l_1 построены (см., соответственно, варианты IV, II, II и I) на страницах 33, 23, 23, 18.
2. $y = 2x - 3$ — возрастающая функция;
   $y = 4x - 3$ — возрастающая функция;
   $y = 2x + 4$ — возрастающая функция;
   $y = 2x - 1$ — возрастающая функция.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми l_9, l_{12}, l_{13} и l_{16}.

б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.

в) Вычислите площадь такого четырехугольника.

Для построения четырехугольника найдем точки пересечения данных прямых:

$l_9: \ y = 4x - 1,$
$l_{12}: \ y = 4x + 4,$
$l_{13}: \ y = -x - 1,$
$l_{16}: \ y = -x + 4.$

$l_9 \cap l_{13}$: $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$; $\quad 4x - 1 = -x - 1,$

тогда $x = 0$, $y = -1$,

т. е. $A\,(0; -1)$ — общая точка прямых l_9 и l_{13}.

$l_9 \cap l_{16}$: $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$; $\quad 4x - 1 = -x + 4,$

тогда $x = 1$, $y = 3$,

т. е. $B\,(1; 3)$ — общая точка прямых l_9 и l_{16}.

$l_{12} \cap l_{13}$: $\begin{cases} y = 4x + 4 \\ y = -x - 1 \end{cases}$; $\quad 4x + 4 = -x - 1,$

тогда $x = -1$, $y = 0$,

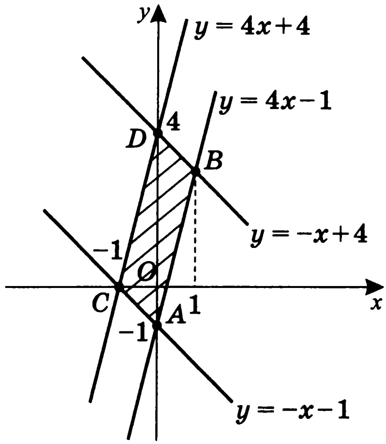
т. е. $C\,(-1; 0)$ — общая точка прямых l_{12} и l_{13}.

$l_{12} \cap l_{16}$: $\begin{cases} y = 4x + 4 \\ y = -x + 4 \end{cases}$; $\quad 4x + 4 = -x + 4,$

тогда $x = 0$, $y = 4$,

т. е. $D\,(0; 4)$ — общая точка прямых l_{12} и l_{16}.

а)



б) Очевидно, что $AD = 5$ — наибольшая диагональ.

в) $S_{ACDB} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ACD}$;

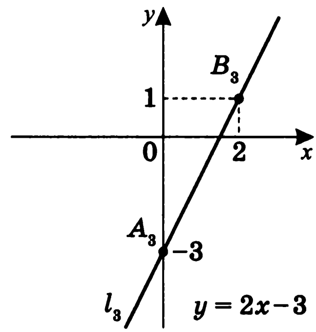
$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot OC$; $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2{,}5$ кв. ед.

Тогда $\boxed{S_{ACDB} = 5}$.

Примечание. Очевидно, что модуль абсцисс точек C и B равен высоте $\triangle ACD$ и $\triangle DBA$.

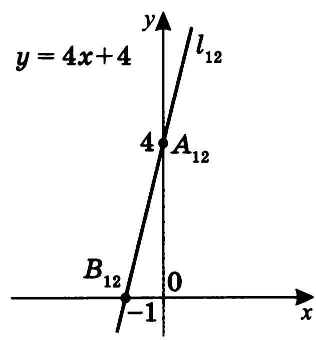
Вариант IV

1. $l_3: \ y = 2x - 3.$



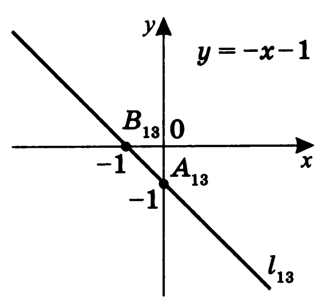
x	y	Координаты точек
0	−3	$A_3\,(0;-3)$
2	1	$B_3\,(2;1)$

$l_{12}: \ y = 4x + 4.$



x	y	Координаты точек
0	4	$A_{12}\,(0;4)$
−1	0	$B_{12}\,(-1;0)$

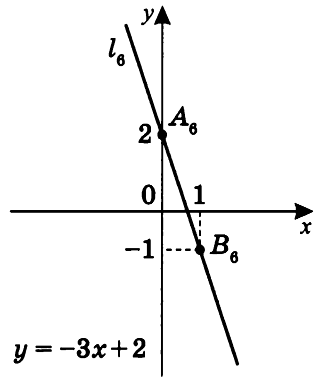
$l_{13}: \ y = -x - 1.$



x	y	Координаты точек
0	−1	$A_{13}\,(0;-1)$
−1	0	$B_{13}\,(-1;0)$

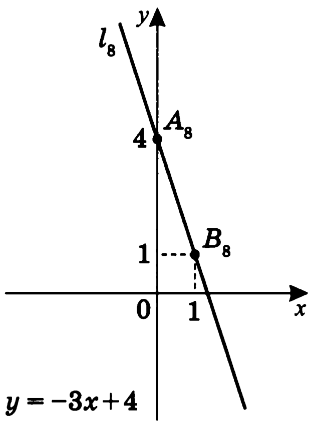
$l_6: \ y = -3x + 2.$

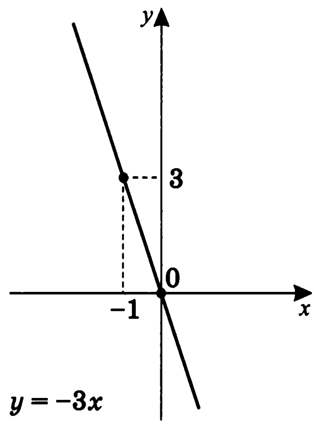
x	y	Координаты точек
0	2	$A_6\,(0; 2)$
1	-1	$B_6\,(1; -1)$



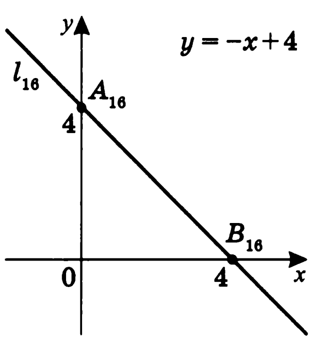
2. Сравним графики функций и укажем их взаимное расположение с точки зрения их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек.

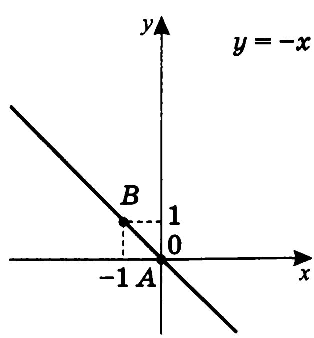
а) l_8: $y = -3x + 4$ и l'_8: $y = -3x$.





l_{16}: $y = -x + 4$ и l'_{16}: $y = -x$.

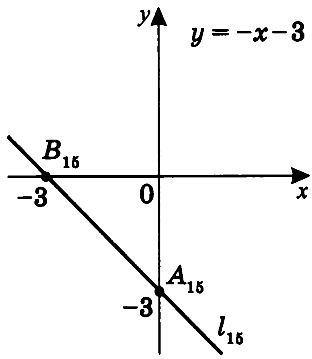


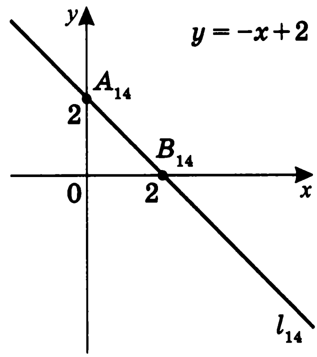


Первое: график $y = -3x + 4$ получен параллельным переносом графика $y = -3x$ вверх на четыре единицы, так как у них один и тот же угловой коэффициент $k = -3$, а b отличается на 4. Аналогично график $y = -x+4$ получен параллельным переносом графика $y = -x$, также вверх на четыре единицы.

Второе: очевидно, что оба графика — $y = -3x + 4$ и $y = -x+4$ — проходят через точку с координатами $(0; 4)$.

б) $l_{15}: \ y = -x - 3$; $\quad l_{14}: \ y = -x + 2$.





Первое: очевидно, что оба графика параллельны, так как у них один и тот же угловой коэффициент $k = -1$.

Второе: относительно друг друга их графики сдвинуты параллельным переносом на пять единиц (вверх или вниз, зависит от прямой отсчета).

Примечания

1. Графики прямых l_8, l_{16}, l_{15} и l_{14} построены (см., соответственно, варианты III, I, III и II) на страницах 28, 19, 28, 23.
2. $y = -3x + 4$ — убывающая функция;
   $y = -x + 4$ — убывающая функция;
   $y = -x - 3$ — убывающая функция;
   $y = -x + 2$ — убывающая функция.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми l_{10}, l_{14}, l_{11} и l_{15}.

б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.

в) Вычислите площадь такого четырехугольника.

Для построения четырехугольника найдем точки пересечения данных прямых:

$$\begin{aligned} l_{10}&:\ y = 4x + 2,\\ l_{14}&:\ y = -x + 2,\\ l_{11}&:\ y = 4x - 3,\\ l_{15}&:\ y = -x - 3. \end{aligned}$$

$$l_{10} \cap l_{14}: \quad \begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}; \quad 4x + 2 = -x + 2,$$

тогда $x = 0$, $y = 2$,

т.е. $A\,(0;2)$ — общая точка прямых l_{10} и l_{14}.

$$l_{10} \cap l_{15}: \quad \begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = -x - 3 \end{cases}; \quad 4x + 2 = -x - 3,$$

тогда $x = -1$, $y = -2$,

т.е. $B\,(-1;-2)$ — общая точка прямых l_{10} и l_{15}.

$$l_{11} \cap l_{14}: \quad \begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -x + 2 \end{cases}; \quad 4x - 3 = -x + 2,$$

тогда $x = 1$, $y = 1$,

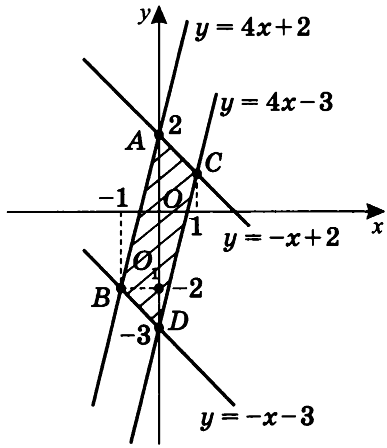
т.е. $C\,(1;1)$ — общая точка прямых l_{11} и l_{14}.

$$l_{11} \cap l_{15}: \quad \begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases}; \quad 4x - 3 = -x - 3,$$

тогда $x = 0$, $y = -3$,

т.е. $D\,(0;-3)$ — общая точка прямых l_{11} и l_{15}.

а)



б) Очевидно, что $AD = 5$ — наибольшая диагональ.

в) $S_{ABDC} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle DAC} = 2S_{\triangle ABD}$;

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot O_1B$; $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2{,}5$ кв. ед.

Тогда $\boxed{S_{ABDC} = 5}$.

Примечание. Очевидно, что модуль абсцисс точек B и C равен высоте $\triangle ADB$ и $\triangle DAC$.

Самостоятельная работа 2 (Построение графиков по уравнению)

Вариант I

Постройте графики уравнений:

1. $2x + y + 3 = 0$;
2. $3y + 2 = 0$;
3. $3x + y - 2 = 0$;
4. $-x - 2y + 1 = 0$;
5. $-3x + 2y - 1 = 0$;
6. $-2x - 4 = 0$;
7. $3x + 2y = 0$;
8. $-3y = 0$.

Вариант II

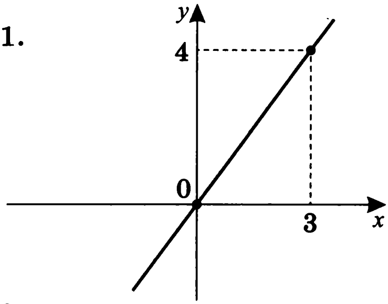
Постройте графики уравнений:

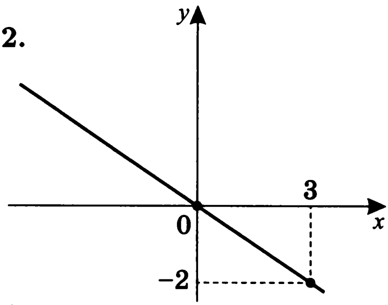
1. $-3x + 2y + 1 = 0$;
2. $3x - 6 = 0$;
3. $-0{,}5x - y + 1 = 0$;
4. $-x + 3y - 3 = 0$;
5. $x - y - 2 = 0$;
6. $-2y - 5 = 0$;
7. $-0{,}5x + 2y = 0$;
8. $2x = 0$.

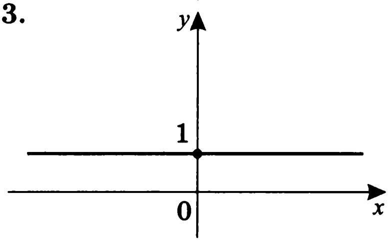
Самостоятельная работа 3 (Нахождение уравнения прямой по заданному графику)

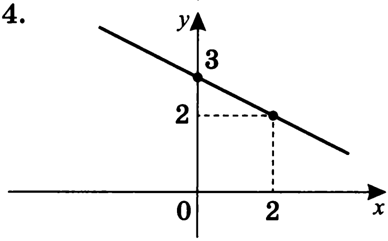
Вариант I

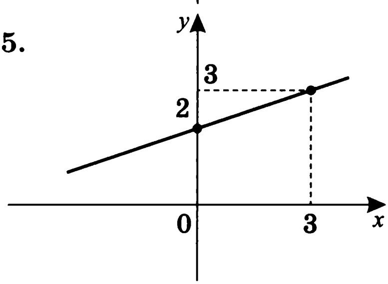
Напишите уравнение прямой по заданному графику.

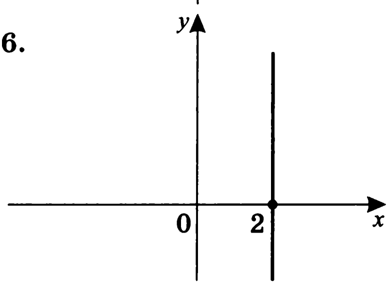
1.


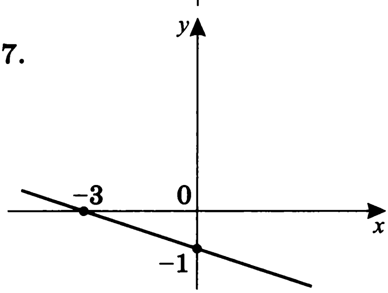
2.


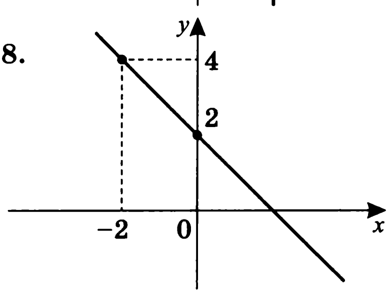
3.


4.


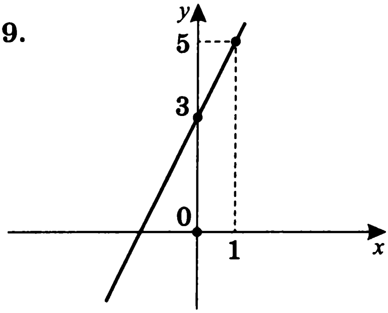
5.


6.


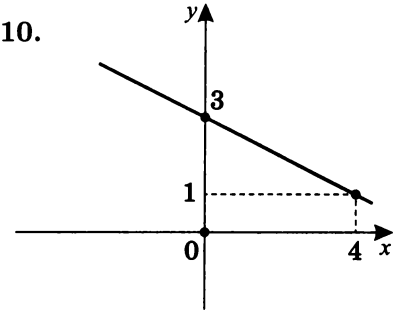
7.


8.


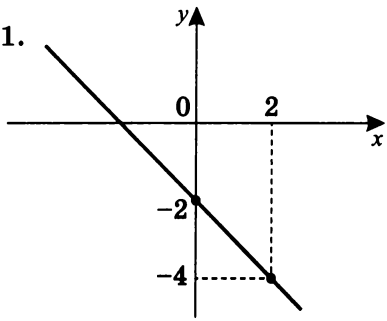
9.



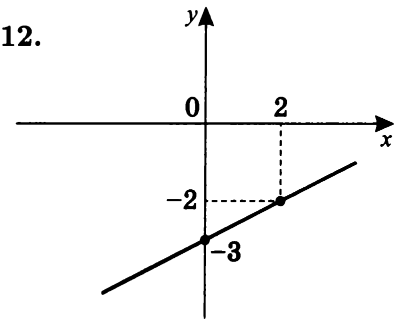
10.



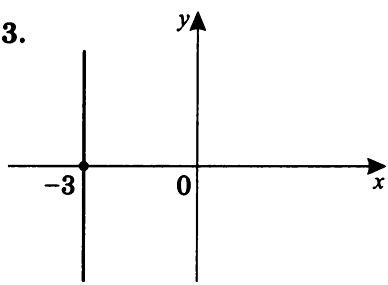
11.



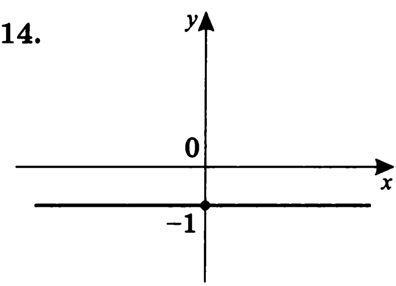
12.



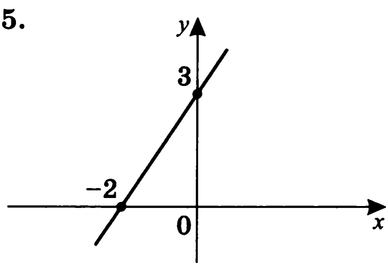
13.



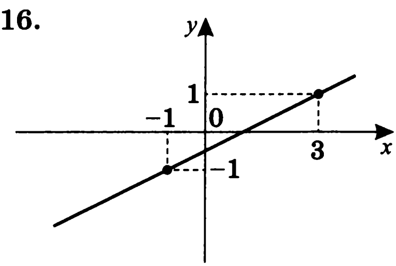
14.



15.



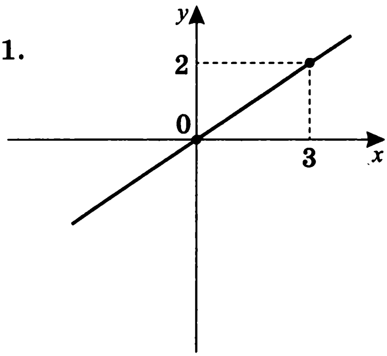
16.



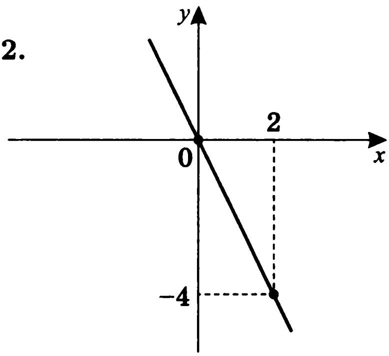
Вариант II

Напишите уравнение прямой по заданному графику.

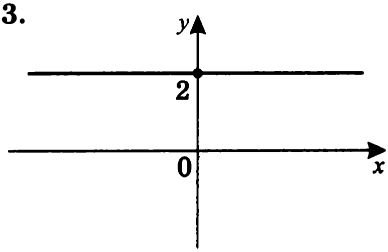
1.



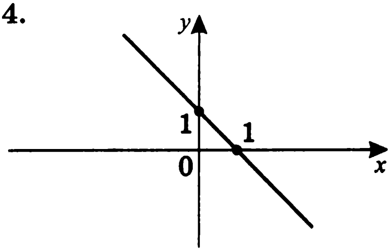
2.



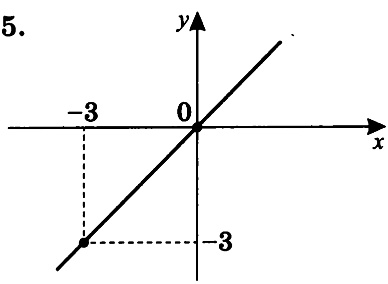
3.



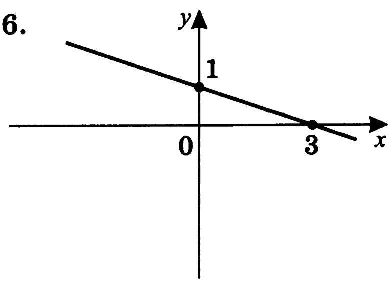
4.



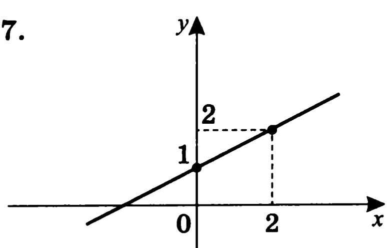
5.



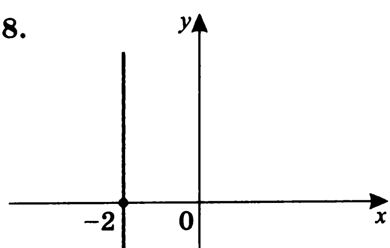
6.



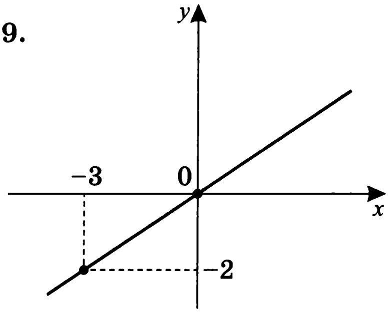
7.



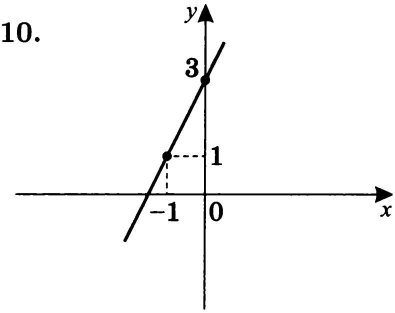
8.



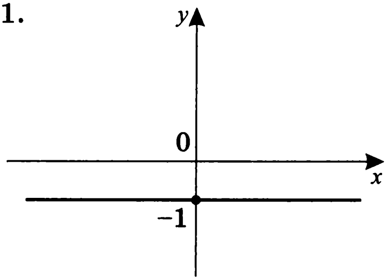
9.



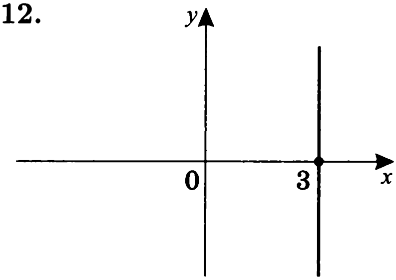
10.



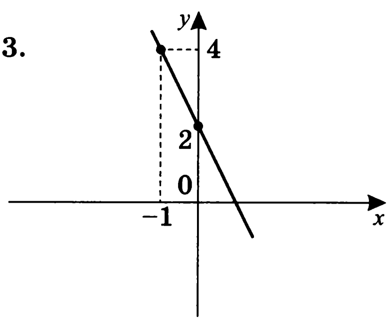
11.



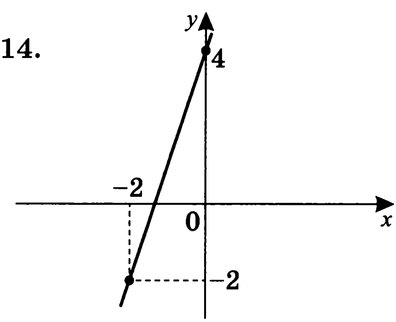
12.



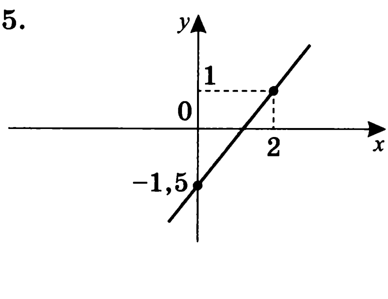
13.



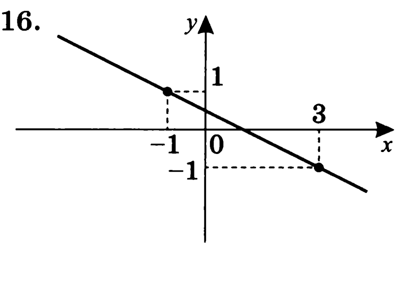
14.



15.



16.



Уравнения прямых, площади ограниченных ими фигур. Виды симметрии и их влияние на вид уравнений прямых

Практикум 1

1. Треугольник определен точками $A(-2;1)$, $B(3;2)$, $C(-1;-2)$. Найдите:

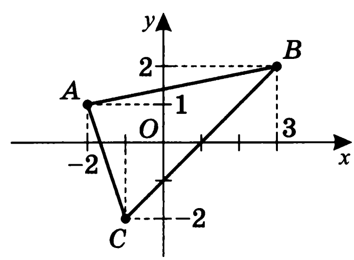
а) уравнения прямых, содержащих стороны треугольника;

б) площадь треугольника, заданного точками A, B, C;

в) координаты точки D — четвертой вершины параллелограмма[3] с вершинами A, B, C;

г) координаты точки пересечения диагоналей этого параллелограмма.

Дано:
$A(-2;1)$
$B(3;2)$
$C(-1;-2)$



а) найдите уравнения прямых AB, BC, AC;

б) найдите $S_{\triangle ABC}$;

в) полагая, что точки A, B, C — вершины параллелограмма, найдите координаты точки D — четвертой вершины этого параллелограмма;

г) найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Прямая AB:

$$\begin{cases} A \in \Gamma(y = kx + b) \\ B \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 = k \cdot (-2) + b \\ 2 = k \cdot 3 + b \end{cases}; \quad (\mathrm{II} - \mathrm{I})$$

$$\begin{cases} 1 = -2k + b \\ 5k = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 1\frac{2}{5} \\ k = \frac{1}{5} \end{cases}, \text{ т. е. } \boxed{AB:\ y = \frac{1}{5}x + 1\frac{2}{5}}.$$

[3] Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Прямая BC:

$\begin{cases} B \in \Gamma(y = kx + b) \\ C \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases}$; $\begin{cases} 2 = k \cdot 3 + b \\ -2 = k \cdot (-1) + b \end{cases}$; (I – II)

$\begin{cases} 4 = 4k \\ -2 = -k + b \end{cases}$; $\begin{cases} k = 1 \\ b = -1 \end{cases}$, т. е. $\boxed{BC:\ y = x - 1}$.

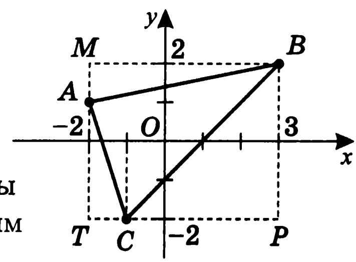
Прямая AC:

$\begin{cases} A \in \Gamma(y = kx + b) \\ C \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = k \cdot (-2) + b \\ -2 = k \cdot (-1) + b \end{cases}$; (I – II)

$\begin{cases} k = -3 \\ -2 = -k + b \end{cases}$; $\begin{cases} k = -3 \\ b = -5 \end{cases}$, т. е. $\boxed{AC:\ y = -3x - 5}$.

б) Найдем $S_{\triangle ABC}$.

Опишем около $\triangle ABC$ прямоугольник, сторонам которого принадлежат точки A, B и C, стороны которого параллельны осям ординат и абсцисс.



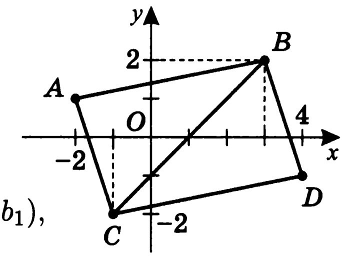
Тогда $M(-2; 2)$, $P(3; -2)$, $T(-2; -2)$ — вершины прямоугольника $MBPT$.

Очевидно, что

$S_{MBPT} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CBP} + S_{\triangle CTA} + S_{\triangle ABC}$.

1. $S_{MBPT} = TM \cdot MB$, где $TM = 4$, $MB = 5$, т. е. $S_{MBPT} = 4 \cdot 5 = 20$.
2. $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MB$, где $AM = 1$, $MB = 5$, т. е. $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$.
3. $S_{\triangle CBP} = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot BP$, где $CP = 4$, $BP = 4$, т. е. $S_{\triangle CBP} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.
4. $S_{\triangle ATC} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot TC$, где $AT = 3$, $TC = 1$, т. е. $S_{\triangle ATC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1{,}5$.
5. $S_{\triangle ABC} = 20 - 2{,}5 - 8 - 1{,}5 = 8$.

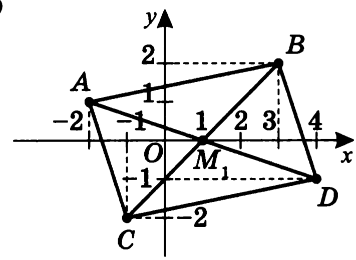
в) Найдем координаты точки D, полагая, что $ABDC$ — параллелограмм.



1. Так как $AB \parallel CD$ ($CD: \ y = k_1x + b_1$) и $AB: \ y = \frac{1}{5}x + 1\frac{2}{5}$, тогда $C \in \Gamma(y = k_1x + b_1)$, а $k_1 = \frac{1}{5}$.

   Тогда $-2 = k_1 \cdot (-1) + b_1$; $-2 = -\frac{1}{5} + b_1$; $b_1 = -1\frac{4}{5}$.

   Следовательно, CD: $y = \frac{1}{5}x - 1\frac{4}{5}$.



2. Аналогично $AC \parallel BD$ ($BD: \ y = k_2x + b_2$) и $AC: \ y = -3x - 5$. Значит, $B \in \Gamma(y = k_2x + b_2)$, и $k_2 = -3$.

   Тогда $2 = k_2 \cdot 3 + b_2$; $2 = (-3) \cdot 3 + b_2$; $b_2 = 11$.

   Следовательно, BD: $y = -3x + 11$.

3. Решая систему уравнений для прямых CD и BD, найдем координаты точки D:

   $$\begin{cases} y = \frac{1}{5}x - 1\frac{4}{5} \\ y = -3x + 11 \end{cases}; \quad \frac{1}{5}x - 1\frac{4}{5} = -3x + 11;$$

   $x - 9 = -15x + 55$; $\quad 16x = 64$; $\quad x = 4$; $\quad y = -1$.

   Итак, $D\,(4; -1)$.

г) Найдем координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма $ABDC$.

Известно уравнение прямой $BC\colon y = x - 1$.

Найдем уравнение прямой AD: $y = k_3x + b_3$.

$\begin{cases} A \in \Gamma(k_3x + b_3) \\ D \in \Gamma(k_3x + b_3) \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = k_3 \cdot (-2) + b_3 \\ -1 = k_3 \cdot 4 + b_3 \end{cases}$; I − II

$2 = -6k_3$; $\begin{cases} k_3 = -\frac{1}{3} \\ b_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Следовательно, AD: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Решим систему уравнений и найдем точку пересечения прямых AD и BC:

$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = x - 1 \end{cases}$; $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = x - 1$;

$-x + 1 = 3x - 3$; $x = 1$; $y = 0$.

Следовательно, $AD \cap BC = M_1\,(1; 0)$.

Любопытно отметить, что существуют два других параллелограмма с вершинами в точках A, B и C: $ABCD$ и $ACBD$. Найдите координаты четвертой вершины и координаты точки пересечения диагоналей M этих параллелограммов.

Проведите решение самостоятельно и проверьте, что:

для $ABCD$: $D\,(-6; -3)$; $M_2\left(-1\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$;

для $ACBD$: $D\,(2; 5)$; $M_3\left(\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$.

Примечание. Можно посчитать проще, если знать:

а) диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;

б) формулу координат середины отрезка через координаты его концов:

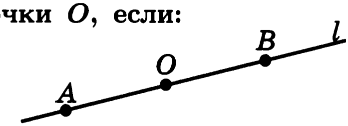
пусть $A\,(x_1; y_1)$, $B\,(x_2; y_2)$, $C\,(x_0; y_0)$ — середина отрезка AB, тогда $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$.

2. Для прямой l, заданной уравнением $3x - 2y = 6$, напишите уравнение прямой, симметричной ей относительно: а) оси Oy; б) оси Ox; в) прямой $y = x$; г) прямой $y = -x$; д) начала координат.

Определение 1. **Точка A называется центрально-симметричной точке B относительно точки O, если:**

а) точки A, B, O одновременно принадлежат прямой l;

б) расстояние $AO = OB$, где точка O принадлежит отрезку AB.



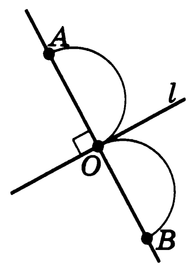
Обозначается $Z_O(A) = B$ или $Z_O(B) = A$.

Определение 2. **Точка A называется симметричной точке B относительно оси l, если:**

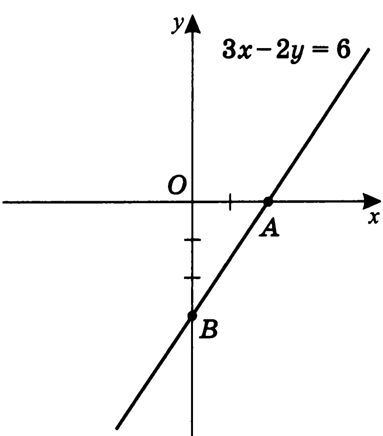
а) прямая $(AB) \perp l$;

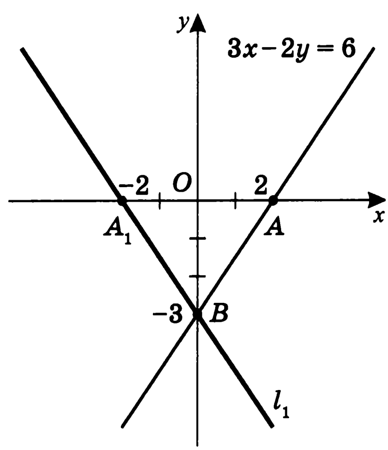
б) $AB \cap l = O$ и $AO = OB$.

Обозначается $S_l(A) = B$ или $S_l(B) = A$.



а) Зададимся вопросом, при каких условиях прямая l_1: $y = k_1x + b_1$ симметрична прямой l: $3x - 2y = 6$ относительно оси Oy.





1. Очевидно, что точка пересечения прямых l и l_1 с осью Oy — одна и та же, $B(0;-3)$.
Значит, $b_1 = b = -3$, т. е. l_1: $y = k_1 x - 3$.

2. Точки пересечения прямых l и l_1 с осью абсцисс также должны быть симметричными относительно оси Oy:

l: $3x - 2y = 6$; $\quad y = 0,\ x = 2$;

$A(2;0) \in Ox$, значит $A_1(-2;0) \in Ox$.

Тогда прямая A_1B (l_1) симметрична прямой AB (l) относительно оси Oy.

$$l_1 = A_1B\colon\ \begin{cases} B \in \Gamma(y = k_1x + b_1) \\ A_1 \in \Gamma(y = k_1x + b_1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3 = k_1 \cdot 0 + b_1 \\ 0 = k_1 \cdot (-2) + b_1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} b_1 = -3 \\ k_1 = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

т. е. l_1: $y = -\frac{3}{2}x - 3$, или $\boxed{-3x - 2y = 6}$.

Обратите внимание, что по сравнению с данной прямой $3x - 2y = 6$ у прямой, симметричной ей относительно оси Oy, меняется знак коэффициента при x, причем меняется также и вид монотонности, т. е. возрастающая на убывающую и наоборот.

б) Попытаемся так же выяснить условия того, что прямая l_2: $y = k_2x + b_2$ симметрична прямой l: $3x - 2y = 6$ относительно оси Ox.

1. Очевидно, что точка пересечения прямых l и l_2 с осью абсцисс должна быть одной и той же.

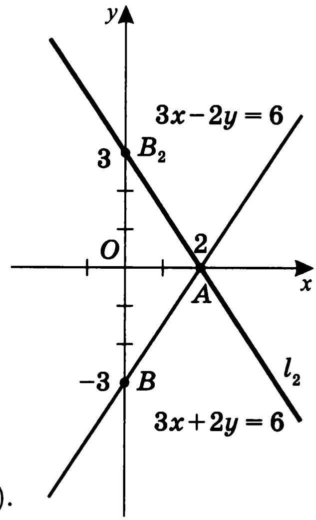
Для l: $3x - 2y = 6$ при $y = 0$ $x = 2$. Значит $A(2;0)$ — точка пересечения прямых l и l_2 с осью абсцисс.

$A \in \Gamma(y = k_2x + b_2)$; $\quad 0 = k_2 \cdot 2 + b_2$; $\quad b_2 = -2k_2$.

2. Точки пересечения прямых с осью ординат должны быть симметричны относительно оси абсцисс.

   Для l: $3x - 2y = 6$ при $x = 0$ $\quad y = -3$, т. е. $B\,(0; -3)$ симметрична относительно оси абсцисс точке B_2.

   Следовательно, координаты точки B_2 — $(0; 3)$.



Теперь напишем уравнение прямой AB_2:

$$\begin{cases} A \in \Gamma(y = k_2x + b_2) \\ B_2 \in \Gamma(y = k_2x + b_2) \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = k_2 \cdot 2 + b_2 \\ 3 = k_2 \cdot 0 + b_2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} k_2 = -\dfrac{3}{2} \\ b_2 = 3 \end{cases}, \text{ т. е. } AB_2 = l_2\colon\ y = -\tfrac{3}{2}x + 3,\ 3x + 2y = 6.$$

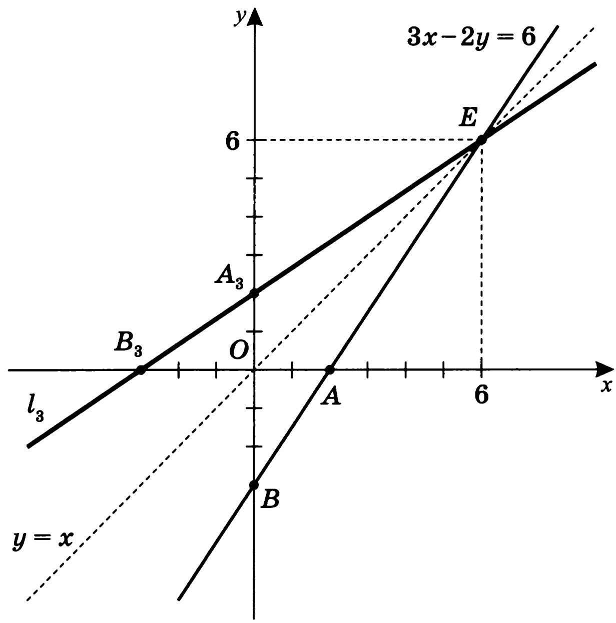
Обратите внимание, что в уравнении прямой, симметричной данной относительно оси абсцисс, меняется только знак при y: $3x - 2y = 6$ и $3x + 2y = 6$.

Отметим также, что при этом меняется вид монотонности.

в) Один из вариантов поиска решений — найти возможную точку пересечения прямых l: $3x - 2y = 6$ и l_3: $y = x$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ y = x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}; \quad E\,(6; 6).$$

Легко видеть, что точка $A_3\,(0; 2)$ симметрична точке $A\,(2; 0)$ относительно прямой $y = x$.



Теперь остается написать уравнение прямой A_3E (l_3):

$\begin{cases} E \in \Gamma(y = k_3x + b_3) \\ A_3 \in \Gamma(y = k_3x + b_3) \end{cases}$; $\begin{cases} 6 = k_3 \cdot 6 + b_3 \\ 2 = k_3 \cdot 0 + b_3 \end{cases}$;

$\begin{cases} k_3 = \frac{2}{3} \\ b_3 = 2 \end{cases}$, т. е. A_3E: $y = \frac{2}{3}x + 2$ или $3y - 2x = 6$.

Если присмотреться, можно заметить, что уравнение этой прямой $(3y - 2x = 6)$ получается из исходного $(3x - 2y = 6)$ заменой x на y и y на x, при этом вид монотонности не меняется.

Примечание. Так как данное уравнение прямой $3x - 2y = 6$ есть монотонная на всей числовой оси функция, то функция $3y - 2x = 6$ является по отношению к ней взаимнообратной. (Чтобы найти функцию, обратную данной монотонной $y = f(x)$, нужно поменять местами буквы x и y — $x = f(y)$ — и найти из полученного равенства y как из уравнения. Тем самым получим обратную к $y = f(x)$ функцию $y = g(x)$.) Это известно благодаря следующей теореме.

Теорема. Графики любых взаимнообратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

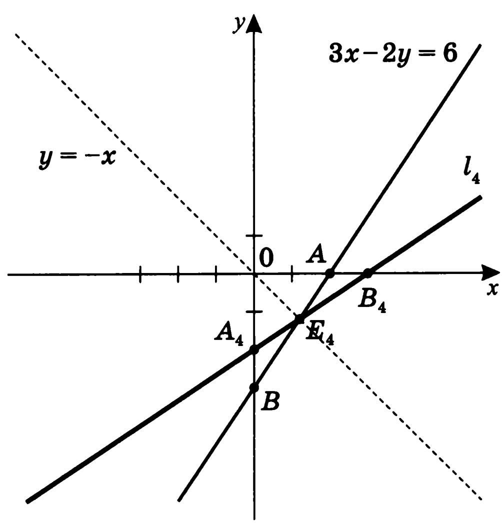
Отметим, что важнейшим условием существования функции, обратной данной, является *монотонность* исходной (первичной) функции, что обеспечивает то, что каждое свое значение функция принимает только один раз.

г) Рассуждая по аналогии с пунктом в), найдем точку пересечения прямых $3x - 2y = 6$ и $y = -x$:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ y = -x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1{,}2 \\ y = -1{,}2 \end{cases}.$$

Очевидно, что точка E_4 должна принадлежать прямой l_4, симметричной прямой l: $3x - 2y = 6$ относительно оси $y = -x$.

Найдем точку B_4, симметричную точке B относительно прямой $y = -x$. Очевидно, что B_4 имеет координаты $(3; 0)$.



Остается найти уравнение прямой B_4E_4 (l_4):

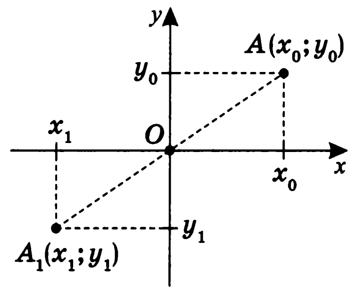
$$\begin{cases} B_4 \in \Gamma(y = k_4x + b_4) \\ E_4 \in \Gamma(y = k_4x + b_4) \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = k_4 \cdot 3 + b_4 \\ -1{,}2 = k_4 \cdot 1{,}2 + b_4 \end{cases};$$

$$1{,}2 = 1{,}8k_4; \quad \begin{cases} k_4 = \dfrac{2}{3} \\ b_4 = -2 \end{cases},$$

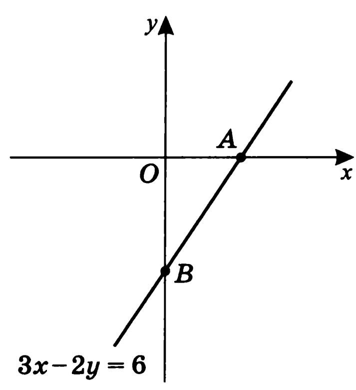
т. е. $y = \frac{2}{3}x - 2$ или $-3y + 2x = 6$.

Сравнивая данное уравнение с исходным, заметим, что мы просто меняем местами коэффициенты при x и y (или меняем местами x на $-y$ и y на $-x$).

д) Прежде всего вспомним, каковы условия симметричности точки $A(x_0; y_0)$ относительно начала координат.



Пусть точка $A_1(x_1; y_1)$ симметрична данной.
Так как $OA = OA_1$
и $O \in AA_1$,
то $x_1 = -x_0$;
$y_1 = -y_0$, значит
$Z_O(A(x_0; y_0)) = A_1(-x_0; -y_0)$.



Необходимо найти l_5,
где $Z_O(l) = l_5$.
Рассмотрим график
$3x - 2y = 6$.

Так как $Z_O(A) = A_5$,
то $A(2; 0) \to A_5(-2; 0)$.
Так как $Z_O(B) = B_5$,
то $B(0; -3) \to B_5(0; 3)$.

Уравнение прямой l_5, симметричной относительно начала координат прямой $3x - 2y = 6$, таково, что точки A_5 и B_5, принадлежащие ей, удовлетворяют уравнению l_5: $y = k_5x + b_5$:

$$\begin{cases} A_5\,(-2;0) \in \Gamma(y = k_5x + b_5) \\ B_5\,(0;3) \in \Gamma(y = k_5x + b_5) \end{cases};$$

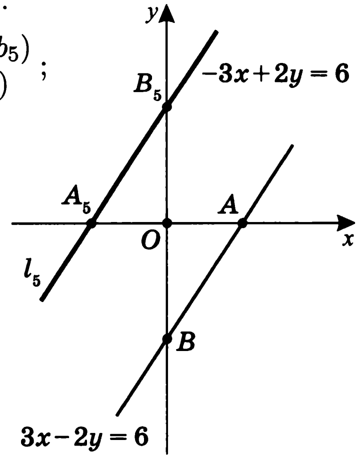
$$\begin{cases} 0 = k_5 \cdot (-2) + b_5 \\ 3 = k_5 \cdot 0 + b_5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2k_5 = b_5 \\ b_5 = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} k_5 = 1{,}5 \\ b_5 = 3 \end{cases}.$$

Следовательно,

$y = 1{,}5x + 3$,

или $2y - 3x = 6$.



Примечание. В общем случае график уравнения прямой $\boxed{nx + my = c}$ симметричен относительно:

1. оси Oy — графику прямой $\boxed{-nx + my = c}$ $(x \to -x,\ y \to y)$;
2. оси Ox — графику прямой $\boxed{nx - my = c}$ $(x \to x,\ y \to -y)$;
3. оси $y = x$ — графику прямой $\boxed{mx + ny = c}$ $(x \to y,\ y \to x)$;
4. оси $y = -x$ — графику прямой $\boxed{mx - ny = c}$ $(x \to -y,\ y \to -x)$;
5. начала координат — графику прямой $\boxed{-nx - my = c}$ $(x \to -x,\ y \to -y)$.

Практикум 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $2x + 5y = -3$; $-x + y = 5$; $-8x + y = -9$.
Построим графики данных функций и найдем графически возможные точки их пересечения.

$-x + y = 5$

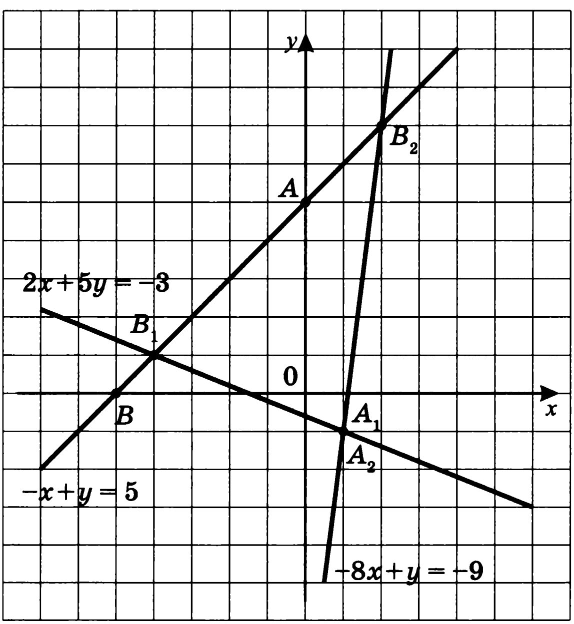
x	y	Координаты точек
0	5	$A\,(0; 5)$
-5	0	$B\,(-5; 0)$

$2x + 5y = -3$

x	y	Координаты точек
1	-1	$A_1\,(1; -1)$
-4	1	$B_1\,(-4; 1)$

$-8x + y = -9$

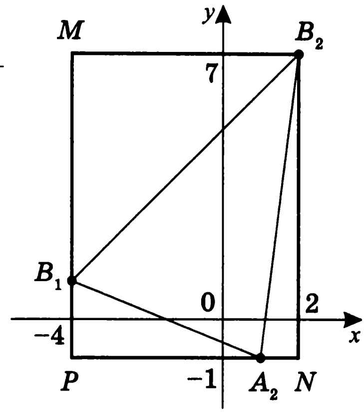
x	y	Координаты точек
1	-1	$A_2\,(1; -1)$
2	7	$B_2\,(2; 7)$



Аналитически проверим принадлежность точки $B_1\,(-4; 1)$ прямой $-x + y = 5$.

Аналогично убедимся, что $B_2\,(2; 7)$ принадлежит прямой $-x + y = 5$.

Итак, треугольник $B_1B_2A_2$ — искомая фигура, площадь которой нужно найти. Рассмотрим прямоугольник, стороны которого содержат вершины $\triangle B_1B_2A_2$ и параллельны осям координат. Это прямоугольник MB_2NP.



Очевидно, что

$S_{MB_2NP} = S_{\triangle B_1MB_2} + S_{\triangle A_2B_2N} + S_{\triangle PB_1A_2} + S_{\triangle B_1B_2A_2}.$

$S_{\triangle B_1MB_2} = \frac{1}{2} \cdot B_1M \cdot MB_2;\quad S_{\triangle B_1MB_2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18.$

$S_{\triangle A_2B_2N} = \frac{1}{2} \cdot A_2N \cdot NB_2;\quad S_{\triangle A_2B_2N} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 4.$

$S_{\triangle PB_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot B_1P \cdot PA_2;\quad S_{\triangle PB_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5.$

$S_{MB_2NP} = PM \cdot MB_2;\quad S_{MB_2NP} = 8 \cdot 6 = 48.$

Итак, $S_{\triangle B_1B_2A_2} = 48 - 18 - 4 - 5 = \boxed{21}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $-x + 2y = 7$; $4x + y = 8$; $x + y = -1$.

Построим графики данных функций и найдем графически возможные точки их пересечения.

$x + y = -1$

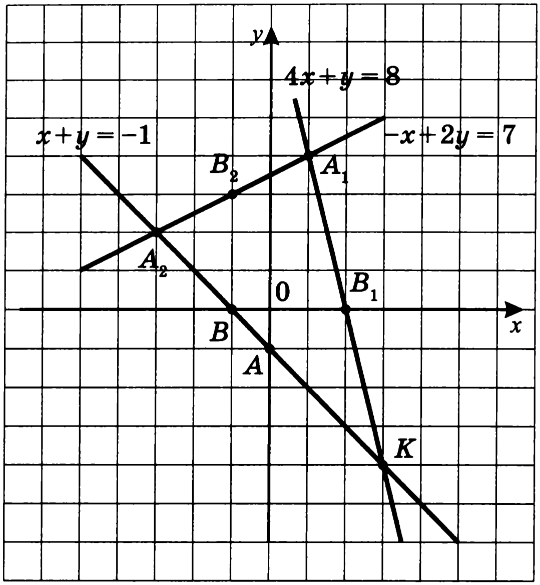
x	y	Координаты точек
0	−1	$A\,(0; -1)$
−1	0	$B\,(-1; 0)$

$4x + y = 8$

x	y	Координаты точек
1	4	$A_1\,(1; 4)$
2	0	$B_1\,(2; 0)$

$-x + 2y = 7$

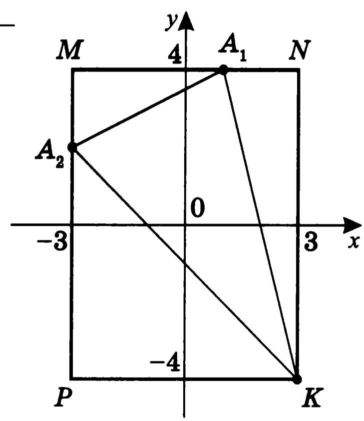
x	y	Координаты точек
−3	2	$A_2\,(-3; 2)$
−1	3	$B_2\,(-1; 3)$



Проверкой убедимся в том, что точка $A_1\,(1;4)$ принадлежит прямой $-x+2y=7$.

Аналогично проверим принадлежность точки $A_2\,(-3;2)$ прямой $x+y=-1$.

Важно также выяснить, что точка K принадлежит прямым $4x+y=8$ и $x+y=-1$.



Итак, треугольник A_2A_1K — искомая фигура, площадь которой необходимо найти.

Рассмотрим прямоугольник, стороны которого содержат вершины $\triangle A_2A_1K$ и параллельны осям координат. Это прямоугольник $MNKP$.

Очевидно, что

$S_{MNKP} = S_{\triangle A_2MA_1} + S_{\triangle A_1NK} + S_{\triangle PA_2K} + S_{\triangle A_2A_1K}$.

$S_{\triangle A_2MA_1} = \frac{1}{2}\cdot A_2M\cdot MA_1$; $\quad S_{\triangle A_2MA_1} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4$.

$S_{\triangle A_1NK} = \frac{1}{2}\cdot A_1N\cdot KN$; $\quad S_{\triangle A_1NK} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8 = 8$.

$S_{\triangle PA_2K} = \frac{1}{2}\cdot PA_2\cdot PK$; $\quad S_{\triangle PA_2K} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = 18$.

$S_{MNKP} = PM\cdot MN$; $\quad S_{MNKP} = 8\cdot 6 = 48$.

$S_{\triangle A_2A_1K} = 48 - 4 - 8 - 18 = \boxed{18}$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $x-2y=11$; $6x+5y=-2$; $7x+3y=-8$.

Построим графики данных функций и найдем графически возможные точки их пересечения.

$x-2y=11$

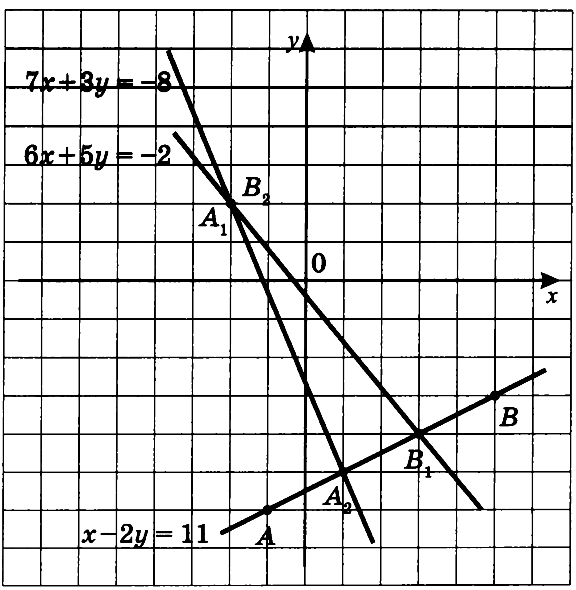
x	y	Координаты точек
-1	-6	$A(-1;-6)$
5	-3	$B(5;-3)$

$6x+5y=-2$

x	y	Координаты точек
-2	2	$A_1(-2;2)$
3	-4	$B_1(3;-4)$

$7x+3y=-8$

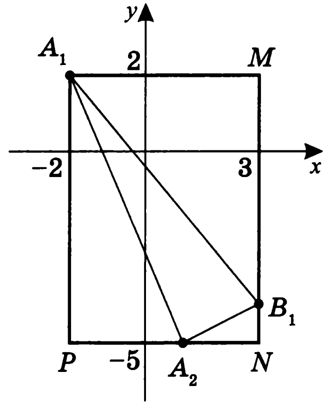
x	y	Координаты точек
1	-5	$A_2(1;-5)$
-2	2	$B_2(-2;2)$



Проверим принадлежность точек $A_2(1;-5)$ и $B_1(3;-4)$ прямой $x-2y=11$.

Итак, треугольник $A_1B_1A_2$ — искомая фигура, площадь которой необходимо найти.

Рассмотрим прямоугольник, стороны которого содержат вершины $\triangle A_1B_1A_2$ и параллельны осям координат.
Это прямоугольник A_1MNP.



Очевидно, что

$$S_{A_1MNP} = S_{\triangle A_1MB_1} + S_{\triangle A_2B_1N} + S_{\triangle A_1A_2P} + S_{\triangle A_1B_1A_2}.$$

$S_{\triangle A_1MB_1} = 15;\quad S_{\triangle A_2B_1N} = 1;\quad S_{\triangle A_1A_2P} = 10{,}5;$

$S_{A_1MNP} = 35$, тогда $S_{\triangle A_1B_1A_2} = \boxed{8{,}5}$.

4. Дан треугольник $\triangle A_1B_1A_2$, найденный в задаче 3. Постройте треугольники, симметричные ему относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

Симметрия треугольника ABC относительно оси Ox записывается $S_{Ox}(\triangle ABC)$.

Симметрия треугольника ABC относительно начала координат записывается $Z_O(\triangle ABC)$.

Найдем симметричные точки.

а) Для треугольника, симметричного относительно оси абсцисс:

$A_1\,(-2; 2) \to A_1'\,(-2; -2)$;

$S_{Ox}(A_1) = A_1'$;

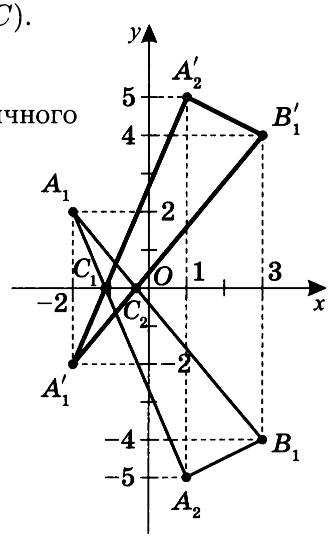
$B_1\,(3; -4) \to B_1'\,(3; 4)$;

$S_{Ox}(B_1) = B_1'$;

$A_2\,(1; -5) \to A_2'\,(1; 5)$;

$S_{Ox}(A_2) = A_2'$.

$S_{Ox}\,(\triangle A_1B_1A_2) = \triangle A_1'B_1'A_2'$.



б) Для треугольника, симметричного относительно оси ординат:

$A_1\,(-2;2) \to A_1''\,(2;2)$;

$S_{Oy}(A_1) = A_1''$;

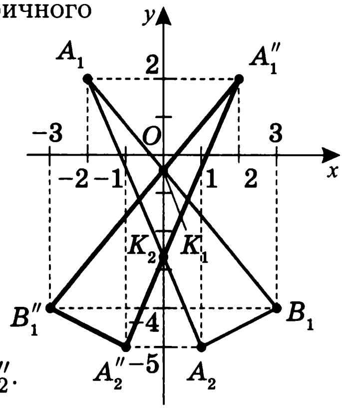
$B_1\,(3;-4) \to B_1''\,(-3;-4)$;

$S_{Oy}(B_1) = B_1''$;

$A_2\,(1;-5) \to A_2''\,(-1;-5)$;

$S_{Oy}(A_2) = A_2''$.

$S_{Oy}\,(\triangle A_1B_1A_2) = \triangle A_1''B_1''A_2''$.



Примечания

1. $C_1 = A_1A_2 \cap A_1'A_2'$; $C_2 = A_1B_1 \cap A_1'B_1'$;
   $C_1, C_2 \in Ox$.
2. $K_1 = A_1B_1 \cap A_1''B_1''$; $K_2 = A_1A_2 \cap A_1''A_2''$;
   $K_1, K_2 \in Oy$.
3. Для «головастиков». Найдите площадь фигуры:
   а) $\triangle A_1B_1A_2 \cap \triangle A_1'B_1'A_2'$ $\boxed{\frac{578}{1113}}$;
   б) $\triangle A_1B_1A_2 \cap \triangle A_1''B_1''A_2''$ $\boxed{1\frac{361}{795}}$.

в) Для треугольника, симметричного относительно начала координат:

$A_1\,(-2;2) \to A_1^0\,(2;-2)$;

$Z_O(A_1) = A_1^0$;

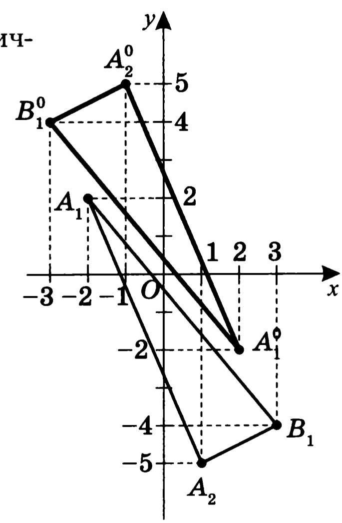
$B_1\,(3;-4) \to B_1^0\,(-3;4)$;

$Z_O(B_1) = B_1^0$;

$A_2\,(1;-5) \to A_2^0\,(-1;5)$;

$Z_O(A_2) = A_2^0$.

$Z_O\,(\triangle A_1B_1A_2) = \triangle A_1^0B_1^0A_2^0$.



Тренировочная работа 1

1. Прямая l_1 проходит через точку $M(-2; 10)$ и параллельна прямой $y = -9x + 5$. Напишите уравнение прямой l_1 и координаты точки ее пересечения с осью абсцисс.

2. Принадлежат ли точки $A(1; 2)$, $B(-2; -1)$ и $C(5; 6)$ одной прямой?

3. Прямая l_1 проходит через точку $A(3; 4)$. Угловой коэффициент данной прямой равен $0{,}75$. Найдите уравнение прямой l_1 и координаты точки ее пересечения с осью ординат.

4. Прямая l_1 пересекает ось абсцисс в точке $A(2; 0)$ и проходит через точку $B(-1; 3)$. Принадлежит ли точка $C(6; 15)$ данной прямой?

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; -2)$ и $B(3; 1)$. Найдите координаты точек ее пересечения с осями координат.

6. Дана прямая l_1: $3x - 4y = 12$. Напишите уравнение прямой, симметричной l_1 относительно оси абсцисс.

7. Прямая $5x + 4y = 20$ симметрична прямой l_1 относительно оси ординат. Напишите уравнение прямой l_1.

8. Даны три точки: $A(2; 1)$, $B(-1; 2)$ и $C(-3; -2)$. Точка D такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Найдите координаты точки D и координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

9. Треугольник ABC задан вершинами $A(-3; 1)$, $B(1; -2)$ и $C(4; 2)$. Постройте:

   а) $\triangle A_1B_1C_1$, симметричный $\triangle ABC$ относительно оси абсцисс;

   б) $\triangle A_2B_2C_2$, симметричный $\triangle ABC$ относительно оси ординат;

в) $\triangle A_3B_3C_3$, симметричный $\triangle ABC$ относительно прямой $y = x$;

г) $\triangle A_4B_4C_4$, симметричный $\triangle ABC$ относительно прямой $y = -x$;

д) $\triangle A_5B_5C_5$, симметричный $\triangle ABC$ относительно начала координат.

*е) Для трудолюбивых и настойчивых «головастиков». Для пунктов а)–д) самостоятельно найдите площади фигур, являющихся общими частями соответствующих треугольников.

10. Постройте $\triangle A_6B_6C_6$, симметричный $\triangle ABC$ — $A(-3;1)$, $B(1;-2)$, $C(4;2)$ — относительно точки $O_1(2;3)$, и укажите координаты его вершин.

Решение тренировочной работы 1

1. Прямая l_1 проходит через точку $M(-2;10)$ и параллельна прямой $y = -9x + 5$. Напишите уравнение прямой l_1 и координаты точки ее пересечения с осью абсцисс.

Так как $l_1\colon kx + b$ параллельна прямой $l_2\colon y = -9x + 5$,

то $k = -9$, и $l_1\colon y = -9x + b$.

Но $M(-2;10) \in l_1$, значит $10 = -9 \cdot (-2) + b$,

следовательно $b = -8$ и $\boxed{l_1\colon y = -9x - 8}$.

При $y = 0$ $x = -\frac{8}{9}$, т. е. точка $\left(-\frac{8}{9}; 0\right)$ — точка пересечения прямой $y = -9x - 8$ с осью абсцисс.

2. Принадлежат ли точки $A(1;2)$, $B(-2;-1)$ и $C(5;6)$ одной прямой?

Допустим, существует прямая $y = kx + b$, графику которой принадлежат все три данные точки. Тогда

$$\begin{cases} A(1;2) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(-2;-1) \in \Gamma(y = kx + b) \\ C(5;6) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 = k \cdot 1 + b \\ -1 = k \cdot (-2) + b \\ 6 = k \cdot 5 + b \end{cases};$$

$$\begin{cases} k + b = 2 \\ -2k + b = -1 \quad (\mathrm{I} - \mathrm{II}) \\ 5k + b = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3k = 3 \quad (k = 1) \\ -2 \cdot 1 + b = -1 \quad (b = 1) \\ 5 \cdot 1 + 1 = 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \\ 6 = 6 \text{ — истина} \end{cases}.$$

Значит, $\boxed{y = x + 1}$ — прямая, которой принадлежат все три точки.

3. Прямая l_1 проходит через точку $A\,(3;4)$. Угловой коэффициент данной прямой равен 0,75. Найдите уравнение прямой l_1 и координаты точки ее пересечения с осью ординат.

$A\,(3;4) \in \Gamma(y = kx + b)$, т. е. $4 = k \cdot 3 + b$.

Так как по условию $k = 0{,}75$, то $4 = 0{,}75 \cdot 3 + b$; $b = 1{,}75$.

$\boxed{l_1\colon y = 0{,}75x + 1{,}75}$.

Так как при $x = 0$ $y = 1{,}75$, то точка пересечения прямой $y = 0{,}75x + 1{,}75$ с осью ординат имеет координаты $B\,(0;1{,}75)$.

4. Прямая l_1 пересекает ось абсцисс в точке $A\,(2;0)$ и проходит через точку $B\,(-1;3)$. Принадлежит ли точка $C\,(6;15)$ данной прямой?

$$\begin{cases} A\,(2;0) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B\,(-1;3) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 2 + b \\ 3 = k \cdot (-1) + b \end{cases}; \quad \begin{cases} b = -2k \\ b = 3 + k \end{cases}.$$

Тогда $3 + k = -2k$; $k = -1$ и $b = 2$, т. е. $\boxed{l_1\colon y = -x + 2}$.

$C \in \Gamma(y = -x + 2)$, т. е. $15 = -6 + 2$; $15 = -4$ — ложь.

Значит $C \notin l_1\colon y = -x + 2$.

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A\,(-1;2)$ и $B\,(3;1)$. Найдите координаты точек ее пересечения с осями координат.

$$\begin{cases} A\,(-1;2) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B\,(3;1) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 = k \cdot (-1) + b \\ 1 = k \cdot 3 + b \end{cases};$$

$$\begin{cases} b = 2 + k \\ b = 1 - 3k \end{cases}; \quad 2 + k = 1 - 3k; \quad 4k = -1;$$

$k = \frac{1}{4}$; $b = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, т. е. $\boxed{l_1\colon y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{3}{4}}$.

При $y = 0$ $x = 7$; $A\,(7;0)$ — точка пересечения l_1 с осью абсцисс.

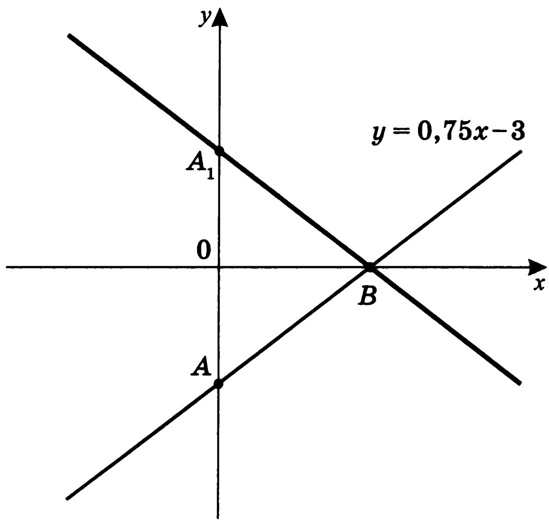
При $x = 0$ $y = 1\frac{3}{4}$; $B\left(0;1\frac{3}{4}\right)$ — точка пересечения l_1 с осью ординат.

6. Дана прямая l_1: $3x - 4y = 12$. Напишите уравнение прямой, симметричной l_1 относительно оси абсцисс.

Так как $3x - 4y = 12$, то $y = -3 + 0{,}75x$.

Построим график $y = 0{,}75x - 3$.

x	y	Координаты точек
0	–3	$A\,(0; -3)$
4	0	$B\,(4; 0)$



Так как точка $A_1\,(0; 3)$ симметрична точке $A\,(0; 3)$ относительно оси абсцисс, то прямая A_1B также симметрична прямой AB относительно оси абсцисс.

Так как $A_1 \in A_1B$ и $B \in A_1B$, то

$$\begin{cases} 3 = k \cdot 0 + b \\ 0 = k \cdot 4 + b \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 3 \\ k = -0{,}75 \end{cases}.$$

Тогда $\boxed{A_1B\colon y = -0{,}75x + 3}$ или $\boxed{A_1B\colon 3x + 4y = 12}$.

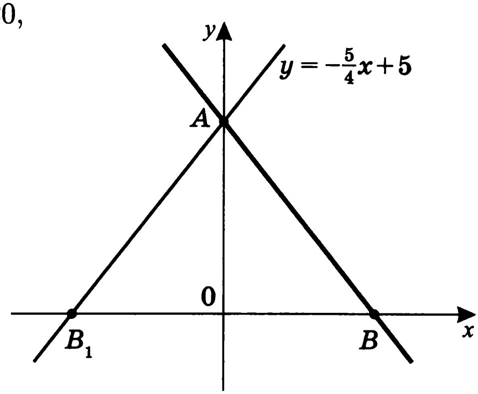
7. Прямая $5x+4y=20$ симметрична прямой l_1 относительно оси ординат. Напишите уравнение прямой l_1.

Так как $5x+4y=20$,

то $y=-\frac{5}{4}x+5$.

Построим график.

x	y	Координаты точек
0	5	$A\,(0;5)$
4	0	$B\,(4;0)$



Очевидно, что точка $B_1\,(-4;0)$ симметрична точке $B\,(4;0)$ относительно оси ординат, а значит, и соответствующие прямые симметричны относительно оси ординат.

Тогда $\begin{cases} B_1\,(-4;0)\in\Gamma(y=kx+b) \\ A\,(0;5)\in\Gamma(y=kx+b)\end{cases}$; $\begin{cases} 0=k\cdot(-4)+b \\ 5=k\cdot 0+b\end{cases}$;

$\begin{cases} k=\frac{5}{4} \\ b=5\end{cases}$, т. е. $\boxed{y=\frac{5}{4}x+5}$ или $5x-4y=-20$.

8. Даны три точки: $A\,(2;1)$, $B\,(-1;2)$ и $C\,(-3;-2)$. Точка D такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Найдите координаты точки D и координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Напишем уравнение прямой AB.

$\begin{cases} A\,(2;1)\in\Gamma(y=kx+b) \\ B\,(-1;2)\in\Gamma(y=kx+b)\end{cases}$; $\begin{cases} 1=k\cdot 2+b \\ 2=k\cdot(-1)+b\end{cases}$;

$-1=3k$; $k=-\frac{1}{3}$, тогда $1=-\frac{1}{3}\cdot 2+b$; $b=1\frac{2}{3}$.

Значит, $\boxed{AB\colon y=-\frac{1}{3}x+1\frac{2}{3}}$.

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $CD \parallel AB$, т. е. $y = -\frac{1}{3}x + b$, и $C(-3;-2) \in CD$, значит $-2 = -\frac{1}{3} \cdot (-3) + b$; $b = -3$.

Следовательно, $\boxed{CD\colon y = -\frac{1}{3}x - 3}$.

С другой стороны, $AD \parallel BC$. Исходя из этого, найдем уравнение прямой BC.

$$\begin{cases} B(-1;2) \in \Gamma(y = k_1x + b_1) \\ C(-3;-2) \in \Gamma(y = k_1x + b_1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2 = k_1 \cdot (-1) + b_1 \\ -2 = k_1 \cdot (-3) + b_1 \end{cases}; \quad 4 = 2k_1; \quad k_1 = 2,$$

тогда $2 = 2 \cdot (-1) + b_1$; $b_1 = 4$.

Значит, $\boxed{BC\colon y = 2x + 4}$.

$AD \parallel BC$, значит $AD\colon y = 2x + b_2$.

Но $A(2;1) \in \Gamma(y = 2x + b_2)$, т. е. $1 = 2 \cdot 2 + b_2$; $b_2 = -3$.

Таким образом, $\boxed{AD\colon y = 2x - 3}$.

б) Найдем точку пересечения прямых CD и AD.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}; \quad -\frac{1}{3}x - 3 = 2x - 3,$$

т. е. $x = 0$, $y = -3$, значит, $\boxed{D(0;-3)}$.

в) Найдем уравнения диагоналей AC и BD.

Прямая AC:

$$\begin{cases} A \in \Gamma(y = k_3x + b_3) \\ C \in \Gamma(y = k_3x + b_3) \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 = k_3 \cdot 2 + b_3 \\ -2 = k_3 \cdot (-3) + b_3 \end{cases};$$

$3 = 5k_3$; $k_3 = \frac{3}{5}$, тогда $1 = 2 \cdot \frac{3}{5} + b_3$; $b_3 = -\frac{1}{5}$.

Значит, $\boxed{AC\colon y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}}$.

Прямая BD:

$$\begin{cases} D \in \Gamma(y = k_4x + b_4) \\ B \in \Gamma(y = k_4x + b_4) \end{cases}; \quad \begin{cases} -3 = k_4 \cdot 0 + b_4 \\ 2 = k_4 \cdot (-1) + b_4 \end{cases};$$

$b_4 = -3$, $k_4 = -5$. Значит $\boxed{BD\colon y = -5x - 3}$.

Для нахождения точки пересечения диагоналей решим систему уравнений:

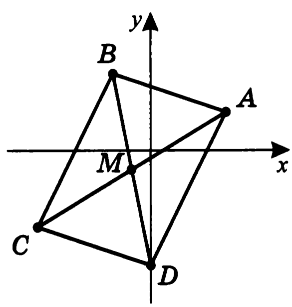
$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} \\ y = -5x - 3 \end{cases}; \quad -5x - 3 = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}; \quad x = -\frac{1}{2},$$

тогда $y = -5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3$; $y = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, точка пересечения диагоналей —

$M = AC \cap BD$; $\boxed{M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)}$.

Графическая иллюстрация решения задачи:



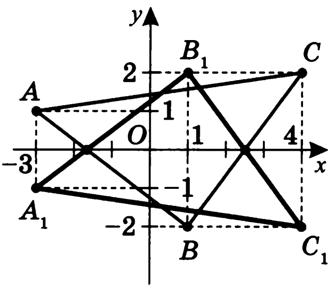
Примечание. Если бы задача была сформулирована несколько более широко, потребовалось бы рассмотреть еще два случая. Например, возможна следующая формулировка: «Три вершины параллелограмма имеют координаты $A\,(2; 1)$, $B\,(-1; 2)$ и $C\,(-3; -2)$. Найдите координаты точки D — четвертой вершины параллелограмма». В этом случае возможны были бы и случаи параллелограммов $ACBD$ и $ACDB$.

9. Треугольник ABC задан вершинами $A(-3;1)$, $B(1;-2)$ и $C(4;2)$.

а) Построим $\triangle A_1B_1C_1$, симметричный $\triangle ABC$ относительно оси абсцисс.

$A(-3;1) \to A_1(-3;-1)$
$B(1;-2) \to B_1(1;2)$
$C(4;2) \to C_1(4;-2)$

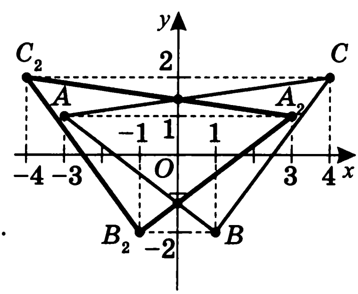
$S_{Ox}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$.



б) Построим $\triangle A_2B_2C_2$, симметричный $\triangle ABC$ относительно оси ординат.

$A(-3;1) \to A_2(3;1)$
$B(1;-2) \to B_2(-1;-2)$
$C(4;2) \to C_2(-4;2)$

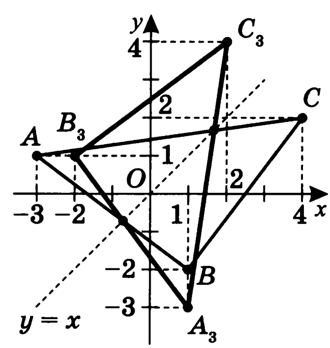
$S_{Oy}(\triangle ABC) = \triangle A_2B_2C_2$.



в) Построим $\triangle A_3B_3C_3$, симметричный $\triangle ABC$ относительно прямой $y = x$.

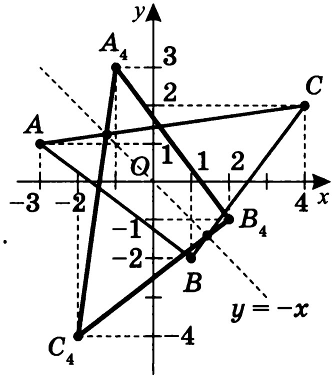
$A(-3;1) \to A_3(1;-3)$
$B(1;-2) \to B_3(-2;1)$
$C(4;2) \to C_3(2;4)$

$S_{y=x}(\triangle ABC) = \triangle A_3B_3C_3$.



г) Построим $\triangle A_4B_4C_4$, симметричный $\triangle ABC$ относительно прямой $y = -x$.

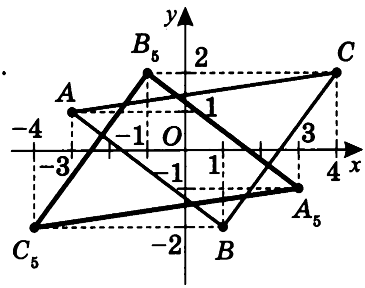
$A(-3; 1) \to A_4(-1; 3)$
$B(1; -2) \to B_4(2; -1)$
$C(4; 2) \to C_4(-2; -4)$
$S_{y=-x}(\triangle ABC) = \triangle A_4B_4C_4$.



д) Построим $\triangle A_5B_5C_5$, симметричный $\triangle ABC$ относительно начала координат.

$A(-3; 1) \to A_5(3; -1)$
$B(1; -2) \to B_5(-1; 2)$
$C(4; 2) \to C_5(-4; -2)$
$Z_O(\triangle ABC) = \triangle A_5B_5C_5$.

Очевидно, что
$AC \parallel A_5C_5$;
$AB \parallel A_5B_5$;
$BC \parallel B_5C_5$.



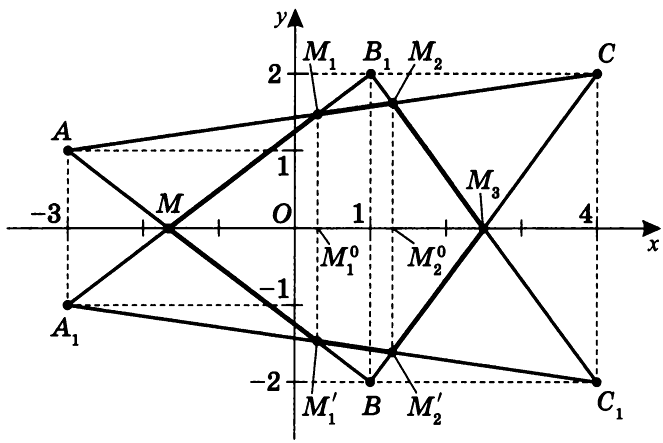
*е) 1. $\frac{4 \cdot 5^5}{3 \cdot 17 \cdot 31}$. 2. $\frac{225}{28}$. 3. $\frac{115\,453}{12\,138}$. 4. $\frac{5^4 \cdot 71\,761}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31^2}$. 5. 7.

Решение см. на с. 70.

Решение задачи 9 е).

1. $S_{Ox}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$.

   Построим на одном чертеже $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$.



   $\triangle ABC \cap \triangle A_1B_1C_1 = MM_1M_2M_3M_2'M_1'$.

   Найдем $S_{MM_1M_2M_3M_2'M_1'}$.

   1) Напишем уравнения прямых:

$$AB\colon \begin{cases} 1 = -3k + b \\ -2 = k + b \end{cases}; \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}; \boxed{y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}};$$

$$BC\colon \begin{cases} -2 = k + b \\ 2 = 4k + b \end{cases}; \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{10}{4} \end{cases}; \boxed{y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{4}};$$

$$AC\colon \begin{cases} 1 = -3k + b \\ 2 = 4k + b \end{cases}; \begin{cases} k = \frac{1}{7} \\ b = \frac{10}{7} \end{cases}; \boxed{y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}}.$$

   Учитывая симметрию $S_{Ox}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$ $(y \to -y,\ x \to x)$ (см. с. 53):

   $A_1B_1\colon\ y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$;

   $B_1C_1\colon\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$;

   $A_1C_1\colon\ y = -\frac{1}{7}x - \frac{10}{7}$.

2) Найдем координаты точек пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

$AB \cap A_1B_1 = M$; $\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \end{cases}$; $M\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$.

$AC \cap A_1B_1 = M_1$; $\begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \end{cases}$;

$M_1\left(\frac{5}{17}; \frac{25}{17}\right)$, тогда $M_1'\left(\frac{5}{17}; -\frac{25}{17}\right)$.

$AC \cap B_1C_1 = M_2$; $\begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases}$;

$M_2\left(\frac{40}{31}; \frac{50}{31}\right)$, тогда $M_2'\left(\frac{40}{31}; -\frac{50}{31}\right)$.

$BC \cap B_1C_1 = M_3$; $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases}$; $M_3\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

3) $S_{MM_1M_2M_3M_2'M_1'} = S_{\triangle MM_1M_1'} + S_{M_1M_2M_2'M_1'} + S_{\triangle M_2M_3M_2'}$.

$S_{\triangle MM_1M_1'} = \frac{1}{2}M_1'M_1 \cdot H_{M_1'M_1}$, где $M_1'M_1$ — разность ординат точек M_1' и M_1, а $H_{M_1'M_1} = MM_1^0$ — разность абсцисс точек M и M_1.

Тогда $S_{\triangle MM_1M_1'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{17} - \left(-\frac{25}{17}\right)\right) \cdot \left(\frac{5}{17} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) =$
$= \frac{25}{17} \cdot \frac{100}{17 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5^4}{3 \cdot 17^2}$.

Найдем $S_{M_1M_2M_2'M_1'}$.

Так как $M_1M_2M_2'M_1'$ — трапеция, то

$$S_{M_1M_2M_2'M_1'} = \frac{M_1M_1' + M_2M_2'}{2} \cdot M_2^0M_1^0;$$

$$S_{M_1M_2M_2'M_1'} = \frac{2 \cdot \left(\frac{25}{17} + \frac{50}{31}\right)}{2} \cdot \left(\frac{40}{31} - \frac{5}{17}\right) = \frac{5^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}{17^2 \cdot 31^2}.$$

$S_{\triangle M_2M_3M_2'} = \frac{1}{2} \cdot M_2M_2' \cdot M_3M_2^0;$

$S_{\triangle M_2M_3M_2'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{50}{31} - \left(-\frac{50}{31}\right)\right) \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{40}{31}\right) =$

$= \frac{50}{31} \cdot \frac{5 \cdot 15}{2 \cdot 31} = \frac{5^4 \cdot 3}{31^2}.$

Таким образом,

$S_{MM_1M_2M_3M_2'M_1'} = \frac{5^4 \cdot 4}{3 \cdot 17^2} + \frac{5^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}{17^2 \cdot 31^2} + \frac{5^4 \cdot 3}{31^2} =$

$= \frac{5^4}{3 \cdot 17^2 \cdot 31^2} \cdot \left(4 \cdot 31^2 + 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 + 9 \cdot 17^2\right) =$

$= \frac{5^4}{3 \cdot 17^2 \cdot 31^2} \cdot (3844 + 4095 + 2601) =$

$= \frac{5^4 \cdot 10\,540}{3 \cdot 17^2 \cdot 31^2} = \boxed{\frac{4 \cdot 5^5}{3 \cdot 17 \cdot 31}}$ $(10\,540 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31).$

4) Возможен более простой способ.

$AB = 5,\ \ BC = 5,\ \ AC = 5\sqrt{2}$, тогда $\angle ABC = 90°$.

Можно это заметить и иначе:

$AB\colon y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4},\ \ BC\colon y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3},\ -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1.$

Известно, что при $\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$ прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ взаимно *перпендикулярны.*

Значит $\triangle M_1B_1M_2$ — прямоугольный,

и $S_{MM_1M_2M_3M_2'M_1'} = S_{MB_1M_3B} - 2S_{\triangle M_1B_1M_2}.$

$S_{MB_1M_3B} = \frac{1}{2} \cdot M_3M \cdot BB_1,$

где $M_3M = \frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{6};\quad BB_1 = 4.$

Тогда $S_{MB_1M_3B} = \frac{25}{3}.$

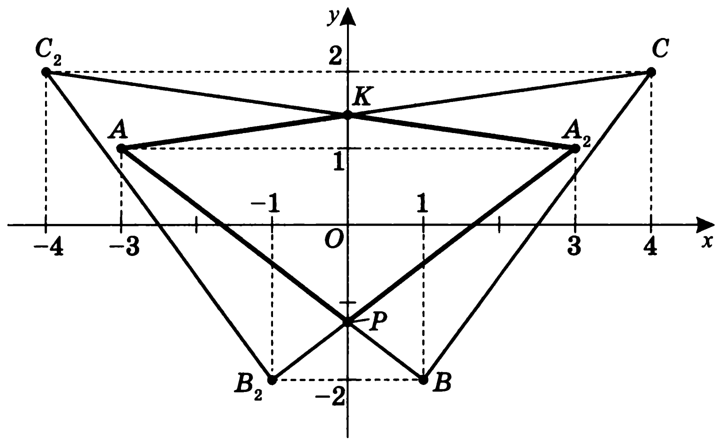
$S_{\triangle M_1B_1M_2} = \frac{1}{2} \cdot B_1M_1 \cdot B_1M_2$, где

$B_1M_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{17}\right)^2 + \left(2 - \frac{25}{17}\right)^2} = \frac{15}{17};$

$B_1M_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{40}{31}\right)^2 + \left(2 - \frac{50}{31}\right)^2} = \frac{15}{31}.$

Следовательно, $S_{MM_1M_2M_3M_2'M_1'} = \frac{4 \cdot 5^5}{3 \cdot 17 \cdot 31}.$

2. $S_{Oy}(\triangle ABC) = \triangle A_2B_2C_2$.



$\triangle ABC \cap \triangle A_2B_2C_2 = AKA_2P$.

Так как

$AC\colon\ y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

$BC\colon\ y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$,

$AC\colon\ y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$

то

$A_2C_2\colon\ y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

$B_2C_2\colon\ y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ (см. с. 53).

$A_2C_2\colon\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$

Тогда

$AC \cap A_2C_2 = K$, т. е. $K\left(0; \frac{10}{7}\right)$;

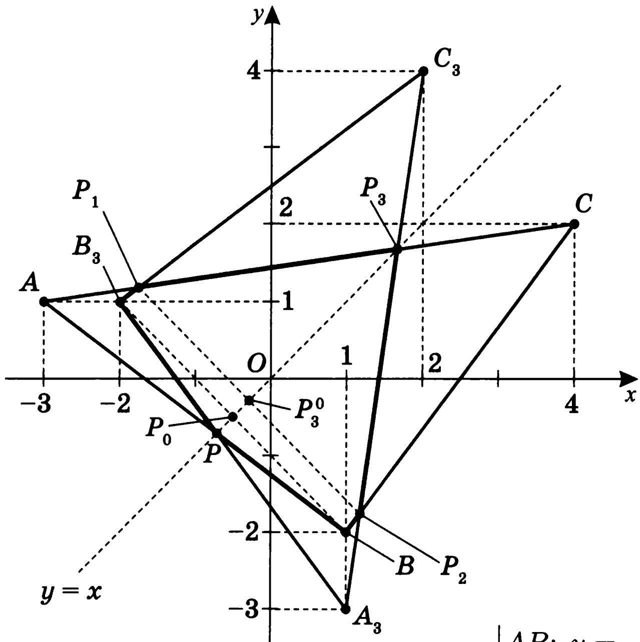
$AB \cap A_2B_2 = P$, т. е. $P\left(0; -\frac{5}{4}\right)$.

Так как $AA_2 \perp PK$, то AKA_2P — дельтоид, поэтому $S_{AKA_2P} = \frac{1}{2}AA_2 \cdot PK$.

$AA_2 = 3 + 3 = 6$; $PK = \frac{10}{7} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{75}{28}$,

значит, $S_{AKA_2P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{75}{28} \cdot 6 = \boxed{\frac{225}{28}}$.

3. $S_{y=x}(\triangle ABC) = \triangle A_3B_3C_3$.



1) Аналогично (см. с. 53), так как $\left|\begin{array}{l} AB\colon\ y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ BC\colon\ y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \\ AC\colon\ y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \end{array}\right.$,

то $\begin{array}{l} A_3B_3\colon\ x = -\frac{3}{4}y - \frac{5}{4} \\ B_3C_3\colon\ x = \frac{4}{3}y - \frac{10}{3} \\ A_3C_3\colon\ x = \frac{1}{7}y + \frac{10}{7} \end{array}$, т. е. $\begin{array}{l} A_3B_3\colon\ y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \\ B_3C_3\colon\ y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \\ A_3C_3\colon\ y = 7x - 10 \end{array}$,

2) Найдем координаты точек пересечения соответствующих сторон $\triangle ABC$ и $\triangle A_3B_3C_3$.

Ось симметрии — прямая l: $y = x$.

$AB \cap l = P$; $\quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = x \end{cases}$; $\quad P\left(-\frac{5}{7}; -\frac{5}{7}\right)$.

$AC \cap l = P_3$; $\quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = x \end{cases}$; $\quad P_3\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

$$AC \cap B_3C_3 = P_1; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \end{cases}; \quad P_1\left(-\frac{30}{17}; \frac{20}{17}\right).$$

$S_{y=x}(P_1) = P_2$, значит, $P_2\left(\frac{20}{17}; -\frac{30}{17}\right)$.

$P_1P_2 \perp l$ и $BB_3 \perp l$, значит, $B_3BP_2P_1$ — трапеция.

Найдем уравнение P_1P_2.
$P_1 \in \Gamma(y = -x + b)$; $\frac{20}{17} = -\frac{30}{17} \cdot (-1) + b$; $b = -\frac{10}{17}$;
P_1P_2: $y = -x - \frac{10}{17}$.

Аналогично найдем уравнение BB_3.
$B \in \Gamma(y = -x + b)$; $1 = -2 \cdot (-1) + b$; $b = -1$;
BB_3: $y = -x - 1$.

Тогда точки пересечения с осью симметрии P_3^0 и P_0 будут таковы:

$$P_1P_2 \cap l = P_3^0; \quad \begin{cases} y = -x - \frac{10}{17} \\ y = x \end{cases}; \quad P_3^0\left(-\frac{5}{17}; -\frac{5}{17}\right);$$

$$BB_3 \cap l = P_0; \quad \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = x \end{cases}; \quad P_0\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

3) Найдем $S_{BPB_3P_1P_3P_2} = S_{\triangle PB_3B} + S_{BB_3P_1P_2} + S_{\triangle P_1P_3P_2}$.

Вычислим необходимые длины сторон:

$$BB_3 = \sqrt{(-2-1)^2 + (1+2)^2} = 3\sqrt{2}.$$

$$PP_0 = \sqrt{\left(-\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{14}\sqrt{2}.$$

$$P_1P_2 = \sqrt{\left(-\frac{30}{17} - \frac{20}{17}\right)^2 + \left(\frac{20}{17} + \frac{30}{17}\right)^2} = \frac{50}{17}\sqrt{2}.$$

$$P_3^0P_0 = \sqrt{\left(-\frac{5}{17} + \frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{17} - \frac{5}{7}\right)^2} = \frac{50}{7\cdot 17}\sqrt{2}.$$

$$P_3P_3^0 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{13}{6}\sqrt{2}.$$

Теперь определим площади соответствующих фигур:

$S_{\triangle PB_3B} = \frac{1}{2} \cdot BB_3 \cdot PP_0;$

$S_{\triangle PB_3B} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{14}\sqrt{2} = \frac{9}{14}.$

$S_{BB_3P_1P_2} = \frac{BB_3+P_1P_2}{2} \cdot P_3^0P_0;$

$S_{BB_3P_1P_2} = \frac{3\sqrt{2}+\frac{50}{17}\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{50}{7\cdot 17}\sqrt{2} = \frac{101\cdot 2\cdot 5^2}{7\cdot 17^2}.$

$S_{\triangle P_1P_3P_2} = \frac{1}{2} \cdot P_1P_2 \cdot P_3P_3^0;$

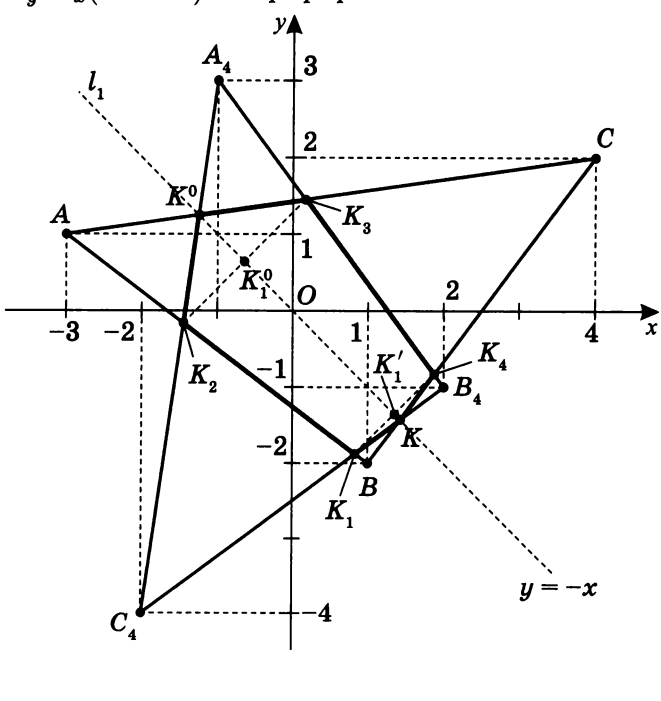
$S_{\triangle P_1P_3P_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{17}\sqrt{2} \cdot \frac{13}{6}\sqrt{2} = \frac{5^2\cdot 13}{3\cdot 17}.$

$S_{BPB_3P_1P_3P_2} = \frac{3^2}{2\cdot 7} + \frac{2\cdot 5^2\cdot 101}{7\cdot 17^2} + \frac{5^2\cdot 13}{3\cdot 17} =$

$= \frac{3^3\cdot 17^2+2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 101+2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13\cdot 17}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 17^2} =$

$= \frac{7803+30\,300+77\,350}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 17^2} = \boxed{\frac{115\,453}{12\,138}}.$

4. $S_{y=-x}(\triangle ABC) = A_4B_4C_4.$



1) Учитывая симметрию относительно оси l_1: $y = -x$ (см. с. 53), заменим x на $-y$ и y на $-x$.

Так как
$$\begin{aligned} AB&: y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} & -x &= \frac{3}{4}y - \frac{5}{4} \\ BC&: y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}, \quad \text{то} & -x &= -\frac{4}{3}y - \frac{10}{3}, \\ AC&: y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} & -x &= -\frac{1}{7}y + \frac{10}{7} \end{aligned}$$

т. е.
$$\begin{aligned} A_4B_4&: y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \\ B_4C_4&: y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{7} \\ A_4C_4&: y = 7x + 10 \end{aligned}.$$

2) Найдем точки пересечения $\triangle ABC$ и $\triangle A_4B_4C_4$ с осью симметрии l_1.

$$BC \cap l_1 = K; \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \\ y = -x \end{cases}; \quad K\left(\frac{10}{7}; -\frac{10}{7}\right).$$

$$AC \cap l_1 = K^0; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = -x \end{cases}; \quad K^0\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

Далее найдем

$$AC \cap A_4B_4 = K_3; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases}; \quad K_3\left(\frac{5}{31}; \frac{45}{31}\right).$$

Так как $S_{y=-x}(K_3) = K_2$,

то $A_4C_4 \cap AB = K_2\left(-\frac{45}{31}; -\frac{5}{31}\right)$.

Так как $K_2K_3 \perp l_1$, то K_2K_3 имеет вид $y = x + b$, но $K_3 \in \Gamma(y = x + b)$, тогда

$\frac{45}{31} = \frac{5}{31} + b$, т. е. $b = \frac{40}{31}$, значит, K_2K_3: $y = x + \frac{40}{31}$.

$$l_1 \cap K_2K_3 = K_1^0; \quad \begin{cases} y = x + \frac{40}{31} \\ y = -x \end{cases}; \quad K_1^0\left(-\frac{20}{31}; \frac{20}{31}\right).$$

3) $BC \cap A_4B_4 = K_4;$ $\quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases};$ $\quad K_4\left(\frac{15}{8}; -\frac{5}{6}\right).$

Так как $S_{y=-x}(K_4) = K_1$, то $K_1\left(\frac{5}{6}; -\frac{15}{8}\right).$

По аналогии с предыдущим найдем уравнение прямой K_1K_4 и координаты точки пересечения с осью l_1.

K_1K_4: $y = x - \frac{65}{24}$;

$l_1 \cap K_1K_4 = K_1'$, где $K_1'\left(\frac{65}{48}; -\frac{65}{48}\right).$

4) Выполним вычисления, необходимые для нахождения площадей фигур, составляющих фигуру $KK_1K_2K^0K_3K_4$:

$$K_2K_3 = \sqrt{\left(\frac{5}{31} + \frac{45}{31}\right)^2 + \left(-\frac{5}{31} - \frac{45}{31}\right)^2} = \frac{2 \cdot 5^2}{31}\sqrt{2}.$$

$$K_1^0K^0 = \sqrt{\left(-\frac{5}{4} + \frac{20}{31}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{20}{31}\right)^2} = \frac{5^2}{2^2 \cdot 31}\sqrt{2}.$$

$$K_1'K_1^0 = \sqrt{\left(\frac{65}{48} + \frac{20}{31}\right)^2 \cdot 2} = \frac{5^2 \cdot 119}{2^4 \cdot 3 \cdot 31}\sqrt{2}.$$

$$K_1K_4 = \sqrt{\left(\frac{5}{6} - \frac{15}{8}\right)^2 \cdot 2} = \frac{5^2}{2^3 \cdot 3}\sqrt{2}.$$

$$KK_1' = \sqrt{\left(\frac{10}{7} - \frac{65}{48}\right)^2 \cdot 2} = \frac{5^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 7}\sqrt{2}.$$

5) $S_{KK_1K_2K^0K_3K_4} = S_{\triangle K_2K^0K_3} + S_{K_1K_2K_3K_4} + S_{\triangle KK_1K_4}.$

$S_{\triangle K_2K^0K_3} = \frac{1}{2}K_2K_3 \cdot K_1^0K^0;$

$S_{\triangle K_2K^0K_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 5^2\sqrt{2}}{31} \cdot \frac{5^2\sqrt{2}}{2^2 \cdot 31} = \frac{5^4}{2 \cdot 31^2}.$

$$S_{K_1K_2K_3K_4} = \frac{K_2K_3+K_1K_4}{2} \cdot K_1K_1^0.$$

Очевидно, что $K_1K_2K_3K_4$ — трапеция ($K_1K_4 \parallel K_2K_3$).

$$S_{K_1K_2K_3K_4} = \frac{\frac{2\cdot5^2}{31}\sqrt{2}+\frac{5^2}{2^3\cdot3}\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5^2\cdot119\cdot\sqrt{2}}{2^4\cdot3\cdot31} = \frac{5^4\cdot79\cdot119}{2^7\cdot3^2\cdot31^2}.$$

$$S_{\triangle KK_1K_4} = \frac{1}{2} \cdot K_1K_4 \cdot KK_1';$$

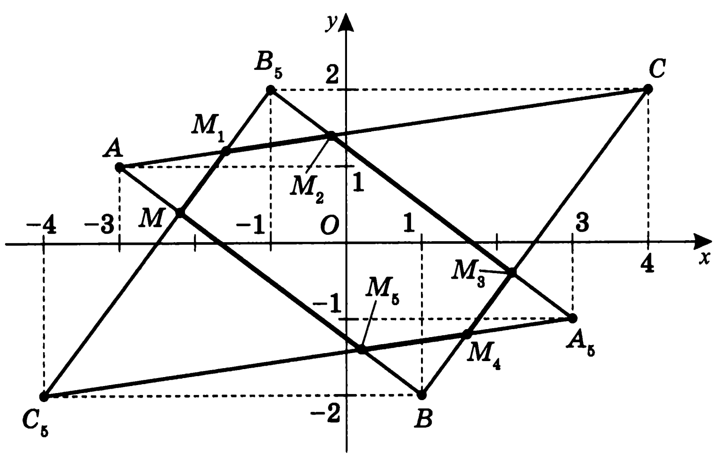
$$S_{\triangle KK_1K_4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2\sqrt{2}}{2^3\cdot3} \cdot \frac{5^2\sqrt{2}}{2^4\cdot3\cdot7} = \frac{5^4}{2^6\cdot2^2\cdot7}.$$

$$S_{KK_1K_2K^0K_3K_4} = \frac{5^4}{2\cdot31^2} + \frac{5^4\cdot79\cdot119}{2^7\cdot2^2\cdot31^2} + \frac{5^4}{2^6\cdot3^2\cdot7} =$$

$$= \frac{5^4}{2^7\cdot3^2\cdot7\cdot31^2} \cdot \left(2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 + 7 \cdot 79 \cdot 119 + 2 \cdot 31^2\right) =$$

$$= \frac{5^4}{2^7\cdot3^2\cdot7\cdot31^2} \cdot (4032 + 65\,807 + 1922) = \boxed{\frac{5^4\cdot71\,761}{2^7\cdot3^2\cdot7\cdot31^2}}.$$

5. $Z_0(\triangle ABC) = A_5B_5C_5$.



1) Учтем, что при центральной симметрии $x \to -x$, $y \to -y$ (см. с. 53).

AB: $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$,

тогда A_5B_5: $-y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$; т. е. A_5B_5: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

$BC\colon y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$,

тогда $B_5C_5\colon -y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$, т. е. $B_5C_5\colon y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$.

$AC\colon y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$,

тогда $A_5C_5\colon -y = -\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$, т. е. $A_5C_5\colon y = \frac{1}{7}x - \frac{10}{7}$.

2) Найдем координаты точек пересечения соответствующих сторон $\triangle ABC$ и $\triangle A_5B_5C_5$.

$AC \cap B_5C_5 = M_1;\quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases};\quad M_1\left(-\frac{8}{5}; \frac{6}{5}\right)$,

значит так как $Z_0(M_1) = M_4$, то $M_4\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.

$AC \cap A_5B_5 = M_2;\quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \end{cases};\quad M_2\left(-\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$,

значит так как $Z_0(M_2) = M_5$, то $M_5\left(\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}\right)$.

$AC \cap B_5C_5 = M;\quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases};\quad M\left(-\frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right)$,

значит так как $Z_0(M) = M_3$, то $M_3\left(\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

3) $S_{MM_1M_2M_3M_4M_5} = S_{MB_5M_3B} - 2S_{\triangle M_1B_5M_2}$.

Отметим, что $A_5B_5 \perp BC$. Покажем это.

$A_5B_5\colon y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, $BC\colon y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$.

Так как $k_1 = -\frac{3}{4}$, и $k_2 = \frac{4}{3}$,

то $-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1$, и $k_1 \cdot k_2 = -1$,

что и требовалось доказать.

Тогда MB_5M_3B — прямоугольник, а $M_1B_5M_2$ — прямоугольный треугольник.

4) Вычислим необходимые длины отрезков:

$$MB_5 = \sqrt{\left(-\tfrac{11}{5}+1\right)^2 + \left(\tfrac{2}{5}-2\right)^2} = 2;$$

$$MB = \sqrt{\left(-\tfrac{11}{5}-1\right)^2 + \left(\tfrac{2}{5}+2\right)^2} = 4;$$

$$M_1B_5 = \sqrt{\left(-\tfrac{8}{5}+1\right)^2 + \left(\tfrac{6}{5}-2\right)^2} = 1;$$

$$M_2B_5 = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{5}+1\right)^2 + \left(\tfrac{7}{5}-2\right)^2} = 1.$$

Тогда:

$S_{MB_5M_3B} = MB_5 \cdot MB$; $\quad S_{MB_5M_3B} = 2 \cdot 4 = 8.$

$S_{\triangle M_1B_5M_2} = \frac{1}{2} \cdot M_1B_5 \cdot M_2B_5$; $\quad S_{\triangle M_1B_5M_2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$

5) $S_{MM_1M_2M_3M_4M_5} = 8 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{7}.$

(Конечно, здесь учтены результаты пунктов 3) и 4).)

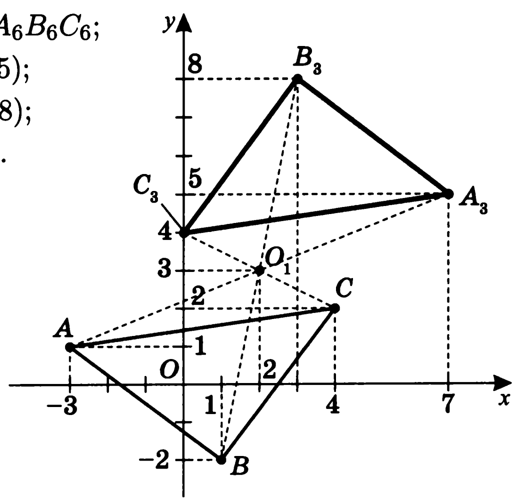
10. Постройте $\triangle A_6B_6C_6$, симметричный $\triangle ABC$ — $A(-3;1)$, $B(1;-2)$, $C(4;2)$ — относительно точки $O_1(2;3)$, и укажите координаты его вершин.

$Z_{O_1}(\triangle ABC) = \triangle A_6B_6C_6$;

$A(-3;1) \to A_6(7;5)$;

$B(1;-2) \to B_6(3;8)$;

$C(4;2) \to C_6(0;4)$.



Самостоятельная работа 4

I вариант	II вариант
l_1: $2x + y = 3$	l_1: $3x + 2y = 7$
l_2: $3x - 2y = 1$	l_2: $x - y = -1$
l_3: $x + 4y = -9$	l_3: $x - 6y = 9$

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми l_1, l_2 и l_3.

2. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, где $A = l_1 \cap l_2$; $B = l_1 \cap l_3$; $C = l_2 \cap l_3$.

3. Найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

4. Укажите координаты вершин параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, симметричного $ABCD$ относительно оси абсцисс.

5. Укажите координаты вершин параллелограмма $A_2B_2C_2D_2$, симметричного $ABCD$ относительно оси ординат.

6. Укажите координаты вершин параллелограмма $A_3B_3C_3D_3$, симметричного $ABCD$ относительно прямой $y = x$.

7. Укажите координаты вершин параллелограмма $A_4B_4C_4D_4$, симметричного $ABCD$ относительно прямой $y = -x$.

8. Укажите координаты вершин параллелограмма $A_5B_5C_5D_5$, симметричного $ABCD$ относительно начала координат.

***9.** Найдите площади фигур, являющихся общими частями фигур пунктов 4–8.

10. Укажите координаты вершин параллелограмма $A_6B_6C_6D_6$, симметричного $ABCD$ относительно точки $O_1\,(2; 3)$.

Кусочно-линейные функции

Примеры кусочно-линейных функций

Пример 1. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} 2 - x, & x < -1 \\ 2x - 1, & -1 \leqslant x < 1 \\ 2, & 1 \leqslant x < 2 \\ 3 - x, & x \geqslant 2 \end{cases}.$$

(Фигурная скобка обозначает в данном случае не систему, а знак составной функции.)

Для этого построим на каждом из промежутков графики функции, а затем «соберем» их на одном чертеже, т. е. в одной системе координат.

$y = 2 - x$;

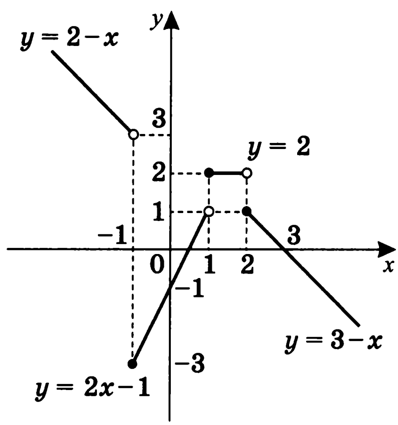
x	y
-1	3
-2	4

$y = 2x - 1$;

x	y
-1	-3
1	1

$y = 3 - x$;

x	y
2	1
3	0



<u>Определение 1.</u> Модулем числа a называется само число a, если оно не отрицательно, и число $-a$, если a отрицательно.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Пример 2. Постройте график функции $y = 2|x-1| + x$.

Так как $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geqslant 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$, то:

а) $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y = 2|x-1| + x \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y = 2x - 2 + x \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$;

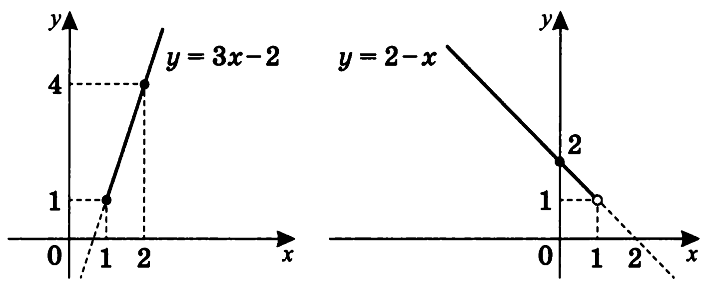
x	y
1	1
2	4

б) $\begin{cases} x < 1 \\ y = 2(1-x) + x \end{cases}$; $\begin{cases} x < 1 \\ y = 2 - 2x + x \end{cases}$;

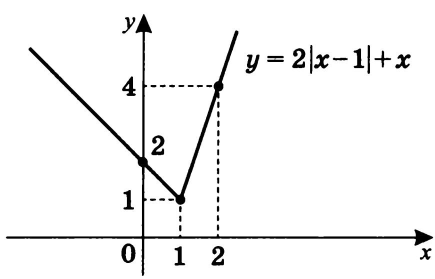
$\begin{cases} x < 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$;

x	y
0	2
1	1

а) б)



Значит, график функции $y = 2|x-1| + x$ есть объединение двух лучей, полученных в пунктах а) и б).



Пример 3. Постройте график функции $y = \frac{x^2-2x}{|x-2|} - \frac{2|x-2|}{x-2} + x$.

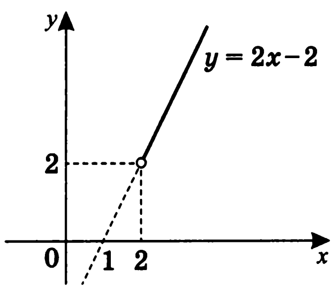
$D(y): \ x \neq 2$.

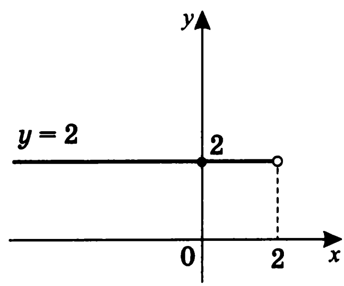
Так как $x \neq 2$, то дробь можно сократить на $(x-2)$:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, \ x \geqslant 2 \\ 2-x, \ x < 2 \end{cases}.$$

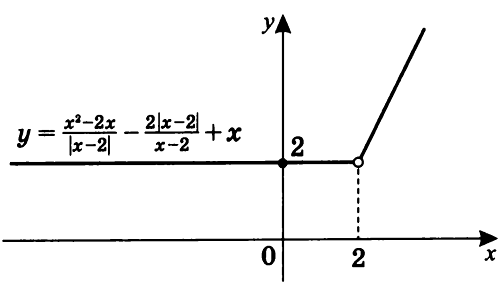
а) $\begin{cases} x > 2 \\ y = \frac{x(x-2)}{x-2} - \frac{2(x-2)}{x-2} + x \end{cases}$; $\begin{cases} x > 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 2 \\ y = \frac{x(x-2)}{2-x} - \frac{2(2-x)}{x-2} + x \end{cases}$; $\begin{cases} x < 2 \\ y = 2 \end{cases}$





Значит, график функции $y = \frac{x^2-2x}{|x-2|} - \frac{2|x-2|}{x-2} + x$ после «сборки» выглядит так:

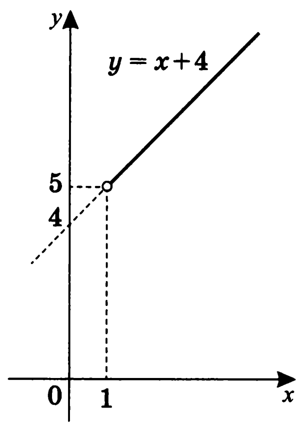


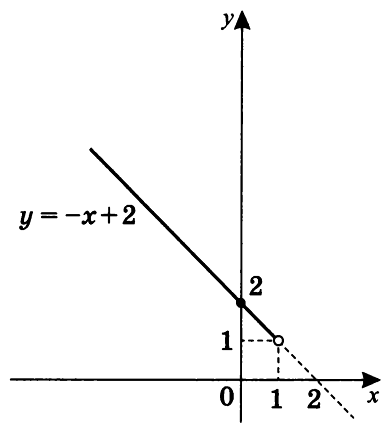
Пример 4. Постройте график функции $y = \frac{x^2-1}{|x-1|} + 3$.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geqslant 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}. \qquad D(y):\ x \neq 1.$$

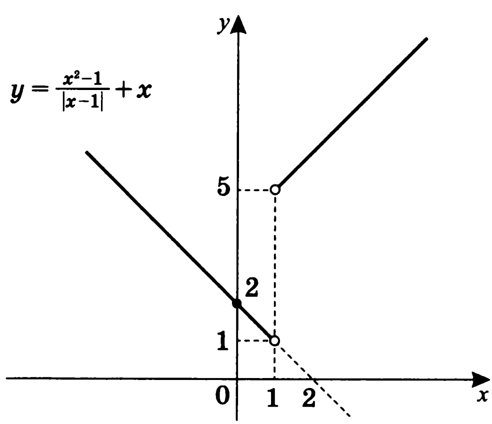
а) $\begin{cases} x > 1 \\ y = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 1 \\ y = \frac{(x-1)(x+1)}{1-x} + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$





Значит, график функции $y = \frac{x^2-1}{|x-1|} + 3$ после «сборки» будет таким:

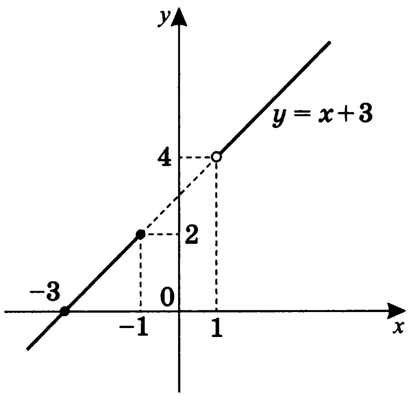


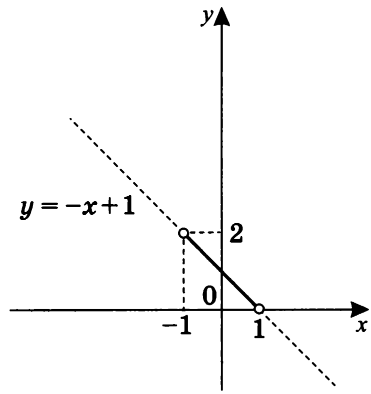
Пример 5. Постройте график функции $y = \frac{|x^2-1|}{x-1} + 2$.

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, \ x^2 - 1 \geqslant 0 \ (x \leqslant -1, \ x \geqslant 1) \\ 1 - x^2, \ x^2 - 1 < 0 \ (-1 < x < 1) \end{cases}.$$

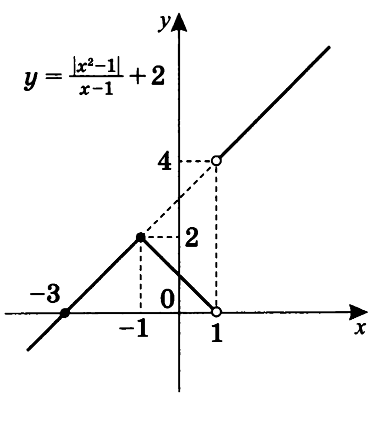
$D(y): \ x \neq 1.$

а) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x \leqslant -1 \end{array} \right. \\ y = x + 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$





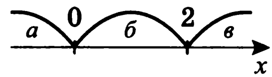
Значит, график функции $y = \frac{|x^2-1|}{x-1} + 2$ после «сборки» будет таким:



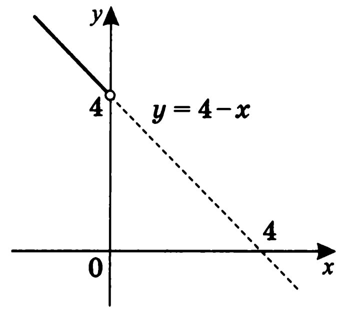
Пример 6. Постройте график функции $y = 2|x-2| - |x|$.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geqslant 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}; \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Разобьем числовую ось на промежутки корнями подмодульных выражений:

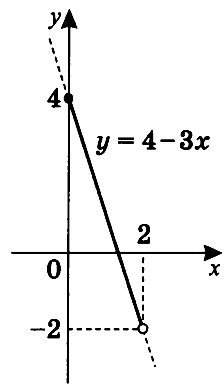


Получили три промежутка. Отдельно на каждом из них рассмотрим график данной функции, а затем склеим все три графика.



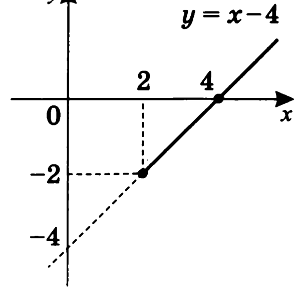
а) $\begin{cases} x < 0 \\ y = 2(2-x) + x \end{cases}$;

$\begin{cases} x < 0 \\ y = 4 - x \end{cases}$.



б) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < 2 \\ y = 2(2-x) - x \end{cases}$;

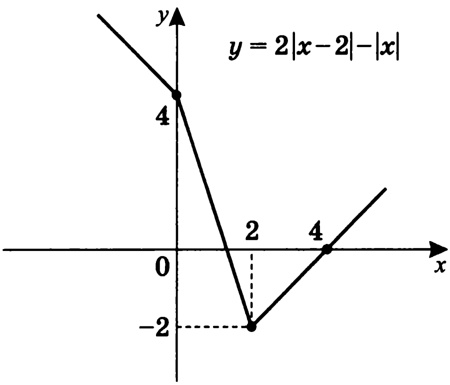
$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < 2 \\ y = 4 - 3x \end{cases}$.



в) $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ y = 2(x-2) - x \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant 2 \\ y = x - 4 \end{cases}$

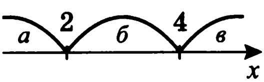
Значит, график функции $y = 2|x - 2| - |x|$ будет выглядеть так:



Пример 7. Постройте график функции $y = |x - 2| - |x - 4|$.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, \ x \geqslant 2 \\ 2-x, \ x < 2 \end{cases};$$

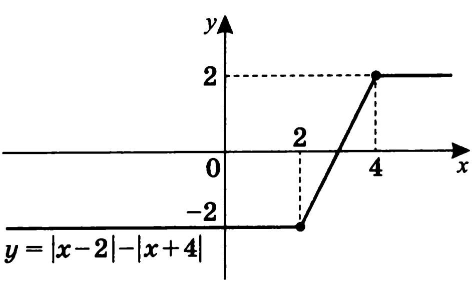
$$|x-4| = \begin{cases} x-4, \ x \geqslant 4 \\ 4-x, \ x < 4 \end{cases}.$$



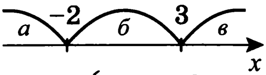
а) При $x < 2$: $y = 2 - x + x - 4 = -2$.

б) При $2 \leqslant 2 < 4$: $y = x - 2 + x - 4 = 2x - 6$.

в) При $x \geqslant 4$: $y = x - 2 + 4 - x = 2$.



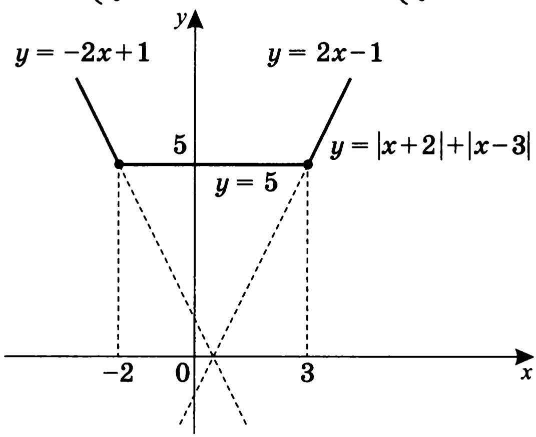
Пример 8. Постройте график функции $y = |x+2| + |x-3|$.



а) $\begin{cases} x < -2 \\ y = -x-2-x+3 \end{cases}$; $\begin{cases} x < -2 \\ y = -2x+1 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} -2 \leqslant x < 3 \\ y = x+2-x+3 \end{cases}$; $\begin{cases} -2 \leqslant x < 3 \\ y = 5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y = x+2+x-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y = 2x-1 \end{cases}$.

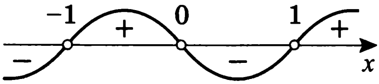


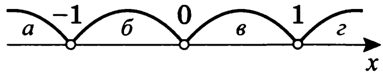
Пример 9. Постройте график функции $y = \frac{|x^3-x|}{x^2-1} + \frac{2(x^2-x)}{|x|}$.

$$|x^3 - x| = \begin{cases} x - x^3, \ x < -1 \\ x^3 - x, \ -1 < x < 0 \\ x - x^3, \ 0 < x < 1 \\ x^3 - x, \ x > 1 \end{cases}; \quad |x| = \begin{cases} x, \ x \geqslant 0 \\ -x, \ x < 0 \end{cases}.$$

Пусть $t(x) = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$.

$D(y)$: $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$;

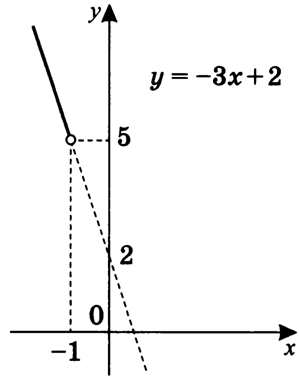




(Здесь использован метод интервалов для решения неравенств.)

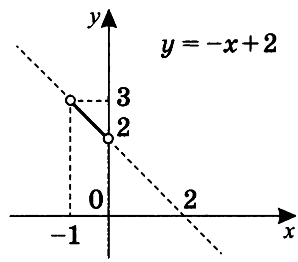
а) $\begin{cases} x < -1 \\ y = -x - 2(x-1) \end{cases}$;

$\begin{cases} x < -1 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$.



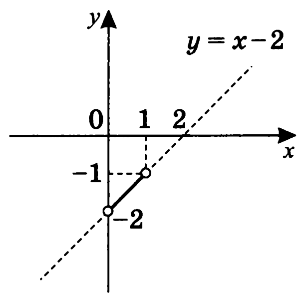
б) $\begin{cases} -1 < x < 0 \\ y = x - 2(x-1) \end{cases}$;

$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ y = -x + 2 \end{cases}$.



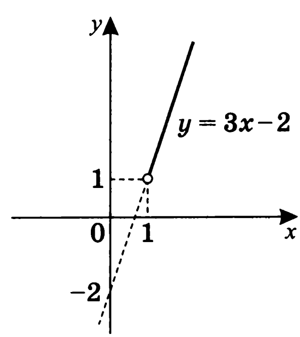
в) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y = -x + 2(x-1) \end{cases}$;

$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$.

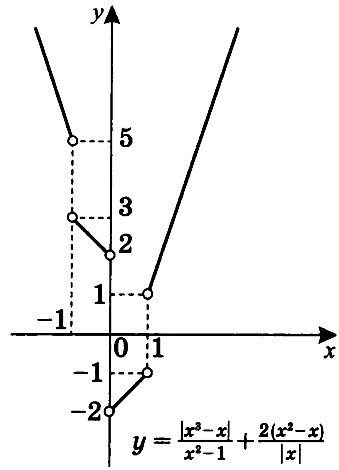


г) $\begin{cases} x > 1 \\ y = x + 2(x-1) \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$.



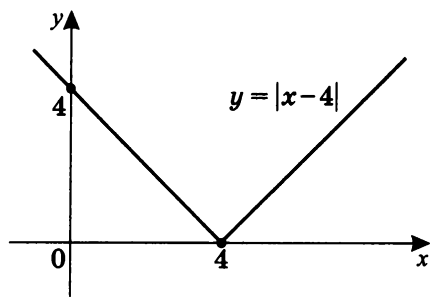
Значит, итоговый график будет выглядеть так.



Пример 10. Постройте график функции $y=\Big||x-4|-2\Big|$.

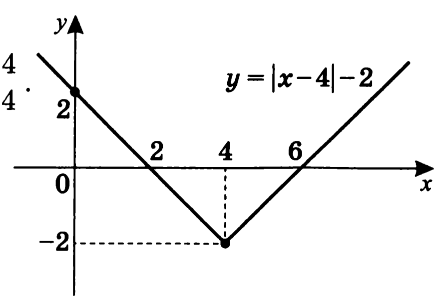
а) $y=|x-4|$.

$$|x-4|=\begin{cases}x-4, & x\geqslant 4\\ 4-x, & x<4\end{cases}.$$



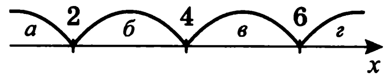
б) $y=|x-4|-2$.

$$|x-4|-2=\begin{cases}x-6, & x\geqslant 4\\ 2-x, & x<4\end{cases}.$$

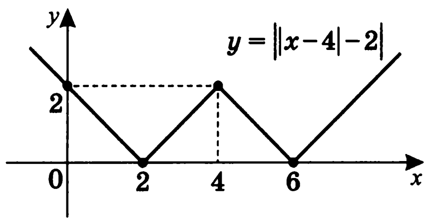


в) $y = \Big||x-4|-2\Big|$.

$|x-4| = 2$ при $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=2 \end{array}\right.$.



$$|x-4| = \begin{cases} x-6, & x \geqslant 6 \\ 6-x, & 4 \leqslant x < 6 \\ x-2, & 2 \leqslant x < 4 \\ 2-x, & x < 4 \end{cases}.$$



Далее подобные примеры будут более подробно разбираться в главе, посвященной построению графиков методом преобразований. См. А. Х. Шахмейстер «Построение, преобразования и исследование графиков. Параметры», часть II.

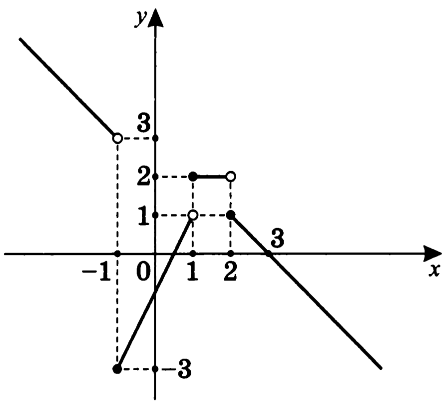
Анализ и чтение графиков

Примеры анализа и чтения графиков

В этом параграфе на примере ранее построенных в параграфе «Кусочно-линейные функции» графиков поучимся анализировать ряд интересных свойств и характеристик самой функции. Для этого используем наглядные графические образы.

Пример 1. Рассмотрим график функции

$$y = \begin{cases} 2 - x, & x < -1 \\ 2x - 1, & -1 \leqslant x < 1 \\ 2, & 1 \leqslant x < 2 \\ 3 - x, & x \geqslant 2 \end{cases}$$



<u>Определение</u>. Если график функции можно начертить, не отрывая руки от чертежа, то такая функция называется непрерывной.

В данном случае мы имеем дело с разрывом графика функции в точках с абциссами, равными -1, 1 и 2.

Напомним наглядное правило: если «идти» по графику функции слева направо (по стрелке направления оси Ox), то если при этом мы поднимаемся вверх, то функция возрастающая, а если опускаемся вниз — убывающая (см. с. 9).

Внимательно читая чертеж слева направо по оси абсцисс, отметим, что:

на $(-\infty; -1)$ функция убывает;

на $[-1; 1)$ функция возрастает;

на $[1; 2)$ функция постоянна;

на $[2; +\infty)$ функция убывает.

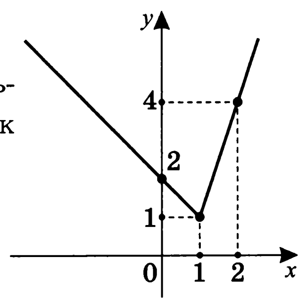
При этом отметим, что:

а) промежутки мы берем, исходя из условия задания функции;

б) возрастающая или убывающая функция называется *монотонной* функцией;

в) слова *возрастает* и *убывает* означают, что данное свойство выполняется только на конкретном промежутке или промежутках, но не характерно для данной функции на всей области определения (обратите внимание на окончания этих слов).

Пример 2. $y = 2|x-1| + x$.



а) Функция непрерывная — зрительно, графически видно, что график ее можно начертить, не отрывая руки от чертежа.

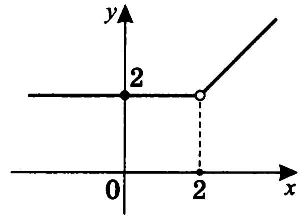
б) На $(-\infty; 1]$ функция убывает. На $[1; +\infty)$ функция возрастает.

в) Отметим, что зрительно вид графика напоминает ущелье, впадину, яму. В этом случае говорят о минимальном значении или о *минимуме* в точке с координатами $(1; 1)$. Обозначают это так: $y_{\min} = 1$ или $y(1) = y_{\min} = 1$.

При этом $x = 1$ — абсцисса минимума, $y = 1$ — минимум (или его значение).

В школьной практике говорят, что $x = 1$ — точка минимума, а $y = 1$ — минимум функции.

Пример 3. $y = \frac{x^2-2x}{|x-2|} - \frac{2|x-2|}{x-2} + x.$



а) В точке с координатами $(2;2)$ график функции прерывается, или, как иначе говорят, график функции терпит разрыв в точке с абсциссой $x = 2$.

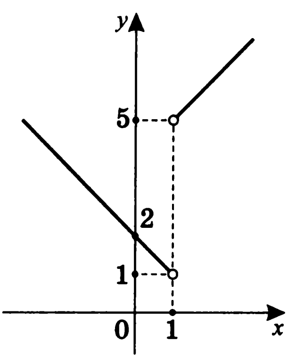
б) На $(-\infty;2)$ функция постоянна, на $(2;+\infty)$ функция возрастает.

в) Отметим, что зрительно по графику видно, что $y = 2$ — *наименьшее* значение функции, то есть на графике функции нет точек, ординаты которых были бы меньше двух.

Или: ординаты любых точек графика больше или равны двум, то есть $y \geqslant 2$.

Пишут $y_{\text{наим}} = 2$.

Пример 4. $y = \frac{x^2-1}{|x-1|} + 3.$

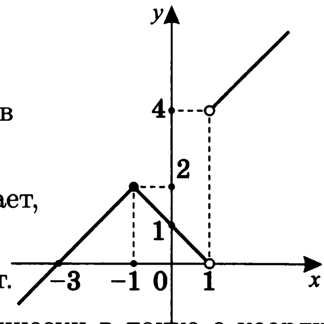


а) График функции прерывается в точке с абсциссой $x = 1$.

б) На $(-\infty;1)$ функция убывает, на $(1;+\infty)$ функция возрастает.

в) Отметим, что зрительно, графически видно, что функция не имеет наименьшего значения, то есть $y > 1$.

Или: ординаты любых точек графика функции строго больше единицы.

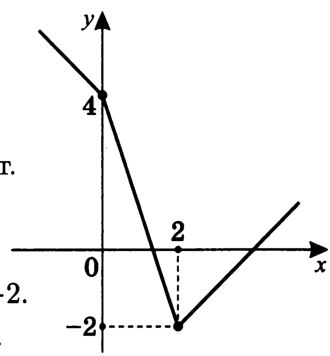


Пример 5. $y = \frac{|x^2-1|}{x-1} + 2$.

а) График функции терпит разрыв в точке с абсциссой $x = 1$.

б) На $(-\infty; -1]$ функция возрастает, на $[-1; 1)$ функция убывает, на $(1; +\infty)$ функция возрастает.

в) Отметим, что зрительно, графически в точке с координатами $(-1; 2)$ имеется *максимум* (похоже на вершину), причем $x = -1$ — абсцисса максимума, а $y = 2$ — значение в точке максимума, или просто максимум функции. Иногда говорят, что $x = -1$ — точка максимума, а $y = 2$ — максимум функции.
Записывают так: $y_{\max} = 2$, или $y(-1) = y_{\max} = 2$.



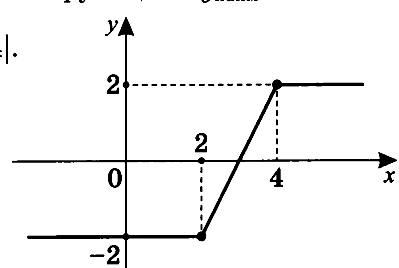
Пример 6. $y = 2|x - 2| - |x|$.

а) Функция непрерывная.

б) На $(-\infty; 2]$ функция убывает, на $[2; +\infty)$ функция возрастает.

в) В точке с абсциссой $x = 2$ существует минимум $y_{\min} = -2$, или $y(2) = y_{\min} = -2$.

г) $y = -2$ является в данном случае и наименьшим значением функции: $y_{\text{наим}} = -2$.



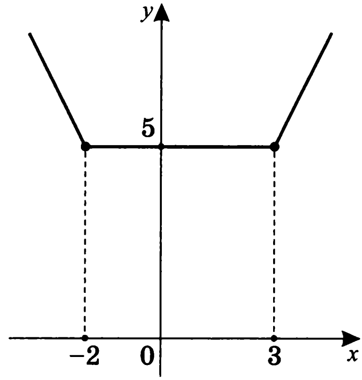
Пример 7. $y = |x - 2| - |x - 4|$.

а) Функция непрерывная.

б) На $(-\infty; 2]$ — постоянна, на $[2; 4]$ — возрастает, на $[2; +\infty)$ — постоянна.

в) $y = -2$ — наименьшее значение: $y_{\text{наим}} = -2$;
$y = 2$ — наибольшее значение: $y_{\text{наиб}} = 2$.

Пример 8. $y = |x+2| + |x-3|$.

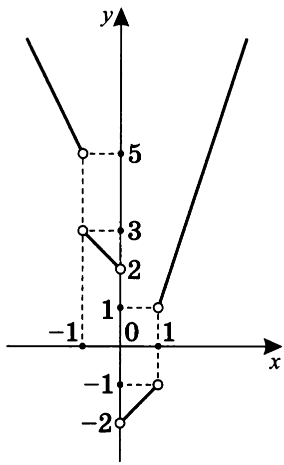


а) Функция непрерывная.

б) На $(-\infty; -2]$ — убывает,
на $[-2; 3]$ — постоянна,
на $[3; +\infty)$ — возрастает.

в) $y = 5$ — наименьшее значение функции: $y_{\text{наим}} = 5$.

Пример 9. $y = \dfrac{|x^3-x|}{x^2-1} + \dfrac{2(x^2-x)}{|x|}$.



а) График функции терпит разрыв в точках с абсциссами -1, 0 и 1.

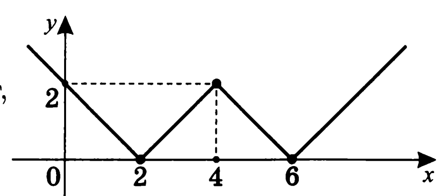
б) На $(-\infty; -1)$ — убывает,
на $(-1; 0)$ — убывает,
на $(0; 1)$ — возрастает,
на $(1; +\infty)$ — возрастает.

в) Минимальных или максимальных значений нет.

г) Наибольшего или наименьшего значения нет.

Пример 10. $y = \big||x-4| - 2\big|$.

а) Функция непрерывная.



б) На $(-\infty; 2]$ — убывает,
на $[2; 4]$ — возрастает,
на $[4; 6]$ — убывает,
на $[6; +\infty)$ — возрастает.

в) $x = 2$ — точка минимума $y_{\min} = 0$,
т. е. $y(2) = y_{\min} = 0$;

$x = 4$ — точка максимума $y_{\max} = 2$,
т. е. $y(4) = y_{\max} = 2$;

$x = 6$ — точка минимума $y_{\min} = 0$,
т. е. $y(6) = y_{\min} = 0$.

Зрительно на графике две «ямы» и одна «вершина».

г) $y = 0$ — наименьшее значение функции, т. е. $y_{\text{наим}} = 0$.
Наибольшего значения функции нет.

Примечание. Желающим более углубленно и подробно разобраться с идеями, отраженными в данном практикуме, рекомендуем: А. Х. Шахмейстер. Введение в математический анализ. СПб., М., 2010. С. 22–25, 65, 238, 243.

Тренировочная работа 2

Постройте графики функций и исследуйте на:

1. промежутки монотонности;
2. максимальные и минимальные значения;
3. наличие наибольшего и наименьшего значений;
4. промежутки знакопостоянства;
5. области определения и значений.

1. $y = x - 2|x+1|$;

2. $y = \frac{x^2-x-2}{|x+1|} + \frac{|x^2-1|}{x-1}$;

3. $y = 2|x+2| + |x-1| + x$;

4. $y = \Big|2 - |x-1|\Big| + x - 2$.

5. Постройте график уравнения $|6x+5y+7|+|2x+3y+1| = 4$ и найдите площадь ограниченной им фигуры.

Примечание. Напомним, что:

а) область определения функции есть множество всех значений x, для которых определено функциональное соответствие (обозначается $D(f)$);

б) областью изменения или областью значения функции называется множество всех значений y, которые функция может принимать (обозначается $E(f)$).

Более подробно см. А. Х. Шахмейстер. Множества. Функции. Последовательности. СПб., М., 2008, 2014. С. 85–92.

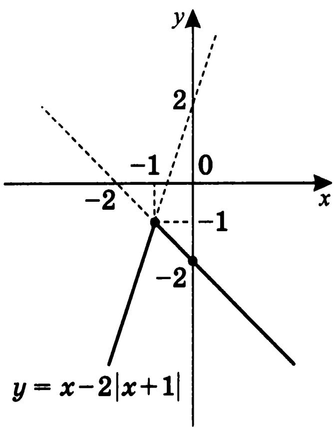
Решение тренировочной работы 2

1. Построим график функции $y = x - 2|x+1|$ и исследуем ее.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geqslant -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ y = x - 2x - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} x < -1 \\ y = x + 2x + 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x < -1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$.



1. На $(-\infty; -1]$ функция возрастает;
   на $[-1; +\infty)$ функция убывает.
2. $y_{\max} = -1$ (при $x = -1$).
   Минимального значения нет.
3. Наибольшее значение $y_{наиб} = -1$.
   Наименьшего значения нет.
4. Для всех x $y < 0$.
5. $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; -1]$.

2. Построим график функции $y = \frac{x^2-x-2}{|x+1|} + \frac{|x^2-1|}{x-1}$ и исследуем ее.

$D(y)$: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

$t(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Промежутки знакопостоянства функции $t(x)$:

а) $\begin{cases} x < -1 \\ y = \frac{(x-2)(x+1)}{-(x+1)} + \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases}$;

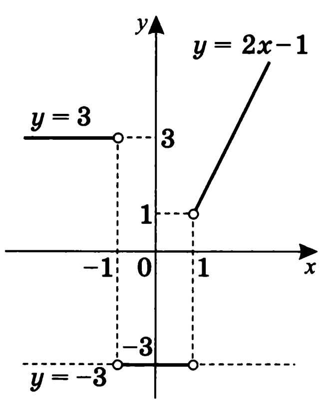
$\begin{cases} x < -1 \\ y = -x + 2 - x + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x < -1 \\ y = 3 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} - \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases}$;

$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = x - 2 - x - 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = -3 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} x > 1 \\ y = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} + \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 1 \\ y = x - 2 + x + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$.



1. На $(1; +\infty)$ функция возрастает.

   На $(-1; 1)$ $y = \text{const}$ (постоянная).

   На $(-\infty; -1)$ $y = \text{const}$ (постоянная).

2. Максимальных и минимальных значений нет.

3. Наименьшее значение $y_{\min} = -3$;

   наибольших значений нет.

4. $y > 0$ на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

   $y < 0$ на $(-1; 1)$.

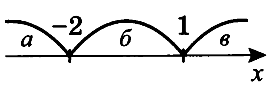
5. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$;

   $E(f) = (1; +\infty) \cup \{-3\}$.

3. Построим график функции $y = 2|x+2| + |x-1| + x$ и исследуем ее.

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geqslant -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases};$$

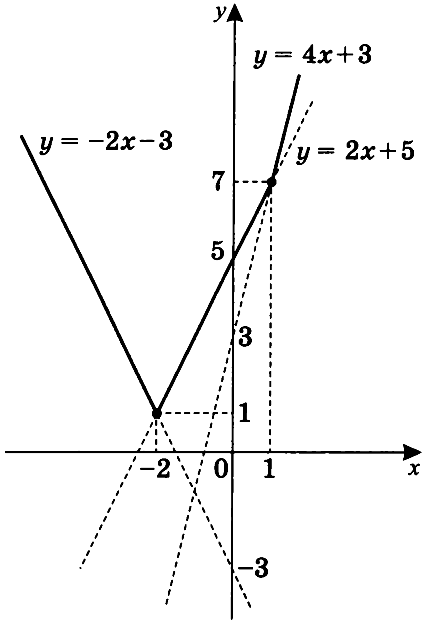
$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geqslant 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}.$$



а) $\begin{cases} x < -2 \\ y = 2(-x-2) + 1 - x + x \end{cases}$; $\begin{cases} x < -2 \\ y = -2x - 3 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} -2 \leqslant x < 1 \\ y = 2x + 4 + 1 - x + x \end{cases}$; $\begin{cases} -2 \leqslant x < 1 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y = 2x + 4 + x - 1 + x \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y = 4x + 3 \end{cases}$.



1. На $(-\infty; -2]$ функция убывает;

   на $[-2; +\infty)$ функция возрастает.

2. $y_{\min} = 1$ (при $x = -2$).

   Максимального значения нет.

3. $y_{\text{наим}} = 1$. Наибольшего значения нет.

4. При любых x $\quad y > 0$.

5. $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $\quad E(f) = [1; +\infty)$.

4. Построим график функции $y = \Big|2 - |x-1|\Big| + x - 2$ и исследуем ее.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, \ x \geqslant 1 \\ 1-x, \ x < 1 \end{cases},$$

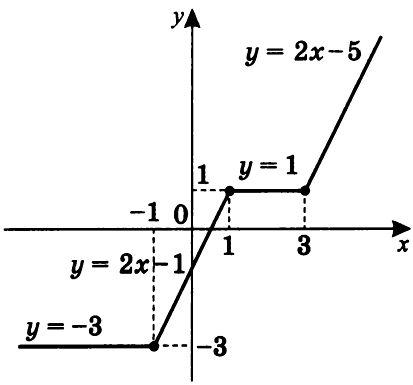
тогда $y = \begin{cases} |3-x| + x - 2, \ x \geqslant 1 \\ |1+x| + x - 2, \ x < 1 \end{cases}.$

$$y = |3 - x| + x - 2;$$

$$y = \begin{cases} x - 3 + x - 2, \ x \geqslant 3 \\ 3 - x + x - 2, \ 1 \leqslant x < 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 5, \ x \geqslant 3 \\ 1, \quad 1 \leqslant x < 3 \end{cases}.$$

$$y = |1 + x| + x - 2;$$

$$y = \begin{cases} x + 1 + x - 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x - 1 + x - 2, \ x < -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 1, \ -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -3, \quad x < -1 \end{cases}.$$



1. На $(-\infty; -1]$ $\ y = \text{const}$ — постоянна;

   на $[-1; 1]$ функция возрастает;

   на $[1; 3]$ $\ y = \text{const}$ — постоянна;

   на $[3; +\infty)$ функция возрастает.

2. Минимальных и максимальных значений нет.

3. $y_{\text{наим}} = -3$. Наибольшего значения нет.

4. $y \geqslant 0$ на $[0{,}5; +\infty)$; $\quad y < 0$ на $(-\infty; 0{,}5)$.

5. $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $\quad E(f) = [-3; +\infty)$.

5. Построим график уравнения $|6x+5y+7|+|2x+3y+1| = 4$ и найдем площадь ограниченной им фигуры.

Конечно, можно раскрыть условия разветвления суммы модулей на четыре случая, или четыре уравнения:

$$|6x+5y+7| = \begin{cases} 6x+5y+7, & 6x+5y+7 \geqslant 0 \\ -(6x+5y+7), & 6x+5y+7 < 0 \end{cases};$$

$$|2x+3y+1| = \begin{cases} 2x+3y+1, & 2x+3y+1 \geqslant 0 \\ -(2x+3y+1), & 2x+3y+1 < 0 \end{cases}.$$

В данном случае мы просто выпишем четыре уравнения без исследования условий их существования:

а) $6x+5y+7+2x+3y+1 = 4;$

$8x+8y+8 = 4;\quad \boxed{y = -x - \frac{1}{2}}.$

б) $6x+5y+7-2x-3y-1 = 4;$

$4x+2y+6 = 4;\quad \boxed{y = -2x - 1}.$

в) $-6x-5y-7+2x+3y+1 = 4;$

$-4x-2y-6 = 4;\quad \boxed{y = -2x - 5}.$

г) $-6x-5y-7-2x-3y-1 = 4;$

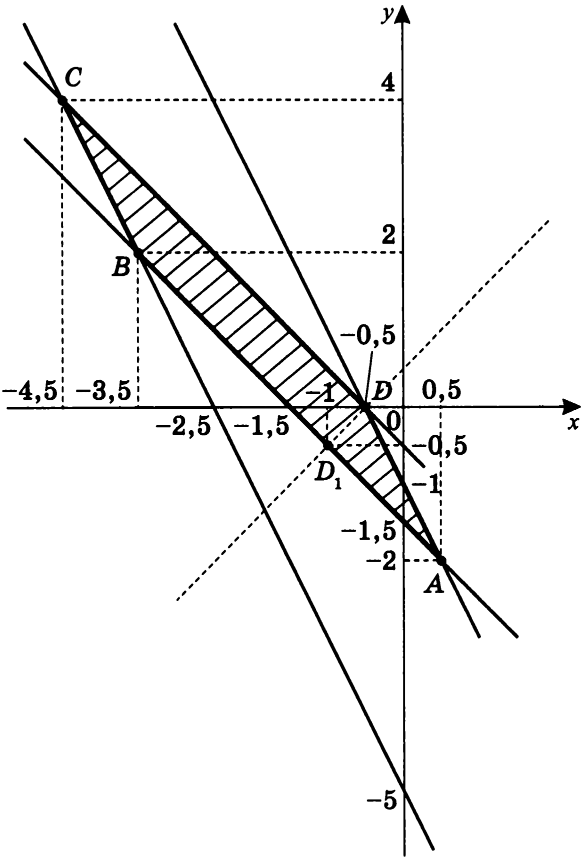
$-8x-8y-8 = 4;\quad \boxed{y = -x - 1\frac{1}{2}}.$

Построим на одном чертеже графики этих прямых и найдем их точки пересечения.

$$\begin{cases} y = -x - 0{,}5 \\ y = -2x - 1 \end{cases};\ D(-0{,}5; 0).\qquad \begin{cases} y = -x - 0{,}5 \\ y = -2x - 5 \end{cases};\ C(-4{,}5; 4).$$

$$\begin{cases} y = -x - 1{,}5 \\ y = -2x - 1 \end{cases};\ A(0{,}5; -2).\qquad \begin{cases} y = -x - 1{,}5 \\ y = -2x - 5 \end{cases};\ B(-3{,}5; 2).$$

Очевидно, что $ABCD$ — параллелограмм (проверьте этот геометрический факт).



Найдем S_{ABCD}.

Так как для прямых $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x + b_2$ условием перпендикулярности является равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$, то для $y = -x-0{,}5$ перпендикулярная прямая, проходящая через точку D, — $y = x + 0{,}5$.

Точка пересечения прямых $y = x+0{,}5$ и $y = -x-1{,}5$ — точка D_1: $\begin{cases} y = x + 0{,}5 \\ y = -x - 1{,}5 \end{cases}$; $D_1\,(-1; -0{,}5)$.

$DD_1 \perp AB$; $DD_1 = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = 0{,}5\sqrt{2}$.

$DC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = DD_1 \cdot DC$; $S_{ABCD} = 0{,}5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = \boxed{4}$.

Примечание. Рассмотрим более подробно пункт а).

Решая систему неравенств с двумя переменными

$\begin{cases} 6x+5y+7 \geqslant 0 \\ 2x+3y+1 \geqslant 0 \end{cases}$, можно убедиться, что отрезок CD принадлежит области решения системы неравенств, причем точка C — пересечение графиков $6x+5y+7=0$ и $y=-x-0{,}5$, а точка D — пересечение графиков $2x+3y+1=0$ и $y=-x-0{,}5$.

Действительно, при $\begin{cases} 6x+5y+7 \geqslant 0 \\ 2x+3y+1 \geqslant 0 \end{cases}$

уравнение $|6x+5x+7|+|2x+3y+1|=4$ после раскрытия модулей преобразуется в уравнение $y=-x-0{,}5$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} 6x+5y+7=0 \\ y=-x-0{,}5 \end{cases}$, получим

$\begin{cases} x=-4{,}5 \\ y=4 \end{cases}$, т. е. координаты $C\,(-4{,}5;4)$.

Аналогично, решая систему $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ y=-x-0{,}5 \end{cases}$, получим

$\begin{cases} x=-0{,}5 \\ y=0 \end{cases}$, т. е. координаты $D\,(-0{,}5;0)$.

Значит, отрезок DC принадлежит области (части плоскости), заданной системой неравеств $\begin{cases} 6x+5y+7 \geqslant 0 \\ 2x+3y+1 \geqslant 0 \end{cases}$.

Аналогично раскрываются модули уравнения при соответствующих условиях в других пунктах: отрезок AD в пункте б), отрезок BC в пункте в) и отрезок AB в пункте г) принадлежат соответствующим условиям раскрытия модулей (а значит, соответствующим областям плоскости).

Тренировочная работа 3

Вариант I

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами:

   а) $A(-2;-1)$, $B(2;1)$; б) $A(-3;4)$, $B(3;-5)$;

   в) $A(0;2)$, $B(4;2)$; г) $A(-1;2)$, $B(-1;3)$.

2. Постройте прямую по заданному уравнению:

   а) $y = 3x - 2$; б) $3y + 5x = 3$;

   в) l: $y = -2x + b$, если $A(1;3) \in l$;

   г) l: $y = kx + 3$, если $l \parallel l_1$, где l_1: $y = 2x - 1$;

   д) l: $y = kx + b$, если $A(-1;1) \in l$ и $l \parallel l_1$, где l_1: $y = 2x - 5$.

3. Постройте прямые:

   а) $\left.\begin{array}{l} l_1\colon\ y = -x + b \\ l_2\colon\ y = kx - 2 \end{array}\right|$, если $l_1 \cap l_2 = A(2;-1)$;

   б) $x^2 - 9 = 0$; в) $y^2 - 1 = 0$; г) $(x-1)(y+2) = 0$.

4. Постройте график уравнения:

   а) $\frac{x-2}{y+1} = 0$; б) $\frac{y^2-4}{x-1} = 0$; в) $\frac{y-2x-1}{x^2-2x} = 0$;

   г) $\frac{y^2+y}{y+x-2} = 0$; д) $\frac{3x+2y+1}{y-x+4} = 0$.

5. Существует ли прямая, которой одновременно принадлежат три точки с данными координатами:

   а) $A(1982;3211)$; $B(2112;3146)$; $C(2238;3083)$;

   б) $A(9;24)$; $B(17;40)$; $C(23;62)$?

6. При каких значениях параметра a данное уравнение $(a^2-1)y + (a^2+6a+5)x + 2(a^2+3a+2) = 0$:

   а) определяет биссектрису I и III координатных углов;

   б) описывает прямую, параллельную оси ординат;

   в) задает прямую, параллельную оси абсцисс;

   г) не является уравнением прямой?

Вариант II

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами:

а) $A(-1;-2)$, $B(1;2)$; б) $A(-4;3)$, $B(4;-5)$;

в) $A(0;-2)$, $B(-4;-2)$; г) $A(2;-1)$, $B(2;-3)$.

2. Постройте прямую по заданному уравнению:

а) $y = 2x + 3$; б) $2y + 5x + 2 = 0$;

в) $l\colon y = kx - 1$, если $l \parallel l_1$, где $l_1\colon y = -3x + 5$;

г) $l\colon y = -3x + b$, если $A(0;-3) \in l$;

д) $l\colon y = kx + b$, если $A(1;-1) \in l$ и $l \parallel l_1$, где $l_1\colon y = -3x + 1$.

3. Постройте прямые:

а) $\left.\begin{array}{l} l_1\colon y = 2x + b \\ l_2\colon y = kx + 3 \end{array}\right|$, если $l_1 \cap l_2 = A(-1;2)$;

б) $y^2 - 9 = 0$; в) $x^2 - 4 = 0$; г) $(x+1)(y-2) = 0$.

4. Постройте график уравнения:

а) $\frac{y-1}{x+2} = 0$; б) $\frac{x^2-1}{y-2} = 0$; в) $\frac{y+x+3}{y^2+2y} = 0$;

г) $\frac{x^2+x}{y-x+2} = 0$; д) $\frac{y+x+4}{3x-2y+2} = 0$.

5. Существует ли прямая, которой одновременно принадлежат три точки с данными координатами:

а) $A(289;112)$; $B(211;641)$; $C(432;380)$;

б) $A(19;34)$; $B(27;50)$; $C(43;82)$?

6. При каких значениях параметра a данное уравнение $(a^2-4)x + (a^2-2a-8)y + 3(a^2-a-6) = 0$:

а) определяет биссектрису I и III координатных углов;

б) описывает прямую, параллельную оси ординат;

в) задает прямую, параллельную оси абсцисс;

г) не является уравнением прямой?

Решение тренировочной работы 3

Вариант I

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами.

а) $A(-2;-1)$, $B(2;1)$.

Так как точки A и B имеют различные абсциссы, то прямая $AB \nparallel Oy$.

Значит работает формула $y = kx + b$, описывающая такое уравнение. Тогда:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \Gamma(y = kx + b) \\ B \in \Gamma(y = kx + b) \end{array}\right|; \quad \begin{cases} -1 = -2k + b & \text{II} - \text{I} \\ 1 = 2k + b & \text{II} + \text{I} \end{cases};$$

$$\begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}, \text{ т. е. } \boxed{y = \frac{1}{2}x}.$$

б) $A(-3;4)$, $B(3;-5)$.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \Gamma(y = kx + b) \\ B \in \Gamma(y = kx + b) \end{array}\right|; \quad \begin{cases} 4 = -3k + b & \text{I} + \text{II} \\ -5 = 3k + b & \text{II} - \text{I} \end{cases};$$

$$\begin{cases} b = -0{,}5 \\ k = -1{,}5 \end{cases}, \text{ т. е. } \boxed{y = -1{,}5x - 0{,}5}.$$

в) $A(0;2)$, $B(4;2)$.

Так как ординаты двух точек равны, то прямая параллельна оси абсцисс. Значит $\boxed{y = 2}$ — уравнение прямой, которой принадлежат эти точки A и B.

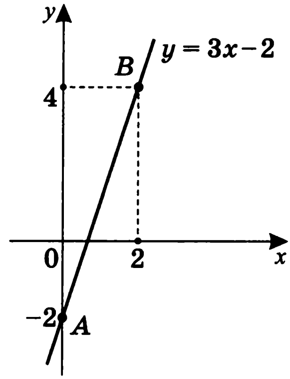
г) $A(-1;2)$, $B(-1;3)$.

Так как абсциссы точек A и B равны, то прямая, которой принадлежат точки A и B, параллельна оси Oy, т. е. $\boxed{x = -1}$ — искомое уравнение прямой.

2. Постройте прямую по заданному уравнению:

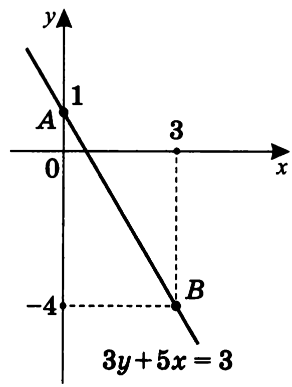
а) $y = 3x - 2$.

x	y	Координаты точек
0	−2	$A\,(0; -2)$
2	4	$B\,(2; 4)$



б) $3y + 5x = 3$.

x	y	Координаты точек
0	1	$A\,(0; 1)$
3	−4	$B\,(3; -4)$



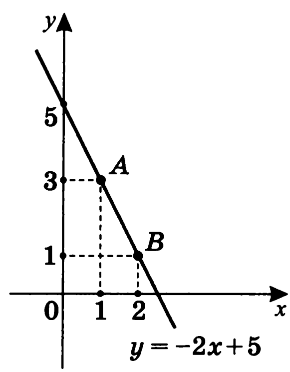
в) $l\colon y = -2x + b$, если $A\,(1; 3) \in l$.

$A \in \Gamma(y = -2x + b)$, т. е. $3 = -2 + b$; $b = 5$.

Тогда $\boxed{y = -2x + 5}$ — уравнение искомой прямой.

Построим ее:

x	y	Координаты точек
1	3	$A\,(1; 3)$
2	1	$B\,(2; 1)$



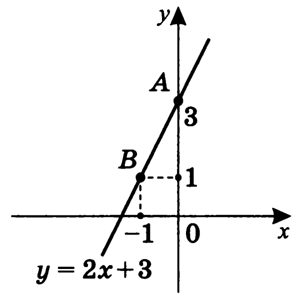
г) $y = kx + 3$, если $l \parallel l_1$, где l_1: $y = 2x - 1$.

Так как $l_1 \parallel l$, то $k = 2$.

Значит $\boxed{l\colon y = 2x + 3}$ — уравнение искомой прямой.

Построим ее:

x	y	Координаты точек
0	3	$A(0; 3)$
-1	1	$B(-1; 1)$



д) l: $y = kx + b$, если $A(-1; 1) \in l$ и $l \parallel l_1$, где l_1: $y = 2x - 5$.

Так как $A(-1; 1) \in \Gamma(y = kx + b)$,

то $1 = -k + b$; $\quad k = b - 1$.

Значит l: $y = (b - 1)x + b$.

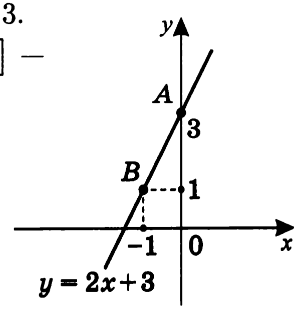
Учитывая, что $l \parallel l_1$, где l_1: $y = 2x - 5$,

получим, что $b - 1 = 2$; $\quad b = 3$.

Таким образом, $\boxed{l\colon y = 2x + 3}$ — уравнение искомой прямой.

Построим ее:

x	y	Координаты точек
0	3	$A(0; 3)$
-1	1	$B(-1; 1)$



3. Постройте прямые:

а) $\left.\begin{array}{l} l_1\colon y = -x + b \\ l_2\colon y = kx - 2 \end{array}\right|$, если $l_1 \cap l_2 = A(2; -1)$.

$A \in \Gamma(y = -x + b)$; $\quad -1 = -2 + b$; $\quad b = 1$,

т. е. $\boxed{l_1\colon y = -x + 1}$.

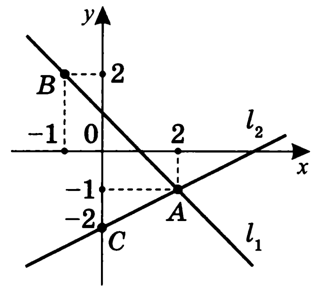
$A \in \Gamma(y = kx - 2)$; $\quad -1 = 2k - 2$; $\quad k = \frac{1}{2}$,

т. е. $\boxed{l_2\colon y = \frac{1}{2}x - 2}$.

Тогда

x	y	Координаты точек
2	−1	$A(2; -1)$
−1	2	$B(-1; 2)$

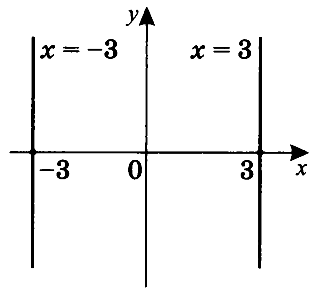
x	y	Координаты точек
2	−1	$A(2; -1)$
0	−2	$C(0; -2)$



б) $x^2 - 9 = 0.$

$(x-3)(x+3) = 0;$

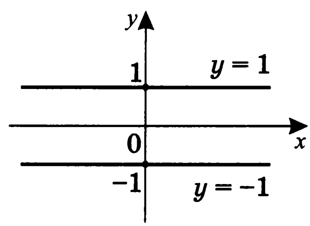
$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$ — это уравнения прямых, параллельных оси ординат.



в) $y^2 - 1 = 0.$

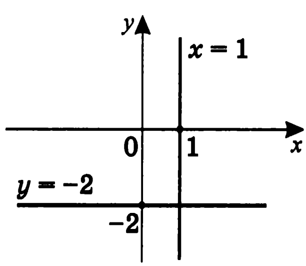
$(y-1)(y+1) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$ — это уравнения прямых, параллельных оси абсцисс.



г) $(x-1)(y+2) = 0.$

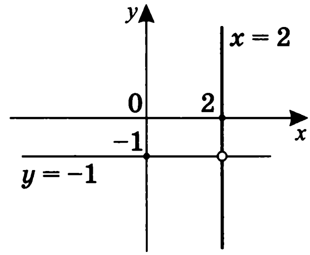
$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{array}\right.;$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \text{— прямая, параллельная } Oy \\ \text{— прямая, параллельная } Ox \end{array}$



4. Постройте график уравнения:

а) $\frac{x-2}{y+1}=0.$

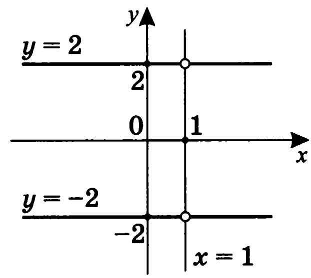
$$\begin{cases} x = 2 \\ y \neq -1 \end{cases}.$$



б) $\frac{y^2-4}{x-1}=0.$

$$\begin{cases} y^2 - 4 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -2 \end{array}\right. \\ x \neq 1 \end{cases}.$$



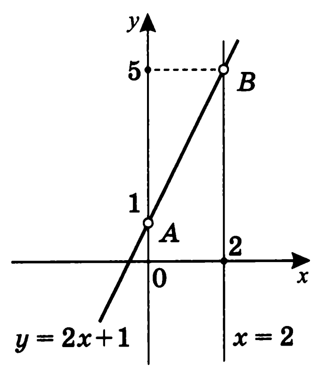
в) $\frac{y-2x-1}{x^2-2x}=0.$

$$\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x(x-2) \neq 0 \end{cases};$$

$y = 2x + 1.$

x	y	Координаты точек
0	1	$A\,(0;1)$
2	5	$B\,(2;5)$



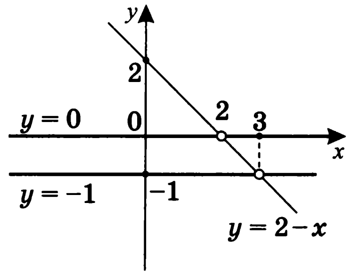
г) $\frac{y^2+y}{y+x-2}=0.$

$$\begin{cases} y^2 + y = 0 \\ y + x - 2 \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y(y+1) = 0 \\ y \neq 2 - x \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}\right. \\ y \neq 2 - x \end{cases};$$

$y = 2 - x$.

x	y	Координаты точек
0	2	$A(0; 2)$
2	0	$B(2; 0)$



д) $\frac{3x+2y+1}{y-x+4} = 0$.

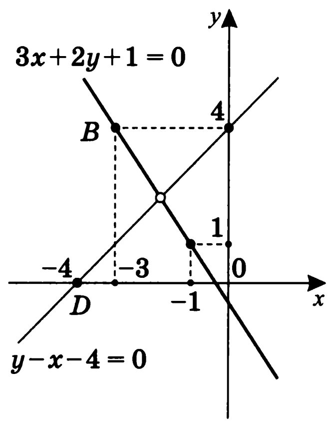
$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ y - x - 4 \neq 0 \end{cases}$;

$3x + 2y + 1 = 0$;

x	y	Координаты точек
−1	1	$A(-1; 1)$
−3	4	$B(-3; 4)$

$y - x - 4 = 0$;

x	y	Координаты точек
0	4	$C(0; 4)$
−4	0	$D(-4; 0)$

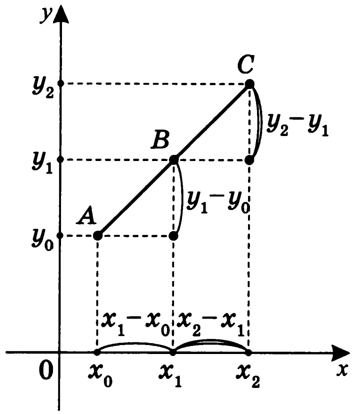


5. Существует ли прямая, которой одновременно принадлежат три точки с данными координатами?

Так как в обоих случаях координаты точек выходят за рамки обозримого поля, рассмотрим решение, не связанное с прямым вычислением параметров k и b в уравнении $y = kx + b$.

Так как для прямой AB $k_{AB} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, а для прямой BC $k_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, то если $k_{AB} = k_{BC}$, то прямые AB и BC совпадают. Тогда существует прямая, которой принадлежат точки A, B и C.

Если же $k_{AB} \neq k_{BC}$, то такой прямой нет.



а) Даны точки:

$A\,(1982; 3211)$; $B\,(2112; 3146)$; $C\,(2238; 3083)$.

$k_{AB} = \frac{3146-3211}{2112-1982} = \frac{-65}{130} = -\frac{1}{2}$;

$k_{BC} = \frac{3083-3146}{2238-2112} = \frac{-63}{126} = -\frac{1}{2}$.

Значит $\boxed{k_{AB} = k_{BC}}$, т. е. все три точки принадлежат одной прямой.

б) Даны точки:

$A\,(9; 24)$; $B\,(17; 40)$; $C\,(23; 62)$.

$k_{AB} = \frac{40-24}{17-9} = \frac{16}{8} = 2$;

$k_{AC} = \frac{62-40}{23-17} = \frac{22}{6} = 3\frac{2}{3}$.

Значит $k_{AB} \neq k_{AC}$, т. е. не существует прямой, которой одновременно принадлежат все три точки.

6. а) Для того, чтобы уравнение

$(a^2-1)y + (a^2+6a+5)x + 2(a^2+3a+2) = 0$

являлось уравнением биссектрисы I и III координатных углов, необходимо, чтобы свободный член уравнения был равен нулю.

$2(a^2+3a+2) = 0$; $(a+1)(a+2) = 0$; $\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-2 \end{array}\right.$.

1. Пусть $a = -1$, тогда:
   коэффициент при y равен
   $(a^2 - 1) = (a - 1)(a + 1) = 0$;
   коэффициент при x равен
   $a^2 + 6a + 5 = (a + 1)(a + 5) = 0$.

   Следовательно, при $a = -1$ исходное уравнение принимает вид $0 \cdot y + 0 \cdot x + 2 \cdot 0 = 0$, т. е. $0 = 0$.

   Очевидно, что это тождество для любых значений x и y.

   Значит, оно описывает множество всех точек плоскости, а не прямую.

2. Пусть $a = -2$, тогда $a \neq -1$, и исходное уравнение можно сократить на $a + 1$, получим:
   $(a - 1)y + (a + 5)x + 2(a + 2) = 0$.

   При $a = -2$: $(-2 - 1)y + (-2 + 5)x + 2 \cdot 0 = 0$;
   $y = x$ — биссектриса I и III координатных углов.

б) Для того чтобы уравнение описывало прямую, параллельную оси ординат, необходимо, чтобы коэффициент при y после упрощения уравнения был равен нулю.

$(a-1)y+(a+5)x+2(a+2) = 0 - (a-1) = 0$; $\quad a = 1$.

Тогда при подстановке в уравнение получим

$0 \cdot y + 6 \cdot x + 6 = 0$, т. е. $x = -1$ — уравнение прямой, параллельной оси ординат.

в) Для того чтобы уравнение описывало прямую, параллельную оси абсцисс, необходимо, чтобы коэффициент при x после упрощения уравнения был равен нулю.

$(a-1)y+(a+5)x+2(a+2) = 0$; $\quad a+5 = 0$; $\quad a = -5$.

Тогда при подстановке в уравнение получим

$(-5 - 1)y + (-5 + 5)x + 2(-5 + 2) = 0$;

$-6y + 0 \cdot x - 6 = 0$; $\quad y = -6$ — уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

г) Уравнение $my+nx+p=0$ описывает любую прямую при условии, что $m^2+n^2\neq 0$.

В исходном уравнении при $a=-1$

$m=a^2-1=0$ и $n=a^2+6a+5=0$,

т. е. условие того что $m^2+n^2\neq 0$ не выполняется.

Значит исходное уравнение при $a=-1$ не является уравнением, описывающим какую-либо прямую.

Вариант II

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами:

а) $A(-1;-2)$, $B(1;2)$.

$$\begin{cases} A(-1;-2) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(1;2) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2 = -k + b & \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ 2 = k + b & \mathrm{I} - \mathrm{II} \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 0 \\ k = 2 \end{cases}; \quad \boxed{y = 2x}.$$

б) $A(-4;3)$, $B(4;-5)$.

$$\begin{cases} A(-4;3) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(4;-5) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3 = -4k + b & \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ -5 = 4k + b & \mathrm{I} - \mathrm{II} \end{cases}; \quad \begin{cases} b = -1 \\ k = -1 \end{cases}; \quad \boxed{y = -x - 1}.$$

в) $A(0;-2)$, $B(-4;-2)$.

Так как ординаты точек равны, а абсциссы нет, то искомая прямая $AB \parallel Ox$. Значит $\boxed{y = -2}$ — уравнение прямой AB.

г) $A(2;-1)$, $B(2;-3)$.

Так как абсциссы точек равны, а ординаты нет, то прямая $AB \parallel Oy$. Значит $\boxed{x = 2}$ — уравнение прямой AB.

Примечание. Для таких прямых уравнение, которое их задает, имеет вид $mx + ny + p = 0$. В случае г):

$$\begin{cases} A(2;-1) \in \Gamma(mx + ny + p = 0) \\ B(2;-3) \in \Gamma(mx + ny + p = 0) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2m - y + p = 0 & \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ 2m - 3y + p = 0 & \end{cases}; \quad \begin{cases} 2y = 0 \\ 2m = -p \end{cases}.$$

Тогда уравнение $mx + ny + p = 0$ примет вид

$mx + n \cdot 0 - 2m = 0$; $\quad mx - 2m = 0$.

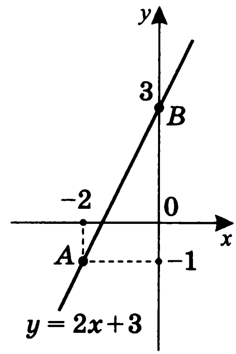
Так как $m \neq 0$, то можно сократить на m: $\boxed{x = 2}$.

Итак, вопрос можно решать аналитически без геометрических образов прямых, хотя образное представление интуитивно понятнее.

2. Постройте прямую по заданному уравнению:

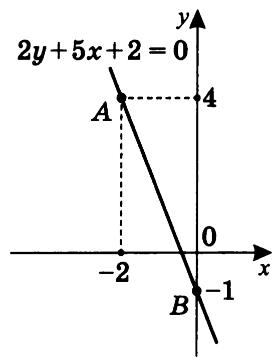
а) $y = 2x + 3$.

x	y	Координаты точек
0	3	$A\,(0; 3)$
-2	-1	$B\,(-2; -1)$



б) $2y + 5x + 2 = 0$.

x	y	Координаты точек
0	-1	$A\,(0; -1)$
-2	4	$B\,(-2; 4)$

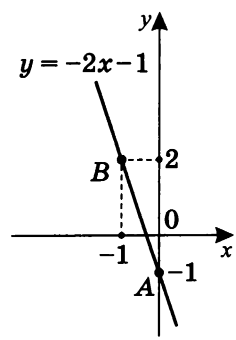


в) l: $y = kx - 1$, если $l \parallel l_1$, где l_1: $y = -3x + 5$.

Так как $l \parallel l_1$, то $k = -3$,

тогда $\boxed{l\colon y = -3x - 1}$.

x	y	Координаты точек
0	-1	$A\,(0; -1)$
-1	2	$B\,(-1; 2)$

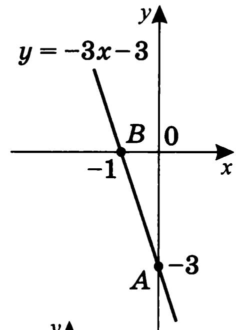


г) l: $y = -3x + b$, если $A(0; -3) \in l$.

$-3 = -3 \cdot 0 + b$; $\quad b = -3$,

значит $\boxed{l\colon y = -3x - 3}$;

x	y	Координаты точек
0	-3	$A(0; -3)$
-1	0	$B(-1; 0)$



д) l: $y = kx + b$, если

$A(1; -1) \in l$ и $l \parallel l_1$,

где l_1: $y = -3x + 1$.

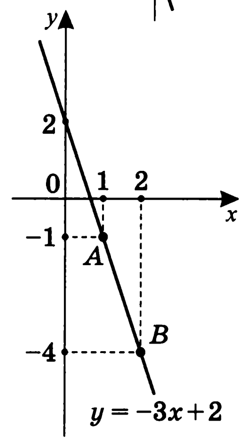
Так как $l \parallel l_1$, то $k = -3$,

т. е. $y = -3x + b$.

Так как $A \in l$, то $-1 = -3 + b$,

т. е. $b = 2$.

Значит $\boxed{l\colon y = -3x + 2}$.



3. Постройте прямые:

а) $\left.\begin{array}{l} l_1\colon y = 2x + b \\ l_2\colon y = kx + 3 \end{array}\right|$, если $l_1 \cap l_2 = A(-1; 2)$.

Так как $A(-1; 2) \in l_1$ и $A(-1; 2) \in l_2$, то

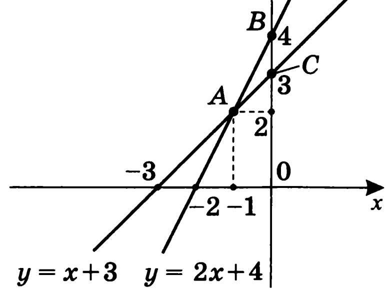
$\begin{cases} 2 = -2 + b \\ 2 = -k + 3 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} b = 4 \\ k = 1 \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} l_1\colon y = 2x + 4 \\ l_2\colon y = x + 3 \end{cases}$.

l_1: $y = 2x + 4$.

x	y	Координаты точек
-1	2	$A(-1; 2)$
0	4	$B(0; 4)$

l_2: $y = x + 3$.

x	y	Координаты точек
-1	2	$A(-1; 2)$
0	3	$C(0; 3)$

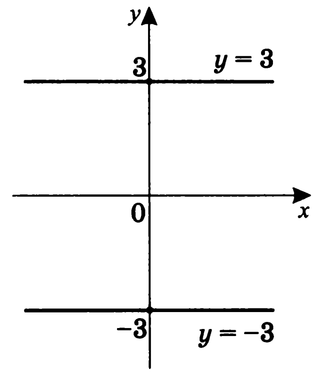


б) $y^2 - 9 = 0.$

$(y-3)(y+3) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} y - 3 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -3 \end{array}\right..$

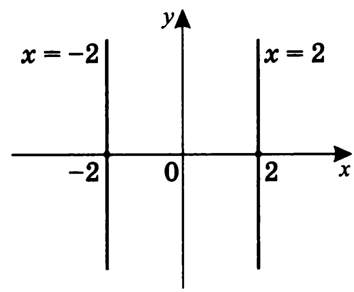


в) $x^2 - 4 = 0.$

$(x-2)(x+2) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right.;$

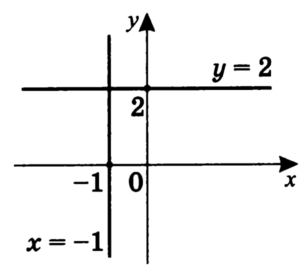
$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$



г) $(x+1)(y-2) = 0.$

$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \end{array}\right..$

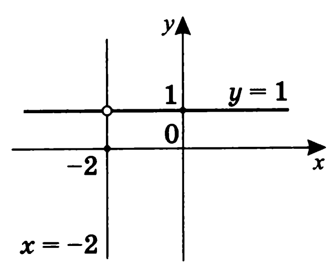


4. Постройте график уравнения:

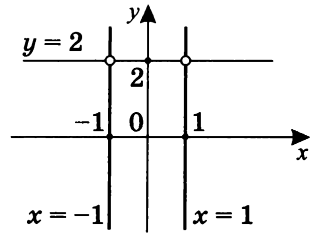
а) $\frac{y-1}{x+2} = 0.$

$\left\{\begin{array}{l} y - 1 = 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{array}\right.;$

$\left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ x \neq -2 \end{array}\right..$



б) $\frac{x^2-1}{y-2}=0.$



$$\begin{cases} x^2-1=0 \\ y-2\neq 0 \end{cases};$$

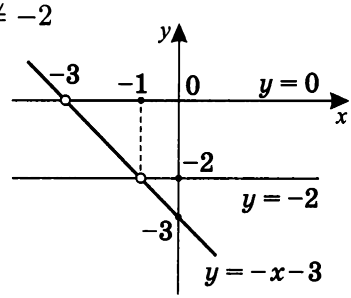
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y\neq 2 \end{cases}.$$

в) $\frac{y+x+3}{y^2+2y}=0.$

$$\begin{cases} y+x+3=0 \\ y^2+2y\neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-x-3 \\ \left[\begin{array}{l} y\neq 0 \\ y\neq -2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

$y=-x-3.$

x	y	Координаты точек
0	–3	$A\,(0;-3)$
–3	0	$B\,(-3;0)$

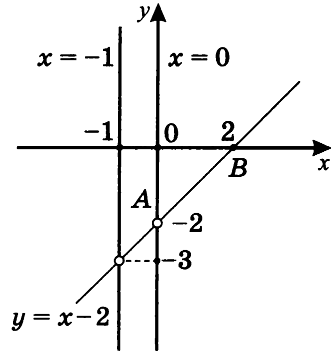


г) $\frac{x^2+x}{y-x+2}=0.$

$$\begin{cases} x^2+x=0 \\ y-x+2\neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y\neq x-2 \end{cases}.$$

$y=x-2.$

x	y	Координаты точек
0	–2	$A\,(0;-2)$
2	0	$B\,(2;0)$



Исключим все точки прямой $y=x-2$.

д) $\frac{y+x+4}{3x-2y+2} = 0.$

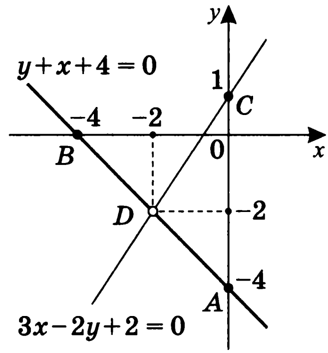
$$\begin{cases} y+x+4=0 \\ 3x-2y+2 \neq 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y=-x-4 \\ 3x-2y+2 \neq 0 \end{cases};$$

$y+x+4=0.$

x	y	Координаты точек
0	−4	$A\,(0;-4)$
−4	0	$B\,(-4;0)$

$3x-2y+2=0.$

x	y	Координаты точек
0	1	$C\,(0;1)$
−2	−2	$D\,(-2;-2)$



5. Существует ли прямая, которой одновременно принадлежат три точки с данными координатами?

а) Даны точки:

$A\,(289;112);\quad B\,(211;641);\quad C\,(432;380).$

$k_{AB} = \frac{641-112}{211-289} = \frac{529}{-78};$

$k_{BC} = \frac{380-641}{432-211} = \frac{-261}{221}.$

Значит $k_{AB} \neq k_{BC}$, и не существует такой прямой.

б) Даны точки:

$A\,(19;34);\quad B\,(27;50);\quad C\,(43;82).$

$k_{AB} = \frac{50-34}{27-19} = \frac{16}{8} = 2;$

$k_{BC} = \frac{82-50}{43-27} = \frac{32}{16} = 2.$

Значит $k_{AB} = k_{BC}$, и такая прямая существует.

6. а) Для того, чтобы уравнение

$$(a^2-4)x+(a^2-2a-8)y+3(a^2-a-6)=0$$

определяло биссектрису I и III координатных углов, необходимо, чтобы свободный член уравнения был равен нулю, т. е. $3(a^2-a-6)=0$; $\left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=3 \end{array}\right.$.

1. Пусть $a=-2$, тогда:

   коэффициент при x равен
   $a^2-4=(a-2)(a+2)=0$;

   коэффициент при y равен
   $a^2-2x-8=(a-4)(a+2)=0$,

   и исходное уравнение
   $(a-2)(a+2)x+(a-4)(a+2)y+3(a-3)(a+2)=0$

   при $a=-2$ принимает вид
   $0\cdot x+0\cdot y+3\cdot 0=0$; $\quad 0=0$.

   Очевидно, что это тождество для любых значений x и y.

   Значит оно описывает множество всех точек плоскости, а не прямую.

2. Пусть $a=3$. Тогда $a\neq -2$, и исходное уравнение можно сократить на $(a+2)$.

   Получим уравнение
   $(a-2)x+(a-4)y+3(a-3)=0$.

   При $a=3$ уравнение выглядит так:
   $(3-2)x+(3-4)y+3\cdot 0=0$; $\quad y=x$ — биссектриса I и III координатных углов.

б) Для того чтобы уравнение описывало прямую, параллельную оси ординат, необходимо, чтобы коэффициент при y после упрощения уравнения был равен нулю.

Уравнение таково: $(a-2)x+(a-4)y+3(a-3)=0$,

значит нужно, чтобы $a-4=0$; $\boxed{a=4}$.

При подстановке в уравнение получим:

$(4-2)x + 0 \cdot y + 3(4-3) = 0$; $x = 1{,}5$ — уравнение прямой, параллельной оси ординат.

в) Для того чтобы уравнение описывало прямую, параллельную оси абсцисс, необходимо, чтобы коэффициент при x после упрощения уравнения был равен нулю.

$(a-2)x+(a-4)y+3(a-3) = 0$; $a-2 = 0$; $\boxed{a = 2}$.

При подстановке в уравнение получим:

$(2-2)x + (2-4)y + 3(2-3) = 0$;

$0 \cdot x - 2y - 3 = 0$; $y = 1{,}5$ — уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

г) Уравнение $my+nx+p = 0$ описывает любую прямую при $m^2 + n^2 \neq 0$.

Исследуя данное уравнение при $a = -2$, получаем $(0 \cdot (-4))^2 + ((-2-4) \cdot 0)^2 = 0$.

Значит условие не выполняется, т. е. исходное уравнение не является уравнением прямой.

2

Графики и параметры

Практикум 3 (Графики и параметры)

1. Сколько корней имеет уравнение $ax + 1 = |x - 2|$ в зависимости от значения параметра a?

2. Сколько корней имеет уравнение $x + 2 = k|x - 1|$ в зависимости от значения параметра k?

3. Сколько корней имеет уравнение $|x - 3| + |x + 1| = ax + 3$ в зависимости от значения параметра a?

4. Сколько корней имеет уравнение $2|x+1|+|x-3| = a|x|+3$ в зависимости от положительного значения параметра a?

5. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 2y = (1 - x) \cdot |y| \\ y = |x| + a \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a?

6. Сколько решений имеет система $\begin{cases} |x - 2| - |y + 1| = 2 \\ 2|x - a| = 3 + y \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a?

7. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция $f(x) = -7 + 3x - 3|ax - 1| + |ax - 2| + |x - 7|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

Решение практикума 3

1. Сколько корней имеет уравнение $ax+1=|x-2|$ в зависимости от значения параметра a?

а) Рассмотрим аналитический метод решения.

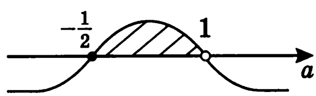
1. $\begin{cases} x \geqslant 2 \quad |x-2| = x-2 \\ ax+1 = x-2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x(a-1) = -3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant 2 \\ a \neq 1 \\ x = -\frac{3}{a-1} \end{cases}$.

Так как $x \geqslant 2$, то

$-\frac{3}{a-1} \geqslant 2$; $\quad \frac{-3-2a+2}{a-1} \geqslant 0$; $\quad \frac{-1-2a}{a-1} \geqslant 0$.



$a \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

При $a=1$ $\quad x \cdot 0 = -3$ — решения нет.

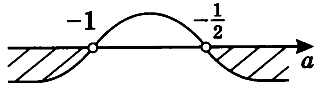
2. $\begin{cases} x < 2 \quad |x-2| = -x+2 \\ ax+1 = 2-x \end{cases}$;

$\begin{cases} x < 2 \\ x(a+1) = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x < 2 \\ a \neq -1 \\ x = \frac{1}{a+1} \end{cases}$.

Так как $x < 2$, то

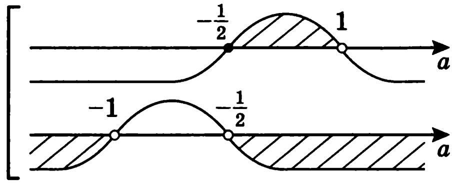
$\frac{1}{a+1} < 2$; $\quad \frac{1-2a-2}{a+1} < 0$; $\quad \frac{-1-2a}{a+1} < 0$.



$a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$.

При $a=-1$ $\quad x \cdot 0 = 1$ — решения нет.

Подведем итоги:



Анализируя результаты исследования решения в двух случаях, получим:

1. при $a < -1$ существует один корень $x = \frac{1}{a+1}$;
2. при $-1 \leqslant a < -\frac{1}{2}$ корней нет;
3. при $a = -\frac{1}{2}$ существует один корень $x = 2$;
4. при $-\frac{1}{2} < a < 1$ существуют два корня: $x = \frac{3}{1-a}$ и $x = \frac{1}{a+1}$;
5. при $a \geqslant 1$ существует один корень $x = \frac{1}{a+1}$.

б) Теперь рассмотрим графический метод решения.

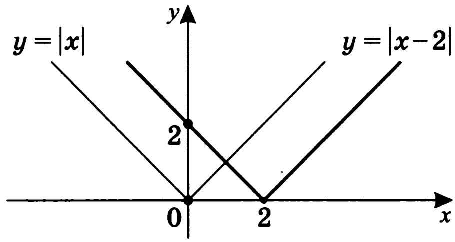
Положим $f(x) = ax + 1$; $g(x) = |x - 2|$.

Построим графики функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на одном чертеже или в одной системе координат и найдем возможное количество точек пересечения графиков данных функций.

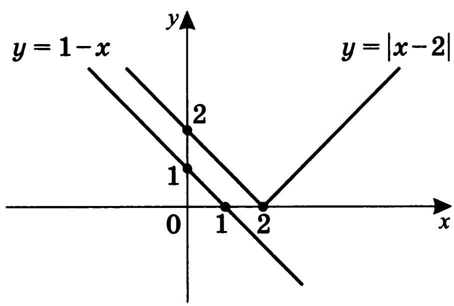
Очевидно, что если функция $g(x) = |x - 2|$ имеет фиксированный график, то график $f(x) = ax + 1$, в зависимости от параметра a может быть различным по отношению к $g(x) = |x - 2|$, но все прямые вида $y = ax + 1$ проходят через точку $(0; 1)$.

Рассмотрим более подробно эти возможные взаимоположения.

График функции $g(x)$ получен из графика $y = |x|$, сдвинутого вправо на 2:

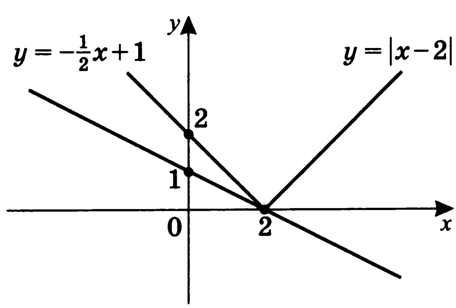


1. При $a = -1$ прямая параллельна одной из ветвей графика $y = |x - 2|$.



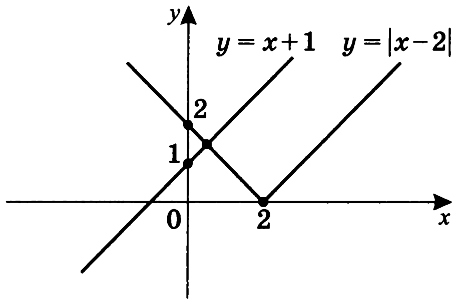
Система $\begin{cases} y = |x-2| \\ y = 1 - x \end{cases}$ не имеет решений, так как общих точек у графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ нет.

2. При $a = -\frac{1}{2}$ прямая проходит через точку излома графика $y = |x - 2|$.



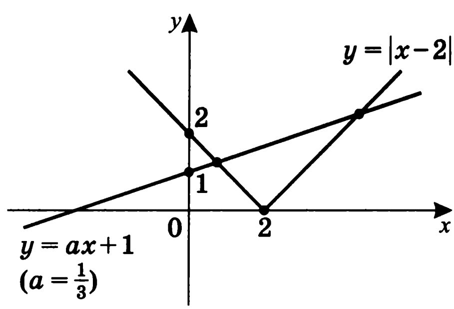
Система $\begin{cases} y = |x-2| \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$ имеет единственное решение, так как существует единственная общая точка.

3. При $a = 1$ прямая параллельна другой ветви графика $y = |x-2|$.



Система $\begin{cases} y = |x-2| \\ y = x + 1 \end{cases}$ имеет единственное решение, так как существует единственная общая точка.

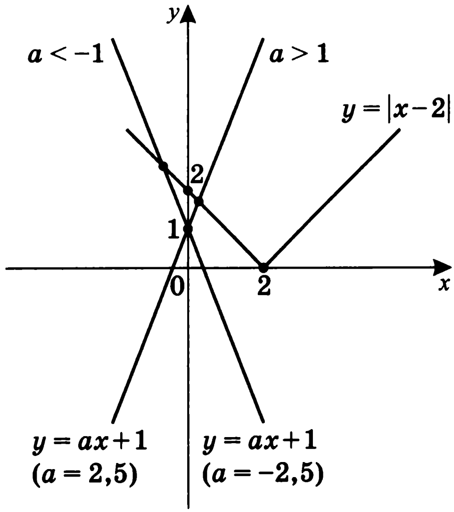
4. При $-\frac{1}{2} < a < 1$:



Например, при $a = \frac{1}{3}$ $y = \frac{1}{3}x + 1$.

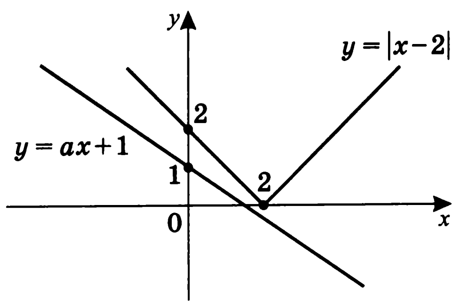
Система $\begin{cases} y = |x-2| \\ y = ax + 1 \end{cases}$ имеет два решения, так как существуют две общие точки.

5. При $a < -1$ или $a > 1$:



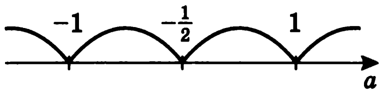
Например,
при $a = 2{,}5$ $\quad y = 2{,}5x + 1$,
при $a = -2{,}5$ $\quad y = -2{,}5x + 1$.
Система $\begin{cases} y = |x-2| \\ y = ax+1 \end{cases}$ имеет одно решение, так как существует только одна общая точка.

6. При $-1 < a < -\frac{1}{2}$:



Система $\begin{cases} y = |x-2| \\ y = ax+1 \end{cases}$ не имеет решений, так как общих точек нет.

Рисунок иллюстрирует возможные случаи.



Ответ: уравнение $ax + 1 = |x - 2|$ в зависимости от параметра a имеет:

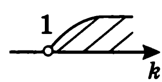
1. при $a < -1$ единственный корень;
2. при $-1 \leqslant a < -\frac{1}{2}$ корней нет;
3. при $a = -\frac{1}{2}$ единственный корень;
4. при $-\frac{1}{2} < a < 1$ два корня;
5. при $a \geqslant 1$ единственный корень.

2. Сколько корней имеет уравнение $x + 2 = k|x - 1|$ в зависимости от параметра k?

а) Аналитический способ решения.

1. $\begin{cases} x \geqslant 1 \quad (|x-1| = x - 1) \\ x + 2 = kx - k \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ (k-1)x = 2 + k \end{cases}$;

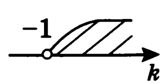
$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ k \neq 1 \\ x = \frac{k+2}{k-1} \end{cases}$. Так как $x \geqslant 1$, то $\frac{k+2}{k-1} \geqslant 1$;

$\frac{k+2-k+1}{k-1} \geqslant 0$; $\frac{3}{k-1} \geqslant 0$;  $k > 1$.

При $k = 1$ $0 \cdot x = 3$ — корней нет.

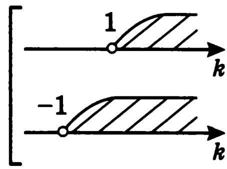
2. $\begin{cases} x < 1 \quad (|x-1| = 1 - x) \\ x + 2 = k - kx \end{cases}$; $\begin{cases} x < 1 \\ (k+1)x = k - 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x < 1 \\ k \neq -1 \\ x = \frac{k-2}{k+1} \end{cases}$. Так как $x < 1$, то $\frac{k-2}{k+1} < 1$;

$\frac{k-2-k-1}{k+1} < 0$; $\frac{-3}{k+1} < 0$;  $k > -1$.

При $k = -1$ $0 \cdot x = -3$ — корней нет.

Анализируя итоги, получим:

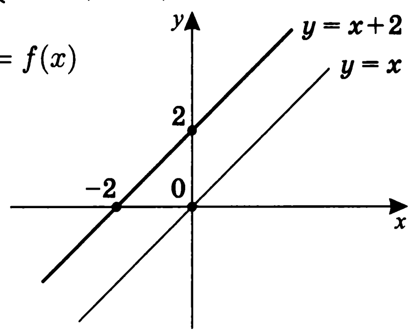


1. при $k \leqslant -1$ корней нет;
2. при $-1 < k \leqslant 1$ существует единственный корень $x = \frac{k-2}{k+1}$;
3. при $k > 1$ существуют два корня: $x = \frac{k+2}{k-1}$ и $x = \frac{k-2}{k+1}$.

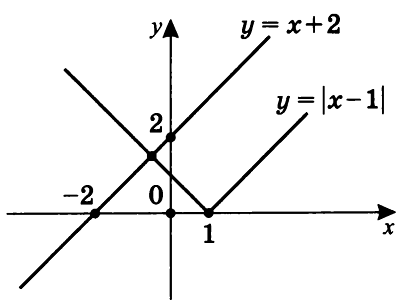
б) Графический способ решения.

Положим $f(x) = x + 2$; $g(x) = k|x - 1|$ и решим систему уравнений $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = k|x - 1| \end{cases}$ графически.

График функции $y = f(x)$ получается из графика $y = x$, сдвигом вверх на 2:

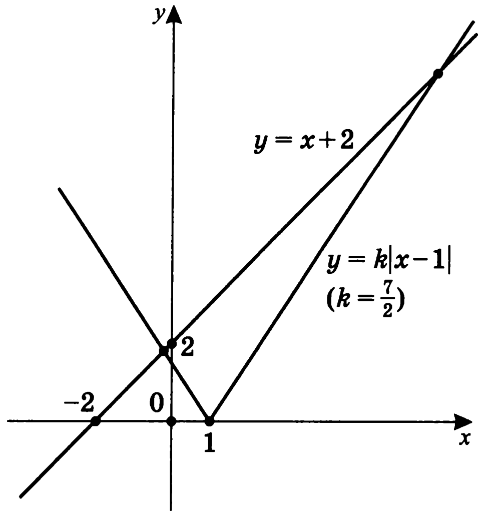


1. При $k = 1$ прямая вида $y = x + 2$ параллельна одной из ветвей графика $y = |x - 1|$.



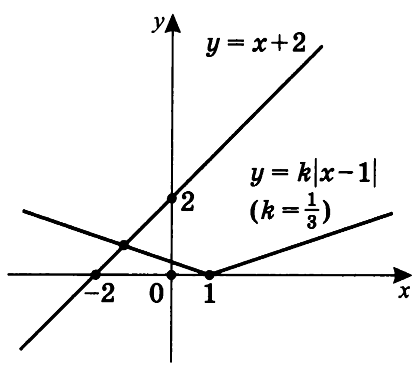
Система $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = |x - 1| \end{cases}$ имеет единственное решение, так как имеет единственную общую точку.

2. При $k > 1$:



Система $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = k|x - 1| \end{cases}$ имеет два решения, так как существуют две общие точки.

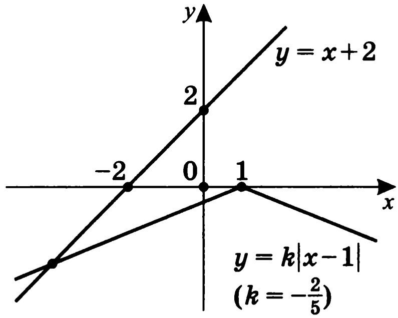
3. При $0 \leqslant k < 1$:



Например, $y = \frac{1}{3}|x - 1|$.

Система $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = k|x - 1| \end{cases}$ имеет одно решение, так как существует единственная общая точка.

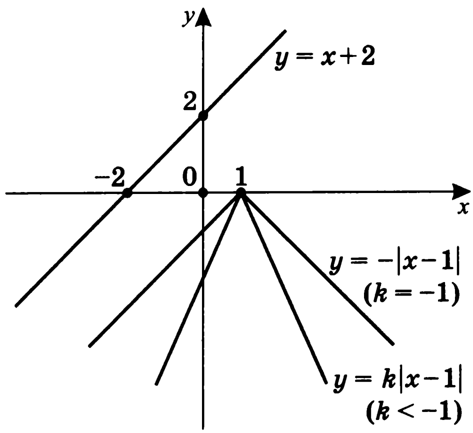
4. При $-1 < k < 0$:



Например, $y = -\frac{2}{5}|x - 1|$.

Система $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = |x - 1| \end{cases}$ имеет одно решение, так как имеет единственную общую точку.

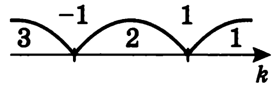
5. При $k \leqslant 1$:



Отметим, что из-за оптической иллюзии кажется, что левая ветвь графика $y = -|x-1|$ (прямая $y = x - 1$) не параллельна прямой $y = x + 2$.

Система $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = k|x - 1| \end{cases}$ не имеет решений, так как общих точек нет.

Иллюстрируем возможные случаи на рисунке:



Ответ: в уравнении $x + 2 = k|x - 1|$ в зависимости от значения параметра k:

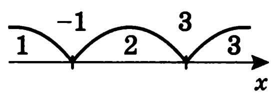
1. при $k > 1$ существуют два корня;
2. при $-1 < k \leqslant 1$ существует единственый корень;
3. при $k \leqslant -1$ корней нет.

3. Сколько корней имеет уравнение $|x-3|+|x+1| = ax+3$ в зависимости от значения параметра a?

а) Обозначим $f(x) = |x-3| + |x+1|$, $g(x) = ax + 3$. Построим график $y = f(x)$.

$\left.\begin{matrix} x = 3 \\ x = -1 \end{matrix}\right|$ — корни (нули) модульных выражений $|x-3|$ и $|x+1|$.

Отметим на рисунке возможные случаи:

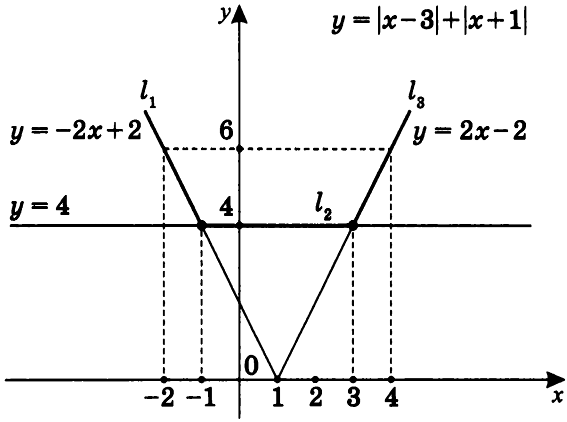


1. $\begin{cases} x < -1 & \begin{pmatrix} |x+1| = -1-x \\ |x-3| = -x+3 \end{pmatrix} \\ y = 3 - x - 1 - x \end{cases}$; $\begin{cases} x < -3 \\ y = 2 - 2x\colon l_1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} -1 \leqslant x < 3 & \begin{pmatrix} |x+1| = x+1 \\ |x-3| = -x+3 \end{pmatrix} \\ y = 3 - x + x + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -1 \leqslant x < 3 \\ y = 4\colon l_2 \end{cases}$

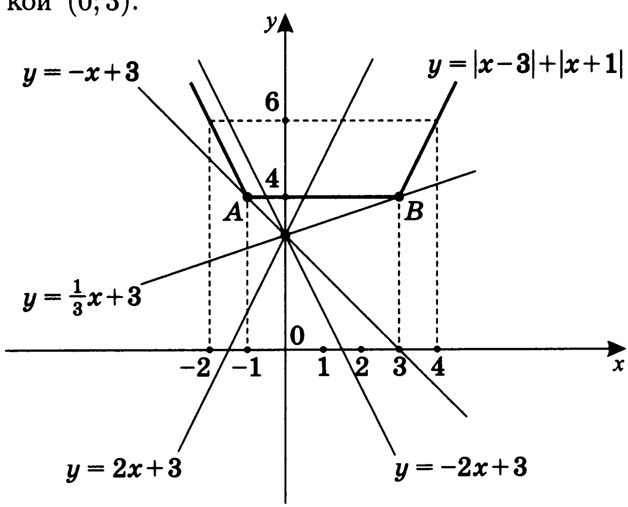
3. $\begin{cases} x \geqslant 3 & \begin{pmatrix} |x+1| = x+1 \\ |x-3| = x-3 \end{pmatrix} \\ y = x - 3 + x + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y = 2x - 2\colon l_3 \end{cases}$.

После «сборки» получим график $y = f(x)$.



б) Построим график l_4: $y = g(x)$, т. е. $y = ax + 3$.

Очевидно, что это график пучка прямых с общей точкой $(0; 3)$.



1. Если $A(-1; 4) \in \Gamma(y = ax + 3)$, то $4 = -a + 3$; $a = -1$. Тогда из графиков $f(x) = |x-3|+|x+1|$ и $g(x) = -x + 3$ следует, что $A(-1; 4)$ — их единственная общая точка.

2. При $l_4 \parallel l_1$ $(l_1\colon y = 2 - 2x)$ $a = -2$, т. е. $l'_4\colon y = -2x + 3$ также имеет с графиком $f(x) = |x-3|+|x+1|$ единственную общую точку.
3. Очевидно, что при $a \in (-2; -1)$ существует две общие точки $y = f(x)$ и $y = g(x)$.
4. При $a \in (-\infty; -2]$ есть только одна общая точка для графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$.
5. Если $B\,(3;4) \in \Gamma(y = ax + 1)$, то $4 = a \cdot 3 + 3$; $a = \frac{1}{3}$, т. е. $g(x) = \frac{1}{3}x + 3$, и $B\,(3;4)$ — единственная общая точка графиков $y = |x-3| + |x+1|$ и $y = \frac{1}{3}x + 3$.
6. При $l_4 \parallel l_3$ $a = 2$, т. е. $l''_4\colon y = 2x + 3$ имеет единственную общую точку с графиком $y = |x-3| + |x+1|$.
7. Естественно, при $a \in [2; \infty)$ существует тольуо одна общая точка для графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$.
8. При $a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$ у графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ существуют две общие точки.
9. При $a \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$ общих точек у графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ нет.

Ответ: уравнение $|x-3| + |x+1| = ax + 3$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. при $a \in (-\infty; -2]$ — один корень;
2. при $a \in (-2; -1)$ — два корня;
3. при $a = -1$ — один корень;
4. при $a \in \left(-1\frac{1}{3}\right)$ — корней нет;
5. при $a = \frac{1}{3}$ — один корень;
6. при $a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$ — два корня;
7. при $a \in [2; +\infty)$ — один корень.

4. Сколько корней имеет уравнение $2|x+1|+|x-3| = a|x|+3$ в зависимости от положительного значения параметра a?

Обозначим $f(x) = 2|x+1| + |x-3|$, $\quad g(x) = a|x| + 3$.

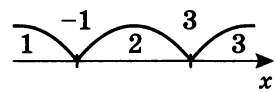
а) Построим график $y = f(x)$, т. е. $y = 2|x+1|+|x-3|$. Раскрывая в известном порядке и последовательности модули выражений $|x+1|$ и $|x-3|$, получим:

1. $\begin{cases} x < -1 \\ y = -2x - 2 + 3 - x \end{cases}$; $\begin{cases} x < 1 \\ y = -3x + 1 \text{ — } l_1 \end{cases}$.

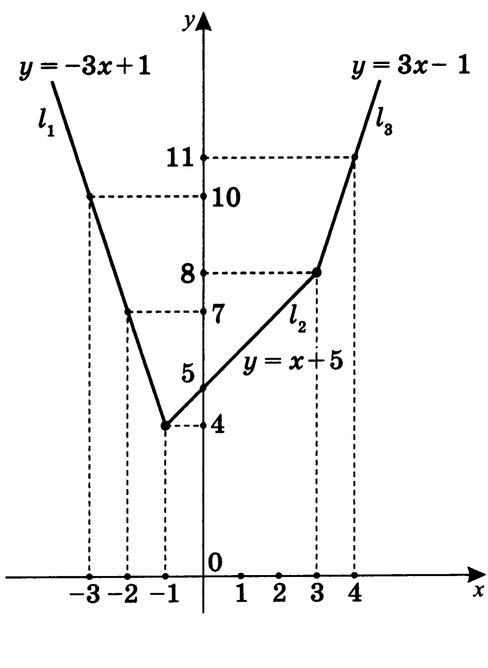
2. $\begin{cases} -1 \leqslant x < 3 \\ y = 2x + 2 + 3 - x \end{cases}$; $\begin{cases} -1 \leqslant x < 3 \\ y = x + 5 \text{ — } l_2 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y = 2x + 2 + x - 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y = 3x - 1 \text{ — } l_3 \end{cases}$.

Рисунок, иллюстрирующий возможные случаи:



После сборки график $y = f(x)$ выглядит так:



б) Так как график $y = |x|$ симметричен относительно оси ординат, то и график $y = g(x)$ $(y = a|x| + 3)$ также симметричен относительно оси ординат.

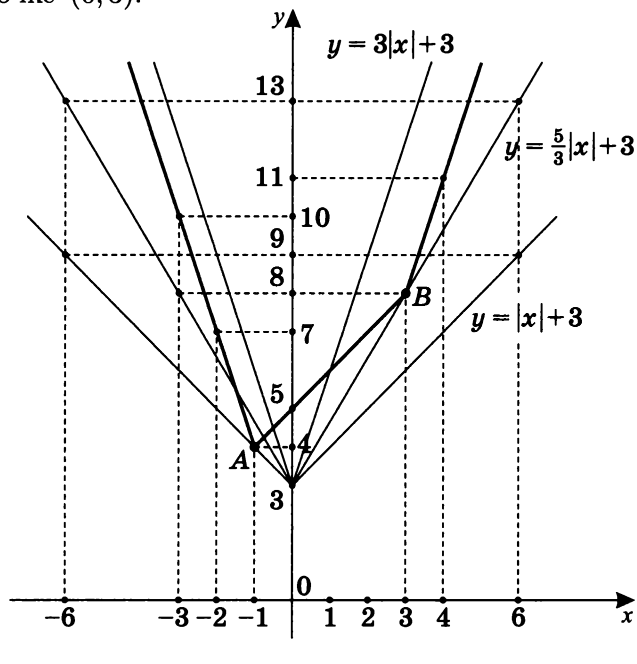
Геометрически график $y = |x|$ есть угол с вершиной в точке $(0; 0)$, образованный биссектрисами I и II координатных углов (в верхней полуплоскости). Очевидно, он равен $90°$.

График $y = a|x| + 3$:

при $a > 1$ также есть угол, но меньший $90°$, с вершиной в точке $(0; 3)$;

при $0 < a < 1$ — угол, больший $90°$, с вершиной в точке $(0; 3)$.

1.



Если $A(-1; 4) \in \Gamma(y = g(x))$, то

$4 = a \cdot 1 + 3$; $\quad a = 1$. Значит $y = |x| + 3$.

Если $B(3; 8) \in \Gamma(y = g(x))$, то

$8 = a \cdot 3 + 3$; $\quad a = \frac{5}{3}$. Значит $y = \frac{5}{3}|x| + 3$.

Очевидно, что $B(3; 8) \notin \Gamma(y = |x| + 3)$.

Вывод: из графиков $y = g(x)$ и $y = f(x)$ следует, что:

при $a = 1$ есть только одна точка $A(-1; 4)$ — общая для $y = |x| + 3$ и $y = 2|x+1| + |x-3|$;

при $a = \dfrac{5}{3}$ у графиков $y = 2|x+1| + |x-3|$ и $y = \dfrac{5}{3}|x| + 3$ есть три точки;

при $a \in \left(1; \dfrac{5}{3}\right)$ есть две общие точки;

при $a \in (0; 1)$ общих точек у графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ нет.

2. Если $a = 3$, то $y = 3|x| + 3$, и в силу симметрии относительно оси ординат правая ветвь графика параллельна l_3, и левая ветвь графика параллельна l_1.

   Тогда графики $y = 3|x|+3$ и $y = 2|x+1|+|x-3|$ имеют две общие точки.

   При $a \in \left(\dfrac{5}{3}; 3\right)$ графики $f(x)$ и $g(x)$ имеют четыре общие точки;

   при $a \in [3; \infty)$ существует две общие точки.

Ответ: уравнение $2|x+1|+|x-3| = a|x|+3$ в зависимости от положительного значения параметра a:

1. при $a \in (0; 1)$ — корней нет;
2. при $a = 1$ — один корень;
3. при $a \in \left(1; \dfrac{5}{3}\right)$ — два корня;
4. при $a = \dfrac{5}{3}$ — три корня;
5. при $a \in \left(\dfrac{5}{3}; 3\right)$ — четыре корня;
6. при $a \in [3; +\infty)$ — два корня.

5. Сколько решений имеет система уравнений
$\begin{cases} 2y = (1 - x) \cdot |y| \\ y = |x| + a \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a?

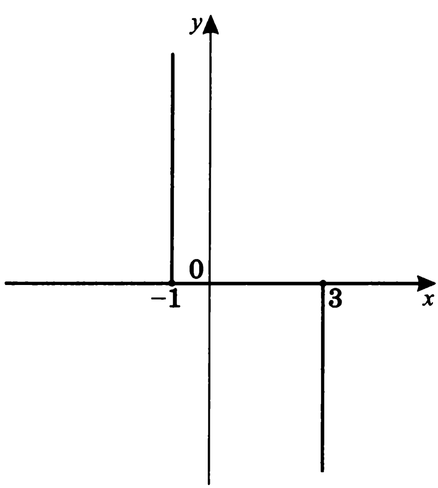
а) Построим график уравнения $2y = (x - 1)|y|$.

1. Если $y = 0$, то $2 \cdot 0 = (x - 1) \cdot 0$ — верное равенство при любых x, т. е. ось абсцисс есть график уравнения $y = 0$.

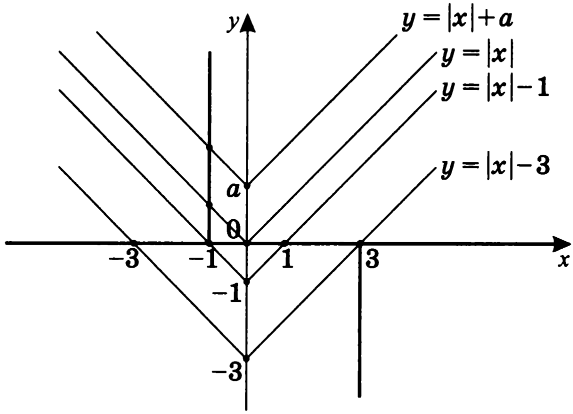
2. Если $y > 0$, то $|y| = y$, тогда
$y(2 + x - 1) = 0$; $x = -1$ —
уравнение луча, параллельного оси ординат в верхней полуплоскости.

3. Если $y < 0$, то $|y| = -y$, тогда
$y(2 - x + 1) = 0$; $x = 3$ —
уравнение луча, параллельного оси ординат в нижней полуплоскости.

После «сборки» график уравнения $2y = (1 - x)|y|$ выглядит так:



б) График $y = |x| + a$ симметричен относительно оси ординат и скользит вдоль оси ординат. Построим оба графика в одной системе координат на одном чертеже:



в) 1. При $a > 0$ существует единственная общая точка.
2. При $a = 0$ существуют две общие точки.
3. При $a = -1$ существуют две общие точки.
4. При $a = -3$ существуют две общие точки.

г) Исходя из графических представлений для графиков системы:
1. при $a \in (0; +\infty)$ существует одна общая точка;
2. при $a \in (-1; 0)$ существуют три общие точки;
3. при $a \in [-3; -1]$ существуют две общие точки;
4. при $a \in (-\infty; -3)$ существуют три общие точки.

Ответ: система уравнений $\begin{cases} 2y = (1-x)\cdot|y| \\ y = |x| + a \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. при $a \in (-\infty; -3)$ — три решения;
2. при $a \in [-3; -1]$ — два решения;
3. при $a \in (-1; 0)$ — три решения;
4. при $a = 0$ — два решения;
5. при $a \in (0; +\infty)$ — одно решение.

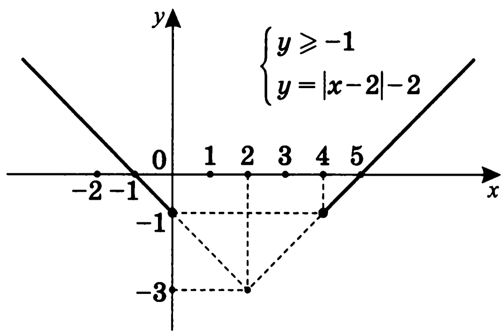
6. Сколько решений имеет система $\begin{cases} |x-2|-|y+1|=2 \\ 2|x-a|=3+y \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a?

а) Построим график уравнения $|x-2|-|y+1|=2$, т. е. $|y+1|=|x-2|-2$.

Так как $|y+1| = \begin{cases} y+1, & y \geqslant -1 \\ -y-1, & y<-1 \end{cases}$, то:

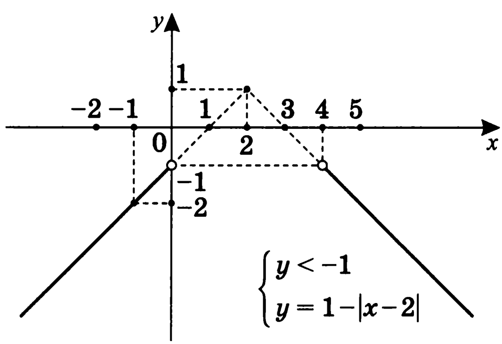
1. $\begin{cases} y \geqslant -1 \ (|y+1|=y+1) \\ y+1=|x-2|-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y \geqslant -1 \\ y=|x-2|-3 \end{cases}$.

График такого уравнения

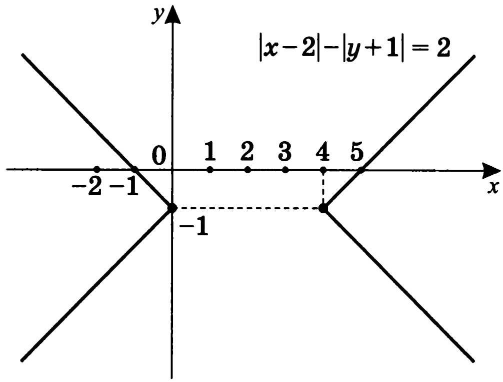


2. $\begin{cases} y<-1 \ (|y+1|=-y-1) \\ -y-1=|x-2|-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y<-1 \\ y=1-|x-2| \end{cases}$.

График такого уравнения



После сборки график $|x-2|-|y+1|=2$ будет таким:

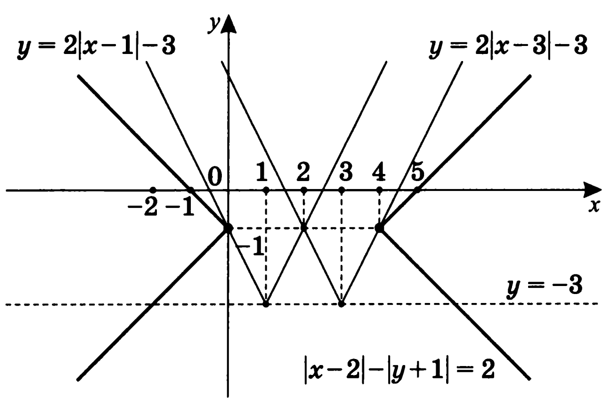


б) Проанализируем и построим график уравнения

$2|x-a|=y+3; \quad y=2|x-a|-3.$

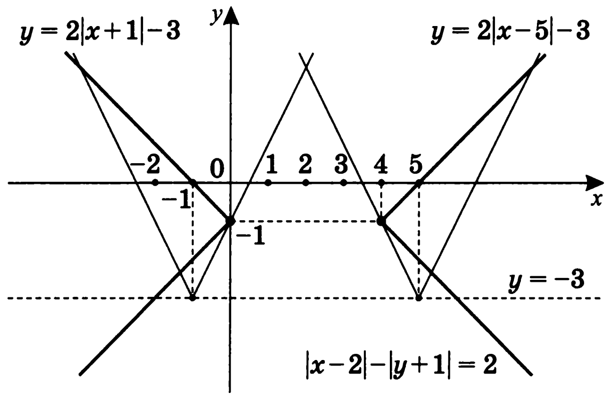
По сути график его есть график угла $y = 2|x|$, опущенный на 3 вниз и скользящий вдоль прямой $y=-3$ вправо, если $a>0$, и влево, если $a<0$.

1. При $a=1 \quad y=2|x-1|-3;$
   при $a=3 \quad y=2|x-3|-3.$



Графически видно, что при данных значениях параметра a у графиков первого и второго уравнения системы есть только одна общая точка.

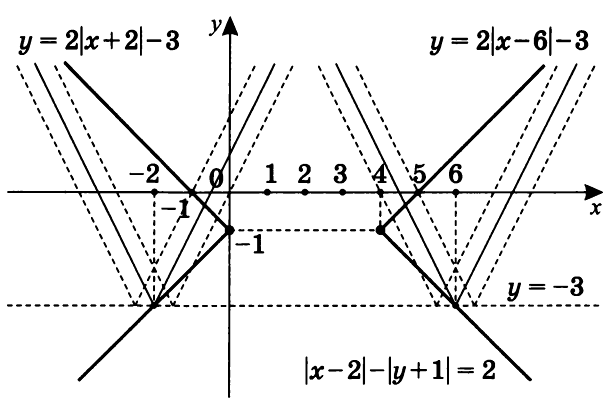
2. При $a = -1 \quad y = 2|x+1| - 3$;
   при $a = 5 \quad y = 2|x-5| - 3$.



Графически видно, что при данных значениях параметра a у графиков первого и второго уравнения системы есть три общие точки.

3. Очевидно, что при $a \in (-1; 1)$ и $a \in (3; 5)$ существуют две общие точки у графиков первого и второго уравнений системы.

4. При $a = -2$ и $a = 6$ существуют три общие точки у графиков уравнений системы.



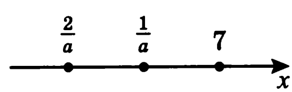
5. При $a \in (-2; -1)$ и $a \in (5; 6)$ существуют четыре общие точки у графиков уравнений системы.
6. При $a \in (-\infty; -2)$ и $a \in (6; +\infty)$ существуют две общие точки у уравнений системы.

Ответ: система уравнений $\begin{cases} |x-2| - |y+1| = 2 \\ 2|x-a| = 3+y \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. при $a \in (-\infty; -2)$ — два решения;
2. при $a = -2$ — три решения;
3. при $a \in (-2; -1)$ — четыре решения;
4. при $a = -1$ — три решения;
5. при $a \in (-1; 1)$ — два решения;
6. при $a = 1$ — одно решение;
7. при $a \in (1; 3)$ — решений нет;
8. при $a = 3$ — одно решение;
9. при $a \in (3; 5)$ — два решения;
10. при $a = 5$ — три решения;
11. при $a \in (5; 6)$ — четыре решения;
12. при $a = 6$ — три решения;
13. при $a \in (6; +\infty)$ — одно решение.

7. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция $f(x) = -7 + 3x - 3|ax-1| + |ax-2| + |x-7|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

Положим $a < 0$. Тогда корни модулей в порядке возрастания таковы:



а) Пусть $x < \frac{2}{a}$. В этом случае

$$ax - 2 \geqslant 0; \quad ax \geqslant 2 \text{ при } \begin{cases} a < 0 \\ x \leqslant \frac{2}{a} \end{cases}, \text{ тогда}$$

$|ax-2| = ax-2$; $|ax-1| = ax-1$; $|x-7| = 7-x$.

Значит, $f(x) = -7 + 3x - 3ax + 3 + ax - 2 + 7 - x$; $f(x) = (2-2a)x + 1$.

б) Пусть $\frac{2}{a} \leqslant x < \frac{1}{a}$. В этом случае
$|ax-2| = 2-ax$; $|ax-1| = ax-1$; $|x-7| = 7-x$.
Значит, $f(x) = -7+3x-3ax+3+2-ax+7-x$;
$f(x) = (-4a+2)x+5$.

в) Пусть $\frac{1}{a} \leqslant x < 7$. В этом случае
$|ax-2| = 2-ax$; $|ax-1| = 1-ax$; $|x-7| = 7-x$.
Значит, $f(x) = -7+3x+3ax-3+2-ax+7-x$;
$f(x) = (2a+2)x-1$.

г) Пусть $x \geqslant 7$. В этом случае
$|ax-2| = 2-ax$; $|ax-1| = 1-ax$; $|x-7| = x-7$.
Значит, $f(x) = -7+3x+3ax-3+2-ax+x-7$;
$f(x) = (2a+4)x-17$.

Для того чтобы исходная функция являлась неубывающей на всей числовой прямой, необходимо и достаточно, чтобы на каждом промежутке все возможные угловые коэффициенты были неотрицательны, и функция была непрерывной. Значит

$$\begin{cases} 2-2x \geqslant 0 \\ -4a+2 \geqslant 0 \\ 2a+2 \geqslant 0 \\ 2a+4 \geqslant 0 \\ a < 0 \end{cases}; \quad -1 \leqslant a < 0.$$

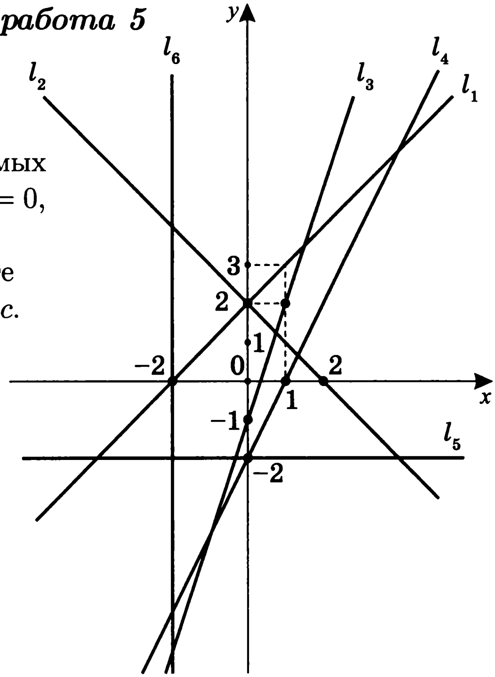
Так как необходимо найти наименьшее значение a, то случай $a \geqslant 0$ рассматривать нет смысла.

Ответ: $f(x) = -7+3x-3|ax-1|+|ax-2|+|x-7|$ является неубывающей функцией на всей числовой прямой при $a=-1$, причем значение $a=-1$ является наименьшим, при котором это возможно.

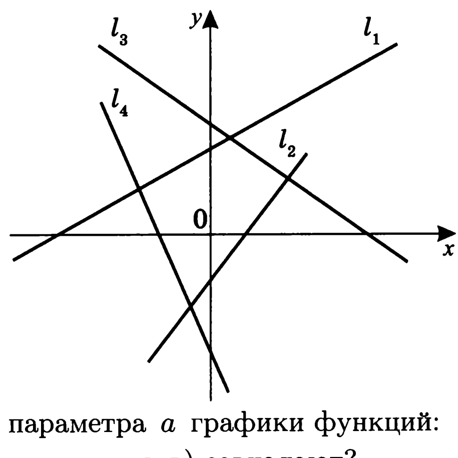
Самостоятельная работа 5

Вариант I

1. Напишите уравнения графиков прямых вида $ny + mx + c = 0$, обозначенных на чертеже, и укажите значения n, m и c.



2. Укажите знаки параметров k и b для прямых вида $y = kx + b$, обозначенных на чертеже.

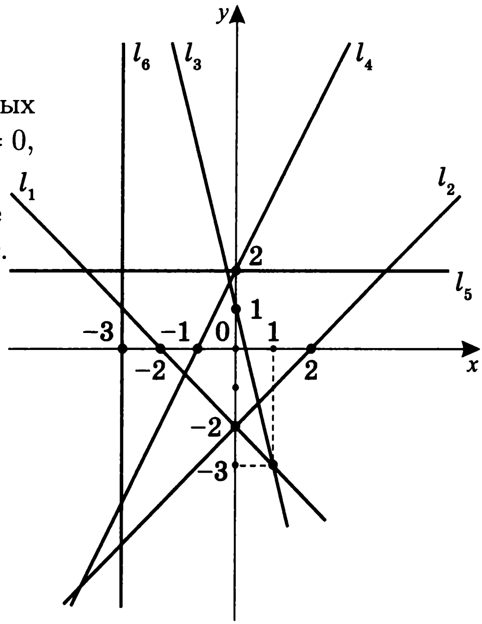


3. При каких значениях параметра a графики функций: а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают?

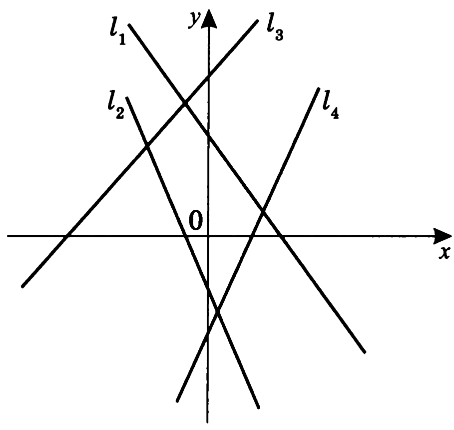
1. $y = 2ax + 3$ и $y = 5x - 2$;
2. $y = (2a + 1)x$ и $y = (4a - 3)x + 2a$;
3. $y = (3a + 1)x + 4a$ и $y = (2 - a)x + 1$;
4. $y = (2a - 3)x$ и $y = (5 - a^2)x + a - 2$.

Вариант II

1. Напишите уравнения графиков прямых вида $ny + mx + c = 0$, обозначенных на чертеже, и укажите значения n, m и c.



2. Укажите знаки параметров k и b для прямых вида $y = kx + b$, обозначенных на чертеже.



3. При каких значениях параметра a графики функций: а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают?

1. $y = 4ax - 1$ и $y = -3x + 2$;
2. $y = (3a + 2)x$ и $y = (a - 3)x - a$;
3. $y = (a - 2)x + 1$ и $y = (2 - 3a)x + a$;
4. $y = (2a^2 - 1)x + 2a$ и $y = (3a + 4)x + 5$.

Самостоятельная работа 6

Вариант I

1. Определите графически, сколько корней имеет уравнение $a = \frac{x^4-8x^2-9}{(x^2+1)|x+3|} - \frac{|x-1|}{x-1}$ в зависимости от значения параметра a.

2. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

а) $|x+1| - |x-4| = a+2$;

б) $|x+1| - |x-4| = ax-3$;

в) $|x+1| - |x-4| = |x+2| + a$?

***3.** Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция $f(x) = 9+7x-3|ax+2|+|ax+5|+|x+1|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

Вариант II

1. Определите графически, сколько корней имеет уравнение $a = \frac{x^4-3x^2-4}{|x-2|(x^2+1)} - \frac{|x+1|}{x+1}$ в зависимости от значения параметра a.

2. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

а) $|x-1| - |x+4| = -x+a$;

б) $|x-1| - |x+4| = ax-3$;

в) $|x-1| - |x+4| = |x-2| - a$?

***3.** Найдите наибольшее значение параметра a, при котором функция $f(x) = 3+3x-3|ax+a-2|+|4x+a-6|+|x+4|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

Самостоятельная работа 7

Постройте графики уравнений на координатной плоскости, т. е. изобразите множество всех точек $(x; y)$, для которых выполняется равенство:

1. $y = x|y|$;
2. $|y - 1| = x$;
3. $|x + y - 2| = 1$;
4. $(1 + x)|y| = x^2 - 1$;
5. $|x + 2y| = |4x - y|$;
6. $|x - 1| + |y - 2| = 4$;
7. $|x + 1| + |x - 3| = 5$;
8. $|y - 1| + |y + 2| = 4$;
9. $|x + 2| - |y - 3| = 1$;
10. $(2|x| - y \cdot x)\,(y + 3 + x|y + 3|) = 0$.

Самостоятельная работа 8

Вариант I

1. Сколько корней имеет уравнение $ax = |x-2|+1$ в зависимости от значения параметра a?

2. При каких значениях параметра a график функции $y=(a-2)(a+3)x-a-3$:

   а) параллелен оси абсцисс;

   б) совпадает с осью абсцисс;

   в) параллелен прямой $y=-4x+1$;

   г) параллелен прямой $y=6x-2$;

   д) перпендикулярен прямой $y=\frac{1}{6}x+3$?

3. При каких целых значениях параметра a график уравнения $y+ax=7+3x$:

   а) параллелен оси абсцисс;

   б) пересекает координатные оси в точках с целочисленными координатами?

   Дополнительное задание:

   в) Какими свойствами обладают найденные в пункте б) прямые?

   г) Чем по сути является исходное уравнение?

Вариант II

1. Сколько корней имеет уравнение $ax = |x + 2| + a + 1$ в зависимости от значения параметра a?

2. При каких значениях параметра a график функции $y = (a + 2)(a - 3)x + a + 2$:

   а) параллелен оси абсцисс;

   б) совпадает с осью абсцисс;

   в) параллелен прямой $y = 6x + 3$;

   г) параллелен прямой $y = -4x - 2$;

   д) перпендикулярен прямой $y = \frac{1}{6}x - 3$?

3. При каких целых значениях параметра a график уравнения $y + ax = 2x - 5$:

   а) параллелен оси абсцисс;

   б) пересекает координатные оси в точках с целочисленными координатами?

Дополнительное задание:

   в) Какими свойствами обладают найденные в пункте б) прямые?

   г) Чем по сути является исходное уравнение?

3

Ответы

Ответы на самостоятельную работу 1

1. Так как все прямые проходят через начало координат, то для всех прямых $b = 0$.

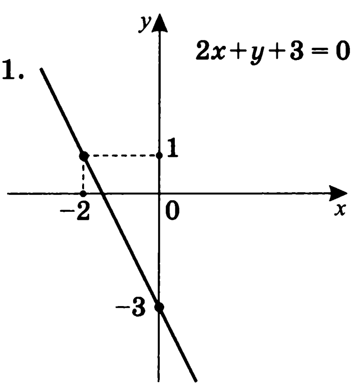
l_1: $y = 4x$; l_2: $y = 1{,}5x$; l_3: $y = -1{,}5x$; l_4: $y = -3x$.

2. l_1: $y = 2x$; l_2: $y = \frac{1}{3}x$; l_3: $y = -\frac{1}{3}x$; l_4: $y = -\frac{2}{3}x$.

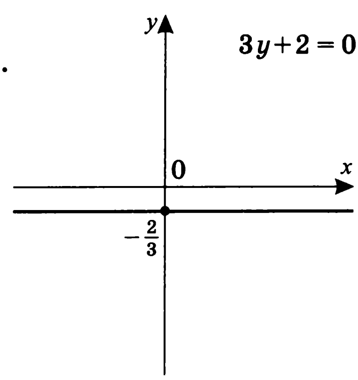
Ответы на самостоятельную работу 2

Вариант I

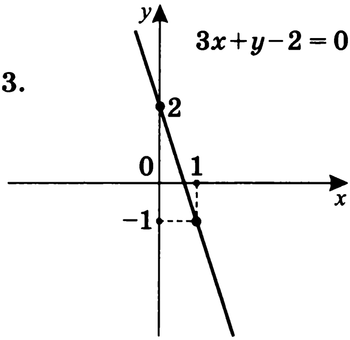
1.



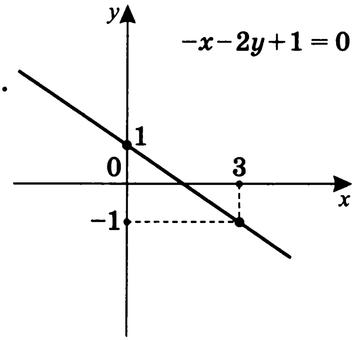
2.



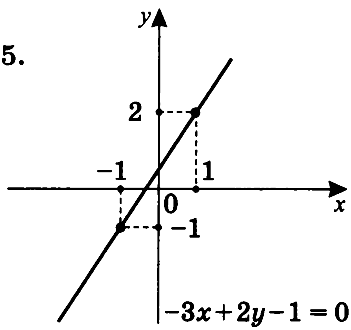
3.


y
3x+y−2=0
2
0
1
x
−1

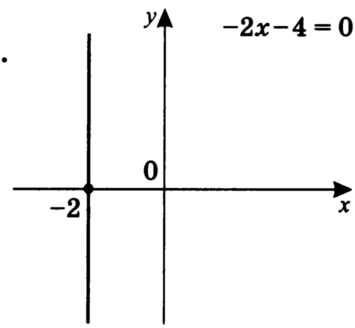
4.


y
−x−2y+1=0
1
0
3
x
−1

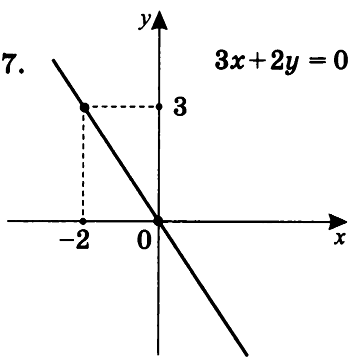
5.


y
2
−1
1
0
x
−1
−3x+2y−1=0

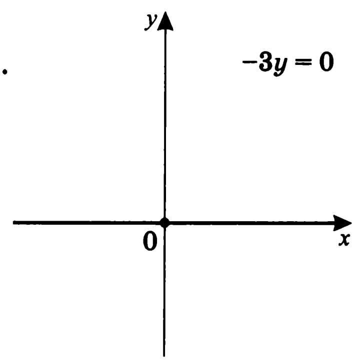
6.


y
−2x−4=0
0
−2
x

7.

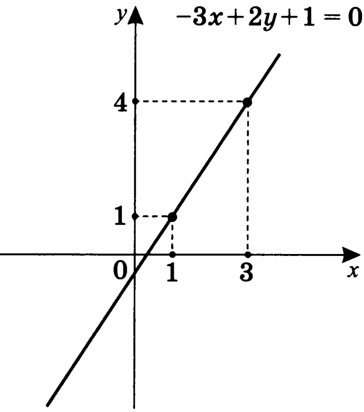

y
3x+2y=0
3
−2
0
x

8.

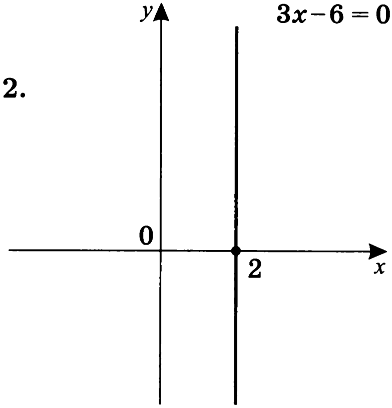

y
−3y=0
0
x

Вариант II

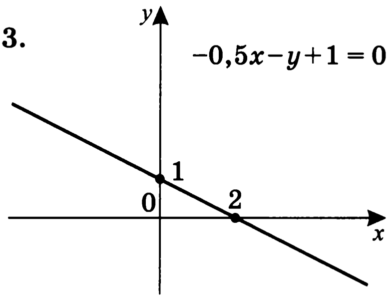
1.



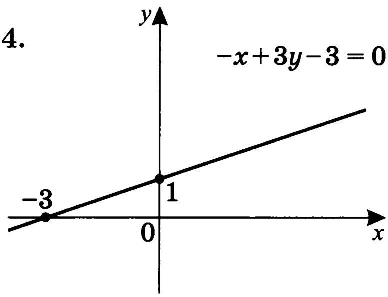
2.



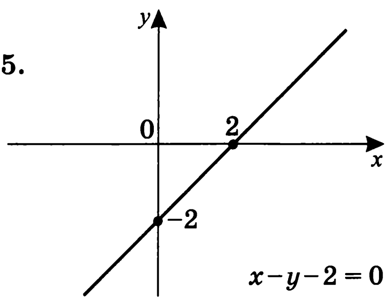
3.



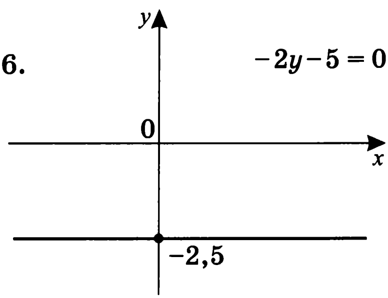
4.



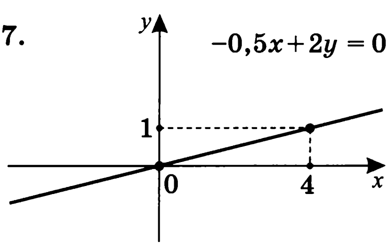
5.



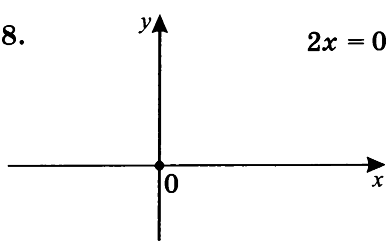
6.



7.



8.



Ответы на самостоятельную работу 3

Вариант I

1. $y = \frac{4}{3}x$. **2.** $y = -\frac{2}{3}x$. **3.** $y = 1$. **4.** $y = -\frac{1}{2}x + 3$. **5.** $y = \frac{1}{3}x + 2$.
6. $x = 2$. **7.** $y = -\frac{1}{3}x - 1$. **8.** $y = -x + 2$. **9.** $y = 2x + 3$.
10. $y = -\frac{1}{2}x + 3$. **11.** $y = -x - 2$. **12.** $y = \frac{1}{2}x - 3$. **13.** $x = -3$.
14. $y = -1$. **15.** $y = 1{,}5x + 3$. **16.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Вариант II

1. $y = \frac{2}{3}x$. **2.** $y = -2x$. **3.** $y = 2$. **4.** $y = -x + 1$. **5.** $y = x$.
6. $y = -\frac{1}{3}x + 1$. **7.** $y = \frac{1}{2}x + 1$. **8.** $x = -2$. **9.** $y = \frac{2}{3}x$.
10. $y = 2x + 3$. **11.** $y = -1$. **12.** $x = 3$. **13.** $y = -2x + 2$.
14. $y = 3x + 4$. **15.** $y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$. **16.** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Ответы на самостоятельную работу 4

I вариант

1. $S_ф = 7$. **2.** $D(-3; 2)$. **3.** $M(0; -0{,}5)$.
4. $A_1(1; -1)$, $B_1(3; 3)$, $C_1(-1; 2)$, $D_1(-3; -2)$.
5. $A_2(-1; 1)$, $B_2(-3; -3)$, $C_2(1; -2)$, $D_2(-3; 2)$.
6. $A_3(1; 1)$, $B_3(-3; 3)$, $C_3(-2; -1)$, $D_3(2; -3)$.
7. $A_4(-1; -1)$, $B_4(3; -3)$, $C_4(2; 1)$, $D_4(-2; 3)$.
8. $A_5(-1; -1)$, $B_5(-3; 3)$, $C_5(1; 2)$, $D_5(3; -2)$.
9. $S_4 = 7\frac{7}{18}$; $S_5 = 8\frac{3}{4}$; $S_6 = 11\frac{13}{30}$; $S_7 = 9\frac{1}{3}$; $S_8 = 8\frac{4}{7}$.
10. $A_6(5; 7)$; $B_6(7; 3)$; $C_6(3; 4)$; $D_6(1; 8)$.

II вариант

1. $S_ф = 10$. **2.** $D(-5; 1)$. **3.** $M(-1; -0)$.
4. $A_1(1; -2)$, $B_1(3; 1)$, $C_1(-3; 2)$, $D_1(-5; -1)$.
5. $A_2(-1; 2)$, $B_2(-3; -1)$, $C_2(3; -2)$, $D_2(5; 1)$.
6. $A_3(2; 1)$, $B_3(-1; 3)$, $C_3(-2; -3)$, $D_3(1; -2)$.
7. $A_4(-2; -1)$, $B_4(1; -3)$, $C_4(2; 3)$, $D_4(-1; 5)$.
8. $A_5(-1; -2)$, $B_5(-3; 1)$, $C_5(3; 2)$, $D_5(5; -1)$.
9. $S_4 = 16\frac{2}{3}$; $S_5 = 12\frac{11}{12}$; $S_6 = 12\frac{4}{15}$; $S_7 = 10\frac{10}{21}$; $S_8 = 13\frac{19}{20}$.
10. $A_6(5; 8)$; $B_6(7; 5)$; $C_6(1; 4)$; $D_6(-1; 7)$.

Ответы на самостоятельную работу 5

Вариант I

1. l_1: $y - x - 2 = 0$; $n = 1$, $m = -1$, $c = -2$.
l_2: $y + x - 2 = 0$; $n = 1$, $m = 1$, $c = -2$.
l_3: $y - 3x + 1 = 0$; $n = 1$, $m = -3$, $c = 1$.
l_4: $y - 2x + 2 = 0$; $n = 1$, $m = -2$, $c = 2$.
l_5: $y + 2 = 0$; $n = 1$, $m = 0$, $c = 2$.
l_6: $x + 2 = 0$; $n = 0$, $m = 1$, $c = 2$.

2. l_1: $k > 0$, $b > 0$. l_2: $k > 0$, $b < 0$.
l_3: $k < 0$, $b > 0$. l_4: $k < 0$, $b < 0$.

3. 1. а) $a \neq 2{,}5$; б) $a = 2{,}5$; в) таких a нет.
2. а) $a \neq 2$; б) $a = 2$; в) таких a нет.
3. а) $a \neq \frac{1}{4}$; б) $a = \frac{1}{4}$; в) $a = \frac{1}{4}$.
4. а) $a \neq -4$, $a \neq 2$; б) $a = -4$, $a = 2$; в) $a = 2$.

Вариант II

1. l_1: $y + x + 2 = 0$; $n = 1$, $m = 1$, $c = 2$.
l_2: $y - x + 2 = 0$; $n = 1$, $m = -1$, $c = 2$.
l_3: $y + 4x - 1 = 0$; $n = 1$, $m = 4$, $c = -1$.
l_4: $y - 2x - 2 = 0$; $n = 1$, $m = -2$, $c = -2$.
l_5: $y - 2 = 0$; $n = 1$, $m = 0$, $c = -2$.
l_6: $x + 3 = 0$; $n = 0$, $m = 1$, $c = 3$.

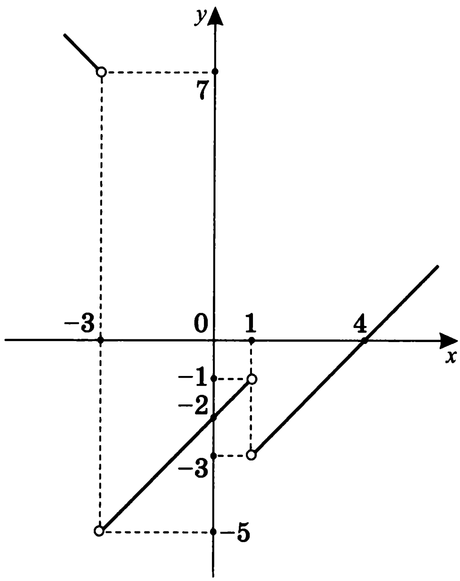
2. l_1: $k < 0$, $b > 0$. l_2: $k < 0$, $b < 0$.
l_3: $k > 0$, $b > 0$. l_4: $k > 0$, $b < 0$.

3. 1. а) $a \neq -0{,}75$; б) $a = -0{,}75$; в) таких a нет.
2. а) $a \neq -2{,}5$; б) $a = -2{,}5$; в) таких a нет.
3. а) $a \neq 1$; б) $a = 1$; в) $a = 1$.
4. а) $a \neq -1$, $a \neq 2{,}5$; б) $a = -1$, $a = 2{,}5$; в) $a = 2{,}5$.

Ответы на самостоятельную работу 6

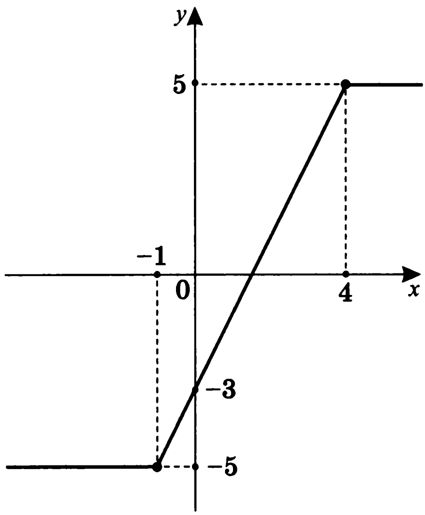
Вариант I

1. График функции $y = \frac{x^4-8x^2-9}{(x^2+1)|x+3|} - \frac{|x-1|}{x-1}$



1. При $a \in (-\infty; -5]$ — корней нет;
2. при $a \in (-5; -3]$ — один корень;
3. при $a \in (-3; -1)$ — два корня;
4. при $a \in [-1; 7)$ — один корень;
5. при $a \in (7; +\infty)$ — два корня.

2. График $y = |x+1| - |x-4|$



а) 1. При $a \in (1; +\infty)$ — один корень;
2. при $a = 1$ — два корня;
3. при $a \in (-4; 1)$ — три корня;
4. при $a = -4$ — два корня;
5. при $a \in (-\infty; -4)$ — один корень.

б) 1. При $a > 2$ — один корень;
2. при $a = 2$ — бесконечное число корней на $[-1; 4]$;
3. при $a \in (0; 2)$ — три корня;
4. при $a \in (-\infty; 0)$ — один корень.

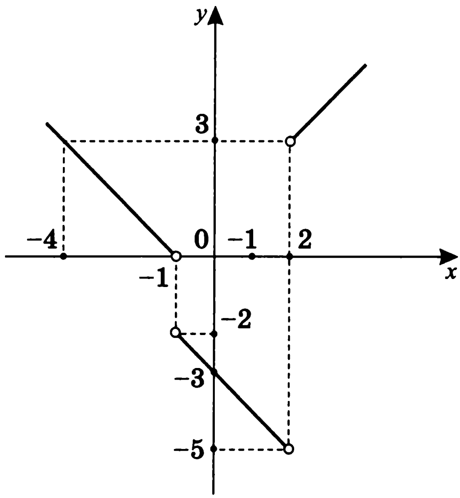
в) 1. При $a > -1$ — корней нет;
2. при $a = -1$ — один корень;
3. при $a \in (-5; -1)$ — два корня;
4. при $a = -5$ — три корня;
5. при $a \in (-6; -5)$ — четыре корня;
6. при $a = -6$ — три корня;
7. при $a \in (-\infty; -6)$ — два корня.

3. $a = -2$.

Вариант II

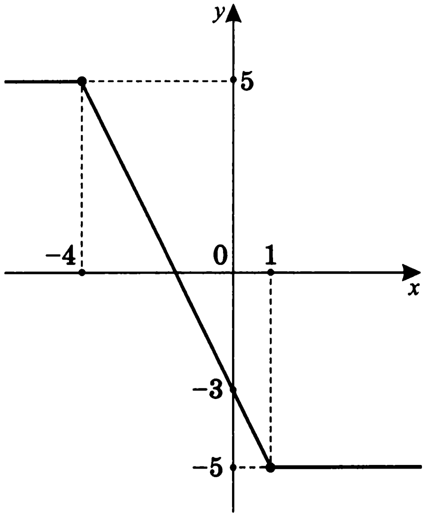
1. График $y = \frac{x^4-3x^2-4}{|x-2|(x^2+1)} - \frac{|x+1|}{x+1}$,

т. е. $y = \frac{(x-2)(x+2)}{|x-2|} - \frac{|x+1|}{x+1}$



1. При $a \in (-\infty; -5]$ — корней нет;
2. при $a \in (-5; -2)$ — один корень;
3. при $a \in [-2; 0]$ — корней нет;
4. при $a \in [0; 3]$ — один корень;
5. при $a \in [3; +\infty)$ — два корня.

2. Уравнение $y = |x-1| - |x+4|$



а) 1. При $a \in (-\infty; -4)$ — один корень;
2. при $a = -4$ — два корня;
3. при $a \in (-4; 1)$ — три корня;
4. при $a = 1$ — два корня;
5. при $a \in (1; +\infty)$ — один корень.

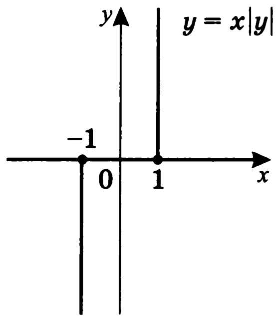
б) 1. При $a \in (-\infty; -2)$ — один корень;
2. при $a = -2$ — бесконечное число корней на $[-4; 1]$;
3. при $a \in (-2; 0)$ — три корня;
4. при $a \in [0; +\infty)$ — один корень.

в) 1. При $a \in (-1; +\infty)$ — корней нет;
2. при $a = -1$ — один корень;
3. при $a \in (-5; -1)$ — два корня;
4. при $a = -5$ — три корня;
5. при $a \in (-6; -5)$ — четыре корня;
6. при $a = -6$ — три корня;
7. при $a \in (-\infty; -6)$ — два корня.

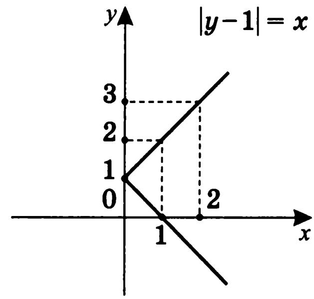
3. $a = 1$.

Ответы на самостоятельную работу 7

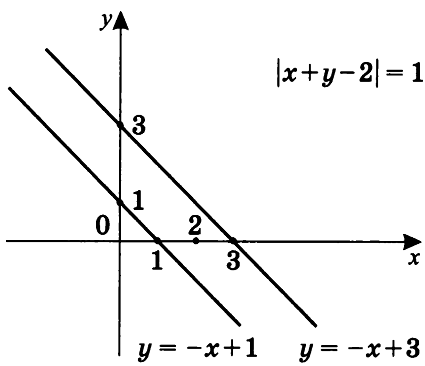
1.



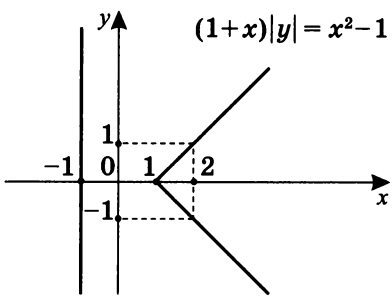
2.



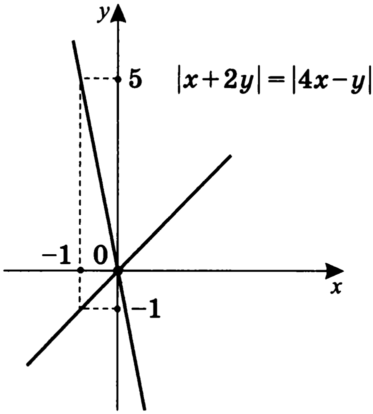
3.



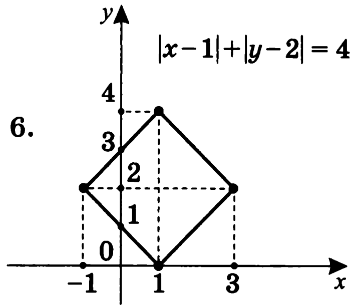
4.



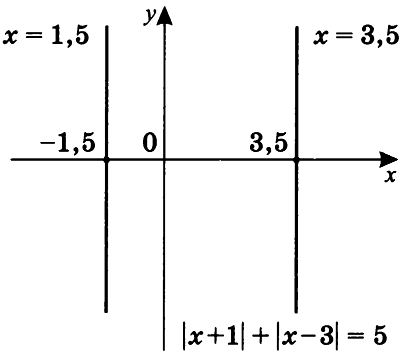
5.



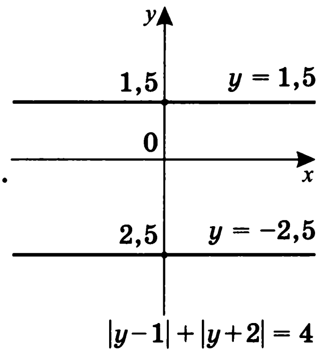
6.



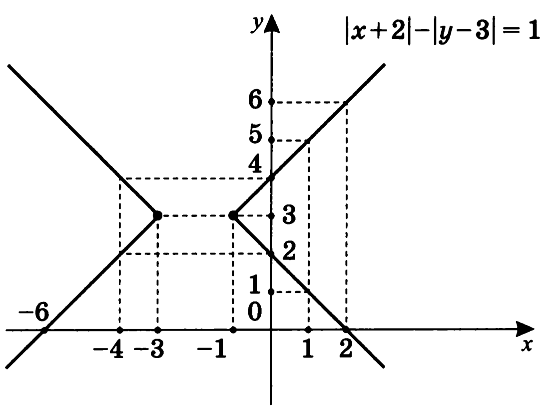
7.



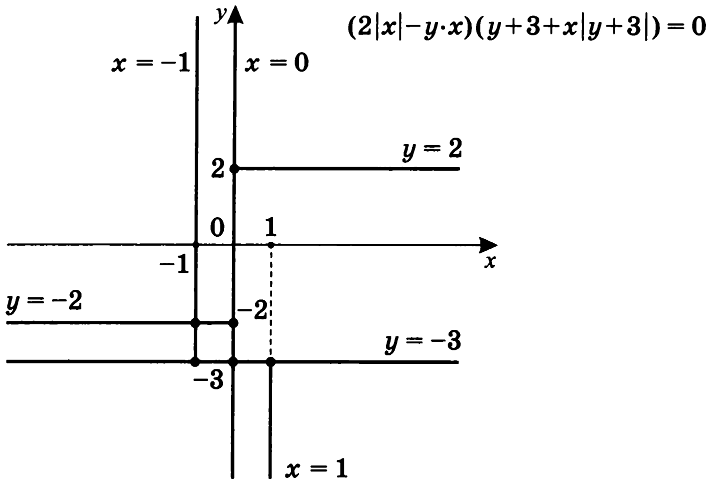
8.



9.



10.



Ответы на самостоятельную работу 8

Вариант I

1. Уравнение $ax = |x - 2| + 1$ в зависимости от значения параметра a имеет:

а) при $a \in (-\infty; -1)$ — один корень;

б) при $a \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$ — корней нет;

в) при $a = \frac{1}{2}$ — один корень;

г) при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ — два корня;

д) при $a \in [1; +\infty)$ — один корень.

2. График функции $y = (a-2)(a+3)x - a - 3$ в зависимости от значения параметра a:

а) при $\left[\begin{array}{l} a = -3 \\ a = 2 \end{array}\right.$ параллелен оси абсцисс;

б) при $a = -3$ совпадает с осью абсцисс;

в) при $\left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = 1 \end{array}\right.$ параллелен прямой $y = -4x + 1$;

г) при $\left[\begin{array}{l} a = -4 \\ a = 3 \end{array}\right.$ параллелен прямой $y = 6x - 2$;

д) при $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \end{array}\right.$ перпендикулярен прямой $y = \frac{1}{6}x + 3$.

3. График уравнения $y + ax = 7 + 3x$ в зависимости от целых значений параметра a:

а) при $a = 3$ имеет вид $y = 7$ — параллелен оси абсцисс;

б) точки пересечения с координатными осями имеют целочисленные координаты в следующих случаях:
при $a = 2$ график имеет вид $y = x + 7$:
$A\,(0; 7)$, $B_1\,(-7; 0)$;
при $a = 4$ график имеет вид $y = -x + 7$:
$A\,(0; 7)$, $B_2\,(7; 0)$;

при $a = 10$ график имеет вид $y = -7x - 7$:
$A(0;7)$, $B_3(1;0)$;
при $a = -4$ график имеет вид $y = 7x + 7$:
$A(0;7)$, $B_4(-1;0)$;

в) прямые $\begin{matrix} y = x + 7 \text{ и } y = -x + 7 \\ y = -7x + 7 \text{ и } y = 7x + 7 \end{matrix}$ соответственно симметричны относительно оси ординат;

г) исходное уравнение $y + ax = 7 + 3x$ по сути описывает пучок прямых с общей точкой $A(0;7)$.

Комментарий. При $y = 0$ исходное уравнение имеет вид $(a-3)x = 7$. Так как 7 — простое число, то его делители: ±1; ± 7, значит $x \in \{-7;-1;1;7\}$. Аналогично параметрическое выражение $a - 3$ может принимать только значения, равные ±1; ± 7.

Вариант II

1. Уравнение $ax = |x+2| + a + 1$ в зависимости от значения параметра a имеет:

   а) при $a \in (-\infty; 0]$ — один корень;

   б) при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ — два корня;

   в) при $a = \frac{1}{2}$ — один корень;

   г) при $a \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ — корней нет;

   д) при $a \in (2; +\infty)$ — один корень.

2. График функции $y = (a+2)(a-3)x + a + 2$ в зависимости от параметра a:

   а) при $\left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -2 \end{array}\right.$ параллелен оси абсцисс;

   б) при $a = -2$ совпадает с осью абсцисс;

   в) при $\left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -3 \end{array}\right.$ параллелен прямой $y = 6x + 3$;

г) при $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -1 \end{array}\right.$ параллелен прямой $y = -4x - 2$;

д) при $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 0 \end{array}\right.$ перпендикулярен прямой $y = \frac{1}{6}x - 3$.

3. График уравнения $y+ax = 2x-5$ в зависимости от целых значений параметра a:

а) при $a = 2$ график имеет вид $y = -5$ — параллелен оси абсцисс;

б) точки пересечения с координатными осями имеют целочисленные координаты в следующих случаях:
при $a = 7$ график имеет вид $y = -5x - 5$:
$A(0; -5)$, $B_1(-1; 0)$;
при $a = 3$ график имеет вид $y = -x - 5$:
$A(0; -5)$, $B_2(-5; 0)$;
при $a = -3$ график имеет вид $y = 5x - 5$:
$A(0; -5)$, $B_3(1; 0)$;
при $a = 1$ график имеет вид $y = x - 5$:
$A(0; -5)$, $B_4(5; 0)$.

в) прямые $\begin{array}{l} y = -5x - 5 \text{ и } y = 5x - 7 \\ y = -x - 5 \text{ и } y = x - 5 \end{array}$ соответственно симметричны относительно оси ординат;

г) исходное уравнение $y+ax = 2x-5$ по сути описывает пучок прямых с общей точкой $A(0; -5)$.

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович

ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ
ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Компьютерная верстка *С.С. Афонин*
Художник *Е.В. Дольник*
Корректор *Е.Г. Никитина*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
Тел.: (812) 943-8076; E-mail: spb@petroglyph.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 292-3660, 292-3661
В Москве (филиал): (499) 488-3005
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

Подписано к печати 11.10.2013 г. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 11 п.л. Тираж 2000 экз. Заказ №2605

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Отпечатано с оригинал-макета в ОАО «Щербинская типография».
117623, г. Москва, ЮЗАО, Типографская ул., д. 10.
Тел. (495) 726-75-98, 659-23-27, 659-25-63. E-mail: info@tipografskaya10.ru

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Построение и преобразования графиков. Параметры. (в 3-х книгах)
12. Уравнения и неравенства с параметрами.
13. Задачи с параметрами на экзаменах.
14. Введение в математический анализ.
15. Комплексные числа.
16. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
18. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-4439-0105-3
9 785443 901053

А. Х. Шахмейстер
ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ
ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ